funktsii. T. II: Funktsii Besselya, funktsii paraboliches-kogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny [Higher transcendental functions. Vol. II: Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials]. Translated from the English by N. Ja. Vilenkin. Second edition, unrevised. Spravochnaya Matematicheskaya Biblioteka [Mathematical Reference Library]. Moscow, Nauka, 1974. 295 p. (in Russian).

7. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for one class of multi-dimensional elliptic equations. *Vestnik, Quart. J. of Novosibirsk State Univ. Ser. Math., mech., inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 7–13 (in Russian).

8. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for equation Laplase. *Izv. Saratov. Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 3–7 (in Russian).

УДК 517.95; 517.984

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

М. Ш. Бурлуцкая[1], А. П. Хромов[2]

[1] Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, bmsh2001@mail.ru

[2] Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Исследуется смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией в потенциале и с периодическими краевыми условиями. Получены уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи, на основе которых проводится обоснование применения метода Фурье. Использованы приемы, позволяющие избежать исследования равномерной сходимости почленно продифференцированного формального решения по методу Фурье и получить классическое решение при минимальных требованиях на начальные данные задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение, асимптотика собственных значений и собственных функций, система Дирака.

В данной работе методом Фурье решается следующая смешанная задача с инволюцией:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + q(x)u(1-x,t), \qquad x \in [0,1], \qquad t \in (-\infty,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где $q(x)$ — комплекснозначная функция из $C^1[0,1]$ такая, что $q(0) = q(1)$, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным минимальным требованиям: $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$.

Как и в [1, 2], где также рассматривается простейшая смешанная задача с инволюцией при производной $u_x(x,t)$, применяя идеи А. Н. Крылова [3] и В. А. Чернятина [4], мы избегаем исследования равномерной сходимости почленно продифференцированного формального решения по методу Фурье. Это позволяет получить классическое решение задачи при минимальных требованиях на $\varphi(x)$.

1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

1. Введем оператор L:

$$Ly = l[y] = y'(x) + q(x)y(1-x), \quad y(0) = y(1).$$

Рассмотрим соответствующую спектральную задачу $Ly = \lambda y$:

$$y'(x) + q(x)y(1-x) = \lambda y(x), \tag{4}$$

$$y(0) = y(1). \tag{5}$$

Осуществим переход от системы (4)–(5) к системе Дирака. Положим $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования) и рассмотрим систему

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \tag{6}$$

где $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$ и $z_1(x) = z_2(1-x)$.

Лемма 1. *Если $y(x)$ есть решение уравнения* (4) *и $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, то $z(x)$ удовлетворяет системе Дирака* (6) *и условию*

$$z_1(1/2) = z_2(1/2). \tag{7}$$

Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (6)–(7)*, то $y(x) = z_1(x)$ удовлетворяет уравнению* (4).

Доказательство. Пусть $y(x)$ есть решение уравнения (4). Тогда очевидно, что $z(x)$ удовлетворяет системе (6)–(7). Запишем систему (6) покомпонентно:

$$z_1'(x) + q(x)z_2(x) = \lambda z_1(x), \tag{8}$$

$$-z_2'(x) + q(1-x)z_1(x) = \lambda z_2(x). \tag{9}$$

Заменив в (8)–(9) x на $1-x$, придем к системе

$$z_1'(1-x) + q(1-x)z_2(1-x) = \lambda z_1(1-x),$$
$$-z_2'(1-x) + q(x)z_1(1-x) = \lambda z_2(1-x),$$

из которой, положив $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$, где $u_1(x) = z_2(1-x)$, $u_2(x) = z_1(1-x)$, получим:

$$-u_2'(x) + q(1-x)u_1(x) = \lambda u_2(x),$$
$$u_1'(x) + q(x)u_2(x) = \lambda u_1(x).$$

Далее

$$u_1(1/2) = z_2(1/2) = z_1(1/2) = u_2(1/2).$$

Таким образом, $u(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одной и той же системе уравнений и $u(1/2) = z(1/2)$. Значит, $u(x) \equiv z(x)$, откуда, в частности, $z_2(x) = z_1(1-x)$. Поэтому из (8) получаем:

$$z_1'(x) + q(x)z_1(1-x) = \lambda z_1(x).$$

Лемма доказана. □

Из леммы 1 очевидным образом следует утверждение

Лемма 2. *Число λ является собственным значением, а $y(x)$ — собственной функцией оператора L тогда и только тогда, когда $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T = (y(x), y(1-x))^T$ является ненулевым решением системы* (6) *с краевыми условиями:*

$$z_1(0) = z_1(1), \quad z_1(1/2) = z_2(1/2). \tag{10}$$

2. Представим систему (6) в виде

$$z'(x) + Q(x)z(x) = \lambda Dz(x), \tag{11}$$

где $Q(x) = B^{-1}P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ -q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$, $D = B^{-1} = \operatorname{diag}(1, -1)$. Тогда (см. [2]) имеет место:

