$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0) = u_0, \\ u'_\mu(\tau_1^\xi) = v_0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0) = u_0, \\ u'_\mu(\tau_2^\xi) = v_0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0 + 0) = u_0, \\ u'_\mu(\tau_2^\xi) = v_0, \end{cases} \tag{9}$$

В силу равенств (2) задачи (6), (7), (8), (9) сводятся к задаче вида (3). Поэтому в силу предыдущей теоремы задачи (6), (7), (8), (9) также однозначно разрешимы.

Авторы выражают признательность и благодарность Юлию Витальевичу Покорному за постановку задачи и чуткое руководство, а также Маргарите Борисовне Зверевой за замечания, которые способствовали улучшению текста статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 07–01–00397).

Библиографический список

1. *Покорный Ю.В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 2. С. 167–169.

2 *Покорный Ю.В.* О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма–Лиувилля // Докл. АН. 2002. Т. 383, № 5. С. 1–4.

3. *Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А.* О задаче Штурма–Лиувилля с разрывными решениями // Труды математического факультета. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2005. Вып. 10. С. 119–130.

4. *Зверева М.Б.* О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стилтьеса: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2005. 120 с.

УДК 517.53

О ЧИСЛЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

А.В. Фрянцев

Владимирский государственный университет,
студент 4 курса
E-mail: versionfalex@vpti.vladimir.ru

Получена формула аппроксимации дифференциальных операторов специального вида. Указана оценка абсолютной погрешности аппроксимации. Показано, что рассматриваемая аппроксимация является точной на многочленах.

On Numerical Approximation of Differential Polynomials

A.V. Fryantsev

A numerical approximation formula was devised for differential operators of a special form. An absolute approximation error value was indicated. It was shown that the mentioned approximation is accurate for polynomials.

1. ТЕОРЕМА ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В работах [1, 2] предложен метод аппроксимаций аналитических функций посредством сумм вида $\sum_k \lambda_k f(\lambda_k z)$ (здесь f — некоторая фиксированная аналитическая в окрестности точки $z = 0$ функция, а аппроксимация проводится за счет подбора комплексных чисел λ_k) и указаны приложения метода к численному дифференцированию и интегрированию аналитических функций. В теореме 1 настоящей работы метод модифицируется применительно к аппроксимации дифференциальных многочленов, обобщающих оператор дифференцирования.

Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_j(z - z_0)^j$ аналитична в некотором замкнутом круге $\mathbb{U}(r, z_0) :=$ $:= \{z : \ |z - z_0| \le r\},\ z_0 \in \mathbb{C}$ и $P(\lambda) = \sum\limits_{s=1}^{q} p_s \lambda^s$ — некоторый фиксированный многочлен степени $q,\ p_q \ne 0,\ P(0) = 0$.

Теорема 1. *При любом натуральном $n > q+5$ существуют комплексные числа λ_k, $k = 1, \ldots, Nq$, $N = [n/q]$ (целая часть числа n/q), $|\lambda_k| < 1$, такие, что имеет место приближенное равенство*

$$D(f; z_0, z) := \sum_{s=0}^{q-1} p_{q-s} \frac{f^{(s)}(z_0)}{s!}(z - z_0)^s \approx \sum_{k=1}^{Nq} P(\lambda_k) \cdot f(z_0 + \lambda_k(z - z_0)), \tag{1.1}$$

причем при $z \in \mathbb{U}(r, z_0)$ его абсолютная погрешность $\delta_n(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|\delta_n(z)| \le n \cdot M(r) \cdot \max_{1 \le s \le q} |p_s| \cdot \frac{t^{-q} - 1}{(1-t)^2} t^{n+1} \left(\frac{5}{n-q}\right)^{(n+1)/q}, \tag{1.2}$$

где $M(r) = \max\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)|$, $t = r^{-1}|z - z_0| < 1$.

Теорема 1 без доказательства приведена в работе [3].

Примечания. Отметим, что числа λ_k находятся как корни некоторого алгебраического уравнения (см. (1.5)), зависящего лишь от параметров n и q, и не зависят от выбора функций $f(z)$, $P(\lambda)$. В этом смысле набор чисел λ_k является универсальным, т.е. пригодным для любой аналитической функции $f(z)$.

Полученная погрешность аппроксимации (1.2) имеет порядок $(C/n)^{n/q}$ при достаточно больших n, то есть убывает весьма быстро с ростом n.

