5. Sharapudinov I. I. Polynomials, orthogonal on grids from unit circle and number axis. *Dagestanskie elektronnye matematicheskie izvestiia* [Daghestan electronic mathematical reports], 2013, vol. 1, pp. 1–55 (in Russian).
6. Nurmagomedov A. A. About approximation polynomials, orthogonal on random grids. *Izv. Sarat. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 1, pp. 25–31 (in Russian).
7. Nurmagomedov A. A. Asymptotic properties of polynomials $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, orthogonal on any sets in the case of integers α and β. *Izv. Sarat. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 2, pp. 10–19 (in Russian).
8. Baik J., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Miller P. D. *Discrete orthogonal polynomials. Asymptotics and applications*. Princeton, Princeton Univ. Press, 2007, 184 p.
9. Ou C., Wong R. The Riemann–Hilbert approach to global asymptotics of discrete orthogonal polynomials with infinite nodes. *Analysis and Applications*, 2010, vol. 8, pp. 247–286.
10. Ferreira C., López J. L., Sinusía E. P. Asymptotic relations between the Hahn-type polynomials and Meixner–Pollaczek, Jacobi, Meixner and Krawtchouk polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, vol. 217, pp. 88–109.
11. Szego G. *Orthogonal Polynomials*. AMS Colloq. Publ, 1939, vol. 23, 154 p.
12. Bari N. K. Generalization of inequalities of S. N. Bernshtein and A. A. Markov. *Izv. AS USSR. Ser. matem.*, 1954, vol. 18, no. 2, pp. 159–176 (in Russian).
13. Konyagin S. V. V. A. Markov's inequality for polynomials in the metric of L [O neravenstve V. A. Markova dlia mnogochlenov v metrike L]. *Trudy Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova*, 1980, no. 145, pp. 117–125 (in Russian).

УДК 517.5

ПРОЕКТИВНОЕ И ИНЪЕКТИВНОЕ ОПИСАНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

А. Б. Шишкин

Доктор физико-математических наук, профессор, Кубанский государственный университет, филиал в г. Славянске-на-Кубани, Shishkin-home@mail.ru

Исследования инвариантных подпространств дифференциальных операторов бесконечного порядка в комплексной области породили целый ряд вопросов, связанных с переходом к двойственным задачам. Настоящая работа посвящена преодолению этих трудностей.

Ключевые слова: инвариантные подпространства, спектральный синтез, локальное описание, инъективное описание, проективное описание, двойственность.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть H — произвольное локально выпуклое пространство над полем $\mathbf{C}$, $\pi : H \to H$ — линейный непрерывный оператор. Подпространство $W \subseteq H$ называется инвариантным относительно оператора π (далее просто инвариантным или π-инвариантным), если $\pi W \subseteq W$. Основной вопрос по отношению к произвольному замкнутому π-инвариантному подпространству $W \subseteq H$: возможно ли инъективное (внутреннее) описание этого подпространства, например, в терминах корневых подпространств оператора π? Корневым подпространством оператора π, отвечающим собственному значению $\lambda \in \mathbf{C}$, называется непустое подпространство $\{x \in H : (\pi - \lambda)^n x = 0, n \in \mathbf{N}\}$. Элементы этого подпространства принято называть корневыми. Говорят, что замкнутое π-инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает спектральный синтез, если замыкание линейной оболочки корневых элементов оператора π, лежащих в W, совпадает с W. Задача спектрального синтеза для оператора π состоит в нахождении условий, при которых замкнутое π-инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает спектральный синтез.

Если H — конечномерное пространство, то любое инвариантное подпространство является прямой суммой конечного множества корневых подпространств. Из теоремы Гильберта–Шмидта о спектраль-

© Шишкин А. Б., 2014

ном разложении самосопряженного компактного оператора в гильбертовом пространстве [1] вытекает, что любое инвариантное подпространство такого оператора является прямой суммой не более чем счетного множества корневых подпространств. Известно, что уже среди компактных операторов, действующих даже в сепарабельном гильбертовом пространстве, есть такие, которые не имеют ни одного корневого элемента. Поэтому дальнейшие исследования по спектральному синтезу связаны с изучением конкретных операторов и даже конкретных инвариантных подпространств.

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{C}$; $H := H(\Omega)$ — пространство функций, локально аналитических в Ω, с топологией равномерной сходимости на компактах; $\pi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — целая функция минимального типа при порядке $\rho = 1$. Символом $\pi(D)$ обозначим дифференциальный оператор бесконечного порядка $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k D^k$ с постоянными коэффициентами. Результат действия $\pi(D)f$ оператора $\pi(D)$ на элемент $f \in H$ лежит в H. Это позволяет рассматривать $\pi(D)$ как оператор, действующий из H в H. Он является линейным и непрерывным. Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$, $\tilde{\lambda}$ — π-слой $\pi^{-1}(\lambda)$, $\zeta \in \tilde{\lambda}$. Экспоненциальный одночлен вида $\exp \zeta z$ является собственным элементом оператора $\pi(D)$ (соответствующим собственному значению λ). Алгебраический спектр оператора $\pi(D)$ совпадает с $\mathbf{C}$. Экспоненциальные одночлены вида $z^j \exp \zeta z$, $\zeta \in \tilde{\lambda}$ являются корневыми элементами оператора $\pi(D)$ (соответствующими собственному значению $\lambda \in \mathbf{C}$). Корневое подпространство оператора $\pi(D)$, соответствующее собственному значению $\lambda \in \mathbf{C}$, совпадает с замыканием в H подпространства, натянутого на множество всех экспоненциальных одночленов вида $z^j \exp \zeta z$, $\zeta \in \tilde{\lambda}$. Это означает, что задача спектрального синтеза для оператора $\pi(D)$ эквивалентна следующей задаче: при каких условиях, каждый элемент замкнутого $\pi(D)$-инвариантного подпространства $W \subseteq H$ можно аппроксимировать в топологии H линейными комбинациями экспоненциальных одночленов вида $z^j \exp \zeta z$, $\zeta \in \tilde{\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{C}$, лежащими в W.

Впервые задача спектрального синтеза для оператора дифференцирования D была рассмотрена Л. Шварцем (L. Schwartz) в его известной монографии о периодических в среднем функциях [2]. С задачей спектрального синтеза для оператора D тесно связана задача спектрального синтеза для оператора, порождаемого умножением на независимую переменную. Речь идет об операторе Λ^*, сопряженном оператору $P \to P|\varphi(\lambda) \to \lambda\varphi(\lambda)$, где P — локально выпуклое пространство целых функций, с ограничением на рост. Впервые постановка задачи для оператора Λ^* и ее исследование проведены в работе В. А. Ткаченко [3]. Дальнейшие исследования по спектральному синтезу в комплексной области связаны с переходом от оператора дифференцирования к оператору кратного дифференцирования D^q. Первое исследование задачи спектрального синтеза для оператора кратного дифференцирования проведено С. Г. Мерзляковым [4]. Первое исследование $(\Lambda^q)^*$-инвариантных подпространств проведено работе А. Б. Шишкина [5]. В работе И. Ф. Красичкова-Терновского [6] впервые рассмотрена более общая задача — задача спектрального синтеза для дифференциального оператора $\pi(D)$ конечного порядка. В работе А. Б. Шишкина [7] инициирован случай систем $\pi_1(D), \ldots, \pi_n(D)$ дифференциальных операторов конечного порядка.

Основной метод решения задач спектрального синтеза в комплексной области — *метод аннуляторных подмодулей*, развитый в работах И. Ф. Красичкова-Терновского еще в 1971 году. Этот метод предполагает переход от задачи спектрального синтеза к эквивалентной двойственной задаче — задаче локального описания подмодулей целых функций.

Первые исследования инвариантных подпространств дифференциальных операторов бесконечного порядка породили целый ряд вопросов, связанных с переходом к двойственным задачам. Настоящая работа посвящена преодолению этих трудностей.

В первом параграфе изложена схема двойственного перехода для случая: G — открытое множество в комплексной плоскости, π — произвольная локально аналитическая в G функция. Эта схема связана с общей схемой двойственности из статьи А. Б. Шишкина [8], предполагающей переход к общим задачам проективного и инъективного описаний. Во втором параграфе доказывается теорема двойственности, осуществляющая переход от задачи спектрального синтеза к задаче локального описания при тех же условиях. В частном случае эта теорема доказана ранее А. Н. Чернышевым [9]. В третьем параграфе доказывается специальная теорема двойственности, предполагающая дополнительно, что открытое множество G допускает собственное исчерпание. В четвертом параграфе рассматриваются полиномиальные ядра и полиномиальные оболочки конечных систем (системы однородных уравнений π-свертки и π^*-свертки). Задачи проективного и инъективного описаний для них сводятся к задачам полиномиальной аппроксимации (полноты).

1. ПРОЕКТИВНОЕ И ИНЪЕКТИВНОЕ ОПИСАНИЯ

Пусть G — открытое множество в $\mathbf{C}$, π — локально аналитическая в G функция, Λ — полный образ $\pi(G)$. Считаем, что Λ — односвязная область. Для любого $\lambda \in \Lambda$ символом $\tilde{\lambda}$ обозначаем π-слой $\pi^{-1}(\lambda) = \{z \in G \colon \pi(z) = \lambda\}$, а для любого конечного множества $\omega \subseteq \tilde{\lambda}$ символом Z_ω обозначаем декартово произведение $\mathbf{Z}_+ \times \omega$, где $\mathbf{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел. Считаем, что каждый π-слой $\tilde{\lambda}$ и декартово произведение Z_ω наделены дискретными топологиями. Значит, конечные множества и только они являются компактами в $\tilde{\lambda}$ и в Z_ω.

1.1. Пространства M_ω и N_ω. Обозначим через M_ω пространство всех комплексных функций $a = a(j,\zeta)$ на Z_ω с топологией равномерной сходимости на компактах. Пространство M_ω является рефлексивным. Обозначим через N_ω его сильное сопряженное пространство. По запасу элементов пространство N_ω совпадает с пространством всех комплексных функций $b = b(j,\zeta)$ на Z_ω с компактными носителями. Топология пространства N_ω совпадает с топологией индуктивного предела относительно вложений $N_{\omega,d} \subseteq N_\omega$, где d — компакт в Z_ω, $N_{\omega,d}$ — пространство всех комплексных функций на Z_ω, носители которых лежат в d, с топологией, порождаемой обычной sup-нормой $\|b\|_{\omega,d} = \sup\limits_{(j,\zeta)\in Z_\omega} |b(j,\zeta)|$. Билинейная форма, приводящая пространства M_ω и N_ω в двойственность, имеет вид

$$\langle a, b\rangle = \sum_{(j,\zeta)\in Z_\omega} a(j,\zeta)b(j,\zeta), \qquad a \in M_\omega, \qquad b \in N_\omega.$$

Пространство M_ω является топологической алгеброй с произведением:

$$(a_1 \times a_2)(j,\zeta) = \sum_{j=k+n} a_1(k,\zeta)a_2(n,\zeta).$$

Это позволяет рассматривать M_ω как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\bar{\pi}]$ многочленов от функции $\bar{\pi}(j,\zeta) = \frac{1}{j!}\pi^{(j)}(\zeta)$, а N_ω — как топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbf{C}[\bar{\pi}^*]$, где $\bar{\pi}^*$ — эндоморфизм N_ω, сопряженный с умножением элементов M_ω на функцию $\bar{\pi}$.

1.2. Отображения m_ω и n_ω. Пусть $O(G)$ — алгебра всех локально аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах, $O(G)^*$ — сильное сопряженное к пространству $O(G)$. Оператор умножения на функцию π является непрерывным эндоморфизмом $O(G)$, его сопряженный оператор π^* является непрерывным эндоморфизмом $O(G)^*$. Это позволяет рассматривать пространство $O(G)$ как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ многочленов от π, а пространство $O(G)^*$ — как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi^*]$ многочленов от π^*. Подмодули в $O(G)^*$ традиционно называются π^*-инвариантными подпространствами.

Рассмотрим непрерывное взаимно однозначное отображение $m_\omega \colon O(G) \to M_\omega$, которое каждому элементу $f \in O(G)$ ставит в соответствие функцию $\frac{1}{j!}f^{(j)}(\zeta)$, $(j,\zeta) \in Z_\omega$. Его сопряженное отображение $n_\omega : N_\omega \to O(G)^*$ является взаимно однозначным. Из равенств

$$\langle f, n_\omega(b)\rangle = \langle m_\omega(f), b\rangle = \sum_{(j,\zeta)\in Z_\omega} b(j,\zeta)\frac{1}{j!}f^{(j)}(\zeta)$$

вытекает, что отображение n_ω каждому элементу $b \in N_\omega$ ставит в соответствие сумму $\sum\limits_{(j,\zeta)\in Z_\omega} b(j,\zeta)\delta_\zeta^{(j)}$, где $\delta_\zeta^{(j)}$ — функционал $f \to \frac{1}{j!}f^{(j)}(\zeta)$.

