



## References

1. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial-boundary Value Problems for First Order Hyperbolic Equations with Involution. *Doklady Mathematics* [Doklady Akademii Nauk], 2011, Vol. 84, no. 3, pp. 783–786.
2. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Substantiation of Fourier Method in Mixed Problem with Involution. *Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 4, pp. 3–12 (in Russian).
3. Krylov A. N. *O nekotorykh differencial'nykh uravneniyah matematicheskoy fiziki, imejushchih prilozhenija v tehniceskikh voprosah* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics Having Application to Technical Problems]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
4. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoј zadache dlya uravnenij v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in the mixed boundary value problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991, 112 p. (in Russian).

УДК 514.133

## ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ ПЛОСКОСТИ $\hat{H}$

Л. Н. Ромакина

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, romakinaln@mail.ru

На гиперболической плоскости  $\hat{H}$  положительной кривизны в модели Кэли–Клейна исследованы параболические параллелограммы. Проведена их классификация, получены метрические соотношения между величинами углов и выражения длин ребер через меры углов при вершинах.

*Ключевые слова:* гиперболическая плоскость  $\hat{H}$  положительной кривизны, плоскость де Ситтера, параллелограмм, параболический параллелограмм.

## ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования различных фигур гиперболической плоскости  $\hat{H}$  положительной кривизны в проективной модели Кэли–Клейна возрастает в связи с развитием теории разбиений данной плоскости [1–3] и необходимостью построения теории многогранников трехмерного гиперболического пространства положительной кривизны, являющегося проективной моделью трехмерного пространства де Ситтера (см., например, [4–8]) и содержащего, в частности, плоскости типа  $\hat{H}$ .

В работе [9] введены в рассмотрение параллелограммы гиперболической плоскости  $\hat{H}$  положительной кривизны. Как и на евклидовой плоскости, *параллелограммом* плоскости  $\hat{H}$  называем четырехвершинник, противоположные стороны которого параллельны. Параллельными в паре на плоскости  $\hat{H}$  могут быть либо две гиперболические прямые, либо гиперболическая и параболическая прямые. Поэтому все параллелограммы плоскости  $\hat{H}$  можно отнести к трем типам. Параллелограмм называем *гиперболическим*, если все его стороны гиперболические. Если параллелограмм содержит одну (две) параболическую сторону, называем его *параболическим (бипараболическим)*. Гиперболические параллелограммы исследованы в работе [9]. В данной статье продолжим начатое исследование и рассмотрим параболические параллелограммы. Покажем, что положение на абсолюте точек сторон определяет три инвариантных относительно фундаментальной группы  $G$  плоскости  $\hat{H}$  класса параболических параллелограммов. Для параллелограммов каждого класса определим типы углов и найдем метрические соотношения, связывающие меры ребер и меры углов при вершинах параллелограммов.

Основные понятия и формулы, используемые в работе, введены в статьях [9, 10] и монографии [11]. Напомним некоторые определения.

Каждый угол между смежными сторонами параллелограмма будем называть *углом при вершине* данных сторон, указывая при необходимости его тип. Угол при вершине параллелограмма назовем *внутренним*, если он содержит противоположную вершину параллелограмма. Угол, смежный с внутренним углом при вершине, назовем *внешним* углом параллелограмма при данной вершине.



Гиперболическая  $a$  и параболическая  $b$  прямые могут принадлежать либо гиперболическому (рис. 1, а), либо параболическому пучку (рис. 1, б). В первом случае абсолютная линия  $\gamma$  разбивает один из углов между прямыми  $a, b$  на плоскости  $P_2$ , содержащей плоскость  $\hat{H}$ , на три связные части, две из которых полностью принадлежат плоскости  $\hat{H}$ . Каждую из этих частей называем *гиперболическим флагом* между прямыми  $a, b$ . По отношению друг к другу два гиперболические флага, образованные прямыми  $a, b$ , называем *вертикальными*. Дополнение пары вертикальных гиперболических флагов до плоскости  $\hat{H}$ , связное на  $\hat{H}$  множество, вместе с прямыми  $a, b$  называем *гиперболическим псевдофлагом* между прямыми  $a, b$ . Во втором случае прямые  $a, b$  образуют две симметричные относительно прямой  $a$  связные области — *параболические флаги*, смежные по отношению друг к другу. Гиперболические флаги, гиперболические псевдофлаги и параболические флаги неизмеримы на плоскости  $\hat{H}$  [10, 11].