Теорема 1. *Для общего решения системы* (11) *справедлива асимптотическая формула:*

$$z(x, \lambda) = U(x, \lambda)e^{\lambda Dx}c, \tag{12}$$

где $U(x,\lambda) = E + O(1/\lambda)$, E — единичная матрица, $c = (c_1, c_2)^T$ — произвольный постоянный вектор. Матрица $O(1/\lambda)$ регулярна по λ в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Re}\lambda \geqslant -h$, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant h$ (h — любое фиксированное положительное число), и оценка $O(\cdot)$ равномерна по x.

Теорема 2 (уточнение теоремы 1). *Если $\operatorname{Re}\lambda \ge -h$, то для $U(x,\lambda) = (u_{ij}(x))_1^2$ в формуле (12) справедливы асимптотические формулы:*

$$u_{11}(x) = 1 + \frac{1}{2\lambda}\int_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{12}(x) = \frac{1}{2\lambda}\left(q_2(x) - q_2(1)e^{-2\lambda(1-x)} + \int_x^1 e^{2\lambda(x-t)}q_2'(t)\,dt\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{21}(x) = -\frac{1}{2\lambda}\left(q_1(x) - q_1(0)e^{-2\lambda x} - \int_0^x e^{-2\lambda(x-t)}q_1'(t)\,dt\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

$$u_{22}(x) = 1 - \frac{1}{2\lambda}\int_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

где $q_2(x) = q(x)$, $q_1(x) = -q(1-x)$, $O\left(1/\lambda^2\right)$ регулярны при больших $|\lambda|$ и оценки $O(\cdot)$ равномерны по x.

Аналогичные формулы справедливы и при $\operatorname{Re}\lambda \le h$.

Доказательство. Представим (6) покоординатно в виде

$$u_1'(x) - \lambda u_1(x) = -q_2(x)u_2(x), \tag{13}$$

$$u_2'(x) + \lambda u_2(x) = -q_1(x)u_1(x). \tag{14}$$

Полагая $w_1(x) = u_1(x)e^{-\lambda x}$, $w_2(x) = u_2(x)e^{\lambda x}$, из (13) и (14) получим:

$$w_1(x) = c_1 - \int_0^x e^{-2\lambda t}q_2(t)w_2(t)\,dt, \tag{15}$$

$$w_2(x) = c_2 - \int_0^x e^{2\lambda t}q_1(t)w_1(t)\,dt. \tag{16}$$

Выполним подстановку (16) в (15):

$$w_1(x) = c_1 - c_2\int_0^x e^{-2\lambda t}q_2(t)\,dt + \int_0^x e^{2\lambda t}q_1(t)w_1(t)\,dt\int_t^x e^{-2\lambda\tau}q_2(\tau)\,d\tau. \tag{17}$$

Полагая в (17) $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и учитывая, что

$$\int_t^x e^{-2\lambda\tau}q_2(\tau)\,d\tau = O\left(\lambda^{-1}e^{-2\lambda t}\right), \qquad \int_t^x e^{2\lambda\tau}q(\tau)\,d\tau = O\left(\lambda^{-1}e^{2\lambda x}\right), \tag{18}$$

получим $w_1(x) = 1 + O\left(\lambda^{-1}\right)$, а отсюда из (16) $w_2(x) = O\left(\lambda^{-1}e^{2\lambda x}\right)$.

Далее, положим $c_2 = 1$ и подставим (15) в (16). Тогда

$$w_2(x) = 1 - \varphi(x,\lambda)\left[c_1 - \int_0^x e^{-2\lambda t}q_2(t)w_2(t)\,dt\right] + \int_0^x e^{-2\lambda t}q_2(t)w_2(t)\varphi(t,\lambda)\,dt, \tag{19}$$

где $\varphi(x,\lambda) = \int_0^x e^{2\lambda t}q_1(t)\,dt = O\left(\lambda^{-1}e^{2\lambda x}\right)$. Полагая теперь в (19) $c_1 = \int_0^1 e^{-2\lambda t}q_2(t)w_2(t)\,dt$, получим, что $w_2(x) = 1 + O\left(\lambda^{-1}\right)$, а тогда $w_1(x) = O\left(\lambda^{-1}e^{-2\lambda x}\right)$. Отсюда, в частности, легко следует теорема 1.