По формуле Лейбница для каждого $f \in O(G)$ и $\zeta \in G$ справедливы равенства

$$\frac{1}{j!}(\pi f)^{(j)}(\zeta) = \frac{1}{j!}\sum_{n=0}^{j}\binom{j}{i}\pi^{(j-n)}(\zeta)f^{(n)}(\zeta) = \sum_{j=k+n}\frac{1}{k!}\pi^{(k)}(\zeta)\frac{1}{n!}f^{(n)}(\zeta).$$

Из этих равенств вытекает, что $m_\omega(\pi f) = \bar{\pi} m_\omega(f)$, т. е. отображение m_ω является модульным гомоморфизмом $O(G)$ в M_ω. Переходя к сопряженным отображениям, получаем $n_\omega(\bar{\pi}^* b) = \pi^* n_\omega(b)$ для любого $b \in N_\omega$, т. е. отображение n_ω является модульным гомоморфизмом N_ω в $O(G)^*$.

1.3. Схема двойственности. Пусть P — всюду плотное подпространство $O(G)$, наделенное отделимой локально выпуклой топологией, мажорирующей индуцированную топологию; P^* — сильное сопряженное к P. Из сделанных предположений вытекает, что пространство $O(G)^*$ можно отождествить с подпространством в P^* и говорить о непрерывном вложении $O(G)^* \subseteq P^*$.

Считаем, что пространство P является полурефлексивным. При этом предположении в силу известной теоремы о биполяре имеет место *общий принцип двойственности*: между совокупностью $\{I\}$ всех замкнутых подпространств в P и совокупностью $\{W\}$ всех замкнутых подпространств в P^* можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу ортогональности $I^0 = W$, $W^0 = I$. Здесь I^0 — аннулятор подпространства $I \subseteq P$ в пространстве P^*, а W^0 — аннулятор подпространства $W \subseteq P^*$ в пространстве P.

Выберем произвольное замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ и обозначим через W_ω максимальный замкнутый подмодуль в N_ω, образ которого при отображении n_ω лежит в W. Подмодули $W_\omega \subseteq N_\omega$, $\omega \Subset \tilde{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, называются *инъективными подмодулями* подпространства W. Говорят, что подпространство W *допускает инъективное описание,* если W совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на множество $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{\omega\Subset\tilde{\lambda}} n_\omega(W_\omega)$. Согласно принципу аппроксимации [10], для проверки того, что замкнутое подпространство W допускает инъективное описание, достаточно убедиться в выполнимости включения

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{\omega\Subset\tilde{\lambda}} n_\omega(W_\omega)^0 \subseteq W^0, \tag{1}$$

где $n_\omega(W_\omega)^0$, W^0 — аннуляторы в P подпространств $n_\omega(W_\omega)$ и W соответственно.

Далее, выберем произвольное замкнутое подпространство $I \subseteq P$ и обозначим I_ω минимальный замкнутый подмодуль в M_ω, включающий множество $m_\omega(I)$. Подмодули $I_\omega \subseteq M_\omega$, $\omega \Subset \tilde{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, будем называть *проективными подмодулями* подпространства I. Говорим, что подпространство I *допускает проективное описание,* если оно совпадает с пересечением $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{\omega\Subset\tilde{\lambda}}\left(P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega)\right)$. Из определения проективного подмодуля I_ω вытекает включение $I \subseteq m_\omega^{-1}(I_\omega)$, значит, для проверки того, что замкнутое подпространство $I \subseteq P$ допускает проективное описание, достаточно убедиться в справедливости включения

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{\omega\Subset\tilde{\lambda}}\left(P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega)\right) \subseteq I. \tag{2}$$

Лемма 1. *Инъективный подмодуль $W_\omega \subseteq N_\omega$ замкнутого подпространства $W \subseteq P^*$ и проективный подмодуль $I_\omega \subseteq M_\omega$ его аннулятора $I = W^0 \subseteq P$ связаны правилом ортогональности $I_\omega^0 = W_\omega$, $W_\omega^0 = I_\omega$.*

Доказательство. Зафиксируем $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \Subset \tilde{\lambda}$. Рассмотрим инъективный подмодуль $W_\omega \subseteq N_\omega$ замкнутого подпространства $W \subseteq P^*$ и проективный подмодуль $I_\omega \subseteq M_\omega$ его аннулятора $I = W^0 \subseteq P$. Легко убедиться, что аннулятор W_ω^0 является замкнутым подмодулем в M_ω, а аннулятор I_ω^0 является замкнутым подмодулем в N_ω. Из определений W_ω и I_ω вытекают включения $n_\omega(W_\omega) \subseteq W$ и $m_\omega(I) \subseteq I_\omega$. По свойствам сопряженных отображений $m_\omega\left(W^0\right) \subseteq W_\omega^0$ и $n_\omega(I_\omega^0) \subseteq I^0$. В силу рефлексивности P по теореме о биполяре $W^0 = I^{00} = I$. Значит, $m_\omega(I) \subseteq W_\omega^0$ и $n_\omega(I_\omega^0) \subseteq W$. Первое из последних включений и свойство минимальности I_ω дают включение $I_\omega \subseteq W_\omega^0$, т. е. $W_\omega \subseteq I_\omega^0$. Второе включение и свойство максимальности W_ω влекут включение $I_\omega^0 \subseteq W_\omega$. Таким образом, $W_\omega = I_\omega^0$, и по теореме о биполяре $W_\omega^0 = I_\omega$. □

Теорема 1 (схема двойственности). *Замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает инъективное описание тогда и только тогда, когда его аннулятор $I = W^0 \subseteq P$ допускает проективное описание.*

Доказательство. Предположим, что замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает инъективное описание. Нам нужно показать, что в этом случае замкнутое подпространство $I = W^0 \subseteq P$ допускает проективное описание. Для этого достаточно доказать справедливость включения (2). Пусть $f \in P$ и $f \in m_\omega^{-1}(I_\omega)$ для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \Subset \tilde{\lambda}$. По лемме 1 $I_\omega = W_\omega^0$, значит, $m_\omega(f) \in I_\omega$ и $m_\omega(f) \in W_\omega^0$. Пусть $b \in W_\omega$, тогда $\langle f, n_\omega(b)\rangle = \langle m_\omega(f), b\rangle = 0$. Следовательно, $f \in n_\omega(W_\omega)^0$ для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \Subset \tilde{\lambda}$. По предположению подпространство W допускает инъективное описание. Поэтому оно совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на объединение $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{\omega\Subset\tilde{\lambda}} n_\omega(W_\omega)$. Следовательно, f аннулирует W, т. е. $f \in I$. Тем самым справедливость включения (2) доказана.

Обратно, пусть замкнутое подпространство $I = W^0$ допускает проективное описание. Нужно показать, что W допускает инъективное описание. Для этого достаточно доказать выполнимость включения (1). Пусть $f \in n_\omega(W_\omega)^0 \subseteq P$ и $b \in W_\omega$. Тогда $\langle m_\omega(f), b\rangle = \langle f, n_\omega(b)\rangle = 0$. Значит, $m_\omega(f) \in (W_\omega)^0$. Но $(W_\omega)^0 = I_\omega$, следовательно, $m_\omega(f) \in I_\omega$ и $f \in m_\omega^{-1}(I_\omega)$. Если включение $f \in (n_\omega(W_\omega))^0$ имеет место для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \Subset \tilde{\lambda}$, то и включение $f \in m_\omega^{-1}(I_\omega)$ будет выполнено для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \Subset \tilde{\lambda}$. Так как подпространство I допускает проективное описание, то $I = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\bigcap_{\omega\Subset\tilde{\lambda}} \left(P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega)\right)$, значит, будет выполнено включение $f \in I$. Что и доказывает справедливость включения (1). $\square$

2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ И ЛОКАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ

2.1. Спектральный синтез. Если $\lambda \in \Lambda$ и $(j,\zeta) \in \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}$, то при достаточно большом $k \in \mathbf{N}$ для любой функции $f \in O(G)$ имеем $\left\langle (\pi^* - \lambda)^k \delta_\zeta^{(j)}, f \right\rangle = \left\langle \delta_\zeta^{(j)}, (\pi - \lambda)^k f \right\rangle = 0$. Это означает, что функционал $\delta_\zeta^{(j)}$ является корневым элементом оператора π^*. Следовательно, спектр оператора π^* включает множество Λ. Если $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \Lambda$, то операция умножения $f \to (\pi - \lambda) f$ осуществляет изоморфизм $O(G)$. Поэтому сопряженная операция $s \to (\pi^* - \lambda)s$ осуществляет изоморфизм $O(G)^*$. Следовательно, точка $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \Lambda$ не лежит в спектре оператора π^*, т. е. спектр оператора π^* совпадает с Λ.

Предложение 1. *Для любого $\lambda \in \Lambda$ корневое подпространство Δ_λ совпадает с линейной оболочкой множества $\{\delta_\zeta^{(j)} : (j,\zeta) \in \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}\}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $k \in \mathbf{N}$. Из очевидного соотношения $\left\langle (\pi^* - \lambda)^k s, f \right\rangle = \left\langle s, (\pi - \lambda)^k f \right\rangle$ вытекает, что множество решений $s \in O(G)^*$ уравнения $(\pi^* - \lambda)^k s = 0$ совпадает с аннулятором идеала $I_{\lambda,k} \subseteq O(G)$, порождаемого функцией $(\pi - \lambda)^k$. Наделим множество

$$Z_{\lambda,k} = \{(j,\zeta) \in \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda} : f^{(j)}(\zeta) = 0 \ \forall f \in I_{\lambda,k}\}$$

дискретной топологией и обозначим через $M_{\lambda,k}$ пространство всех комплексных функций на $Z_{\lambda,k}$ с топологией компактной сходимости, а $O(G)/I_{\lambda,k}$ — фактор-пространство $O(G)$ по подпространству $I_{\lambda,k}$. Отображение $m_{\lambda,k} : O(G)/I_{\lambda,k} \to M_{\lambda,k}$, которое каждому классу смежности $\tilde{f}$ ставит в соответствие функцию $\frac{1}{j!} f^{(j)}(\zeta)$, $f \in \tilde{f}$, на $Z_{\lambda,k}$, является линейным и топологическим изоморфизмом. Сильное сопряженное к $O(G)/I_{\lambda,k}$ совпадает с аннулятором $I_{\lambda,k}^0 \subseteq O(G)^*$ идеала $I_{\lambda,k}$, наделенным индуцированной из $O(G)^*$ топологией. Сильное сопряженное к $M_{\lambda,k}$ совпадает с пространством $M_{\lambda,k}^*$ всех комплексных функций на $Z_{\lambda,k}$ с компактными носителями. Отображение $m_{\lambda,k}^*$, сопряженное к $m_{\lambda,k}$, является изоморфизмом $I_{\lambda,k}^0$ и $M_{\lambda,k}^*$. Значит, для любых $f \in O(G)$ и $s \in I_{\lambda,k}^0$ справедливы соотношения

$$\langle s, f\rangle = \left\langle m_{\lambda,k}^*(c), \tilde{f} \right\rangle = \left\langle c, m_{\lambda,k}(\tilde{f}) \right\rangle = \sum_{(j,\zeta)\in Z_{\lambda,k}} c(j,\zeta) \frac{1}{j!} f^{(j)}(\zeta),$$

где $c = (m_{\lambda,k}^*)^{-1}(s) \in M_{\lambda,k}^*$. Эти соотношения показывают, что $I_{\lambda,k}^0$ совпадает с подпространством в $O(G)^*$, натянутым на множество $\{\delta_\zeta^{(j)} : (j,\zeta) \in Z_{\lambda,k}\}$. Осталось заметить, что $\bigcup_{k=1}^\infty Z_{\lambda,k} = \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}$. Следовательно, корневое подпространство Δ_λ совпадает с линейной оболочкой множества $\{\delta_\zeta^{(j)} : (j,\zeta) \in \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}\}$. $\square$

Говорим, что корневой элемент $s \in \Delta_\lambda$ *погружен* в подпространство $W \subseteq P^*$, если все корневые элементы $(\pi^* - \lambda)^j s$, $j = 0, 1 \ldots$ лежат в W. Замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает *спектральный синтез* (синтез по корневым элементам оператора π^*), если оно совпадает с замыканием в P^* линейной оболочки множества корневых элементов оператора π^*, погруженных в W. *Задача* *спектрального синтеза* (для оператора π^*) состоит в определении условий, при которых замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает спектральный синтез.

Рассмотрим вопрос влияния на спектральный синтез модульной структуры в P. Если P замкнуто относительно умножения на функцию π и оператор умножения на функцию π непрерывен в топологии P, то можно рассматривать пространство P как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ многочленов от π. Сужение на пространство P оператора умножения на функцию π обозначим $\tilde{\pi}$, его сопряженный оператор обозначим $\tilde{\pi}^*$. Оператор $\tilde{\pi}^*$, вообще говоря, имеет свой запас корневых элементов и, следовательно, порождает свою задачу спектрального синтеза. Однако при выполнении *аксиомы устойчивости* (относительно деления на $\pi - \lambda$)

$$f \in P, \qquad \lambda \in \mathbf{C}, \qquad \frac{f}{\pi - \lambda} \in O(G) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f}{\pi - \lambda} \in P$$

эта задача эквивалентна задаче спектрального синтеза для оператора π^*. Это вытекает из следующих предложений.