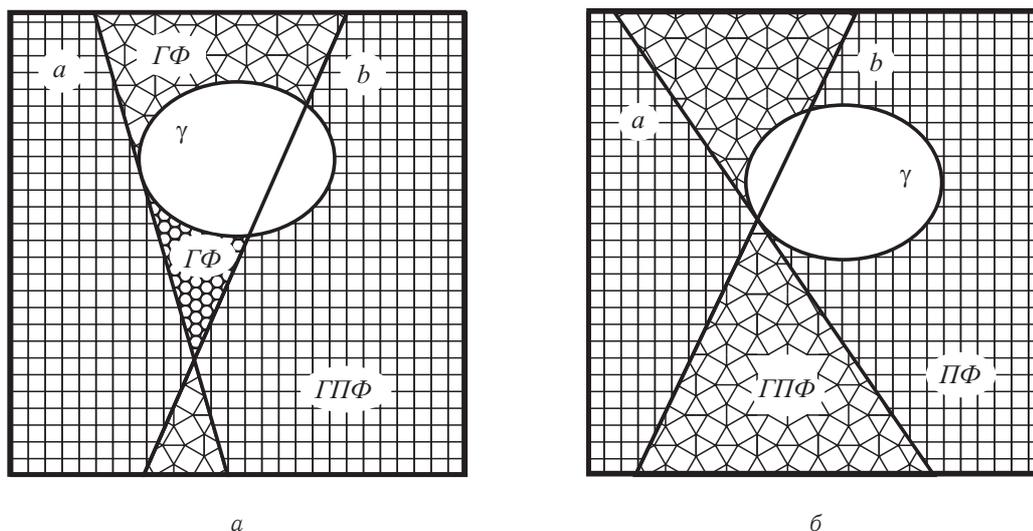


Рис. 1. Вертикальные гиперболические флаги (ГФ) и смежный с ними гиперболический псевдофлаг (ГПФ) (а); смежные параболические флаги (ПФ) (б)

## 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

Классификацию параллелограммов проводим по типу расположения на абсолюте несобственных точек их сторон.

Все стороны параболических параллелограммов содержат на абсолюте пять точек, две из которых — точки пересечения противоположных сторон. Обозначим их через  $Q$  и  $S$ . Все рассматриваемые параллелограммы — конечные, поэтому внутренние относительно  $\gamma$  хорды сторон параллелограммов не имеют общих внутренних относительно  $\gamma$  точек. Учитывая данный факт, с точностью до обозначения в парах противоположных сторон, получаем три типа расположения на абсолютной линии  $\gamma$  точек сторон параллелограмма:

- 1) точки  $Q, S$  разбивают  $\gamma$  на две дуги, одна из которых содержит точки параллельных гиперболических сторон, другая — точку гиперболической стороны, параллельной параболической стороне параллелограмма (рис. 2, а);
- 2) точки параллельных гиперболических сторон параллелограмма принадлежат разным дугам линии  $\gamma$ , образованным точками  $Q, S$  (рис. 2, б);
- 3) точки  $Q, S$  разбивают  $\gamma$  на две дуги, одна из которых не содержит точек сторон параллелограмма (рис. 2, в).

Соответственно типу 1)–3) расположения точек сторон на абсолюте параболический параллелограмм отнесем к классу  $p(I), p(II), p(III)$ .

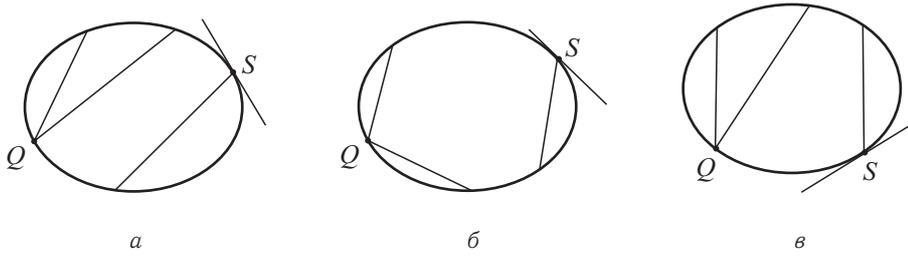


Рис. 2. Типы расположений на абсолютной линии точек сторон параболического параллелограмма класса:  $p(I)$  (а),  $p(II)$  (б),  $p(III)$  (в)

## 2. СВОЙСТВА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

Ребро параболической стороны назовем *параболическим основанием*, а противоположное ему ребро — *гиперболическим основанием* параболического параллелограмма. Два других ребра параллелограмма назовем *боковыми*.