Теперь дадим уточнение $w_1(x)$ и $w_2(x)$. В случае $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ обозначим $w_1(x) = w_{11}(x)$, $w_2(x) = w_{21}(x)$. Имеем:

$$\int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau)\Big|_t^x + \frac{1}{2\lambda}\int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2'(\tau)\,d\tau.$$

Тогда, подставляя найденную асимптотику для $w_1(x) = w_{11}(x)$ в (17) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, получим:

$$w_1(x) = 1 - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\,dt \int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau)\,d\tau + O\left(\lambda^{-2}\right). \tag{20}$$

Так как

$$\int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\,dt \int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\big[-\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda x} q_2(x) + \frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda t} q_2(t)\big]\,dt + \frac{1}{2\lambda}\int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2'(\tau)\,d\tau =$$

$$= O\left(\lambda^{-2}\right) + \frac{1}{2\lambda}\int_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + \frac{1}{2\lambda}\int_0^x e^{-2\lambda\tau} q_2'(\tau)\,d\tau \int_0^\tau e^{2\lambda t} q_1(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\int_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + O\left(\lambda^{-2}\right),$$

то из (20) получаем:

$$w_1(x) = 1 - \frac{1}{2\lambda}\int_0^x q_1(t) q_2(t)\,dt + O\left(\lambda^{-2}\right). \tag{21}$$

Подставим (21) в (16) при $c_2 = 0$:

$$w_2(x) = w_{21}(x) = -\int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\,dt + O\left(\lambda^{-2} e^{2\lambda x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda}\big[e^{2\lambda x} q_1(x) - q_1(0) - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)\,dt\big] + O\left(\lambda^{-2} e^{2\lambda x}\right).$$

Аналогичные формулы получаются для $w_1(x) = w_{12}(x)$ и $w_2(x) = w_{22}(x)$ при втором выборе c_1 и c_2. Образуем матрицу $W(x,\lambda) = (w_{ij}(x))_1^2$. Тогда матрица $U(x,\lambda) = e^{\lambda Dx} W(x,\lambda) e^{-\lambda Dx}$ — искомая. □

3. Получим асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора L.

Теорема 3. *Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые и для них справедливы асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = 2n\pi i + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots,$$

где n_0 — некоторое достаточно большое натуральное число.

Доказательство. По теореме 1 имеем для $z(x) = z(x,\lambda) = (z_1(x), z_2(x))^T$:

$$z_1(x) = c_1 u_{11}(x) e^{\lambda x} + c_2 u_{12}(x) e^{-\lambda x}, \qquad z_2(x) = c_1 u_{21}(x) e^{\lambda x} + c_2 u_{22}(x) e^{-\lambda x}.$$

Так как $z_1(1) = z_2(0)$, то отсюда в силу краевых условий (10) получаем:

$$\big[u_{11}(0) - u_{21}(0)\big] c_1 + \big[u_{12}(0) - u_{22}(0)\big] c_2 = 0,$$

$$\big[u_{11}(1/2) - u_{21}(1/2)\big]e^{\lambda/2}c_1 + \big[u_{12}(1/2) - u_{22}(1/2)\big]e^{-\lambda/2}c_2 = 0.$$

Следовательно, уравнение для собственных значений имеет вид

$$\begin{vmatrix} u_{11}(0) - u_{21}(0) & u_{12}(0) - u_{22}(0) \\ [u_{11}(1/2) - u_{21}(1/2)]e^{\lambda/2} & [u_{12}(1/2) - u_{22}(1/2)]e^{-\lambda/2} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $e^{\lambda} = 1 + O(1/\lambda)$. □

Теперь с помощью теоремы 2 дадим более точные асимптотики собственных чисел. Всюду в дальнейшем через α будем обозначать различные константы, не зависящие от n (из конечного набора констант), через α_n такие константы, что $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.

Лемма 3. *Для любого целого числа k, любой функции $s(x) \in C[0,1]$ и $p = \pm 1$ имеем:*

$$e^{k\lambda_n} = \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\int\limits_0^{1/2} e^{2p\lambda_n t} s(t)\,dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\int\limits_0^{1} e^{2p\lambda_n t} s(t)\,dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Эта лемма аналогична лемме 3 из [2].

Лемма 4. *При $\lambda = \lambda_n$ имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$u_{11}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{12}(0) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n},$$

$$u_{22}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{21}(0) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{11}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha_n}{n}, \qquad u_{12}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n},$$

$$u_{22}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad u_{21}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}.$$

Теорема 4. *Для собственных значений λ_n имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = 2n\pi i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \quad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \dots .$$

Лемма 4 и теорема 4 есть дословное повторение соответствующих результатов из [2].

