УДК 517.927

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

А. Е. Федосеев

Ассистент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, fedoseev_ae@mail.ru

В данной статье исследуется обратная задача спектрального анализа восстановления оператора Штурма–Лиувилля на конечном отрезке с неинтегрируемой особенностью типа Бесселя внутри интервала по заданным спектральным данным. Получена конструктивная процедура решения обратной задачи, доказана единственность восстановления оператора по заданным спектральным данным, а также получены необходимые и достаточные условия разрешимости данной обратной задачи.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, обратная задача, неинтегрируемая особенность, функция Вейля, спектральные данные.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\ell y = -y'' + \Big(\frac{\nu_0}{(x-a)^2} + q(x)\Big) y = \lambda y, \qquad 0 < x < T, \tag{1}$$

на конечном отрезке, с неинтегрируемой особенностью в точке $a > 0$. Здесь потенциал $q(x)$ — комплекснозначная функция, ν_0 — комплексное число. Положим $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$ и для определенности $\mathrm{Re}\,\nu > 0$, $\nu \neq 1, 2, \ldots$. Предположим, что $q(x)|x-a|^{\min(0, 1-2\,\mathrm{Re}\,\nu)} \in L(0,T)$. Класс таких функций $q(x)$ будем обозначать через W.

В данной статье исследуется краевая задача $\mathscr{L} = \mathscr{L}(q(x))$ для дифференциального уравнения (1) с краевыми условиями:

$$y(0) = y(T) = 0$$

и с дополнительным *условием склейки* решений около особой точки $x = a$. При этом рассматриваются произвольные в некотором смысле условия склейки, порождаемые матрицей перехода $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, которая связывает решения уравнения (1) в окрестности особой точки (подробнее см. § 1). В частном случае, при ($\nu_0 = 0$) рассматриваемые условия склейки соответствуют условию

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} (a+0) = A \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} (a-0).$$

Целью данной работы является исследование нелинейной обратной задачи восстановления потенциала $q(x)$ по заданным спектральным данным при условии что ν_0, a и матрица A заданы и зафиксированы. Доказана единственность восстановления оператора Штурма–Лиувилля, получен алгоритм решения обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Метод оператора преобразования, используемый в [1, 2] для классических операторов Штурма–Лиувилля, оказывается неудобным для задачи $\mathscr{L}$. В данной статье используется метод спектральных отображений [3, 4].

1. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Пусть $\lambda = \rho^2$ и $\mathrm{Im}\,\rho \geq 0$. Рассмотрим функции

$$C_j(x,\lambda) = (x-a)^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} (\rho(x-a))^{2k}, \qquad j = 1, 2,$$

где $\mu_j = (-1)^j \nu + 1/2$, $c_{10}c_{20} = (2\nu)^{-1}$, $c_{jk} = (-1)^k c_{j0} \Big(\prod_{s=1}^{k} ((2s+\mu_j)(2s+\mu_j-1) - \nu_0) \Big)^{-1}$.

Здесь и в дальнейшем $z^\mu = \exp(\mu(\ln|z| + i\arg z))$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$. При $x > a$ и $x < a$ функции $C_j(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (1) при $q(x) \equiv 0$. Пусть функции $s_j(x,\lambda)$, $j = 1,2$ являются решениями следующих интегральных уравнений при $x > a$ и $x < a$:

$$s_j(x,\lambda) = C_j(x,\lambda) + \int_a^x g(x,t,\lambda)q(t)s_j(t,\lambda)\,dt,$$

где $g(x,t,\lambda) = C_1(t,\lambda)C_2(x,\lambda) - C_1(x,\lambda)C_2(t,\lambda)$. Функции $s_j(x,\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) и при каждом фиксированном x являются целыми по λ порядка 1/2.

