В случае 1) $q(\alpha) = \dfrac{R}{\alpha t - R}$. В случае 2) $q(\alpha) = \dfrac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R}$. Причем легко видеть, что $\dfrac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R} \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} \dfrac{RM}{t} < 1$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00139-а).

Библиографический список

1. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 440 с. [*Polovinkin E. S. Balashov M. V.* Elements of convex and strongly convex analysis. Moscow : Fizmatlit, 2007. 440 p.]
2. *Поляк Б. Т.* Теоремы существования и сходимость минимизирующих последовательностей в задачах на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166, №2. С. 287–290. [*Polyak B. T.* Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremal problems with restrictions // Soviet Math. Dokl. 1966. Vol. 7. P. 72–75.]
3. *Поляк Б. Т., Левинтин Е. С.* Сходимость минимизирующих последовательностей в задачах на условный экстремум // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, №5. С. 997–1000. [*Polyak B. T., Levintin E. S.* Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems // Soviet Math. Dokl. 1966. Vol. 7. P. 764—767.]
4. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1980. 520 с. [*Vasilyev F. P.* Numerical methods for solving extremal problems. Moscow : Nauka, 1980. 520 p.]
5. *Нестеров Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. М. : МЦНМО, 2010. 279 с. [*Nesterov Yu. E.* Introduction to convex optimization. M. : MCCME, 2010. 279 p.]
6. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М. : Наука, 1983. 384 с. [*Polyak B. T.* Introduction to optimization. Moscow : Nauka, 1983. 384 p.]
7. *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. М. : Физматлит, 2005. 368 с. [*Sukharev A. G., Timokhov A. V., Fedorov V. V.* Course of optimization methods. Moscow : Fizmatlit, 2005. 368 p.]
8. *Abatzoglou T. J.* The Lipschitz continuity of the metric projection // J. of Approx. Theory. 1979. Vol. 26. P. 212–218.
9. *Балашов М. В., Голубев М. О.* Об условии Липшица для метрической проекции в гильбертовом пространстве // Тр. 54-й науч. конф. МФТИ. М. : МФТИ, 2011. Т. 1. С. 34. [*Balashov M. V. Golubev M. O.* Lipschitz condition for the metric projection in a Hilbert space // Proc. of the 54th Conf. of MIPT. Moscow : MIPT, 2011. Vol. 1. P. 34.]
10. *Голубев М. О.* Метрическая проекция в гильбертовом пространстве и сильная выпуклость // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зимней шк. Саратов : Научная книга, 2012. С. 55–56. [*Golubev M. O.* Metric projection in a Hilbert space and strong convexity // Modern problems of function theory and their applications : Proc. of the 16th Saratov Winter School. Saratov, 2012. P. 55–56.]

УДК 517.51

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ, СВЯЗАННЫХ С РЯДАМИ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА

Н. В. Егошина

Саратовский государственный университет
E-mail: saviour92@mail.ru

Две теоремы О. П. Гойяла, касающиеся абсолютной сходимости некоторых тригонометрических рядов, распространяются на случай систем Виленкина и L^p-модулей непрерывности.

Ключевые слова: мультипликативные системы, положительные коэффициенты Фурье–Виленкина, абсолютная сходимость.

Absolute Convergence of Some Series, Connected with the Fourier–Vilenkin Series

N. V. Egoshina

Two theorems of O. P. Goyal concerning absolute convergence of some trigonometric series are extended to the case of Vilenkin systems and L^p-modulus of continuity.

Key words: positive Fourier–Vilenkin coefficients, absolute convergence.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \ldots, p_j - 1\}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \ldots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{1}$$

Это разложение определяется однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k \in \mathbb{Z}$, брать разложение с конечным числом ненулевых x_j. Если $y \in [0,1)$ записано в виде (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}$, $z_j \in \mathbb{Z}_j$, где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$. Аналогично определяется операция $x \ominus y$, которая является обратной к операции $x \oplus y$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \ k_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{2}$$

Аналогично $x \ominus y$, $x \oplus y$, для $k, l \in \mathbb{Z}_+$ можно определить операции $k \oplus l$ и $k \ominus l$. Для чисел $x \in [0,1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (2) положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L[0,1)$.

