References

1. Vorobiev N. N. F*ibonacci Numbers*. Basel; Boston; Berlin, Birkhauser Verlaf, 2002.
2. Gashkov S. B., Chubarikov V. N. *Arifmetika. Algoritmy. Slozhnost' vychislenii* [Arithmetics. Algorithms. The Complexity of Computations]. Moscow, Drofa, 2005 (in Russian).
3. Romanoff N. P. Über einige Satze der additiven Zahlentheorie. *Math. Ann.*, 1934, vol. 109, pp. 668–678.
4. Erdos P. On some problems of Bellman and a theorem of Romanoff. *J. Chinese Math. Soc.*, 1951, no. 1, pp. 409–421.
5. Prahar K. *Raspredelenie prostykh chisel* [Distribution of Prime Numbers]. Moscow, Mir, 1967 (in Russian).
6. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. *Lektsii po matematicheskomu analizu* [Lectures on Mathematical Analysis]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1999 (in Russian).

УДК 511.34

ОБ ОДНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ С БЕСКВАДРАТНЫМИ ЧИСЛАМИ

Д. В. Горяшин

Ассистент кафедры математических и компьютерных методов анализа, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, goryashin@mech.math.msu.su

В работе получена асимптотическая формула для количества представлений натурального числа N в виде $q_1+q_2+[\alpha q_3]$, где q_1, q_2, q_3 — бесквадратные числа, $\alpha > 1$ — фиксированное иррациональное алгебраическое число.

Ключевые слова: тернарные задачи, бесквадратные числа, асимптотическая формула.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\alpha > 1$ — фиксированное иррациональное число и пусть $r_3(\alpha, N)$ равно количеству разбиений натурального числа N на два бесквадратных слагаемых и слагаемое вида $[\alpha q]$, где q также бесквадратное, т. е. числу представлений числа N в виде

$$q_1 + q_2 + [\alpha q_3] = N, \tag{1}$$

где q_1, q_2, q_3 — бесквадратные числа.

Целью данной работы является нахождение асимптотической формулы для величины $r_3(\alpha, N)$ при $N \to \infty$.

Задачи о представлении натурального числа суммой трех слагаемых (называемые тернарными задачами) рассматривались многими авторами. Наиболее известная среди них — тернарная проблема Гольдбаха о представлении натурального числа в виде суммы трех простых чисел, решенная в 1937 г. И. М. Виноградовым [1]. В 1999 г. С. Ю. Фаткина [2] рассмотрела видоизмененную проблему Гольдбаха и доказала асимптотическую формулу для числа представлений натурального числа N в виде $N = p_1 + p_2 + [\sqrt{2}p_3]$, где p_1, p_2, p_3 — простые числа с почти равными слагаемыми.

С другой стороны, в 1929–1933 гг. Эвелин (C. J. A. Evelyn) и Линфут (E. H. Linfoot) в серии работ [3] получили асимптотические формулы для количества $r_\nu(N)$ представлений числа в виде суммы ν бесквадратных чисел, $\nu \geqslant 2$. Оценка остаточного члена в этих формулах в дальнейшем неоднократно уточнялась. Последний результат в этой задаче при $\nu \geqslant 3$ принадлежит Й. Брюдерну (J. Brüdern) и А. Перелли (A. Perelli) [4], которые доказали, что

$$r_\nu(N) = \frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{\nu} G_\nu(N) N^{\nu-1} + O\big(N^{\nu-3/2+\varepsilon}\big),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно и

$$G_\nu(N) = \prod_{p^2 \nmid N}\left(1 - \frac{1}{(p^2-1)^\nu}\right)\prod_{p^2 \mid N}\left(1 - \frac{1}{(p^2-1)^{\nu-1}}\right).$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное алгебраическое число. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для количества $r_3(\alpha, N)$ решений уравнения* (1) *в бесквадратных числах q_1, q_2, q_3 справедлива асимптотическая формула:*

$$r_3(\alpha, N) = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 N^2 + O\big(N^{11/6+\varepsilon}\big).$$

