



complex variables. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965, 317 p. (Rus. ed. : Gunning R., Rossi Kh. Analiticheskie funktsii mnogikh kompleksnykh peremennykh. Moscow, Mir, 1969, 395 p.)

12. Hermander L. *An introduction to the theory of functions of several complex variables* (Rus. ed. :

Hermander L. Vvedenie v teoriyu funktsii neskol'kikh kompleksnykh peremennykh. Moscow, Mir, 1968, 279 p.)

13. Krasichkov-Ternovskii I. F. Local description of closed ideals and submodules of analytic functions of one variable. II. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1980, vol. 14, no. 2, pp. 289–316.

УДК 517.984

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФЕ-ЕЖЕ

В. А. Юрко

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки во внутренних вершинах и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах. Приведена теорема единственности восстановления потенциалов по заданным спектральным характеристикам, получено конструктивное решение обратной задачи.

Ключевые слова: граф-еж, операторы Штурма–Лиувилля, обратные спектральные задачи.

1. В статье исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов второго порядка на графе-еже, имеющих цикл и произвольное число граничных ребер. При этом рассматриваются обобщенные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Прямые и обратные задачи для дифференциальных операторов на графах (пространственных сетях) часто возникают в естествознании и технике (см. [1–4]). Отметим, что обратные спектральные задачи восстановления дифференциальных операторов *на деревьях* (т. е. на графах без циклов) исследовались в [3–4]. Более сложные задачи на графах с циклом изучались в [5–7] и других работах, но только в весьма частном случае так называемых *стандартных условий склейки*. В частности, задачи на графе-еже рассматривались в [6]. В данной статье рассматриваются операторы Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки (см. определения в п. 2). Этот класс условий склейки встречается в приложениях и порождает новые качественные трудности в исследовании нелинейных коэффициентных обратных задач. Для изучения этого класса обратных задач мы развиваем идеи метода спектральных отображений [8–9]. Кроме того, важную роль в исследовании играет вспомогательная обратная задача для квазипериодических операторов с условиями разрыва во внутренних точках. Основными результатами данной работы являются теорема единственности и конструктивная процедура построения решения обратной задачи для операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки во внутренних вершинах и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах.

2. Рассмотрим компактный граф G в \mathbf{R}^m с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где e_0 — цикл, $\mathcal{E}' = \{e_1, \dots, e_r\}$ — граничные ребра. Пусть $\{v_1, \dots, v_{r+N}\}$ — множество вершин, где $V = \{v_1, \dots, v_r\}$, $v_k \in e_k$ — граничные вершины, а $U = \{v_{r+1}, \dots, v_{r+N}\}$ — внутренние вершины, $U = \mathcal{E}' \cap e_0$. Цикл e_0 состоит из N частей: $e_0 = e_{r+1} \cup \dots \cup e_{r+N}$, $e_{r+k} = [v_{r+k}, v_{r+k+1}]$, $k = \overline{1, N}$, $v_{r+N+1} := v_{r+1}$. Каждое граничное ребро e_j , $j = \overline{1, r}$ имеет начальную точку в v_j и конечную точку на множестве U . Множество \mathcal{E}' состоит из N групп ребер: $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}'_N$, $\mathcal{E}'_k \cap e_0 = v_{r+k}$. Пусть r_k — число ребер в \mathcal{E}'_k ; $r = r_1 + \dots + r_N$. Обозначим $m_0 = 1$, $m_k = r_1 + \dots + r_k$, $k = \overline{1, N}$. Тогда $\mathcal{E}'_k = \{e_j\}$, $j = \overline{m_{k-1} + 1, m_k}$. Ребро $e_j \in \mathcal{E}'_k$ представляет собой отрезок $e_j = [v_j, v_{r+k}]$. Например, граф G с $N = 3$ и $r = 4$ изображен на рис. 1.

