



УДК 531.38, 681.5

ДУАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ И БИКВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ НА ПРИМЕРЕ СТЭНФОРДСКОГО МАНИПУЛЯТОРА. II

Е. И. Ломовцева¹, Ю. Н. Челноков²

¹Аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, LomovtsevaEI@yandex.ru

²Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, chelnokovyun@info.sgu.ru

На примере стэнфордского манипулятора рассматривается методология решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления, приводятся решение обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора с использованием простейшего закона управления и пример численного решения, демонстрирующий эффективность применения бикватернионной теории кинематического управления к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов. Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой задачи кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора рассмотрены в [1].

Ключевые слова: робот-манипулятор, обратная задача кинематики, бикватернион, кватернион, кинематические уравнения, кинематическое управление движением.

ВВЕДЕНИЕ

Обратная задача кинематики робота-манипулятора заключается в определении обобщенных координат робота-манипулятора по известному угловому и линейному местоположению схвата манипулятора. Обратные задачи кинематики роботов-манипуляторов сводятся к решению алгебраических систем, состоящих из шести трансцендентных уравнений. Эти системы имеют сложную структуру и в большинстве случаев не решаются аналитически, а при их численном решении возникают значительные трудности, связанные с плохой сходимостью, а также с неоднозначностью решения. Поэтому при проектировании многих существующих роботов-манипуляторов их кинематические схемы выбирались такими, чтобы обратные задачи кинематики решались аналитически. Такой выбор кинематических схем не оптимален с функциональной точки зрения. Поэтому поиск эффективных методов решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов продолжает оставаться актуальным.

В статье развивается новый метод решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов, предложенный в [2]. Он основывается на использовании бикватернионной кинематической теории управления движением свободного твердого тела по принципу обратной связи и заключается в решении задачи Коши для дифференциальных кинематических уравнений движения робота-манипулятора. При этом содержащиеся в этих уравнениях векторы абсолютных линейной и угловой скоростей схвата робота-манипулятора рассматриваются как управления и формируются по принципу обратной связи в виде некоторых функций обобщенных координат таким образом, чтобы любое выбранное (программное) положение схвата робота-манипулятора было асимптотически устойчивым в целом. Тогда любое частное решение дифференциальных кинематических уравнений будет стремиться асимптотически устойчивым образом к требуемой точке пространства обобщенных координат, отвечающей заданному положению схвата робота-манипулятора. Поэтому в результате решения задачи Коши для любых заданных начальных значений обобщенных координат робота-манипулятора из их рабочих диапазонов его обобщенные координаты примут в конечный момент времени значения, отвечающие (с заданной степенью точности) требуемому положению схвата робота-манипулятора, и, следовательно, обратная задача кинематики будет решена.

Достоинства используемого метода: единственность решения (если оно существует) для выбранного закона кинематического управления и заданного начального состояния манипулятора, высокая точность решения и высокое быстродействие, а также то, что этот метод, в отличие от других известных, является неитерационным.



1. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ СТЭНФОРДСКОГО МАНИПУЛЯТОРА

Введем в рассмотрение следующие системы координат: XYZ — основная система координат, связанная с основанием манипулятора; $X_6Y_6Z_6$ — система координат, жестко связанная с выходным звеном манипулятора (с началом в некоторой выбранной точке звена O_6); $X^{np}Y^{np}Z^{np}$ — опорная (программная) система координат, задающая требуемое конечное положение схвата робота-манипулятора. В качестве шести обобщенных координат выступают углы относительных поворотов звеньев φ_i ($i = 1, 2, 4, 5, 6$) и переменная d_3 , характеризующая линейное перемещение 3-го звена относительно 2-го [3]. Обозначим обобщенные координаты манипулятора через q_i :

$$q_i = \varphi_i, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6; \quad q_3 = d_3.$$

