определены оптимальные диапазоны параметров первого варианта распараллеливания ГА, обеспечивающие небольшое время поиска глобального минимума ЦФ и высокую надёжность его нахождения при выполнении на параллельной ВС.

Тестирование второго варианта распараллеливания ГА, основанного на множественном запуске на параллельной ВС, показало значительное увеличение вероятности нахождения глобального экстремума за счёт более полного исследования области факторного пространства ЦФ. Время выполнения параллельного алгоритма при этом практически не зависело от числа узлов ВС и примерно равнялось времени выполнения алгоритма на одном узле ВС.

Таким образом, предложенные варианты распараллеливания генетического алгоритма оптимизации могут эффективно применяться для решения задач поиска как глобального минимума многоэкстремальной ЦФ при наличии ограничений на варьируемые параметры (первый вариант), так и его области (второй вариант).

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Министерства образования и науки РФ «Подготовка и переподготовка профильных специалистов на базе центров образования и разработок в сфере информационных технологий в Южном и Северо-Кавказском федеральных округах» (*государственный контракт* № 07.Р20.11.0029).

Библиографический список

1. *Орлянская И. В.* Современные подходы к построению методов глобальной оптимизации // Электронный журнал «Исследовано в России». С. 2097–2108. URL : http://zhurnal.ape.relarn. ru/articles/2002/189.pdf (дата обращения : 2.12.2011). [*Orlyanskaya I. V.* Modern approaches to global optimization methods building // Online magazine «Issledovano v Rossii». P. 2097–2108. URL : http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/189.pdf (last checked : 2.12.2012).]

2. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс. М. : Радио и связь, 1988. 127 с. [*Brian D. Bunday* Basic Optimisation Methods. London : Edward Arnold, 1984. 128 p.]

3. *Панченко Т. В.* Генетические алгоритмы : учеб.-метод. пособие / под ред. Ю. Ю. Тарасевича / Астрахан. ун-т. Астрахань, 2007. 87 с. [*Panchenko T. V.* Genetic algorithms : the methodical manual / Ed. by Yu. Yu. Tarasevich / Astrakhan. Univer. Astrakhan, 2007. 87 p.]

4. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с. [*Kalitkin N. N.* Numerical methods. Moscow : Nauka, 1978. 512 p.]

5. *Eroftiev A. A., Timofeeva N. E., Savin A. N.* Parallel Computing in Application to Global Optimization Problem Solving // Grid and Visualization Systems : MIPRO, 2011 Proc. of the 34th Intern. Convention. Zagreb, Croatia : DENONA, 2011. P. 185–190.

УДК 501.1

ГЛАВНЫЕ ИДЕАЛЫ В ПОЛУРЕШЕТКЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЦЕПИ

Е. О. Фомина

Саратовский государственный университет
E-mail: janekao@mail.ru

Показано, что главные идеалы, порождаемые однотипными конгруэнциями цепи, изоморфны как решетки. Подсчитано количество элементов, атомов и коатомов в главном идеале порождаемой данной конгруэнцией цепи.

Ключевые слова: цепь, конгруэнция, полурешетка, главный идеал, атом, коатом.

Principal Ideals in the Congruence Semilattice of a Path

E. O. Fomina

It is proven that principal ideals generated by congruences of a path having the same type are isomorphic lattices. The number of elements, atoms and coatoms is found for the principal ideal generated by a given congruence of a path.

Key words: path, congruence, semilattice, principal ideal, lattice, atom, coatom.

Ориентированным графом (далее орграфом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество, а α — отношение на V. Множество V называется множеством вершин, отношение α — отношение смежности, а пары, входящие в α, — дуги орграфа G. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершина v смежна с вершиной u. Основные понятия приводятся в соответствии с [1].

Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V. Фактографом орграфа G по эквивалентности ε называется орграф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где V/ε — множество классов эквивалентности ε, а $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) : (\exists\, u_1 \in \varepsilon(v_1), \exists\, u_2 \in \varepsilon(v_2))((u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Пусть K — некоторый класс орграфов. Конгруэнцией K-графа G называется такое отношение эквивалентности θ на V, что факторграф G/θ является K-графом.

В качестве класса K возьмем класс неориентированных графов.

Под неориентированным графом (или, для краткости, графом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V. В неориентированном графе пара встречных дуг $(u, v)(v, u)$ рассматривается как один элемент графа, называемый ребром $\{u, v\}$. Вершины u и v по определению инцидентны ребру $\{u, v\}$.

Известна следующая задача о факторизации: можно ли для заданного графа сказать, является ли он факторграфом другого заданного графа? Эта задача является NP-полной.

В [2] показано, что каждый связный граф является факторграфом подходящей цепи.

Множество вершин графа называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны. Очевидно, что отношение эквивалентности θ на множестве вершин графа $G = (V, \alpha)$ тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый θ-класс образует в G независимое подмножество.

Отношение ω на множестве S называется отношением порядка, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично: ω — порядок на $S \Longleftrightarrow \Delta \subseteq \omega \,\&\, \omega \circ \omega \subseteq \omega \,\&\, \omega \cap \omega^{-1} \subseteq \Delta$, где Δ — тождественное отношение на S.

Пусть S — непустое множество и ω — отношение порядка на нем. Пара (S, ω) называется упорядоченным множеством. В дальнейшем произвольное упорядоченное множество будем обозначать как $(S, \leq)$.

Пусть P_m — неориентированная m-реберная цепь и пусть в цепи P_m вершины пронумерованы натуральными числами $0, 1, 2, \ldots, m$. Обозначим совокупность всех конгруэнций цепи P_m через $Con P_m$. Пара $(Con\, P_m, \subseteq)$ будет упорядоченным множеством, так как множество всех конгруэнций цепи P_m упорядочено по включению.

Наименьшим элементом упорядоченного множества $(S, \leq)$ называется элемент s, удовлетворяющий в $(S, \leq)$ тождественному неравенству $s \leq x$. Наибольший элемент определяется в $(S, \leq)$ тождественным неравенством: $x \leq s$.

Пусть S^* — некоторое подмножество упорядоченного множества $(S, \leq)$. Элемент $a \in S$ называется нижней гранью подмножества $S*$, если $a \leq x$ для всех $x \in S^*$ и верхней гранью для S^*, если $a \geq x$ для всех $x \in S^*$. Под наибольшей нижней гранью подмножества S^* в упорядоченном множестве $(S, \leq)$ понимается наибольший (если он существует) элемент в множестве всех нижних граней для S^*. Аналогично определяется верхняя грань и наименьшая верхняя грань подмножества S^*; это наименьший элемент (если он существует) в множестве всех верхних граней для S^*. Очевидно, что любое подмножество $S^* \subseteq S$ имеет не более одной наибольшей нижней грани и не более одной наименьшей верхней грани. Эти элементы обозначают соответственно $\inf\, S^*$ (инфимум) и $\sup\, S^*$ (супремум) и называют также точными (нижней и верхней соответственно) гранями подмножества S^*. Под нижней полурешеткой понимается упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов x, y существует $\inf\, (x, y)$.

Упорядоченное множество $(S, \leq)$ называется решеткой, если каждое его конечное подмножество имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани. Известно, что конечная нижняя полурешетка с наибольшим элементом является решеткой.

Так как для любых двух элементов θ_1 и θ_2 в упорядоченном множестве $(Con\, P_m, \subseteq)$ существует $\inf\, (\theta_1, \theta_2) = \theta_1 \cap \theta_2$, то $(Con\, P_m, \subseteq)$ — нижняя полурешетка.

