Теорема 1. *Пусть $f(z)$ регулярна в T_α при $\alpha \in (\gamma; 1-\gamma]$. Тогда на каждом интервале $J_\beta = (\mathrm{Re}\,\omega_k(1-\beta); \beta)$, $\gamma < \beta < \alpha$, функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по с.п.ф. краевой задачи* (1)–(2).

Доказательство. Пусть μ не является собственным значением оператора L_2. Обозначим через $f_1(z)$ функцию, удовлетворяющую условиям: а) $f_1(z) = f(z)$ при $z \in T_\beta$; б) относительно точки $x = \gamma$ она n раз радиально непрерывно дифференцируема в $T_{1-\gamma}$; в) $U_i(f_1) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Будем рассуждать аналогично [4]. Распространим на такие функции резольвенту $\tilde{R}_\lambda f$. Пусть $C_n = \{\lambda : \ |\lambda| = r_n \uparrow \infty\}$. Тогда имеет место следующая формула:

$$f(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \tilde{R}_\lambda f_1(z) d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \frac{\tilde{R}_\lambda F(z)}{\lambda - \mu} d\lambda, \quad z \in T_\beta, \tag{6}$$

где функция $F(z) = f_1^{(n)}(z) - \mu f_1(z)$ будет регулярна в T_β, непрерывна в $\overline{T}_\beta$ и непрерывно продолжима в $\overline{T}_{1-\gamma}$. Тогда для $F(z)$ будет справедлива лемма 2. Следовательно, с учетом леммы 1, $\tilde{R}_\lambda F = -\frac{1}{n\rho^{n-1}\Delta(\rho)} O(\rho^\sigma e^{\rho æ}) = O(\frac{1}{\rho^{n-1}})$. Отсюда получаем, что правая часть (6) при $n \to \infty$ стремится к нулю равномерно на интервале J_β. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 17–24.
2. *Дмитриев О.Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 70–72.
3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
4. *Хромов А.П.* Оператор дифференцирования и ряды типа Дирихле // Мат. заметки. 1969. Т. 6, № 6. С. 759–766.

УДК 517.51

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПО МАТРИЦЕ ЯКОБИ, НОРМИРОВАННОЙ ОДНОРОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ

В.В. Егоров

Волгоградский государственный университет,
кафедра математических методов и информатики в экономике
E-mail: yegoroff_vv@mail.ru

Рассмотрена система дифференциальных уравнений $f'(x) = \Phi(f'(x))M(x)$ с обобщенными частными производными, где $f'(x)$ –- матрица Якоби искомого отображения, M –- заданная матричнозначная функция размерности $n\times n$ с суммируемыми элементами, Φ –- заданная функция от матриц.

Recovering of a Mapping Via Jacobi Matrix, Normalized Homogeneous Function

V.V. Egorov

Consider system of the differential equations $f'(x) = \Phi(f'(x)) \times M(x)$ with generalized partial derivatives, where $f'(x)$ is a matrix Jacobi of sought mapping, M is a given $n \times n$ matrix-value function with integrable elements, Φ is a given function of matrices.

Уточним используемые в работе понятия и определения. Пусть $\mathcal{M}_n$ — пространство матричнозначных функций, размерности $n\times n$, а $\Phi : \mathcal{M}_n \to R^1$ — заданная функция на этом пространстве. Пусть $f=(f^1,\ldots,f^n)\colon D\subset R^n \to R^n$ — отображение класса $W^1_{p,\,loc}(D)$, $p\geq 1$, а $f'(x)$ — его матрица Якоби. Введем матрицу $M_f(x)=\dfrac{f'(x)}{\Phi(f'(x))}$, которую назовем матрицей Якоби непостоянного отображения f, нормированной функцией Φ. В настоящей работе исследована система дифференциальных уравнений в обобщенных частных производных

$$f'(x) = \Phi(f'(x))M(x), \tag{1}$$

где $x\in D\subset R^n$ (D — односвязная область в R^n), $f\colon D\to R^n$ — искомое отображение, а $M\colon D \to \mathcal{M}_n$ и $\Phi\colon \mathcal{M}_n \to R^1$ — заданные функции.

Система (1) — обобщение систем, изученных в [1]–[6], что позволило на основе идей работ И.В. Журавлева [1], [2] провести исследование схожим образом, с учетом соответствующих особенностей.