Предложение 2. *Спектр $\tilde{\Lambda}$ оператора $\tilde{\pi}^* : P^* \to P^*$ совпадает со спектром Λ оператора $\pi^* : O(G)^* \to O(G)^*$.*

Доказательство. Прежде всего, из включения $O^*(G) \subseteq P^*$ вытекает включение $\Lambda \subseteq \tilde{\Lambda}$. Допустим, что существует ненулевое $s \in P^*$, удовлетворяющее уравнению $(\tilde{\pi}^* - \lambda)s = 0$ при $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \Lambda$. Тогда $\langle s, (\tilde{\pi} - \lambda)f\rangle = 0$ для любого $f \in P$. Таким образом, s аннулирует любой элемент вида $(\tilde{\pi} - \lambda)f$, $f \in P$. Из аксиомы устойчивости вытекает, что s аннулирует любой элемент из P вида $(\pi - \lambda)f$, $f \in O(G)$, т. е. s аннулирует P, значит, $s = 0$. Это противоречие и доказывает, что $\Lambda = \tilde{\Lambda}$. □

Предложение 3. *Корневое подпространство $\tilde{\Delta}_\lambda$ оператора $\tilde{\pi}^*$, соответствующее собственному значению $\lambda \in \Lambda$, совпадает с замыканием $\overline{\Delta_\lambda}$ в P^* корневого подпространста Δ_λ оператора π^*.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Lambda$, $s \in P^*$, $f \in P$ и $\big\langle (\tilde{\pi}^* - \lambda)^k s, f\big\rangle = 0$. Из соотношения $\big\langle (\tilde{\pi}^* - \lambda)^k s, f\big\rangle = \big\langle s, (\tilde{\pi} - \lambda)^k f\big\rangle$ и аксиомы устойчивости вытекает, что множество решений $s \in P^*$ уравнения $\big\langle (\tilde{\pi}^* - \lambda)^k s, f\big\rangle = 0$ совпадает с аннулятором $(P \cap I_{\lambda,k})^0 \subseteq P^*$, где $I_{\lambda,k}$ — идеал в $O(G)$, порождаемый функцией $(\pi - \lambda)^k$. При этом $(P \cap I_{\lambda,k})^0 = \overline{I^0_{\lambda,k}}$, где $\overline{I^0_{\lambda,k}}$ — замыкание в P^* аннулятора $I^0_{\lambda,k} \subseteq O(G)$ идеала $I_{\lambda,k}$. Выше показано, что $I^0_{\lambda,k}$ совпадает с подпространством в $O(G)^*$, натянутым на множество $\{\delta^{(j)}_\zeta : (j, \zeta) \in Z_{\lambda,k}\}$. Следовательно, $\tilde{\Delta}_\lambda$ совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на множество $\{\delta^{(j)}_\zeta : (j, \zeta) \in \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}\}$, т. е. $\tilde{\Delta}_\lambda = \overline{\Delta_\lambda}$. □

Если P обладает структурой топологического модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то P^* обладает структурой топологического модуля над кольцом $\mathbf{C}[\tilde{\pi}^*]$. Замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$, допускающее спектральный синтез по корневым элементам оператора $\tilde{\pi}^*$, является инвариантным подпространством (подмодулем) в P^*. Корневой элемент s оператора $\tilde{\pi}^*$ погружен в инвариантное подпространство W тогда и только тогда, когда он принадлежит W. Следовательно, замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$, допускающее спектральный синтез по корневым элементам оператора $\tilde{\pi}^*$, совпадает с замыканием в P^* линейной оболочки множества корневых элементов оператора π^*, принадлежащих W.

2.2. Спектральный синтез и инъективное описание. Выберем произвольное замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ и обозначим через W' подпространство

$$\{s \in O(G)^* : r^* s \in W \text{ для любых } r^* \in \mathbf{C}[\pi^*]\}.$$

Замечаем, что

• W' — *максимальное* инвариантное подпространство $O(G)^*$, лежащее в W. Действительно, пусть V — инвариантное подпространство $O(G)^*$ и $V \subseteq W$. Но тогда для любых $s \in V$ и $r^* \in \mathbf{C}[\pi^*]$ будет выполнено включение $r^* s \in V \subseteq W$, значит, $s \in W'$ и $V \subseteq W'$. Кроме того,

• W' — *замкнутое* подпространство $O(G)^*$.

Действительно, пусть V — замыкание подпространства W' в $O(G)^*$. Так как W' — инвариантное подпространство $O(G)^*$, а модуль $O(G)^*$ является топологическим, то V — инвариантное подпространство $O(G)^*$. Из непрерывности вложения $O(G)^* \subseteq P^*$ вытекает, что $V \subseteq W$. Из свойства максимальности подпространства W' следует включение $V \subseteq W'$, т.е. $V = W'$.

Лемма 2. *Инъективный подмодуль W_ω замкнутого подпространства $W \subseteq P^*$ совпадает с прообразом $n_\omega^{-1}(W')$.*

Доказательство. Действительно, отображение n_ω является модульным гомоморфизмом, значит, $n_\omega^{-1}(W')$ — замкнутый подмодуль в N_ω и его образ $n_\omega(n_\omega^{-1}(W'))$ лежит в W. По определению W_ω имеем $n_\omega^{-1}(W') \subseteq W_\omega$. С другой стороны, по определению инъективного подмодуля W_ω образ $n_\omega(W_\omega)$ является инвариантным подпространством $O(G)^*$ и лежит в W. По свойству максимальности W' имеем $n_\omega(W_\omega) \subseteq W'$ и $W_\omega \subseteq n_\omega^{-1}(W')$. Отсюда вытекает, что

$$W_\omega = n_\omega^{-1}(W'). \tag{3}$$

Лемма доказана. □

Предложение 4. *Замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает инъективное описание тогда и только тогда, когда оно допускает спектральный синтез.*

Доказательство. Для произвольных $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \Subset \tilde{\lambda}$ обозначим через Δ_ω линейную оболочку множества $\{\delta_\zeta^{(j)} : (j,\zeta) \in Z_\omega\}$. Замечаем, что $\bigcup_{\omega \Subset \tilde{\lambda}} Z_\omega = \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}$, значит, корневое подпространство Δ_λ совпадает с линейной оболочкой множества $\bigcup_{\omega \Subset \tilde{\lambda}} \Delta_\omega$. Из (3) вытекает, что замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает инъективное описание, тогда и только тогда, когда оно совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на множество

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \Subset \tilde{\lambda}} n_\omega(W_\omega) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \Subset \tilde{\lambda}} n_\omega(n_\omega^{-1}(W')).$$

Замечаем, что образ $n_\omega(N_\omega)$ совпадает с Δ_ω. Значит, $n_\omega^{-1}(W') = n_\omega^{-1}(W' \cap \Delta_\omega)$ и $n_\omega(n_\omega^{-1}(W')) = W' \cap \Delta_\omega$. Следовательно, замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает инъективное описание, тогда и только тогда, когда оно совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на множество

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \Subset \tilde{\lambda}} (W' \cap \Delta_\omega) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (W' \cap \Delta_\lambda),$$

т. е. допускает спектральный синтез по корневым элементам оператора π^*. Предложение доказано. □

2.3. Локальное описание. Выберем $\lambda \in \Lambda$, $\omega \Subset \tilde{\lambda}$ и обозначим: $O(\omega)$ — кольцо ростков функций, локально аналитических в точках множества ω, $O_\pi(\omega)$ — подкольцо $O(\omega)$, состоящее из ростков вида $f \circ \pi$, $f \in O(\omega)$. Легко увидеть, что кольцо $O_\pi(\omega)$ изоморфно кольцу $O(\lambda)$ ростков функций, аналитических в точке λ. Рассматриваем $O(\omega)$ как модуль над кольцом $O_\pi(\omega)$.

Введем в $O(\omega)$ отделимую локально выпуклую топологию, порожденную счетным набором полунорм $u \to \frac{1}{j!}|u^{(j)}(\zeta)|$, $(j,\zeta) \in Z_\omega$. Легко проверить, что произведение элементов $O(\omega)$ на элементы кольца $O_\pi(\omega)$ непрерывно в топологии $O(\omega)$, следовательно, $O_\pi(\omega)$-модуль $O(\omega)$ является топологическим.

Предложение 5. *Любой подмодуль в $O_\pi(\omega)$-модуле $O(\omega)$ замкнут в топологии $O(\omega)$.*

Доказательство. По предложению 2 из [11, гл. V, С] существует окрестность U множества ω такая, что сужение π_U отображения π на множество U является собственным отображением на некоторое открытое множество $V \subseteq \mathbf{C}$. Следовательно, тройка (U, π_U, V) — аналитическое накрытие [11, гл. III, B, теорема 21]. При этом можно считать, что слой $\pi_U^{-1}(\lambda) \subseteq \tilde{\lambda}$ совпадает с ω. Точка λ может оказаться критической точкой накрытия (U, π_U, V), однако все другие точки из V мы вправе считать простыми. Число точек в простых слоях накрытия (U, π_U, V) обозначим ν. Пусть $O^\nu(\lambda)$ — декартово произведение ν копий кольца $O(\lambda)$. Топологизируем $O^\nu(\lambda)$ с помощью счетного набора полунорм $v = (v_0, \dots, v_{p-1}) \to \frac{1}{j!}|v_i^{(j)}(\lambda)|$, каждая из которых определяется выбором точки (j,i) из декартова произведения $\mathbf{Z}_+ \times \{0, \dots, \nu - 1\}$, и рассматриваем $O^\nu(\lambda)$ как топологический модуль над кольцом $O(\lambda)$. По лемме 3 из [8] любой элемент $u \in O(\omega)$ единственным образом представляется в виде

$$u = \sum_{i=0}^{p-1} z^i u_i, \ u_i \in O_\pi(\omega).$$

Это представление определяет отображение

$$\sigma_{\lambda,\omega} : O(\omega) \to O^{\nu}(\lambda) | u \to (v_0, \ldots, v_{p-1}),$$

где v_i определяется однозначно из соотношения $u_i = v_i \circ \pi_U$. Отображение $\sigma_{\lambda,\omega}$ является модульным изоморфизмом. Используя правило для нахождения производной сложной функции и предельный переход по $\xi \to \lambda$, если точка λ является критической точкой накрытия (U, π_U, V), можно убедиться в том, что отображение $\sigma_{\lambda,\omega}$ является и топологическим изоморфизмом. В силу векторного варианта [12, теорема 6.3.5] леммы Круля [10] всякий подмодуль топологического $O(\lambda)$-модуля $O^{\nu}(\lambda)$ замкнут. В силу непрерывности отображения $\sigma_{\lambda,\omega}$ любой подмодуль в $O_{\pi}(\omega)$-модуле $O(\omega)$ замкнут. Лемма доказана. □

Пусть I — подпространство в P, $\omega \Subset \tilde{\lambda}$. Обозначим $I(\omega)$ подмодуль $O(\omega)$, порождаемый I. Отметим, что согласно определению подмодуль $I(\omega)$ исчерпывается элементами $O(\omega)$, допускающими представление в виде конечной комбинации $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$, где $a_j \in O_{\pi}(\omega)$, $f_j \in I$. Подмодуль $I(\omega) \subseteq O(\omega)$ называется *локальным подмодулем* I (ассоциированным с ω). Подпространство I *допускает локальное описание* (описание по семейству $O_{\pi}(\omega)$-модулей $O(\omega)$, $\omega \Subset \tilde{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$), если оно совпадает с пересечением $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bigcap_{\omega\Subset\tilde{\lambda}} (P \cap I(\omega))$.

2.4. Локальное описание и проективное описание. Пусть I — замкнутое подпространство в P, $I[\pi]$ — подмодуль в $O(G)$, порождаемый I, I' — замкнутый подмодуль в $O(G)$, порождаемый I. Согласно определению подмодуль I' совпадает с замыканием $I[\pi]$ в топологии $O(G)$ и является минимальным замкнутым подмодулем в $O(G)$, содержащим I.

