3) для всех x из $(0;1)\setminus S(\sigma)$ справедливо равенство $\left(pG''_{xx}\right)'_x(x+0,x)-\left(pG''_{xx}\right)'_x(x-0,x)=1$, и $\left(pG''_{xx}\right)'_x(x+0,x)-\left(pG''_{xx}\right)'_x(x-0,x)+G(x,x)\Delta Q(x)=1$ для $x\in S(\sigma)$;

4) при всех s $G(0,s)=pG''_{xx}(0,s)=pG''_{xx}(1,s)=\left(pG''_{xx}\right)'_x(1,s)=0$.

Тогда, как нетрудно видеть, функция $u(x)=\int\limits_0^1 G(x,s)F'_\sigma(s)d\sigma(s)$ является решением краевой задачи (1). Теорема доказана.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность и признательность своему научному руководителю профессору Юлию Витальевичу Покорному за постановку задачи и чуткое руководство.

Библиографический список

1. *Покорный Ю.В., Копытин А.В.* О регулярном толковании уравнения негладкого стержня // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Ижевск, 2000. № 1. С. 137–144.

УДК 517.984

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ДОПУСКАЮЩЕЙ РАЗРЫВЫ

А.В. Голубь, А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

В статье устанавливается равносходимость разложений в тригонометрический ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с инволюцией, допускающей разрывы первого рода.

Equiconvergence Theorem for Expansions in Eigenfunctions of Integral Operators with Discontinuous Involution

A.V. Golub, A.P. Khromov

In the paper we consider the equiconvergence of expansions in trigonometric Fourier series and in eigen- and associated functions of integral operators with involution having discontinuities of the first type.

Рассмотрим оператор

$$Af(x)=\int\limits_0^{\theta(x)} A(\theta(x),t)f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $\theta(x)=\frac{1}{2}-x$ при $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ и $\theta(x)=\frac{3}{2}-x$ при $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, т.е. $\theta(\theta(x))=x$, причем $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x=\frac{1}{2}$.

Требования на ядро оператора (1): функция $A(x,t)=0$ при $t\ge x$, $A(x,x-0)\equiv 1$ и $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\partial t^l}A(x,t)$ непрерывны при $t\le x$ и $k+l\le 2$.

Операторы такого вида рассматривались в [1]. В данной статье, в отличие от результатов [1], получаются просто проверяемые условия, при которых имеет место равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора (1) и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Обозначим $\tilde{A}(x,t)=A(\theta(x),t)$ при $t\le\theta(x)$ и $\tilde{A}(x,t)\equiv 0$ при $t>\theta(x)$ и введем матрицу $B(x,t)$ с компонентами $B_{ij}(x,t)=\tilde{A}\left(\frac{i-1}{2}+x,\frac{j-1}{2}+t\right)$ $(i,j=1,2)$, $x,\,t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Лемма 1. *Если $y(x)=Af(x)$, то $z(x)=Bg(x)$, $x\in[0;1/2]$, где $z(x)=(z_1(x),z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $z_1(x)=y(x)$, $z_2(x)=y\left(\frac{1}{2}+x\right)$, $g(x)=(g_1(x),g_2(x))^T$, $g_1(x)=f(x)$, $g_2(x)=f\left(\frac{1}{2}+x\right)$, $Bg(x)=\int\limits_0^{1/2}B(x,t)g(t)\,dt$.*

Доказательство. Из определения оператора A имеем

$$y(x)=\int\limits_0^{\frac{1}{2}-x} A\left(\frac{1}{2}-x,t\right)f(t)\,dt,\quad x\in[0;1/2], \tag{2}$$

$$y(x) = \int\limits_0^{\frac{3}{2}-x} A\left(\frac{3}{2}-x,t\right) f(t)\,dt, \quad x \in [1/2;1]\,. \tag{3}$$