Определение. Будем говорить, что *функция* $M\colon D\to\mathcal{M}_n$ *принадлежит классу* $\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$ (где $\alpha\geq1$, $\beta\geq1$, $\gamma\geq1$), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) элементы матрицы $M(x)$, т. е. функции $m_{ij}(x)$, измеримы;

2) дифференциальные 1-формы $M^i=\sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij}\,dx^j$ (i=1, ..., n) принадлежат пространству $L_\alpha(D)$ и обладают обобщенными дифференциалами dM^i класса $L_\beta(D)$;

3) функция $|M(x)|/detM(x)$ принадлежит классу $L_\gamma(D)$.

При этом принадлежности тому или иному из классов Лебега понимаются в смысле суммируемости по Лебегу, а также используются следующие обозначения евклидовых норм $|M(x)| = = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}|M^i(x)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_{ij}^2(x)\right)^{1/2}$ и $|dM(x)| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}|dM^i(x)|^2\right)^{1/2}$.

Лемма 1. *Если матрица* $M(x)$ *принадлежит классу* $\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$, *то* $detM(x)\neq0$ *почти всюду в* D.

Доказательство получается непосредственно в результате применения теоремы Чебышева (см., например, [7]), утверждающей, что если некоторая функция $g(x)$ суммируема в D по Лебегу, то $mes\{x\in D\colon |g(x)|\geq k\}\leq\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_D|g(x)|\,dx$ (здесь mes — мера Лебега).

Тогда каждой матрице $M(x)$ класса $\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$ возможно сопоставлять (пока лишь формально) дифференциальную 1-форму

$$\Lambda(M(x))=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\cdot\frac{M^i(x)}{detM(x)}\cdot *_n d(M^1(x)\wedge \overset{i}{\dot{\vee}} \wedge M^n(x)),\tag{2}$$

где «$\wedge$» — операция внешнего произведения, $*_n$ — оператор Ходжа ($*_n c(x)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n=c(x)$) и знак $\overset{i}{\vee}$ означает пропуск во внешнем произведении множителя $M^i(x)$.

Лемма 2. *Пусть* D *— односвязная область в* R^n ($n\geq2$) *и* $M(x)$ *— функция класса* $\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$, *то почти всюду в* D *справедливо*

$$|\Lambda(M(x))|\leq\frac{\sqrt{n}}{|det\;M(x)|}\cdot|M(x)|^{n-1}\cdot|d\,M(x)|\,.\tag{3}$$

А также если величины α, β, γ *такие, что* $\alpha>n(n-2)$, $\beta>n$, $\gamma>n$, $\alpha\beta\gamma\geq\alpha\beta n+\alpha\gamma n+ +\beta\gamma n(n-2)$, *то тогда дифференциальная 1-форма* $\Lambda(M(x))$ *является суммируемой по Лебегу со степенью* $\xi=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma(n-2)}$ *и при этом, в частности, выполнено* $\xi\geq n$ *и*

$$||\Lambda(M)||_{\xi,\,D}\leq\sqrt{n}||\Big|M(x)\Big|^{n-2}||_{\xi p',\,D}||\Big|dM(x)\Big|||_{\xi p'',\,D}||\frac{|M(x)|}{detM(x)}||_{\xi p''',\,D}<\infty,\tag{4}$$

где $p'>1$, $p''>1$, $p'''>1$ *— некоторые самосопряженные значения.*

Доказательство. Справедливость неравенства (3) проверяется, как и в [1]. А на основе (3) и неравенства Гельдера (со значениями $p'>1$, $p''>1$, $p'''>1$, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p''}+\frac{1}{p'''}=1$), приходим к (4) в результате выкладок

$$\|\Lambda(M(x))\|_{\xi,\,D}=\left(\int_D|\Lambda(M(x))|^\xi dx\right)^{1/\xi}\leq\sqrt{n}\left(\int_D\Big|\Big(|M(x)|^{(n-2)\xi}\Big)\Big(|dM(x)|^\xi\Big)\Big(\frac{|M(x)|}{detM(x)}\Big)\Big|dx\right)^{1/\xi}\leq$$

$$\leq\sqrt{n}\left(\int_D\Big|M(x)\Big|^{(n-2)\xi p'}dx\right)^{1/\xi p'}\left(\int_D\Big|dM(x)\Big|^{\xi p''}dx\right)^{1/\xi p''}\left(\int_D\Big|\frac{|M(x)|}{detM(x)}\Big|^{\xi p'''}dx\right)^{1/\xi p'''}.\tag{5}$$

Докажем корректность приведенных рассуждений.