Доказательство теоремы проводится, как и в работах [1, 2, 4], круговым методом Харди–Литтлвуда–Рамануджана–Виноградова. Он основан на представлении искомой величины $r_3(\alpha, N)$ в виде

$$r_3(\alpha, N) = \int\limits_0^1 S_1^2(\beta) S_2(\beta) e^{-2\pi i\beta N} d\beta, \tag{2}$$

где

$$S_1(\beta) = \sum_{\substack{q\leqslant N\\ q\ \text{бесквадратное}}} e^{2\pi i\beta q} = \sum_{n\leqslant N} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta n}, \qquad S_2(\beta) = \sum_{n\leqslant N/\alpha} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta[\alpha n]}.$$

В доказательстве также используются методы работ Г. И. Архипова, К. Буриева и В. Н. Чубарикова [5, 6] и оценка тригонометрической суммы с бесквадратными числами по «малым дугам» [7–9].

Зафиксируем параметр Q так, что $1 \leqslant Q \leqslant \sqrt{N}$, и положим $\tau = N/Q$ (значение Q, а значит, и τ выберем позднее). В силу 1-периодичности подынтегральной функции интеграл в правой части (2) можно представить в следующем виде:

$$r_3(\alpha, N) = \int\limits_{-1/\tau}^{1-1/\tau} = \int\limits_{-1/\tau}^{1/\tau} S_1^2(\beta) S_2(\beta) e^{-2\pi i\beta N} d\beta + \int\limits_{1/\tau}^{1-1/\tau} S_1^2(\beta) S_2(\beta) e^{-2\pi i\beta N} d\beta = I_1 + I_2.$$

2. ИНТЕГРАЛ I_1: ВЫДЕЛЕНИЕ ГЛАВНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИКИ

При $\beta \in [-1/\tau, 1/\tau]$ преобразуем сумму $S_1(\beta)$ следующим образом. Пусть

$$K(x) = \sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}).$$

Тогда

$$S_1(\beta) = \sum_{n\leqslant N} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta n} = \sum_{n\leqslant N} (K(n) - K(n-1)) e^{2\pi i\beta n} =$$

$$= \sum_{1<n\leqslant N-1} K(n)\left(e^{2\pi i\beta n} - e^{2\pi i\beta(n+1)}\right) + K(N)e^{2\pi i\beta N} = \frac{6}{\pi^2}\sum_{1<n\leqslant N-1} n\left(e^{2\pi i\beta n} - e^{2\pi i\beta(n+1)}\right) +$$

$$+\frac{6}{\pi^2}Ne^{2\pi i\beta N} + O\left(\sum_{1<n\leqslant N-1}\sqrt{n}\left|e^{2\pi i\beta n} - e^{2\pi i\beta(n+1)}\right| + \sqrt{N}\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\sum_{1<n\leqslant N} e^{2\pi i\beta n} + O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right) = \frac{6}{\pi^2}\tilde{S}_1(\beta) + O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right).$$

Далее, сумму $S_2(\beta)$ представим в следующем виде:

$$S_2(\beta) = \sum_{n\leqslant N/\alpha} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta[\alpha n]} = \sum_{n\leqslant N/\alpha} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta\alpha n} e^{-2\pi i\beta\{\alpha n\}} =$$

$$= \sum_{n\leqslant N/\alpha} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta\alpha n}(1 + O(|\beta|)) = \sum_{n\leqslant N/\alpha} \mu^2(n) e^{2\pi i\beta\alpha n} + O(N|\beta|).$$

К получившейся сумме в правой части применяем такое же преобразование, как к сумме $S_1(\beta)$ (с заменой N на N/α и β на $\beta\alpha$). Получим:

$$S_2(\beta)=\frac{6}{\pi^2}\sum_{1<n\leqslant N/\alpha}e^{2\pi i\beta\alpha n}+O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right).$$

