References

1. Romakina L. N. Simple partitions of a hyperbolic plane of positive curvature. *Sbornik : Mathematics*, 2012, vol. 203, no. 9, pp. 1310–1341. Available at : http://dx.doi.org/10.1070/SM2012v203n09ABEH004266.
2. Romakina L. N. Veernye trianguliatsii giperbolicheskoi ploskosti polozhitel'noi krivizny [Fan triangulations of hyperbolic plane positive curvature]. *Matematicheskie trudy*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 142–168 (in Russian).
3. Romakina L. N. *Geometriia giperbolicheskoi ploskosti polozhitel'noi krivizny : v 4 ch. Ch. 2 : Preobrazovaniia i prostye razbieniia* [Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 2 : Transformations and simple splittings]. Saratov, Saratov Univ. Press, 274 p. (in Russian).
4. De Sitter W. On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis. *Proc. Royal Acad. Amsterdam*, 1917, vol. 19, iss. 2, pp. 1217–1225.
5. Akutagawa K. On space-like hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space. *Math. Z.*, 1987, vol. 196, pp. 13–19.
6. Montiel S. An integral inequality for compact space-like hypersurfaces in a de Sitter space and application to the case of constant mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, 1988, vol. 37, pp. 909–917.
7. Cho Yun. Trigonometry in extended hyperbolic space and extended de Sitter space. *Bull. Korean Math. Soc.*, 2009, vol. 46, no. 6, pp. 1099–1133. DOI : 10.4134/BKMS.2009.46.6.1099.
8. Asmus Im. Duality between hyperbolic and de Sitter geometry. *J. of Geometry*, 2009, vol. 96, iss. 1–2, pp. 11–40.
9. Romakina L. N. Hyperbolic parallelograms of the plane $\widehat{H}$. *Izv. Sarat. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 3, pp. 45–52 (in Russian).
10. Romakina L. N. Analogs of a formula of Lobachevsky for angle of parallelism on the hyperbolic plane of positive curvature. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2013, vol. 10, pp. 393–407 (in Russian). Available at: http ://semr.math.nsc.ru
11. Romakina L. N. *Geometriia giperbolicheskoi ploskosti polozhitel'noi krivizny : v 4 ch. Ch. 1 : Trigonometriia* [Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 1 : Trigonometry]. Saratov, Saratov Univ. Press., 244 p. (in Russian).
12. Efimov N. V. *Vysshaia geometriia* [The highest geometry]. Moscow, Nauka, 1971, 576 p. (in Russian).

УДК 517.9

О ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

И. И. Струкова

Аспирант кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, irina.k.post@yandex.ru

В работе изучаются медленно меняющиеся и периодические на бесконечности функции нескольких переменных со значениями в банаховом пространстве. Вводится понятие ряда Фурье периодической на бесконечности функции, изучаются свойства рядов Фурье и вопросы сходимости. Основные результаты статьи получены с существенным использованием теории изометрических представлений.

Ключевые слова: банахово пространство, банахова алгебра, медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции, ряд Фурье, модуль непрерывности.

ВВЕДЕНИЕ

Медленно меняющиеся и периодические на бесконечности функции естественным образом возникают как ограниченные решения некоторых классов разностных и дифференциальных уравнений. Основные результаты статьи связаны с гармоническим анализом периодических на бесконечности функций нескольких переменных со значениями в банаховом пространстве. Вводится понятие обобщенного ряда Фурье, коэффициенты которого являются медленно меняющимися на бесконечности функциями (не обязательно постоянными). Исследуются вопросы сходимости рядов Фурье. Получен ряд классических результатов о рядах Фурье в смысле Чезаро (теоремы 1 и 2). Одним из центральных результатов статьи является достаточное условие сходимости ряда Фурье в терминах модуля непрерывности (теорема 3).

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X.

Рассмотрим N-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать через $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Положим $|x| = \max\limits_{i=\overline{1,N}} |x_i|$.

Множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами будем называть *целочисленной решеткой* в $\mathbb{R}^N$, элементы $\mathbb{Z}^N$ будем обозначать через $n = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ и положим $|n| = \max\limits_{i=\overline{1,N}} |n_i|$.

Символом $C_b = C_b(\mathbb{R}^N, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^N$ функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} \|f(x)\|_X$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b, $C_0 = C_0(\mathbb{R}^N, X)$ — замкнутое подпространство убывающих на бесконечности функций, т. е. таких, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} \|f(x)\| = 0$.

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ рассмотрим группу $S : \mathbb{R}^N \to \operatorname{End} C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ операторов, действующих по правилу

$$(S(h)f)(x) = f(x+h) = f(x_1 + h_1, \dots, x_N + h_N), \qquad x, h \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

Наряду с группой сдвигов S рассмотрим группы сдвигов $S_i : \mathbb{R} \to \operatorname{End} C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$, $i = \overline{1,N}$, определенные формулой $(S_i(h)f)(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_N)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $h \in \mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $(S(h)f - f) \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$ для любого $h \in \mathbb{R}^N$.