Лемма 3. *Проективный подмодуль I_ω подпространства $I \subseteq P$ совпадает с замыканием $\overline{m_\omega(I')}$ образа $m_\omega(I')$ в топологии M_ω.*

Доказательство. Действительно, так как $I \subseteq I'$, то $m_\omega(I) \subseteq m_\omega(I') \subseteq \overline{m_\omega(I')}$. При этом $\overline{m_\omega(I')}$ является замкнутым подмодулем в M_ω. По определению I_ω имеем $I_\omega \subseteq \overline{m_\omega(I')}$. С другой стороны, если $a \in m_\omega(I')$, то $m_\omega^{-1}(a) \in I'$. Значит, существует последовательность $f_n \in I[\pi]$, сходящаяся к $m_\omega^{-1}(a)$ в топологии пространства $O(G)$. В силу непрерывности отображения m_ω последовательность $m_\omega(f_n) \in I_\omega$ сходится к a в топологии M_ω. Следовательно, $m_\omega(I') \subseteq I_\omega$ и $\overline{m_\omega(I')} \subseteq I_\omega$. Таким образом,

$$I_\omega = \overline{m_\omega(I')}. \tag{4}$$

Лемма доказана. □

Предложение 6. *Замкнутое подпространство $I \subseteq P$ допускает локальное описание тогда и только тогда, когда оно допускает проективное описание.*

Доказательство. Отождествим элементы пространства $O(G)$ с порождаемыми ими ростками из $O(\omega)$. Получаем возможность говорить о вложении $O(G)$ в $O(\omega)$. Убедимся, что подмодуль $I(\omega)$ совпадает с замыканием $\overline{I'}$ подмодуля I' в топологии $O(\omega)$. Действительно, так как вложение $O(G) \subseteq O(\omega)$ является непрерывным, то замыкание $I[\pi]$ в топологии $O(\omega)$ совпадает с замыканием I' в этой топологии. При этом $I[\pi] \subseteq I(\omega)$, значит, $\overline{I'} = \overline{I[\pi]} \subseteq \overline{I(\omega)}$. Но по предложению 5 $\overline{I(\omega)} = I(\omega)$. Следовательно, $\overline{I'} \subseteq I(\omega)$. Докажем выполнимость обратного включения $I(\omega) \subseteq \overline{I'}$. Пусть $u \in I(\omega)$. В некоторой окрестности множества ω элемент u допускает представление в виде конечной суммы $\sum c_n u_n$, где $c_n = C_n \circ \pi$, C_n — голоморфны в некоторой окрестности точки λ, $u_n \in I$. Обозначим через $c_n^{(k)}$ композицию $C_n^{(k)} \circ \pi$, где $C_n^{(k)}$ — частичная суммы разложения C_n в степенной ряд в окрестности точки λ. Так как $c_n^{(k)} \in \mathbf{C}[\pi]$, то $u^{(k)} = \sum c_n^{(k)} u_n \in I'$. Легко проверить, что последовательность $u^{(k)}$ сходится к u в топологии $O(\omega)$. Отсюда вытекает, что u принадлежит замыканию $\overline{I'}$ подмодуля I' в топологии $O(\omega)$. Значит, $I(\omega) \subseteq \overline{I'}$. Таким образом, доказано, что $I(\omega) = \overline{I'}$. Пусть $\eta_\omega : O(G) \to O(\omega)$ — отображение вложения. Тогда

$$I(\omega) = \overline{\eta_\omega(I')}. \tag{5}$$

Наконец, пусть μ_ω — отображение $O(\omega) \to M_\omega$, которое каждому ростку $u \in O(\omega)$ ставит в соответствие комплексную функцию $a(j,\zeta) = \frac{1}{j!} u^{(j)}(\zeta)$, определенную на множестве Z_ω. Отображения η_ω,

μ_ω являются взаимно однозначными, и, кроме того, отображение μ_ω есть топологический изоморфизм $O(\omega)$ на полный образ $M'_\omega = \mu_\omega(O(\omega))$ с топологией, индуцированной из M_ω. Из очевидного соотношения $m_\omega = \mu_\omega \circ \eta_\omega$ следует, что $\eta_\omega = \mu_\omega^{-1} \circ m_\omega$ и $\eta_\omega^{-1} = m_\omega^{-1} \circ \mu_\omega$. Из (5) вытекает, что

$$\eta_\omega^{-1}\left(I(\omega)\right) = m_\omega^{-1} \circ \mu_\omega\left(I(\omega)\right) = m_\omega^{-1} \circ \mu_\omega\left(\overline{\eta_\omega(I')}\right).$$

Но отображение μ_ω есть топологический изоморфизм $O(\omega)$ на M'_ω, значит,

$$m_\omega^{-1} \circ \mu_\omega\left(\overline{\eta_\omega(I')}\right) = m_\omega^{-1}\left(\overline{\mu_\omega \circ \eta_\omega(I')}\right) = m_\omega^{-1}\left(\overline{m_\omega(I')}\right).$$

Из (4) получаем $\eta_\omega^{-1}\left(I(\omega)\right) = m_\omega^{-1}(I_\omega)$. Осталось заметить, что $P \cap I(\omega) = P \cap \eta_\omega^{-1}\left(I(\omega)\right) = P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega)$. Предложение доказано. $\square$

2.5. Теорема двойственности. Пусть W — замкнутое подпространство в P^*, I — аннулятор W^0 подпространства W в P.

Теорема 2 (теорема двойственности). *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *W допускает спектральный синтез,*

2) *W допускает инъективное описание,*

3) *I допускает проективное описание,*

4) *I допускает локальное описание.*

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 2) следует из предложения 4. Эквивалентность утверждений 3) и 4) следует из предложения 6. Эквивалентность утверждений 2) и 3) следует из схемы двойственности. Теорема доказана. $\square$

3. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ

Для любого множества $V \subseteq \mathbf{C}$ прообраз $\pi^{-1}(V)$ совпадает с множеством $\{z \in G : \pi(z) \in V\}$. Множество $U \subseteq G$ будем называть *π-симметричным*, если $U = \pi^{-1}(\pi(U))$. По свойствам прообразов совокупность $\{U\}$ всех открытых π-симметричных подмножеств G образует топологию τ_π. Множество G и пустое множество являются π-симметричными, т. е. $\varnothing, G \in \tau_\pi$.

3.1. π-симметричные представления. Функцию f, заданную на π-симметричном множестве U, будем называть *π-симметричной*, если она представляется в виде композиции $g \circ \pi$, где g — некоторая локально голоморфная на $\pi(U)$ функция. Совокупность $O_\pi(U)$ всех π-симметричных на U функций образует кольцо, которое, очевидно, является подкольцом кольца $O(U)$ всех функций, локально голоморфных на U. При этом совокупность $\{O(U)\}$ вместе с гомоморфизмами сужения образует предпучек колец над (G, τ_π). Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $\tilde{\lambda} = \{z \in G : \pi(z) = \lambda\}$. Слой предпучка $\{O(U)\}$ в точке $z \in \tilde{\lambda}$ совпадает с кольцом $O(\tilde{\lambda})$ и не зависит от выбора точки $z \in \tilde{\lambda}$. С другой стороны, совокупность $\{O_\pi(U)\}$ вместе с гомоморфизмами сужения тоже образует предпучок колец над (G, τ_π). Слой этого предпучка в точке $z \in \tilde{\lambda}$ совпадает с кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$.

Выделение класса π-симметричных функций связано со специальными представлениями локально аналитических на G функций. Предположим, что функция π осуществляет собственное отображение G на Λ. По свойствам собственных голоморфных отображений тройка (G, π, Λ) является *аналитическим накрытием*: существует замкнутое дискретное множество $\sigma \subset \Lambda$ такое, что сужение π на $G \setminus \pi^{-1}(\sigma)$ является локально биголоморфным ν-листным накрытием над $\Lambda \setminus \sigma$. Точки $\lambda \in \Lambda \setminus \sigma$ называются *обыкновенными*, а соответствующие им π-слои $\tilde{\lambda}$ — *простыми*. Простые π-слои состоят из ν различных точек. Упорядочение простого π-слоя удобно записывать в виде конечной последовательности $z_0, \ldots, z_{\nu-1}$. Элементы этой последовательности зависят от точки $\lambda \in \Lambda \setminus \sigma$. При этом отображения $\lambda \to z_k(\lambda)$, $k = 0, \ldots, \nu - 1$, аналитичны в окрестности каждой обыкновенной точки (и зависят от выбора этой точки).

Пусть $z \in G \setminus \pi^{-1}(\sigma)$, $z_0, \ldots, z_{\nu-1}$ — упорядочение простого π-слоя, содержащего z. Выберем произвольный элемент $f \in O(G)$ и рассмотрим функцию $f_k(z) = \dfrac{\Delta_k(f)}{\Delta}$, где $\Delta = \prod\limits_{0 \le k \le j \le \nu-1} (z_j - z_k)$ —

определитель Вандермонда, $\Delta_k(f)$ — определитель, полученный заменой k-го столбца в определителе Δ на столбец из $f(z_0),\dots,f(z_{\nu-1})$. Функция f_k является аналитической в точках из $G\setminus\pi^{-1}(\sigma)$. Легко убедиться (см [6, предложение 2.3]), что она допускает однозначное аналитическое продолжение до функции голоморфной в G и представляет элемент кольца $O_\pi(G)$. Отсюда вытекает, что любая функция $f\in O(G)$ единственным образом представляется в виде

$$f=\sum_{k=0}^{\nu-1} z^k f_k, \qquad f_k\in O_\pi(G). \tag{6}$$

Действительно, согласно известным свойствам определителей на декартовой степени G^ν имеют место тождества $f(z_j)\Delta\equiv\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} z_j^k\Delta_k(f)$, $j=0,\dots,\nu-1$. Так как $\Delta\neq 0$ и $z\in\{z_0,\dots,z_{\nu-1}\}$, то $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} z^k f_k(z)$, где $f_k=\dfrac{\Delta_k(f)}{\Delta}\in O_\pi(G)$. Единственность представления (6) следует из того, что соотношения $f(z_j)=\sum\limits_{k=0}^{\nu-1} z_j^k f_k(z_j)$, $j=0,\dots,\nu-1$, определяют значения $f^{(k)}(z_j)$ однозначно.

Выберем произвольную точку $\lambda\in\Lambda$. Легко убедиться, что существует фундаментальная система $\{U_j\}$ π-симметричных окрестностей слоя $\tilde\lambda$. При этом тройки $(U,\pi,\pi(U))$, $U\in\{U_j\}$, являются аналитическими накрытиями. Это дает возможность переписать представление (6) в локальной форме. Точнее, любой элемент $u\in O(\tilde\lambda)$ единственным образом представляется в виде

$$u=\sum_{k=1}^{\nu} z^k u_k, \qquad u_k\in O_\pi(\tilde\lambda). \tag{7}$$

Если $\lambda\in\Lambda\setminus\sigma$, то росток u_k порожден отношением $\Delta_k(f)/\Delta$, $f\in u$, если же $\lambda\in\sigma$, то росток u_k порожден аналитическим продолжением этого отношения в точки множества $\tilde\lambda$.

3.2. Модульные изоморфизмы. Из представления (6) вытекает, что отображение

$$\chi_G: O^\nu(\Lambda)\to O(G)\,|\,(\varphi_k)\to\sum_{k=1}^{\nu} z^k(\varphi_k\circ\pi),$$

где $O^\nu(\Lambda)$ — декартова степень $O(\Lambda)$, является биективным. Пусть $\lambda\in\Lambda$; $O(\lambda)$ — кольцо ростков функций, голоморфных в окрестностях λ; $O^\nu(\lambda)$ — декартова степень $O(\lambda)$. Из представления (7) вытекает, что отображение χ_G распространяется (с сохранением биективности) на локальные объекты

$$\chi_{\tilde\lambda}: O^\nu(\lambda)\to O(\tilde\lambda)\Big|\,(v_k)\to\sum_{k=1}^{\nu} z^k(v_k\circ\pi).$$

Наделяем $O(\Lambda)$ топологией равномерной сходимости на компактах; $O(\lambda)$ — топологией, порождаемой полунормами $u\to\frac{1}{j!}|u^{(j)}(\lambda)|$, $j\in\mathbf{Z}_+$; $O(\tilde\lambda)$ — топологией, порождаемой полунормами $v\to\frac{1}{j!}|v^{(j)}(z)|$, $(j,z)\in\mathbf{Z}_+\times\tilde\lambda$; $O^\nu(\Lambda)$ и $O^\nu(\lambda)$ — топологиями произведения. Рассматриваем $O^\nu(\Lambda)$ — как модуль над кольцом многочленов $\mathbf{C}[z]$, $O(\tilde\lambda)$ — как модуль над кольцом $O_\pi(\tilde\lambda)$, $O^\nu(\lambda)$ — как модуль над кольцом $O(\lambda)$. Легко убедиться, что все указанные модули являются топологическими. Отображение χ_G осуществляет алгебраический и топологический изоморфизм $\mathbf{C}[z]$-модуля $O^\nu(\Lambda)$ и $\mathbf{C}[\pi]$-модуля $O(G)$, а отображение χ_ζ осуществляет алгебраический и топологический изоморфизм $O(\lambda)$-модуля $O^\nu(\lambda)$ и $O_\pi(\tilde\lambda)$-модуля $O(\tilde\lambda)$. При этом для любого $\varphi\in O^\nu(\Lambda)$ выполняется соотношение

$$\eta_{\tilde\lambda}(\chi_G(\varphi))=\chi_{\tilde\lambda}\left(\vartheta_\lambda(\varphi)\right), \tag{8}$$

где ϑ_λ, $\eta_{\tilde\lambda}$ — это отображения вложения $O^\nu(\Lambda)\to O^\nu(\lambda)$, $O(G)\to O(\tilde\lambda)$ соответственно. Из этого соотношения, в свою очередь, вытекает, что для любого $v\in\vartheta_\lambda(O^\nu(\Lambda))\subset O^\nu(\lambda)$ выполняется соотношение

$$\chi_G(\vartheta_\lambda^{-1}(v))=\eta_{\tilde\lambda}^{-1}(\chi_\lambda(v)). \tag{9}$$

3.3. Замкнутые подмодули в $O(G)$. Локально выпуклая алгебра $O(\Lambda)$ является равномерно устойчивой: для любой окрестности нуля $V \subseteq O(\Lambda)$ существует окрестность нуля $U \subseteq O(\Lambda)$ такая, что справедлива импликация

$$f \in U, \qquad \lambda \in \Lambda, \qquad \frac{f(z)}{z-\lambda} \in O(\Lambda) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f(z)}{z-\lambda} \in V.$$

Действительно, для любого $f \in O(\Lambda)$ и любого компакта $K \Subset \Lambda$ имеем:

$$\max_{z \in K} \left| \frac{f(z)}{z-\lambda} \right| \le \frac{2}{\varepsilon} \max_{z \in K_\varepsilon} |f(z)|,$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(K, \partial\Lambda)$, $K_\varepsilon = \{z : \rho(z, K) \le \varepsilon\} \Subset \Lambda$.