Учитывая, что

$$\sum_{1<n\leqslant N/\alpha}e^{2\pi i\beta\alpha n}=\sum_{1<n\leqslant N/\alpha}e^{2\pi i\beta[\alpha n]}e^{2\pi i\beta\{\alpha n\}}=\sum_{1<n\leqslant N/\alpha}e^{2\pi i\beta[\alpha n]}+O(N|\beta|),$$

сумму $S_2(\beta)$ можно записать также в виде

$$S_2(\beta)=\frac{6}{\pi^2}\sum_{1<n\leqslant N/\alpha}e^{2\pi i\beta[\alpha n]}+O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right)=\frac{6}{\pi^2}\tilde{S}_2(\beta)+O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right).$$

Подставляя полученные выражения для $S_1(\beta)$ и $S_2(\beta)$ в интеграл I_1, будем иметь:

$$I_1=\int\limits_{-1/\tau}^{1/\tau}S_1^2(\beta)S_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta=$$

$$=\int\limits_{-1/\tau}^{1/\tau}\left(\frac{6}{\pi^2}\tilde{S}_1(\beta)+O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right)\right)^2\left(\frac{6}{\pi^2}\tilde{S}_2(\beta)+O\left(\sqrt{N}(N|\beta|+1)\right)\right)e^{-2\pi i\beta N}d\beta=$$

$$=\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3\int\limits_{-1/\tau}^{1/\tau}\tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta+O\left(R_1(N,\tau)\right),$$

где

$$\tilde{S}_1(\beta)=\sum_{1<n\leqslant N}e^{2\pi i\beta n},\qquad \tilde{S}_2(\beta)=\sum_{1<n\leqslant N/\alpha}e^{2\pi i\beta[\alpha n]},$$

$$R_1(N,\tau)=\int\limits_{-1/\tau}^{1/\tau}\left(N^{5/2}(N|\beta|+1)+N^2(N|\beta|+1)^2+N^{3/2}(N|\beta|+1)^3\right)d\beta\ll\frac{N^{7/2}}{\tau^2}=N^{3/2}Q^2.$$

Полученный интеграл представим в виде

$$\int\limits_{-1/\tau}^{1/\tau}\tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta=\int\limits_{-1/\tau}^{1-1/\tau}-\int\limits_{1/\tau}^{1-1/\tau}=\int\limits_{0}^{1}\tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta-\int\limits_{1/\tau}^{1-1/\tau}\tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta.$$

Очевидно, первый из интегралов в правой части равен количеству решений уравнения

$$n_1+n_2+[\alpha n_3]=N$$

в натуральных числах n_1, n_2, n_3 с условиями $2\leqslant n_1,n_2\leqslant N$, $2\leqslant n_3\leqslant[N/\alpha]$. Поскольку при фиксированном n_3 уравнение $n_1+n_2=N-[\alpha n_3]$ имеет $N-[\alpha n_3]-3$ решения в натуральных числах n_1, n_2 с условием $2\leqslant n_1,n_2\leqslant N$, искомое количество решений равно

$$\sum_{n_3=2}^{[N/\alpha]}(N-[\alpha n_3]-3)=\frac{N^2}{\alpha}-\sum_{n_3=2}^{[N/\alpha]}\alpha n_3+O(N)=\frac{N^2}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{N}{\alpha}\right)^2+O(N)=\frac{N^2}{2\alpha}+O(N).$$

Для оценки второго интеграла воспользуемся тривиальным неравенством

$$|\tilde{S}_1(\beta)|\leqslant\frac{1}{\|\beta\|}\leqslant\tau=\frac{N}{Q},\qquad\text{если}\qquad\beta\in[1/\tau,1-1/\tau].$$

Получим:

$$\left|\int_{1/\tau}^{1-1/\tau}\tilde{S}_1^2(\beta)\tilde{S}_2(\beta)e^{-2\pi i\beta N}d\beta\right| \leqslant \int_{1/\tau}^{1-1/\tau}|\tilde{S}_1(\beta)|^2|\tilde{S}_2(\beta)|d\beta \leqslant \frac{N}{Q}\int_0^1|\tilde{S}_1(\beta)||\tilde{S}_2(\beta)|d\beta \ll \frac{N^2}{Q},$$