Взаимное положение введенных систем координат зададим нормированными бикватернионами $\mathbf{N} = \nu + s\nu^0$, $\mathbf{M} = \mu + s\mu^0$ (или $\mathbf{M}^* = \mu^* + s\mu^{0*}$), $\mathbf{\Lambda} = \lambda + s\lambda^0$, конечных перемещений в соответствии со схемой перемещений

$$\begin{aligned} XYZ &\xrightarrow{\mathbf{N}} X^{np}Y^{np}Z^{np} \xrightarrow{\mathbf{M}(\mathbf{M}^*)} X_6Y_6Z_6, & XYZ &\xrightarrow{\mathbf{\Lambda}} X_6Y_6Z_6 \\ \mathbf{\Lambda} &= \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i}_1 + \Lambda_2\mathbf{i}_2 + \Lambda_3\mathbf{i}_3 = \lambda + s\lambda^0, \\ \mathbf{N} &= N_0 + N_1\mathbf{i}_1 + N_2\mathbf{i}_2 + N_3\mathbf{i}_3 = \nu + s\nu^0, \\ \mathbf{M} &= M_0 + M_1\mathbf{i}_1 + M_2\mathbf{i}_2 + M_3\mathbf{i}_3 = \mu + s\mu^0, \\ \lambda &= \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3, & \lambda^0 &= \lambda_0^0 + \lambda_1^0\mathbf{i}_1 + \lambda_2^0\mathbf{i}_2 + \lambda_3^0\mathbf{i}_3, \\ \nu &= \nu_0 + \nu_1\mathbf{i}_1 + \nu_2\mathbf{i}_2 + \nu_3\mathbf{i}_3, & \nu^0 &= \nu_0^0 + \nu_1^0\mathbf{i}_1 + \nu_2^0\mathbf{i}_2 + \nu_3^0\mathbf{i}_3, \\ \mu &= \mu_0 + \mu_1\mathbf{i}_1 + \mu_2\mathbf{i}_2 + \mu_3\mathbf{i}_3, & \mu^0 &= \mu_0^0 + \mu_1^0\mathbf{i}_1 + \mu_2^0\mathbf{i}_2 + \mu_3^0\mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона; s — символ (комплексность) Клиффорда, обладающий свойством $s^2 = 0$; $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{N})$ — собственный бикватернион винтового конечного перемещения выходного звена манипулятора $X_6Y_6Z_6$ (программной системы координат) относительно основной системы координат XYZ , являющийся комплексной комбинацией кватерниона $\lambda(\nu)$ поворота выходного звена манипулятора (программной системы координат $X^{np}Y^{np}Z^{np}$) в основной системе координат и кватерниона $\lambda^0(\nu^0)$, характеризующего поступательное перемещение выходного звена (программной системы координат) в этой же системе координат; \mathbf{M}^* — собственный бикватернион винтового конечного перемещения выходного звена манипулятора относительно программной системы координат $X^{np}Y^{np}Z^{np}$, являющийся комплексной комбинацией собственного кватерниона μ^* ориентации выходного звена в программной системе координат и кватерниона μ^{0*} , характеризующего поступательное перемещение выходного звена в этой системе координат. Термин «собственный бикватернион» означает, что каждый из бикватернионов $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{N}, \mathbf{M}^*$ определен своими компонентами в своей, преобразуемой этим бикватернионом, системе координат. Обозначим через \mathbf{M} бикватернион винтового конечного перемещения выходного звена манипулятора относительно программной системы координат $X^{np}Y^{np}Z^{np}$, определенный своими компонентами в основной системе координат XYZ .

Бикватернион $\mathbf{\Lambda}$, характеризующий положение выходного звена манипулятора в основной системе координат в соответствии со схемой перемещений (1) и бикватернионной формулой сложения конечных перемещений, определенных в одном базисе (XYZ), может быть представлен в виде [4]

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M} \circ \mathbf{N}, \quad (2)$$

а в соответствии с бикватернионной формулой сложения конечных перемещений, каждый из которых определен в своем преобразуемом базисе, — в виде [4]:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{N} \circ \mathbf{M}^*. \quad (3)$$

Здесь \circ — символ кватернионного умножения.

Подчеркнем, что в формуле (2) фигурирует бикватернион ошибки местоположения \mathbf{M} , характеризующий отклонение действительного положения (углового и линейного) выходного звена манипулятора $X_6Y_6Z_6$ от требуемого программного $X^{np}Y^{np}Z^{np}$, определенный своими компонентами



$M_j = \mu_j + s\mu_j^0$ в основной системе координат XYZ , а в формуле (3) — бикватернион ошибки местоположения \mathbf{M}^* , определенный своими компонентами $M_j^* = \mu_j^* + s\mu_j^{0*}$ в связанном базисе $X_6Y_6Z_6$ (а следовательно, и в программном базисе $X^{pp}Y^{pp}Z^{pp}$).