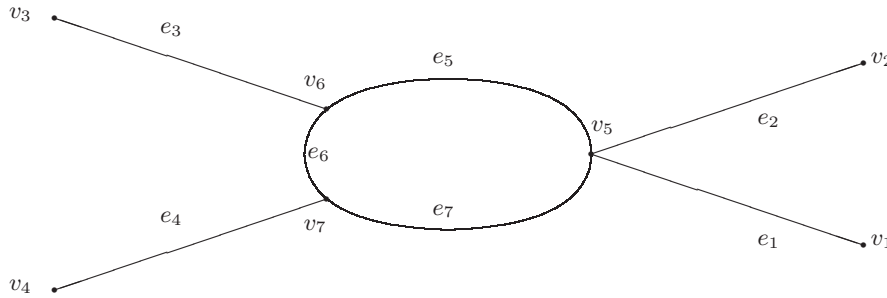


Рис. 1

Пусть T_j — длина ребра e_j , $j = \overline{1, r + N}$, а $T := T_{r+1} + \dots + T_{r+N}$ — длина цикла e_0 . Положим $b_0 = 0$, $b_k = T_{r+1} + \dots + T_{r+k}$, $k = \overline{1, N}$. Тогда $b_N = T$. Каждое ребро e_j , $j = \overline{1, r + N}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, T_j]$, где $x_j = 0$ соответствует вершине v_j . Весь цикл e_0 параметризуется параметром $x \in [0, T]$, где $x = x_{r+j} + b_{j-1}$ при $x_{r+j} \in [0, T_{r+j}]$, $j = \overline{1, N}$.

Интегрируемая функция Y на G имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1, r+N}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, T_j]$ определена на ребре e_j . Функция $y(x)$, $x \in [0, T]$, на цикле e_0 имеет вид $y(x) = y_{r+j}(x_{r+j})$, $j = \overline{1, N}$. Пусть $Q = \{q_j\}_{j=\overline{1, r+N}}$ — интегрируемая вещественная функция на G ; Q называется потенциалом. Функция $q(x)$, $x \in [0, T]$, имеет вид $q(x) = q_{r+j}(x_{r+j})$, $j = \overline{1, N}$. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на G :

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in [0, T_j], \quad j = \overline{1, r + N}, \quad (1)$$

где λ — спектральный параметр, функции y_j , y_j' , $j = \overline{1, r + N}$ — абсолютно непрерывны на $[0, T_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в каждой внутренней вершине $v_{\mu+1}$, $\mu = \overline{r + 1, r + N}$:

$$\left. \begin{aligned} y_{\mu+1}(0) &= \alpha_j y_j(T_j) \quad \text{для всех} \quad e_j \in \mathcal{E}'_{\mu-r+1}, \\ y'_{\mu+1}(0) - h_{\mu+1} y_{\mu+1}(0) &= \sum_{e_j \in \mathcal{E}'_{\mu-r+1}} \beta_j y'_j(T_j), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

причем $y_{r+N+1} := y_{r+1}$, $h_{r+N+1} := h_{r+1}$, $\mathcal{E}_{N+1} := \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_{\mu-r+1} := \mathcal{E}_{\mu-r+1} \cup e_\mu$. Здесь α_j , b_j и h_j — вещественные числа, $\alpha_j \beta_j \neq 0$. Для определенности пусть $\alpha_j \beta_j > 0$. Условия (2) являются обобщениями, так называемых стандартных условий склейки (см. [6]), где $\alpha_j = \beta_j = 1$, $h_j = 0$.

Рассмотрим краевую задачу B_0 на G для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах v_1, \dots, v_r :

$$y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, r}.$$

Через $\Lambda_0 = \{\lambda_{n0}\}_{n \geq 0}$ обозначим собственные значения (с учетом кратностей) задачи B_0 . Рассмотрим также краевые задачи B_{ν_1, \dots, ν_p} , $p = \overline{1, r}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями:

$$y'_k(0) = 0, \quad k = \nu_1, \dots, \nu_p, \quad y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad j \neq \nu_1, \dots, \nu_p.$$

Пусть $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p} := \{\lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_p}\}_{n \geq 0}$ — спектр задачи B_{ν_1, \dots, ν_p} .

