Библиографический список

1. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с. [*Hardy G., Littlewood J., Polya G.* Inequalities. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1934. 328 p.]
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1978. 400 с. [*Krein S. G., Petunin Ju. I., Semenov E. M.* Interpolation of linear operators. Providence : Amer. Math. Soc., 1982. 375 p.]
3. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л. : Гостехиздат, 1948. 480 с. [*Titchmarsh E.* Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford : Clarendon Press, 1948. 404 p.]
4. *Голубов Б. И.* Об одной теореме Беллмана о коэффициентах Фурье // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 11. С. 31–40. [*Golubov B. I.* On a Bellman theorem on Fourier coefficients // Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics. 1995. Vol. 83, № 2. P. 321–330.]
5. *Moricz F.* The harmonic Cesaro and Copson operators on the spaces $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$ // Studia Math. 2002. Vol. 149, № 3. P. 267–279.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 616 с. [*Zygmund A.* Trigonometric series. Vol. 1. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1959. 320 p.]

УДК 517.982.22, 517.982.252+256, 519.615, 519.853.3

МЕТОД ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА ДЛЯ СИЛЬНО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

М. О. Голубев

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный
E-mail: maksimkane@mail.ru

В работе рассматривается стандартный метод проекции градиента в случае, когда множество является R-сильно выпуклым, а функция выпукла, дифференцируема и имеет липшицев градиент. Доказано, что при некоторых естественных дополнительных условиях метод сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Ключевые слова: гильбертово пространство, метод проекции градиента, метрическая проекция, R-сильно выпуклое множество.

Gradient Projection Algorithm for Strongly Convex Set

M. O. Golubev

In our work we will discuss standard gradient projection algorithm, where a set is strongly convex of radius R and a function is convex, differentiable and its gradient satisfies Lipschitz condition. We proved that under some natural additional conditions algorithm converges with the rate of a geometric progression.

Key words: Hilbert space, gradient projection algorithm, metric projection, strongly convex set of radius R.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство над вещественным полем скаляров, (p, x) — скалярное произведение векторов $p, x \in \mathbb{H}$. Обозначим через $B_R(x) = \{y \in \mathbb{H} : \|y - x\| \le R\}$ замкнутый шар радиуса $R \ge 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{H}$. Расстояние от точки $x \in \mathbb{H}$ до множества $A \subset \mathbb{H}$ будем обозначать $\varrho(x, A) \doteq \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$. Метрической проекцией точки $x \in \mathbb{H}$ на множество $A \subset \mathbb{H}$ называется множество $P_A(x) = \{a \in A : \|x - a\| = \varrho(x, A)\}$. Опорная функция ко множеству A определяется следующей формулой: $s(p, A) = \sup\limits_{x \in A}(p, x)$ для всех $p \in \mathbb{H}$. Нормальным конусом к выпуклому замкнутому множеству A в точке $a \in A$ называется множество $N(A; a) = \{p \in \mathbb{H} : (p, a) \ge s(p, A)\}$. Диаметром множества A называется число $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x, y \in A} \|x - y\|$. Границу множества A обозначим через ∂A.

Определение 1 [1, определение 3.1.1; 2, 3]. Непустое множество $A \subset \mathbb{H}$ называется *R-сильно выпуклым*, если оно может быть представлено в виде пересечения замкнутых шаров радиуса $R > 0$, т. е. $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x)$ для некоторого подмножества $X \subset \mathbb{H}$.

Рассмотрим задачу минимизации:

$$f(x) \to \min, \qquad x \in A \subset \mathbb{H}. \tag{1}$$

В данной работе мы обсудим стандартный метод проекции градиента:

$$x_{k+1} = P_A(x_k - \alpha_k f'(x_k)), \qquad x_1 \in \partial A, \qquad \alpha_k > 0. \tag{2}$$

Метод проекции градиента детально изложен в работах [4–7]. Известные случаи сходимости метода проекции градиента со скоростью геометрической прогрессии имеют место для замкнутого и выпуклого множества A и сильно выпуклой с константой $\theta > 0$ функции f, градиент f' которой удовлетворяет условию Липшица с константой $M > 0$, т. е. $\|f'(x_1) - f'(x_2)\| \le M\|x_1 - x_2\|$ для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{H}$. В работе [8] приведена следующая оценка скорости сходимости $\|x_{k+1} - x_*\| \le q\|x_k - x_*\|$, где x_* — единственное решение задачи (1) и $q = \sqrt{1 - 4\theta\alpha + \alpha^2 M^2}$, а коэффициенты α_k выбираются с учетом условия $\alpha_k = \alpha$, а $\alpha \in (0, 4\theta/M^2)$. Мы планируем отказаться от сильной выпуклости функции f, но потребуем сильной выпуклости множества A.