Но $A\left(\frac{1}{2}-x,t\right) = B_{11}(x,t)$, тогда (2) перепишется как

$$z_1(x) = \int\limits_0^{1/2} B_{11}(x,t) g_1(t)\,dt. \tag{4}$$

В (3) положим $x = \frac{1}{2}+\xi$. Тогда $\xi \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ и (3) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} y\left(\tfrac{1}{2}+\xi\right) &= \int\limits_0^{1-\xi} A(1-\xi,t)f(t)\,dt = \int\limits_0^{1/2} A(1-\xi,t)f(t)\,dt + \int\limits_{1/2}^{1-\xi} A(1-\xi,t)f(t)\,dt = \\ &= \int\limits_0^{1/2} A(1-\xi,t)f(t)\,dt + \int\limits_0^{\frac{1}{2}-\xi} A\left(1-\xi,\tfrac{1}{2}+\eta\right) f\left(\tfrac{1}{2}+\eta\right)\,d\eta. \end{aligned} \tag{5}$$

Так как $A(1-x,t) = B_{21}(x,t)$, $A\left(1-x,\frac{1}{2}+t\right) = B_{22}(x,t)$, то (5) можно переписать как

$$z_2(x) = \int\limits_0^{1/2} B_{21}(x,t)g_1(t)\,dt + \int\limits_0^{1/2} B_{22}(x,t)g_2(t)\,dt. \tag{6}$$

Из (4) и (6), учитывая, что $B_{12}(x,t) \equiv 0$, следует утверждение леммы. □

Следствие. *Имеет место формула* $z'\left(\frac{1}{2}-x\right) = -g(x) + B_1 g(x)$, *где* $B_1 g(x) = \int\limits_0^{1/2} B_x\left(\frac{1}{2}-x,t\right) \times \times g(t)\,dt$, $B_x(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial x} B(x,t)$.

Доказательство. Так как компоненты матрицы $B(x,t)$ могут терпеть разрыв на линии $t+x=\frac{1}{2}$, то $z(x)$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} z(x) = \int\limits_0^{1/2} B(x,t)g(t)\,dt = \int\limits_0^{\frac{1}{2}-x} B(x,t)g(t)\,dt + \int\limits_{\frac{1}{2}-x}^{1/2} B(x,t)g(t)\,dt = \\ = \int\limits_0^{\frac{1}{2}-x} \begin{pmatrix} A\Big(\frac{1}{2}-x,t\Big) & 0 \\ A(1-x,t) & A\Big(1-x,\frac{1}{2}+t\Big) \end{pmatrix} g(t)\,dt + \int\limits_{\frac{1}{2}-x}^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A(1-x,t) & 0 \end{pmatrix} g(t)\,dt. \end{gathered}$$

После дифференцирования получим

$$\begin{gathered} z'(x) = -\begin{pmatrix} A\Big(\frac{1}{2}-x,\frac{1}{2}-x-0\Big) & 0 \\ A\Big(1-x,\frac{1}{2}-x-0\Big) & A(1-x,1-x-0) \end{pmatrix} g\Big(\frac{1}{2}-x\Big) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A\Big(1-x,\frac{1}{2}-x+0\Big) & 0 \end{pmatrix} \times \\ \times g\Big(\frac{1}{2}-x\Big) + \int\limits_0^{1/2} B_x(x,t)g(t)\,dt = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g\Big(\frac{1}{2}-x\Big) + \int\limits_0^{1/2} B_x(x,t)g(t)\,dt. \end{gathered}$$

Поменяв x на $\frac{1}{2}-x$, получим требуемое. Лемма доказана. □

Представим оператор B_1 в пространстве $L_2^2[0,1/2]$ в виде $B_1 = W + V$, где $\|W\| < 1$, $Vg(x) = = \sum\limits_{k=1}^{m} (g,\psi_k)\varphi_k(x)$, $\{\psi_k(x)\}_1^m$, $\{\varphi_k(x)\}_1^m$ — линейно независимые системы в пространстве вектор-функций размерности 2, $(g,\psi_k) = \sum\limits_{j=1}^{2} \int\limits_0^{1/2} g_j(t)\psi_k^j(t)\,dt$. Тогда по следствию из леммы 1 $z'\left(\frac{1}{2}-x\right) = = (W-E)g(x) + Vg(x)$. Откуда

$$(W-E)^{-1} z'\left(\frac{1}{2}-x\right) = g(x) + \sum_{k=1}^{m} (g,\psi_k)(W-E)^{-1}\varphi_k(x). \tag{7}$$

Обозначим $(W-E)^{-1}\varphi_k(x)=\tilde\varphi_k(x)$, E — единичный оператор.

