МАТЕМАТИКА

УДК 517.923

О НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Ф.В. Голованёва

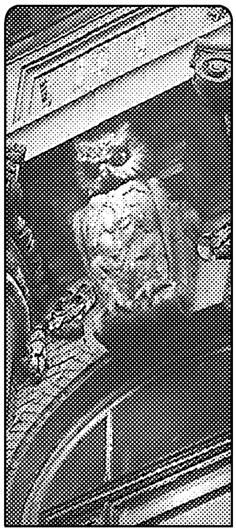
Воронежский государственный университет,
кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей
E-mail: shaspoteha@mail.ru

В работе получены достаточные условия невырожденности краевой задачи четвёртого порядка с производными по мере.

About Nonsingularity of One Boundary Value Problem of Forth Order with Derivatives by Measure

F.V. Golovaneva

In the work sufficient conditions for nonsingularity of boundary value problem of forth order with derivatives by measure are obtained.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

Как известно, свойство невырожденности краевой задачи обеспечивает её интегральную обратимость и, как следствие, применимость теории вполне непрерывных операторов. Последнее позволяет получить ряд свойств, необходимых для приложений.

В данной работе обсуждаются условия невырожденности следующей задачи:

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = F'_\sigma \quad (x \in \overline{[0;1]}_\sigma), \\ u(0) = pu''_{xx}(0) = 0, \\ pu''(1) = (pu'')'(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причём $\inf\limits_{[0;1]} p > 0$. Внешняя производная понимается по Радону–Никодиму, а внутренние — как обычные. Решение задачи (1) будем искать в классе E непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, первая производная $u'(x)$ которых абсолютно непрерывна; $(pu'')(x)$ — абсолютно непрерывна; $(pu'')'(x)$ — σ-абсолютно непрерывна.

Множество $\overline{[0;1]}_\sigma$ строится следующим образом. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На $[0;1]\setminus S(\sigma)$ введём метрику $\rho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Полученное множество, как нетрудно видеть, неполно. Стандартное пополнение, при котором каждая точка ξ из $S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную пару $\{\xi - 0; \xi + 0\}$, мы обозначим через $\overline{[0;1]}_\sigma$. Уравнение

$$(pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = F'_\sigma,$$

заданное на $\overline{[0;1]}_{S(\sigma)} = \overline{[0;1]}_\sigma \bigcup S(\sigma)$, для каждой точки ξ, принадлежащей $S(\sigma)$, понимается как

$$\Delta(pu''_{xx})'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi)$$

(здесь через $\Delta\psi(\xi)$ обозначен скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ, т. е. $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi + 0) - \psi(\xi - 0)$).

Задача (1) возникает при моделировании малых деформаций консоли (более подробно см. [1]), один конец которой закреплён шарнирно, а второй — свободен.

Напомним необходимое определение.

Определение. Задача (1) называется *невырожденной*, если однородная краевая задача (при $F(x) \equiv \mathrm{const}$) имеет только тривиальное решение.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $p(x)$ — функция ограниченной на $[0;1]$ вариации, причём $\inf\limits_{[0;1]} p > 0$; $Q(x)$ — не убывает и σ-абсолютно непрерывна на $[0;1]$. Тогда, если $Q(1) > Q(0)$, то краевая задача (1) является невырожденной, в противном случае, т. е. если $Q(x) \equiv \mathrm{const}$, краевая задача (1) не обладает свойством невырожденности.*

Доказательство. Предположим, что у однородной краевой задачи существует нетривиальное решение $\varphi(x)$. После подстановки $\varphi(x)$ в однородное уравнение, умножения полученного тождества на $\varphi(x)$ и интегрирования по $\sigma(x)$ в пределах от 0 до 1 получим равенство

$$\int\limits_0^1 (p\varphi''_{xx})''_{x\sigma}\varphi\, d\sigma + \int\limits_0^1 \varphi^2 Q'_\sigma\, d\sigma = 0. \tag{2}$$

Первый интеграл в левой части последнего равенства проинтегрируем дважды по частям:

$$\int\limits_0^1 (p\varphi''_{xx})''_{x\sigma}\varphi\, d\sigma = (p\varphi''_{xx})'_x\varphi|_0^1 - p\varphi''_{xx}\varphi'_x|_0^1 + \int\limits_0^1 p\varphi''^2\, dx = \int\limits_0^1 p\varphi''^2\, dx.$$

Тогда равенство (2) принимает вид $\int\limits_0^1 p\varphi''^2\, dx + \int\limits_0^1 \varphi^2\, dQ = 0$, из которого следуют равенства:

$$\int\limits_0^1 p\varphi''^2\, dx = 0 \qquad \text{и} \qquad \int\limits_0^1 \varphi^2\, dQ = 0. \tag{3}$$

Из первого равенства следует, что $p\varphi''^2 = 0$ почти всюду, следовательно, $\varphi''(x) = 0$ почти при всех x. Так как $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывна, то $\varphi'(x) = C_1$, где C_1 — некоторая константа. Тогда $\varphi(x) = C_1 x + C_2$, и с учётом краевого условия $u(0) = 0$ находим, что $\varphi(x) = C_1 x$.