Важную роль при решении обратных задач на графе играет вспомогательная квазипериодическая краевая задача на цикле с условиями разрыва во внутренних точках. Параметры этой задачи зависят от параметров задачи B_0 . Точнее, введем вещественные числа γ_j , η_j ($j = \overline{1, N - 1}$), h , α , β по



формулам

$$\left. \begin{aligned} \gamma_j &= \sqrt{\frac{\alpha_{r+j}}{\beta_{r+j}}}, & \eta_j &= \gamma_j h_{r+j+1}, & j &= \overline{1, N-1}, & h &= h_{r+1}, \\ \alpha &= \alpha_{r+N} \prod_{j=1}^{N-1} \gamma_j \prod_{j=1}^{N-1} \beta_{r+j}, & \beta &= \prod_{j=1}^{N-1} \gamma_j \prod_{j=1}^N \beta_{r+j}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ясно, что $\alpha\beta > 0$, $\gamma_j > 0$, $j = \overline{1, N-1}$. Используя эти параметры, рассмотрим краевую задачу B на цикле e_0 :

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, T), \quad (4)$$

$$y(0) = \alpha y(T), \quad y'(0) - h y(0) = \beta y'(T), \quad (5)$$

$$y(b_j + 0) = \gamma_j y(b_j - 0), \quad y'(b_j + 0) = \gamma_j^{-1} y'(b_j - 0) + \eta_j y(b_j - 0), \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (6)$$

Пусть $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ — решения уравнения (4), удовлетворяющие условиям разрыва (6) и начальным условиям $S(0, \lambda) = C'(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = C(0, \lambda) = 1$. Положим $\varphi(x, \lambda) = C(x, \lambda) + hS(x, \lambda)$. Собственные значения $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ задачи B совпадают с нулями характеристической функции:

$$a(\lambda) = \alpha\varphi(T, \lambda) + \beta S'(T, \lambda) - (1 + \alpha\beta). \quad (7)$$

Обозначим $d(\lambda) := S(T, \lambda)$, $Q(\lambda) = \alpha\varphi(T, \lambda) - \beta S'(T, \lambda)$. Все нули $\{z_n\}_{n \geq 1}$ целой функции $d(\lambda)$ являются простыми, т.е. $\dot{d}(z_n) \neq 0$, где $\dot{d}(\lambda) := \frac{d}{d\lambda} d(\lambda)$. Положим $M_n = -d_1(z_n) \cdot \dot{d}(z_n)$, где $d_1(\lambda) := C(T, \lambda)$. Последовательность $\{M_n\}_{n \geq 1}$ называется последовательностью Вейля. Обозначим $\omega_n = \text{sign } Q(z_n)$, $\Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$.

Выберем и зафиксируем по одному ребру $e_{\xi_i} \in \mathcal{E}_i$ из каждого блока \mathcal{E}_i , $i = \overline{1, N}$, т.е. $m_{i-1} + 1 \leq \xi_i \leq m_i$. Через $\xi := \{k : k = \xi_1, \dots, \xi_N\}$ обозначим множество индексов ξ_i , $i = \overline{1, N}$. Пусть α_j и β_j , $j = \overline{1, r+N}$, известны априори. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. Даны $2^N + r - N$ спектров Λ_j , $j = \overline{0, r}$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$ и Ω , построить потенциал Q на G и $H := [h_j]_{j=\overline{r+1, r+N}}$.

Эта обратная задача является обобщением классических обратных задач для операторов Штурма-Лиувилля на интервале и на графах.

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с q рассмотрим потенциал \tilde{q} . Условимся, что если некоторый символ a обозначает объект, относящийся к q , то \tilde{a} будет обозначать аналогичный объект, относящийся к \tilde{q} .