Пусть задана матрица $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, $\det A \neq 0$ с комплексными a_{jk}. Введем функции $\{\sigma_j(x,\lambda)\}_{j=1,2}$, $x \in J_- \cup J_+$, $J_\pm = \{\pm(x-a) > 0\}$ по формуле

$$\sigma_j(x,\lambda) = \begin{cases} s_j(x,\lambda), & x \in J_-, \\ \sum\limits_{k=1}^{2} a_{kj}s_k(x,\lambda), & x \in J_+. \end{cases}$$

Определение 1. Будем говорить, что решение $y(x,\lambda)$ уравнения (1) удовлетворяет *условию склейки* порожденному матрицей перехода A, если $y(x,\lambda)$ может быть представлено в виде $y(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{2}\chi_j(\lambda)\sigma_j(x,\lambda)$, для всех $x \in J_- \cup J_+$, где коэффициенты $\chi_j(\lambda)$ не зависят от x.

Введем числа ξ_{jk}, $j,k = 1,2$ по формуле

$$\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin\pi\nu}\begin{bmatrix} -a_{11}e^{2\pi i\nu} + a_{22}e^{-2\pi i\nu} & -i(a_{11}e^{\pi i\nu} - a_{22}e^{-\pi i\nu}) \\ -i(a_{11}e^{\pi i\nu} - a_{22}e^{-\pi i\nu}) & a_{11} - a_{22} \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$C(x,\lambda) = \sigma_2'(0,\lambda)\sigma_1(x,\lambda) - \sigma_1'(0,\lambda)\sigma_2(x,\lambda), \qquad S(x,\lambda) = \sigma_1(0,\lambda)\sigma_2(x,\lambda) - \sigma_2(0,\lambda)\sigma_1(x,\lambda).$$

Функции $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ являются решениями дифференциального уравнения (1) при $x \in J_\pm$ и удовлетворяют начальным условиям $C(0,\lambda) = S'(0,\lambda) = 1$, $C'(0,\lambda) = S(0,\lambda) = 0$.

Обозначим $\Delta(\lambda) = S(T,\lambda)$.

Лемма 1. *Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ и ее нули $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ совпадают с собственными значениями краевой задачи $\mathscr{L}$.*

Обозначим через m_n кратность собственного значения λ_n $(\lambda_n = \lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{n+m_n-1})$ и положим $\mathbb{S} = \{n : \ n-1 \in \mathbb{N}, \lambda_{n-1} \neq \lambda_n\} \cup \{1\}$, $S_\nu(x,\lambda) = \dfrac{1}{\nu!}\dfrac{\partial^\nu}{\partial\lambda^\nu}S(x,\lambda)$, $S_{n+\nu}(x) = S_\nu(x,\lambda_n)$, $n \in \mathbb{S}$, $\nu = \overline{0, m_n - 1}$.

Потребуем, чтобы

$$a_{11}e^{2i\pi\nu} \neq a_{22}. \tag{2}$$

Мы будем называть (2) *условием регулярности склейки*.

Функция $\Delta(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1) при $|\rho| \to \infty$

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{2i\rho}e^{-i\rho T}\Big(\Delta_0(\lambda) + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big), \tag{3}$$

где

$$\Delta_0(\lambda) = -\xi_{12} + \xi_{22}e^{2i\rho a} + \xi_{21}e^{2i\rho T} - \xi_{11}e^{2i\rho(T-a)}; \tag{4}$$

2) существуют такие $h > 0$, $C_h > 0$, что $|\Delta(\lambda)| \geq C_h|\rho|^{-1}e^{-i\rho T}$, при $\operatorname{Im}\rho > h$. Следовательно, нули функции $\Delta(\lambda)$ лежат в полосе $\operatorname{Im}\rho \leq h$;

3) число нулей N_ξ функции $\Delta(\lambda)$ в прямоугольнике $\Pi_\xi = \{\rho : \operatorname{Im}\rho \leq h, \operatorname{Re} \in [\xi, \xi+1]\}$ ограничено по ξ;

4) пусть $\lambda_n = \rho_n^2$. Обозначим $G_\delta = \{\rho : |\rho - \rho_n| \geq \delta, n \geq 1\}$. Тогда $|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta|\rho|^{-1}e^{-i\rho T}$, $\rho \in G_\delta$;