В соответствии с (2) и (3) бикватернионы \mathbf{M} и \mathbf{M}^* находятся по формулам

$$\mathbf{M} = \Lambda \circ \bar{\mathbf{N}}, \tag{4}$$

$$\mathbf{M}^* = \bar{\mathbf{N}} \circ \Lambda. \tag{5}$$

Здесь и далее верхняя черта означает символ сопряжения (в вышеприведенных формулах все бикватернионы полагаются нормированными, поэтому обратные бикватернионы равны сопряженным).

Бикватернионы Λ_i относительных конечных перемещений звеньев манипулятора, найденные в первой части статьи [1], являются функциями обобщенных координат:

$$\Lambda_i = \Lambda_i(q_i), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \tag{6}$$

Тогда бикватернион Λ , характеризующий конечное положение выходного звена робота-манипулятора в основной системе координат, будет иметь вид

$$\Lambda(q_1, q_2, \dots, q_6) = \Lambda_1(q_1) \circ \Lambda_2(q_2) \circ \Lambda_3(q_3) \circ \Lambda_4(q_4) \circ \Lambda_5(q_5) \circ \Lambda_6(q_6). \tag{7}$$

Обозначим через ω (ω^{pp}) и $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ($\mathbf{v}^{pp} = \frac{d\mathbf{r}^{pp}}{dt}$) векторы мгновенной угловой и линейной скоростей движения выходного звена манипулятора (программной системы координат $X^{pp}Y^{pp}Z^{pp}$) относительно основной системы координат XYZ . Полагаем, что векторы ω^{pp} и \mathbf{v}^{pp} заданы своими проекциями $\omega_i^{pp} = \omega_i^{pp}(t)$ и $v_i^{pp} = v_i^{pp}(t)$ в программной системе координат $X^{pp}Y^{pp}Z^{pp}$, а векторы ω и \mathbf{v} определены своими проекциями ω_i и v_i в связанной системе координат $X_6Y_6Z_6$.

Мотор (ω, \mathbf{v}) мгновенного винта скоростей \mathbf{U} (кинематического винта) выходного звена манипулятора, отнесенный к полюсу O_6 , равен дуальному вектору $\omega + s\mathbf{v}$, а мотор $(\omega^{pp}, \mathbf{v}^{pp})$ мгновенного винта скоростей \mathbf{U}^{pp} (кинематического винта) программной системы координат, отнесенный к полюсу O_{pp} , равен дуальному вектору $\omega^{pp} + s\mathbf{v}^{pp}$.

Под задачей управления движением манипулятора будем понимать задачу приведения связанной с выходным звеном манипулятора системы координат $X_6Y_6Z_6$ к системе координат $X_{pp}Y_{pp}Z_{pp}$, движущейся с программным (заданным) мгновенным винтом скоростей $\mathbf{U}^{pp}(t)$ по программной траектории $N = N(t)$. Рассматриваем кинематическую постановку задачи управления: полагаем, что управление движением осуществляется за счет сообщения выходному звену мгновенного винта скоростей \mathbf{U} .

При такой постановке задачи управления движением манипулятора в качестве математической модели движения принимаются кинематические уравнения движения стэнфордского манипулятора. Эти уравнения были найдены в первой части статьи и имеют вид матричного нелинейного дифференциального уравнения:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 & \dot{d}_3 & \dot{\varphi}_4 & \dot{\varphi}_5 & \dot{\varphi}_6 \end{pmatrix}^T = A^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T \tag{8}$$

относительно переменных $\varphi_1, \varphi_2, d_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$. Матрица A является функцией обобщенных координат: $A = A(q_1, q_2, \dots, q_6)$ и приведена в явном виде в [1].

В качестве управлений выступают дуальные ортогональные проекции $U_i = \omega_i + sv_i$ кинематического винта выходного звена на связанные с ним координатные оси. Управления U_i складываются из программных управлений $U_i^{pp}(t)$ и стабилизирующих (корректирующих) управлений δU_i или ΔU_i [2]. Величины $U_i^{pp}(t)$ (программные управления) полагаются заданными дуальными функциями времени. Законы управлений δU_i или ΔU_i строятся с использованием принципа обратной связи, т. е. в виде некоторых функций компонент бикватерниона ошибки местоположения \mathbf{M} или \mathbf{M}^* , таким образом, чтобы выходное звено манипулятора переходило из любого выбранного начального положения в любое заданное конечное асимптотически устойчивым образом, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{M}(t) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty \quad \text{или} \quad \text{условие} \quad \mathbf{M}^*(t) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$