Доказательство. Достаточно доказать теорему в случае $z_0 = 0$. Пусть λ_k – какое-либо фиксированное число. Тогда при $z \in \mathbb{U}(r, 0)$ имеем

$$P(\lambda_k) \cdot f(\lambda_k z) = \sum_{s=1}^{q} \sum_{j=0}^{\infty} p_s f_j \lambda_k^{s+j} z^j = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\tilde{m}} p_s f_{m-s} \lambda_k^m z^{m-s},$$

где $\tilde{m} = \min\{q, m\}$. Следовательно, для произвольного набора чисел λ_k, $k = 1, \ldots, n$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} P(\lambda_k) f(\lambda_k z) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m \sum_{s=1}^{\tilde{m}} p_s \, f_{m-s} \, z^{m-s}, \tag{1.3}$$

где через S_m обозначены степенные суммы

$$S_m = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

Определим теперь числа λ_k так, что $S_q = 1$, и $S_m = 0$ при всех $m \neq q$, $m = 1, \ldots, n$ (напомним, что q — степень многочлена P и $n > q + 5$). Покажем, что при таких условиях на степенные суммы отличные от нуля значения $\lambda_k = \lambda_k^{(n)}$ находятся как решения уравнения

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{\tau^k}{k!} = 0, \quad \tau = \frac{1}{q\lambda^q}, \quad N = \left[\frac{n}{q}\right] \tag{1.5}$$

(имеющего Nq различных корней $\lambda_k \neq 0$), при этом (см. [1])

$$|\lambda_k| \le \left(\frac{5}{n-q}\right)^{1/q}, \quad k = 1, \ldots, Nq. \tag{1.6}$$

В самом деле, вычислим элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_m = \sigma_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 \cdots < j_m \le n} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \ldots \lambda_{j_m}, \quad m = 1, \ldots, n,$$

по рекуррентным формулам Ньютона

$$m\sigma_m = (-1)^{m+1} \Big(S_m + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \cdot S_{m-j} \sigma_j \Big), \quad m = 1, \ldots, Nq.$$

Методом математической индукции несложно проверить, что отличны от нуля симметрические многочлены лишь с номерами, кратными числу q, и при этом

$$\sigma_{qk} = \frac{(-1)^{(q+1)k}}{q^k k!}; \quad \sigma_l = 0, \quad l \neq qk.$$

Следовательно, для определения чисел λ_k получаем уравнение порядка n (теорема Виета):

$$\sum_{0 \le qk \le n} (-1)^k \frac{\lambda^{n-qk}}{q^k k!} = \lambda^n \sum_{0 \le qk \le n} (-1)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{q\lambda^q} \right)^k = 0.$$

Отсюда для нахождения отличных от нуля величин λ_k и получается уравнение (1.5) (каждому корню τ_s этого уравнения соответствует q различных комплексных значений $\lambda = 1/(q\tau_s)^{1/q}$).

В работе [4] показано, что корни τ_s уравнения (1.5) удовлетворяют неравенству $|\tau_s| \ge N/5$. Отсюда и из того, что $N > -1 + n/q$, находим, что корни λ_k удовлетворяют неравенству (1.6). Из (1.6), в частности, находим оценку степенных сумм при $m > n > q$:

$$|S_m| \le n \left(\frac{5}{n-q} \right)^{m/q} =: A_{n,m}. \tag{1.7}$$

Отметим, что оценки (1.7) ранее использовались в работах [1, 2]. При указанном выборе величин λ_k равенство (1.3) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{Nq} P(\lambda_k) f(\lambda_k z) = D(f; 0, z) + \sum_{m=n+1}^{\infty} S_m \sum_{s=1}^{q} p_s f_{m-s} z^{m-s}, \quad z \in U(r, 0).$$

Получим оценку (1.2) остатка. Имеем

$$|\delta_n(z)| = \Big| D(f; 0, z) - \sum_{k=1}^{Nq} P(\lambda_k) f(\lambda_k z) \Big| = \Big| \sum_{m=n+1}^{\infty} S_m \sum_{s=1}^{q} p_s f_{m-s} z^{m-s} \Big| \le$$

$$\le \sum_{m=n+1}^{\infty} |S_m| \sum_{s=1}^{q} |p_s| |f_{m-s}| |z|^{m-s}. \tag{1.8}$$