Примером таких функций являются:

1) $f_1(x) = \prod\limits_{i=1}^{N} \sin\ln(1 + x_i^2)$, $x \in \mathbb{R}^N$;

2) $f_2 : \mathbb{R}^N \to X$, $f_2(x) = c + f_0(x), x \in \mathbb{R}^N$, где c — вектор из банахова пространства X и f_0 — любая функция из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

В теории дифференциальных уравнений [1, разд. 3.6.3] использовалось эквивалентное (если рассматривать функции из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$) определение, при этом функции назывались *стационарными на бесконечности.* В статьях Пака [2, с. 123] и J. Karamata [3] положительная непрерывная функция $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ называлась *медленно меняющейся,* если при любом $\lambda > 0$ выполнено $\dfrac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1$ при $x \to +\infty$. Например, функции $\ln^\nu(x)$, $\ln\ln^\nu(x)$, …, где $\nu \in \mathbb{R}$, являются таковыми. Медленно меняющиеся функции находят свое применение в теории тригонометрических рядов (см. [4]), в теории вероятности [5], а также в теории целых функций [6].

Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}_+^N$. Тогда символом Ω^N обозначим N-мерный параллелепипед $\Omega^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\omega_i/2 < x_i \le \omega_i/2,\ i = 1, 2, \dots, N\}$. Символом $\omega\mathbb{Z}^N$ обозначим подгруппу $\mathbb{R}^N$, состоящую из элементов вида $(n_1\omega_1, \dots, n_N\omega_N)$, где $\omega \in \mathbb{R}_+^N$, $n \in \mathbb{Z}^N$.

Определение 2. Функцию $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ будем называть *периодической* периода $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}_+^N$ (или ω-периодической), если для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$ выполнено условие $S(\alpha)f = f$.

Отметим, что это эквивалентно периодичности функции по каждому аргументу, независимо от остальных, т. е. $S_i(\omega_i)f = f$ для всех $i = \overline{1,N}$.

Определение 3. Функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}_+^N$ *(ω-периодической на бесконечности)*, если для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$ выполнено условие $(S(\alpha)f - f) \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$ (или, что эквивалентно, $\lim\limits_{|x|\to\infty} \|f(x+\alpha) - f(x)\|_X = 0$).

Таким образом, каждая периодическая на бесконечности периода ω функция f является решением разностного уравнения вида $f(x+\omega) - f(x) = y(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, где $y \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, а каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция является периодической на бесконечности любого периода.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, а множество периодических на бесконечности периода ω функций — символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$. Оба множества образуют линейные замкнутые подпространства из банахова пространства $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$. Банахово пространство $C_\omega = C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$ непрерывных периодических периода ω функций, определенных на $\mathbb{R}^N$ со значениями в X, образует замкнутое подпространство в $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$. Таким образом, имеют место включения

$$C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X) \subset C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X),$$

при этом все они инвариантны относительно операторов $S(h)$, $h \in \mathbb{R}^N$.

Если $X = \mathbb{C}$, то в обозначениях рассматриваемых функциональных пространств опускается символ X, например, $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N)$ обозначает пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Если X — банахова алгебра, то все введенные в рассмотрение функциональные пространства являются банаховыми алгебрами (с операцией поточечного умножения $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, для функций f, g из рассматриваемого пространства). Каждая из таких алгебр коммутативна, если коммутативна алгебра X, и является C^*-алгеброй, если X — C^*-алгебра. В частности, коммутативными C^*-алгебрами являются алгебры $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N)$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Далее введем определение ряда Фурье периодической на бесконечности функции. Для этого введем в рассмотрение функции $e_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ следующего вида:

$$e_n(x) = e^{i2\pi(\frac{n_1}{\omega_1}x_1 + \ldots + \frac{n_N}{\omega_N}x_N)}, \qquad n \in \mathbb{Z}^N, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Определение 4. *Каноническим рядом Фурье* функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} f_n(x) e_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

где функции $f_n : \mathbb{R}^N \to X$, $n \in \mathbb{Z}^N$, определяются формулами

$$f_n(x) = \frac{1}{\omega_1 \ldots \omega_N} \int_{\Omega^N} f(x+\tau) e_{-n}(x+\tau) d\tau, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \qquad n \in \mathbb{Z}^N, \tag{2}$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье* функции f.

Ясно, что если $f \in C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$, то $f_n(x) \equiv f_n = \frac{1}{\omega_1 \ldots \omega_N} \int_{\Omega^N} f(x) e_{-n}(x) dx$, $x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{Z}^N$, — обычные коэффициенты Фурье функции f.

Определение 5. *Обобщенным рядом Фурье* функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} y_n(x) e_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

где y_n, $n \in \mathbb{Z}^N$ — такие функции из $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$, для которых $y_n - f_n \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, $n \in \mathbb{Z}^N$, а функции f_n, $n \in \mathbb{Z}^N$, определяются формулой (2).