Сразу укажем на условие $\xi\geq n$, требуемое в силу того что ряд последующих в работе утверждений доказывается при его наличии. Кроме того, так как по условию данной леммы $M^i\in L_\alpha(D)$, $dM^i\in L_\beta(D)$, $\dfrac{|M|}{\det M}\in L_\gamma(D)$, то согласно полученному в левой части последнего неравенства, должно быть выполнено $(n-2)\xi p'\leq\alpha$, $\xi p''\leq\beta$, $\xi p''\leq\gamma$. Тогда $1<p'\leq\dfrac{\alpha}{(n-2)\xi}$, $1<p''\leq\dfrac{\beta}{\xi}$, $1<p''\leq\dfrac{\gamma}{\xi}$. Откуда,

согласно $n{\le}\xi$, имеем $n{\le}\xi{<}\dfrac{\alpha}{n-2}$, $n{\le}\xi{<}\beta$, $n{\le}\xi{<}\gamma$, т. е. $n{\le}\xi{<}\min\left\{\dfrac{\alpha}{n-2},\,\beta,\,\gamma\right\}$, что дает $\alpha{>}n(n{-}2)$, $\beta{>}n$, $\gamma{>}n$, и говорит о непустоте промежутка $\left[n,\,\min\left\{\dfrac{\alpha}{n-2},\,\beta,\,\gamma\right\}\right)$. Кроме того, из полученных ранее двойных неравенств на величины p', p'', p''', с учетом самосопряженности этих величин, имеем $1{=}\dfrac{1}{p'}{+}\dfrac{1}{p''}{+}\dfrac{1}{p''}{\ge}\dfrac{(n-2)\xi}{\alpha}{+}\dfrac{\xi}{\beta}{+}\dfrac{\xi}{\gamma}{=}\xi{\cdot}\dfrac{\alpha\beta{+}\alpha\gamma{+}\beta\gamma(n-2)}{\alpha\beta\gamma}$, откуда $\xi{\le}\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta{+}\alpha\gamma{+}\beta\gamma(n-2)}$.

Докажем не пустоту отрезка $(2{\le})n{\le}\xi{\le}\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma(n-2)}$, что эквивалентно выполнению неравенства $\alpha\beta\gamma\ge\alpha\beta n+\alpha\gamma n+\beta\gamma n(n-2)$, а значит, — неравенства $1\ge\dfrac{n(n-2)}{\alpha}+\dfrac{n}{\beta}+\dfrac{n}{\gamma}$. Очевидно, что существуют достаточно большие α, β, γ, при которых это последнее неравенство выполнено, а значит, выполнено и неравенство $n{\le}\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma(n-2)}$ и отрезок $\left[n,\,\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma(n-2)}\right]$ не пуст для выбора из него $\xi{\in}\left[n,\,\min\{\dfrac{\alpha}{n-2},\,\beta,\,\gamma\}\right){\ne}\emptyset$.

Покажем, что всегда $\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma(n-2)}<\min\left\{\dfrac{\alpha}{n-2},\,\beta,\,\gamma\right\}$. Предположим, для определенности, что $\min\left\{\dfrac{\alpha}{n-2},\,\beta,\,\gamma\right\}=\gamma$, тогда неравенство $\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma(n-2)}<\gamma$ имеет место тогда и только тогда, когда (в силу $\gamma{>}n{\ge}2$) выполнено $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma(n-2)}<1$ или, что то же самое (в силу $\alpha\beta{+}\alpha\gamma{+}\beta\gamma(n-2){>}0$), когда $0{<}\alpha{+}\beta(n-2)$, т. е. всегда. Аналогичное получается и в остальных случаях, когда $\min\left\{\dfrac{\alpha}{n-2},\,\beta,\,\gamma\right\}{\ne}\gamma$.

Таким образом, величина ξ должна быть из отрезка $[n,\,\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma(n-2)}]{\ne}\emptyset$.

Осталось показать, что при установленных соотношениях возможно подобрать $1{<}p'{\le}\dfrac{\alpha}{(n-2)\xi}$, $1{<}p''{\le}\dfrac{\beta}{\xi}$, $1{<}p'''{\le}\dfrac{\gamma}{\xi}$ самосопряженными.

Действительно, например, выбрав из отрезка $\left[n,\,\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma(n-2)}\right]{\ne}\emptyset$ величину $\xi=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta{+}\alpha\gamma{+}\beta\gamma(n-2)}$, а величины p', p'', p''' равными соответственно $p'=\dfrac{\alpha}{(n-2)\xi}$, $p''=\dfrac{\beta}{\xi}$, $p''=\dfrac{\gamma}{\xi}$, имеем требуемое, $\dfrac{1}{p'}{+}\dfrac{1}{p''}{+}\dfrac{1}{p'''}{=}1$. Лемма доказана.