Пусть u и v — любые две несмежные вершины цепи $Con P_m$. Главной конгруэнцией, порожденной парой u, v, называется наименьшая конгруэнция $\theta(u, v)$, отождествляющая вершины u и v. Очевидно, что такие конгруэнции являются атомами в полурешетке $(Con\, P_m, \subseteq)$, так как не существует такой конгруэнции θ^*, что $\Delta \subset \theta^* \subset \theta(u, v)$.

Рассмотрим экстремальные элементы в полурешетке всех конгруэнций цепи P_m. Наименьшим элементом ее является тождественная конгруэнция Δ. Наибольшего элемента в $(Con\, P_m, \subseteq)$ при $m \geq 3$ нет. Возьмем, например, главные конгруэнции $\theta(0, 2)$ и $\theta(0, 3)$, которые есть у любой цепи P_m

при $m \geq 3$. У этих конгруэнций нет общей верхней грани: если θ содержит $\theta(0,2)$ и $\theta(0,3)$, то в силу транзитивности $(2,3) \in \theta$, что невозможно, так как вершины 2 и 3 смежные в P_m. В $(Con\, P_m, \subseteq)$ при $m > 2$ будет более одной максимальной конгруэнции. Таким образом, наибольшего элемента в таких упорядоченных множествах не будет.

Говорят, что в упорядоченном множестве $(S, \leq)$ элемент b является верхним соседом элемента a, если $a < b$ и не существует $x \in S$ такого, что $a < x < b$, при этом говорят, что a — нижний сосед для b. Верхние соседи наименьшего элемента называются атомами упорядоченного множества S. Нижние соседи наибольшего элемента называются коатомами упорядоченного множества S.

Главным идеалом, порожденным конгруэнцией θ, называется подмножество полурешетки $(Con\, P_m, \subseteq)$, образуемое всеми конгруэнциями θ^* такими, что $\theta^* \subseteq \theta$. Очевидно, что главный идеал является решеткой.

Введем понятие «тип конгруэнции».

Типом конгруэнции называется последовательность мощностей классов конгруэнции, записанная в порядке убывания. Обозначим тип конгруэнции θ как $t(\theta)$.

Пример 1. Конгруэнции $\{0,2,4\}\{1,3\}\{5\}$ и $\{0,2,5\}\{1,4\}\{3\}$ цепи P_5 имеют один тип (3,2,1), а конгруэнция $\{0\}\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{5\}$ цепи P_5 имеет тип (1,1,1,1,1,1).

Изоморфизмом между двумя решетками S и T называется взаимно однозначное соответствие $\varphi : S \to T$ между ними, которое удовлетворяет следующим двум условиям для любых $x, y \in S$:

1) из $x \leq y$ следует, что $\varphi(x) \leq \varphi(y)$;

2) из $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ следует, что $x \leq y$.

Изоморфность решеток S и T будем обозначать как $S \cong T$.

Теорема 1. *Главные идеалы, порожденные конгруэнциями одного типа в полурешетке $(Con\, P_m, \subseteq)$, являются изоморфными решетками.*

Доказательство. Возьмем главные идеалы $\mathrm{Id}\,\theta_1$ и $\mathrm{Id}\,\theta_2$ в полурешетке $(Con\, P_m, \subseteq)$, порожденные однотипными конгруэнциями θ_1 и θ_2 соответственно. Покажем, что $\mathrm{Id}\,\theta_1 \cong \mathrm{Id}\,\theta_2$.

Рассмотрим конгруэнции θ_1 и θ_2. Так как θ_1 и θ_2 — конгруэнции одного типа, то количество их классов будет одинаково. Запишем классы конгруэнций в порядке убывания по количеству элементов в каждом классе, а сами элементы в каждом классе запишем в порядке их возрастания. Таким способом выстроим последовательность вершин цепи в порядке их следования в каждой конгруэнции. Для θ_1 получим $u_0, u_1, \ldots, u_m$, а для θ_2 получим $v_0, v_1, \ldots, v_m$. Очевидно, что каждая последовательность перечисляет в некотором порядке все вершины цепи P_m. Определим биекцию на множестве вершин цепи, полагая $\varphi(u_i) = v_i, i = 0, 1, \ldots, m$.