Функции из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и их ряды Фурье рассматривались в [7].

Лемма 1. *Канонические коэффициенты Фурье f_n, $n \in \mathbb{Z}^N$, определенные формулой* (2), *являются медленно меняющимися на бесконечности функциями, т. е. $f_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, $n \in \mathbb{Z}^N$.*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$. Утверждение леммы напрямую следует из равенств

$$f_n(x+\alpha) - f_n(x) = \frac{1}{\omega_1 \ldots \omega_N} \int_{\Omega^N} (S(\alpha)f - f)(x+\tau) e_{-n}(x+\tau) d\tau, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \qquad n \in \mathbb{Z}^N.$$

Лемма доказана.

Непосредственно из определения 5 и леммы 1 следует, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье обладают свойством: $y_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, $n \in \mathbb{Z}^N$.

Теорема 1 (теорема аппроксимации). *Для любой функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|f(x) - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) f_k(x)e_k(x) - f_n^0(x)\| = 0,$$

где f_k, $k \in \mathbb{Z}^N$, — канонические коэффициенты Фурье функции f.

Уточнением теоремы 1 является следующая

Теорема 2 (теорема аппроксимации). *Для любой функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ и последовательность функций (y_n) из $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|f(x) - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) y_k(x)e_k(x) - f_n^0(x)\| = 0.$$

При этом каждая из функций y_k ($k \in \mathbb{Z}^N$) эквивалентна функции f_k, определяемой формулой (2), и допускает продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа не выше ε.

Определение 6. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(x)e_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ *сходится к f относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$*, если существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left\| f(x) - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} y_k(x)e_k(x) + f_n^0(x) \right\| = 0.$$

Важно отметить, что данное определение корректно, т. е. сходимость не зависит от выбора обобщенного ряда Фурье функции f. Это объясняется тем, что $y_n - f_n \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, где f_n, $n \in \mathbb{Z}^N$ — канонические коэффициенты Фурье функции f, определяемые по формуле (2).

Определение 7. *Модулем непрерывности на бесконечности* функции $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ называется функция $\omega_\infty(\cdot, f) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, определенная формулой

$$\omega_\infty(\delta, f) = \lim_{\mu\to\infty} \sup_{|t|\le\delta, |\tau|\ge\mu} \|f(t+\tau) - f(\tau)\|_\infty, \qquad \delta \in \mathbb{R}_+.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Любой обобщенный ряд Фурье функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ сходится к f относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$, если*

$$\lim_{n\to\infty} \omega_\infty\left(\frac{1}{n}, f\right) \ln^N n = 0.$$

Определение 8. Будем говорить, что функция $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ имеет *абсолютно сходящийся ряд Фурье,* если существует обобщенный ряд Фурье (3) этой функции такой, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} \|y_n\| < \infty.$$

2. О ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство и $T : \mathbb{R}^N \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ – сильно непрерывное изометрическое представление.

Пусть $L^1(\mathbb{R}^N)$ — банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}^N$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных функций со сверткой функций в качестве умножения $(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, $t \in \mathbb{R}^N$, $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Банахово пространство $\mathscr{X}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R}^N)$-модуля с помощью формулы

$$fx = \int_{\mathbb{R}^N} f(s)T(-s)x\,ds, \qquad x \in \mathscr{X}, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{4}$$

Используемые далее понятия из спектральной теории модулей можно найти в статьях [8–19]. Через $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье $\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-i(\lambda,x)}dx$, $\lambda \in \mathbb{R}^N$, функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Определение 9. *Спектром Бёрлинга* вектора $x \in \mathscr{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}^N$ вида $\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R}^N : fx \neq 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, для которой $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0\}$.

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R}^N \backslash \{\mu_0 \in \mathbb{R}^N :$ существует функция $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\widehat{f}(\mu_0) \neq 0$ и $fx = 0\}$.

В [20] была установлена связь между структурными свойствами векторов из банаховых пространств и последовательностью их приближений.

Лемма 2 (см. [8, 9]). *Для любых $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ и $x \in \mathscr{X}$ справедливы свойства:*

1) из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ следует, что $x = 0$ ($L^1(\mathbb{R}^N)$-модуль $\mathscr{X}$ невырожден);

2) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}^N$, причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) $\Lambda(fx) \subset (\operatorname{supp} \widehat{f}) \cap \Lambda(x)$;

4) $fx = 0$, если $(\operatorname{supp} \widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;

5) $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор x удовлетворяет равенствам $T(t)x = \exp(i(\lambda_0, t))x$, $t \in \mathbb{R}^N$, и $x \neq 0$.

Банахово пространство $C_b(\mathbb{R}^N, X)$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R}^N)$-модуля (см. [8, 11]) с помощью операции свертки:

$$(f*x)(t) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\tau)\left(S(-\tau)x\right)(t)d\tau = \int_{\mathbb{R}^N} f(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}^N} f(t-\tau)x(\tau)d\tau, \qquad t \in \mathbb{R}^N,$$

где $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$.