Пусть  $ABCD$  — параболический параллелограмм с параболической стороной  $b$ :

$$\begin{aligned} AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \\ a \cap c = Q, \quad b \cap d = S, \quad b \cap \gamma = S, \\ a \cap \gamma = \{A_0, Q\}, \quad c \cap \gamma = \{C_0, Q\}, \quad d \cap \gamma = \{D_0, S\}. \end{aligned}$$

Обозначать вершины параллелограмма  $ABCD$  (рис. 3) условимся так, чтобы правильно расположенными на  $\gamma$  (см. [9, параграф 2.9]) соответственно классу параллелограмма были точки упорядоченной системы:

$$\begin{aligned} p(I) : T_1 = \{Q, C_0, A_0, S, D_0\}, \quad p(II) : T_2 = \{Q, A_0, S, D_0, C_0\}, \\ p(III) : T_3 = \{Q, A_0, C_0, D_0, S\}. \end{aligned} \tag{1}$$

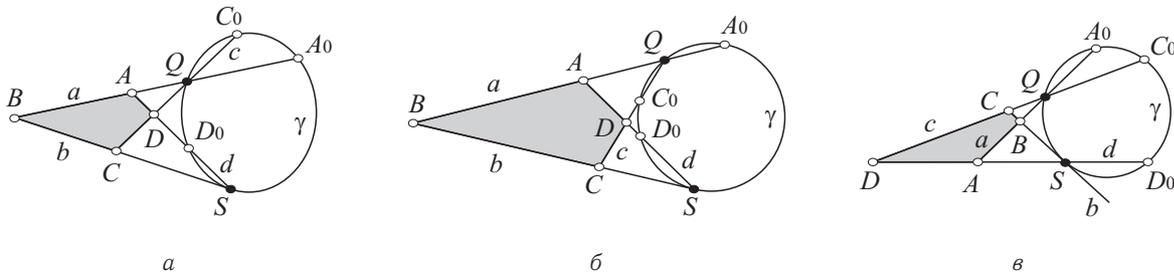


Рис. 3. Параболические параллелограммы класса:  $p(I)$  (а);  $p(II)$  (б);  $p(III)$  (в)

Параллельные противоположные стороны  $a, c$  ( $b, d$ ) параллелограмма  $ABCD$  образуют неизмеримые углы: смежные полюсу и псевдополюсу (смежные параболические флаги). Параболическая сторона  $b$  образует со смежными сторонами параллелограмма неизмеримые углы: гиперболические флаги и гиперболические псевдофлаги. Углы при вершинах  $A, D$  параболического параллелограмма являются гиперболическими углами и гиперболическими псевдоуглами. Меры гиперболических псевдоуглов являются комплексными величинами и однозначно определены мерами смежных с ними гиперболических углов (см. [11, пп. 4.5.2–4.5.4]). Учитывая, что меры гиперболических углов являются действительными положительными числами, в метрические соотношения будем включать только меры гиперболических углов при вершинах параллелограммов, внутренних или внешних. Придерживаясь обозначений, введенных в работе [9], величины углов при вершинах параллелограммов будем обозначать теми же буквами, что и вершины. Величины внешних углов будем дополнительно помечать чертой над символом.



**Теорема 1.** Пусть  $ABCD$  — параболический параллелограмм плоскости  $\hat{H}$  радиуса кривизны  $\rho$ ,  $\rho \in \mathbb{R}_+$ , точки соответствующей системы (1) которого правильно расположены на  $\gamma$ . Справедливы следующие утверждения.

1. Диагональная прямая  $BD$  в параболическом параллелограмме каждого класса является гиперболической. Диагональная прямая  $AC$  параллелограмма класса  $p(II)$  является эллиптической. В параллелограммах классов  $p(I)$ ,  $p(III)$  диагональная прямая  $AC$  может быть любого типа.

2. Внутренний угол параллелограмма при вершине  $A$  ( $D$ ) является гиперболическим псевдоуглом (углом). Внутренний угол параллелограмма при вершине  $B$  ( $C$ ) является гиперболическим флагом (псевдофлагом).

3. Соответственно классу параллелограмма величины его гиперболических углов при вершинах удовлетворяют условию

$$p(I) : \bar{A} < D, \quad p(III) : \bar{A} > D. \quad (2)$$

4. Длины боковых ребер параллелограмма могут быть выражены через меры прилежащих гиперболических углов по следующим формулам:

$$|AB| = \rho \ln \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2}, \quad |CD| = \rho \ln \operatorname{cth} \frac{D}{2}. \quad (3)$$

5. Длина гиперболического основания соответственно классу параллелограмма равна

$$\begin{aligned} p(I) : |AD| &= \rho \ln \left( \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{th} \frac{D}{2} \right), & p(II) : |AD| &= \rho \ln \left( \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2} \right), \\ p(III) : |AD| &= \rho \ln \left( \operatorname{th} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