Теорема 1. Если $\Lambda_j = \tilde{\Lambda}_j$, $j = \overline{0, r}$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$, $\Omega = \tilde{\Omega}$, то $Q = \tilde{Q}$ и $H = \tilde{H}$.

Эта теорема будет доказана в п. 4. Мы также дадим там конструктивную процедуру решения обратной задачи 1. В п. 3 мы изучим свойства спектральных характеристик и приведем вспомогательные утверждения.

3. Пусть $S_j(x_j, \lambda)$, $C_j(x_j, \lambda)$, $j = \overline{1, r+N}$, $x_j \in [0, T_j]$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях:

$$S_j(0, \lambda) = C'_j(0, \lambda) = 0, \quad S'_j(0, \lambda) = C_j(0, \lambda) = 1. \quad (8)$$

При каждом $x_j \in [0, T_j]$ функции $S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $j = \overline{1, r+N}$, $\nu = 0, 1$ являются целыми по λ порядка $1/2$.

Теорема 2. При $k = \overline{1, N-1}$, $\nu = 0, 1$ справедливы соотношения

$$S^{(\nu)}(b_{k+1} - 0, \lambda) = \gamma_k S(b_k - 0, \lambda) C_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda) + \gamma_k^{-1} S'(b_k - 0, \lambda) S_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda) +$$



$$+\eta_k S(b_k - 0, \lambda) S_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda), \tag{9}$$

$$C^{(\nu)}(b_{k+1} - 0, \lambda) = \gamma_k C(b_k - 0, \lambda) C_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda) + \gamma_k^{-1} C'(b_k - 0, \lambda) S_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda) + \eta_k C(b_k - 0, \lambda) S_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda). \tag{10}$$

В самом деле, зафиксируем $k = \overline{1, N-1}$. Let $x \in [b_k, b_{k+1}]$, т.е. $x = x_{r+k+1} + b_k$, $x_{r+k+1} \in [0, T_{r+k+1}]$. Используя фундаментальную систему решений $S_{r+k+1}(x_{r+k+1}, \lambda)$, $C_{r+k+1}(x_{r+k+1}, \lambda)$, на e_{r+k+1} , получаем:

$$S^{(\nu)}(x, \lambda) = A(\lambda) C_{r+k+1}^{(\nu)}(x_{r+k+1}, \lambda) + B(\lambda) S_{r+k+1}^{(\nu)}(x_{r+k+1}, \lambda), \quad \nu = 0, 1.$$

Учитывая условия (8) при $j = r + k + 1$, находим коэффициенты $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ и приходим к (9). Соотношение (10) доказывается аналогично.

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\tau := \text{Im } \rho \geq 0$, $\Pi := \{\rho : \tau \geq 0\}$, $\Pi_\delta := \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}$, $\delta \in (0, \pi/2)$. Следующая теорема описывает асимптотическое поведение $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ на каждом интервале $x \in (b_j, b_{j+1})$ (см. [10]).

Теорема 3. *Фиксируем $j = \overline{1, N-1}$. При $x \in (b_j, b_{j+1})$, $\nu = 0, 1$, $m = 1, 2$, $|\rho| \rightarrow \infty$ имеем:*

$$S^{(\nu)}(x, \lambda) = \left(\prod_{k=1}^j \xi_k^+ \right) \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left(\frac{\sin \rho x}{\rho} + \sum_{k=1}^j \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq j} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\xi_{\mu_i}^-}{\xi_{\mu_i}^+} \right) \frac{\sin(\rho \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x))}{\rho} \right) + O(\rho^{\nu+m-3} e^{\tau x}),$$

$$C^{(\nu)}(x, \lambda) = \left(\prod_{k=1}^j \xi_k^+ \right) \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left(\cos \rho x + \sum_{k=1}^j \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq j} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\xi_{\mu_i}^-}{\xi_{\mu_i}^+} \right) \cos(\rho \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x)) \right) + O(\rho^{\nu+m-3} e^{\tau x}),$$