Возьмем конгруэнцию $\theta \in \mathrm{Id}\,\theta_1$, т. е. $\theta \subseteq \theta_1$. Произведем замену каждого элемента u_i в каждом классе конгруэнции θ на $\varphi(u_i), i = 0, 1, \cdots, m$. Получим $\varphi(\theta)$ — некоторый набор подмножеств множества вершин цепи P_m. Так как φ — биекция и в θ задействованы все вершины цепи P_m, то и $\varphi(\theta)$ содержит все вершины цепи P_m, значит $\varphi(\theta)$ — классы, образующие покрытие множества вершин V. Если классы перекрываются, то $\varphi(u) = \varphi(v)$ для некоторых $u, v \in V$, но тогда $u = v$, что невозможно. Таким образом, $\varphi(\theta)$ будет разбиением множества V. Из некоторого класса разбиения $\varphi(\theta)$ возьмем вершины $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$, тогда $(\varphi(u), \varphi(v)) \in \varphi(\theta) \Rightarrow (u, v) \in \theta \Rightarrow (u, v) \in \theta_1 \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \theta_2 \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \notin \alpha$ (α — отношение смежности в цепи P_m). Следовательно, $\varphi(\theta)$ — разбиение на множестве вершин цепи P_m, все классы которого будут независимыми, т. е. $\varphi(\theta)$ — конгруэнция на множестве вершин цепи P_m.

Покажем, что $\varphi(\theta) \in \mathrm{Id}\,\theta_2$, для этого установим тот факт, что любой класс конгруэнции $\varphi(\theta)$ входит в состав некоторого класса конгруэнции θ_2. Ранее было показано, что любые $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$, находящиеся в одном классе конгруэнции $\varphi(\theta)$, попадут в один класс конгруэнции θ_2, т. е. $(\varphi(u), \varphi(v)) \in \varphi(\theta) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \theta_2$. Таким образом, получаем, что любой класс $\varphi(\theta)$ является подклассом некоторого класса конгруэнции θ_2, следовательно, $\varphi(\theta) \in \mathrm{Id}\,\theta_2$.

С помощью φ установлено взаимно однозначное соответствие между главными идеалами $\mathrm{Id}\,\theta_1$ и $\mathrm{Id}\,\theta_2$. В дальнейшем под φ будем понимать $\varphi : \mathrm{Id}\,\theta_1 \to \mathrm{Id}\,\theta_2$. Из приведенных выше рассуждений следует, что это соответствие сохраняет порядок, т. е. если $\theta^* \subseteq \theta$, то $\varphi(\theta^*) \subseteq \varphi(\theta)$, и обратно. В результате получим, что φ — изоморфизм. $\square$

Пример 2. На рис. 1 и рис. 2 представлены изоморфные решетки, порожденные конгруэнциями $\{0,2,4\}\{1,3\}\{5\}$ и $\{0,2,5\}\{1,4\}\{3\}$ цепи P_5 одного типа (3,2,1). На рис. 3 изображена решетка, порожденная произвольной конгруэнцией типа (3,2,1).