Лемма 2. *Оператор B^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} M=m$, где* $M=\begin{pmatrix} E+(\tilde\varphi,\psi)^T \\ \int\limits_0^{1/2} B(0,t)\tilde\varphi^T(t)\,dt\end{pmatrix}$, *$E$ — единичная матрица размерности $m\times m$, $(\tilde\varphi,\psi)=\{(\tilde\varphi_j,\psi_k)\}_{j,k=1}^m$,* $\tilde\varphi^T=(\tilde\varphi_1,\dots,\tilde\varphi_m)$.

Доказательство. Пусть $Bg=0$. Тогда из (7) при $z(x)\equiv 0$ получим $0=g(x)+\sum\limits_{k=1}^m\gamma_k\tilde\varphi_k(x)$, где $\gamma_k=(g,\psi_k)$. Умножая последнее равенство скалярно на $\{\psi_k(x)\}_1^m$, получим систему

$$0=\gamma_k+\sum_{k=1}^m\gamma_j(\tilde\varphi_k,\psi_k),\quad k=1,\dots,m. \tag{8}$$

Подставляя $g(x)=-\sum\limits_{k=1}^m\gamma_k\tilde\varphi_k(x)$ в $\int\limits_0^{1/2}B(0,t)g(t)\,dt=0$, получаем

$$0=\sum_{j=1}^m\gamma_j\int\limits_0^{1/2}B(0,t)\tilde\varphi_j(t)\,dt. \tag{9}$$

Соотношения (8)–(9) представляют собой необходимые и достаточные условия для нахождения $\{\gamma_k\}$. Поэтому B^{-1} существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы M системы (8)–(9) равен m.

Лемма 3. *Пусть B^{-1} существует и для определенности минор Δ матрицы M, образованный из первых m строк, отличен от нуля. Тогда*

$$B^{-1}z=(W-E)^{-1}z'\left(\tfrac12-x\right)\tfrac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^m\left((W-E)^{-1}z'\left(\tfrac12-x\right),\psi_j\right)\Delta_{jk}\tilde\varphi_k(x),\qquad \int\limits_0^{1/2}B(0,t)B^{-1}z(t)\,dt=0,$$

где Δ_{jk} — алгебраические дополнения элементов определителя Δ.

Лемма 4. *Для оператора B^{-1} справедливо представление*

$$B^{-1}z(x)=z'\left(\tfrac12-x\right)+a_1(x)z(0)+a_2z\left(\tfrac12\right)+a_3(x)z(x)+a_4(x)z\left(\tfrac12-x\right)+\int\limits_0^{1/2}a(x,t)z(t)\,dt,$$
$$S\cdot z(0)+T\cdot z\left(\tfrac12\right)=0,\quad S=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},$$

где $a_i(x)$ $(i=1,\dots,4)$, $a_3'(x)$, $a_4'(x)$, $a(x,t)$ — непрерывные матрицы-функции. Кроме того, каждая компонента матрицы $a(x,t)$ имеет ту же гладкость, что и компоненты $B_x(x,t)$, с той лишь разницей, что теперь по t предполагается лишь непрерывность.

