3. *Ульянов П. Л.* A-интеграл и его применение к теории тригонометрических рядов // УМН. 1955. Т. 10, № 1. С. 189–191 [*Ul'yanov P. L.* The A-Integral and its Application in the Theory of Trigonometric Series // UMN. 1955. Vol. 10, № 1. P. 189–191.]
4. *Ульянов П. Л.* A-интеграл и сопряженные функции // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. 1956. Т. VIII, вып. 181. С. 139–157. [*Ul'yanov P. L.* The A-Integral and Conjugate Functions // Uchen. Zap. Mosk. Gos. Univ. 1956. Vol. VIII, iss. 181. P. 139–157.]
5. *Лукашенко Т. П.* Об A-интегрируемости функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1982. № 6. С. 59–63. [*Lukashenko T. P.* On the A-Integrability of Functions // Vestn. Mosk. Gos. Univ. Ser. 1. Matem. Mekh. 1982. № 6. P. 59–63.]
6. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с. [*Bari N. K.* Trigonometric Series. Moscow : Fizmatgiz, 1961. 936 p.]
7. *Ефимова М. П.* О свойствах Q-интеграла // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 3. С. 340–350. [*Efimova M. P.* On the Properties of the Q-Integral // Math. Notes. 2011. Vol. 90, № 3. P. 322—332.]
8. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Мера и интеграл. М. : Факториал, 1998. 160 с. [*D'yachenko M. I., Ul'yanov P. L.* Measure and the Integral. Moscow : Faktorial, 1998. 160 p.]
9. *Бонди И. Л.* Замена переменной в A-интеграле // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. 1962. № 188. С. 3–21. [*Bondi I. L.* The Change of Variable in the A-Integral // Uchen. Zap. Mosk. Gos. Ped. Inst. 1962. № 188. P. 3–21.]
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд. М. : Наука, 1976. 543 с. [*Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Mineola; New York : Dover Publications, 1999.]

УДК 517.95 517.984

О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КдФ

М. Ю. Игнатьев

Саратовский государственный университет
E-mail: IgnatievMU@info.sgu.ru

В работе рассматривается общее уравнение иерархии Кортевега-де Фриза (КдФ). Изучаются краевые задачи для данного уравнения с неоднородными граничными условиями специального вида. Построен широкий класс решений изучаемых задач. Построение основано на идеях метода обратной спектральной задачи.

Ключевые слова: иерархия КдФ, краевые задачи, интегрируемость, метод обратной задачи.

On Solutions of Some Boundary Value Problems for General KdV Equation

M. Yu. Ignatyev

This paper deals with the general equation of Korteweg-de Vries (KdV) hierarchy. A boundary-value problem with certain inhomogeneous boundary conditions is studied. We construct the wide class of solutions of the problem using the inverse spectral method.

Key words: KdV hierarchy, boundary–value problems, integrability, inverse spectral method.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что исследование краевых и смешанных задач для интегрируемых нелинейных уравнений сталкивается со значительными трудностями принципиального характера. Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в этой области в последние годы [1–4], в общем случае здесь не удается применить метода обратной спектральной задачи с той же эффективностью, как в случае задачи Коши на всей оси: процедура построения решения включает шаг, состоящий в решении нетривиальной существенно нелинейной задачи. Исключение составляют задачи с граничными условиями специального вида [5–7], которые часто называют интегрируемыми, или линеаризуемыми. В этом случае удается, используя идеи метода обратной задачи, построить широкие классы решений краевых задач [7, 8], в ряде случаев дать (полное или частичное) решение смешанных задач [1–3, 9], исследовать поведение решений на больших временах[4]. Отметим, что исследование краевых и смешанных задач существенным образом опирается на структуру матриц, входящих в представление нулевой кривизны для данного уравнения. Поэтому все полученные на данный момент результаты относятся к тому или иному конкретному интегрируемому уравнению и не могут быть непосредственно обобщены на какие-либо классы уравнений.