Равномерно устойчивые алгебры изучались ранее. Известно, например, что любой замкнутый подмодуль в $O(\Lambda)$-модуле $O^\nu(\Lambda)$ допускает описание по семейству $O(\lambda)$-модулей $O^\nu(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ [13, предложение 6.13]. В частности, любой замкнутый идеал в алгебре $O(\Lambda)$ допускает описание по семейству локальных колец $O(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ [13, предложение 6.11]. Построенные выше модульные изоморфизмы позволяют извлечь из этого следующее предложение.

Предложение 7. *Если отображение $\pi : G \to \Lambda$ является собственным, то всякий замкнутый подмодуль в $O(G)$ допускает локальное описание.*

Доказательство. Пусть I — замкнутый подмодуль в $O(G)$. Прообраз $J = \chi_G^{-1}(I)$ является замкнутым подмодулем в $\mathbf{C}[z]$-модуле $O^\nu(\Lambda)$. Так как многочлены плотны в $O(\Lambda)$, то J — замкнутый подмодуль в $O(\Lambda)$-модуле $O^\nu(\Lambda)$. По предложению 6.13 из [13] J совпадает с пересечением $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \vartheta_\lambda^{-1}(J(\lambda))$, где $J(\lambda)$ — подмодуль $O(\lambda)$-модуля $O^\nu(\lambda)$, порождаемый $\vartheta_\lambda(J)$. Локальный подмодуль $J(\lambda)$ состоит из всевозможных конечных комбинаций $b_1\vartheta_\lambda(\varphi_1) + \dots + b_n\vartheta_\lambda(\varphi_n), b_j \in O(\lambda), \varphi_j \in I$. В силу соотношения (8)

$$\chi_{\tilde\lambda}(b_1\vartheta_\lambda(\varphi_1) + \dots + b_n\vartheta_\lambda(\varphi_n)) = c_1\eta_{\tilde\lambda}(f_1) + \dots + c_n\eta_{\tilde\lambda}(f_n),$$

где $c_j = b_j \circ \pi$, $f_j = \chi_G(\varphi_j)$. Значит, для любого $\lambda \in \Lambda$ локальные подмодули $I(\tilde\lambda)$ и $J(\lambda)$ связаны очевидным соотношением $I(\tilde\lambda) = \chi_{\tilde\lambda}(J(\lambda))$. При этом $I = \chi_G(J)$. Отсюда и соотношения (9) вытекает, что

$$I = \chi_G(J) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \chi_G(\vartheta_\lambda^{-1}(J(\lambda))) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \eta_{\tilde\lambda}^{-1}(\chi_{\tilde\lambda}(J(\zeta))) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \eta_{\tilde\lambda}^{-1}(I(\tilde\lambda)).$$

Предложение доказано. □

3.4. Собственные исчерпания. Говорим, что открытое множество G *допускает собственное исчерпание*, если существуют открытые множества $G^{(n)} \subseteq \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям:

- $G^{(1)} \subseteq G^{(2)} \subseteq \dots \subseteq G$;
- $\bigcup_{n=1}^\infty G^{(n)} = G$;
- сужение π на каждое множество $G^{(n)}$ является собственным отображением на некоторую односвязную область $\Lambda^{(n)} = \pi(G^{(n)})$.

Если G допускает собственное исчерпание, то $\Lambda^{(1)} \subseteq \Lambda^{(2)} \subseteq \dots \subseteq \Lambda$, $\Lambda = \bigcup_{n=1}^\infty \Lambda^{(n)}$. При этом, как легко убедиться, Λ — односвязная область в $\mathbf{C}$.

Ослабим начальные условия на выбор функции π и не будем предполагать, что отображение $\pi : G \to \Lambda$ является собственным, но предположим, что множество G допускает собственное исчерпание. Обозначим через $O(G^{(n)})$ пространство локально аналитических на $G^{(n)}$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Понятно, что имеют место непрерывные вложения $O(G^{(1)}) \supseteq O(G^{(2)}) \supseteq \dots \supseteq O(G^{(n)})$ и $O(G^{(n)}) = \bigcap_{n=1}^\infty O(G^{(n)})$. Пусть I — замкнутый подмодуль в $O(G)$, $I^{(n)}$ — замыкание I в $O(G^{(n)})$. Пространство $O(G^{(n)})$ обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, $I^{(n)}$ — замкнутый подмодуль в $O(G^{(n)})$. Из определения подмодулей $I^{(n)}$ вытекает, что $I = \bigcap_{n=1}^\infty I^{(n)} = \bigcap_{n=1}^\infty (O(G) \cap I^{(n)})$. Из предложения 7 и предложения 6 вытекает, что подмодуль $I^{(n)} \subseteq O(G^{(n)})$ допускает проективное описание. Это означает, что

$$I^{(n)} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda^{(n)}} \bigcap_{\omega\Subset\tilde\lambda^{(n)}} \left(m_\omega^{(n)}\right)^{-1} \left(I_\omega^{(n)}\right),$$

где $\tilde{\lambda}^{(n)} = \tilde{\lambda} \cap G^{(n)}$, $m_\omega^{(n)}$ — отображение $O(G^{(n)}) \to M_\omega$, которое каждому элементу $f \in O(G^{(n)})$ ставит в соответствие функцию $\frac{1}{j!}f^{(j)}(\zeta)$, $(j,\zeta) \in Z_\omega$, $I_\omega^{(n)}$ — проективный подмодуль $I^{(n)}$ в M_ω. Значит,

$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} (O(G) \cap I^{(n)}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\lambda \in \Lambda^{(n)}} \bigcap_{\omega \Subset \tilde{\lambda}^{(n)}} \left(O(G) \cap \left(m_\omega^{(n)} \right)^{-1} \left(I_\omega^{(n)} \right) \right).$$

Осталось заметить, что $O(G) \cap \left(m_\omega^{(n)} \right)^{-1} \left(I_\omega^{(n)} \right) = m_\omega^{-1} \left(I_\omega^{(n)} \right)$, а в силу (4) $I_\omega^{(n)} = \overline{m_\omega(I^{(n)})} = I_\omega$. Следовательно,

$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\lambda \in \Lambda^{(n)}} \bigcap_{\omega \Subset \tilde{\lambda}^{(n)}} m_\omega^{-1} (I_\omega) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{\omega \Subset \tilde{\lambda}} m_\omega^{-1} (I_\omega).$$

Таким образом, нами доказано следующее предложение.

Предложение 8. *Если открытое множество G допускает собственное исчерпание, то всякий замкнутый подмодуль в $O(G)$ допускает проективное описание.*

3.5. Специальная теорема двойственности. Пусть I — замкнутое подпространство P; I' — замкнутый подмодуль в $O(G)$, порождаемый I; W — аннулятор I в P^*; $W' = \{s \in O(G)^* : r^*s \in W, \forall\, r^* \in \mathbf{C}[\pi^*]\}$; $\overline{W'}$ — замыкание W' в топологии P^*.

Лемма 4. *Подмодуль $I' \subseteq O(G)$ и инвариантное подпространство $W' \subseteq O(G)^*$ связаны правилом ортогональности $W' = (I')^0$, $I' = (W')^0$.*

Доказательство. Из определений W' и I' вытекают включения $\kappa(W') \subseteq W$ и $\kappa^*(I) \subseteq I'$, где κ — отображение вложения $P \subseteq O(G)$, κ^* — его сопряженное отображение (отображение вложения $H^* \subseteq O(G)^*$). По свойствам аннуляторов $\kappa(W^0) \subseteq (W')^0$ и $\kappa^*((I')^0) \subseteq I^0$. По теореме о биполяре $W^0 = I^{00} = I$. Значит, $\kappa(I) \subseteq (W')^0$ и $\kappa^*((I')^0) \subseteq W$. Первое из последних включений и свойство минимальности I' дают включение $I' \subseteq (W')^0$, т. е. $W' \subseteq (I')^0$. Второе включение и свойство максимальности W' влекут включение $(I')^0 \subseteq W'$. Таким образом, $W' = (I')^0$, а по теореме о биполяре $I' = (W')^0$. □

Теорема 3. *Если открытое множество G допускает собственное исчерпание, то следующие утверждения эквивалентны:*

1) *I допускает локальное описание;*
2) *I допускает проективное описание;*
3) *$I = P \cap I'$;*
4) *$W = \overline{W'}$;*
5) *W допускает инъективное описание;*
6) *W допускает спектральный синтез.*

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1), 2), 5) и 6) вытекает из теоремы двойственности.

Убедимся в эквивалентности утверждений 2) и 3). Предположим, что подпространство I допускает проективное описание и $f \in P \cap I'$. Тогда в силу (4) $m_\omega(f) \in m_\omega(I') \subseteq I_\omega$ и $f \in P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega)$ для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \Subset \tilde{\lambda}$. Значит, $f \in I$. Таким образом, доказано включение $P \cap I' \subseteq I$. Так как обратное включение, очевидно, выполнено, то $I = P \cap I'$. Обратно. Пусть $f \in P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega)$ для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \Subset \tilde{\lambda}$. Из (4) вытекает, что проективные подмодули I_ω и I'_ω совпадают. Следовательно, $f \in m_\omega^{-1}(I'_\omega)$ для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \Subset \tilde{\lambda}$. По предложению 8 подмодуль I' допускает проективное описание. Значит, $f \in I'$ и $f \in P \cap I'$. Из равенства $I = P \cap I'$ вытекает, что $f \in I$. Это означает, что подмодуль I допускает проективное описание.

Далее убедимся в эквивалентности утверждений 4) и 5). Пусть $W = \overline{W'}$. Из предложения 8 и теоремы двойственности вытекает, что замкнутое инвариантное подпространство $W' \subseteq O(G)^*$ допускает инъективное описание, значит, W' совпадает с замыканием в $O(G)^*$ подпространства, натянутого на множество $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \Subset \tilde{\lambda}} n_\omega(W'_\omega)$. Из (3) вытекает, что инъективные подмодули W_ω и W'_ω совпадают. Следовательно, W совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на множество $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \Subset \tilde{\lambda}} n_\omega(W_\omega)$, т. е. подпространство W допускает инъективное описание. Обратно, пусть $s \in W$.

Так как по предположению подпространство W допускает инъективное описание, то s можно аппроксимировать в P^* линейными комбинациями элементов множества $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{\omega\Subset\tilde\lambda} n_\omega(W'_\omega)$, содержащегося в W'. Значит, $W\subseteq\overline{W'}$. Обратное вложение, очевидно, выполнено. Теорема доказана. □

4. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОБОЛОЧКИ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ЯДРА

4.1. $\mathbf{C}[\pi]$-оболочки и $\mathbf{C}[\pi]$-ядра. Выберем конечную систему $f_1,\ldots,f_\nu$ элементов из $O(G)$ и обозначим $\mathbf{f}$ ν-функцию $(f_1,\ldots,f_\nu)\in O(G)^\nu$. Пусть $O_\mathbf{f}$ — пространство всех ν-функций $\mathbf{g}\in O(\Lambda)^\nu$, для которых сумма

$$(\mathbf{g}\circ\pi)\,\mathbf{f}=(g_1\circ\pi)\,f_1+\ldots+(g_\nu\circ\pi)\,f_\nu$$

принадлежит P.

Если $r_1,\ldots,r_\nu$ — многочлены, то ν-функцию $\mathbf{r}=(r_1,\ldots,r_\nu)$ называем ν-многочленом (или ν-полиномом). Степень ν-полинома $\mathbf{r}$ определяется как наибольшая из степеней полиномов $r_1,\ldots,r_\nu$. Пространство $O_\mathbf{f}$ не является пустым. Оно, например, содержит ν-полином нулевой степени $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)$. Если $f_1,\ldots,f_\nu\in P$, то пространство $O_\mathbf{f}$ содержит все ν-полиномы нулевой степени и может содержать все или отдельные ν-полиномы положительной степени, например, если пространство P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то пространство $O_\mathbf{f}$ содержит все ν-полиномы.