Лемма 5. *Если $z(x)=(E-\lambda B)^{-1}Bg(x)$, а $v(x)=\left(z^T(x),z^T\left(\frac12-x\right)\right)^T$, то $v(x)$ удовлетворяет интегро-дифференциальной системе:*

$$Qv'(x)+\tilde P_1(x)v(0)+\tilde P_2(x)v\left(\tfrac12\right)+\tilde P_3(x)v(x)+\tilde Nv-\lambda v(x)=\tilde m(x),\quad \tilde M_0v(0)+\tilde M_1v\left(\tfrac12\right)=0, \tag{10}$$

где $Q=\begin{pmatrix}0&E\\-E&0\end{pmatrix}$, $\tilde P_1(x)=\begin{pmatrix}a_1(x)&a_2(x)\\0&0\end{pmatrix}$, $\tilde P_2(x)=\begin{pmatrix}0&0\\a_2\left(\frac12-x\right)&a_1\left(\frac12-x\right)\end{pmatrix}$,
$\tilde P_3(x)=\begin{pmatrix}a_3(x)&a_4(x)\\a_4\left(\frac12-x\right)&a_3\left(\frac12-x\right)\end{pmatrix}$, $\tilde Nv=\int\limits_0^{1/2}\tilde N(x,t)v(t)\,dt$, $\tilde N(x,t)=\begin{pmatrix}a(x,t)&0\\a\left(\frac12-x,t\right)&0\end{pmatrix}$,
$\tilde M_0=\begin{pmatrix}S&T\\0&0\end{pmatrix}$, $\tilde M_1=\begin{pmatrix}0&0\\T&S\end{pmatrix}$, $\tilde m(x)=\left(g^T(x),g^T\left(\frac12-x\right)\right)^T$.

Лемма 6. *Если $R_\lambda=(E-\lambda A)^{-1}A$ существует, то*

$$R_\lambda f(x)=v_1(x),\quad x\in[0,1/2],\quad R_\lambda f(x)=v_2\left(x-\frac12\right),\quad x\in[1/2,1], \tag{11}$$

где $v_i(x)$ — компоненты вектора $v(x)$, удовлетворяющего системе (10). Верно и обратное, то есть если λ таково, что однородная краевая задача для системы (10) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (11).

Лемма 7. *Существует матрица-функция $H(x,\lambda)=H_0(x)+\lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональна, что преобразование $v(x)=\Gamma H(x,\lambda)\mathrm{w}(x)$, где Γ — матрица, диагонализирующая матрицу Q^{-1}, т.е. $\Gamma^{-1}Q^{-1}\Gamma=D=\mathrm{diag}\,(i,-i,i,-i)$, приводит систему (10) к виду*

$$\begin{gathered}\mathrm{w}'(x)+P_1(x,\lambda)\mathrm{w}(0)+P_2(x,\lambda)\mathrm{w}\left(\tfrac{1}{2}\right)+P_3(x,\lambda)\mathrm{w}(x)+N_\lambda\mathrm{w}-\lambda D\mathrm{w}(x)=m(x,\lambda),\\ U(\mathrm{w})=M_{0\lambda}\mathrm{w}(0)+M_{1\lambda}\mathrm{w}\left(\tfrac{1}{2}\right)=0,\end{gathered}\tag{12}$$

где $P_1(x,\lambda)=H^{-1}(x,\lambda)D\Gamma^{-1}\tilde P_1(x)H(0,\lambda)$, $P_2(x,\lambda)=H^{-1}(x,\lambda)D\Gamma^{-1}\tilde P_2(x)H\left(\tfrac{1}{2},\lambda\right)$, $P_3(x,\lambda)=$ $=\lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)[H_1'(x)+D\Gamma^{-1}\tilde P_3(x)H_1(x)]$, $N_\lambda=H^{-1}(x,\lambda)D\Gamma^{-1}\tilde N\Gamma H(x,\lambda)$, $M_{0\lambda}=\tilde M_0\Gamma H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda}=\tilde M_1\Gamma H\,(1/2,\lambda)$, $m(x,\lambda)=H^{-1}(x,\lambda)D\Gamma^{-1}\tilde m(x)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$w'(x)=\lambda Dw(x)+m(x),\quad U(w)=0,\tag{13}$$

где $U(\cdot)$ — краевые условия из (12), $m(x)$ — произвольный вектор-функция с компонентами из $L\,[0,1/2]$.