5) существует последовательность чисел $r_N \to \infty$ такая, что для достаточно малого $\delta > 0$ окружности $|\rho| = r_N$ целиком лежат в G_δ для всех N;

6) пусть $\{\rho_n^0\}$ — нули функции $\Delta_0(\lambda)$ вида (4). Тогда, при $n \to \infty$

$$\rho_n = \rho_n^0 + O\Big(\frac{1}{\rho_n^0}\Big). \tag{5}$$

Пусть $\Phi(x,\lambda)$ — решение уравнения (1) при условиях $\Phi(0,\lambda) = 1$, $\Phi(T,\lambda) = 0$. Обозначим $M(\lambda) = \Phi'(0,\lambda)$. Функции $\Phi(x,\lambda)$ и $M(\lambda)$ называются *решением Вейля* и *функцией Вейля* для $\mathscr{L}$ соответственно.

Теорема 1. *Зафиксируем $n \in \mathbb{S}$. В окрестности точки $\lambda = \lambda_n$ функция Вейля $M(\lambda)$ имеет представление*

$$M(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{m_n-1} \frac{M_{n+\nu}}{(\lambda-\lambda_n)^{\nu+1}} + M_n^*(\lambda),$$

где m_n — кратность λ_n, $M_n^*(\lambda)$ регулярна при $\lambda = \lambda_n$, коэффициенты $M_{n+\nu}$, $\nu = \overline{0, m_n-1}$ вычисляются по формулам

$$M_{n+m_n-1} = -\frac{d_{0,n}^1}{d_{0,n}^0},$$

$$M_{n+m_n-1-\nu} = -\frac{1}{d_{0,n}^0}\Big(d_{\nu,n}^1 + \sum_{k=0}^{\nu-1} M_{n+m_n-1-k} d_{\nu-k,n}^0\Big), \qquad \nu = \overline{1, m_n-1},$$

$$d_{\nu,n}^1 := \frac{1}{\nu!} C^{(\nu)}(T,\lambda_n), \qquad d_{\nu,n}^0 := \frac{1}{(\nu+m_n)!}\Delta^{(\nu+m_n)}(\lambda_n), \qquad \nu = \overline{0, m_n-1}$$

и справедливы следующие оценки:

$$|M_{n+\nu}| \le C|\rho_n|^{\nu+2}, \qquad n > n^*, \qquad \nu = \overline{0, m_n-1}. \tag{6}$$

Определение 2. Последовательность $\{M_n\}_{n\ge1}$ называется последовательностью Вейля, а набор $\mathscr{D} := \{\lambda_n, M_n\}_{n\ge1}$ называется *спектральными данными*.

Обратная задача. *По заданным спектральным данным $\mathscr{D} := \{\lambda_n, M_n\}_{n\ge1}$ построить потенциал $q(x)$.*

2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для исследования обратной задачи условимся, что наряду с $\mathscr{L}$ будем рассматривать краевую задачу $\tilde{\mathscr{L}}$ того же вида, но с другим потенциалом $\tilde{q}$. Если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче $\mathscr{L}$, то соответствующий символ $\tilde{\gamma}$ с волной наверху будет обозначать аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{\mathscr{L}}$, а $\widehat{\gamma} := \gamma - \tilde{\gamma}$.

Теорема 2. *Если $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, $M_n = \widetilde{M}_n$, при всех $n \ge 1$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ почти всюду при $0 < x < T$. Таким образом, задание спектральных данных $\{\lambda_n, M_n\}$ однозначно определяет потенциал $q(x)$.*

Перейдем теперь к построению решения обратной задачи. Будем говорить, что $\mathscr{L} \in V$, если $q(x) \in W$. Обратную задачу будем решать в классе V.