Совокупность $J_\mathbf{f}$ всех элементов из P, допускающих представление в виде $(\mathbf{r}\circ\pi)\,\mathbf{f}$, где $\mathbf{r}$ — ν-полином, называем $\mathbf{C}[\pi]$-*оболочкой множества* $\{f_1,\ldots,f_\nu\}$ *в пространстве* P, а ее замыкание $I_\mathbf{f}=\overline{J_\mathbf{f}}$ в топологии P называем *замкнутой* $\mathbf{C}[\pi]$-*оболочкой множества* $\{f_1,\ldots,f_\nu\}$ *в пространстве* P.

Совокупности $J_\mathbf{f}$ и $I_\mathbf{f}$ являются подпространствами в P. Если $f_1,\ldots,f_\nu\in P$ и $O_\mathbf{f}$ не содержит ν-полиномов положительной степени, то $J_\mathbf{f}$ совпадает с подпространством в P порождаемым множеством $\{f_1,\ldots,f_\nu\}$. Если $f_1,\ldots,f_\nu\in P$ и P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то $J_\mathbf{f}$ совпадает с подмодулем в P порождаемым множеством $\{f_1,\ldots,f_\nu\}$.

Совокупность $W_\mathbf{f}$ всех функционалов $s\in P^*$, для которых $\langle s,(\mathbf{r}\circ\pi)\,\mathbf{f}\rangle=0$ при любом выборе ν-полинома $\mathbf{r}\in O_\mathbf{f}$, называем $\mathbf{C}[\pi]$-*ядром множества* $\{f_1,\ldots,f_\nu\}$ *в пространстве* P^*.

Совокупность $W_\mathbf{f}$ является замкнутым подпространством в P^*. Если $f_1,\ldots,f_\nu\in P$ и $O_\mathbf{f}$ не содержит ν-полиномов положительной степени, то $W_\mathbf{f}$ совпадает с пересечением ядер функционалов $s\to\langle s,f_j\rangle$, $j=1,\ldots,\nu$. Если $f_1,\ldots,f_\nu\in P$ и P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то $O_\mathbf{f}$ содержит все ν-полиномы. При этом $W_\mathbf{f}$ совпадает с пересечением ядер функционалов $s\to\langle s,(\mathbf{r}\circ\pi)\,\mathbf{f}\rangle$, где $\mathbf{r}$ — произвольный ν-полином.

Предположим, что система функций $f_1,\ldots,f_\nu$ является независимой над кольцом $O_\pi(G)=$ $=\{g\circ\pi : g\in O(\Lambda)\}$, т. е. справедлива импликация

$$(\mathbf{g}\circ\pi)\,\mathbf{f}=0,\quad \mathbf{g}\in O(\Lambda)^\nu\quad\Longrightarrow\quad \mathbf{g}=\mathbf{0}.$$

Из этого предположения вытекает, что отображение $O(\Lambda)^\nu\to O(G)|\,\mathbf{g}\to(\mathbf{g}\circ\pi)\,\mathbf{f}$ является взаимно однозначным. Таковым же будет сужение

$$u_\mathbf{f}:O_\mathbf{f}\to P|\,\mathbf{g}\to(\mathbf{g}\circ\pi)\,\mathbf{f}$$

этого отображения на подпространство $O_\mathbf{f}$. Наделим $O_\mathbf{f}$ локально выпуклой топологией, индуцированной из P отображением $u_\mathbf{f}$. Тогда отображение $u_\mathbf{f}$ и обратное отображение

$$u_\mathbf{f}^{-1}:P\to O_\mathbf{f}\big|\,(\mathbf{g}\circ\pi)\,\mathbf{f}\to\mathbf{g}$$

будут непрерывными. Понятно, что область определения отображения $u_\mathbf{f}^{-1}$ может не совпадать со всем пространством P.

Лемма 5. *Подпространства $I_\mathbf{f}\subseteq P$ и $W_\mathbf{f}\subseteq P^*$ связаны правилом ортогональности $I_\mathbf{f}^0=W_\mathbf{f}$, $W_\mathbf{f}^0=I_\mathbf{f}$. Здесь $I_\mathbf{f}^0$ — аннулятор $I_\mathbf{f}$ в P^*, $W_\mathbf{f}^0$ — аннулятор $W_\mathbf{f}$ в P^*.*

Доказательство. Действительно, если $s \in W_{\mathbf{f}}$, то $\langle s, (\mathbf{r} \circ \pi)\,\mathbf{f}\rangle = 0$ для любого ν-многочлена $\mathbf{r}$ из $O_{\mathbf{f}}$. Значит, s принадлежит аннулятору $J_{\mathbf{f}}^0 \subseteq P^*$, т. е. $W_{\mathbf{f}} \subseteq J_{\mathbf{f}}^0$, и по свойствам поляр $W_{\mathbf{f}}^0 \supseteq J_{\mathbf{f}}^{00} = I_{\mathbf{f}}$. С другой стороны, если $s \in J_{\mathbf{f}}^0$, то $s \in V_{\mathbf{f}}$, значит, $J_{\mathbf{f}}^0 \subseteq W_{\mathbf{f}}$ и по свойствам поляр $I_{\mathbf{f}} = J_{\mathbf{f}}^{00} \supseteq W_{\mathbf{f}}^0$. Следовательно, $I_{\mathbf{f}} = W_{\mathbf{f}}^0$, $I_{\mathbf{f}}^0 = W_{\mathbf{f}}^{00} = W_{\mathbf{f}}$. □

Теорема 4. *Если открытое множество G допускает собственное исчерпание, P — модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, $f_1, \ldots, f_\nu \in P$ и образ $u_{\mathbf{f}}(O_{\mathbf{f}})$ замкнут в пространстве P^*, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *ν-многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{f}}$;*

2) *замкнутое подпространство $I_{\mathbf{f}}$ допускает проективное описание;*

3) *замкнутое подпространство $W_{\mathbf{f}}$ допускает инъективное описание.*

Доказательство. Убедимся в справедливости импликации 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть ν-многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{f}}$. Покажем, что подпространство $I_{\mathbf{f}}$ допускает проективное описание. В силу специальной теоремы двойственности нам достаточно показать, что $I_{\mathbf{f}} = P \cap I'_{\mathbf{f}}$, где $I'_{\mathbf{f}}$ — замкнутый подмодуль в $O(G)$, порождаемый $I_{\mathbf{f}}$. Так как вложение $I_{\mathbf{f}} \subseteq P \cap I'_{\mathbf{f}}$ следует из определения $I'_{\mathbf{f}}$, то докажем лишь выполнимость обратного вложения. Пусть $f \in P \cap I'_{\mathbf{f}}$. Тогда f можно аппроксимировать в топологии $O(G)$ элементами вида $(r_1 \circ \pi)\,\varphi_1 + \ldots + (r_k \circ \pi)\,\varphi_k$, где $r_1, \ldots, r_k$ — полиномы, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in I_{\mathbf{f}}$. По определению $I_{\mathbf{f}}$ функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ можно аппроксимировать в топологии P функциями вида $(\mathbf{r} \circ \pi)\,\mathbf{f}$, где $\mathbf{r}$ — ν-полиномы из $O_{\mathbf{f}}$, значит, функцию f можно аппроксимировать в топологии P элементами подпространства $u_{\mathbf{f}}(O_{\mathbf{f}})$. Но по условию образ $u_{\mathbf{f}}(O_{\mathbf{f}})$ замкнут в пространстве P, значит, при некотором $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{f}}$ имеем представление $f = (\mathbf{g} \circ \pi)\,\mathbf{f}$. По предположению ν-многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{f}}$ и, кроме того, отображение $u_{\mathbf{f}}$ является непрерывным, следовательно, f можно аппроксимировать в топологии P элементами вида $(\mathbf{r} \circ \pi)\,\mathbf{f}$, где $\mathbf{r}$ — ν-многочлен из $O_{\mathbf{f}}$, т. е. $f \in I_{\mathbf{f}}$. Таким образом $P \cap I'_{\mathbf{f}} \subseteq I_{\mathbf{f}}$ и, следовательно, $I_{\mathbf{f}} = P \cap I'_{\mathbf{f}}$. Проверим выполнимость импликации 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть замкнутое подпространство $I_{\mathbf{f}}$ допускает проективное описание. По специальной теореме двойственности это означает, что $I_{\mathbf{f}} = P \cap I'_{\mathbf{f}}$. Выберем произвольную ν-функцию $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{f}}$. Из определения $O_{\mathbf{f}}$ вытекает, что $(\mathbf{g} \circ \pi)\,\mathbf{f} \in P$. Покажем, что $(\mathbf{g} \circ \pi)\,\mathbf{f} \in I'_{\mathbf{f}}$. Так как Λ — односвязная область, то по теореме Рунге ν-многочлены $\mathbf{r}$ плотны в пространстве $O(\Lambda)^\nu$. Отсюда следует, что функцию $(\mathbf{g} \circ \pi)\,\mathbf{f}$ можно аппроксимировать в топологии $O(G)$ функциями вида $(\mathbf{r} \circ \pi)\,\mathbf{f}$, где $\mathbf{r}$ — ν-многочлен. Из того, что P — модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ и $f_1, \ldots, f_\nu \in P$ вытекает, что функции $(\mathbf{r} \circ \pi)\,\mathbf{f}$, где $\mathbf{r}$ — ν-многочлен, принадлежат $I_{\mathbf{f}}$. Это означает, что функция $(\mathbf{g} \circ \pi)\,\mathbf{f}$ принадлежит $I'_{\mathbf{f}}$. Следовательно, $(\mathbf{g} \circ \pi)\,\mathbf{f} \in P \cap I'_{\mathbf{f}} = I_{\mathbf{f}}$. Из определения $I_{\mathbf{f}}$ вытекает, что функцию $(\mathbf{g} \circ \pi)\,\mathbf{f}$ можно аппроксимировать в топологии P элементами вида $(\mathbf{r} \circ \pi)\,\mathbf{f}$, где $\mathbf{r}$ — ν-многочлен. Из непрерывности обратного отображения $u_{\mathbf{f}}^{-1}$ вытекает, что $\mathbf{g}$ можно аппроксимировать в топологии $O_{\mathbf{f}}$ ν-многочленами.

Эквивалентность утверждений 2) и 3) следует из леммы 5 и теоремы двойственности. □

Замечание. При доказательстве импликации 1) $\Rightarrow$ 2) мы не использовали условий: P — модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ и $f_1, \ldots, f_\nu \in P$. Значит, импликация 1) $\Rightarrow$ 2), следовательно, и импликация 1) $\Rightarrow$ 3) остаются справедливыми без этих условий.

4.2. π-свертка. Обозначим через $O_{\mathbf{f}}^*$ сильное сопряженное к пространству $O_{\mathbf{f}}$. Сопряженный оператор

$$u_{\mathbf{f}}^* : P^* \to O_{\mathbf{f}}^* | \, s \to \langle s, (\mathbf{g} \circ \pi)\,\mathbf{f}\rangle$$

будем называть *π-сверткой* (ν-функции $\mathbf{f} \subseteq O(G)^\nu$ и функционала $s \in P^*$). Оператор $u_{\mathbf{f}}^*$ является непрерывным. Значит, множество W решений однородного уравнения π-свертки $u_{\mathbf{f}}^* s = 0$, $s \in P^*$ является замкнутым подпространством P^*. Обозначим I аннулятор этого подпространства в пространстве P.

Предложение 9. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *ν-многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{f}}$;*

2) $W = W_{\mathbf{f}}$;

3) $I = I_{\mathbf{f}}$.

Доказательство. Прежде всего убедимся в справедливости импликации 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть ν-многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{f}}$. Если $s \in W$, то $\langle u_{\mathbf{f}}^* s, \mathbf{g}\rangle = \langle s, (\mathbf{g}\circ\pi)\,\mathbf{f}\rangle = 0$ при любом $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{f}}$. Значит, $\langle s, (\mathbf{r}\circ\pi)\,\mathbf{f}\rangle = 0$ для любого ν-многочлена $\mathbf{r} \in O_{\mathbf{f}}$. Отсюда следует, что подпространство W содержится в $\mathbf{C}[\pi]$-ядре $W_{\mathbf{f}}$ множества $\{f_1, \ldots, f_\nu\}$ в пространстве P^*, т. е. $W \subseteq W_{\mathbf{f}}$. Обратно, пусть функционал $s \in P^*$ принадлежит $W_{\mathbf{f}}$, значит, $\langle s, (\mathbf{r}\circ\pi)\,\mathbf{f}\rangle = 0$ для любого ν-многочлена $\mathbf{r} \in O_{\mathbf{f}}$. По предположению любую ν-функцию $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{f}}$ можно аппроксимировать в топологии $O_{\mathbf{f}}$ ν-многочленами $\mathbf{r}$. В силу непрерывности оператора $u_{\mathbf{f}}$ равенство $\langle s, (\mathbf{g}\circ\pi)\,\mathbf{f}\rangle = 0$ будет иметь место для любого $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{f}}$, а это означает, что $s \in W$, т. е. $W_{\mathbf{f}} \subseteq W$. Следовательно, $W = W_{\mathbf{f}}$.

Справедливость импликации 2) $\Rightarrow$ 3) вытекает из леммы 5 и следующих соотношений $I = W^0 = W_{\mathbf{f}}^0 = I_{\mathbf{f}}$.