В настоящей работе подход, основанный на идеях метода обратной спектральной задачи, применяется к исследованию некоторых краевых задач для класса уравнений, являющегося подмножеством иерархии КдФ. Построен класс точных решений, включающий в себя, в частности, солитонные и конечнозонные решения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим общее уравнение КдФ (см., например, [10]):

$$\dot{q} = \sum_{\nu=0}^{s} C_\nu X_\nu(q). \tag{1}$$

Здесь $X_\nu(q)$ — многочлены относительно q и ее производных, определяемые следующим образом:

$$X_\nu = -P'_{\nu+1}, \qquad P_1 = -\frac{1}{2}q, \qquad P'_{\nu+1} = HP_\nu, \qquad H = -\frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3} + 2q\frac{d}{dx} + q'.$$

Введем многочлены $\beta_n(x;q)$ относительно q и ее производных по следующим рекуррентным формулам:

$$\beta_1 = q, \qquad \beta_{n+1} = -\beta'_n - \sum_{\nu=1}^{n-1} \beta_\nu \beta_{n-\nu}.$$

Определим $b_n(q) := \beta_n(0;q)$. Ясно, что $b_n(q)$ — многочлены относительно значений q и ее производных при $x = 0$.

Объектом изучения в данной работе является краевая задача для уравнения (1) с граничными условиями:

$$b_n(q) = a_n, \qquad n = \overline{1, 2s-1}, \tag{2}$$

где a_n — вещественные числа, которые определяются следующим образом.

Предположим, что все корни многочлена $\varphi(\rho) = -\frac{1}{2}\rho \sum\limits_{\nu=0}^{s} C_\nu \left(2\rho^2\right)^\nu$ чисто мнимые, иначе говоря, φ может быть записан в следующем виде:

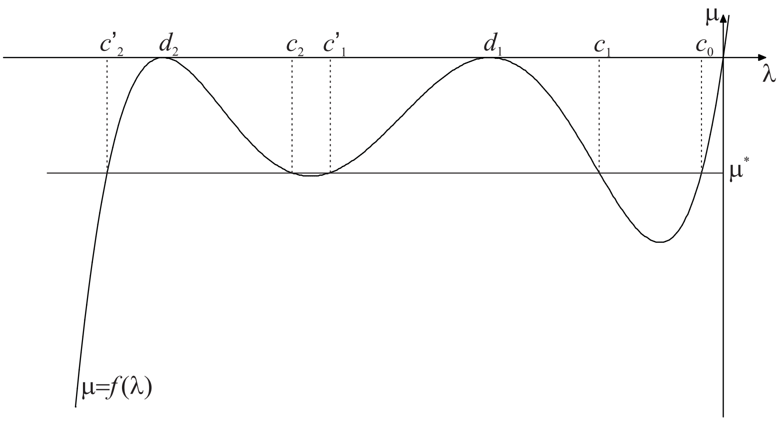
$$\varphi(\rho) = 4^s \rho \prod_{\nu=1}^{s} \left(\rho^2 - d_\nu\right),$$

где $d_n = -\delta_n^2$, $0 < \delta_1 < \ldots < \delta_s$. Введем многочлен $f(\lambda) := 16^s \lambda \prod\limits_{\nu=1}^{s} (\lambda - d_\nu)^2$ и рассмотрим уравнение

$$f(\lambda) = \mu. \tag{3}$$

Обозначим через μ^- точную нижнюю грань множества таких μ, что все корни уравнения (3) вещественны. Пусть выбрано произвольное $\mu^* \in (\mu^-, 0)$. Рассмотрим (3) с $\mu = \mu^*$ и обозначим его корни $0 > c_0 > c_1 > c'_1 > \ldots > c_s > c'_s$ (рисунок). Заметим, что $f'(c_\nu) < 0$. Определим многочлен $g(\lambda) := 4^s \prod\limits_{\nu=1}^{s} (\lambda - c_\nu)$ и числа a_n как коэффициенты следующего ряда Лорана:

$$i\frac{\varphi(\rho)}{g\left(\rho^2\right)} = i\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(2i\rho)^n}.$$



Корни уравнения (3)

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Напомним [11], что класс $B(\mu)$, $\mu \in (-\infty, 0)$, определяется как множество быстро убывающих на $\pm\infty$ вещественнозначных безотражательных потенциалов, все собственные значения которых лежат на $[\mu, 0)$. Класс $\overline{B(\mu)}$ определяется как замыкание $B(\mu)$ в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах вещественной оси, $\tilde{B} := \bigcup\limits_{\mu<0} \overline{B(\mu)}$. Отметим, что помимо безотражательных потенциалов (соответствующих солитонным решениям уравнений иерархии КдФ) класс $\mathbf{R} + \tilde{B}$ содержит также все конечнозонные потенциалы.

