no. 4, pp. 511–517. DOI: 10.1007/s11006-006-0056-0.
6. Abanina L. E., Mishchenko S. P. Nekotorye mnogoobraziia algebr Leibnitsa [Some varieties of Leibnitz algebras]. *Matematicheskie metody i prilozheniia : tr. deviatykh matematicheskikh chtenii MGSU* [Mathematical methods and appendices. Works of the ninth mathematical readings MSSU], 2002, pp. 95–99 (in Russian).
7. Skoraya T. V. Structure of multilinear part of variety $\widetilde{\mathbf{V}}_3$. *Uchenye zapiski OGU* [Scientific notes of the OSU], 2012, no. 6(2), pp. 203–212. (in Russian)
8. Mishchenko S. P., Shishkina T. V. On almost polynomial growth varieties of Leibniz algebras with the identity x(y(zt))=0. *Vestnik of the Moscow university, Ser. 1 : Mathematics and mechanics*, 2010, vol. 3, pp. 18–23 (in Russian).

УДК 511

О КОЛИЧЕСТВЕ ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЦЕЛОГО ЧИСЛА С ОГРАНИЧЕНИЕМ КРАТНОСТИ

Г. В. Федоров

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математических и компьютерных методов анализа механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, fedorov@mech.math.msu.su

В данной статье исследуются обобщения числовых функции, связанные с количеством простых делителей заданного числа. Получены верхние и нижние предельные значения, а также асимптотические фрмулы для средних значений количества простых делителей, входящие в целое число с ограничением кратности.

Ключевые слова: функция делителей, теорема Мерсенна, простая дзета-функция.

Памяти Г. И. Архипова

ВВЕДЕНИЕ

Для каждого натурального числа n в соответствии с основной теоремой арифметики имеет место разложение на множители

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} = \prod_{p|n} p^{\alpha_p},$$

причем такое представление единственно с точностью до порядка следования сомножителей. В теории чисел хорошо известны функции $\Omega(n)$ и $\omega(n)$ равные количеству простых делителей числа n соответственно с учетом и без учета кратных делителей:

$$\Omega(n) = \sum_{p|n} \alpha_p, \qquad \omega(n) = \sum_{p|n} 1.$$

Свойства этих функций изучены достаточно глубоко, в частности, для функции $\omega(n)$ верхний порядок роста

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\omega(n) \cdot \log_2 \log_2 n}{\log_2 n} \right) = 1$$

достигается на последовательности $n = n_m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m$ — произведение последовательных простых чисел, $p_1 = 2$. При этом стоит отметить, что для произвольного $n \le n_m$ выполнено неравенство $\omega(n) \le \omega(n_m)$. Минимальное значение функции $\Omega(n)$ и $\omega(n)$ принимают на простых числах

$$\Omega(p) = \omega(p) = 1.$$

Верхнее предельное значение функции $\Omega(n)$ достигается на последовательности $n = n_a = 2^a$, причем для произвольного $n \le n_a$ выполнено неравенство $\Omega(n) \le \Omega(n_a) = a$.

Определим обобщенные функции $\Omega(k,n)$ и $\omega(k,n)$ следующим образом:

$$\Omega(k,n) = \sum_{\substack{p|n \\ \alpha_p \le k}} \alpha_p, \qquad \omega(k,n) = \sum_{\substack{p|n \\ \alpha_p > k}} 1,$$

где при суммировании учитываются только те простые сомножители p целого числа n, которые входят в разложение с кратностью, удовлетворяющей соответственно условиям $\alpha_p \le k$ или $\alpha_p > k$. В частности, $\Omega(\log_2 n, n) = \Omega(n)$, $\Omega(0,n) = 0$, $\omega(\log_2 n, n) = 0$, $\omega(0,n) = \omega(n)$.

В данной работе найден верхний порядок роста функций $\Omega(k,n)$ и $\omega(k,n)$ при растущем ограничении кратности k.