Воспользуемся стандартной оценкой коэффициентов Тейлора:

$$|f_{m-s}| = \frac{|f^{(m-s)}(0)|}{(m-s)!} \le \frac{M(r)}{2\pi} \int_{|\tau|=r} \frac{|d\tau|}{|\tau|^{m-s+1}} = \frac{M(r)}{r^{m-s}}.$$

Отсюда с учетом (1.7) и (1.8) и условия теоремы $n > q + 5$ (из которого следует, что $|S_m| < A_{n,n+1}$ при $m \ge n + 1$) получаем

$$|\delta_n(z)| \le M(r) \cdot \max_{1 \le s \le q} |p_s| \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} |S_m| \sum_{s=1}^{q} t^{m-s} \le n \cdot M(r) \cdot \max_{1 \le s \le q} |p_s| \cdot A_{n,n+1} \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{s=1}^{q} t^{m-s},$$

где $t = r^{-1}|z| < 1$, что и доказывает теорему 1 при $z_0 = 0$. $\square$

2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 1

1. Положив все коэффициенты многочлена $P(\lambda)$ равными единице, получим приближенно (с указанной точностью) частичную сумму ряда Тейлора функции $f(z)$. То есть в данном случае формула (1.1) принимает вид

$$\sum_{s=0}^{q-1} \frac{f^{(s)}(z_0)}{s!} (z - z_0)^s \approx \sum_{k=1}^{Nq} \lambda_k \frac{\lambda_k^q - 1}{\lambda_k - 1} \cdot f(z_0 + \lambda_k (z - z_0)), \tag{2.1}$$

где λ_k — корни уравнения (1.5). В данном случае абсолютная погрешность вычисляется по формуле (см. (1.2)):

$$|\delta_n(z)| \le n \cdot M(r) \cdot \frac{t^{-q} - 1}{(1-t)^2} t^{n+1} \left(\frac{5}{n-q} \right)^{(n+1)/q}, \quad t = \frac{|z - z_0|}{r}. \tag{2.2}$$

2. Пусть один из коэффициентов p_{q-s} многочлена P равен единице, а остальные — нулю. Тогда из (1.1) получается формула для приближенного вычисления производной $f^{(s)}(z_0)$ порядка s. Точнее, пусть фиксированы натуральные n и q, $n > q+5$, и пусть при некотором s имеем $p_{q-s}=1$, $p_{q-k}=0$, $k=\overline{0,q-1}$, $k \neq s$. Тогда из (1.1) получается формула

$$\frac{1}{s!}f^{(s)}(0)z^s \approx \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{q-s}f(\lambda_k z), \qquad \frac{1}{s!}f^{(s)}(0) \approx \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{q-s}f(\lambda_k), \qquad s=0,\dots,q-1, \tag{2.3}$$

где λ_k — корни уравнения (1.5), причем абсолютная погрешность формулы (2.3) вычисляется по формуле (2.2) при $z_0=0$.

3. Подбирая коэффициенты полинома $P(\lambda)$ соответствующим образом, из частичной суммы заданной аналитической функции $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$ с ненулевыми коэффициентами Тейлора c_k можно получить частичную сумму $\sum\limits_{s=0}^{q-1}p_{q-s}c_s(z-z_0)^s$ *любой* аналитической в окрестности точки z_0 функции. Тем самым можно аппроксимировать любую аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $g(z)$, зная значения некоторой фиксированной функции $f(z)$ (этот вопрос рассматривался также в работах [1, 2]).

Рассмотрим, к примеру, случай $z_0=0$, $f(z)=e^z$, $g(z)=\cos z$. Пусть m — некоторое натуральное число, $q=2m+1$, коэффициенты многочлена $P(\lambda)=\sum\limits_{s=1}^{2m+1}p_s\lambda^s$ с нечетными номерами вычисляются так: $p_{2m+3-2k}=(-1)^{k-1}$, $k=1,\dots,m+1$, коэффициенты с четными номерами равны нулю. Тогда

$$P(\lambda)=\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}\lambda^{2m+3-2k}=\lambda\frac{\lambda^{2m+2}+(-1)^m}{1+\lambda^2},$$

и из (1.1) получается формула

$$\cos z \approx \sum_{k=1}^{Nq}\lambda_k\frac{\lambda_k^{2m+2}+(-1)^m}{1+\lambda_k^2}e^{\lambda_k z}. \tag{2.4}$$

В (2.4) числа λ_k являются корнями уравнения (1.5), абсолютная погрешность вычисляется по формуле (2.2) при $z_0=0$, $M(r)=e^r$.