Теорема 1 была анонсирована в тезисах конференций [9, 10].

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предложение 1 [1, теорема 4.1.3]. *Замкнутое выпуклое множество $A \subset \mathbb{H}$ является R-сильно выпуклым множеством тогда и только тогда, когда оно представимо в виде*

$$A = \bigcap_{\|p\|=1} B_R(x_p - Rp),$$

где для любого вектора $p \in \mathbb{H}$, $\|p\| = 1$ точка $x_p \in A$ однозначно определена из равенства $(p, x_p) = s(p, A)$.

Предложение 2 [1, лемма 2.2, гл. 6]. *Пусть множество $A \subset \mathbb{H}$ выпукло и замкнуто, функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ выпукла на A и дифференцируема в точке $x_* \in A$.*

Тогда x_* является решением задачи (1) *в том и только том случае, если*

$$x_* = P_A(x_* - \alpha f'(x_*)) \tag{3}$$

при произвольном $\alpha > 0$.

Хорошо известно, что для выпуклого и замкнутого множества $A \subset \mathbb{H}$ множество $P_A(x)$ одноточечно, т. е. $P_A(x) = \{a(x)\}$, и для любых точек $x_0, x_1 \in \mathbb{H}$ выполняется оценка $\|a_0 - a_1\| \le 1 \cdot \|x_0 - x_1\|$, где $\{a_i\} = P_A(x_i), i \in \{0, 1\}$.

Для выпуклого замкнутого множества $A \subset \mathbb{H}$ и вектора $p \in \mathbb{H}$ определим множество $A(p) = \{x \in A : (p, x) = s(p, A)\}$.

Предложение 3 [1, теорема 3.1.3]. *Замкнутое выпуклое множество $A \subset \mathbb{H}$ является R-сильно выпуклым множеством тогда и только тогда, когда для любой пары единичных векторов $p, q \in \mathbb{H}$ и для точек $\{a(p)\} = A(p)$, $\{a(q)\} = A(q)$ выполняется следующее неравенство:*

$$\|a(p) - a(q)\| \le R\|p - q\|.$$

Теорема 1. *Пусть множество $A \subset \mathbb{H}$ является R-сильно выпуклым множеством. Тогда для любых точек $x_0, x_1 \in \mathbb{H}\backslash A$ выполнено неравенство*

$$\|a_0 - a_1\| \le \frac{R}{\sqrt{(R + \varrho_0)(R + \varrho_1)}} \cdot \sqrt{\|x_0 - x_1\|^2 - (\varrho_0 - \varrho_1)^2}, \tag{4}$$

где $\{a_i\} = P_A(x_i), \varrho_i = \|x_i - a_i\|, i \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Из предложения 3 следует, что

$$\|a_0 - a_1\| \le R \left\| \frac{x_0 - a_0}{\varrho_0} - \frac{x_1 - a_1}{\varrho_1} \right\|.$$

После возведения данного неравенства в квадрат имеем:

$$\begin{gathered} \|a_0 - a_1\|^2 \le R^2 \left(2 - \frac{2}{\varrho_0 \varrho_1}(x_0 - a_0, x_1 - a_1) \right) = \\ = R^2 \left(2 + \frac{\|a_0 - a_1\|^2 + \|x_0 - x_1\|^2 - \|a_0 - x_1\|^2 - \|a_1 - x_0\|^2}{\varrho_0 \varrho_1} \right). \end{gathered} \tag{5}$$

Из предложения 1 следует, что

$$A \subset B_R \left(a_0 - R\frac{x_0 - a_0}{\varrho_0} \right).$$

Пусть $y = a_0 - R\frac{x_0 - a_0}{\varrho_0}$. $\|y - a_1\| \le R$, так как $a_1 \in B_R(y)$. Заметим, что $\angle x_0a_0a_1 = \pi - \angle ya_0a_1$.