где

$$\xi_j^\pm := \frac{\gamma_j + \gamma_j^{-1}}{2}, \quad \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x) := 2 \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} b_{\mu_i} + (-1)^k x.$$

Используя теорему 1, получаем при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \Pi_\delta$:

$$a(\lambda) = \frac{(\alpha + \beta)\xi}{2} e^{-i\rho T} [1], \quad d(\lambda) = -\frac{\xi}{2i\rho} e^{-i\rho T} [1], \quad \xi := \prod_{j=1}^{N-1} \xi_j^+. \tag{11}$$

Кроме того,

$$a(\lambda) = O(e^{\tau T}), \quad d(\lambda) = O(\rho^{-1} e^{\tau T}), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \Pi. \tag{12}$$

Фиксируем $k = \overline{1, r}$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{1, r+N}}$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее (2) и краевым условиям:

$$\Phi_{kj}(0, \lambda) = \delta_{jk}, \quad j = \overline{1, r}, \tag{13}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Обозначим $M_k(\lambda) := \Phi'_{kk}(0, \lambda)$, $k = \overline{1, r}$. Функция $M_k(\lambda)$ называется *функцией Вейля* относительно граничной вершины v_k . Положим $M_{kj}^1(\lambda) := \Phi_{kj}(0, \lambda)$, $M_{kj}^0(\lambda) := \Phi'_{kj}(0, \lambda)$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j, \lambda) = M_{kj}^1(\lambda) C_j(x_j, \lambda) + M_{kj}^0(\lambda) S_j(x_j, \lambda), \quad x_j \in [0, T_j], \quad j = \overline{1, r+N}, \quad k = \overline{1, r}. \tag{14}$$

В частности, $M_{kk}^1(\lambda) = 1$, $M_{kk}^0(\lambda) = M_k(\lambda)$. Подставляя (14) в (2) и (13), получаем линейную алгебраическую систему D_k относительно $M_{kj}^\nu(\lambda)$, $\nu = 0, 1$, $j = \overline{1, r+N}$. Определитель $\Delta_0(\lambda)$ системы D_k не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = \sigma(\lambda) \left(a_0(\lambda) + \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq N} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda) \prod_{i=1}^k \left(\sum_{e_j \in \mathcal{E}_{\mu_i}} \Omega_j(\lambda) \right) \right), \tag{15}$$



где

$$\sigma(\lambda) = \prod_{j=1}^r (\alpha_j S_j(T_j, \lambda)), \quad \Omega_j(\lambda) = \frac{\beta_j S_j'(T_j, \lambda)}{\alpha_j S_j(T_j, \lambda)}, \quad (16)$$

$$a_0(\lambda) = a(\lambda), \quad a_1(\lambda) = \alpha d(\lambda). \quad (17)$$

Отметим, что коэффициенты $a_0(\lambda)$ и $a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda)$ в (17) зависят только от $S_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ и $C_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ при $j = \overline{r+1, r+N}$, и (17) следует из теоремы 2. Нам не потребуются конкретных формул для остальных коэффициентов $a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda)$. Функция $\Delta_0(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи B_0 . Функция $\Delta_0(\lambda)$ называется характеристической функцией для B_0 . Пусть $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$, $p = \overline{1, r}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$ получаются из $\Delta_0(\lambda)$ заменой $S_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ на $C_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ при $j = \nu_1, \dots, \nu_p$, $\nu = 0, 1$. Точнее,

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) &= \sigma_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) \left(a_0(\lambda) + \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq N} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda) \times \right. \\ &\times \left. \prod_{i=1}^k \left(\sum_{e_j \in \mathcal{E}_{\mu_i}, j \neq \nu_1, \dots, \nu_p} \Omega_j(\lambda) + \sum_{e_j \in \mathcal{E}_{\mu_i}, j = \nu_1, \dots, \nu_p} \Omega_j^0(\lambda) \right) \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\sigma_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) = \prod_{j=1, j \neq \nu_1, \dots, \nu_p}^r (\alpha_j S_j(T_j, \lambda)) \prod_{j=\nu_1, \dots, \nu_p} (\alpha_j C_j(T_j, \lambda)), \quad \Omega_j^0(\lambda) = \frac{\beta_j C_j'(T_j, \lambda)}{\alpha_j C_j(T_j, \lambda)}. \quad (19)$$

Функция $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи B_{ν_1, \dots, ν_p} . Функция $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$ называется характеристической функцией для B_{ν_1, \dots, ν_p} .