Второе равенство в (3), в силу теоремы о среднем, принимает вид $\varphi^2(\tau)(Q(1) - Q(0)) = 0$ при некотором $\tau \in [0;1]$. Если $Q(1) > Q(0)$, то $\varphi^2(\tau) = 0$. Из последнего следует, что $\varphi(x) \equiv 0$, и мы приходим к противоречию.

Если же $Q(1) = Q(0)$, т.е. $Q(x) \equiv \mathrm{const}$, то $\varphi(x) \equiv C_1 x$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} = 0, \\ u(0) = pu''_{xx}(0) = 0, \\ pu''(1) = (pu'')'(1) = 0 \end{cases}$$

при всяком C_1. Теорема доказана.

Опираясь на доказанную теорему, легко получить следующий результат.

Теорема 2. *Если $Q(x)$ не убывает и σ-абсолютно непрерывна на $[0;1]$, $Q(1) > Q(0)$, то существует непрерывная по совокупности переменных функция $G(x;s)$ такая, что для любой σ-абсолютно непрерывной функции $F(x)$ решение краевой задачи (1) представимо в виде*

$$u(x) = \int\limits_0^1 G(x;s)F'_\sigma(s)\, d\sigma(s).$$

Доказательство. Так как $Q(1) > Q(0)$, то из теоремы 1 вытекает невырожденность краевой задачи (1). Поэтому (применяя классические рассуждения) легко установить существование функции $G(x,s)$, называемой *функцией Грина* краевой задачи (1), обладающей следующими свойствами:

1) $G(x,s)$ непрерывна по совокупности переменных на квадрате $[0;1] \times [0;1]$;

2) при каждом $x \neq s$ функция $G(x,s)$ удовлетворяет однородному уравнению $(pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = 0$;

3) для всех x из $(0;1) \setminus S(\sigma)$ справедливо равенство $\left(pG''_{xx}\right)'_x(x+0,x) - \left(pG''_{xx}\right)'_x(x-0,x) = 1$, и $\left(pG''_{xx}\right)'_x(x+0,x) - \left(pG''_{xx}\right)'_x(x-0,x) + G(x,x)\Delta Q(x) = 1$ для $x \in S(\sigma)$;

4) при всех s $G(0,s) = pG''_{xx}(0,s) = pG''_{xx}(1,s) = \left(pG''_{xx}\right)'_x(1,s) = 0$.

Тогда, как нетрудно видеть, функция $u(x) = \int\limits_0^1 G(x,s)F'_\sigma(s)d\sigma(s)$ является решением краевой задачи (1). Теорема доказана.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность и признательность своему научному руководителю профессору Юлию Витальевичу Покорному за постановку задачи и чуткое руководство.

Библиографический список

1. *Покорный Ю.В., Копытин А.В.* О регулярном толковании уравнения негладкого стержня // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Ижевск, 2000. № 1. С. 137–144.

УДК 517.984

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ДОПУСКАЮЩЕЙ РАЗРЫВЫ

А.В. Голубь, А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

В статье устанавливается равносходимость разложений в тригонометрический ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с инволюцией, допускающей разрывы первого рода.

Equiconvergence Theorem for Expansions in Eigenfunctions of Integral Operators with Discontinuous Involution

A.V. Golub, A.P. Khromov

In the paper we consider the equiconvergence of expansions in trigonometric Fourier series and in eigen- and associated functions of integral operators with involution having discontinuities of the first type.

Рассмотрим оператор

$$Af(x) = \int\limits_0^{\theta(x)} A(\theta(x),t)f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ и $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, т.е. $\theta(\theta(x)) = x$, причем $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x = \frac{1}{2}$.

Требования на ядро оператора (1): функция $A(x,t) = 0$ при $t \geq x$, $A(x,x-0) \equiv 1$ и $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l}A(x,t)$ непрерывны при $t \leq x$ и $k + l \leq 2$.

Операторы такого вида рассматривались в [1]. В данной статье, в отличие от результатов [1], получаются просто проверяемые условия, при которых имеет место равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора (1) и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Обозначим $\tilde{A}(x,t) = A(\theta(x),t)$ при $t \leq \theta(x)$ и $\tilde{A}(x,t) \equiv 0$ при $t > \theta(x)$ и введем матрицу $B(x,t)$ с компонентами $B_{ij}(x,t) = \tilde{A}\left(\frac{i-1}{2} + x, \frac{j-1}{2} + t\right)$ $(i,j = 1,2)$, $x,\, t \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Лемма 1. *Если $y(x) = Af(x)$, то $z(x) = Bg(x)$, $x \in [0;1/2]$, где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y\left(\frac{1}{2} + x\right)$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))^T$, $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f\left(\frac{1}{2} + x\right)$, $Bg(x) = \int\limits_0^{1/2} B(x,t)g(t)\,dt$.*

Доказательство. Из определения оператора A имеем

$$y(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}-x} A\left(\frac{1}{2} - x, t\right) f(t)\,dt, \quad x \in [0;1/2], \tag{2}$$