По теореме косинусов из треугольника ya_0a_1 следует

$$\cos\angle x_0a_0a_1 = -\cos\angle ya_0a_1 = -\frac{\|y-a_0\|^2 + \|a_0-a_1\|^2 - \|y-a_1\|^2}{2\|y-a_0\|\|a_0-a_1\|} =$$
$$= -\frac{R^2 + \|a_0-a_1\|^2 - \|y-a_1\|^2}{2R\|a_0-a_1\|} \le -\frac{\|a_0-a_1\|}{2R}.$$

По теореме косинусов из треугольника $x_0a_0a_1$ имеем:

$$\|a_1 - x_0\|^2 = \|a_0-a_1\|^2 + \|a_0-x_0\|^2 - 2\|a_0-a_1\|\|a_0-x_0\|\cos\angle x_0a_0a_1 \ge$$
$$\ge \|a_0-a_1\|^2 + \varrho_0^2 + \frac{\|a_0-a_1\|^2\varrho_0}{R}.$$

Аналогичным образом получаем неравенство

$$\|a_0 - x_1\|^2 \ge \|a_0-a_1\|^2 + \varrho_1^2 + \frac{\|a_0-a_1\|^2\varrho_1}{R}.$$

Из формулы (5) имеем:

$$\|a_0-a_1\|^2 \le R^2\left(2 + \frac{\|x_0-x_1\|^2 - \varrho_1^2 - \frac{\|a_0-a_1\|^2(\varrho_1+\varrho_0)}{R} - \|a_0-a_1\|^2 - \varrho_0^2}{\varrho_0\varrho_1}\right),$$

поэтому

$$\|a_0-a_1\|^2(R^2 + R(\varrho_0+\varrho_1) + \varrho_0\varrho_1) \le R^2(\|x_0-x_1\|^2 - (\varrho_0-\varrho_1)^2).$$

После преобразований получаем следующую оценку:

$$\|a_0-a_1\| \le \frac{R}{\sqrt{(R+\varrho_0)(R+\varrho_1)}} \cdot \sqrt{\|x_0-x_1\|^2 - (\varrho_0-\varrho_1)^2}. \qquad \square$$

Замечание 1. В работе [8] аналогичная оценка была получена для выпуклых множеств с C^2 гладкой границей.

Замечание 2. Заметим, что если $x_0 \in A$ (т. е. $\varrho_0 = 0$), то формула (4) остается верной. В этом случае $a_0 = P_A(x_0) = x_0$. В силу предложения 1

$$x_0 \in A \subset B_R\left(a_1 - R\frac{x_1 - a_1}{\varrho_1}\right).$$

По аналогии с доказательством теоремы 1 имеем $\cos\angle x_0a_1x_1 \le -\frac{\|a_0-a_1\|}{2R}$. По теореме косинусов из треугольника $x_0a_1a_0$ получаем оценку

$$\|a_0-x_1\|^2 = \|a_1-x_1\|^2 + \|a_0-a_1\|^2 - 2\|a_1-x_1\|\|a_0-a_1\|\cos\angle x_0a_1x_1.$$

В силу того что $a_0 = x_0$, имеем:

$$\|x_0-x_1\|^2 = \|a_1-x_1\|^2 + \|a_0-a_1\|^2 - 2\|a_1-x_1\|\|a_0-a_1\|\cos\angle x_0a_1x_1 \ge$$
$$\ge \varrho_1^2 + \|a_0-a_1\|^2 + \frac{\|a_0-a_1\|^2\varrho_1}{R}. \tag{6}$$

Из формулы (6) следует, что

$$\|a_0-a_1\| \le \sqrt{\frac{R}{R+\varrho_1}} \cdot \sqrt{\|x_0-x_1\|^2 - \varrho_1^2}.$$

Последнее эквивалентно формуле (4) в случае, когда $x_0 = a_0$ и $\varrho_0 = 0$.

Предложение 4. [1, лемма 1.19.5]. *Пусть функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ выпукла и дифференцируема по Гато на $\mathbb{H}$. Тогда условие Липшица для градиента f'*

$$\|f'(x_1) - f'(x_2)\| \le M\|x_1 - x_2\|, \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{H},$$

эквивалентно условию

$$(f'(x_1) - f'(x_2), x_1 - x_2) \ge \frac{1}{M}\|f'(x_1) - f'(x_2)\|^2, \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{H}. \tag{7}$$

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим задачу (1). Последовательность x_k генерируется по правилу (2).