Решая алгебраическую систему D_k по формулам Крамера, получаем $M_{kj}^s(\lambda) = \Delta_{kj}^s(\lambda)/\Delta_0(\lambda)$, $s = 0, 1$, $j = \overline{1, r+N}$, где определитель $\Delta_{kj}^s(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой столбца при $M_{kj}^s(\lambda)$ на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}, \quad k = \overline{1, r}. \quad (20)$$

Равномерно по $x_j \in [0, T_j]$ имеем (см. [8]):

$$S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2i\rho} \left((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] - (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1] \right), \quad \rho \in \Pi, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (21)$$

$$C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2} \left((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] + (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1] \right), \quad \rho \in \Pi, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Кроме того, при каждом фиксированном $x_k \in [0, T_k]$:

$$\Phi_{kk}^{(\nu)}(x_k, \lambda) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_k)[1], \quad \rho \in \Pi_\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty.$$

В частности, $M_k(\lambda) = (i\rho)[1]$, $\rho \in \Pi_\delta$, $|\rho| \rightarrow \infty$.

Используя (15), (21), (22), (11) и (12), известным методом (см., например, [9]) получаем следующие свойства характеристической функции $\Delta_0(\lambda)$ и собственных значений Λ_0 краевой задачи B_0 .

1. При $\rho \in \Pi$, $|\rho| \rightarrow \infty$,

$$\Delta_0(\lambda) = O\left(|\rho|^{-r} \exp\left(\tau \sum_{j=1}^{r+N} T_j\right)\right).$$

2. Существуют $h > 0$, $C_h > 0$, такие, что

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C_h |\rho|^{-r} \exp\left(\tau \sum_{j=1}^{r+N} T_j\right)$$



при $\tau \geq h$. Следовательно, собственные значения $\lambda_{n0} = \rho_{n0}^2$ лежат в области $0 \leq \tau < h$.

3. При $n \rightarrow \infty$

$$\rho_{n0} = \rho_{n0}^0 + O\left(\frac{1}{\rho_{n0}^0}\right),$$

где $\lambda_{n0}^0 = (\rho_{n0}^0)^2$ – собственные значения краевой задачи B_0 с $Q = 0$ и $H = 0$.

Характеристические функции $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$ имеют аналогичные свойства. В частности, при $\rho \in \Pi$, $|\rho| \rightarrow \infty$, имеем:

$$\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) = O\left(|\rho|^{p-r} \exp\left(\tau \sum_{j=1}^{r+N} T_j\right)\right).$$

Используя свойства характеристических функций и теорему Адамара, получаем, что задание спектра Λ_0 однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_0(\lambda)$, т.е. если $\Lambda_0 = \tilde{\Lambda}_0$, то $\Delta_0(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_0(\lambda)$. Аналогично, если $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, то $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$. Характеристические функции могут быть построены с помощью соответствующих бесконечных произведений (подробнее см. [8]).

4. В этом параграфе мы получим конструктивную процедуру решения обратной задачи 1 и докажем его единственность.

Фиксируем $k = \overline{1, r}$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу IP(k) на ребре e_k .

IP(k). Даны два спектра Λ_0 и Λ_k , построить $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$.

Теорема 4. Фиксируем $k = \overline{1, r}$. Задание двух спектров Λ_0 и Λ_k однозначно определяет потенциал q_k на ребре e_k .

Решение задачи IP(k) может быть получено методом спектральных отображений [8–9].