так как

$$\int_0^1|\tilde{S}_1(\beta)|^2d\beta = N, \qquad \int_0^1|\tilde{S}_2(\beta)|^2d\beta = [N/\alpha],$$

$$\int_0^1|\tilde{S}_1(\beta)||\tilde{S}_2(\beta)|d\beta \leqslant \left(\int_0^1|\tilde{S}_1(\beta)|^2d\beta\int_0^1|\tilde{S}_2(\beta)|^2d\beta\right)^{1/2} \ll N.$$

Таким образом,

$$I_1 = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3\frac{N^2}{2\alpha} + O\left(\frac{N^2}{Q}\right) + O\big(N^{3/2}Q^2\big). \tag{3}$$

3. ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА I_2

Разобьем отрезок интегрирования $[1/\tau, 1-1/\tau] = [Q/N, 1-Q/N]$ на два множества:

$$E_1 = \left[\frac{Q}{N}; 1-\frac{Q}{N}\right]\cap\mathfrak{M}(Q), \qquad E_2 = \left[\frac{Q}{N}; 1-\frac{Q}{N}\right]\cap\mathfrak{m}(Q),$$

где

$$\mathfrak{M}(Q) = \bigcup_{q\leqslant Q}\bigcup_{\substack{a\\(a,q)=1}}\left[\frac{a}{q}-\frac{Q}{qN}; \frac{a}{q}+\frac{Q}{qN}\right], \qquad \mathfrak{m}(Q) = \mathbb{R}\backslash\mathfrak{M}(Q).$$

В соответствии с этим разбиением интеграл I_2 также разбивается на два интеграла; пусть $I_2' = \int_{E_1}$, $I_2'' = \int_{E_2}$. Интеграл I_2'' оценим с помощью следующей леммы об оценке тригонометрической суммы с бесквадратными числами по «малым дугам» (см. [7–9]). Отметим, что в работе [7] эта оценка доказана в предположении, что $Q \leqslant N^{1/3}$; при $Q \leqslant \sqrt{N}$ она доказана в 2004 г. независимо двумя авторами в работах [8, 9].

Лемма 2. *Пусть* $1 \leqslant Q \leqslant \sqrt{N}$. *Тогда* $S_1(\beta) \ll \frac{N^{1+\varepsilon}}{Q}$ *для всех* $\beta \in \mathfrak{m}(Q)$.

По лемме 2 имеем:

$$|I_2''| \leqslant \int_{E_2}|S_1(\beta)|^2|S_2(\beta)|d\beta \leqslant \max_{\beta\in E_2}|S_1(\beta)|\int_0^1|S_1(\beta)||S_2(\beta)|d\beta \ll \frac{N^{2+\varepsilon}}{Q},$$

так как

$$\int_0^1|S_1(\beta)|^2d\beta = \sum_{n\leqslant N}\mu^2(n) \ll N, \qquad \int_0^1|S_2(\beta)|^2d\beta = \sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n) \ll N, \tag{4}$$

$$\int_0^1|S_1(\beta)||S_2(\beta)|d\beta \leqslant \left(\int_0^1|S_1(\beta)|^2d\beta\int_0^1|S_2(\beta)|^2d\beta\right)^{1/2} \ll N.$$

Оценим теперь интеграл I_2' по множеству E_1. Для этого применим следующую лемму [10, п. II, лемма 1].