В такой постановке обратная задача кинематики формулируется как задача Коши для системы дифференциальных уравнений (8) при условии, что управления ω_k и v_k обеспечивают асимптотическую устойчивость в целом любого заданного положения выходного звена робота-манипулятора. В результате решения задачи Коши для любых заданных начальных значений обобщенных координат манипулятора из их рабочих диапазонов его обобщенные координаты примут в конечный момент времени значения, отвечающие (с заданной степенью точности) требуемому положению схвата робота-манипулятора, и, следовательно, обратная задача кинематики будет решена.

Величины ω_k и v_k являются компонентами отображения:

$$\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x = \mathbf{U}_z^{\text{np}}(t) + \delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_z^{\text{np}} + \Delta\mathbf{U}_x = \mathbf{M}^{*-1} \circ \mathbf{U}_z^{\text{np}}(t) \circ \mathbf{M}^* + \Delta\mathbf{U}_x$$

кинематического винта \mathbf{U} выходного звена манипулятора на связанные с ним координатные оси. В рассматриваемой обратной задаче программное управление $\mathbf{U}_z^{\text{np}}(t) \equiv 0$, поэтому построение управления

$$\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x = \delta\mathbf{U}_x = \Delta\mathbf{U}_x$$

может быть выполнено в соответствии с теорией построения стабилизирующего управления, предложенной Ю. Н. Челноковым. В случае использования нормированных бикватернионов конечных перемещений простейший закон управления имеет вид [2]

$$\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x = - \left(2 \frac{K_{oc}^*}{M_0^*} \right) \mathbf{M}_{sc}^*, \quad (9)$$

$$\mathbf{M}^* = M_0^* + \mathbf{M}_{sc}^* = \bar{\mathbf{N}} \circ \boldsymbol{\Lambda}(t). \quad (10)$$

Здесь M_0^* и \mathbf{M}_{sc}^* — скалярная и винтовая части собственного бикватерниона ошибки положения выходного звена манипулятора \mathbf{M}^* , определенного своими компонентами M_j^* в системе координат $X_6 Y_6 Z_6$, связанной с выходным звеном манипулятора; $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{const}$ — бикватернион, характеризующий программное (требуемое) положение выходного звена, $\boldsymbol{\Lambda}$ — бикватернион текущего положения схвата манипулятора, который находится через текущие значения обобщенных координат манипулятора, $K_{oc}^* = k + sk_0$ — дуальный коэффициент усиления обратной связи.

В случае использования при построении управлений ненормированных бикватернионов конечных перемещений может быть использован простейший закон управления, имеющий вид [2]

$$\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x = K_{oc} T^{-1} \mathit{screw}(\bar{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \mathbf{N}), \quad (11)$$

где screw — винтовая часть бикватерниона (\cdot), T — тензор (модуль) ненормированного бикватерниона положения выходного звена манипулятора, удовлетворяющий дифференциальному уравнению:

$$2 \frac{dT}{dt} = K_{oc} [\mathit{scal}(\bar{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \mathbf{N}) - T], \quad T(t_0) = 1. \quad (12)$$

Здесь scal — скалярная часть бикватерниона (\cdot).

Подчеркнем, что в соотношениях (9)–(11) и в уравнении (12) фигурирует нормированный бикватернион $\boldsymbol{\Lambda}$ текущего (углового и линейного) положения выходного звена манипулятора, который находится через обобщенные координаты манипулятора по формулам (2), (3), а постоянный нормированный бикватернион \mathbf{N} программной ориентации выходного звена является заданным. Отметим, что если закон управления (9) содержит особую точку в пространстве обобщенных координат, в которой мгновенный эйлеров угол поворота выходного звена относительно его программного положения равен (для текущего момента времени t) π рад, то закон управления (11), (12) является регулярным всюду (не содержащим особых точек).

2. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ

Бикватернион ошибки местоположения можно представить в виде

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{m} + s\mathbf{m}_0 = (m^0 + m^1 \mathbf{i}_1 + m^2 \mathbf{i}_2 + m^3 \mathbf{i}_3) + s(m_0^0 + m_0^1 \mathbf{i}_1 + m_0^2 \mathbf{i}_2 + m_0^3 \mathbf{i}_3) =$$

$$= (m^0 + sm_0^0) + (m^1 + sm_0^1)\mathbf{i}_1 + (m^2 + sm_0^2)\mathbf{i}_2 + (m^3 + sm_0^3)\mathbf{i}_3 = M_0^* + \mathbf{M}_{sc}^*,$$

где скалярная и винтовая части бикватерниона ошибки местоположения имеют вид

$$M_0^* = m^0 + sm_0^0, \tag{13}$$

$$\mathbf{M}_{sc}^* = (m^1 + sm_0^1)\mathbf{i}_1 + (m^2 + sm_0^2)\mathbf{i}_2 + (m^3 + sm_0^3)\mathbf{i}_3. \tag{14}$$

Будем формировать управление движением выходного звена манипулятора по формуле (9). С учетом соотношений (13), (14) закон управления можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_x = & - \left(2 \frac{K_{oc}^*}{M_0^*} \right) \mathbf{M}_{sc}^* = \left(-2 \frac{k}{m^0} - 2s \frac{k_0 m^0 - k m_0^0}{(m^0)^2} \right) (m^1 + sm_0^1)\mathbf{i}_1 + \\ & + \left(-2 \frac{k}{m^0} - 2s \frac{k_0 m^0 - k m_0^0}{(m^0)^2} \right) (m^2 + sm_0^2)\mathbf{i}_2 + \left(-2 \frac{k}{m^0} - 2s \frac{k_0 m^0 - k m_0^0}{(m^0)^2} \right) (m^3 + sm_0^3)\mathbf{i}_3. \end{aligned} \tag{15}$$

Выделяя в (15) главную $\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3$ и моментную $\mathbf{v}_x = v_1 \mathbf{i}_1 + v_2 \mathbf{i}_2 + v_3 \mathbf{i}_3$ части, получим следующие законы формирования требуемых проекций ω_k и v_k угловой и линейной скоростей движения выходного звена манипулятора (управлений)

$$\omega_j = -2 \frac{k m^j}{m^0}, \quad v_j = \frac{-2 k m^0 m_0^j - 2 k_0 m^0 m^j + 2 k m_0^0 m^j}{(m^0)^2}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Алгоритм решения обратной задачи кинематики заключается в численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (8), дополненных соотношениями (16), формулой (5) и бикватернионными соотношениями для нахождения текущего значения бикватерниона Λ положения схвата манипулятора, полученными в [1]. Используемые законы управления ω_k и v_k , построенные по принципу обратной связи, гарантируют асимптотически устойчивый выход схвата робота-манипулятора в требуемое конечное положение, заданное бикватернионом $\mathbf{N} = \Lambda^*$ с требуемой степенью точности. Значения обобщенных координат q_i , соответствующие этому конечному положению схвата, и будут одним из решений обратной задачи манипулятора.

Блок-схема численного решения обратной задачи кинематики приведена на рис. 1. Бикватернион \mathbf{N} находится таким же образом, как и бикватернион Λ для значений обобщенных координат, отвечающих программному положению выходного звена манипулятора