Теорема 1. *Пусть $k = k(n) \to \infty$, причем $\dfrac{\log_2 k}{\log_2 \log_2 n} \to A$ при $n \to \infty$, где $0 \le A < 1$ — некоторая постоянная величина. Тогда выполнены следующие предельные соотношения:*

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\Omega(k,n)\cdot \log_2\log_2 n}{\log_2 n} \right) = \frac{1}{1-A}, \tag{1}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\omega(k,n)\cdot k \cdot \log_2\log_2 n}{\log_2 n} \right) = \frac{1}{1-A}. \tag{2}$$

Среднее значение функций $\Omega(n)$ и $\omega(n)$ представлены асимптотическими формулами (см., например, [1])

$$\sum_{2\le n\le x} \Omega(n) = x\ln\ln x + A_0 x + \mathscr{O}\left(\frac{x}{\ln x}\right), \qquad \sum_{2\le n\le x} \omega(n) = x\ln\ln x + A_1 x + \mathscr{O}\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

Далее мы будем использовать асимптотическую формулу для ряда из обратных простых чисел (*вторая теорема Мерсена*, см., например, [2]):

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + B_1 + \mathscr{O}\left(\frac{1}{\ln x}\right). \tag{3}$$

Теорема 2. *При $k \ge 1$ верны асимптотические формулы:*

$$\sum_{2\le n\le x} \Omega(k,n) = x\ln\ln x + C_k x + \mathscr{O}\left(k\cdot\frac{x}{\ln x}\right), \tag{4}$$

$$\sum_{2\le n\le x} \omega(k,n) = P(k+1)\cdot x + \mathscr{O}\left(\frac{(k+1)\cdot x^{\frac{1}{k+1}}}{\ln x}\right), \tag{5}$$

где $C_1 = B_1 - P(2)$, B_1 — постоянная, определенная формулой (3), *а при $r \ge 2$*

$$C_r = B_1 + \sum_{m=2}^{r} P(m) - r\cdot P(r+1), \qquad P(r) = \sum_{p} \frac{1}{p^r}.$$

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Без ограничения общности далее будем считать, что $k \ge 1$ — целое число.

Доказательство теоремы 1. Соотношение (1) вытекает из следующих двух замечаний:

(i) верхний предел достигается на последовательности $\{(n_m)^k\}$, где $n_m = p_1 \cdot \dots \cdot p_m$ — произведение последовательных простых чисел, $p_1 = 2$;

(ii) при любом $n < (n_m)^k$ справедливо неравенство $\Omega(k,n) < \Omega\bigl(k,(n_m)^k\bigr)$.

В силу того что

$$\ln n_m = \sum_{m\le m} \ln p_m = p_m + \mathfrak{o}(p_m),$$

из закона распределения простых чисел следует представление

$$m = \pi(p_m) = \frac{p_m}{\ln p_m} + \mathfrak{o}\left(\frac{p_m}{\ln p_m}\right) = \frac{\ln n_m}{\ln\ln n_m} + \mathfrak{o}\left(\frac{\ln n_m}{\ln\ln n_m}\right). \tag{6}$$

Тогда при $n = (n_m)^k$ получаем, что $\Omega(k,n) = k \cdot m$, причем из (6) имеем:

$$m = \frac{\log_2 n_m}{\log_2 \log_2 n_m}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big) = \frac{\frac{1}{k}\log_2 n}{\log_2\log_2 n - \log_2 k}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big) = \frac{\frac{1}{k}\log_2 n}{(1-A)\log_2\log_2 n}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big).$$

Таким образом, при $n = n(m) = (n_m)^k$ получаем:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\Omega(k,n)\cdot\log_2\log_2 n}{\log_2 n}\right) = \frac{1}{1-A}.$$

Аналогично соотношение (2) вытекает из следующих двух утверждений:

(i) верхний предел достигается на последовательности $\{(n_m)^{k+1}\}$, где $n_m = p_1 \cdot \dots \cdot p_m$ — произведение последовательных простых чисел, $p_1 = 2$;

(ii) при любом $n < (n_m)^{k+1}$ справедливо неравенство $\omega(k,n) < \omega\big(k,(n_m)^k\big)$.

При $n = (n_m)^{k+1}$ имеем $\omega(k,n) = m$, где из (6) следует, что

$$m = \frac{\log_2 n_m}{\log_2 \log_2 n_m}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big) = \frac{\frac{1}{k+1}\log_2 n}{\log_2\log_2 n - \log_2 (k+1)}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big) = \frac{\frac{1}{k}\log_2 n}{(1-A)\log_2\log_2 n}\big(1 + \mathfrak{o}(1)\big).$$

Таким образом, при $n = n(m) = (n_m)^{k+1}$ получаем:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\omega(k,n)\cdot(k+1)\cdot\log_2\log_2 n}{\log_2 n}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\omega(k,n)\cdot k\cdot\log_2\log_2 n}{\log_2 n}\right) = \frac{1}{1-A}.$$

Теорема 1 доказана.

СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Среднее значение (4) может быть получено путем следующих преобразований:

$$\sum_{2\le n\le x}\Omega(k,n) = \sum_{2\le n\le x}\sum_{\substack{p|n\\ \alpha_p\le k}}\alpha_p = \sum_{2\le p\le x}\sum_{\substack{n\le x: p|n\\ \alpha_p\le k}}\alpha_p.$$

Количество целых положительных чисел, не превосходящих x, делящихся на p^m, но не делящихся на p^{m+1}, равно

$$\left[\frac{x}{p^m}\right] - \left[\frac{x}{p^{m+1}}\right],$$

поэтому

$$\sum_{2\le n\le x}\Omega(k,n) = \sum_{2\le p\le x}\sum_{m=1}^{k} m\left(\left[\frac{x}{p^m}\right] - \left[\frac{x}{p^{m+1}}\right]\right) = \sum_{2\le p\le x}\left(\left(\sum_{m=1}^{k}\left[\frac{x}{p^m}\right]\right) - k\left[\frac{x}{p^{k+1}}\right]\right) =$$

$$= x\sum_{p\le x}\frac{1}{p} + x\sum_{m=2}^{k}\sum_{p\le x}\frac{1}{p^m} - kx\sum_{p\le x}\frac{1}{p^{k+1}} + \mathscr{O}\left(k\cdot\frac{x}{\ln x}\right).$$

Дробные доли здесь оценены тривиальным образом. Для рядов из степеней простых чисел в [3] определена «простая дзета-функция» (prime zeta function)

$$P(m) = \sum_{p}\frac{1}{p^m},$$

суммирование ведется по всем простым числам. При $m > 1$ ряд $P(m)$ сходится, причем

$$\sum_{2\le p\le T}\frac{1}{p^m} = P(m) + \mathscr{O}\left(\frac{1}{T^{m-1}\cdot\ln T}\right). \tag{7}$$

С учетом формулы (7) получаем:

$$\sum_{2\le n\le x}\Omega(k,n)=x\ln\ln x+C_kx+\mathscr{O}\left(k\cdot\frac{x}{\ln x}\right),$$

где

$$C_k=B_1+\sum_{m=2}^{k}P(m)-k\cdot P(k+1).$$

Таким образом, формула (4) доказана.

Для доказательства формулы (5) запишем

$$\sum_{2\le n\le x}\omega(k,n)=\sum_{2\le n\le x}\sum_{\substack{p|n\\ \alpha_p>k}}1=\sum_{2\le p\le x}\sum_{\substack{n\le x\\ p^{k+1}|n}}1=\sum_{2\le p\le x}\left[\frac{x}{p^{k+1}}\right].$$

Заметим, что при $p>x^{\frac{1}{k+1}}$ выполнено $x/p^{k+1}<1$, поэтому

$$\sum_{2\le n\le x}\omega(k,n)=\sum_{2\le p\le x^{\frac{1}{k+1}}}\left[\frac{x}{p^{k+1}}\right]=x\sum_{2\le p\le x^{\frac{1}{k+1}}}\frac{1}{p^{k+1}}+\mathscr{O}\left(\frac{x^{\frac{1}{k+1}}}{\ln x^{\frac{1}{k+1}}}\right)=$$

$$=P(k+1)\cdot x+\mathscr{O}\left(\frac{(k+1)\cdot x^{\frac{1}{k+1}}}{\ln x}\right).$$

Дробные доли мы опять оценили тривиальным образом и воспользовались соотношением (7).

Теорема 2 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные теоремы оказываются полезными при исследовании верхнего порядка роста функции делителей $\tau_k(n)$ с растущей размерностью k. Напомним, что *многомерная функция делителей* $\tau_k(n)$ определяется как количество представлений натурального n в виде произведения $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k=n$, где $x_1,x_2,\ldots,x_k$ — натуральные числа. В случае $k=2$ значение функции $\tau_2(n)=\tau(n)$ равно количеству различных делителей натурального числа n. В общем случае у многомерной функции делителей $\tau_k(n)$ число сомножителей k в представлении числа n будем называть ее *размерностью*.