Предположим, что

1) непустое множество $A \subset \mathbb{H}$ является R-сильно выпуклым (т. е. $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x) \neq \emptyset$);

2) функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ является выпуклой, дифференцируемой, и градиент $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $M > 0$: для любой пары точек $x_1, x_2 \in \mathbb{H}$ выполнено

$$\|f'(x_1) - f'(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|;$$

3) для всех $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $n(x_k) \in N(A, x_k)$, такой что выполняется неравенство $(n(x_k), f'(x_k)) \leq 0$ (т. е. $x_k - \alpha_k f'(x_k) \notin A$ для любого $\alpha_k > 0$);

4) решение задачи (1) $x_* \in \partial A$ единственно;

5) $t = \min\limits_{x \in \partial A} \|f'(x)\| > 0$.

Заметим, что условие 2) для выпуклой функции эквивалентно условию (7).

В случае, когда условие 3) не выполняется, мы имеем дело с безусловной минимизацией и следует использовать один из стандартных алгоритмов поиска безусловного минимума (см. например [7, теорема 1.2, теорема 2.1, гл. 5]).

Теорема 2. *1. Пусть выполнены условия 1)–5). Пусть $\alpha_k = \alpha \in (0, 2/M]$. Тогда последовательность x_k, генерируемая по правилу* (2)*, сходится к решению задачи* (1) *со скоростью геометрической прогрессии: $\|x_{k+1} - x_*\| \leq q\|x_k - x_*\|$, где $q = \dfrac{R}{\sqrt[4]{(R^2 + \alpha^2 t^2)(R + \alpha t)^2}}$;*

2. Пусть выполнены условия 1)–4). Пусть $\alpha_k = \alpha \in (0, 2/M]$. Тогда последовательность x_k, генерируемая по правилу (2)*, сходится к решению задачи* (1) *со скоростью: $\|x_{k+1} - x_*\| \leq q_k\|x_k - x_*\|$, где $q_k = \sqrt[4]{\dfrac{R^2}{R^2 + \alpha^2\|f'(x_k)\|^2}}$.*

Доказательство. Воспользуемся предложением 1. Шар $B_R(x_k - Rn(x_k))$ содержит множество A, где единичный вектор $n(x_k)$ из условия 3). Вектор $f'(x_k)$ по условию составляет тупой угол с вектором $n(x_k)$. Пусть $y_k \doteq x_k - \alpha f'(x_k), z_k \doteq x_k - Rn(x_k)$. Пусть $\varrho_{x_k} = \varrho(x_k - \alpha f'(x_k), A)$, $\varrho_{x_*} = \varrho(x_* - \alpha f'(x_*), A)$. Далее, применяя теорему косинусов для треугольника $x_k y_k z_k$, получаем: $\varrho_{x_k} \geq \sqrt{R^2 + \alpha^2\|f'(x_k)\|^2} - R$. Из формулы (3) следует, что $\varrho_{x_*} = \alpha\|f'(x_*)\|$.

Следуя формуле (4), определим для точек $x_k, x_* \in \partial A$ и чисел $R > 0$, $\alpha \in (0, 2/M]$ число

$$L_k = L(x_k, x_*, R, \alpha) = \frac{R}{\sqrt[4]{(R^2 + \alpha^2\|f'(x_k)\|^2)}\sqrt{(R + \alpha\|f'(x_*)\|)^2}}.$$

Воспользовавшись неравенством (4), имеем

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 = \|P_A(x_k - \alpha f'(x_k)) - P_A(x_* - \alpha f'(x_*))\|^2 \leq L_k^2\|(x_k - x_*) - (\alpha f'(x_k) - \alpha f'(x_*))\|^2 =$$
$$= L_k^2(\|x_k - x_*\|^2 - 2\alpha(x_k - x_*, f'(x_k) - f'(x_*)) + \alpha^2\|f'(x_k) - f'(x_*)\|^2).$$

Из (7) следует, что

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq L_k^2 \left(\|x_k - x_*\|^2 + \left(\alpha^2 - 2\frac{\alpha}{M}\right)\|f'(x_k) - f'(x_*)\|^2\right).$$

Так как по условию теоремы $\alpha \in (0, 2/M]$, то $\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq L_k^2\|x_k - x_*\|^2$.