**Доказательство.** Присоединим к параболическому параллелограмму  $ABCD$  канонический репер  $R = \{Q, S, A_3, A_0\}$  второго типа, где  $A_3$  — полюс прямой  $QS$  относительно абсолюта. Координаты точек системы (1), вершин, сторон и диагональных прямых параллелограмма  $ABCD$  (см. соответствующие координаты (15)–(19) из [9]) в репере  $R$  имеют вид

$$\begin{aligned} Q(1 : 0 : 0), \quad S(0 : 1 : 0), \quad A_0(1 : 1 : 1), \quad A(u : 1 : 1), \quad B(0 : 1 : 1), \quad C(0 : t : 1), \\ D(u : t : 1), \quad C_0(1 : t^2 : t), \quad D_0(u^2 : 1 : u), \quad t, u \in \mathbb{R}, \quad u < 1, \quad tu < 1, \\ a(0 : 1 : -1), \quad b(1 : 0 : 0), \quad c(0 : 1 : -t), \quad d(1 : 0 : -u), \\ AC(1 - t : -u : tu), \quad BD(1 - t : u : -u). \end{aligned} \quad (5)$$

Определим допустимые значения параметров  $t$ ,  $u$ , при которых параллелограмм  $ABCD$  относится к классу  $p(I)$ ,  $p(II)$ ,  $p(III)$ .

Положение на абсолюте точек системы (1) можно характеризовать числами

$$I_1 = (AQBA_0), \quad I_2 = (ASDD_0), \quad I_3 = (CQDC_0). \quad (6)$$

Для параболических параллелограммов соответственно их классу в принятых обозначениях получаем следующие неравенства для чисел (6):

$$\begin{aligned} p(I) : I_1 > 0, \quad I_2 > 0, \quad I_3 < 0, \\ p(II) : I_1 > 0, \quad I_2 > 0, \quad I_3 > 0, \\ p(III) : I_1 < 0, \quad I_2 > 0, \quad I_3 > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В репере  $R$  числа (6) в координатах (5) имеют выражения

$$I_1 = \frac{u}{u-1}, \quad I_2 = \frac{u(1-t)}{u-1}, \quad I_3 = tu. \quad (8)$$



С учетом неравенств из (7) и выражений (8) получаем допустимые значения параметров  $t, u$  координат вершин параболических параллелограммов соответствующего класса в репере  $R$ :

$$\begin{aligned} p(I) : & \quad t \in (0; 1), \quad u < 0, \quad tu < 0, \\ p(II) : & \quad t < 0, \quad u < 0, \quad tu \in (0; 1), \\ p(III) : & \quad t > 1, \quad u \in (0; 1), \quad tu \in (0; 1). \end{aligned} \quad (9)$$

При всех допустимых значениях (9) параметров  $t, u$  характеристика координат прямой  $BD$  (5) параболического параллелограмма каждого класса меньше нуля:  $\Phi_{BD} = 4u(1-t) < 0$ . Следовательно, в параболическом параллелограмме любого класса диагональная прямая  $BD$  является гиперболической.

Для координат диагональной прямой  $AC$  (5)  $\Phi_{AC} = tu(4-tu) - 4u$ .

При всех допустимых значениях (9) параметров  $t, u$  в параллелограмме класса  $p(II)$   $\Phi_{AC} > 0$ . Следовательно, диагональная прямая  $AC$  в параболическом параллелограмме класса  $p(II)$  является эллиптической.

Для параллелограмма класса  $p(I), p(III)$  зафиксируем по три пары  $(t; u)$  параметров из допустимых значений (9):

$$\begin{aligned} p(I) : & \quad (1/2; -1), \quad (5/6; -1), \quad (2\sqrt{2} - 2; -1), \\ p(III) : & \quad (3/2; 1/2), \quad (11/10; 1/2), \quad (4 - 2\sqrt{2}; 1/2). \end{aligned} \quad (10)$$

Найдем соответствующие наборам (10) параметров  $(t; u)$  характеристики координат прямой  $AC$  (5):

$$\begin{aligned} h(I) : & \quad \Phi_{AC} = 7/4, \quad \Phi_{AC} = -1/4, \quad \Phi_{AC} = 0, \\ h(III) : & \quad \Phi_{AC} = 7/16, \quad \Phi_{AC} = -41/400, \quad \Phi_{AC} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Наборы (11) согласно условиям (3) из [9] доказывают, что в параболическом параллелограмме класса  $p(I), p(III)$  диагональная прямая  $AC$  может быть любого типа. Первое утверждение теоремы доказано.