Для заданной вещественной функции $q(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, рассмотрим операторы Штурма–Лиувилля $L_\pm$, порожденные на полуосях $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ дифференциальным выражением $\ell y = -y'' + q(x)y$ и краевым условием $y(0) = 0$. Через $m_\pm(\lambda)$ обозначим функции Вейля–Титчмарша операторов $L_\pm$.

Функцией Вейля–Марченко назовем функцию, построенную следующим образом:

$$m(\rho) = \begin{cases} m_+(\rho^2), & \operatorname{Im}\rho > 0, \\ m_-(\rho^2), & \operatorname{Im}\rho < 0. \end{cases}$$

Известно [11], что для функций класса $\tilde{B}$ соответствующие функции Вейля–Марченко голоморфны вне некоторого отрезка мнимой оси. Более точно, заданная функция m является функцией Вейля–Марченко для некоторой $q \in \overline{B(-\mu^2)}$ тогда и только тогда, когда она допускает представление

$$m(\rho) = i\rho + i\int_{-a}^{a} \frac{d\sigma(\xi)}{\rho - i\xi},$$

где σ — неубывающая функция, $a \le \mu$ и $\int_{-a}^{a} d\sigma(\xi) \le \mu^2$.

3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Теорема 1. *Пусть Q — произвольная функция из класса $\overline{B(\mu_*)}$, $\mu_* \in (\mu^*, 0)$ и пусть $M(T, \cdot)$ — функция Вейля–Марченко для $Q_T(t) := Q(t + T)$. Далее, определим w как решение задачи Коши:*

$$\dot{w} + w^2 = Q(t) - \mu^*, \qquad w(0) = w_0 \tag{4}$$

с произвольной $w_0 \in (M(0, i\sqrt{|\mu^*|}), M(0, -i\sqrt{|\mu^*|}))$. Тогда функция $m(t, \cdot)$, определяемая равенством

$$m(t, \rho) := \frac{M(t, \varphi(\rho)) - w(t)}{g(\rho^2)}, \tag{5}$$

является функцией Вейля–Марченко для некоторой $q(\cdot, t) \in \tilde{B}$ и функция $q(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t \ge 0$, является решением краевой задачи (1), (2) *на каждой из полуосей $x \in (-\infty, 0]$, $x \in [0, \infty)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и и Национального научного совета Тайваня (*проекты* 10-01-00099, 10-01-92001-ННС).

Библиографический список

1. *Fokas A. S.* Integrable Nonlinear Evolution Equations on the Half-Line // Comm. Math. Phys. 2002. Vol. 230. P. 1–39.

2. *Fokas A. S, Its A. R., Sung L. Y.* The Nonlinear Schroedinger Equation on the Half-Line // Nonlinearity. 2005. Vol. 18. P. 1771–1822.

3. *Boutet de Monvel A., Fokas A. S., Shepelsky D.* Integrable Nonlinear Evolution Equations on a Finite Interval // Comm. Math. Physics. 2006. Vol. 263, № 1. P. 1–133.

4. *Fokas A. S., Lenells J.* Explicit soliton asymptotics for the Korteweg–de Vries equation on the half-line // Nonlinearity. 2010. Vol. 23. P. 937–976.

5. *Склянин Е. К.* Граничные условия для интегрируемых уравнений // Функц. анализ и прил. 1987. Т. 21. С. 86—87. [*Sklyanin E.* Boundary conditions for integrable equations // Funct. Anal. Appl. 1987. Vol. 21. P. 86–87.]

6. *Adler V., Gurel B., Gurses M., Habibullin I.* Boundary conditions for integrable equations // J. Phys. A. 1997. Vol. 30, № 10. P. 3505–3513.

7. *Адлер В. Э., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б.* Краевая задача для уравнения КдФ на полуоси // Теорет. и мат. физ. 1997. Т. 110, № 1. С. 78–90. [*Adler V., Khabibullin I., Shabat A.* A boundary value problem for the KdV equation on a half-line // Theoret. and Math. Phys. 1997. Vol. 110, № 1. P. 78–90.]