Из определения следует, что при $k < m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, функции $\chi_k(x)$ постоянны на $I_i^n = [(i-1)/m_n, i/m_n)$, $i = 1, \ldots, m_n$. Также известно, что при фиксированном $y \in [0,1)$ для почти всех $x \in [0,1)$ и всех $k \in \mathbb{Z}_+$ верно $\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y)$, а для всех $x \in [0,1)$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$ верны равенства $\chi_k(x)\chi_l(x) = \chi_{k \oplus l}(x)$, $\chi_k(x)\overline{\chi_l(x)} = \chi_{k \ominus l}(x)$. Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, § 1.5].

Для $f \in L^1[0,1)$ коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье задаются формулами $\hat{f}(i) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_i(t)}\, dt$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k$, $n \in \mathbb{N}$. Как обычно, пространство $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$ и модуль непрерывности первого порядка задается в нем равенством $\omega(f,\delta)_p = \sup\limits_{0 \le h \le \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L[0,1) : \hat{f}(i) = 0, i \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Определим наилучшее приближение и дискретный модуль непрерывности для $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$,

$$E_n(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_n\}, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad \omega_n(f)_p = \sup_{h \in [0, 1/m_n)} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Известно, что эти величины связаны неравенствами А. В. Ефимова (см. [1, § 10.5]) $2^{-1}\omega_n(f)_p \le E_{m_n}(f)_p \le \omega_n(f)_p$. В случае равномерной метрики $E_n(f)_\infty$ определяется аналогично, тогда как $\omega_n(f)_\infty = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I_k^n, k \in \mathbb{Z} \cap [0, m_n)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_k(f)_\infty = 0$, то $f \in C^*[0,1)$. Для $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty} \downarrow 0$ пусть $H_p^\omega = \{f \in L^p[0,1) : \omega_n(f)_p \le C\omega_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Сверткой функций $f, g \in L^1[0,1)$ называется функция $h(x) = f * g(x) = \int_0^1 f(x \ominus t) g(t)\, dt$, которая существует п.в. на $[0,1)$ и также принадлежит $L^1[0,1)$. Известно, что $(f * g)\hat{}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Целью нашей работы является получение аналогов двух теорем О. П. Гойяла из [2] и [3] для систем Виленкина $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ (см. теоремы 1 и 2). Кроме того, теорема 2 для равномерного модуля непрерывности распространяется на случай пространства $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$. Легко видеть, что $S_n(f)(x) = f * D_n(x)$.

Лемма 1. 1) $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x)$, *где* $n \in \mathbb{Z}_+$ *и* X_E — *индикатор множества* E.

2) *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $x \in [0,1)$. *Тогда* $|D_n(x)| \leqslant N x^{-1}$, *где* $2 \leqslant p_n \leqslant N$. *Отсюда следует, что* $\|D_n\|_1 = O(\ln(n+1))$, $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 1) леммы 1 установлено в [1, § 1.5], а утверждение 2) — в [4, с. 98–100].

Лемма 2 (см. [5, лемма 10]). *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty} \downarrow 0$ *такова, что* $\omega_n \le C\omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *и*

$$\limsup_{n\to\infty} p_{n+1}(\omega_{n+1}/\omega_n)^p > 1. \tag{3}$$

Тогда для $f \in H_p^\omega$ *имеем* $\int_0^{1/m_n} |f(t)|^p\, dt = O(\omega_n^p)$, $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. При $\omega_n = m_n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, условие (3) выполнено при $\alpha p < 1$.

Лемма 3. (см. [1, §10.4, теорема 10.4.1) *Если* $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, *то при* $0 \le a, b \le 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_a^b \int_a^b |f(x) - f(y)|^p \, dx \, dy \le 2 \int_0^{b-a} [\omega(f,t)_p]^p \, dt.$$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть* $f \in L^1[0,1)$ *такова, что 1)* $\hat{f}(n) = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$; *2)* $\int_0^1 |t^{-1}(f(x \ominus t) - - f(x))| \ln 2/t \, dt < \infty$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (S_n(f)(x) - f(x))/n$ *сходится абсолютно на* $[0,1)$.