Проверим импликацию 3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $I = I_{\mathbf{f}}$. Подпространство W совпадает с ядром оператора $u_{\mathbf{f}}^*$. По свойствам сопряженных отображений его аннулятор $I \subseteq P$ совпадает с замыканием в P полного образа $u_{\mathbf{f}}(O_{\mathbf{f}})$, т. е. множества элементов вида $(\mathbf{g}\circ\pi)\,\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{f}}$. Значит, любой элемент из P вида $(\mathbf{g}\circ\pi)\,\mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{f}}$, принадлежит $I_{\mathbf{f}}$ и может быть аппроксимирован в P элементами вида $(\mathbf{r}\circ\pi)\,\mathbf{f}$, где $\mathbf{r}$ — ν-многочлен. В силу непрерывности обратного оператора $u_{\mathbf{f}}^{-1}$ в $O_{\mathbf{f}}$ плотны ν-многочлены. $\square$

Следствие 1. *Если открытое множество G допускает собственное исчерпание, ν-многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{f}}$ и образ $u_{\mathbf{f}}(O_{\mathbf{f}})$ замкнут в пространстве P, то замкнутое подпространство W допускает инъективное описание.*

Доказательство. Если ν-многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{f}}$, то по предложению 9 $W = W_{\mathbf{f}}$. Значит, по теореме 4 (см. замечание) подпространство W допускает инъективное описание. $\square$

4.3. $\mathbf{C}[\pi^*]$-оболочки и $\mathbf{C}[\pi^*]$-ядра. Выберем конечную систему элементов $s_1, \ldots, s_\nu$ из P^* и обозначим $\mathbf{s}$ ν-функционал $(s_1, \ldots, s_\nu) \in (P^*)^\nu = (P^\nu)^*$. Для произвольной ν-функции $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_\nu) \in O(\Lambda)^\nu$ символом $(\mathbf{g}\circ\pi)^*\,\mathbf{s}$ обозначаем функционал

$$f \to \langle \mathbf{s}, (\mathbf{g}\circ\pi)\,f\rangle = \langle s_1, (g_1\circ\pi)\,f\rangle + \ldots + \langle s_\nu, (g_\nu\circ\pi)\,f\rangle\,.$$

Этот функционал определен, по крайней мере, на тех элементах $f \in P$, для которых вектор

$$(\mathbf{g}\circ\pi)\,f = ((g_1\circ\pi)\,f, \ldots, (g_\nu\circ\pi)\,f)$$

принадлежит P^ν. Говорим, что функционал $(\mathbf{g}\circ\pi)^*\,\mathbf{s}$ принадлежит P^* и пишем $(\mathbf{g}\circ\pi)^*\,\mathbf{s} \in P^*$, если множество $\{f \in P : (\mathbf{g}\circ\pi)\,f \in P^\nu\}$ плотно в P и функционал $(\mathbf{g}\circ\pi)^*\,\mathbf{s}$ продолжается до непрерывного функционала на пространстве P. Говорим, что функционал $(\mathbf{g}\circ\pi)^*\,\mathbf{s}$ принадлежит $O(G)^*$ и пишем $(\mathbf{g}\circ\pi)^*\,\mathbf{s} \in O(G)^*$, если множество $\{f \in P : (\mathbf{g}\circ\pi)\,f \in P^\nu\}$ плотно в P (значит, плотно и в $O(G)$) и функционал $(\mathbf{g}\circ\pi)^*\,\mathbf{s}$ продолжается до непрерывного функционала на пространстве $O(G)$. ν-полином $\mathbf{r} \in O_{\mathbf{s}}$ называем допустимым, если функционал $(\mathbf{r}\circ\pi)^*\,\mathbf{s}$ принадлежит $O(G)^*$.

Пусть $\mathscr{O}_{s_j}$ — пространство всех функций $g \in O(\Lambda)$, для которых $(g\circ\pi)^*\,s_j \in P^*$; E_{s_j} — подпространство $\mathscr{O}_{s_j}$, состоящее из всех функций g, для которых $(g\circ\pi)^*\,s_j = 0$; O_{s_j} — фактор-пространство $\mathscr{O}_{s_j}/E_{s_j}$; $O_{\mathbf{s}}$ — декартово произведение $O_{s_1} \times \ldots \times O_{s_\nu}$. Договоримся использовать упрощенную терминологию, в которой элементы фактор-пространства $\mathscr{O}_{s_j}/E_{s_j}$ (классы эквивалентности) отождествляются с их представителями из $\mathscr{O}_{s_j}$. Говорим, что функция g из $O(\Lambda)$ принадлежит O_{s_j}, если $g \in \mathscr{O}_{s_j}$, т. е. класс эквивалентности, порождаемый функцией g, принадлежит O_{s_j}. Говорим, что ν-функция $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_\nu)$ из $O(\Lambda)^\nu$ принадлежит $O_{\mathbf{s}}$, если $g_j \in O_{s_j}$ для всякого $j \in \{1, \ldots, \nu\}$.

Пространство $O_{\mathbf{s}}$ не является пустым. Оно содержит, например, ν-полином нулевой степени $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, который, очевидно, является допустимым. Если $s_1, \ldots, s_\nu \in O(G)^*$, то пространство $O_{\mathbf{s}}$ содержит все ν-многочлены нулевой степени и может содержать все или отдельные ν-многочлены положительной степени, например, если пространство P обладает структурой топологического модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то пространство $O_{\mathbf{s}}$ содержит все ν-полиномы. Действительно, если $s_1, \ldots, s_\nu \in O(G)^*$ и P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то для любого ν-полинома $\mathbf{r}$ множество $\{f \in P : (\mathbf{r}\circ\pi)\,f \in P^\nu\}$ совпадает с P. При этом функционал $(\mathbf{r}\circ\pi)^*\,\mathbf{s}$ непрерывен на пространстве $O(G)$ (значит, и на пространстве P), т. е. все ν-полиномы лежат в $O_{\mathbf{s}}$ и являются допустимыми.

Совокупность $I_{\mathbf{s}}$ всех функций $f \in P$, для которых

$$\left\langle (\mathbf{r} \circ \pi)^{*} \mathbf{s}, f \right\rangle = \langle \mathbf{s}, (\mathbf{r} \circ \pi) f \rangle = 0$$

при любом выборе ν-многочлена $\mathbf{r}$ из $O_{\mathbf{s}}$, называем $\mathbf{C}[\pi^*]$-*ядром множества* $\{s_1, \ldots, s_\nu\}$ *в пространстве* P. Совокупность $I_{\mathbf{s}}$ является замкнутым подпространством в P. Если $s_1, \ldots, s_\nu \in O(G)^*$ и $O_{\mathbf{s}}$ не содержит ν-полиномов положительной степени, то $I_{\mathbf{s}}$ совпадает с пересечением ядер функционалов $f \to \langle s_j, f \rangle$, $j = 1, \ldots, \nu$. Если $s_1, \ldots, s_\nu \in O(G)^*$ и P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то $I_{\mathbf{s}}$ совпадает с пересечением ядер функционалов $f \to \langle \mathbf{s}, (\mathbf{r} \circ \pi) f \rangle$, где $\mathbf{r}$ — произвольный ν-полином.

Совокупность $V_{\mathbf{s}}$ всех элементов из P^*, допускающих представление в виде $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где $\mathbf{r}$ — некоторый ν-полином из $O_{\mathbf{s}}$, называем $\mathbf{C}[\pi^*]$-*оболочкой множества* $\{s_1, \ldots, s_\nu\}$ *в пространстве* P^*, а ее замыкание $W_{\mathbf{s}} = \overline{V_{\mathbf{s}}}$ в топологии P^* называем *замкнутой* $\mathbf{C}[\pi^*]$-*оболочкой множества* $\{s_1, \ldots, s_\nu\}$ *в пространстве* P^*. Совокупности $V_{\mathbf{s}}$ и $W_{\mathbf{s}}$ являются подпространствами в P^*. Если $s_1, \ldots, s_\nu \in O(G)^*$ и $O_{\mathbf{s}}$ не содержит ν-полиномов положительной степени, то $V_{\mathbf{s}}$ совпадает с подпространством в P^* порождаемым множеством $\{s_1, \ldots, s_\nu\}$. Если $s_1, \ldots, s_\nu \in O(G)^*$ и P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то P^* обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi^*]$ и $V_{\mathbf{s}}$ совпадает с подмодулем в P^* порождаемым множеством $\{s_1, \ldots, s_\nu\}$. Предположим, что система функционалов $s_1, \ldots, s_\nu$ является независимой, т. е. справедлива импликация

$$(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s} = 0, \qquad \mathbf{g} \in O_{\mathbf{s}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{g} = \mathbf{0}.$$

Из этого предположения вытекает, что отображение

$$u_{\mathbf{s}} : O_{\mathbf{s}} \to P^* | \, \mathbf{g} \to (\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$$

является взаимно однозначным. Наделим $O_{\mathbf{s}}$ локально выпуклой топологией, индуцированной из P^* отображением $u_{\mathbf{s}}$. Тогда отображение $u_{\mathbf{s}}$ и обратное отображение

$$u_{\mathbf{s}}^{-1} : P^* \to O_{\mathbf{s}} \big| \, (\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s} \to \mathbf{g}$$

будут непрерывными. Понятно, что область определения отображения $u_{\mathbf{s}}^{-1}$ может не совпадать со всем пространством P^*.

Лемма 6. *Подпространства* $W_{\mathbf{s}} \subseteq P^*$ *и* $I_{\mathbf{s}} \subseteq P$ *связаны правилом ортогональности* $W_{\mathbf{s}}^0 = I_{\mathbf{s}}$, $I_{\mathbf{s}}^0 = W_{\mathbf{s}}$. *Здесь* $W_{\mathbf{s}}^0$ *— аннулятор* $W_{\mathbf{s}}$ *в* P, $I_{\mathbf{s}}^0$ *— аннулятор* $I_{\mathbf{s}}$ *в* P^*.

Доказательство. Если $f \in I_{\mathbf{s}}$, то $\left\langle (\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}, f \right\rangle = 0$ для любого ν-многочлена $\mathbf{r}$ из $O_{\mathbf{s}}$. Значит, f принадлежит аннулятору $V_{\mathbf{s}}^0 \subseteq P$, т. е. $I_{\mathbf{s}} \subseteq V_{\mathbf{s}}^0$, и по свойствам поляр $I_{\mathbf{s}}^0 \supseteq V_{\mathbf{s}}^{00} = W_{\mathbf{s}}$. С другой стороны, если $f \in V_{\mathbf{s}}^0$, то $f \in I_{\mathbf{s}}$, значит, $V_{\mathbf{s}}^0 \subseteq I_{\mathbf{s}}$ и по свойствам поляр $W_{\mathbf{s}} = V_{\mathbf{s}}^{00} \supseteq I_{\mathbf{s}}^0$. Следовательно, $W_{\mathbf{s}} = I_{\mathbf{s}}^0$ и $W_{\mathbf{s}}^0 = I_{\mathbf{s}}^{00} = I_{\mathbf{s}}$. □

Теорема 5. *Если открытое множество* G *допускает собственное исчерпание,* P *— модуль над кольцом* $\mathbf{C}[\pi]$, $s_1, \ldots, s_\nu \in O(G)^*$ *и образ* $u_{\mathbf{s}}(O_{\mathbf{s}})$ *замкнут в пространстве* P^**, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *допустимые* ν*-многочлены плотны в пространстве* $O_{\mathbf{s}}$*;*

2) *замкнутое подпространство* $W_{\mathbf{s}}$ *допускает инъективное описание;*

3) *замкнутое подпространство* $I_{\mathbf{s}}$ *допускает проективное описание.*