8. *Ignatyev M. Yu.* On solutions of an integrable boundary–value problem for the KdV equation on the semi-axis. Preprint SM-DU-732. Duisburg, 2001. 18 p.

9. *Игнатьев М. Ю.* О решении одной смешанной задачи для уравнения КдФ на полуоси // Spectral and Evolution Problems : Proc. of the Twentieth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 20. Simferopol, 2010. P. 141–144. [*Ignatyev M.* On solution

of one initial boundary value problem for KdV equation on the semi-axis // Spectral and Evolution Problems : Proc. of the Twentieth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 20. Simferopol, 2010. P. 141–144.]
10. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М. : Наука, 1984. 240 с. [*Levitan B. M.* Inverse Sturm–Liouville Problems. Utrecht : VNU Sci. Press, 1987. 240 p.]
11. *Marchenko V. A.* 1991 The Cauchy problem for the KdV equation with non-decreasing initial data // What is integrability? Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1991. P. 273–318.

УДК 517.544

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ НА НЕГЛАДКОЙ ДУГЕ

Б. А. Кац[1], С. Р. Миронова[2], А. Ю. Погодина[3]

[1]Казанский (приволжский) федеральный университет
E-mail: katsboris877@gmail.com
[2]Казанский научно-исследовательский технический университет
E-mail: srmironova@yandex.ru
[3]Саратовский государственный технический университет
E-mail: apogodina@yandex.ru

Исследуется разрешимость краевой задачи о скачке на негладкой дуге в случае, когда скачок имеет особенность на одном из концов этой дуги.

Ключевые слова: негладкая дуга, интеграл типа Коши, задача о скачке.

Solvability of the Jump Problem on Non-smooth Arc

B. A. Kats, S. R. Mironova, A. Yu. Pogodina

We study solvability of the jump problem on non-smooth arc for the case, where the jump has a singularity at one of end points of the arc.

Key words: non-smooth arc, Cauchy type integral, jump problem.

Пусть Γ есть простая жорданова дуга с началом в точке O и концом в точке 1. Задача о скачке — это краевая задача о нахождении голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, имеющей в каждой точке $t \in \Gamma \setminus \{0, 1\}$ предельные значения слева и справа $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ соответственно, связанные краевым условием:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in \Gamma \setminus \{0, 1\}, \tag{1}$$

а также удовлетворяющей оценкам

$$|\Phi(z)| \leq C|z|^{-\gamma}, \quad |\Phi(z)| \leq C|z-1|^{-\gamma}, \tag{2}$$

где $\gamma = \gamma(\Phi) \in [0, 1)$. Эта задача имеет большое значение в теории краевых задач (см., напр., [1, 2]).

В данной работе рассматривается случай, когда скачок g имеет в точке 0 особенность порядка p, т. е. $|g(t)| \leq C|t|^{-p}$, $0 < p < 1$, а вне любой окрестности начала координат удовлетворяет условию Гёльдера. В случае, когда дуга Γ кусочно-гладкая, решение такой задачи дается интегралом типа Коши:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)dt}{t-z}, \tag{3}$$

причем в точке 0 функция Φ также имеет особенность порядка p.

Здесь мы покажем, что на негладкой дуге порядок этой особенности может возрасти и получим достаточное условие разрешимости задачи о скачке на негладкой дуге.

Пусть A есть компактное множество на комплексной плоскости. Пространство Гёльдера $H_\nu(A)$, $\nu \in (0, 1]$, состоит из заданных на A функций f, для которых конечна величина

$$h_\nu(f, A) := \sup\{\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^\nu} : t', t'' \in A, t' \neq t''\}.$$

Для демонстрации феномена повышения порядка особенности интеграла типа Коши за счет негладкости контура мы построим следующее двупараметрическое семейство дуг. Фиксируем значения $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta > 1$ и положим $a_k = \zeta^{-1}(\alpha+1)k^{-\alpha-1}$, $x_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. Тогда $x_1 = 1$, $x_n \asymp n^{-\alpha}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ расходится. Далее, положим $x'_n = x_n - a_n^\beta$; очевидно, $x'_n > x_{n+1}$. Рассмотрим вертикальные