Чтобы доказать второе утверждение теоремы, построим параболические прямые  $k_A, k_D$ , проходящие соответственно через вершины  $A, D$  параллелограмма, и параболические прямые  $k_B, k_C$ , проходящие соответственно через вершины  $B, C$ , отличные от прямой  $b$ . В репере  $R$  эти прямые можно задать координатами:

$$\begin{aligned} k_A \left( (\sqrt{1-u}-1)^2 : u^2 : 2u(\sqrt{1-u}-1) \right), & \quad k_D \left( (\sqrt{1-tu}-1)^2 : u^2 : 2u(\sqrt{1-tu}-1) \right), \\ k_B(1 : 4 : -4), & \quad k_C(t^2 : 4 : -4t). \end{aligned} \quad (12)$$

На основании условий (9), применяя координаты (5), (12), находим:

$$\begin{aligned} J_1 = (ad(AC)k_A) &= \frac{u(t-1)}{(\sqrt{1-u}-1)^2} > 0, & J_2 = (cd(BD)k_D) &= \frac{u(1-t)}{(\sqrt{1-tu}-1)^2} < 0, \\ J_3 = (ab(BD)k_B) &= \frac{4(1-t)}{u} < 0, & J_4 = (cb(AC)k_C) &= \frac{4(t-1)}{ut^2} > 0. \end{aligned}$$

Прямая  $AC$  ( $BD$ ) не разделяет (разделяет) с прямой  $k_A$  ( $k_D$ ) пару прямых  $a, d$  ( $c, d$ ), так как  $J_1 > 0$  ( $J_2 < 0$ ). Поэтому прямая  $AC$  принадлежит полностью гиперболическому псевдоуглу (объединению гиперболических углов) между прямыми  $a, d$  ( $c, d$ ). Следовательно, внутренний угол параллелограмма  $ABCD$  при вершине  $A$  ( $D$ ) является гиперболическим псевдоуглом (углом).

Прямая  $BD$  ( $AC$ ) разделяет (не разделяет) с прямой  $k_B$  ( $k_C$ ) пару прямых  $a, b$  ( $b, c$ ), так как  $J_3 < 0$  ( $J_4 > 0$ ). Поэтому прямая  $BD$  принадлежит полностью объединению гиперболических флагов (гиперболическому псевдофлагу) между прямыми  $a, b$  ( $b, c$ ). Следовательно, внутренний угол параллелограмма  $ABCD$  при вершине  $B$  ( $C$ ) является гиперболическим флагом (псевдофлагом). Второе утверждение теоремы доказано.



По формуле (5) из [9] выразим через параметры  $t, u$  величины гиперболических углов параллелограмма  $ABCD$ , внешнего  $\bar{A}$  и внутреннего  $D$ :

$$\operatorname{ch} \bar{A} = \epsilon_1 \frac{2-u}{u}, \quad \epsilon_1 = \pm 1, \quad \operatorname{ch} D = \epsilon_2 \frac{2-tu}{tu}, \quad \epsilon_2 = \pm 1. \quad (13)$$

Учитывая, что  $\bar{A} \in \mathbb{R}_+, D \in \mathbb{R}_+$ , согласно требованиям (9) определим числа  $\epsilon_1, \epsilon_2$  из выражений (13). Соответственно классу параллелограмма получаем:

$$\begin{aligned} p(I) : \quad & \epsilon_1 = -1, \quad \epsilon_2 = -1, \\ p(II) : \quad & \epsilon_1 = -1, \quad \epsilon_2 = 1, \\ p(III) : \quad & \epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_2 = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Из равенств (13) при соответствующих значениях чисел  $\epsilon_1, \epsilon_2$  (14) для параллелограмма заданного класса находим:

$$p(I) : \quad u = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} \bar{A}}, \quad tu = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} D}, \quad (15)$$

$$p(II) : \quad u = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} \bar{A}}, \quad tu = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} D}, \quad (16)$$

$$p(III) : \quad u = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} \bar{A}}, \quad tu = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} D}. \quad (17)$$

Для параболических параллелограммов каждого класса согласно требованиям (9)  $tu > u$ . Записывая данное неравенство для  $t, u$  из (15), (17), получаем неравенства:

$$p(I) : \operatorname{ch} \bar{A} < \operatorname{ch} D; \quad p(III) : \operatorname{ch} \bar{A} > \operatorname{ch} D.$$

Таким образом, справедливы неравенства (2).

Для параллелограмма класса  $p(II)$  условие  $tu > u$  не приводит к соответствующему неравенству между величинами гиперболических углов при вершинах  $A, D$ . Утверждение 3 теоремы доказано.