Лемма 3. *Пусть* β, x *— вещественные числа,* P *— натуральное число,* $P \geqslant 2$. *Тогда имеет место формула*

$$e^{-2\pi i\beta\{x\}} = \sum_{|k|\leqslant P}\frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{2\pi i(\beta+k)}e^{2\pi ikx} + O(R_P(x)),$$

где

$$R_P(x)=\frac{1}{\sqrt{1+P^2\sin^2\pi x}}=\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}c_ke^{2\pi ikx}+O\left(\frac{\ln P}{P}\right),\qquad c_k\ll\frac{\ln P}{P}e^{-|k|/P}.$$

Пользуясь леммой 3, преобразуем сумму $S_2(\beta)$ следующим образом:

$$S_2(\beta)=\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i\beta[\alpha n]}=\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i\beta\alpha n}\left(\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{2\pi i(\beta+k)}e^{2\pi ik\alpha n}+R_P(\alpha n)\right)=$$

$$=\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{2\pi i(\beta+k)}\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i(\beta+k)\alpha n}+O\left(\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)R_P(\alpha n)\right)=$$

$$=\frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{2\pi i}\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1}{\beta+k}\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i(\beta+k)\alpha n}+O(R_2(N)).$$

Положим $P=N^{1/6}$. Если α — алгебраическое число, то для $R_2(N)$ справедлива оценка

$$R_2(N)=\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)R_P(\alpha n)=\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}c_ke^{2\pi ik\alpha n}+O\left(\frac{N\ln P}{P}\right)\ll$$

$$\ll\frac{\ln P}{P}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P\ln P}\left|\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi ik\alpha n}\right|+\frac{N\ln P}{P}\ll N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$$

(доказательство оценки последней тригонометрической суммы см. в [11]). Следовательно,

$$|S_2(\beta)|\ll\left|\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i\beta\alpha n}\right|+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant P}\frac{1}{k}\left|\sum_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i(\beta+k)\alpha n}\right|+N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}\ll$$

$$\ll\sum_{|k|\leqslant P}\frac{|S_3(\alpha(\beta+k))|}{|k|+1}+N^{\frac{5}{6}+\varepsilon},$$

где $S_3(\beta)=\sum\limits_{n\leqslant N/\alpha}\mu^2(n)e^{2\pi i\beta n}$ (т. е. $S_3(\beta)$ отличается от $S_1(\beta)$ лишь длиной промежутка суммирования: N/α вместо N).

Таким образом,

$$I_2'=\int\limits_{E_1}|S_1(\beta)|^2|S_2(\beta)|d\beta\ll\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1}{|k|+1}\int\limits_{E_1}|S_1(\beta)|^2|S_3(\alpha(\beta+k))|d\beta+N^{11/6+\varepsilon}$$

(здесь мы вновь воспользовались неравенством (4)). Снова разобьем множество интегрирования E_1 на две части — E_{11} и E_{12}, в зависимости от того, принадлежит число $\alpha(\beta+k)$ множеству $\mathfrak{M}(Q)$ или $\mathfrak{m}(Q)$ соответственно. Тогда интеграл по множеству E_{12} также оценивается с помощью леммы 2, так как число $\alpha(\beta+k)$ удовлетворяет ее условиям:

$$\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1}{|k|+1}\int\limits_{E_{12}}|S_1(\beta)|^2|S_3(\alpha(\beta+k))|d\beta\ll\frac{N^{1+\varepsilon}}{Q}\int\limits_0^1|S_1(\beta)|^2d\beta\sum_{|k|\leqslant P}\frac{1}{|k|+1}\ll\frac{N^{2+\varepsilon/2}}{Q}\ln P.$$

Наконец, для оценки интеграла по множеству E_{11} воспользуемся следующей леммой, являющейся вариантом леммы Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова о мере пересечения «больших дуг» в разбиении Фарея [12] (см. также [6, 13]).

Лемма 4. *Пусть* $1\leqslant Q_1,Q_2\leqslant\sqrt{N}$, $\alpha>1$ *— некоторое фиксированное иррациональное алгебраическое число,* k *— целое число. Тогда при любом* $\varepsilon>0$ *для меры* $\mu(T)$ *множества* T *точек* $\beta\in[Q_1/N;1-Q_1/N]\cap\mathfrak{M}(Q_1)$ *таких, что* $\alpha(\beta+k)\in\mathfrak{M}(Q_2)$, *справедлива оценка*

$$\mu(T)\ll(|k|+1)Q_1^2Q_2^2N^{-2+\varepsilon}.$$

Доказательство этой леммы проводится по той же схеме, что и в работе [12]. Применим лемму 4 к интегралу по множеству E_{11} при $Q_1 = Q_2 = Q$. Оценивая тривиально подынтегральные функции, получаем:

$$\sum_{|k|\leqslant P} \frac{1}{|k|+1} \int\limits_{E_{11}} |S_1(\beta)|^2 |S_3(\alpha(\beta+k))| d\beta \ll N^3 Q^4 N^{-2+\varepsilon} \sum_{|k|\leqslant P} 1 = PQ^4 N^{1+\varepsilon}.$$