Отсюда получаем оценку

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \frac{R}{\sqrt[4]{(R^2 + \alpha^2\|f'(x_k)\|^2)}\sqrt{(R + \alpha\|f'(x_*)\|)^2}}\|x_k - x_*\|.$$

В случае 1) $q = \dfrac{R}{\sqrt[4]{(R^2 + \alpha^2 t^2)}\sqrt{(R + \alpha t)^2}}$. В случае 2) $q_k = \sqrt[4]{\dfrac{R^2}{R^2 + \alpha^2\|f'(x_k)\|^2}}$. □

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1)–2). Пусть $RM/t < 1$, где $t = \min\limits_{x \in \partial A} \|f'(x)\| > 0$.*

Последовательность x_k генерируется по правилу (2) *с $\alpha_k = \alpha > 0$ для всех k.*

Тогда:

1) при выборе $\alpha \in (2R/t, 2/M]$ *последовательность* x_k *сходится к решению задачи* (1) *со скоростью геометрической прогрессии:* $\|x_{k+1} - x_*\| \le q(\alpha)\|x_k - x_*\|$, *где* $q(\alpha) = \dfrac{R}{\alpha t - R}$;

2) при выборе $\alpha > 2/M$ *последовательность* x_k *сходится к решению задачи* (1) *со скоростью геометрической прогрессии:* $\|x_{k+1} - x_*\| \le q(\alpha)\|x_k - x_*\|$, *где* $q(\alpha) = \dfrac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R}$. *Более того,* $q(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} RM/t < 1$.

Доказательство. Заметим, что с учетом выбора параметра α в случае 1) $\alpha > 2R/t$. В случае 2) из неравенства $RM/t < 1$ с учетом выбора параметра α выполняется неравенство $\alpha > 2R/t$. Таким образом, в обоих случаях верно:

$$\alpha > \frac{2R}{t}. \tag{8}$$

Рассмотрим произвольную точку $x \in \partial A$. Воспользуемся предложением 1. Существует вектор $n \in \mathbb{H}, \|n\| = 1$, $s(n, A) = (n, x)$ такой, что выполнено включение $A \subset B_R(x - Rn)$.

Пусть $z \doteq x - Rn$, $y \doteq x - \alpha f'(x)$. Из неравенства треугольника следует, что $\|y - z\| + \|z - x\| \ge \ge \|y - x\|$, отсюда $\|y - z\| \ge \alpha\|f'(x)\| - R > \dfrac{2R}{t}t - R = R$.

Таким образом, для любого $x \in \partial A$ выполнено включение $x - \alpha f'(x) \notin B_R(x - Rn)$, отсюда $x - \alpha f'(x) \notin A$.

Оценим для $x \in \partial A$ число $\varrho_x = \varrho(x - \alpha f'(x), A)$:

$$\varrho_x \ge \varrho(x - \alpha f'(x), B_R(x - Rn)) = \|y - z\| - R \ge \alpha\|f'(x)\| - 2R.$$

Таким образом, с учетом неравенства (8) $\varrho_x \ge \alpha t - 2R > 0$.

Пусть $x, y \in \partial A$. Введем отображение B вида $Bx = P_A(x - \alpha f'(x))$. Для точек $x, y \in \partial A$ и чисел $R > 0$, α определим величину $L_{x,y} = L(x, y, R, \alpha) = \dfrac{R}{\sqrt{(R + \varrho_x)(R + \varrho_y)}}$, где $\varrho_x = \varrho(x - \alpha f'(x), A)$, $\varrho_y = \varrho(x - \alpha f'(x), A)$. Величина ϱ_y оценивается аналогично ϱ_x, следовательно, $\varrho_y \ge \alpha t - 2R$. Таким образом, $L_{x,y} \le \dfrac{R}{\alpha t - R}$, учитывая неравенство $\alpha > \dfrac{2R}{t}$ имеем: $L_{x,y} < 1$

$$\begin{gathered}\|Bx - By\|^2 = \|P_A(x - \alpha f'(x)) - P_A(y - \alpha f'(y))\|^2 \le \\ \le L_{x,y}^2\|x - \alpha f'(x) - (y - \alpha f'(y))\|^2 \le L_{x,y}^2\|(x - y) - \alpha(f'(x) - f'(y))\|^2 = \\ = L_{x,y}^2(\|x - y\|^2 + \alpha^2\|f'(x) - f'(y)\|^2 - 2\alpha(x - y, f'(x) - f'(y))),\end{gathered}$$

$$\|Bx - By\|^2 \le L_{x,y}^2\left(\|x - y\|^2 + \alpha^2\|f'(x) - f'(y)\|^2 - \frac{2\alpha}{M}\|f'(x) - f'(y)\|^2\right). \tag{9}$$

В случае 1) выполнено $\alpha \in (2R/t, 2/M)$. Из неравенства (9) получаем оценку

$$\|Bx - By\| \le L_{x,y}\|x - y\| \le \frac{R}{\alpha t - R}\|x - y\|, \tag{10}$$

причем $\dfrac{R}{\alpha t - R} < 1$ в силу выбора числа α.