Доказательство. Пусть $0 < \delta < \alpha$ (можно считать $\delta < 1$). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $k = k(n) \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $m_{k+1}^{-1} < n^{-\delta} \le m_k^{-1}$. Обозначим $f(x \ominus t) - f(x)$ через $\varphi_x(t)$. Используя равенство $S_n(f)(x) - f(x) = \int_0^1 \varphi_x(t) D_n(t) \, dt$, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(f)(x) - f(x)|}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \int_0^{1/m_{k(n)}} \varphi_x(t) D_n(t) \, dt \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \int_{1/m_{k(n)}}^1 \varphi_x(t) D_n(t) \, dt \right| =: I + J.$$

Сначала оценим I с помощью леммы 1 и перестановки порядка суммирования:

$$I \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \int_0^{1/m_{k(n)}} |\varphi_x(t)||D_n(t)| \, dt \le N \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sum_{i=m_{k(n)}}^{\infty} \int_{1/(i+1)}^{1/i} |t^{-1} \varphi_x(t)| \, dt =$$

$$= N \sum_{i=1}^{\infty} \int_{1/(i+1)}^{1/i} |t^{-1} \varphi_x(t)| \, dt \sum_{m_{k(n)} \le i} n^{-1} \le N \sum_{i=1}^{\infty} \int_{1/(i+1)}^{1/i} |t^{-1} \varphi_x(t)| \, dt \sum_{1 \le n^\delta \le Ni} n^{-1} =$$

$$= O\left(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{1/(i+1)}^{1/i} |t^{-1} \varphi_x(t)| \ln(i+1) \, dt \right) = O\left(\int_0^1 |t^{-1} \varphi_x(t)| \ln(2/t) \, dt \right).$$

Таким образом, I конечно в силу условия 2) теоремы. Далее, пусть

$$\gamma_n(x) = \int_{1/m_{k(n)}}^1 \varphi_x(t) D_n(t) \, dt = \int_0^1 \varphi_x(t) X_{[1/m_k, 1)}(t) D_n(t) \, dt.$$

Тогда $X_{[1/m_k,1)} \in \mathcal{P}_{m_k}$, и поэтому произведение $X_{[1/m_k,1)}$ и D_n при $n = jm_k + r$, $j \in \mathbb{N}$, $0 < r \le m_k$, принадлежит $\mathcal{P}_{(j+1)m_k}$. Считая для простоты $f(x) = 0$, получаем, что $\gamma_n(x)$ есть свертка f и $D_n X_{[1/m_k,1)}$, откуда по формуле $(g * h)\hat{}(k) = \hat{g}(k)\hat{h}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, имеем:

$$\gamma_n(x) = \sum_{s=0}^{(j+1)m_k - 1} \hat{f}(s) \int_{1/m_{k(n)}}^1 D_n(t) \overline{\chi_s(t)} \, dt \, \chi_s(x).$$

Здесь и далее $n = jm_k + r$, j, r — как выше. Тогда $D_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{j-1} \chi_{im_k}(t) D_{m_k}(t) + \chi_{jm_k}(t) D_r(t)$, причем $D_{m_k}(t) = 0$ на $[1/m_k, 1)$ по лемме 1. Поэтому

$$\gamma_n(x) = \sum_{s=0}^{(j+1)m_k - 1} \hat{f}(s) \int_{1/m_{k(n)}}^1 \chi_{jm_k} D_r(t) \overline{\chi_s(t)} \, dt \, \chi_s(x).$$

Если $s < jm_k$, то $jm_k \ominus s \ge m_k$, и тогда функция $\chi_{jm_k}(x)\overline{\chi_s(x)} = \chi_{jm_k \ominus s}(x)$ ортогональна $D_r(t) X_{[1/m_k,1)}(t)$. В итоге получаем

$$\gamma_n(x) = \sum_{s=jm_k}^{(j+1)m_k - 1} \hat{f}(s) \int_{1/m_{k(n)}}^1 \chi_{jm_k \ominus s} D_r(t) \, dt \, \chi_s(x). \tag{4}$$