Выберем параметр Q равным $Q = P = N^{1/6}$. Тогда, собирая все оценки, для интеграла I_2 имеем:

$$|I_2| \ll \frac{N^{2+\varepsilon}}{Q} + \frac{N^{2+\varepsilon/2}}{Q} \ln P + PQ^4 N^{1+\varepsilon} + N^{11/6+\varepsilon} \ll N^{11/6+\varepsilon}.$$

Окончательно, учитывая асимптотическую формулу (3) для интеграла I_1, получаем:

$$r_3(\alpha, N) = I_1 + I_2 = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 \frac{N^2}{2\alpha} + O\left(\frac{N^2}{Q}\right) + O\big(N^{3/2}Q^2\big) + O\big(N^{11/6+\varepsilon}\big) = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^3 \frac{N^2}{2\alpha} + O\big(N^{11/6+\varepsilon}\big),$$

что и требовалось доказать.

Библиографический список

1. *Виноградов И. М.* Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. С. 291–294.
2. *Фаткина С. Ю.* О представлении натурального числа суммой трех почти равных слагаемых, порожденных простыми числами // УМН. 2000. Т. 55, вып. 1. С. 197–198.
3. *Evelyn C. J. A., Linfoot E. H.* On a problem in the additive theory of numbers. I // Math. Z. 1929. Vol. 30. P. 433–448; II : J. Reine Angew. Math. 1931. Vol. 164. P. 131–140; III : Math. Z. 1932. Vol. 34. P. 637–644; IV : Ann. of Math. 1931. Vol. 32. P. 261–270; V : Quart. J. Math. 1932. Vol. 3. P. 152–160; VI : Quart. J. Math. 1933. Vol. 4. P. 309–314.
4. *Brüdern J., Perelli A.* Exponential Sums and Additive Problems Involving Square-free Numbers // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1999. Vol. XXVIII. P. 591–613.
5. *Архипов Г. И., Буриев К., Чубариков В. Н.* О мощности особого множества в бинарных аддитивных задачах с простыми числами // Труды МИАН. 1997. Т. 218. С. 28–57.
6. *Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* Об исключительном множестве в бинарной проблеме гольдбахова типа // Докл. АН. 2002. Т. 387, № 3. С. 295–296.
7. *Brüdern J., Granville A., Perelli A., Vaughan R. C., Wooley T. D.* On the exponential sum over k-free numbers // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. 1998. Vol. 356. P. 739–761.
8. *Tolev D. I.* On the exponential sum with squarefree numbers // Bull. London Math. Soc. 2005. Vol. 37. P. 827–834.
9. *Schlage-Puchta J. C.* The exponential sum over squarefree integers // Acta Arith. 2004. Vol. 115. P. 265–268.
10. *Попов О. В.* Арифметические приложения оценок сумм Г. Вейля от многочленов растущей степени // Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 2. С. 595–640.
11. *Горяшин Д. В.* Бесквадратные числа в последовательности $[\alpha n]$ // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, вып. 3. С. 60–66.
12. *Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* О мере «больших дуг» в разбиении Фарея // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, вып. 4. С. 35–38.
13. *Brüdern J., Cook R. J., Perelli A.* The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments // Sieve Methods, Exponential Sums and Their Applications in Number Theory. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1997. P. 87–100.