Определение. Пусть $M(x){\in}\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$. Отображение $f\colon D{\to}R^n$ класса $W^1_{p,\,loc}(D)$, $p{\ge}1$ назовем *решением системы* (1), если обобщенные производные $\frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j}$ почти всюду в D удовлетворяют равенствам $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}(x)=\Phi(f'(x)){\cdot}m_{ij}(x)$, $i,j=1,\ldots,n$.

Введем оператор $S_D\,\omega$, рассматриваемый на ограниченной области $D{\subset}R^n$, звездной относительно некоторого шара B, $\overline{B}{\subset}D$, действующий на дифференциальные 1-формы ω с коэффициентами ω_i из $L_p(D)$

$$S_D\,\omega(x)=\int_D\sum_{i=1}^{n}\omega_i(y)\frac{x^i-y^i}{|x-y|^n}k(x,y)\,dy,$$

где $k(x,y){=}\int\limits_{|x-y|}^{+\infty}\varphi\left(x+\dfrac{y-x}{|y-x|}u\right)u^{n-1}\,du$ и $\varphi{\in}C_0^\infty(B)$: $\int_B\varphi(x)\,dx{=}1$.
Подобные операторы возникают в интегральных представлениях С.Л. Соболева и используются для восстановления функций с обобщенными производными. Основываясь на результатах [8], [9], [10], [11], отметим некоторые из их свойств и связанные с ними две леммы.

1) Если $p>n$, то $S_D\,\omega$ — непрерывная ограниченная функция и для любого $x{\in}D$ выполняется неравенство

$$|S_D\,\omega(x)|\le C(p,n)\,\tau^{1-\frac{n}{p}}\,L\,||\omega||_{p,D}\,, \tag{6}$$

где $\tau=\sup\limits_{x\in\partial D,\,y\in B}|x{-}y|$, $L=\sup\limits_{x,y\in D}k(x,y)$ и $C(p,n)$ — постоянная.

2) Оператор $S_D\,\omega$ действует непрерывно из $L_p(D)$ в $L_p(D)$ $(p{\geq}1)$.

Лемма 3 [1]. *Пусть D — ограниченная область пространства R^n $(n{\geq}2)$, звездная относительно шара B, $\overline{B}\subset D$. Пусть ω — дифференциальная форма первой степени, $\omega{\in}L_p(D)$ $(p{\geq}1)$. Если $d\,\omega{=}0$, то функция $f(x){=}S_D\,\omega(x)$ принадлежит классу $W_p^1(D)$ и для $S_D\,\omega(x)$ существует обобщенный дифференциал $df{=}d(S_D\,\omega){=}\omega$.*

Лемма 4 [2]. *Пусть D — ограниченная область пространства R^n $(n{\geq}2)$, звездная относительно шара B, $\overline{B}\subset D$. Пусть $\omega(x)$— дифференциальная 1-форма класса $L_p(D)$, $p{\geq}n$. Тогда функции $\lambda(x){=}e^{S_D\,\omega(x)}$ и $1/\lambda(x)$ суммируемы на D с любой степенью $\sigma{\geq}1$.*

А также понадобится такая лемма

Лемма 5. *Пусть $M(x)$ — функция класса $\mathrm{CH}_{\alpha,\beta,\gamma}(D)$, где величины α, β, γ такие, что $\alpha > n(n-2)$, $\beta > n$, $\gamma > n$, $\alpha\beta\gamma \geq \alpha\beta n + \alpha\gamma n + \beta\gamma n(n-2)$ (и $n\geq 2$). Пусть также выполнено*

а) при $n{=}2$ форма $\Lambda(M)$ замкнута;

б) при $n{\geq}3$ форма $\Lambda(M)$ имеет обобщенный дифференциал класса $L_{\zeta,\,loc}(D)$, где $\zeta{\geq}1$ — некоторое число, и почти всюду в D

$$d\,M^i\wedge M^j + d\,M^j\wedge M^i = 0,\ i,j=1,\ldots,n. \tag{7}$$

Тогда форма $\Lambda(M)$ замкнута (при $n{\geq}2$) и почти всюду в D имеем

$$d\,M^i = M^i\wedge\Lambda(M),\ i=1,\ldots,n. \tag{8}$$

Доказательство. При $n{\geq}2$ справедливость равенств (8) проверяется так же как и при доказательстве следствия 2 [3]. И тогда осталось доказать только замкнутость формы $\Lambda(M(x))$.