Далее, для собственных функций получим сначала грубую асимптотику.

Теорема 5. *Для собственных функций оператора L имеют место асимптотические формулы:*

$$y_n(x) = e^{2n\pi i x} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \dots,$$

где оценка $O(\cdot)$ равномерна по $x \in [0,1]$.

Доказательство. В силу леммы 2 собственные функции есть $y_n(x) = z_1(x, \lambda_n) = c_1 u_{11}(x) e^{\lambda_n x} + c_2 u_{12}(x) e^{-\lambda_n x}$, где c_1 и c_2 связаны соотношением $z_1(0,\lambda_n) = z_2(0,\lambda_n)$. Отсюда имеем:

$$c_1[u_{11}(0) - u_{21}(0)] = c_2[u_{22}(0) - u_{12}(0)]. \tag{22}$$

Так как $u_{11}(0) - u_{21}(0) = 1 + O(1/n^2)$, $u_{22}(0) - u_{12}(0) = 1 + O(1/n)$, то (22) перейдет в $c_1[1 + O(1/n^2)] = c_2[1 + O(1/n)]$, откуда, полагая $c_2 = 1$, получим $c_1 = 1 + O(1/n)$ и поэтому

$$y_n(x) = \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] u_{11}(x) e^{\lambda_n x} + u_{12}(x) e^{-\lambda_n x} = e^{2n\pi i x} + \left(\frac{1}{n}\right).$$ □

Теперь получим уточненные формулы для собственных функций.

Теорема 6. *Для собственных функций $y_n(x)$ оператора L имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$y_n(x) = e^{2n\pi ix} + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\Omega_{1n}(x) = \frac{1}{n}\big[b(x)e^{-2n\pi ix} + b(x)e^{2n\pi ix} + b(x)\alpha_n e^{-2n\pi ix} + b(x)\alpha_n e^{2n\pi ix}\big],$$

$$\Omega_{2n}(x) = \frac{1}{n}\Big[b(x)\int\limits_0^x e^{2n\pi it}q_2'\left(\frac{x-t}{2}\right)dt + b(x)\int\limits_0^x e^{-2n\pi it}q_2'\left(\frac{x+t}{2}\right)dt\Big],$$

оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x\in[0,1]$, а через $b(x)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора.

Доказательство. Имеем:

$$y_n(x) = c_1u_{11}(x)e^{\lambda_n x} + c_2u_{12}(x)e^{-\lambda_n x},$$

где $c_2=1$, c_1 определяется из (22). Тогда по лемме 4 из (22) имеем $c_1 = 1+\dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{\alpha_n}{n}$. Далее,

$$u_{11}(x) = 1+\frac{1}{n}b(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$e^{\pm\lambda_n x} = e^{\pm 2n\pi ix}\left[1+\frac{1}{n}b(x)+\frac{\alpha_n}{n}b(x)\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Поэтому получим:

$$c_1u_{11}(x)e^{\lambda_n x} = e^{2n\pi ix}\left[1+\frac{1}{n}b(x)+\frac{\alpha_n}{n}b(x)\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее, по теореме 2 имеем:

$$u_{12}(x)e^{-\lambda_n x} = \frac{1}{2\lambda}\left(q_2(x)e^{-\lambda_n x} - q_2(1)e^{-2\lambda_n}e^{\lambda_n x} + \int\limits_x^1 e^{\lambda_n(x-2t)}q_2'(t)\,dt\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Так как $\dfrac{1}{2\lambda} = \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, то

$$\frac{1}{2\lambda}\,q_2(x)e^{-\lambda_n x} = \frac{b(x)}{n}\,e^{-2n\pi ix} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad \frac{q_2(1)}{2\lambda}\,e^{-2\lambda_n}e^{\lambda_n x} = \frac{b(x)}{n}\,e^{2n\pi ix} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее,

$$\int\limits_x^1 e^{\lambda_n(x-2t)}q_2'(t)\,dt = \int\limits_x^1 e^{2n\pi i(x-2t)}q_2'(t)\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\int\limits_x^1 e^{2n\pi i(x-2t)}q_2'(t)\,dt = \int\limits_0^1 e^{2n\pi i(x-2t)}q_2'(t)\,dt - \int\limits_0^x e^{2n\pi i(x-2t)}q_2'(t)\,dt =$$

$$= \alpha_n e^{2n\pi ix} - \int\limits_0^x e^{2n\pi i(x-2t)}q_2'(t)\,dt.$$

Но

$$\int\limits_0^x e^{2n\pi i(x-2t)}q_2'(t)\,dt = \int\limits_0^x e^{2n\pi i\tau}q_2'\left(\frac{x-\tau}{2}\right)d\tau + \int\limits_0^x e^{-2n\pi i\tau}q_2'\left(\frac{x+\tau}{2}\right)d\tau.$$