Лемма 8. *Для решения задачи (13) имеет место формула*

$$w(x,\lambda)=-Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\int\limits_0^{1/2}U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt+g_\lambda m(x),\tag{14}$$

где $Y(x,\lambda)=\mathrm{diag}\,(e^{\lambda ix},e^{-\lambda ix},e^{\lambda ix},e^{-\lambda ix})$*;* $\Delta(\lambda)=U(Y(x,\lambda))$*;* $g(x,t,\lambda)=\mathrm{diag}\,(g_1(x,t,\lambda),\ldots,$ $\ldots,g_4(x,t,\lambda))$*;* $g_j(x,t,\lambda)=-\varepsilon(t,x)e^{\lambda i(x-t)}$ $(j=1,3)$*;* $g_j(x,t,\lambda)=\varepsilon(x,t)e^{-\lambda i(x-t)}$ $(j=2,4)$*;* $\varepsilon(x,t)=1$ *при* $t\le x$, $\varepsilon(x,t)=0$ *при* $t>x$*;* $g_\lambda m(x)=\int\limits_0^{1/2}g(x,t,\lambda)m(t)\,dt$ *и* $U_x(\cdot)$ *означает, что краевое условие берется по аргументу* x.

Здесь и далее считаем, что $\mathrm{Re}\,\lambda i\ge 0$.

Лемма 9. *Для матрицы $\Delta(\lambda)$ при больших $|\lambda|$ имеет место следующее представление:* $\Delta(\lambda)=$ $=([a_{ij}]+[b_{ij}]e^{\mu\omega_j})_{i,j=1}^4$*, где* $\mu=\lambda/2$, $\omega_1=\omega_3=i$, $\omega_2=\omega_4=-i$, a_{ij} (b_{ij}) *— компоненты матрицы* K_0 (L_0)*,* $K_0=\begin{pmatrix}S\Gamma_{11}+T\Gamma_{21} & S\Gamma_{12}+T\Gamma_{22}\\ 0 & 0\end{pmatrix}H_0(0)$*,* $L_0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ T\Gamma_{11}+S\Gamma_{21} & T\Gamma_{12}+S\Gamma_{22}\end{pmatrix}H_0\left(\tfrac{1}{2}\right)$*, где* Γ_{ij} *— блоки матрицы* Γ *размера* 2×2, $[a]=a+O(\lambda^{-1})$.

Доказательство. По определению $\Delta(\lambda)=U(Y(x,\lambda))$, где $Y(x,\lambda)=\mathrm{diag}\,(e^{\lambda\omega_1x},\ldots,e^{\lambda\omega_4x})$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda)&=M_{0\lambda}Y(0,\lambda)+M_{1\lambda}Y\left(\frac12,\lambda\right)=M_0H(0,\lambda)E+M_1H\left(\frac12,\lambda\right)Y\left(\frac12,\lambda\right)=\\ &=\tilde M_0\Gamma(H_0(0)+\lambda^{-1}H_1(0))+\tilde M_1\Gamma\left(H_0\left(\frac12\right)+\lambda^{-1}H_1\left(\frac12\right)\right)Y\left(\frac12,\lambda\right)=\\ &=\begin{pmatrix}S & T\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{pmatrix}(H_0(0)+\lambda^{-1}H_1(0))+\\ &+\begin{pmatrix}0 & 0\\ T & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{pmatrix}\left(H_0\left(\frac12\right)+\lambda^{-1}H_1\left(\frac12\right)\right)Y\left(\frac12,\lambda\right).\end{aligned}$$

Откуда следует утверждение леммы. □

Следствие. *Имеет место следующая асимптотическая формула:*

$$\det\Delta(\lambda)=\left(\theta_0+\theta_1e^{-\mu i}+\theta_2e^{-2\mu i}+\theta_3e^{-3\mu i}+\theta_4e^{-4\mu i}+O(\lambda^{-1})\right)e^{2\mu i},$$

где θ_i — комплексные числа, причем $\theta_0=\begin{vmatrix}b_{11} & a_{12} & b_{13} & a_{14}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{41} & a_{42} & b_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=1,\quad \theta_4=\begin{vmatrix}a_{11} & b_{12} & a_{13} & b_{14}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{41} & b_{42} & a_{43} & b_{44}\end{vmatrix}=1.$

Обозначим далее через S_δ комплексную λ-плоскость с удаленными нулями $\det\Delta(\lambda)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ.