По формуле (4) из [9], учитывая условия (9), найдем выражения длин боковых ребер  $AB, CD$  и гиперболического основания  $AD$  через параметры  $t, u$ :

$$\operatorname{ch} \frac{|AB|}{\rho} = \frac{2-u}{2\sqrt{1-u}}, \quad \operatorname{ch} \frac{|CD|}{\rho} = \frac{2-tu}{2\sqrt{1-tu}}, \quad \operatorname{ch} \frac{|AD|}{\rho} = \frac{2-u-tu}{2\sqrt{1-u}\sqrt{1-tu}}. \quad (18)$$

Исключая из равенств (15)–(18) параметры  $t, u$ , для параллелограмма каждого класса получаем:

$$e^{\frac{|AB|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2}, \quad e^{\frac{|CD|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{D}{2}. \quad (19)$$

Соответственно классу параллелограмма получаем:

$$\begin{aligned} p(I) : \quad & e^{\frac{|AD|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{th} \frac{D}{2}, \\ p(II) : \quad & e^{\frac{|AD|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2}, \\ p(III) : \quad & e^{\frac{|AD|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

На основании равенств (19), (20) справедливы формулы (3), (4).  $\square$

Длины боковых сторон параболического параллелограмма каждого класса выражены через меры его гиперболических углов при вершинах (см. равенства (3)) функцией  $\beta(x) = \ln \operatorname{cth} \frac{x}{2}$ . В работах [10; 11, п. 4.7.3] показано, что данная функция на плоскости  $\hat{H}$  радиуса кривизны  $\rho$  выражает зависимость величины  $\beta$  угла параллельности в точке относительно данной гиперболической прямой от расстояния  $x$  этой точки до полюса указанной прямой относительно абсолюта:

$$\beta(x) = \ln \operatorname{cth} \frac{x}{2\rho}.$$



Функция  $\beta = \beta(x)$  названа *функцией угла параллельности* на плоскости  $\hat{H}$  [10] и является аналогом функции Лобачевского угла параллельности (см., например, [12]) на плоскости Лобачевского, т. е. на гиперболической плоскости отрицательной кривизны.

Поскольку на  $\mathbb{R}_+$  функция  $\beta = \beta(x)$  непрерывна и монотонно убывает, то согласно равенствам (3) справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *На плоскости  $\hat{H}$  в параболическом параллелограмме каждого класса при большем боковом ребре лежит меньший гиперболический угол, и к большему гиперболическому углу прилежит меньшее боковое ребро.*

Из утверждений 2, 3 теоремы 1 и теоремы 2 следует теорема 3.

**Теорема 3.** *На плоскости  $\hat{H}$  к внутреннему гиперболическому флагу (гиперболическому псевдофлагу) при параболическом основании в параллелограмме класса  $p(I)$  прилежит большее (меньшее) боковое ребро, в параллелограмме класса  $p(III)$  — меньшее (большее) боковое ребро.*

Согласно равенствам (3), (4) соответственно классу параллелограмма выполняется равенство

$$\begin{aligned} p(I) : |AB| &= |AD| + |CD|, \\ p(II) : |AD| &= |AB| + |CD|, \\ p(III) : |CD| &= |AD| + |AB|. \end{aligned}$$

Поэтому на основании теоремы 3 справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** *На плоскости  $\hat{H}$  в параллелограмме класса  $p(I)$  ( $p(III)$ ) длина бокового ребра, прилежащего к внутреннему гиперболическому флагу (гиперболическому псевдофлагу), равна сумме длин гиперболического основания и второго бокового ребра. В параллелограмме класса  $p(II)$  длина гиперболического основания равна сумме длин боковых ребер.*

По утверждению 1 теоремы 1 диагональная прямая  $AC$  в параллелограмме  $ABCD$  класса  $p(I)$ ,  $p(III)$  может принадлежать каждому из трех типов прямых плоскости  $\hat{H}$ . Тип прямой инвариантен во всех преобразованиях группы  $G$ . Следовательно, выполняется теорема 5.

**Теорема 5.** *На плоскости  $\hat{H}$  все параллелограммы каждого из классов  $p(I)$ ,  $p(III)$  образуют по три инвариантных относительно группы  $G$  рода.*

В зависимости от типа диагональной прямой  $AC$  (эллиптического ( $e$ ), гиперболического ( $h$ ), параболического ( $p$ )) параллелограммы классов  $p(I)$ ,  $p(III)$  отнесем соответственно к роду:  $p(I)e$ ,  $p(I)h$ ,  $p(I)p$ ;  $p(III)e$ ,  $p(III)h$ ,  $p(III)p$ .