Значит,

$$u_{12}(x)e^{-\lambda_n x} = \frac{b(x)}{n}\, e^{-2n\pi ix} + \frac{b(x)}{n}\, e^{2n\pi ix} + \frac{\alpha_n}{n}\, b(x)e^{2n\pi ix} +$$
$$+\frac{b(x)}{n}\int\limits_0^x e^{2n\pi i\tau} q_2'\left(\frac{x-\tau}{2}\right)\, d\tau + \frac{b(x)}{n}\int\limits_0^x e^{-2n\pi i\tau} q_2'\left(\frac{x+\tau}{2}\right)\, d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad \square$$

4. Теперь нам надо провести аналогичные исследования для сопряженного оператора L^*.

Теорема 7. *Оператор L^* имеет вид*

$$L^*z = -z'(x) + \overline{q(1-x)}z(1-x), \qquad z(0) = z(1).$$

Рассмотрим спектральную задачу для L^*:

$$-z'(x) + \overline{q(1-x)}z(1-x) = \lambda z(x), \qquad z(0) = z(1).$$

Отсюда получаем:

$$z'(x) + p(x)z(1-x) = \mu z(x), \qquad z(0) = z(1),$$

где $p(x) = -\overline{q(1-x)}$, $\mu = -\lambda$. Таким образом, получим схожую с исходной спектральную задачу, но теперь вместо $q(x)$ берем $p(x)$ и вместо λ берем $\mu = -\lambda$. Поэтому справедливы следующие факты.

Теорема 8. *Для собственных значений μ_n имеют место асимптотические формулы:*

$$\mu_n = 2n\pi i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \dots\ .$$

Теорема 9. *Для собственных функций $z_{-n}(x)$ оператора L^* имеют место асимптотические формулы:*

$$z_{-n}(x) = e^{2n\pi ix} + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \dots,$$

и уточненные асимптотические формулы:

$$z_{-n}(x) = e^{2n\pi ix} + \widetilde{\Omega}_{1n}(x) + \widetilde{\Omega}_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\widetilde{\Omega}_{1n}(x) = \frac{1}{n}\big[b(x)e^{-2n\pi ix} + b(x)e^{2n\pi ix} + b(x)\alpha_n e^{-2n\pi ix} + b(x)\alpha_n e^{2n\pi ix}\big],$$
$$\widetilde{\Omega}_{2n}(x) = \frac{1}{n}\big[b(x)\int\limits_0^x e^{2n\pi it} p_2'\left(\frac{x-t}{2}\right)\, dt + b(x)\int\limits_0^x e^{-2n\pi it} p_2'\left(\frac{x+t}{2}\right)\, dt\big],$$

$p_2(x)$ определяется так же, как и $q_2(x)$, только вместо $q(x)$ берем $p(x) = -\overline{q(1-x)}$. Учтено также, что $\lambda_n^* = -\lambda_n$.

Теорема 10. *Если $f(x) \in C^1[0,1]$, $f(0) = f(1)$, то*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) - S_r(f,x)\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\, d\lambda$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным функциям оператора L, $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L.

Этот результат получается переходом к системе Дирака с учетом того, что для последней краевые условия регулярны по Биркгофу.

2. КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

По методу Фурье формальное решение задачи (1)–(3) имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)e^{\lambda t}d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r}\frac{(\varphi, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})}y_n(x)e^{\lambda_n t}, \tag{23}$$

где $r>0$ фиксировано и таково, что при $|\lambda_n|>r$ все собственные значения простые.

Появление интеграла в (23) вызвано тем, что нумерация собственных значений λ_n привязана к их асимптотике (т. е. главный член асимптотики есть $2n\pi i$) и поэтому некоторое конечное число собственных значений с малыми модулями не занумеровано.

Выполним преобразование этого решения согласно приемам А. Н. Крылова и В. А. Чернятина.