Отметим, что $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ является замкнутым подмодулем $C_b(\mathbb{R}^N, X)$, а структура банахова $L^1(\mathbb{R}^N)$-модуля на нем задается формулой (4), где $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ и $T(t) = S(t)$, $t \in \mathbb{R}^N$.

Определение 10. Число $\lambda_0 \in \Lambda(x)$ отнесем к *несущественному спектру* $\Lambda_0(x)$ функции $x \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$, если существует функция $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $f*x \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$. Множество $\Lambda_{ess}(x) = \Lambda(x) \backslash \Lambda_0(x)$ назовем *существенным спектром* функции x.

Определение 11. Вектор $x_0 \in \mathscr{X}$ назовем *периодическим вектором* периода $\omega \in \mathbb{R}^N_+$ (относительно представления T), если для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$ справедливо равенство $T(\alpha)x_0 = x_0$.

Множество периодических (периода ω) векторов обозначим через $\mathscr{X}_\omega = \mathscr{X}_\omega(T)$. Оно образует замкнутое подпространство в $\mathscr{X}$, инвариантное относительно операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}^N$.

С использованием леммы 2 и теорем [8, теорема 1; 10, теорема 3.2.7] была получена следующая

Теорема 4. *Для того, чтобы вектор $x_0 \in \mathscr{X}$ был периодическим периода $\omega \in \mathbb{R}^N_+$ (т. е. $x_0 \in \mathscr{X}_\omega$), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение*

$$\Lambda(x_0) \subset \left(\frac{2\pi}{\omega_1}n_1, \ldots, \frac{2\pi}{\omega_N}n_N\right), \qquad n \in \mathbb{Z}^N.$$

Из равенств $T(t+\omega)x - T(t)x = T(t)(T(\omega)x - x) = 0$, $t \in \mathbb{R}^N$, для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$, следует, что функция $\varphi_x : \mathbb{R}^N \to \mathscr{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, является непрерывной периодической функцией. Рассмотрим ее ряд Фурье:

$$\varphi_x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e_n(t), \qquad t \in \mathbb{R}^N,$$

где

$$x_n = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int_{\Omega^N} T(\tau) x e_{-n}(\tau) d\tau, \qquad n \in \mathbb{Z}^N.$$

Определение 12. Ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} x_n \tag{5}$$

назовем *рядом Фурье* вектора $x \in \mathscr{X}_\omega$, а векторы x_n, $n \in \mathbb{Z}^N$ — *коэффициентами Фурье* вектора x.

Если ряд Фурье вектора $x \in \mathscr{X}$ абсолютно сходится, т.е. выполнено условие $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} \|x_n\| < \infty$, то справедливо равенство $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} x_n$.

Справедливо следующее утверждение

Лемма 3. *Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ и $x \in \mathscr{X}_\omega$ вектор $fx \in \mathscr{X}_\omega$ и имеет ряд Фурье вида*

$$fx \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} \widehat{f}\left(\frac{2\pi k_1}{\omega_1}, \dots, \frac{2\pi k_N}{\omega_N}\right) x_k.$$

Отметим работы [8] и [9], в которых многие классические результаты теории рядов Фурье для периодических функций обобщались на векторы из банаховых пространств, в которых действует однопараметрическая группа операторов.

Подпространство $\mathscr{X}_\omega$ периодических векторов и утверждения следующей леммы фактически рассматривались в монографии [21, теорема 16.7.2]. Из указанных источников следует

Лемма 4. *Пусть $x \in \mathscr{X}_\omega$. Тогда операторы $P_n x = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int_{\Omega^N} T(\tau) x e_{-n}(\tau) d\tau$, $n \in \mathbb{Z}^N$, являются проекторами, $x_n = P_n x$, $n \in \mathbb{Z}^N$ — коэффициенты Фурье вектора x, $T(t)P_n = e_n(t)P_n$, $t \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{Z}^N$, и $\|P_n\| = 1$, если $P_n \neq 0$.*

Лемма 5. *Для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$ справедливо соотношение $\lim\limits_{|n|\to\infty} \|x_n\| = 0$, где x_n, $n \in \mathbb{Z}^N$ — коэффициенты Фурье вектора x.*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор x из множества $D = D(A_1^2 \dots A_N^2)$, где A_i, $i = \overline{1,N}$ — генератор полугруппы операторов $T_i : \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$, $i = \overline{1,N}$. Тогда для коэффициентов Фурье x_n, $n \in \mathbb{Z}^N$, вектора x, для которых $n_1 \dots n_N \neq 0$, имеют место следующие оценки:

$$\|x_n\| = \|\frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int\limits_{\Omega_N} T(\tau) x e_{-n}(\tau) d\tau\| =$$

$$= \|\frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int\limits_0^{\omega_1} \dots \int\limits_0^{\omega_N} T_1(\tau_1) \dots T_N(\tau_N) x e^{-i\frac{2\pi n_1}{\omega_1}\tau_1} \dots e^{-i\frac{2\pi n_N}{\omega_N}\tau_N} d\tau_1 \dots d\tau_N\| =$$