Пусть заданы спектральные данные $\{\lambda_n, M_n\}_{n\ge1}$ из обратной задачи и пусть $\widetilde{\mathscr{L}}$ — некоторая модельная задача со спектральными данными $\widetilde{\mathscr{D}} = \{\widetilde{\lambda}_n, \widetilde{M}_n\}_{n\ge1}$. Обозначим

$$\lambda_{n,0} := \lambda_n, \qquad \lambda_{n,1} := \widetilde{\lambda}_n, \qquad M_{n,0} := M_n, \qquad M_{n,1} := \widetilde{M}_n,$$

$$\mathbb{S}_0 = \mathbb{S}, \qquad \mathbb{S}_1 = \widetilde{\mathbb{S}}, \qquad m_{n,0} := m_n, \qquad m_{n,1} := \widetilde{m}_n,$$

$$S_{n+\nu,i}(x) := S_\nu(x,\lambda_{n,i}), \qquad \widetilde{S}_{n+\nu,i}(x) := \widetilde{S}_\nu(x,\lambda_{n,i}), \qquad n \in \mathbb{S}_i, \qquad \nu = \overline{0, m_{n,i}-1}, \qquad i = 0,1,$$

$$D(x,\lambda,\mu) := \frac{1}{\eta(x)} \frac{\langle S(x,\lambda), S(x,\mu)\rangle}{\lambda-\mu}, \qquad D_{i,j}(x,\lambda,\mu) := \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial\lambda^i \partial\mu^j} D(x,\lambda,\mu),$$

$$\alpha_{n+\nu,i} := \sum_{p=\nu}^{m_{n,i}-1} |M_{n+p,i}|, \qquad n \in \mathbb{S}_i, \qquad \nu = \overline{0, m_{n,i}-1},$$

$$\xi_{n+\nu} := |\rho_{n,0} - \rho_{n,1}| + \frac{1}{\alpha_{n+\nu,0}} \sum_{p=\nu}^{m_n-1} |M_{n+p,0} - M_{n+p,1}|$$

при $n \in \mathbb{S}_0 \cap \mathbb{S}_1$, $m_n = \widetilde{m}_n$, $\nu = \overline{0, m_n - 1}$ и $\xi_n := 1$ для остальных n.

При $i, j = 0, 1$, $n \in \mathbb{S}_i$ положим

$$A_{n+\nu,i}(x,\lambda) := \sum_{p=\nu}^{m_{n,i}-1} M_{n+p,i} D_{0,p-\nu}(x,\lambda,\lambda_{n,i}), \qquad P_{n+\nu,i;k,j}(x) = \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu}{\partial\lambda^\nu} A_{k,j}(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_{n,i}},$$

$$B_{n+\nu,i}(x,\lambda) := \sum_{p=\nu}^{m_{n,i}-1} M_{n+p,i} S_{n+p-\nu,i}(x), \tag{7}$$

где $k \geq 1$, $\nu = \overline{0, m_{n,i} - 1}$. Аналогично обозначим $\widetilde{D}(x,\lambda,\mu)$, $\widetilde{D}_{i,j}(x,\lambda,\mu)$, $\widetilde{A}_{n+\nu,i}(x,\lambda)$, $\widetilde{B}_{n+\nu,i}(x,\lambda)$ и $\widetilde{P}_{n+\nu,i;k,j}(x)$, $n \geq 1$, $k \geq 1$, $i, j = 0, 1$, заменяя $S(x,\lambda)$ на $\widetilde{S}(x,\lambda)$ в веденных обозначениях.

Выберем задачу $\widetilde{\mathscr{L}}$ так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\alpha_{k,0} + \alpha_{k,1}) < \infty. \tag{8}$$

Теорема 3. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\widetilde{S}_{n,i}(x) = S_{n,i}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\widetilde{P}_{n,i;k,0}(x) S_{k,0}(x) - \widetilde{P}_{n,i;k,1}(x) S_{k,1}(x) \Big), \qquad n \geq 1, \qquad i = 0, 1, \tag{9}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, T]$.