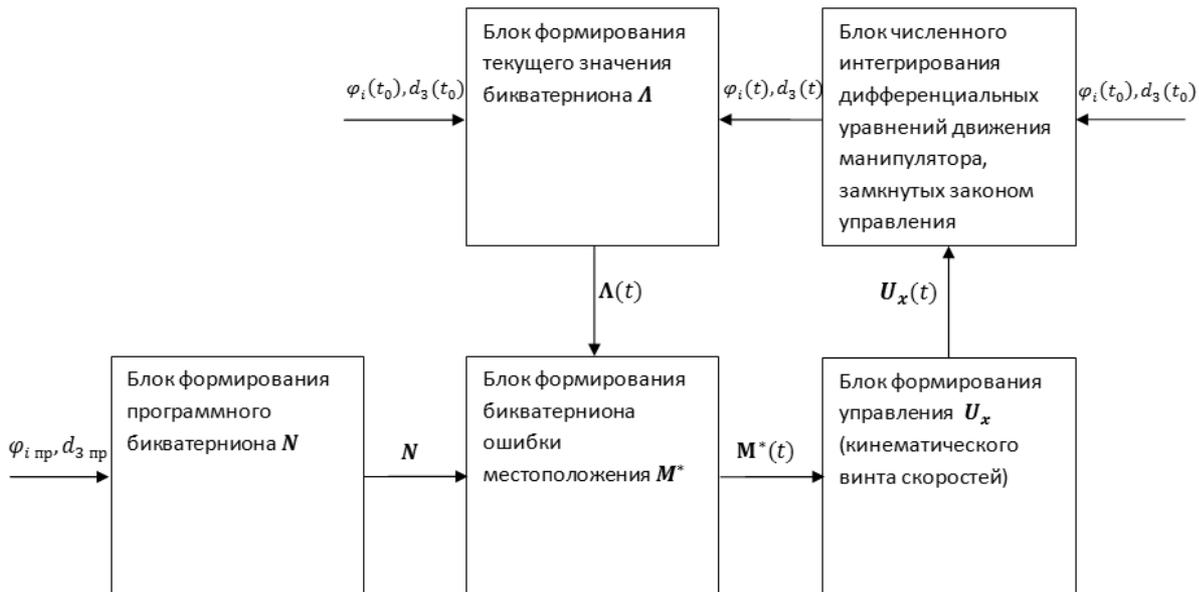


Рис. 1. Блок-схема численного решения обратной задачи кинематики



3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрено численное решение обратной задачи кинематики для заданного местоположения выходного звена, соответствующего следующим численным значениям обобщенных координат робота-манипулятора: $\varphi_1 = 20^\circ$, $\varphi_2 = 40^\circ$, $d_3 = 0.3$ м, $\varphi_4 = -35^\circ$, $\varphi_5 = 60^\circ$, $\varphi_6 = -45^\circ$ или в радианной мере $\varphi_1 = 0.349$, $\varphi_2 = 0.698$, $d_3 = 0.3$ м, $\varphi_4 = 0.611$, $\varphi_5 = 1.047$, $\varphi_6 = -0.785$. Такому положению конечного звена манипулятора соответствует следующее значение бикватерниона ориентации:

$$\mathbf{N} = (0, 181938 - 0, 718084\mathbf{i}_1 + 0, 117974\mathbf{i}_2 + 0, 661314\mathbf{i}_3) + \\ + s(-0, 017347 + 0, 005780\mathbf{i}_1 - 0, 017376\mathbf{i}_2 + 0, 014148\mathbf{i}_3).$$

Начальное положение схвата манипулятора задавалось фазовыми координатами: $\varphi_1 = -30^\circ$, $\varphi_2 = 15^\circ$, $d_3 = 0.1$ м, $\varphi_4 = 36^\circ$, $\varphi_5 = -90^\circ$, $\varphi_6 = 45^\circ$ или в радианной мере $\varphi_1 = -0.524$, $\varphi_2 = 0.261$, $d_3 = 0.1$ м, $\varphi_4 = 0.628$, $\varphi_5 = -1.571$, $\varphi_6 = 0.785$. Точность решения задачи полагалась равной 10^{-6} . Шаг интегрирования задавался равным 0.01 с. Коэффициент усиления обратной связи был выбран равным единице: $K_{oc} = 1$.

Графики изменения обобщенных координат главной и моментной частей бикватерниона ошибки местоположения, главной и моментной частей дуального управления приведены на рис. 2–4.

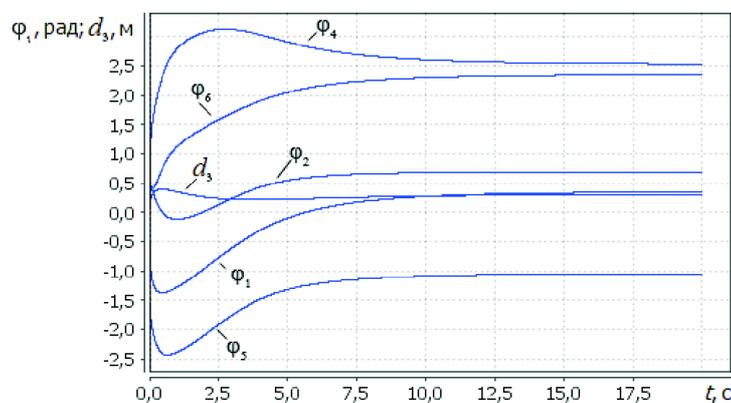


Рис. 2. Графики изменения обобщенных координат

Отметим, что в силу неоднозначности решения обратной задачи кинематики полученные значения фазовых координат могут отличаться от значений, по которым вычислялся бикватернион конечного положения выходного звена.