В силу условия 1) имеем $|\hat{f}(s)| \le C_1 s^{-\alpha} \le 2^\alpha C_1 / n^\alpha$ при $jm_k \le s, n < (j+1)m_k$. Сумма из (4) содержит не более m_k ненулевых слагаемых, поэтому в силу неравенства $m_k \le n^\delta$ и леммы 1 находим, что

$$|\gamma_n(x)| \le m_k 2^\alpha C_1 n^{-\alpha} \|D_r\|_1 \le C_2 n^{\delta - \alpha} \ln m_k \le C_2 \delta n^{\delta - \alpha} \ln n.$$

Теперь $J = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}|\gamma_n(x)| \le C_2\delta \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1+\delta-\alpha}\ln n < \infty$ и поскольку $I < \infty$, то получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|S_n(f)(x)| < \infty$ при $f(x) = 0$. Если же $f(x) = a \ne 0$, то рассмотрим функцию $f_1(t) = f(t) - a$. Тогда $f_1(x) = 0$ и $|f(x \ominus t) - f(x)| = |f_1(x \ominus t) - f_1(x)|$, т. е. оба условия 1) и 2) выполнены для f_1 и утверждение теоремы доказано для нее. Так как $S_n(f)(x) - f(x) = S_n(f_1)(x)$, то теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $f \in C^*[0,1)$, $\hat{f}(k) \ge 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{\gamma}\omega_n(f)_{\infty}$ сходится. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k) < \infty$.*

Доказательство. Легко видеть, что

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} \hat{f}(k) = \int_0^1 f(t)D_{m_n}(t)\,dt = m_n\int_0^{1/m_n} f(t)\,dt, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Тогда

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(k) = m_{n+1}\int_0^{1/m_{n+1}} f(t)\,dt - m_n\int_0^{1/m_n} f(t)\,dt =$$

$$= m_{n+1}\int_0^{1/m_{n+1}} \left(f(t) - m_n\int_0^{1/m_n} f(u)\,du \right) dt \le m_{n+1}m_n \int_0^{1/m_{n+1}}\int_0^{1/m_n} |f(t) - f(u)|\,du\,dt \le$$

$$\le Nm_n^2 \int_0^{1/m_n}\int_0^{1/m_n} |f(t) - f(u)|\,du\,dt \le Nm_n^2 m_n^{-2}\omega_n(f)_{\infty} = N\omega_n(f)_{\infty}. \tag{6}$$

Из (6) легко следует, что

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} k^{\gamma}\hat{f}(k) = O\left(m_n^{\gamma} \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(k) \right) = O(m_n^{\gamma}\omega_n(f)_{\infty}). \tag{7}$$

Суммируя соотношения (7) по $n \in \mathbb{Z}_+$, получаем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $f, g \in C^*[0,1)$, причем f удовлетворяет условиям теоремы 2. Если 1) $\omega_n(g)_{\infty} \le C\omega_n(f)_{\infty}$, $n \in \mathbb{Z}_+$; 2) $\hat{g}(k) \ge -\hat{f}(k)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k)$ также сходится.*

Доказательство. Рассмотрим $h = f + g$. Тогда $\omega_n(h)_{\infty} \le \omega_n(f)_{\infty} + \omega_n(g)_{\infty} \le (1 + C_1)\omega_n(f)_{\infty}$ и $\hat{h}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому функция h удовлетворяет условиям теоремы 2 и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{h}(k) < \infty$. Но $|\hat{g}(k)| \le |\hat{h}(k)| + |\hat{f}(k)|$, $k \in \mathbb{Z}_+$, откуда вытекает утверждение следствия.

Следствие 2. *Пусть $f \in C^*[0,1)$, $\hat{f}(k) \ge 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-1}E_n(f)_{\infty}$ сходится. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k) < \infty$.*

Доказательство следствия 2 вытекает из неравенства А. В. Ефимова и известных оценок для сумм рядов (см., например [6, лемма 6]).

Замечание 2. Согласно [4, с.95] для сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\hat{f}(k)|$ достаточными являются условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}E_n(f)_{\infty} < \infty$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{1/2}\omega_n(f)_{\infty} < \infty$. Теорема 2 и следствие 2 дают более слабое достаточное условие, но при $\hat{f}(k) \ge 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Теперь получим аналогичные теореме 2 утверждения для L^p-модулей непрерывности.