Лемма 10. *В области S_δ справедлива оценка* $|\det\Delta(\lambda)|\ge C|e^{\lambda i}|$.

Лемма 11. *В области S_δ при больших $|\lambda|$ для решения $w(x,\lambda) = R_{1\lambda}m(x)$ задачи* (13) *имеют место оценки:*

$$\|R_{1\lambda}m\|_\infty = O(\|m\|_1), \qquad \|R_{1\lambda}m\|_\infty = O(\varkappa(\lambda)\|m\|_\infty),$$
$$\|R_{1\lambda}m\|_1 = O(\varkappa(\lambda)\|m\|_1), \qquad \|R_{1\lambda}\chi\|_\infty = O(\lambda^{-1}),$$

где $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\cdot\|_1$) — нормы в $L_\infty[0,1/2]$ ($L[0,1/2]$) в пространстве вектор-функций, $\chi(x)$ — вектор-функция, у которой каждая компонента есть характеристическая функция отрезка $[0,1/2]$, $\varkappa(\lambda) = \dfrac{1-e^{-|\mathrm{Re}\,\mu i|}}{|\mathrm{Re}\,\mu i|}$.

Доказательство. Найдем оценки элементов матрицы $Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$. Пусть Δ_{ij} — алгебраические дополнения элементов матрицы $\Delta(\lambda)$. Тогда имеют место оценки $\Delta_{i1} = \Delta_{i3} = O(e^{\mu i})$, $\Delta_{i2} = \Delta_{i4} = O(e^{\lambda i})$, следующие из леммы 9. Тогда, учитывая оценку из леммы 10, получаем оценку элементов матрицы $Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$: элементы первой и третьей строк имеют оценку $O(e^{\lambda i(x-\frac{1}{2})})$; второй и четвертой — $O(e^{-\lambda i x})$. Рассуждая далее аналогично [2] получаем требуемое. □

Рассмотрим задачу (12).

Лемма 12. *В области S_δ при больших $|\lambda|$ имеет место оценка $\|R_{1\lambda}N_\lambda\|_\infty = o(1)$.*

Следствие. *В S_δ при больших $|\lambda|$ оператор $E + R_{1\lambda}P_3(x,\lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda$ обратим в L_∞.*

Лемма 13. *В S_δ при больших $|\lambda|$ краевая задача* (12) *однозначно разрешима и для ее решения $\mathrm{w}(x,\lambda)$ справедлива оценка $\|\mathrm{w}(x,\lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x,\lambda)\|_\infty = O\left(\left(\frac{1}{|\lambda|} + \varkappa^2(\lambda)\right)\|f\|_1\right)$.*

Лемма 14. *Если $m(x) = \chi(x)$, то $\|\mathrm{w}(x,\lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x)\|_\infty = O(\lambda^{-2})$.*

Лемма 15. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$ имеет место*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)[\mathrm{w}(x,\lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x)]\,d\lambda\Big\|_\infty = 0$$

(считается, что окружности $|\lambda| = r$ находятся в S_δ).

Рассмотрим еще одну краевую задачу

$$u'(x) = \lambda D u(x) + m(x), \quad U_0(u) = u(0) - u\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0$$

и ее решение обозначим $R_{2\lambda}m$. Для $R_{2\lambda}m$ имеет место формула (14), где $\Delta(\lambda)$ заменяется на $\Delta_0(\lambda) = U_0(Y(x,\lambda))$, а $U(\cdot)$ — на $U_0(\cdot)$.

Удалим из S_δ вместе с круговыми окрестностями радиуса δ еще и собственные значения краевых задач

$$\begin{cases} u'(x) - \lambda i u(x) = 0, \\ u(0) = u(1/2) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u'(x) + \lambda i u(x) = 0, \\ u(0) = u(1/2) \end{cases}$$

и получившуюся область снова обозначим через S_δ.