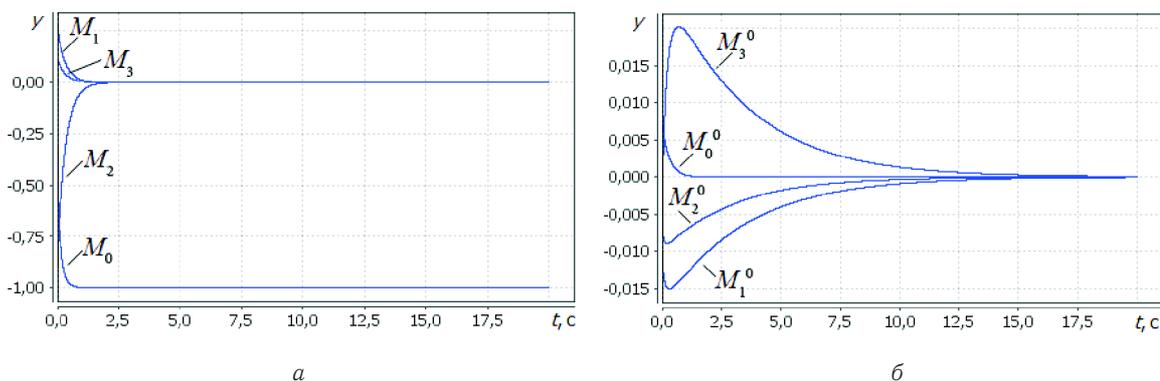


Рис. 3. Графики изменения компонент главной (а) и моментной (б) частей бикватерниона ошибки местоположения

Компоненты бикватерниона ошибки местоположения выходного звена в ходе численного решения приняли следующие значения:

$$M_0 = -1, \quad M_i = 0, \quad M_j^0 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$



что соответствует нашим ожиданиям. Отметим, что одной и той же требуемой ориентации выходного звена манипулятора отвечают два значения компоненты M_0 : $M_0 = \pm 1$. В нашем случае оказалось, что $M_0 = -1$.

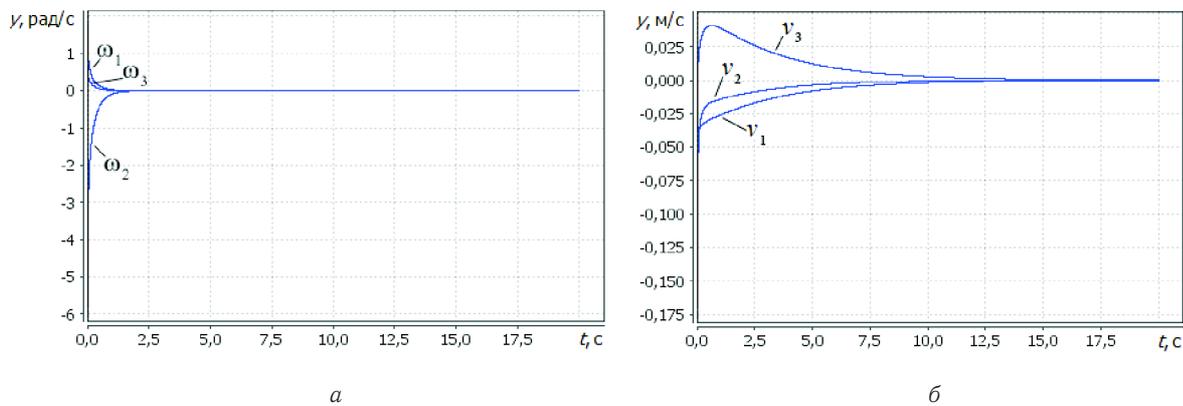


Рис. 4. Графики изменения компонент главной (а) и моментной (б) частей управления

Компоненты управления в процессе управляемого движения асимптотически стремятся к нулю. Также ведут себя компоненты M_k, M_k^0 ($k = 1, 2, 3$).

В результате численного решения был получен следующий бикватернион конечного положения:

$$\Lambda = (0, 181938 - 0, 718084i_1 + 0, 117974i_2 + 0, 661314i_3) + s(-0, 017347 + 0, 005780i_1 - 0, 017376i_2 + 0, 014148i_3).$$

Видно, что главные и моментные части бикватерниона программного положения \mathbf{N} и бикватерниона Λ , полученного в результате численного решения, совпадают с точностью до шестого знака (что соответствует заявленной точности решения).

