необходимым и можно ли вместо включения в утверждении теоремы 2 поставить знак равенства. Однако вообще отказаться от этого условия нельзя. Действительно, пусть $\lambda_{k,j} = \lambda$ для всех k и j. Тогда для порождающей аффинный фрейм функции $\varphi = \chi_{[0,1]}$ все частные суммы ряда

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} m_n \varphi_n$$

представляют собой ступенчатые функции, принимающие значения целых кратных чисел λ, которые не могут приблизить функцию $f(x) = \lambda/2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых (*проект* МД-1354.2013.1) *и РФФИ* (*проект* 10-01-00097).

Библиографический список

1. *Casazza P. G., Dilworth S. J., Odell E., Schlumprecht Th., Zsak A.* Coefficient quantization for frames in Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 348. P. 66–86.
2. *Терехин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, вып. 3. С. 50–62. [*Terekhin P. A.* Frames in Banach spaces // Funct. Anal. Appl. 2010. Vol. 44, № 3. P. 199–208.]
3. *Терехин П. А.* Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Математика. 1999. № 8. С. 74–81. [*Terekhin P. A.* Inequalities for the components of summable functions and their representations by elements of a system of contractions and shifts // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 1999. Vol. 43, № 8. P. 70—77.]
4. *Терехин П. А.* Аффинные системы функций и фреймы в банаховом пространстве : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Саратов, 2010. 230 с. [*Terekhin P. A.* Affine systems of functions and frames in Banach space : Dissertation. Saratov, 2010. 230 p.]

УДК 517.518

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Р. Н. Фадеев

Саратовский государственный университет
E-mail: belal_templier@mail.ru

Доказаны две теоремы о равномерной сходимости и ограниченности частных сумм рядов по мультипликативным системам с обобщенно-монотонными коэффициентами.

Ключевые слова: мультипликативная система, равномерная сходимость.

Uniform Convergence of the Series with Respect to Multiplicative Systems

R. N. Fadeev

Two theorems on uniform convergence and boundedness of partial sums for the series with generalized monotone coefficients with respect to multiplicative systems are proved.

Key words: multiplicative system, uniform convergence.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел таких, что $2 \le p_n \le N$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \qquad x_n \in \mathbb{Z}_+, \qquad 0 \le x_n < p_n. \tag{1}$$

Разложение (1) будет единственным, если для $x = k/m_n$ брать разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \qquad k_i \in \mathbb{Z}_+, \qquad 0 \le k_i < p_i. \tag{2}$$

Для $x \in [0,1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (2) по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / m_j\right)$. Известно, что система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированна и полна в $L^1[0,1)$. Кроме того, при $k < m_n$ функция

© Фадеев Р. Н., 2013

$\chi_k(x)$ постоянна на всех промежутках $[(i-1)/m_n, i/m_n)$, $1 \le i \le m_n$. Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, § 1.5]. Далее большую роль будет играть ядро Дирихле $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$. Мы будем изучать равномерную сходимость и обобщенную абсолютную сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x). \tag{3}$$

Следуя С. Ю. Тихонову [2], введем некоторые классы последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Последовательность $\{q_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ называется лакунарной, если $q_{k+1}/q_k \ge \lambda > 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть последовательность $1 = n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ представима в виде конечного числа лакунарных последовательностей, $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $GM\left(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}, \{n_k\}_{k=1}^{\infty}\right)$ если для любого $j \in \mathbb{N}$ и $m \in [n_j, n_{j+1})$ верно неравенство

$$|a_m| + \sum_{k=m}^{n_{j+1}-1} |a_k - a_{k+1}| \le C\beta_m. \tag{4}$$

Объединение классов $GM\left(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}, \{n_k\}_{k=1}^{\infty}\right)$ по всевозможным $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим через $GM\left(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}\right)$. В качестве примера отметим, что последовательности класса $RBVS$ (см. [3]) принадлежат классу $GM\left(\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\right)$. Если неравенство (4) заменить на $|a_m| + \sum\limits_{k=n_j+1}^{m} |a_k - a_{k-1}| \le C\beta_m$, $j \in \mathbb{N}$, $m \in (n_j, n_{j+1}]$, то аналогично определяются классы $GM^*\left(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}, \{n_k\}_{k=1}^{\infty}\right)$ и $GM^*\left(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}\right)$.