В случае 2) выполнено неравенство $\alpha > 2/M$. Из неравенств (9) и (7) получаем оценку

$$\|Bx - By\| \le L_{x,y}(\alpha M - 1)\|x - y\| \le \frac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R}\|x - y\|. \tag{11}$$

С учетом условий $RM/t < 1$ и $\alpha > \dfrac{2}{M}$ следует $\dfrac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R} < 1$.

Таким образом отображение B сжимающее. Множество A является полным метрическим пространством. В силу принципа сжимающих отображений для процесса (2) имеем $x_n \to x_*$ при $n \to \infty$. Точка x_* является неподвижной точкой отображения B. Из предложения 2 следует, что точка x_* является решением задачи (1).

Из неравенств (10) и (11) следует оценка:

$$\|x_{k+1} - x_*\| = \|B(x_k) - B(x_*)\| \le q(\alpha)\|x_k - x_*\|.$$

В случае 1) $q(\alpha) = \dfrac{R}{\alpha t - R}$. В случае 2) $q(\alpha) = \dfrac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R}$. Причем легко видеть, что $\dfrac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R} \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} \dfrac{RM}{t} < 1$. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00139-а).

Библиографический список

1. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 440 с. [*Polovinkin E. S. Balashov M. V.* Elements of convex and strongly convex analysis. Moscow : Fizmatlit, 2007. 440 p.]
2. *Поляк Б. Т.* Теоремы существования и сходимость минимизирующих последовательностей в задачах на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166, №2. С. 287–290. [*Polyak B. T.* Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremal problems with restrictions // Soviet Math. Dokl. 1966. Vol. 7. P. 72–75.]
3. *Поляк Б. Т., Левинтин Е. С.* Сходимость минимизирующих последовательностей в задачах на условный экстремум // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, №5. С. 997–1000. [*Polyak B. T., Levintin E. S.* Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems // Soviet Math. Dokl. 1966. Vol. 7. P. 764—767.]
4. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1980. 520 с. [*Vasilyev F. P.* Numerical methods for solving extremal problems. Moscow : Nauka, 1980. 520 p.]
5. *Нестеров Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. М. : МЦНМО, 2010. 279 с. [*Nesterov Yu. E.* Introduction to convex optimization. M. : MCCME, 2010. 279 p.]
6. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М. : Наука, 1983. 384 с. [*Polyak B. T.* Introduction to optimization. Moscow : Nauka, 1983. 384 p.]
7. *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. М. : Физматлит, 2005. 368 с. [*Sukharev A. G., Timokhov A. V., Fedorov V. V.* Course of optimization methods. Moscow : Fizmatlit, 2005. 368 p.]
8. *Abatzoglou T. J.* The Lipschitz continuity of the metric projection // J. of Approx. Theory. 1979. Vol. 26. P. 212–218.
9. *Балашов М. В., Голубев М. О.* Об условии Липшица для метрической проекции в гильбертовом пространстве // Тр. 54-й науч. конф. МФТИ. М. : МФТИ, 2011. Т. 1. С. 34. [*Balashov M. V. Golubev M. O.* Lipschitz condition for the metric projection in a Hilbert space // Proc. of the 54th Conf. of MIPT. Moscow : MIPT, 2011. Vol. 1. P. 34.]
10. *Голубев М. О.* Метрическая проекция в гильбертовом пространстве и сильная выпуклость // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зимней шк. Саратов : Научная книга, 2012. С. 55–56. [*Golubev M. O.* Metric projection in a Hilbert space and strong convexity // Modern problems of function theory and their applications : Proc. of the 16th Saratov Winter School. Saratov, 2012. P. 55–56.]

УДК 517.51

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ, СВЯЗАННЫХ С РЯДАМИ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА

Н. В. Егошина

Саратовский государственный университет
E-mail: saviour92@mail.ru

Две теоремы О. П. Гойяла, касающиеся абсолютной сходимости некоторых тригонометрических рядов, распространяются на случай систем Виленкина и L^p-модулей непрерывности.

Ключевые слова: мультипликативные системы, положительные коэффициенты Фурье–Виленкина, абсолютная сходимость.

Absolute Convergence of Some Series, Connected with the Fourier–Vilenkin Series

N. V. Egoshina

Two theorems of O. P. Goyal concerning absolute convergence of some trigonometric series are extended to the case of Vilenkin systems and L^p-modulus of continuity.

Key words: positive Fourier–Vilenkin coefficients, absolute convergence.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{1}$$