В случае $n{=}2$ форма $\Lambda(M(x))$ замкнута по условию теоремы. Рассмотрим теперь случай $n{>}2$. Из равенств (8) в результате формального повторения алгебраических выкладок, приводимых при доказательстве следствия 3 [3], для случая принадлежности там элементов матрицы $M(x)$ классу $C^2(D)$, получаются соотношения:

$$d(M^1\wedge \overset{i\;j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n) = (2-n)\Lambda(M(x))\wedge(M^1\wedge \overset{i\;j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n),\ i,j=1,\ldots,n. \tag{9}$$

Однако в данном случае в отсутствие условий гладкости для корректности дополнительно следует привести обоснования существования обобщенного дифференциала $d(M^1\wedge \overset{i\;j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n)$ в формуле (9). Для этого воспользуемся следующей леммой Гольдштейна–Кузьминова–Шведова [12], являющейся обобщением леммы 4.4 [13].

Лемма [12]. *Если ω^1 и ω^2 — внешние формы в открытой области $D{\subset}R^n$ такие, что $\omega^1{\in}L_{p_1}(D)$, $\omega^2{\in}L_{p_2}(D)$, причем существуют их обобщенные дифференциалы $d\omega^1{\in}L_{q_1}(D)$, $d\omega^2{\in}L_{q_2}(D)$, где $1\leq p_1,\,p_2\leq\infty$, $1\leq q_1,\,q_2\leq\infty$ и $deg(\omega^1){+}deg(\omega^2)\leq n$. Тогда форма $\omega^1{\wedge}\,\omega^2$ принадлежит классу $L_{1/(1/p_1+1/p_2)}(D)$ и имеет обобщенный дифференциал $d(\omega^1{\wedge}\,\omega^2)$ класса $L_{1/\max\{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_2};\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_1}\}}(D)$. При этом $d(\omega^1{\wedge}\,\omega^2) = d(\omega^1){\wedge}\,\omega^2 + (-1)^{deg(\omega^1)}\omega^1{\wedge}\,d(\omega^2)$.*

Здесь данную лемму требуется применить для доказательства существования обобщенного дифференциала внешнего произведения $n{-}2$ причем 1-форм, каждая класса $L_\alpha(D)$. Обобщая эту лемму на такой случай, рассуждая по индукции, заключаем о существовании обобщенного дифференциала $d(M^1\wedge \overset{i\;j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n)$ класса $L_{\frac{\alpha\beta}{\alpha+(n-2)\beta}}(D)$, а также — о принадлежности формы $M^1\wedge \overset{i\;j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n$ классу $L_{\frac{\alpha}{n-2}}(D)$.

Заметим дополнительно, что в силу выполнения соотношений $\alpha\beta\gamma\geq\alpha\beta n{+}\alpha\gamma n{+}\beta\gamma n(n{-}2)$ имеем $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha{+}(n-2)\beta}\geq 1$ при $n{\geq}2$ и, следовательно, в частности, $d(M^1\wedge \overset{i\;j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n){\in}L_{\frac{\alpha\beta}{\alpha+(n-2)\beta}}(D){\subseteq}L_1(D)$.

Применим далее к (как уже показано) обобщенному дифференциалу $\dfrac{1}{2-n}d(M^1\wedge \overset{i\;j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n)$ класса $L_1(D)$ лемму 4.6 [13].

Лемма 4.6 [13]. *Если форма ω класса $L_{1,\,loc}(D)$ степени $r{\geq}1$ является обобщенным дифференциалом некоторой формы θ, то обобщенный дифференциал формы ω равен нулю.*

Учитывая указанную лемму и соотношения (9), получаем

$$0 = d(\frac{1}{2-n}d(M^1\wedge \overset{i\;j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n)) = d(\Lambda(M)\wedge M^1\wedge \overset{i\;j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n). \tag{10}$$

Для корректного продолжения вычисления правой части полученного равенства (10), т. е. применения к вычислению обобщенного дифференциала $d(\Lambda(M) \wedge M^1 \wedge \overset{i\ j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n)$ формулы из упомянутой выше леммы Гольдштейна–Кузьминова–Шведова [12], следует опять проверить выполнение условий этой леммы. А именно в данном случае достаточно лишь указать, что $\deg\Lambda + deg(M^1 \wedge \overset{i\ j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n) = 1 + (n-2) = n-1 \leq n$ и что следующие дифференциальные формы принадлежат требуемым пространствам Лебега: $\Lambda(M) \in L_\xi(D)$ (согласно лемме 2, и там же указано $\xi = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)}$), $(M^1 \wedge \overset{i\ j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n) \in L_{\frac{\alpha}{n-2}}(D)$ (по доказанному ранее в данной лемме), $d\Lambda(M) \in L_\zeta(D)$ (по условию данной леммы), $d(M^1 \wedge \overset{i\ j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n) \in L_{\frac{\alpha\beta}{\alpha+(n-2)\beta}}(D)$ (по доказанному ранее в данной лемме), и все величины ξ, $\dfrac{\alpha}{n-2}$, ζ, $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+(n-2)\beta}$ — больше или равны единице.