1. Рассмотрим простейшую смешанную задачу, т. е. задачу (1)–(3) при $q(x)\equiv 0$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \qquad u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad u(x,0)=\varphi(x). \tag{24}$$

Общее решение дифференциального уравнения по методу характеристик есть $u(x,t)=F(x+t)$, где $F(x)$ — произвольная функция из $C^1(-\infty,+\infty)$. Из граничных и начальных условий имеем: $F(x+t)$ будет решением задачи (24) тогда и только тогда, когда $\varphi(x)\in C^1[0,1]$,

$$\varphi(0)=\varphi(1), \qquad \varphi'(0)=\varphi'(1) \tag{25}$$

и $F(x)=F(x+1)$, причем $F(x)=\varphi(x)$ при $x\in[0,1]$. Условия (25) обеспечивают гладкость $F(x)$ и, тем самым, однозначную разрешимость задачи (24).

Теперь решим задачу (24) по методу Фурье. Формальное ее решение есть

$$u_0(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty}(\varphi, e^{2n\pi ix})e^{2n\pi ix}e^{2n\pi it}. \tag{26}$$

Из условий на $\varphi(x)$ следует, что ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}(\varphi, e^{2n\pi ix})e^{2n\pi i\xi}$ сходится абсолютно и равномерно на всей оси, его сумма $F(\xi)$ равна $\varphi(\xi)$ при $\xi\in[0,1]$ и $F(\xi)=F(\xi+1)$. Из условий (25) получаем, что $F(\xi)\in C^1(-\infty,+\infty)$, и решение (24) есть

$$u_0(x,t)=F(x+t). \tag{27}$$

Представим теперь (26) в виде

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R^0_\lambda\varphi)(x)e^{\lambda t}d\lambda + \sum_{|2n\pi i|>r}(\varphi, e^{2n\pi ix})\,e^{2n\pi ix}e^{2n\pi it}, \tag{28}$$

где $R^0_\lambda=(L_0-\lambda E)^{-1}$, $L_0=L$ при $q(x)\equiv 0$. Из (23), (27), (28) получаем следующее важное представление формального решения (23).

Теорема 11. *Для формального решения* (23) *имеет место формула*

$$u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t), \tag{29}$$

где $u_0(x,t)$ есть (27) *при $F(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$, $F(x)=F(x+1)$ и $F(x)=\varphi(x)$ при $x\in[0,1]$,*

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\left(R_\lambda - R^0_\lambda\right)\varphi\right)(x)e^{\lambda t}d\lambda, \tag{30}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r}\left[\frac{(\varphi, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})}y_n(x)e^{\lambda_n t} - (\varphi, e^{2n\pi ix})e^{2n\pi i(x+t)}\right]. \tag{31}$$

2. Покажем, что ряд (31) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t, сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и всем $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.

Лемма 5. *Для $u_2(x,t)$ имеет место формула*

$$u_2(x,t) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{|\lambda_n|>r \\ |2n\pi i|>r}} \left[\frac{(g, z_{-n})\, y_n(x) e^{\lambda_n t}}{(y_n, z_{-n})(\lambda_n - \mu_0)} - \frac{(g, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i(x+t)}}{2n\pi i - \mu_0} \right],$$

$$\Sigma_2 = \sum \frac{(g_2, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i(x+t)}}{(2n\pi i - \mu_0)^2},$$

и суммирование ряда Σ_2 идет по тем же n, что и ряда Σ_1, μ_0 не является собственным значением операторов L и L_0, $g = (L - \mu_0 E)\varphi$, $g_2 = (L_0 - \mu_0 E) g_1$, $g_1 = g - (L_0 - \mu_0 E)\varphi$.

Доказательство. Имеем $\varphi = R_{\mu_0} g$. Тогда $(L - \lambda E)\varphi = g + (\mu_0 - \lambda)\varphi$. Отсюда $\varphi = R_\lambda g + (\mu_0 - \lambda) R_\lambda \varphi$ и, значит,

$$R_\lambda \varphi = \frac{\varphi}{\mu_0 - \lambda} - \frac{R_\lambda g}{\mu_0 - \lambda}. \tag{32}$$

Так как $g_1 = q(x)\varphi(1-x)$, $q(x) \in C^1[0,1]$, $q(0) = q(1)$, то $g_1 \in D_{L_0}$ (из области определения L_0). Следовательно, g_2 непрерывна, поэтому

$$R^0_\lambda \varphi = \frac{\varphi}{\mu_0 - \lambda} - \frac{R^0_\lambda (L_0 - \mu_0 E)\varphi}{\mu_0 - \lambda} = \frac{\varphi}{\mu_0 - \lambda} - \frac{R^0_\lambda (g - g_1)}{\mu_0 - \lambda} = \frac{\varphi}{\mu_0 - \lambda} - \frac{R^0_\lambda g}{\mu_0 - \lambda} + \frac{R^0_\lambda g_1}{\mu_0 - \lambda}.$$