Доказательство. Убедимся в справедливости импликации 1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что допустимые ν-многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{s}}$. Покажем, что замкнутое подпространство $W_{\mathbf{s}} \subseteq P^*$ допускает инъективное описание. В силу специальной теоремы двойственности нам достаточно показать, что $W_{\mathbf{s}} = \overline{W'_{\mathbf{s}}}$, где $W'_{\mathbf{s}} = \{s \in O(G)^* : r^* s \in W_{\mathbf{s}} \ \forall r^* \in \mathbf{C}[\pi^*]\}$ — максимальное инвариантное подпространство $O(G)^*$, лежащее в $W_{\mathbf{s}}$, $\overline{W'_{\mathbf{s}}}$ — замыкание $W'_{\mathbf{s}}$ в топологии P^*. Вложение $W'_{\mathbf{s}} \subseteq W_{\mathbf{s}}$ и, следовательно, вложение $\overline{W'_{\mathbf{s}}} \subseteq W_{\mathbf{s}}$ вытекает непосредственно из определения подпространства $W'_{\mathbf{s}}$. Докажем выполнимость обратного вложения $W_{\mathbf{s}} \subseteq \overline{W'_{\mathbf{s}}}$. Если $s \in W_{\mathbf{s}}$, то по определению $W_{\mathbf{s}}$ функционал s можно аппроксимировать в топологии P^* элементами из P^* вида $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где $\mathbf{r}$ — ν-полином из $O_{\mathbf{s}}$. Значит, s можно аппроксимировать в топологии P^* элементами множества $u_{\mathbf{s}}(O_{\mathbf{s}})$. Но по условию это множество замкнуто в пространстве P^*, значит, при некотором $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{s}}$ имеем представление $s = (\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$. По предположению допустимые ν-многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{s}}$ и отображение $u_{\mathbf{s}}$ является непрерывным, следовательно, s можно аппроксимировать в топологии P^* элементами $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s} \in O(G)^*$, где $\mathbf{r}$ — допустимый ν-многочлен из $O_{\mathbf{s}}$. Легко проверить, что эти элементы принадлежат $W'_{\mathbf{s}}$, значит, $s \in \overline{W'_{\mathbf{s}}}$. Таким образом, $W_{\mathbf{s}} = \overline{W'_{\mathbf{s}}}$. Проверим выполнимость импликации 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $W_{\mathbf{s}} = \overline{W'_{\mathbf{s}}}$ и $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{s}}$. Из определения $O_{\mathbf{s}}$ вытекает, что $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s} \in P^*$. Покажем, что $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s} \in W_{\mathbf{s}}$. Так как Λ — односвязная область, то по теореме Рунге ν-многочлены $\mathbf{r}$ плотны в пространстве $O(\Lambda)^\nu$. Отсюда следует, что функционал $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ можно аппроксимировать в топологии $O(G)^*$ функционалами вида $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где $\mathbf{r}$ — ν-многочлен. Из условия, что P — модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ и $s_1, \ldots, s_\nu \in P^*$ вытекает, что функционалы $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где $\mathbf{r}$ — ν-многочлен, принадлежат $W'_{\mathbf{s}}$. Это означает, что функционал $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ принадлежит $W_{\mathbf{s}}$. Из определения $W_{\mathbf{s}}$ вытекает, что функционал $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ можно аппроксимировать в топологии P^* элементами вида $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где $\mathbf{r}$ — ν-многочлен. Так как в данной ситуации любой ν-многочлен является допустимым, то из непрерывности обратного отображения $u_{\mathbf{s}}^{-1}$ вытекает, что $\mathbf{g}$ можно аппроксимировать в топологии $O_{\mathbf{s}}$ допустимыми ν-многочленами.

Эквивалентность утверждений 2) и 3) следует из леммы 6 и теоремы двойственности. □

Замечание. При доказательстве импликации 1) $\Rightarrow$ 2) мы не использовали условий: P — модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, $s_1, \ldots, s_\nu \in O(G)^*$. Значит, импликация 1) $\Rightarrow$ 2), следовательно, и импликация 1) $\Rightarrow$ 3) остаются справедливыми без этих условий.

4.4. π^*-свертка. Обозначим $O^*_{\mathbf{s}}$ сильное сопряженное к пространству $O_{\mathbf{s}}$. Сопряженный оператор

$$u^*_{\mathbf{s}} : P \to O^*_{\mathbf{s}} |\, f \to \langle \mathbf{s}, (\mathbf{g} \circ \pi)\, f \rangle$$

будем называть *π^*-сверткой* (функции $f \subseteq P$ и ν-функционала $\mathbf{s} \in (O(G)^\nu)^*$). Оператор $u^*_{\mathbf{s}}$ является непрерывным. Значит, множество I решений однородного уравнения π^*-свертки $u^*_{\mathbf{s}} f = 0$, $f \in P$, является замкнутым подпространством P. Обозначим через W аннулятор этого подпространства в пространстве P^*.

Предложение 10. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *ν-многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{s}}$,*

2) $I = I_{\mathbf{s}}$,

3) $W = W_{\mathbf{s}}$.

Доказательство. Прежде всего убедимся в справедливости импликации 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть ν-многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{s}}$. Если $f \in I$, то $\langle u^*_{\mathbf{s}} f, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{s}, (\mathbf{g} \circ \pi)\, f \rangle = 0$ при любом $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{s}}$. Значит, $\langle \mathbf{s}, (\mathbf{r} \circ \pi)\, f \rangle = 0$ для любого ν-многочлена $\mathbf{r} \in O_{\mathbf{s}}$. Отсюда следует, что подпространство I содержится в $\mathbf{C}[\pi^*]$-ядре $J_{\mathbf{s}}$ множества $\{s_1, \ldots, s_\nu\}$ и, значит, содержится в замкнутом $\mathbf{C}[\pi^*]$-ядре $I_{\mathbf{s}}$ множества $\{s_1, \ldots, s_\nu\}$. Обратно. Пусть функция $f \in P$ принадлежит $I_{\mathbf{s}}$, значит, $\langle \mathbf{s}, (\mathbf{r} \circ \pi)\, f \rangle = 0$ для любого ν-многочлена $\mathbf{r} \in O_{\mathbf{s}}$. По предположению любую ν-функцию $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{s}}$ можно аппроксимировать в топологии $O_{\mathbf{s}}$ ν-многочленами $\mathbf{r}$. В силу непрерывности оператора $u_{\mathbf{s}}$ равенство $\langle \mathbf{s}, (\mathbf{g} \circ \pi)\, f \rangle = 0$ будет иметь место для любого $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{s}}$, а это означает, что $f \in I$, значит, $I_{\mathbf{s}} \subseteq I$. Таким образом, $I = I_{\mathbf{s}}$.

Справедливость импликации 2) $\Rightarrow$ 3) вытекает из леммы 6 и следующих соотношений $W = I^0 = I^0_{\mathbf{s}} = W_{\mathbf{s}}$.

Проверим импликацию 3) $\Rightarrow$ 1). Подпространство I совпадает с ядром оператора $u^*_{\mathbf{s}}$. По свойствам сопряженных отображений его аннулятор $W \subseteq P^*$ совпадает с замыканием в P^* полного образа $u_{\mathbf{s}}(O_{\mathbf{s}})$, т. е. с замыканием множества элементов вида $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{s}}$. В силу равенства $W = W_{\mathbf{s}}$ любой элемент из P^* вида $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{f}}$, принадлежит $W_{\mathbf{s}}$ и может быть аппроксимирован в P^* элементами вида $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где $\mathbf{r}$ — ν-многочлен из $O_{\mathbf{s}}$. В силу непрерывности обратного оператора $u_{\mathbf{s}}^{-1}$ в $O_{\mathbf{s}}$ плотны ν-многочлены. □

Библиографический список

1. *Rellich F.* Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen // Math. Ann. 1934. Vol. 110. P. 342–356.

2. *Schwartz L.* Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques // Ann. of Math. (2). 1947. Vol. 48. P. 857–929.

3. *Ткаченко В. А.* Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную // Мат. сб. 1980. Т. 112(154), № 3(7). С. 421–466.

4. *Мерзляков С. Г.* Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования // Мат. заметки. 1983. Т. 33, № 5. С. 701–713.

5. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 6. С. 828–848.

6. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 11. С. 1559–1588.

7. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 12. С. 123–160.

8. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 9. С. 143–160.

9. *Чернышев А. Н.* Спектральный синтез для бесконечного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Труды ФОРА. 2001. № 6. С. 75–87.

10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М. : Мир, 1969.

11. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М. : Мир, 1969.

12. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М. : Мир, 1968.

13. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1979. Т. 43, № 2. С. 309–341.

Projective and Injective Descriptions in the Complex Domain. Duality

A. B. Shishkin

Kuban State University, 119/7, 2, Krasnodarskaya str., 353560, Slavyansk-on-Kuban, Russia, Shishkin-home@mail.ru

Research of a invariant subspaces of a differential operators infinite order in a complex domain generated many issues, related with transition to dual problems. This work devoted overcome these difficulties

Key words: invariant subspaces, spectral synthesis, local description, projective description, injective description, duality.

References

1. Rellich F. Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen. *Math. Ann.*, 1934, vol. 110, pp. 342–356.

2. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques. *Ann. of Math.* (2), 1947, vol. 48, pp. 857–929.

3. Tkachenko V. A. Spectral theory in spaces of analytic functionals for operators generated by multiplication by the independent variable. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 387–427.

4. Merzlyakov S. G., Invariant subspaces of the operator of multiple differentiation. *Mathematical Notes*, 1983, vol. 33, no. 5, pp. 701—713.

5. Shishkin A. B. Spectral synthesis for an operator generated by multiplication by a power of the independent variable. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1992, vol. 73, no. 1, pp. 211–229.

6. Krasichkov-Ternovskii I. F. Spectral synthesis in a complex domain for a differential operator with constant coefficients. I : A duality theorem. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1993, vol. 74, no. 2, pp. 309–335.

7. Shishkin A. B. Spectral synthesis for systems of differential operators with constant coefficients. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 2003, vol. 194, no. 12, pp. 1865–1898.

8. Shishkin A. B. Spectral synthesis for systems of differential operators with constant coefficients. Duality theorem. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1998, vol. 189, no. 9, pp. 1423–1440.

9. Chernyshev A. N. Spectral synthesis for infinitely differential operator with constant coefficients. Duality theorem. *Trudi FORA*, 2001, vol. 6, pp. 75–87 (in Russian).

10. Edwards R. E. *Functional Analysis. Theory and Applications*. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1965.

11. Gunning R. C., Rossi H. *Analytic functions of several*

complex variables. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965, 317 p. (Rus. ed. : Gunning R., Rossi Kh. Analiticheskie funktsii mnogikh kompleksnykh peremennykh. Moscow, Mir, 1969, 395 p.)
12. Hermander L. *An introduction to the theory of functions of several complex variables* (Rus. ed. : Hermander L. Vvedenie v teoriyu funktsii neskol'kikh kompleksnykh peremennykh. Moscow, Mir, 1968, 279 p.)
13. Krasichkov-Ternovskii I. F. Local description of closed ideals and submodules of analytic functions of one variable. II. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1980, vol. 14, no. 2, pp. 289–316.

УДК 517.984

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФЕ-ЕЖЕ

В. А. Юрко

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки во внутренних вершинах и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах. Приведена теорема единственности восстановления потенциалов по заданным спектральным характеристикам, получено конструктивное решение обратной задачи.

Ключевые слова: граф-еж, операторы Штурма–Лиувилля, обратные спектральные задачи.

1. В статье исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов второго порядка на графе-еже, имеющих цикл и произвольное число граничных ребер. При этом рассматриваются обобщенные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Прямые и обратные задачи для дифференциальных операторов на графах (пространственных сетях) часто возникают в естествознании и технике (см. [1–4]). Отметим, что обратные спектральные задачи восстановления дифференциальных операторов *на деревьях* (т. е. на графах без циклов) исследовались в [3–4]. Более сложные задачи на графах с циклом изучались в [5–7] и других работах, но только в весьма частном случае так называемых *стандартных условий склейки*. В частности, задачи на графе-еже рассматривались в [6]. В данной статье рассматриваются операторы Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки (см. определения в п. 2). Этот класс условий склейки встречается в приложениях и порождает новые качественные трудности в исследовании нелинейных коэффициентных обратных задач. Для изучения этого класса обратных задач мы развиваем идеи метода спектральных отображений [8–9]. Кроме того, важную роль в исследовании играет вспомогательная обратная задача для квазипериодических операторов с условиями разрыва во внутренних точках. Основными результатами данной работы являются теорема единственности и конструктивная процедура построения решения обратной задачи для операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки во внутренних вершинах и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах.

2. Рассмотрим компактный граф G в $\mathbf{R^m}$ с множеством ребер $\mathscr{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где e_0 — цикл, $\mathscr{E}' = \{e_1, \dots, e_r\}$ — граничные ребра. Пусть $\{v_1, \dots, v_{r+N}\}$ — множество вершин, где $V = \{v_1, \dots, v_r\}$, $v_k \in e_k$ — граничные вершины, а $U = \{v_{r+1}, \dots, v_{r+N}\}$ — внутренние вершины, $U = \mathscr{E}' \cap e_0$. Цикл e_0 состоит из N частей: $e_0 = e_{r+1} \cup \dots \cup e_{r+N}$, $e_{r+k} = [v_{r+k}, v_{r+k+1}]$, $k = \overline{1, N}$, $v_{r+N+1} := v_{r+1}$. Каждое граничное ребро e_j, $j = \overline{1, r}$ имеет начальную точку в v_j и конечную точку на множестве U. Множество $\mathscr{E}'$ состоит из N групп ребер: $\mathscr{E}' = \mathscr{E}_1 \cup \dots \cup \mathscr{E}_N$, $\mathscr{E}_k \cap e_0 = v_{r+k}$. Пусть r_k — число ребер в $\mathscr{E}_k$; $r = r_1 + \dots + r_N$. Обозначим $m_0 = 1$, $m_k = r_1 + \dots + r_k$, $k = \overline{1, N}$. Тогда $\mathscr{E}_k = \{e_j\}$, $j = \overline{m_{k-1} + 1, m_k}$. Ребро $e_j \in \mathscr{E}_k$ представляет собой отрезок $e_j = [v_j, v_{r+k}]$. Например, граф G с $N = 3$ и $r = 4$ изображен на рис. 1.

© Юрко В. А., 2014