3. ЗАМЕЧАНИЕ О ТОЧНОСТИ ОДНОЙ ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В работах [4, 5] получен следующий результат о численном дифференцировании аналитических функций.

Теорема А [4, 5]. *Для любой аналитической в* $\mathbb{U}(r,z_0)$ *функции* f *имеем:*

$$f'(z_0)=-n\cdot f(z_0)+\sum_{k=1}^{n}f(z_0+\tau_k^{-1})+\delta(f;z_0,n) \tag{3.1}$$

с погрешностью $|\delta(f;z_0,n)| \le 5n(5/(nr))^n M(r)$, $n \ge 6/r$, *где* τ_k *— корни уравнения* (1.5) *при* $q=1$.

Этот результат можно дополнить.

Теорема 2. *Для любого многочлена* $P_s(z)$ *степени* $s \le n$ *формула* (3.1) *точна, то есть*

$$P_s'(z)=-n\cdot P_s(z)+\sum_{k=1}^{n}P_s(z+\lambda_k). \tag{3.2}$$

Доказательство. При $s=0$ равенство (3.2) выполняется очевидным образом для любого набора чисел λ_k. Пусть имеется набор комплексных чисел λ_k, для которых выполняется равенство (3.2) при $s=\overline{1,n}$. Через S_m обозначим степенные суммы (1.4). При $s=1,2$ из равенства (3.2) получаем

$$1=-n\cdot z+\sum_{k=1}^{n}(z+\lambda_k)=S_1,\ 2\cdot z=-n\cdot z^2+\sum_{k=1}^{n}(z+\lambda_k)^2=2zS_1+S_2.$$

Отсюда находим $S_1 = 1$, $S_2 = 0$. Докажем далее по индукции, что $S_m = 0$ при $m = 3, \ldots, n$. Действительно, предположим, что $S_m = 0$ при всех $m = 3, \ldots, \mu$, $\mu < n$. Покажем, что и $S_{\mu+1} = 0$. Воспользуемся равенством (3.2) при $P_{\mu+1}(z) = z^{\mu+1}$:

$$(\mu+1)z^{\mu} = -nz^{\mu+1} + \sum_{k=1}^{n}(z+\lambda_k)^{\mu+1} = -n \cdot z^{\mu+1} + \sum_{j=0}^{\mu+1} C_{\mu+1}^{j} z^{\mu+1-j} S_j.$$

Отсюда по предположению индукции получаем

$$(\mu+1)z^{\mu} = -nz^{\mu+1} + z^{\mu+1}S_0 + (\mu+1)z^{\mu}S_1 + S_{\mu+1},$$

т.е. $S_{\mu+1} = 0$.

Таким образом, $S_1 = 1$ и $S_m = 0$ при $m = 2, \ldots, n$. Отсюда однозначно определяются числа $\lambda_1 = \tau_1^{-1}, \ldots, \lambda_n = \tau_n^{-1}$, как это уже делалось выше (см. (1.5) при $q = 1$). □

Следствие. *Для любых* $j = 2, \ldots, s$

$$P_s^{(j)}(z) = (-n)^j \cdot P_s(z) + \sum_{k=1}^{j} C_j^k (-n)^{j-k} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} P_s(z + \lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}). \tag{3.3}$$

Аналогичное приближенное равенство (3.3) для произвольных аналитических функций с соответствующей оценкой погрешности приведено в работе [6].

Библиографический список

1. *Данченко В.И.* Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2006. С. 86–88.
2. *Данченко В.И.* Об аппроксимации суммами вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Третья Петрозаводская Международная конференция по теории функций комплексного переменного, посвященная 100-летию Г.М. Голузина. Петрозаводск, 2006. С. 18–20.
3. *Фрянцев А.В.* О численной аппроксимации дифференциальных полиномов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тр. воронеж. зимней мат. шк. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2007. С. 233–234.
4. *Данченко В.И.* Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 4. С. 33–52.
5. *Данченко В.И., Данченко Д.Я.* О приближении наипростейшими дробями // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 4. С. 553–559.
6. *Кувшинов А.А.* О численном дифференцировании аналитических функций // Дифференциальные уравнения и динамические системы: Тез. докл. Суздаль, 2006. С. 133–134.