Целью нашей работы является получение достаточных условий равномерной сходимости и равномерной ограниченности частных сумм рядов (3) с коэффициентами классов $GM\left(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}\right)$ и $GM^*\left(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}\right)$. Для класса $GM\left(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}\right)$ аналогичные результаты в тригонометрическом случае получены в [2].

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1 (см. [4, гл. 4, §3]). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда при $x \in [0,1)$ верно неравенство $|D_n(x)| \le \min(n, N/x)$.*

Лемма 2. *Пусть $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i - a_{i+1}| < \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тогда ряд* (3) *сходится на* $(0,1)$.

Доказательство. В случае $a_n \downarrow 0$ утверждение леммы установлено в [4, гл. 4, теорема 4.14]. В общем случае $a_n = b_n - c_n$, где $b_n \downarrow 0$ и $c_n \downarrow 0$ (см. [5, гл. X, § 1]).

Лемма 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда $|D_n(x) - n| \le 8N(n-1)^2 x$.*

Доказательство. Пусть $m_{j-1} \le n < m_j$, $j \in \mathbb{N}$, тогда функция $D_n(x)$ постоянна на $[0, 1/m_j)$ и равна n, т. е. $|D_n(x) - n| = 0$ на $[0, 1/m_j)$. Для $x \in [1/m_j, 1)$ получаем $|D_n(x) - n| \le 2n \le 2nm_j x \le 8N(n-1)^2 x$.

Лемма 4 ([5, вводный материал, § 4]). *Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ является объединением конечного числа лакунарных последовательностей, тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i \le Cn_m$, $\sum\limits_{i=m}^{\infty} 1/n_i \le C/n_m$.*

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM\left(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}\right)$. Если $\lim\limits_{k\to\infty} k\beta_k = 0$ и ряд* (3) *сходится в точке $x = 0$, то он сходится равномерно на* $[0,1)$.

Доказательство. Пусть $b_k = \sup\limits_{j\ge k} j\beta_j$, тогда $k\beta_k \le b_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, b_k убывает и $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$. Аналогично по $A_k = \sum\limits_{j=k}^{\infty} a_j$ построим $d_k = \sup\limits_{j\ge k} |A_k|$ такую, что $d_k \downarrow 0$ и $|A_k| \le d_k$. Из неравенства (4) и леммы 4 получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} |a_k - a_{k+1}| \le C_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_{n_j} n_j}{n_j} \le Cb_1 \sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j < \infty.$$

Применяя лемму 2, находим что ряд (3) сходится на $[0,1)$. Определим $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\chi_k(x)$ и $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\chi_k(x)$.

Применяя преобразование Абеля, получим:

$$f(x) - S_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k\chi_k(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - a_{k+1})\, D_{k+1}(x) - a_n D_n(x) := I_1(x) + I_2(x),$$

где

$$|I_2| = |a_n D_n(x)| \le n\,|a_n| \le C_2 n\beta_n \le C_2 b_n. \tag{5}$$

Из (5) следует равномерная сходимость I_2 к 0. Будем оценивать I_1 на $[1/(l+1), 1/l)$, $l \in \mathbb{N}$. Пусть $q \in \mathbb{N}$ таково, что $n_{q-1} < n \le n_q$ (считаем $n_0 = 0$). Пусть сначала $l \le n$, тогда в силу лемм 1 и 4 имеем:

$$|I_1| \le Nx^{-1}\left(\sum_{k=q}^{\infty}\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} |a_k - a_{k+1}| + \sum_{j=n}^{n_q-1} |a_k - a_{k+1}|\right) \le$$

$$\le C_3 x^{-1}\left(\sum_{k=q}^{\infty}\frac{\beta_{n_k} n_k}{n_k} + \frac{\beta_n n}{n}\right) \le C_3(n+1)\left(b_{n_q}\sum_{k=q}^{\infty}\frac{1}{n_k} + \frac{b_n}{n}\right) \le C_4 b_n. \tag{6}$$

Пусть $l > n$. Запишем I_1 как $\sum\limits_{k=n}^{l-1} + \sum\limits_{k=l}^{\infty} =: I_3 + I_4$. Аналогично неравенству (6) получаем, что $|I_4| \le C_4 b_l \le C_4 b_n$. Имеем:

$$I_3 = \sum_{k=n}^{l-1}(k+1)\,(a_k - a_{k+1}) + \sum_{k=n}^{l-1}(a_k - a_{k+1})\,(D_{k+1}(x) - (k+1)) =: I_5 + I_6.$$