Требуемая точность решения достигается примерно за 40 секунд, однако в графиках на рис. 2–4 для большей наглядности рассматриваются первые 20 секунд решения задачи, когда компоненты исследуемых величин претерпевают наибольшие изменения. Из графиков видно, что требуемая точность по главной части достигается значительно быстрее, чем по моментной. Это означает, что при решении обратной задачи кинематики с использованием бикватернионной теории кинематического управления следует брать разные коэффициенты усиления обратной связи для главной и моментной частей.

Отметим также, что на начальном этапе интегрирования наблюдаются аperiodические процессы.

Проведенное исследование доказывает эффективность применения бикватернионной теории кинематического управления для решения обратной задачи кинематики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00165).

Библиографический список

1. Ломовцева Е. И., Челноков Ю. Н. Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора. I // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 82–89.
2. Челноков Ю. Н. Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 38–58.
3. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. М.: Мир, 1989. 621 с.
4. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия движения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. 236 с.



Dual Matrix and Biquaternion Methods of Solving Direct and Inverse Kinematics Problems of Manipulators for Example Stanford Robot Arm. II

E. I. Lomovtseva, Yu. N. Chelnokov

Saratov State University, 83, Astrahanskaya str., 410012, Saratov, Russia, LomovtsevaEl@yandex.ru, chelnokovyun@info.sgu.ru

The methodology of solving the inverse kinematics problem of manipulators by using biquaternion theory of kinematics control is shown on the example of Stanford robot arm. Solving of the inverse kinematics problem of Stanford robot arm is performed using the simplest control law. The analysis of numerical solution results is made. The efficacy of applying the theory of kinematics control for solving the inverse kinematics problem of manipulators is proved. Dual matrix and biquaternion methods of solving direct kinematics problem of manipulators were considered in [1].

Key words: robot-manipulator, direct kinematics problem, dual direction cosine matrix, biquaternion, quaternion, kinematic equations.

References

1. Lomovtseva E. I., Chelnokov Yu. N. Dual Matrix and Biquaternion Methods of Solving Direct and Inverse Kinematics Problems of Manipulators, for Example Stanford Robot Arm. I. *Izv. Saratov. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 4. pp. 82–89 (in Russian).
2. Chelnokov Yu. N. Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics. *Mechanics of Solids* [Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela], 2013, vol. 48, no. 1. pp. 31–46.
3. Fu K. S., Gonzalez R. C., Lee C. S. G. *Robotics : Control, Sensing, Vision, and Intelligence*. McGraw-Hill, Inc, 1987, 580 p.
4. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mehaniki tverdogo tela i ih prilozhenija. Geometrija dvizhenija* [Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of a Rigid Body and their Applications. Geometry of Motion.] Saratov, Saratov Univ. Press, 2006, 236 p. (in Russian).

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ОТ НЕРАВНОМЕРНОЙ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

А. А. Мочалин

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., a.mochalin@inbox.ru

На базе полубезмоментной теории В. З. Власова рассматривается задача об устойчивости цилиндрической конструктивно-ортотропной оболочки переменной вдоль образующей толщины при действии осесимметричного изменяющегося вдоль оси оболочки радиального давления. При одном соотношении изменения толщины и давления получено точное решение для нахождения одной из величин в законе изменения давления, при которой происходит потеря устойчивости оболочки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, теория оболочек, устойчивость оболочек, радиальная нагрузка, критическое давление, толщина оболочка, теория упругости.

1. В линейной теории цилиндрических оболочек широкое применение нашла полубезмоментная теория В. З. Власова, учитывающая особенности напряженного состояния оболочек, длина которых находится в пределах $D < l < 8D$, где D — диаметр оболочки, l — её длина. В основе этой теории лежат две гипотезы — статическая и геометрическая, позволяющие существенно упростить уравнения, описывающие состояние устойчивости оболочки. Считается, что удлинение в окружном направлении и углы сдвига в срединной поверхности равны нулю, полагаются равными нулю перерезывающая сила и изгибающий момент в осевом направлении, а также крутящий момент.

На основе гипотез полубезмоментной теории цилиндрических оболочек В. З. Власова [1] рассмотрим конструктивно-ортотропную неоднородную оболочку под действием неравномерной радиальной