Параболическое основание параболического параллелограмма неизмеримо на  $\hat{H}$ , но с ним можно сопоставить действительное число, инвариантное относительно группы  $G$ , характеризующее положение основания по отношению к другим элементам параллелограмма. Определим это число.

*Полярной мерой* параболического основания параболического параллелограмма плоскости  $\hat{H}$  назовем простое отношение, в котором полярна относительно абсолюта точки пересечения диагоналей параллелограмма делит это основание, считая от вершины внутреннего гиперболического флага.

В принятых обозначениях вершиной внутреннего гиперболического флага согласно утверждению 2 теоремы 1 является вершина  $B$ . Полярную меру параболического основания  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  обозначим  $m_{BC}^*$ .

**Теорема 6.** *На плоскости  $\hat{H}$  полярная мера параболического основания параболического параллелограмма однозначно определена мерами гиперболических углов данного параллелограмма:*

$$p(I) : m_{BC}^* = -\frac{(2 \operatorname{ch} \bar{A} - 1)(\operatorname{ch} D - 1)}{(\operatorname{ch} \bar{A} - 1)(2 \operatorname{ch} D - 1)}, \quad (21)$$

$$p(II) : m_{BC}^* = -\frac{(2 \operatorname{ch} \bar{A} - 1)(\operatorname{ch} D + 1)}{(\operatorname{ch} \bar{A} - 1)(2 \operatorname{ch} D + 1)}, \quad (22)$$

$$p(III) : m_{BC}^* = -\frac{(2 \operatorname{ch} \bar{A} + 1)(\operatorname{ch} D + 1)}{(\operatorname{ch} \bar{A} + 1)(2 \operatorname{ch} D + 1)}. \quad (23)$$



**Доказательство.** В присоединенном репере  $R$  второго типа элементы параллелограмма  $ABCD$  заданы координатами (5), точка  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма имеет в  $R$  координаты  $(u : 1 + t : 2)$ . Поляра  $p$  точки  $O$  относительно абсолюта (см. уравнение (1) из [9]) задана координатами  $(1 + t : u : -4)$ .

Точка  $O^* = BC \cap p$  в репере  $R$  имеет координаты  $(0 : 4 : u)$ . По определению полярной меры параболического основания с учетом связи простого отношения трех точек и сложного отношения четверки точек на параболической прямой получаем:

$$m_{BC}^* = (BC, O^*) = -(BCO^*S).$$

Следовательно, для параболического параллелограмма каждого класса

$$m_{BC}^* = -\frac{4 - u}{4 - tu}. \quad (24)$$

Подставляя в равенство (24) значения параметров  $t, u$  из соответствующих разложений (15)–(17), получим формулы (21)–(23).  $\square$

Заметим, что согласно выражению (24) и условиям (9) полярная мера параболического основания каждого параболического параллелограмма удовлетворяет условию:  $m_{BC}^* < -1$ . Следовательно, поляра относительно абсолюта общей точки диагоналей параллелограмма не пересекает его параболическое основание, но пересекает луч параболической стороны, исходящий из вершины внутреннего гиперболического псевдофлага параллелограмма.

### Библиографический список

1. Ромакина Л. Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны // *Мат. сб.* 2012. Т. 203, № 9. С. 83–116.
2. Ромакина Л. Н. Веерные триангуляции гиперболической плоскости положительной кривизны // *Мат. тр.* 2013. Т. 16, № 2. С. 142–168.
3. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 2 : Преобразования и простые разбиения. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 274 с.
4. De Sitter W. On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis // *Proc. Royal Acad. Amsterdam*, 1917. Vol. 19, iss. 2. P. 1217–1225.
5. Akutagawa K. On space-like hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space // *Math. Z.* 1987. Vol. 196. P. 13–19.
6. Montiel S. An integral inequality for compact space-like hypersurfaces in a de Sitter space and application to the case of constant mean curvature // *Indiana Univ. Math. J.* 1988. Vol. 37. P. 909–917.
7. Cho Yun. Trigonometry in extended hyperbolic space and extended de Sitter space // *Bull. Korean Math. Soc.* 2009. Vol. 46, № 6. P. 1099–1133. DOI : 10.4134/BKMS.2009.46.6.1099.
8. Asmus Im. Duality between hyperbolic and de Sitter geometry // *J. of Geometry.* 2009. Vol. 96, iss. 1–2. P. 11–40.
9. Ромакина Л. Н. Гиперболические параллелограммы плоскости  $\widehat{H}$  // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2013. Т. 13, вып. 3. С. 45–52.
10. Ромакина Л. Н. Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны // *Сиб. электрон. мат. изв.* 2013. Т. 10. С. 393–497.
11. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 244 с.
12. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М. : Наука, 1971.