On an Additive Problem with Squarefree Numbers

D. V. Goryashin

Moscow State University, Russia, 199991, Moscow, Leninskie Gory, 1, goryashin@mech.math.msu.su

An asymptotic formula for the number of representations of a positive integer N in the form $q_1 + q_2 + [\alpha q_3]$ is obtained, where q_1, q_2, q_3 are squarefree numbers and $\alpha > 1$ is a fixed irrational algebraic number.

Key words: ternary problem, squarefree numbers, asymptotic formula.

References

1. Vinogradov I. M. Representation of an Odd Number as a Sum of Three Primes. *Doklady AN USSR*. 1937, vol. 15, pp. 291–294 (in Russian).
2. Fatkina S. Yu. On the representation of a natural number as a sum of three almost equal terms generated by primes. *Russian Mathematical Surveys* [Uspekhi Mat. Nauk], 2000, vol. 55, no. 1, pp. 171. DOI: 10.1070/RM2000v055n01ABEH000254.
3. Evelyn C. J. A., Linfoot E. H. On a problem in the additive theory of numbers. I : *Math. Z.* 1929, vol. 30, pp. 433–448; II : *J. Reine Angew. Math.*, 1931, vol. 164, pp. 131–140; III : *Math. Z.*, 1932, vol. 34, pp. 637–644; IV : *Ann. of Math.*, 1931, vol. 32, pp. 261–270; V : *Quart. J. Math.*, 1932, vol. 3, pp. 152–160; VI : *Quart. J. Math.*, 1933, vol. 4, pp. 309–314.
4. Brüdern J., Perelli A. Exponential Sums and Additive Problems Involving Square-free Numbers. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 1999, vol. XXVIII, pp. 591–613.
5. Arkhipov G. I., Buriev K., Chubarikov V. N. On the power of a singular set in binary additive problems with prime numbers. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 218, pp. 23–52.
6. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. On the exceptional set in a Goldbach-type binary problem. *Dokl. Math.* [Dokl. Akad. Nauk], 2002, vol. 66, no. 3, pp. 338—339.
7. Brüdern J., Granville A., Perelli A., Vaughan R. C., Wooley T. D. On the exponential sum over k-free numbers. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1998, vol. 356, pp. 739–761.
8. Tolev D. I. On the exponential sum with square-free numbers. *Bull. London Math. Soc.*, 2005, vol. 37, pp. 827–834. DOI: 10.1112/S0024609305004753.
9. Schlage-Puchta J. C. The exponential sum over squarefree integers. *Acta Arith.*, 2004, vol. 115, pp. 265–268. DOI: 10.4064/aa115-3-7.
10. Popov O. V. Arithmetic applications for estimates of Weyl sums of polynomials of increasing degree. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1998, vol. 4, no. 2, pp. 595–640 (in Russian).
11. Goryashin D. V. Squarefree numbers in the sequence $[\alpha n]$. *Chebyshevskiĭ Sb.*, 2013, vol. 14, no. 3 pp. 60–66 (in Russian).
12. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. On the measure of «large arcs»' in the Farey partition. *Chebyshevskiĭ Sb.*, 2011, vol. 12, no. 4, pp. 39–42.
13. Brüdern J., Cook R. J., Perelli A. The Values of Binary Linear Forms at Prime Arguments. *Sieve Methods, Exponential Sums and Their Applications in Number Theory*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997, pp. 87–100.

УДК 511.9

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОГО МЕТОДА В ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИЗЕ

Л. П. Добровольская[1], М. Н. Добровольский[2], Н. М. Добровольский[3], Н. Н. Добровольский[4], И. Ю. Реброва[5]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент, Институт экономики и управления, Тула, lbocharova6565@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН, Москва, dobrovolsky.michael@gmail.com

[3]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, dobrovol@tspu.tula.ru

[4]Аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

[5]Кандидат физико-математических наук, декан факультета математики, физики и информатики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, i_rebrova@mail.ru

В данной работе дается обзор некоторых актуальных проблем метода оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова. Данный обзор был сделан 12 сентября 2013 года в г. Саратове на XI Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения».

Ключевые слова: метод оптимальных коэффициентов, алгебраические решётки, теорема Гельфонда, гиперболическая дзета-функция.