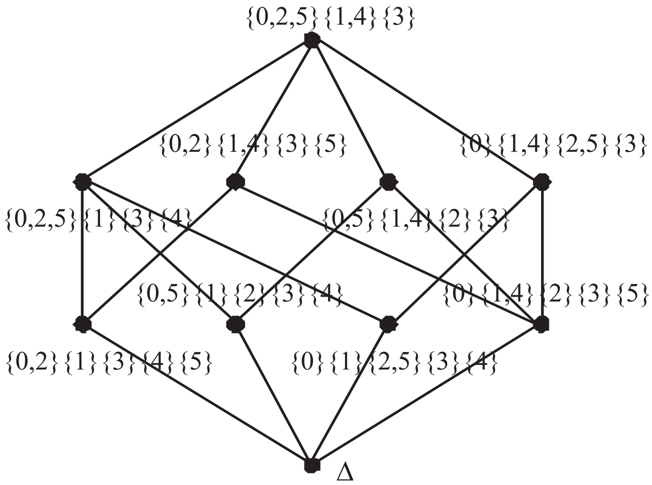

Рис. 1

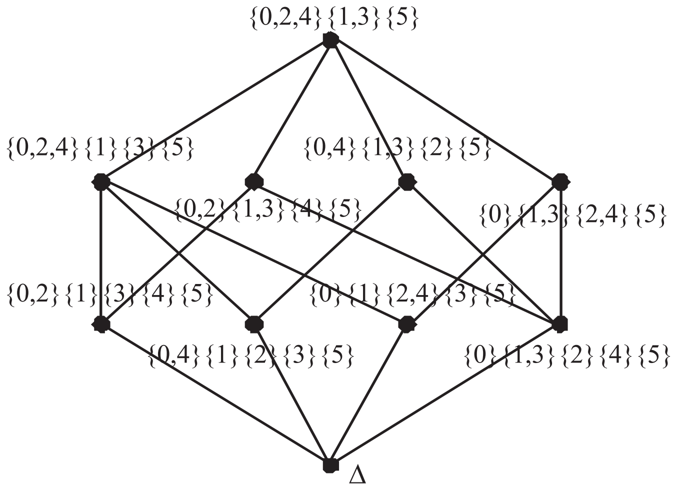

Рис. 2

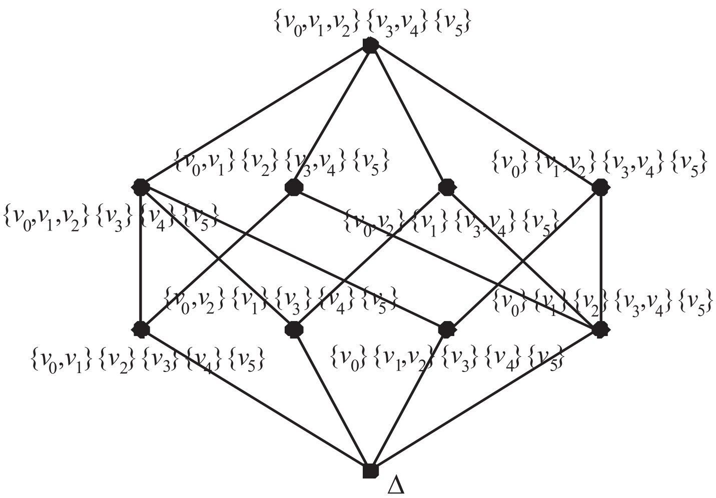

Рис. 3

Определим числа Белла и числа Стирлинга. Числом Белла $B(n)$ называется количество всех разбиений n-элементного множества. Числом Стирлинга второго рода $s_2(n,k)$ называется количество всех разбиений с k классами на n-элементном множестве.

Подсчитаем общее количество элементов решетки $\mathrm{Id}\,\theta$, порожденной конгруэнцией θ. Пусть конгруэнция θ имеет тип $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Элементами решетки $\mathrm{Id}\,\theta$ будут всевозможные конгруэнции θ^* такие, что любой класс конгруэнции θ^* входит в состав некоторого класса конгруэнции θ.

Пусть $\theta^* \in \mathrm{Id}\,\theta$. Так как любой класс конгруэнции θ^* входит в состав некоторого класса конгруэнции θ, то конгруэнция θ^* будет подразбиением конгруэнции θ.