Пусть w — множество индексов $u = (n, i)$, $n \geq 0$, $i = 0, 1$. Для каждого фиксированного $x \in [0, T]$ определим вектор

$$\psi(x) = (\psi_u(x))_{u \in w}^T = (\psi_{n,0}(x), \psi_{n,1}(x))_{n \geq 1}^T$$

(где T обозначает транспозицию) по формуле

$$\begin{pmatrix} \psi_{n,0}(x) \\ \psi_{n,1}(x) \end{pmatrix} = \rho_n^0 \begin{pmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{n,0}(x) \\ S_{n,1}(x) \end{pmatrix}, \qquad \chi_n = \begin{cases} \xi_n^{-1}, & \xi_n \neq 0, \\ 0, & \xi_n = 0. \end{cases}$$

Если $\psi_{n,0}$, $\psi_{n,1}$ даны, то $S_{n,0}$ и $S_{n,1}$ можно найти по формуле

$$\begin{pmatrix} S_{n,0}(x) \\ S_{n,1}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho_n^0} \begin{pmatrix} \xi_n & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{n,0}(x) \\ \psi_{n,1}(x) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Введем также блочную матрицу

$$H(x) = (H_{u;v}(x))_{u,v \in w} = \begin{pmatrix} H_{n,0;k,0}(x) & H_{n,0;k,1}(x) \\ H_{n,1;k,0}(x) & H_{n,1;k,1}(x) \end{pmatrix}_{n,k \geq 1}, \qquad u = (n,i),\ v = (k,j),$$

где

$$\begin{pmatrix} H_{n,0;k,0}(x) & H_{n,0;k,1}(x) \\ H_{n,1;k,0}(x) & H_{n,1;k,1}(x) \end{pmatrix} = \frac{\rho_n^0}{\rho_k^0} \begin{pmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n,0;k,0}(x) & P_{n,0;k,1}(x) \\ P_{n,1;k,0}(x) & P_{n,1;k,1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_k & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяются $\widetilde{\psi}_(x)$, $\widetilde{H}(x)$ заменой в предыдущих определениях $S_{n,i}(x)$ на $\widetilde{S}_{n,i}(x)$ и $P_{n,i;k,j}(x)$ на $\widetilde{P}_{n,i;k,j}(x)$.

Рассмотрим банахово пространство B ограниченных последовательностей вида $v = [v_u]_{u \in w}$ с нормой $\|v\|_B = \sup\limits_{u \in w} |v_u|$. При каждом фиксированном $x \in [0, a) \cup (a, T]$ матрицы $H(x)$ и $\widetilde{H}(x)$ порождают операторы $H(x)$ и $\widetilde{H}(x)$ соответственно, действующие из B в B и являющиеся линейными ограниченными операторами.

Теорема 4. *При каждом фиксированном $x \in [0,T]$ вектор $\psi(x) \in B$ удовлетворяет соотношению*

$$\widetilde{\psi}(x) = (I - \widetilde{H}(x))\psi(x) \tag{11}$$

в банаховом пространстве B, где I — единичный оператор.

В самом деле, запишем (9) в виде

$$\widetilde{S}_{n,0}(x) - \widetilde{S}_{n,1}(x) = S_{n,0}(x) - S_{n,1}(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\big(\widetilde{P}_{n,0;k,0}(x) - \widetilde{P}_{n,1;k,0}(x)\big)\big(S_{k,0}(x) - S_{k,1}(x)\big) +$$
$$+\big(\widetilde{P}_{n,0;k,0}(x) - \widetilde{P}_{n,1;k,0}(x) - \widetilde{P}_{n,0;k,1}(x) + \widetilde{P}_{n,1;k,1}(x)\big)S_{k,1}(x)\Big),$$
$$\widetilde{S}_{n,1}(x) = S_{n,1}(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\widetilde{P}_{n,1;k,0}(x)\big(S_{k,0}(x) - S_{k,1}(x)\big) + \big(\widetilde{P}_{n,1;k,0}(x) - \widetilde{P}_{n,1;k,1}(x)\big)S_{k,1}(x)\Big).$$

Учитывая введенные обозначения, получаем

$$\widetilde{\psi}_{n,i}(x) = \psi_{n,i}(x) - \sum_{(k,j)\in w}\widetilde{H}_{n,i;k,j}(x)\psi_{k,j}(x), \qquad (n,i)\in w, \tag{12}$$

что равносильно (11).