Тогда

$$|I_5| = \left|\sum_{k=n}^{l-1} a_k + (n+1)a_n - la_l\right| \le |A_n - A_l| + C_3 n\beta_n + C_3 l\beta_l \le 2d_n + 2C_3 b_n. \tag{7}$$

Докажем вспомогательное неравенство. Пусть $n_k \le r \le s \le n_{k+1} - 1$, тогда

$$\sum_{j=r}^{s} j^2\,|a_j - a_{j+1}| \le 2\sum_{j=r}^{s}|a_j - a_{j+1}|\left(\sum_{m=r}^{j} m + r^2\right) = 2\sum_{m=r}^{s} m\sum_{j=m}^{s}|a_j - a_{j+1}| +$$

$$+2r^2\sum_{j=r}^{s}|a_j - a_{j+1}| \le C_3\left(\sum_{m=r}^{s} m\beta_m + r^2\beta_r\right) \le C_3 b_s(s+1). \tag{8}$$

Пусть $n_{t-1} < l \le n_t$, $t \in \mathbb{N}$. Так как $l \ge n$, то $t \ge q$. Если $t = q$, то в силу леммы 3 и (8) получаем

$$|I_6| \le 8Nx\sum_{k=n}^{l} k^2\,|a_k - a_{k+1}| \le C_5 x b_l(l+1) \le 2C_5 b_n.$$

При $q < t$ разобьем I_6 на три слагаемых: $I_7 = \sum\limits_{k=n}^{n_q-1}$, $I_8 = \sum\limits_{k=n_{t-1}}^{l}$ и $I_9 = \sum\limits_{j=q}^{t-2}\sum\limits_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}$ (см. (7)). Аналогично неравенству (8) находим, что

$$|I_7| + |I_8| \le C_6 x(b_n n_q + b_{n_{t-1}}(l+1)) \le C_6 l^{-1} b_n(2l+2) \le 4C_6 b_n.$$

Используя (8) и леммы 3, 4, получаем:

$$I_9 \le C_3 x\sum_{j=q}^{t-2} b_{n_j}\,(n_j + n_{j+1}) \le 2C_3 x b_{n_q}\sum_{j=1}^{t-1} n_j \le C_7 x b_{n_q} n_{t-1} \le C_7 b_n.$$

Объединяя полученные оценки, получаем $|f(x) - S_n(x)| \le C_8(b_n + d_n)$, откуда следует утверждение теоремы 1. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty})$, *последовательности* $\{k\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, *где* $\alpha_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$, $k \in \mathbb{N}$, *ограничены, то последовательность частичных сумм ряда* (3) *равномерно ограничена.*

Доказательство. Из (5) сразу получаем $|a_n D_n(x)| \le C_1 b_n \le C_2$, поэтому для доказательства утверждения теоремы необходимо показать ограниченность $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x)$. Пусть $x \in [1/(l+1), 1/l)$, $n_{q-1} < n \le n_q$, $n_{t-1} < l \le n_t$. Имеем:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x)\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} (k+1)(a_k - a_{k+1})\right| + C_3 x \sum_{k=1}^{n} k^2 |a_k - a_{k+1}| =: J_1 + J_2.$$

В силу (7) и ограниченности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ получаем ограниченность J_1. Пусть $l \ge n$, тогда в силу (8) и леммы 4 имеем:

$$J_2 = C_3 x \left(\sum_{k=1}^{q-2} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} j^2 |a_j - a_{j+1}| + \sum_{k=n_{q-1}}^{n} k^2 |a_j - a_{j+1}|\right) \le$$

$$\le C_4 x \left(\sum_{k=1}^{q-2} n_{k+1} b_{n_k} + (n+1) b_{n_{q-1}}\right) \le C_5 x b_1 (n_{q-1} + n + 1) \le C_5 2 n l^{-1} b_1 \le 2C_5 b_1. \tag{9}$$

Пусть $l < n$, тогда запишем:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x)\right| \le \left|\sum_{k=1}^{l} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x)\right| + \left|\sum_{k=l+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x)\right| := J_3 + J_4.$$

Аналогично (9) получаем ограниченность J_3. По леммам 1, 4 получаем:

$$J_4 \le N x^{-1} \sum_{k=l+1}^{n} |a_k - a_{k+1}| \le N x^{-1} \left(\sum_{k=t}^{q} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} |a_k - a_{k+1}| + \sum_{j=l+1}^{n_t-1} |a_k - a_{k+1}|\right) \le$$

$$\le C_6 x^{-1} \left(\sum_{k=t}^{q} \frac{\beta_{n_k} n_k}{n_k} + \frac{\beta_{l+1}(l+1)}{l+1}\right) \le C_7 (xl)^{-1} \le 2C_7.$$

Объединяя найденные оценки, получаем утверждение теоремы 2. Теорема доказана.