Таким образом, необходимо подсчитать всевозможные разбиения классов конгруэнции θ. Так как нам известна мощность каждого класса конгруэнции θ, а количество разбиений n-элементного множества — это число Белла B_n, то общее количество элементов решетки $\mathrm{Id}\,\theta$, порожденной конгруэнцией θ типа $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, можно подсчитать по формуле: $B(t_1) \cdot B(t_2) \cdot \ldots \cdot B(t_n)$.

Найдем количество коатомов в главном идеале $\mathrm{Id}\,\theta$, порожденном конгруэнцией θ типа $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Конгруэнция θ имеет n классов и будет наибольшим элементом в решетке $\mathrm{Id}\,\theta$. Так как коатомы являются нижними соседями наибольшего элемента, то конгруэнция, являющаяся коатомом, имеет $n+1$ классов.

Возьмем произвольный класс конгруэнции θ, разобьем его на два класса. Получим новую конгруэнцию θ^* с $n+1$ классами. Найдем все возможные разбиения на два класса произвольного θ-класса мощности t, их количество будет $s_2(t,2)$. Таким образом, возьмем каждый класс конгруэнции θ, и найдем его всевозможные разбиения на два класса, каждое такое разбиение будет коатомом. Таким образом, общее количество коатомов можно посчитать по формуле $s_2(t_1,2) + s_2(t_2,2) + \ldots + s_2(t_n,2)$.

Подсчитаем количество атомов в главном идеале $\mathrm{Id}\,\theta$, порожденном конгруэнцией θ типа $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Атомами являются верхние соседи наименьшего элемента, т. е. это главные конгруэнции.

Пусть $\theta^* \in \mathrm{Id}\,\theta$ будет главной конгруэнцией. Согласно определению главной конгруэнции, очевидно, что один из классов конгруэнции θ^* будет иметь мощность 2, все остальные мощность 1. Так как $\theta^* \in \mathrm{Id}\,\theta$, то любой класс конгруэнции θ^* входит в состав некоторого класса конгруэнции θ, значит, конгруэнция θ^* будет подразбиением конгруэнции θ. Таким образом, найдем всевозможные пары элементов каждого класса конгруэнции θ. Учитывая мощность каждого класса конгруэнции θ количество всех атомов главного идеала $\mathrm{Id}\,\theta$ можно посчитать по формуле: $C_{t_1}^2 + C_{t_2}^2 + \ldots + C_{t_n}^2$.

Пример 3. Подсчитаем количество элементов, коатомов и атомов в главных идеалах $\mathrm{Id}\,(\{0,2,4\}\{1,3\}\{5\})$ и $\mathrm{Id}\,(\{0,2,5\}\{1,4\}\{3\})$ цепи P_5 из примера 2. В силу их изоморфности достаточно подсчитать для одного главного идеала. Главный идеал $\mathrm{Id}\,(\{0,2,4\}\{1,3\}\{5\})$ цепи P_5 имеет тип (3,2,1). Найдем общее количество элементов решетки $\mathrm{Id}\,(\{0,2,4\}\{1,3\}\{5\})$ для цепи P_5: $B(3) \cdot B(2) \cdot B(1) = 5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$. Подсчитаем общее количество коатомов главного идеала $\mathrm{Id}\,(\{0,2,4\}\{1,3\}\{5\})$ для цепи P_5: $s_2(3,2) + s_2(2,2) + s_2(1,2) = 3 + 1 + 0 = 4$. Найдем количество атомов в главном идеале $\mathrm{Id}\,(\{0,2,4\}\{1,3\}\{5\})$ для цепи P_5: $C_3^2 + C_2^2 + C_1^2 = 3 + 1 + 0 = 4$.

Библиографический список

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука; Физматлит, 1997. [*Bogomolov A. M., Salii V. N.* Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems. Moscow : Nauka; Fizmatlit, 1997.]

2. *Карманова Е. О.* О конгруэнциях цепей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2 (12). С. 96–100. [*Karmanova E. O.* On congruences of path // Prikl. Diskr. Mat. 2011. № 2 (12). P. 96–100.]