При каждом фиксированном $x \in [0,T]$ соотношение (11) можно рассматривать как линейное уравнение относительно $\psi(x)$. Это уравнение называется *основным уравнением* обратной задачи. Таким образом, нелинейная обратная задача сводится к решению линейного уравнения.

Теорема 5. *При каждом фиксированном $x \in [0,a)\cup(a,T]$ оператор $I - \widetilde{H}(x)$ имеет ограниченный обратный оператор, то есть основное уравнение* (11) *однозначно разрешимо.*

Используя решение основного уравнения, можно построить $q(x)$. Обозначим

$$\varepsilon_0(x) := \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\widetilde{B}_{k,0}(x)S_{k,0}(x) - \widetilde{B}_{k,1}(x)S_{k,1}(x)\Big), \qquad \varepsilon(x) := 2\varepsilon_0'(x). \tag{13}$$

Теорема 6. *Имеет место соотношение*

$$q(x) = \widetilde{q}(x) + \varepsilon(x). \tag{14}$$

Таким образом, мы получили следующий алгоритм решения обратной задачи.

Алгоритм. *Заданы спектральные данные $\mathscr{D} = \{\lambda_n, M_n\}$.*

(i) Выбираем $\widetilde{L}$ так, чтобы было справедливо (8) *и строим $\widetilde{\psi}(x)$, $\widetilde{H}(x)$.*

(ii) Находим $\psi(x)$ из уравнения (11) *и вычисляем $S_{n,k}(x)$, $n \geq 1$, $j = 0,1$ по формуле* (10).

(iii) находим $q(x)$ из формул (7), (13), (14).

Сформулируем теперь необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Теорема 7. *Для того чтобы комплексные числа $\{\lambda_n, M_n\}$ были спектральными данными для некоторой краевой задачи $\mathscr{L} \in V$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) существовала такая задача $\widetilde{\mathscr{L}}$, что справедливы (5), (6), (8);

2) (Условие P) при каждом фиксированном $x \in [0,a)\cup(a,T]$ линейный ограниченный оператор $I - \widetilde{H}(x)$, действующий из B в B имеет ограниченный обратный;

3) $\varepsilon(x)|x-a|^{\min(0,1-2\operatorname{Re}\nu)} \in L(0,T)$, где функция $\varepsilon(x)$ строится по формуле (13).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00134).

Библиографический список

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 330 с.

2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М. : Наука, 1984. 239 с.

3. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.

4. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002. 303 p.

Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability of the Inverse Problem for Sturm–Liouville Operators with a Nonintegrable Singularity Inside a Finite Interval

A. E. Fedoseev

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, fedoseev_ae@mail.ru

The inverse spectral problem of recovering Sturm–Liouville operators on a finite interval with a nonintegrable Bessel-type singularity in an interior point from the given spectral data is studied. A corresponding uniqueness theorem is proved, a constructive procedure for the solution of the inverse problem is provided. Necessary and sufficient conditions for the solvability of the inverse problem are obtained.

Key words: Sturm–Liouville operators, inverse problems, nonintegrable singularity, Weyl function, spectral data.

References

1. Marchenko V. A. *Sturm–Liouville operators and applications*. Basel, Birkhüser, 1986. 367 p. (Russ. ed.: Marchenko V. A. *Operatory Shturma–Liuvillia i ikh prilozheniia*. Kiev, Naukova Dumka, 1977. 331 p.)
2. Levitan B. M. *Inverse Sturm–Liouville problems*. Utrecht, VNU, 1987, 240 p. (Russ. ed.: Levitan B. M. *Obratnye zadachi Shturma–Liuvillia*. Moscow, Nauka, 1984, 239 p.)
3. Yurko V. A. *Vvedenie v teoriiu obratnykh spektral'nykh zadach* [Introduction to the theory of inverse spectral problems]. Moscow, Fizmatlit, 1984, 384 p. (in Russian).
4. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*, Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002, 303 p.