## Parabolic Parallelograms of the Plane $\widehat{H}$

L. N. Romakina

Saratov State University, 83, Astrahanskaya str., 410012, Saratov, Russia, romakinaln@mail.ru

Parabolic parallelograms on a Hyperbolic Plane  $\widehat{H}$  with the positive curvature in the Cayley–Klein model are investigated. We conducted their classification, obtained the metric correlations between the measure of angles and the expressions of lengths of the edges through a measure of included angles.

*Key words:* hyperbolic plane  $\widehat{H}$  with positive curvature, de Sitter plane, parallelogram, parabolic parallelogram.



## References

1. Romakina L. N. Simple partitions of a hyperbolic plane of positive curvature. *Sbornik : Mathematics*, 2012, vol. 203, no. 9, pp. 1310–1341. Available at : <http://dx.doi.org/10.1070/SM2012v203n09ABEH004266>.
2. Romakina L. N. Veernye triangulatsii giperbolicheskoi ploskosti polozhitel'noi krivizny [Fan triangulations of hyperbolic plane positive curvature]. *Matematicheskie trudy*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 142–168 (in Russian).
3. Romakina L. N. *Geometriia giperbolicheskoi ploskosti polozhitel'noi krivizny : v 4 ch. Ch. 2 : Preobrazovaniia i prostye razbieniia* [Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 2 : Transformations and simple splittings]. Saratov, Saratov Univ. Press, 274 p. (in Russian).
4. De Sitter W. On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis. *Proc. Royal Acad. Amsterdam*, 1917, vol. 19, iss. 2, pp. 1217–1225.
5. Akutagawa K. On space-like hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space. *Math. Z.*, 1987, vol. 196, pp. 13–19.
6. Montiel S. An integral inequality for compact space-like hypersurfaces in a de Sitter space and application to the case of constant mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, 1988, vol. 37, pp. 909–917.
7. Cho Yun. Trigonometry in extended hyperbolic space and extended de Sitter space. *Bull. Korean Math. Soc.*, 2009, vol. 46, no. 6, pp. 1099–1133. DOI : 10.4134/BKMS.2009.46.6.1099.
8. Asmus Im. Duality between hyperbolic and de Sitter geometry. *J. of Geometry*, 2009, vol. 96, iss. 1–2, pp. 11–40.
9. Romakina L. N. Hyperbolic parallelograms of the plane  $\hat{H}$ . *Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 3, pp. 45–52 (in Russian).
10. Romakina L. N. Analogs of a formula of Lobachevsky for angle of parallelism on the hyperbolic plane of positive curvature. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2013, vol. 10, pp. 393–407 (in Russian). Available at : <http://semr.math.nsc.ru>
11. Romakina L. N. *Geometriia giperbolicheskoi ploskosti polozhitel'noi krivizny : v 4 ch. Ch. 1 : Trigonometriia* [Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 1 : Trigonometry]. Saratov, Saratov Univ. Press., 244 p. (in Russian).
12. Efimov N. V. *Vysshaia geometriia* [The highest geometry]. Moscow, Nauka, 1971, 576 p. (in Russian).

УДК 517.9

## О ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

И. И. Струкова

Аспирант кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, [irina.k.post@yandex.ru](mailto:irina.k.post@yandex.ru)

В работе изучаются медленно меняющиеся и периодические на бесконечности функции нескольких переменных со значениями в банаховом пространстве. Вводится понятие ряда Фурье периодической на бесконечности функции, изучаются свойства рядов Фурье и вопросы сходимости. Основные результаты статьи получены с существенным использованием теории изометрических представлений.

*Ключевые слова:* банахово пространство, банахова алгебра, медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции, ряд Фурье, модуль непрерывности.

## ВВЕДЕНИЕ

Медленно меняющиеся и периодические на бесконечности функции естественным образом возникают как ограниченные решения некоторых классов разностных и дифференциальных уравнений. Основные результаты статьи связаны с гармоническим анализом периодических на бесконечности функций нескольких переменных со значениями в банаховом пространстве. Вводится понятие обобщенного ряда Фурье, коэффициенты которого являются медленно меняющимися на бесконечности функциями (не обязательно постоянными). Исследуются вопросы сходимости рядов Фурье. Получен ряд классических результатов о рядах Фурье в смысле Чезаро (теоремы 1 и 2). Одним из центральных результатов статьи является достаточное условие сходимости ряда Фурье в терминах модуля непрерывности (теорема 3).