Таким образом, условия леммы Гольдштейна–Кузьминова–Шведова [12] выполнены, и для продолжения равенства (10) можно воспользоваться приведенной в этой лемме формулой, что с учетом (9) дает

$$0 = d(\Lambda(M) \wedge M^1 \wedge \overset{i\ j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n) = d\Lambda(M) \wedge M^1 \wedge \overset{i\ j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n + (n-2)\Lambda(M) \wedge (\Lambda(M) \wedge M^1 \wedge \overset{i\ j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n) =$$

$$= d\Lambda(M) \wedge M^1 \wedge \overset{i\ j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n.$$

Обозначив через β_{sl} — коэффициенты дифференциальной 2-формы $d\Lambda(M)$ относительно базиса $M^s \wedge M^l$, $1 \leq s < l \leq n$, т. е. представив форму $d\Lambda(M)$ в виде $d\Lambda(M) = \sum_{1 \leq s < l \leq n} \beta_{sl} M^s \wedge M^l$, подставим это представление в последнее полученное равенство и получим

$$0 = \beta_{ij} M^i \wedge M^j \wedge M^1 \wedge \overset{i\ j}{\overset{\vee\vee}{\cdots}} \wedge M^n = \beta_{ij}(-1)^{i+j-1} detM \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

А в силу $detM \neq 0$ имеем $\beta_{sl} = 0$, откуда $d\Lambda(M) = 0$ почти всюду в D. Лемма 5 доказана.

О существовании решений системы (1) утверждает

Теорема 1. *Пусть D — ограниченная область пространства R^n, $n \geq 2$, звездная относительно шара B, $\overline{B} \subset D$. Пусть функция $M\colon D \to \mathcal{M}_n$ удовлетворяет условиям леммы 5 и пусть функция $\Phi\colon \mathcal{M}_n \to D$ является либо простой однородной (в смысле $\Phi(\alpha M(x)) = \alpha\Phi(M(x))$ для любого $\alpha \in R^1$) и удовлетворяющей условию $\Phi(M(x)) = 1$ почти всюду в области D, либо положительно однородной (в смысле $\Phi(\alpha M(x)) = |\alpha|\Phi(M(x))$ для любого $\alpha \in R^1$), удовлетворяющей условию $|\Phi(M(x))| = 1$ почти всюду в области D и условию неизменности знака $\Phi(M(x))$. Тогда при простой однородности Φ решение системы (1) есть отображение*

$$f_0(x) = (f_0^1(x), \ldots, f_0^n(x)), \ \text{где } f_0^i(x) = S_D(e^{S_D \Lambda(M(x))} M^i(x)), \tag{11}$$

а при положительной однородности Φ — отображение

$$f_0(x) = (f_0^1(x), \ldots, f_0^n(x)), \ \text{где } f_0^i(x) = \Phi(M(x)) S_D(e^{S_D \Lambda(M(x))} M^i(x)). \tag{12}$$

При этом справедливы утверждения:

1. $d \ln \Phi(f_0'(x)) = \Lambda(M(x))$.

2. Если $\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)} = n$, то функция $\Phi(f_0'(x))$ принадлежит каждому пространству $L_\sigma(D)$, где $\sigma \geq 1$, и обладает обобщенным дифференциалом класса $L_\nu(D)$ для каждого ν, $1 \leq \nu < n$.

3. Если $\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)} > n$, то функция $\Phi(f_0'(x))$ принадлежит каждому пространству $L_\sigma(D)$, где $\sigma \geq 1$, обладает обобщенным дифференциалом класса $L_\nu(D)$, $\nu = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)}$, и почти всюду в области D при простой однородности у Φ выполняется неравенство

$$e^{-C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)} \leq \Phi(f_0'(x)) \leq e^{C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)},$$

а при положительной однородности у Φ — неравенство

$$e^{-C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)} \leq |\Phi(f_0'(x))| \leq e^{C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)}.$$

Здесь C — постоянная, зависящая от α, β, γ, n, D и M.