Лемма 16. *Если $m(x)$ — вектор-функция с компонентами из $L\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x)$, то*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)[R_{2\lambda}m(x,\lambda) - R_{2\lambda}(H_0^{-1}m(x))]\,d\lambda\Big\|_\infty = 0.$$

Лемма 17. *Если $m(x)$ из леммы 16, то*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)[R_{1\lambda}m(x) - R_{2\lambda}m(x)]\,d\lambda\Big\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0, \quad \varepsilon \in (0,1/4).$$

Лемма 18. *Если $f(x) \in L[0,1]$, то*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\int\limits_{|\lambda|=r} [H(x,\lambda)\mathrm{w}(x,\lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x))]\,d\lambda\Big\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$ и $\mathrm{w}(x,\lambda)$ — решение задачи (12), *$\tilde{m}(x)$ — из* (10).

Теорема. *Пусть A^{-1} существует. Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\varepsilon \in \left(0,\frac{1}{4}\right)$ имеют место соотношения:*

$$\lim_{r\to\infty}\|S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0, \qquad \lim_{r\to\infty}\left\|S_r(f,x) - \sigma_r\left(g, x-\frac{1}{2}\right)\right\|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $g(x) = f\left(\frac{1}{2}+x\right)$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $S_r(f,x)$ — *частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора* A *для тех характеристичеких чисел, для которых* $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(g,x)$ – *частичная сумма ряда Фурье по системе* $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{4k\pi i x}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ *функции* $g(x)$ *на отрезке* $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *для тех* k, *для которых* $|4k\pi| < r$.

Доказательство. Имеем $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f(x)\,d\lambda$, $\sigma_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_{0\lambda}f(x)\,d\lambda$, где $y(x) = R_{0\lambda}f(x)$ есть решение краевой задачи $y'(x) - \lambda y(x) = f(x)$, $y(0) = y(1/2)$.

Пусть $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Тогда $R_{0\lambda}f(x) = (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}))_1$, $R_\lambda f(x) = (\Gamma H(x,\lambda)\mathrm{w}(x,\lambda))_1$, где $(\cdot)_1$ означает первую компоненту вектора, помещенного в скобки. По лемме 18 имеем

$$\lim_{r\to\infty}\left\| \int\limits_{|\lambda|=r} [(\Gamma H(x,\lambda)\mathrm{w}(x,\lambda))_1 - (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1]\,d\lambda \right\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0.$$

Тогда $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1\,d\lambda + o(1)$, где $o(1) \to 0$ при $r\to\infty$ равномерно по $x \in \left[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon\right]$. Но $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1\,d\lambda = \sigma_r(f,x)$ и первое соотношение теоремы получено. Второе соотношение получается аналогично. Теорема доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 06–01–00003).

Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, вып. 11. С. 115–142.
2. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

УДК 517.984.52

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА n-ГО ПОРЯДКА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

О.Ю. Дмитриев

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: DmitrievOU@info.sgu.ru

В работе рассматривается задача разложения по собственным функциям дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными краевыми условиями специального вида. Получены необходимые и достаточные условия разложения по собственным функциям на отрезке $[0,1]$ и внутри него.

Expansions in Eigenfunctions of the n-th Order Differential Operator with Non-Regular Boundary Conditions

O.Yu. Dmitriev

The paper deals with the expansions in eigenfunctions of the n-th order differential operator with non-regular boundary conditions of special type. Necessary and sufficient conditions for existing of such expansions either on the interval $[0,1]$ or inside it are derived.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ краевую задачу, определенную дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} - \lambda y = 0, \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$U_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = 1,\dots,n, \tag{2}$$

где a_i – константы, λ – спектральный параметр, $n = 4k+1,\ k \in \mathbb{N}$.

Для случая $n = 3$ А.П.Хромовым в [1] были получены необходимые и достаточные условия разложения функции в равномерно сходящийся на $(0,1)$ ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям краевой задачи (1)–(2) с нерегулярными краевыми условиями. Там же были получены теоремы о разложении внутри интервала $(0,1)$.