Но

$$R^0_\lambda g_1 = R^0_\lambda R^0_{\mu_0} g_2 = \frac{R^0_{\mu_0} g_2 - R^0_\lambda g_2}{\mu_0 - \lambda} = \frac{g_1}{\mu_0 - \lambda} - \frac{1}{\mu_0 - \lambda} R^0_\lambda g_2.$$

Отсюда получаем:

$$R^0_\lambda \varphi = \frac{\varphi}{\mu_0 - \lambda} - \frac{R^0_\lambda g}{\mu_0 - \lambda} + \frac{g_1}{(\mu_0 - \lambda)^2} - \frac{1}{(\mu_0 - \lambda)^2} R^0_\lambda g_2. \tag{33}$$

Обозначим $\gamma_n = \{\lambda \big|\ |\lambda - 2n\pi i| = \delta\}$, где $\delta > 0$ достаточно мало, n — номер из суммы Σ_1. Тогда, используя (32) и (33), получаем:

$$\frac{(\varphi, z_{-n})\, y_n(x) e^{\lambda_n t}}{(y_n, z_{-n})} - (\varphi, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i(x+t)} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \left(R_\lambda \varphi - R^0_\lambda \varphi \right)(x) e^{\lambda t}\, d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{\left((R_\lambda - R^0_\lambda) g\right)(x) e^{\lambda t}}{\lambda - \mu_0} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{\left(R^0_\lambda g_2\right)(x) e^{\lambda t}}{(\lambda - \mu_0)^2}\, d\lambda =$$

$$= \frac{(g, z_{-n})\, y_n(x) e^{\lambda_n t}}{(y_n, z_{-n})(\lambda_n - \mu_0)} - \frac{\left(g, e^{2n\pi i x}\right) e^{2n\pi i(x+t)}}{(2n\pi i - \mu_0)} + \frac{\left(g_2, e^{2n\pi i x}\right) e^{2n\pi i(x+t)}}{(2n\pi i - \mu_0)^2}. \qquad \square$$

Лемма 6. *Если $f(x) \in C[0,1]$, то $\left(f, \widetilde{\Omega}_{jn}\right) = \alpha_n / n$, $j = 1, 2$.*

Эта лемма аналогична лемме 8 из [2].

Теорема 12. *Ряд в (29) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и t сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.*

Доказательство. По лемме 5 надо изучить ряды Σ_1 и Σ_2. Согласно неравенствам Коши–Буняковского и Бесселя ряды $\dfrac{|(g, z_{-n})|}{|(y_n, z_{-n})|\, |\lambda_n - \mu_0|}$ и $\dfrac{|(g, e^{2n\pi i x})|}{|2n\pi i - \mu_0|}$ сходятся, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость рядов Σ_1 и Σ_2. Абсолютная и равномерная сходимость продифференцированного по x и t ряда Σ_2 очевидна. Рассмотрим почленно продифференцированный по x ряд Σ_1. По теореме 9 $(g, z_{-n}) = (g, e^{2n\pi i x}) + \alpha_n / n$. Далее, $y'_n(x) = 2n\pi i e^{2n\pi i x} + O(1)$, $(y_n, z_{-n}) = 1 + O(1/n)$, $\lambda_n - \mu_0 = (2n\pi i - \mu_0)[1 + O(1/n^2)]$, $e^{\lambda_n t} = e^{2n\pi i t} + O(1/n)$. Поэтому

$$\frac{(g, z_{-n})\, y'_n(x) e^{\lambda_n t}}{(y_n, z_{-n})(\lambda_n - \mu_0)} = \frac{2n\pi i \left(g, e^{2n\pi i x}\right) e^{2n\pi i(x+t)}}{(2n\pi i - \mu_0)} + O\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$$

и, тем самым, почленно продифференцированный по x ряд Σ_1 сходится абсолютно и равномерно. Аналогичный факт имеет место и в случае почленного дифференцирования ряда Σ_1 по t. $\square$

3. Теперь докажем основной результат.

Теорема 13. *Если* $q(x) \in C^1[0,1]$, $q(0) = q(1)$, $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, *то классическое решение задачи* (1)–(3) *существует и имеет вид* (23).