4. Почти всюду в D определена матрица $M_{f_0}(x)=\frac{f_0'(x)}{\Phi(f_0'(x))}$ и выполнено равенство $M_{f_0}(x)=M(x)$.

Доказательство. Введем функцию $\lambda(x)=e^{S_D\Lambda(M(x))}>0$. А также заметим, что при выполнении условий данной теоремы по лемме 2 имеем $\Lambda(M)\in L_\xi(D)$, где $\xi=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma(n-2)}\geq n$.

По лемме 4 функция $\lambda(x)$ при $\xi=n$ локально суммируема в D с любой степенью $\sigma\geq1$, а при $\xi>n$ в силу свойства 2) оператора S_D помимо указанного еще и непрерывна и ограниченна в D.

По условию данной теоремы выполнены условия леммы 5, а значит, дифференциальная форма $\Lambda(M)$ замкнута. Тогда в силу лемм 3 и 4 существует обобщенный дифференциал функции $\lambda(x)$, равный

$$d\lambda(x)=d(e^{S_D\Lambda(M(x))})=e^{S_D\Lambda(M(x))}d(S_D\Lambda(M(x)))=\lambda(x)\Lambda(M(x)). \tag{13}$$

Формула (13) с учетом включения $\Lambda(M)\in L_\xi(D)$ и отмеченных свойств $\lambda(x)$ показывает, что при $\xi=n$ обобщенные производные функции $\lambda(x)$ суммируемы в D с любой степенью ν, $1\leq\nu<\xi=n$; а при $\xi>n$ имеет место еще и $d\lambda\in L_\xi(D)$.

Рассмотрим дифференциальные формы λM^i, $i=1,\ldots,n$. Дифференцируя λM^i и пользуясь равенствами (8) (имеющими место в силу выполнения леммы 5 по условию данной теоремы) и (13), получаем $d\left(\lambda M^i\right)=d\lambda\wedge M^i+(-1)^0\lambda{\cdot}dM^i=\lambda{\cdot}\Lambda(M)\wedge M^i+\lambda{\cdot}M^i\wedge\Lambda(M)=0$, т. е. формы λM^i замкнуты (наличие обобщенных дифференциалов доказывает применение упоминавшейся при доказательстве леммы 5 леммы Гольдштейна–Кузьминова–Шведова [12]).

Так как формы λM^i замкнуты, то для функций, определенных формулами (11) и (12), по лемме 3 при простой однородной Φ имеем $df_0^i(x)=dS_D(\lambda(x)M^i(x))=\lambda(x)M^i(x)$, $i=1,\ldots,n$, т. е.

$$f_0'(x)=\lambda(x){\cdot}M(x); \tag{14}$$

а при положительной однородности у Φ (и с учетом неизменности при этом знака $\Phi(M)$) имеем $df_0^i(x)=\Phi(M(x))\lambda(x)M^i(x)$, $i=1,\ldots,n$, т. е.

$$f_0'(x)=\Phi(M(x))\lambda(x){\cdot}M(x). \tag{15}$$

Тогда при простой однородности у Φ в силу (14) и по имеющему место при этом в силу условия данной теоремы $\Phi(M(x))=1$ получаем

$$\Phi(f_0')=\Phi(\lambda{\cdot}M)=\lambda\Phi(M)=\lambda>0. \tag{16}$$

При положительной однородности у Φ в силу (15) и по имеющему место при этом $|\Phi(M(x))|=1$, учитывая $\lambda>0$, получаем

$$\Phi(f_0')=\Phi(\Phi(M)\lambda{\cdot}M)=|\Phi(M)\lambda|\Phi(M)=\lambda\Phi(M), \tag{17}$$

откуда почти всюду в D (из-за $|\Phi(M(x))|=1$ и $\lambda>0$)

$$|\Phi(f_0'(x))|=\lambda(x)\neq0. \tag{18}$$

Формулы (14), (16) при простой и (15), (17) при положительной однородности Φ показывают, что f_0 является решением системы (1).

Из установленных ранее свойств функции $\lambda(x)=e^{S_D\Lambda(M(x))}$ и в силу равенства (16), имеющего место при простой однородной Φ, либо равенства (18), имеющего место при положительно однородной Φ, следует, что при $\xi=n$ функция $\Phi(f_0'(x))$ принадлежит пространству $L_\sigma(D)$ для всякого $\sigma\geq1$ и обладает обобщенными производными класса $L_\nu(D)$ для каждого ν, $1\leq\nu<n$; а при $\xi>n$ функция $\Phi(f_0'(x))$ принадлежит пространству $L_\sigma(D)$ для всякого $\sigma\geq1$ и обладает обобщенными производными класса $L_\xi(D)$.