Аналогично теоремам 1 и 2 доказываются

Теорема 1′. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM^*(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty})$. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} k\beta_k = 0$ *и ряд* (3) *сходится в точке* $x = 0$, *то он сходится равномерно на* $[0, 1)$.

Теорема 2′. *Если* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM^*(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty})$, *последовательности* $\{k\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, *где* $\alpha_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$, $k \in \mathbb{N}$, *ограничены, то последовательность частичных сумм ряда* (3) *равномерно ограничена.*

Теорема 3. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}, \{n_k\}_{k=1}^{\infty})$, *последовательности* $\{k\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ *ограничены, ряд* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \ln n_j / n_j$ *сходится, тогда ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \chi_k(x)\right| \tag{10}$$

сходится на $(0, 1)$ *и его сумма принадлежит* $L^1[0, 1)$.

Доказательство. В силу преобразования Абеля, леммы 1 и (4) имеем:

$$\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \chi_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x) + a_{n_{j+1}} D_{n_{j+1}}(x) - a_{n_j} D_{n_j+1}(x)\right| \le$$

$$\le Nx^{-1}\left(\left|a_{n_{j+1}}\right| + \left|a_{n_j+1}\right| + \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}|a_k - a_{k+1}|\right) \le \frac{C_1}{x}\left(\beta_{n_j} + \beta_{n_{j+1}}\right) \le \frac{C_2}{xn_j}. \tag{11}$$

Поскольку по лемме 4 ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} 1/n_j$ сходится, то из (11) следует сходимость ряда (10) при $x \in (0,1)$. Далее,

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k\chi_k(x)\right| dx = \int_0^{1/n_j} \left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k\chi_k(x)\right| dx + \int\limits_{1/n_j}^{1} \left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k\chi_k(x)\right| dx =: I_{1j} + I_{2j}.$$

Согласно (11) находим, что

$$|I_{2j}| \le C_2 n_j^{-1} \int_{1/n_j}^1 x^{-1}\,dx \le C_2 \ln n_j / n_j. \tag{12}$$

С другой стороны, по теореме 2 из ограниченности $\{k\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ вытекает, что частные суммы $\sum_{k=1}^{n} a_k\chi_k(x)$ равномерно ограничены константой C_3, поэтому

$$|I_{1j}| \le \int_0^{1/n_j} C_3\,dx \le C_3 n_j^{-1}. \tag{13}$$

Из оценок (12) и (13) следует

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k\chi_k(x)\right| dx \le \sum_{j=1}^{\infty}(I_{1j} + I_{2j}) \le C_4 \sum_{j=1}^{\infty}(\ln n_j + 1)/n_j < \infty.$$

Теорема 3 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (*проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Голубов Б. И. Ефимов А. В. Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987. 344 с. [*Golubov B., Efimov A., Skvortsov V.* Walsh series and transforms. Dordrecht; Boston; London : Kluver Academic Publishers, 1991.]

2. *Тихонов С. Ю.* О равномерной сходимости тригонометрического ряда // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 2. С. 304–310. [*Tikhonov S. Yu.* On the uniform convergence of trigonometric series // Math. Notes. 2007. Vol. 81, № 2. P. 268–274.]

3. *Leindler L.* On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Analysis Math. 2001. Vol. 1, № 4. P. 279–285.

4. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с. [*Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I.* Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups. Baku : Elm Publisher, 1981. 180 p.]

5. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с. [*Bari N. K.* Trigonometric Series. Moscow : Fizmatgiz, 1961. 936 p.]

УДК 517.984

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С НЕГЛАДКОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ

В. А. Халова, А. П. Хромов

Саратовский государственный университет
E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Для интегрального оператора с негладкой инволюцией установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Ключевые слова: интегральный оператор, инволюция, резольвента.

Integral Operators with Non-smooth Involution

V. A. Khalova, A. P. Khromov

The equiconvergence of expansions in eigen- and associated functions of integral operators with non-smooth involution and trigonometric Fourier series are established.

Key words: integrals operator, involution, resolvent.

© Халова В. А., Хромов А. П., 2013