Теперь изучим следующую вспомогательную обратную задачу IP(0) на цикле e_0 . Рассмотрим краевую задачу B вида (4)–(6), где параметры задачи B_0 определяются из (3), причем α, β известны.

IP(0). Даны $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ и Ω , построить $q(x)$, $x \in [0, T]$, h, γ_j и η_j , $j = \overline{1, N-1}$.

Эта обратная задача решена в [10], где получено следующее утверждение.

Теорема 5. Задание $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ и Ω однозначно определяет $q(x)$, h, γ_j и η_j , $j = \overline{1, N-1}$. Решение задачи IP(0) может быть найдено по следующему алгоритму.

Алгоритм 1.

1. Строим $D(\lambda) = a(\lambda) + (1 + \alpha\beta)$.

2. Находим нули $\{z_n\}_{n \geq 1}$ целой функции $d(\lambda)$.

3. Вычисляем $Q(z_n)$ по формуле $Q(z_n) = \omega_n \sqrt{D^2(z_n) - 4\alpha\beta}$.

4. Строим $d_1(z_n) = (D(z_n) + Q(z_n))/(2\alpha)$.

5. Вычисляем последовательность Вейля $\{M_n\}_{n \geq 1}$ по формуле $M_n = -d_1(z_n)/\dot{d}(z_n)$.

6. По данным $\{z_n, M_n\}_{n \geq 1}$ строим $q(x), \gamma_j, \eta_j$, $j = \overline{1, N-1}$, решая разрывную обратную задачу (см. [11]).

7. Находим $S(T, \lambda)$, $S'(T, \lambda)$ и $C(T, \lambda)$.

8. Вычисляем h , используя (7).

Перейдем к решению обратной задачи 1. Сначала дадим доказательство теоремы 1. Пусть $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0, r}$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$ и $\Omega = \tilde{\Omega}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_k(\lambda) &\equiv \tilde{\Delta}_k(\lambda), & k &= \overline{0, r}, \\ \Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) &\equiv \tilde{\Delta}_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda), & p &= \overline{2, N}, & 1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r, & \nu_j \in \xi. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу (3) имеем $\gamma_j = \tilde{\gamma}_j$, $j = \overline{1, N-1}$, $\alpha = \tilde{\alpha}$, $\beta = \tilde{\beta}$. Используя теорему 4, получаем $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, T_k]$, и, следовательно,

$$C_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{C}_k(x_k, \lambda), \quad S_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{S}_k(x_k, \lambda), \quad k = \overline{1, r}. \quad (23)$$



В силу (16), (19) и (23) имеем:

$$\sigma(\lambda) \equiv \tilde{\sigma}(\lambda), \quad \sigma_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) \equiv \tilde{\sigma}_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda), \quad \Omega_j(\lambda) \equiv \tilde{\Omega}_j(\lambda), \quad \Omega_j^0(\lambda) \equiv \tilde{\Omega}_j^0(\lambda), \quad j = \overline{1, r}.$$

Используя (15) и (18), получаем, в частности, $a_0(\lambda) = \tilde{a}(\lambda)$, $a_1(\lambda) = \tilde{a}_1(\lambda)$. С учетом (17) это дает

$$a(\lambda) = \tilde{a}(\lambda), \quad d(\lambda) = \tilde{d}(\lambda).$$

Из теоремы 5 следует, что $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п. в. на $[0, T_k]$, $k = \overline{r+1, r+N}$, $h = \tilde{h}$, $\eta_j = \tilde{\eta}_j$, $j = \overline{1, N-1}$. Учитывая (3), получаем $H = \tilde{H}$. Теорема 1 доказана.

Решение обратной задачи 1 может быть найдено по следующему алгоритму.

Алгоритм 2. Даны Λ_k , $k = \overline{0, r}$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$, Ω .