$$= \|\frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int\limits_0^{\omega_1} \dots \int\limits_0^{\omega_N} T_1(\tau_1) \dots T_N(\tau_N) A_N^2 x \frac{\omega_N^2}{4\pi^2 n_N^2} e^{-i\frac{2\pi n_1}{\omega_1}\tau_1} \dots e^{-i\frac{2\pi n_N}{\omega_N}\tau_N} d\tau_1 \dots d\tau_N\| =$$

$$= \|\frac{\omega_1 \dots \omega_N}{4^N \pi^{2N} n_1^2 \dots n_N^2} \int\limits_0^{\omega_1} \dots \int\limits_0^{\omega_N} T_1(\tau_1) \dots T_N(\tau_N) A_1^2 \dots A_N^2 x e^{-i\frac{2\pi n_1}{\omega_1}\tau_1} \dots e^{-i\frac{2\pi n_N}{\omega_N}\tau_N} d\tau_1 \dots d\tau_N\| \leq$$

$$\leq \frac{\omega_1 \dots \omega_N}{(4\pi^2)^N} \frac{\|A_1^2 \dots A_N^2 x\|}{n_1^2 \dots n_N^2},$$

т. е. $\lim\limits_{|n|\to\infty} \|x_n\| = 0$. Поскольку D плотно в $\mathscr{X}_\omega$, то свойство $\lim\limits_{|n|\to\infty} \|x_n\| = 0$ верно для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$. Лемма доказана.

Определение 13. Функция $\omega(\cdot, x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\omega(\delta, x) = \sup\limits_{|t|\le\delta} \|T(t)x - x\|$, называется *модулем непрерывности вектора* x.

Теорема 5. *Для любого* $x \in \mathscr{X}_\omega$ *с рядом Фурье вида* (5) *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) x_k\| = 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольный периодический вектор $x \in \mathscr{X}_\omega$. Рассмотрим функции $f_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ следующего вида:

$$f_n(h) = \prod_{i=1}^N f_n^{(i)}(h_i), \qquad h \in \mathbb{R}^N, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где

$$f_n^{(i)}(t) = \frac{\omega_i}{4\pi^4 t^2 (n+1)} \sin^2 \frac{(n+1)\pi t}{\omega_i}, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Отметим, что преобразование Фурье данных функций имеет вид

$$\widehat{f_n^{(i)}}(\lambda) = \begin{cases} 1 - \frac{\omega_i|\lambda|}{2\pi(n+1)}, & |\lambda| \le \dfrac{2\pi(n+1)}{\omega_i}, \\ 0, & |\lambda| > \dfrac{2\pi(n+1)}{\omega_i}, \end{cases} \ \lambda \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ i = \overline{1, N}.$$

Тогда

$$\widehat{f_n^{(i)}}(\frac{2\pi k_i}{\omega_i}) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|k_i|}{n+1}, & |k_i| \le n+1, \\ 0, & |k_i| > n+1, \end{cases} \ k_i \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ i = \overline{1, N}.$$

Из леммы 3 следует, что свертка функции f_n с вектором x определяется равенством

$$f_n x = \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) x_k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\|x - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) x_k\| = \|x - f_n x\| = \|\int\limits_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau) x d\tau - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau) T(-\tau) x d\tau\| =$$
$$= \|\int\limits_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau)\,(x - T(-\tau)x)\,d\tau\| \le \|\int\limits_{\Delta_n} f_n(\tau)\omega(\delta_n, x) d\tau\| + 2\|x\|\|\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Delta_n} f_n(\tau) d\tau\| \le$$
$$\le \omega(\delta_n, x) \int\limits_{\Delta_n} f_n(\tau) d\tau + 2\|x\| \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Delta_n} f_n(\tau) d\tau \le$$
$$\le \omega(\delta_n, x) \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau) d\tau + \frac{2\|x\|}{(4\pi^4(n+1))^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Delta_n} \prod_{i=1}^N \frac{\omega_i}{\tau_i^2} \sin^2 \frac{(n+1)\pi\tau_i}{\omega_i} d\tau \le$$
$$\le \omega(\delta_n, x) + \frac{2\|x\|}{(4\pi^4(n+1))^N} \prod_{i=1}^N \int\limits_{|\tau_i|\ge\delta_n} \frac{\omega_i d\tau_i}{\tau_i^2} \le \omega(\delta_n, x) + \frac{2^{N+1}\omega_1 \cdot \ldots \cdot \omega_N \|x\|}{(4\pi^4(n+1)\delta_n)^N} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

где $\Delta_n = \{t \in \mathbb{R}^N : |t| \le \delta_n\}$, для любой последовательности $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} (n+1)\delta_n = \infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. *Если* $x \in \mathscr{X}_\omega$, *то*

$$\left\| x - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} x_k \right\| \le Const\, \omega\left(\frac{1}{n}, x\right) \ln^N n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

В частности, ряд Фурье вектора x *сходится к* x, *если* $\lim_{n\to\infty} \omega(1/n, x)\ln^N n = 0$.