Далее пользуясь неравенствами (4), (6) (напомним, что (6) имеет место при $\xi>n$), получаем $|S_D\Lambda(x)|\leq C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)$ (где C — постоянная). А учитывая, что $\Phi(f_0'(x))=\lambda(x)=e^{S_D\Lambda(M(x))}$ — при простой однородности Φ и что $|\Phi(f_0'(x))|=\lambda(x)=e^{S_D\Lambda(M(x))}$ — при положительной однородности Φ, заключаем $e^{-C}\leq\Phi(f_0'(x))\leq e^C$ — при простой и $e^{-C}\leq|\Phi(f_0'(x))|\leq e^C$ — при положительной однородности Φ.

Наконец, поскольку $\Phi(f_0'(x))\neq0$ почти всюду в D при любой однородности у Φ, то почти всюду в D определена матрица $M_{f_0}(x)=\dfrac{f_0'(x)}{\Phi(f_0'(x))}$. В силу доказанного о том, что $f_0(x)$ — решение системы (1), заключаем, что почти всюду в D матрица $M_{f_0}(x)$ совпадает с $M(x)$.

Итак, все утверждения данной теоремы установлены.

Замечание. Необходимые условия $\Phi(M(x))$=1 либо $|\Phi(M(x))|$=1 существования решения системы (1) возникают при применении соответствующей однородной функции Φ к тождеству $f'(x) \equiv \equiv \Phi(f'(x))M(x)$.

Библиографический список

1. *Журавлев И.В.* О восстановлении отображения по нормированной матрице Якоби // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 5. С. 53–61.
2. *Журавлев И.В.* К задаче восстановления отображения по нормированной матрице // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 77–87.
3. *Егоров В.В.* О системах дифференциальных уравнений, возникающих в теории квазиконформных отображений. Волгоград, 1997. Деп. в ВИНИТИ № 2777–В97. 16 с.
4. *Егоров В.В.* Об интегрируемости одной системы дифференциальных уравнений с частными производными, возникающей в теории квазиконформных отображений. Волгоград, 1998. Деп. в ВИНИТИ № 1816–В98. 15 с.
5. *Егоров В.В.* О системе дифференциальных уравнений, описывающей отображения с ограниченным искажением // Вестн. ВолГУ. Сер. 1 (Математика). Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2004. Вып.8.
6. *Шушков Д.В.* Восстановление отображения по характеристике $f'(x)\,/\,||f'(x)||$ // Тр. по геометрии и анализу. Новосибирск: Изд-во Ин-та мат., 2003.
7. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986. 368 с.
8. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
9. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
10. *Буренков В.И.* Интегральные представления Соболева и формула Тейлора // Тр. МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 33–38.
11. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
12. *Гольдштейн В.М., Кузьминов В.И., Шведов И.А.* Дифференциальные формы на липшецевом многообразии // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 2. С. 16–30.
13. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

УДК 517.984

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

В.П. Курдюмов, А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Для дифференциально-разностного оператора переменной структуры с интегральными краевыми условиями доказана базисность Рисса его собственных и присоединенных функций в пространстве $L_2^3[0,1]$.

On Riesz Basises of the Eigen and Associated Functions of the Functional-Differential Operator with a Variable Structure

V.P. Kurdyumov, A.P. Khromov

For a functional-differential operator of a variable structure with integral boundary conditions the Riesz basisness of its eigen and associated functions in the space $L_2^3[0,1]$ is proved.

Рассмотрим функционально-дифференциальный оператор

$$Ly = l[y] = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \\ y_3'(x) + p(x)y_3(x) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

$y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ (T — знак транспонирования), $x \in [0,1]$, с граничными условиями:

$$y_1(0) = y_3(1), \quad y_2(1) = y_3(0), \quad \int\limits_0^1 y_1(t)\,d\sigma_1(t) + \int\limits_0^1 y_2(t)\,d\sigma_2(t) + \int\limits_0^1 y_3(t)\,d\sigma_3(t) = 0. \qquad (2)$$

Предполагаем, что $\alpha_i^2 \ne \beta_i^2$, $p_{ij}(x) \in C^1[0,1]$ $(i,j = 1,2)$, $p(x) \in C^1[0,1]$, $\sigma_i(x)$ $(i = 1,2,3)$ — функции ограниченной вариации, имеющие скачки в точках 0 и 1.