1. Строим $\Delta_k(\lambda)$ и $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$.
2. Вычисляем γ_j , $j = \overline{1, N-1}$, α и β , используя (3).
3. При каждом $k = \overline{1, r}$ решаем обратную задачу IP(k) и находим $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$.
4. Для $k = \overline{1, r}$ строим $C_k(x_k, \lambda)$ и $S_k(x_k, \lambda)$, $x_k \in [0, T_k]$.
5. Вычисляем $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$, используя (15), (17) и (18).
6. По $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ и Ω строим $q_k(x_k)$, $[0, T_k]$, $k = \overline{r+1, r+N}$, h и η_j , $j = \overline{1, N-1}$.
7. Используя (3), строим H .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00134).

Библиографический список

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.
2. Langese J. E., Leugering G., Schmidt J. P. G. Modelling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures. Boston, Birkhäuser, 1994.
3. Belishev M. I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 647–672.
4. Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.
5. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators on graphs with a cycle // Operators and Matrices. 2008. Vol. 2, № 4. С. 543–553.
6. Юрко В. А. Обратная задача для операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 3. С. 459–471.
7. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators on bush-type graphs // Inverse Problems. 2009. Vol. 25, № 10, 105008. 14 p.
8. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
9. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
10. Yurko V. A. Quasi-periodic boundary value problems with discontinuity conditions inside the interval // Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, SM–DU–767. Universität Duisburg–Essen, 2013. P. 1–7.
11. Yurko V. A. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems // Integral Transforms and Special Functions. 2000. Vol. 10, № 2. P. 141–164.

On an Inverse Problem for Differential Operators on Hedgehog-Type Graphs

V. A. Yurko

Saratov State University, 83, Astrahanskaya str., 410012, Saratov, Russia, YurkoVA@info.sgu.ru

An inverse spectral problem is studied for Sturm–Liouville differential operators on hedgehog-type graphs with generalized matching conditions in the interior vertices and with Dirichlet boundary conditions in the boundary vertices. A uniqueness theorem of recovering potentials from given spectral characteristics is provided, and a constructive solution for the inverse problem is obtained.

Key words: hedgehog-type graphs, Sturm–Liouville operators, inverse spectral problems.



References

1. Pokornyj Ju. V., Penkin O. M., Prjadiev V. L., Borovskih A. V., Lazarev K. P., Shabrov S. A. *Differencial'nye uravneniya na geometricheskikh grafah* [Differential equations on the geometric graphs]. Moscow, Fizmatlit, 2004 (in Russian).
2. Langese J. E., Leugering G., Schmidt J. P. G. *Modelling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*. Boston, Birkhäuser, 1994. DOI : 10.1007/978-1-4612-0273-8.
3. Belishev M. I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method. *Inverse Problems*, 2004, vol. 20, pp. 647–672. DOI: 10.1088/0266-5611/20/3/002.
4. Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs. *Inverse Problems*, 2005, vol. 21, pp. 1075–1086. DOI : 10.1088/0266-5611/21/3/017.
5. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators on graphs with a cycle. *Operators and Matrices*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 543–553. DOI: 10.7153/oam-02-34.
6. Yurko V. A. Inverse problem for Sturm–Liouville operators on hedgehog-type graphs. *Math. Notes*, 2011, vol. 89, no. 3, pp. 438–449. DOI : 10.1134/S000143461103014X.
7. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators on bush-type graphs. *Inverse Problems*, 2009, vol. 25, no. 10, 105008, 14 p. DOI: 10.1088/0266-5611/25/10/105008.
8. Yurko V. A. *Vvedenie v teoriyu obratnykh spektral'nykh zadach* [Introduction to the inverse spectral problems theory]. Moscow, Fizmatlit, 2007 (in Russian).
9. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002.
10. Yurko V. A. Quasi-periodic boundary value problems with discontinuity conditions inside the interval. *Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik*, SM–DU–767, Universität Duisburg–Essen, 2013, pp. 1–7.
11. Yurko V. A. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems. *Integral Transforms and Special Functions*, 2000, vol. 10, no. 2, pp. 141–164. DOI : 10.1080/10652460008819282.