Доказательство. Из [22, с. 198] вытекает следующая оценка:

$$\left\| x - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} x_k \right\| \le (L_n + 1)E_n[x], \tag{7}$$

где L_n, $n \ge 1$, — константы Лебега, для которых выполнено (см. [22, с. 115]) условие

$$L_n = 4\pi^{-2}\ln n + O(1) \simeq 4\pi^{-2} \ln n \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{8}$$

а $E_n[x]$, $n \ge 1$, — наилучшее приближение вектора x тригонометрическими полиномами порядка n.

Неравенство (7) показывает, что такое приближение вектора x не более чем в $L_n + 1$ раз хуже наилучшего.

Для дальнейших оценок требуются оценки для $E_n[x]$, $n \ge 1$.

Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ вида $f(t) = \prod\limits_{i=1}^{N} f_i(t_i)$, $t \in \mathbb{R}^N$, где функции $f_i \in L^1(\mathbb{R})$, $i = \overline{1, N}$, обладают следующими свойствами:

1) $\widehat{f}_i(0) = 1$, $\widehat{f}_i(\lambda) = \widehat{f}_i(-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
2) $\operatorname{supp} \widehat{f}_i \subset [-1, 1]$;
3) $f_i \ge 0$;
4) $\int\limits_{\mathbb{R}} |\tau| f_i(\tau) d\tau = M_i < \infty$, $i = \overline{1, N}$.

Отметим, что третье свойство нужно лишь для удобства доказательства, первое свойство позволяет обойтись и без него.

Пусть $M = \max\limits_{i=\overline{1,N}} M_i$. Возьмем произвольное $\alpha > 0$ и введем обозначение $f_\alpha(t) = \alpha^N \prod\limits_{i=1}^{N} f_i(\alpha t_i)$, $t \in \mathbb{R}^N$. Тогда имеет место следующая оценка:

$$E_\alpha[x] \le \|x - f_\alpha x\| = \|\int\limits_{\mathbb{R}^N} (T(-\tau)x - x) f_\alpha(\tau) d\tau\| \le \int\limits_{\mathbb{R}^N} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_{|\tau|\le\alpha} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau + \int\limits_{|\tau|\ge\alpha} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau \le$$

$$\le \omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right) \int\limits_{|\tau|\le\alpha} f_\alpha(\tau) d\tau + \int\limits_{|\tau|\ge\alpha} \|T_1(-\tau_1)\ldots T_N(-\tau_N)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau \le$$

$$\le \omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right) \int\limits_{|\tau|\le\alpha} f_\alpha(\tau) d\tau + \int\limits_{|\tau_1|\ge\alpha} \ldots \int\limits_{|\tau_N|\ge\alpha} (\|T_1(-\tau_1)\ldots T_N(-\tau_N)x - T_1(-\tau_1)\ldots T_{N-1}(-\tau_{N-1})x\| + \ldots +$$

$$+ \|T_1(-\tau_1)T_2(-\tau_2)x - T_1(-\tau_1)x\| + \|T_1(-\tau_1)x - x\|) f_\alpha(\tau_1, \ldots, \tau_N) d\tau_1 \ldots d\tau_N \le$$

$$\le \omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right) \left(N + 1 + \int\limits_{|\tau_1|\ge\alpha} \ldots \int\limits_{|\tau_N|\ge\alpha} \alpha\left(|\tau_1| + \ldots + |\tau_N|\right) f_\alpha(\tau_1, \ldots, \tau_N) d\tau_1 \ldots d\tau_N \right) \le$$

$$\le \omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right) \left(N + 1 + \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{|\tau_1|\ge\alpha} \ldots \int\limits_{|\tau_N|\ge\alpha} \alpha|\tau_k| \alpha^N \prod_{i=1}^{N} f_i(\alpha t_i) d\tau_1 \ldots d\tau_N \right) \le$$

$$\leq \omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right)\left(N+1+\sum_{k=1}^{N} M_k \prod_{i=1, i\neq k}^{N} \int\limits_{|t|\geq\alpha} f_i(t)dt\right) \leq \mathrm{Const}\,\omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right).$$

Из последней оценки с использованием (7) и (8) получаем требуемую оценку (6). Теорема доказана.

Замечание 1. Для скалярных периодических функций оценка наилучшего приближения через ее модуль непрерывности была получена в [23].

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Далее через X обозначается банахова алгебра с единицей. Символом $\mathscr{X}$ будем обозначать фактор-пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\widetilde{x}\| = \inf\limits_{y\in x+C_0(\mathbb{R}^N,X)} \|y\|$, где $\widetilde{x} = x + C_0(\mathbb{R}^N, X)$ — класс эквивалентности, содержащий функцию x.

Отметим, что банахово пространство $\mathscr{X}$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом: $\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy}$, $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathscr{X}$.