С использованием результатов теоремы 1 автору удалось найти верхний порядок роста функции делителей при значениях размерности следующего вида:

$$k=k(n)=(\log_2 n)^{A+\mathfrak{o}(1)},$$

где A — некоторая постоянная величина. В статье [4] доказаны следующие утверждения.

(i) При $0<A<1$ и достаточно больших значениях n выполнено неравенство

$$\tau_k(n)\le n^{A+\mathfrak{o}(1)},$$

причем равенство достигается на последовательности чисел $n_m=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_m$.

(ii) При $A>1$ и достаточно больших значениях n справедливо неравенство

$$\tau_k(n)\le n^{\log_2\left(\frac{k}{\log_2 n}\right)\cdot\left(1+\mathfrak{o}(1)\right)}=n^{(A-1)\log_2\log_2 n\left(1+\mathfrak{o}(1)\right)},$$

причем равенство достигается на последовательности чисел $n_s=2^s$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. Н. Чубарикову за научное руководство.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00835).

Библиографический список

1. *Hardy G. H., Ramanujan S.* The normal number of prime factors of a number n// Quart. J. Math. 1917. Vol. 48. P. 76–92.
2. *Tanenbaum G., Mendes France M.* The prime numbers and their distribution. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2000. 115 p.
3. *Fröberg C.-E.* On the prime zeta function // BIT 8. 1968. P. 187–202.
4. *Федоров Г. В.* Верхнее предельное значение функции делителей с растущей размерностью // Докл. АН. 2013. Т. 452, № 2. С. 141–143. DOI: 10.7868/S0869565213270042.

On a Number of Prime Divisors of an Integer with Bounded Multipleness

G. V. Fjodorov

Moscow State University, Russia, 119991, Moscow, Leninskie Gory st., GSP-1, fedorov@mech.math.msu.su

In this article generalisations of numeric functions related to a number of prime divisors of a given number are investigated. Upper and lower limit values of a number of prime divisors of a bounded power of integer are obtained.

Key words: devisor function, Mersenne theorem, prime zeta function.

References

1. *Hardy G. H., Ramanujan S.* The normal number of prime factors of a number n. *Quart. J. Math.*, 1917, vol. 48, pp. 76–92.
2. Tanenbaum G., Mendes France M. *The prime numbers and their distribution*. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2000, 115 p.
3. Fröberg C.-E. On the prime zeta function. *BIT 8*. 1968. P. 187–202.
4. Fedorov G. V. The upper limit value of the divisor function with growing dimension. *Doklady Math.*, 2013, vol. 88, no. 2, pp. 529–531. DOI: 10.1134/S1064562413050074.

УДК 512.579

КОНГРУЭНЦИИ ПОЛИГОНОВ НАД ГРУППАМИ

А. Р. Халиуллина

Аспирант кафедры высшей математики № 1, Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, Зеленоград, haliullinaar@gmail.com

Получено полное описание конгруэнций полигонов над группами.

Ключевые слова: полигон, конгруэнция, группа.

ВВЕДЕНИЕ

Полигоны над полугруппой, т. е. множества, на которых действует полугруппа, возникают в разных разделах алгебры и ее приложений. Понятие полигона является алгебраическим выражением понятия автомата (см. [1] и [2, гл. 6]), точнее, автомата Мура, т.е. автомата без выхода. Теория полигонов является довольно молодым разделом общей алгебры, а теория конгруэнций полигонов вообще находится на начальной стадии развития. А. Ю. Авдеевым и И. Б. Кожуховым в [3] было дано описание полигонов над регулярными рисовскими матричными полугруппами $M^0(G, I, \Lambda, P)$ (т. е. вполне 0-простыми полугруппами). Все правые конгруэнции на этих полугруппах были описаны Р. Оэмке в [4]. Это можно считать описанием конгруэнций свободного циклического полигона над вполне 0-простой полугруппой. Описание конгруэнций произвольных полигонов над вполне 0-простыми или вполне простыми полугруппами представляется довольно сложной математической задачей. Поэтому естественно рассматривать частные случаи таких полугрупп. Данная работа делает первый