Теорема 3. 1. *Пусть $1 \le p < \infty$, $\gamma > -1/p$, для $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty} \downarrow 0$ выполнены условия леммы 2, $f \in L^p[0,1)$, $\hat{f}(k) \ge 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in H_p^{\omega}$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{\gamma+1/p}\omega_n$ сходится, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k) < \infty$;*

2. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\gamma > -1/p$, $f \in L^p[0,1)$, $\hat{f}(k) \ge 0$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{\gamma+1/p}\omega(f,1/m_n)_p$. *Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^\gamma \hat{f}(k) < \infty$.

Доказательство. 1. Аналогично (5) с помощью леммы 2 и неравенства Гёльдера получаем:

$$\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} k^\gamma \hat{f}(k) \le m_n^\gamma \sum_{k=0}^{m_n-1} \hat{f}(k) = m_n^{\gamma+1}\int_0^{1/m_n} f(t)\,dt \le$$

$$\le m_n^{1+\gamma}\left(\int_0^{1/m_n} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}(m_n^{-1})^{1-1/p} = O(m_n^{\gamma+1/p}\omega_n), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Суммируя соотношения (8) по $n \in \mathbb{N}$, получаем утверждение 1.

2. Аналогично (6) имеем благодаря лемме 3 и неравенству Гёльдера:

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(k) \le Nm_n^2 \int_0^{1/m_n}\int_0^{1/m_n} |f(t)-f(u)|\,du\,dt \le$$

$$\le Nm_n^2(m_n^{-2})^{1-1/p}\left(\int_0^{1/m_n}\int_0^{1/m_n} |f(t)-f(u)|^p\,du\,dt\right)^{1/p} \le$$

$$\le Nm_n^{2/p}2^{1/p}\left(\int_0^{1/m_n} \omega^p(f,t)_p\,dt\right)^{1/p} = O(\omega(f,1/m_n)_p m_n^{1/p}), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{9}$$

Из (9), как и ранее, следует, что

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} k^\gamma \hat{f}(k) = O(m_n^{\gamma+1/p}\omega(f,1/m_n)_p), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{10}$$

Суммируя (10) по $n \in \mathbb{Z}_+$, получаем утверждение 2) теоремы. Теорема доказана.

Замечание 3. Поскольку $\omega_n(f)_p$ и $\omega(f,1/m_n)_p$ в общем случае не сравнимы друг с другом, результаты частей 1 и 2 теоремы 3 независимы друг от друга.

Следствие 3. *Пусть* $f \in \mathrm{Lip}\,(\alpha,p)$, $0 < \alpha \le 1$, $1 \le p < \infty$, *т.е.* $\omega(f,\delta)_p = O(\delta^\alpha)$, *и* $\hat{f}(k) \ge 0$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^\gamma \hat{f}(k)$ *сходится при* $\gamma < \alpha - 1/p$.

Библиографический список

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987. 344 с. [*Golubov B. I., Yefimov A. V., Skvortsov V. A.* Walsh series and transforms. Moskow : Nauka, 1987. 344 pp.]
2. *Goyal O. P.* On the absolute convergence of a series associated with a Fourier series // Mat. vesnik. 1965. Vol. 2(17). P. 85–88.
3. *Goyal O. P.* On the absolute convergence of Fourier series // Mat. vesnik. 1965. Vol. 2(17). P. 88–91.
4. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с. [*Agayev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzhafarli G. M., Rubinshteyn A. I.* Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups. Baku : Elm, 1981. 180 pp.]
5. *Волосивец С. С.* Модифицированные операторы Харди и Харди–Литтлвуда и их поведение в различных пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 1. С. 29–52. [*Volosivets S. S.* Modified Hardy and Hardy-Littlewood operators and their behaviour in various spaces // Izvestiya : Mathematics. 2011. Vol. 75, № 1. P. 29–51.]
6. *Волосивец С. С.* Приближение функций ограниченной p-флуктуации полиномами по мультипликативным системам // Analysis Math. 1995. Vol. 21, no 1. P. 61–77. [*Volosivets S. S.* Approximation of Functions of bounded p-fluctuation by means of polynomials with respect to Multiplicative Systems // Analysis Math. 1995. Vol. 21, № 1. P. 61–77.]