Доказательство. Очевидно, что правая часть (23) удовлетворяет граничным и начальным условиям. Докажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1). Введем в рассмотрение оператор D:

$$Du = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Представим $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Отсюда следует, что $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0,1]$ и $t \in [-\infty, \infty]$. Далее имеем:

$$Du = Du_0 + Du_1 + D\Sigma_1 + D\Sigma_2 = q(x)\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R^0_\lambda\varphi)(1-x)e^{\lambda t}d\lambda\right) + D\Sigma_1.$$

Но

$$D\Sigma_1 = \sum \frac{(g, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})}\,\frac{1}{\lambda_n - \mu_0}\,D(y_n(x)e^{\lambda_n t}) =$$
$$= q(x)\sum \frac{(g, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})}\,\frac{1}{\lambda_n - \mu_0}\,y_n(1-x)e^{\lambda_n t} = q(x)\sum \frac{(\varphi, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})}\,y_n(1-x)e^{\lambda_n t},$$

т. е. $Du(x,t) = q(x)u(1-x,t)$. Теорема доказана. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. РАН. 2011. Т. 441, № 2. С. 151–154.
2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Обоснование метода Фурье в смешанных задачах с инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 3–12.
3. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М.; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
4. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.

Mixed Problem for Simplest Hyperbolic First Order Equations with Involution

M. Sh. Burlutskaya[1], A. P. Khromov[2]

[1]Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 394006, Voronezh, Russia, bmsh2001@mail.ru

[2]Saratov State University, 83, Astrahanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

In this paper investigates the mixed problem for the first order differential equation with involution at the potential and with periodic boundary conditions. Using the received refined asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding spectral problem, the application of the Fourier method is substantiated. We used techniques, which allow to avoid investigation of the uniform convergence of the series, obtained by term by term differentiation of formal solution on method of Fourier. This allows to get a classical solution with minimal requirements on the initial data of the problem.

Key words: mixed problem, involution, Fourier method, classical solution, asymptotic form of eigenvalues and eigenfunctions, Dirac system.

References

1. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial–boundary Value Problems for First Order Hyperbolic Equations with Involution. *Doklady Mathematics* [Doklady Akademii Nauk], 2011, Vol. 84, no. 3, pp. 783–786.
2. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Substantiation of Fourier Method in Mixed Problem with Involution. *Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 4, pp. 3–12 (in Russian).
3. Krylov A. N. *O nekotoryh differencial'nyh uravnenijah matematicheskoj fiziki, imejushchih prilozhenija v tehnicheskih voprosah* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics Having Application to Technical Problems]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
4. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoj zadache dlya uravnenij v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in the mixed boundary value problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991, 112 p. (in Russian).

УДК 514.133

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ ПЛОСКОСТИ $\widehat{H}$

Л. Н. Ромакина

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, romakinaln@mail.ru

На гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны в модели Кэли–Клейна исследованы параболические параллелограммы. Проведена их классификация, получены метрические соотношения между величинами углов и выражения длин ребер через меры углов при вершинах.

Ключевые слова: гиперболическая плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны, плоскость де Ситтера, параллелограмм, параболический параллелограмм.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования различных фигур гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны в проективной модели Кэли–Клейна возрастает в связи с развитием теории разбиений данной плоскости [1–3] и необходимостью построения теории многогранников трехмерного гиперболического пространства положительной кривизны, являющегося проективной моделью трехмерного пространства де Ситтера (см., например, [4–8]) и содержащего, в частности, плоскости типа $\widehat{H}$.

В работе [9] введены в рассмотрение параллелограммы гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны. Как и на евклидовой плоскости, *параллелограммом* плоскости $\widehat{H}$ называем четырехвершинник, противоположные стороны которого параллельны. Параллельными в паре на плоскости $\widehat{H}$ могут быть либо две гиперболические прямые, либо гиперболическая и параболическая прямые. Поэтому все параллелограммы плоскости $\widehat{H}$ можно отнести к трем типам. Параллелограмм называем *гиперболическим*, если все его стороны гиперболические. Если параллелограмм содержит одну (две) параболическую сторону, называем его *параболическим* (*бипараболическим*). Гиперболические параллелограммы исследованы в работе [9]. В данной статье продолжим начатое исследование и рассмотрим параболические параллелограммы. Покажем, что положение на абсолюте точек сторон определяет три инвариантных относительно фундаментальной группы G плоскости $\widehat{H}$ класса параболических параллелограммов. Для параллелограммов каждого класса определим типы углов и найдем метрические соотношения, связывающие меры ребер и меры углов при вершинах параллелограммов.

Основные понятия и формулы, используемые в работе, введены в статьях [9, 10] и монографии [11]. Напомним некоторые определения.

Каждый угол между смежными сторонами параллелограмма будем называть *углом при вершине* данных сторон, указывая при необходимости его тип. Угол при вершине параллеограмма назовем *внутренним*, если он содержит противоположную вершину параллелограмма. Угол, смежный с внутренним углом при вершине, назовем *внешним* углом параллелограмма при данной вершине.