В фактор-пространстве $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$ корректно определяется сильно непрерывная группа изометрий $\widetilde{S} : \mathbb{R}^N \to \mathrm{End}\,(C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X))$, действующая по правилу $\widetilde{S}(h)\widetilde{x} = \widetilde{S(h)x}$, $h \in \mathbb{R}^N$, $\widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$, где $S(h)x$ — сдвиг функции x на вектор h, определяемый формулой (1).

Структура банахова $L^1(\mathbb{R}^N)$-модуля на $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$ $((C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$ в частности) наделяется формулой $f\widetilde{x} = \int_{\mathbb{R}^N} f(\tau)\widetilde{S}(-\tau)\widetilde{x}d\tau$, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

Непосредственно из определения представления $\widetilde{S}$ следует, что

$$\widetilde{S}(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{x}, \qquad \widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X).$$

Таким образом, функция $t \mapsto \widetilde{S}(t)\widetilde{x} : \mathbb{R}^N \to \mathscr{X}$ является непрерывной периодической периода ω, т. е. она принадлежит банахову пространству $C_\omega(\mathbb{R}^N, \mathscr{X})$. Следовательно, имеет место

Лемма 6. *Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ является периодической на бесконечности периода ω тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + C_0(\mathbb{R}^N, X)$ является периодическим вектором периода ω относительно представления $\widetilde{S} \in \mathrm{End}\, C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$.*

Доказательства теорем 1–3 следуют из леммы 6 и теорем 5 и 6, где в качестве пространства $\mathscr{X}_\omega$ взято пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

Постановка задачи и теорема 4 выполнены при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00378), *теорема 5 — при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 14-01-31196) *остальные результаты — при финансовой поддержке РНФ* (*проект* 14-11-00305).

Библиографический список

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука; Физматлит, 1970. 534 с.

2. *Пак И. Н.* О суммах тригонометрических рядов // УМН. 1980. Т. 35, № 2. С. 91–144.

3. *Karamata J.* Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux // Bulletin S. M. F. 1933. Vol. 61. P. 55–62.

4. *Hardy G. H.* A theorem concerning trigonometrical series // Journal L. M. S. 1928. Vol. 3. P. 12–13.

5. *Seneta E.* Regularly varying functions. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 508. Berlin : Springer-Verlag, 1976.

6. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.

7. *Струкова И. И.* Теорема Винера для периодических на бесконечности фукнций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 34–41.

8. *Баскаков А. Г.* Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 2. С. 195–206.

9. *Баскаков А. Г.* Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе// Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 5. С. 942–952.

10. *Баскаков А. Г.* Об общих эргодических теоремах в банаховых модулях // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 3. С. 63–64.

11. *Баскаков А. Г.* О спектральном синтезе в банаховых модулях над коммутативными банаховыми алгебрами // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 4. С. 573–585.

12. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций // Мат. сб. 1984. Т. 124, № 1. С. 68–95.

13. *Баскаков А. Г.* Операторные эргодические теоремы и дополняемость подпространств банаховых пространств // Изв. вузов. Математика. 1988. Т. 32, № 11. С. 3–11.

14. *Баскаков А. Г.* Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Функц. анализ и его прил. 1990. Т. 24, № 3. С. 64–65.

15. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 17–26.

16. *Баскаков А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 14–28.

17. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Изв. РАН. Сер. математическая. 1997. Т. 61, № 6. С. 3–26. DOI: 10.4213/im164.

18. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. 2004. Т. 9. С. 3–151.

19. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. математическая. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. DOI: 10.4213/im639.

20. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // УМН. 1968. Т. 23, № 4. С. 117–178.

21. *Hille E., Phillips R. S.* Functional analysis and semigroups. AMS Colloquium Publications. Vol. 31, rev. ed. Providence, R.I. : American Math. Soc., 1957.

22. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 615 с.

23. *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Preisschrift und Dissertation, Universitat Gottingen, 1911.

About Harmonic Analysis of Periodic at Infinity Functions

I. I. Strukova

Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 394036, Voronezh, Russia, irina.k.post@yandex.ru

We consider slowly varying and periodic at infinity multivariable functions in Banach space. We introduce the notion of Fourier series of periodic at infinity function, study the properties of Fourier series and their convergence. Basic results are derived with the use of isometric representations theory.

Key words: Banach space, Banach algebra, slowly varying at infinity functions, periodic at infinity functions, Fourier series, modulus of continuity.

References

1. Daletsky Yu. L., Krein M. G. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. Nonlinear Analysis and Its Applications*. Moscow, Nauka, 1970, 534 p. (in Russian).

2. Pak I. N. On the sums of trigonometric series. *Rus. Math. Surv.*, 1980, vol. 35, no. 2, pp. 105–168.

3. Karamata J. Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. *Bulletin S. M. F.*, 1933, vol. 61, pp. 55–62.

4. Hardy G. H. A theorem concerning trigonometrical series. *Journal L. M. S.*, 1928, vol. 3, pp. 12–13.

5. Seneta E. *Regularly varying functions. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 508, Berlin, Springer-Verlag, 1976.

6. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostekhizdat, 1956, 632 p. (in Russian).

7. Strukova I.I. Wiener's theorem for periodic at infinity functions. *Izv. Saratov. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12. no. 4, pp. 34–41 (in Russian).

8. Baskakov A. G. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 1–2, pp. 606–612.

9. Baskakov A. G. Bernšteĭn-type inequalities in abstract harmonic analysis. *Siberian Math. J.*, 1979, vol. 20, no. 5, pp. 665–672.

10. Baskakov A. G. General ergodic theorems in Banach modules. *J. Funct. Anal.*, 1980, vol. 14, no. 3, pp. 215–217.

11. Baskakov A. G. Spectral synthesis in Banach modules over commutative Banach algebras. *Math. Notes*, 1983, vol. 34, no. 3–4, pp. 776–782.

12. Baskakov A. G. Harmonic analysis of cosine and exponential operator-valued functions. *Math. of the USSR-Sbornik*, 1985, vol. 52, no. 1, pp. 63–90.

13. Baskakov A. G. Operator ergodic theorems and complementability of subspaces of Banach spaces. *Soviet Math. (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1988, vol. 32, no. 11, pp. 1–14.

14. Baskakov A. G. Wiener's theorem and asymptotic estimates for elements of inverse matrices. *Funct. Anal. Appl.*, 1990, vol. 24, no. 3, pp. 222–224.
15. Baskakov A. G. Abstract harmonic analysis and asymptotic estimates for elements of inverse matrices. *Math. Notes*, 1992, vol. 52, no. 2, pp. 764–771.
16. Baskakov A. G. Asymptotic estimates for elements of matrices of inverse operators, and harmonic analysis. *Siberian Math. J.*, 1997, vol. 38, no. 1, pp. 10–22.
17. Baskakov A. G. Estimates for the elements of inverse matrices, and the spectral analysis of linear operators. *Izv. Math.*, 1997, vol. 61, no. 6, pp. 1113–1135. DOI: 10.4213/im164.
18. Baskakov A. G. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci. (N. Y.)* 2006, vol. 137, no. 4, pp. 4885–5036.
19. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. DOI: 10.4213/im639.
20. Kupcov N. P. Direct and inverse theorems of approximation theory and semigroups of operators. *Uspehi Mat. Nauk.*, 1968, vol. 23, no. 4, pp. 117–178. (in Russian).
21. Hille E., Phillips R. S. Functional analysis and semigroups. *AMS Colloquium Publications*. Vol. 31, rev. ed. Providence, R.I., American Math. Soc., 1957.
22. Zygmund A. *Trigonometric series*. Cambridge Univ. Press, vol. 1, 1959. 615 p.
23. Jackson D. *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*. Preisschrift und Dissertation, Universitat Gottingen, 1911.

УДК 517.518.82

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ С ВЕСОМ ЯКОБИ

М. С. Султанахмедов

Научный сотрудник, отдел математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, sultanakhmedov@gmail.com

Пусть $-1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{N-1} < \eta_N = 1$, $\lambda_N = \max\limits_{0\le j\le N-1}(\eta_{j+1} - \eta_j)$. Работа посвящена исследованию свойств полиномов, образующих ортонормированную систему с весом Якоби $\kappa^{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ на произвольной (не обязательно равномерной) сетке $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ такой, что $\eta_j \le t_j \le \eta_{j+1}$. В случае целых $\alpha, \beta \ge 0$ для построенных таким образом дискретных ортонормированных полиномов $\hat P_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ $(n = 0, \dots, N-1)$ при $n = O(\lambda_N^{-1/3})$ $(\lambda_N \to 0)$ получена асимптотическая формула вида $\hat P_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \hat P_n^{\alpha,\beta}(t) + \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$, в которой $\hat P_n^{\alpha,\beta}(t)$ –- классический полином Якоби, $\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ –- остаточный член. В качестве следствия асимптотической формулы получена весовая оценка полиномов $\hat P_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, неравномерная сетка, асимптотика, весовые оценки.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть

$$
\begin{gathered}
-1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{N-1} < \eta_N = 1, \\
\triangle\, \eta_j = \eta_{j+1} - \eta_j \qquad (0 \le j \le N-1), \qquad \lambda_N = \max_{0\le j\le N-1} \triangle\, \eta_j.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Рассмотрим сетку $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, в которой узлы t_j удовлетворяют условию

$$
\eta_j \le t_j \le \eta_{j+1} \qquad (0 \le j \le N-1), \tag{2}
$$

причем $t_i \ne t_j$, если $i \ne j$. Для $\alpha, \beta \ge 0$ положим $\kappa^{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\rho = \rho(t_j) = \kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \triangle\, \eta_j$. Рассмотрим пространство $l_{2,\rho}(\Omega_N)$ дискретных функций вида $f : \Omega_N \to R$, в котором скалярное