

Решением президиума ВАК Министерства образования и науки РФ от 1 января 2007 года журнал включен в число изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени кандидата и доктора наук

## СОДЕРЖАНИЕ

## Научный отдел

## Математика

- Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.** О сходимости средних Рисса разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора на графе-цикле 3
- Зинченко Н.А.** Об одной бинарной аддитивной задаче 9
- Кривобок В.В.** О рядах Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами, удовлетворяющих функциональному уравнению римановского типа 13
- Лукьяненко О.А.** О сходимости кратных рядов Фурье–Вилленкина в пространствах Лоренца 15
- Матвеева Ю.В.** Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных 23
- Митрофанов Ю.И., Фокина Н.П.** Анализ сетей массового обслуживания с динамическим управлением маршрутизацией 27
- Сидоров С.П.** Формосохраняющие линейные поперечники единичных шаров в  $S[0,1]$  33
- Терехин П.А.** Условия базисности систем сжатий и сдвигов функций в пространстве  $L_p[0,1]$  39

## Механика

- Елшин М.А., Гуляев Г.П.** Постановка и решение задачи определения динамики кровотока в крупных артериях по одномерной теории 45
- Каменский А.В.** Моделирование каротидной бифуркации методом конечного элемента 48
- Кузнецова Е.О., Чернов И.А.** Точные решения трансзвуковых уравнений газовой динамики 54
- Ольшанский В.Ю., Бахтин К.Г., Михайлов В.Ю., Нагар Ю.Н., Серебряков А.В.** Математическое моделирование процесса терморасщепления графита 63
- Шабрыкина Н.С.** Моделирование микроциркуляторных процессов: нестационарное течение жидкости в ткани 69
- Шиндяпин Г.П., Матугин А.А.** Анализ режимов рефракции ударной волны с образованием волны разрежения или отраженной ударной волны 74

## Информатика

- Бодров Д.А., Кожитов С.Л., Поляков В.Н.** Задачи интерактивной обработки поисковых запросов в теоретико-множественной постановке 78
- Иванов А.С.** Модель представления продукционных баз знаний на ЭВМ 83

## Хроника

- Дудов С.И., Захаров А.М., Прохоров Д.В., Хромов А.П.**  
Петр Лаврентьевич Ульянов 89

РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ

## Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич

## Заместитель главного редактора

Усанов Дмитрий Александрович

## Ответственный секретарь

Клоков Василий Тихонович

## Члены редакционной коллегии

Аврус Анатолий Ильич  
Белов Владимир Николаевич  
Бучко Ирина Юрьевна  
Вениг Сергей Борисович  
Дыльнов Геннадий Васильевич  
Захаров Андрей Михайлович  
Зимняков Дмитрий Александрович  
Кабанин Вячеслав Кузьмич  
Комкова Галина Николаевна  
Лебедева Ирина Владимировна  
Левин Юрий Иванович  
Мирзаханов Велихан Салманханович  
Монахов Сергей Юрьевич  
Первушов Евгений Михайлович  
Прозоров Валерий Владимирович  
Прохоров Дмитрий Валентинович  
Смирнов Анатолий Константинович  
Сперанский Дмитрий Васильевич  
Федотова Ольга Васильевна  
Худяков Глеб Иванович  
Чумаченко Алексей Николаевич  
Шляхтин Геннадий Викторович

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
СЕРИИ

## Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич

## Заместители главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович

Сперанский Дмитрий Васильевич

## Ответственный секретарь

Сидоров Сергей Петрович

## Члены редакционной коллегии:

Дудов Сергей Иванович  
Кузнецов Валентин Николаевич  
Лукашов Алексей Леонидович  
Митрофанов Юрий Иванович  
Розен Виктор Владимирович  
Салий Вячеслав Николаевич  
Сытник Александр Александрович  
Твердохлебов Владимир Александрович  
Федорова Антонина Гавриловна  
Хромов Август Петрович  
Шиндяпин Георгий Петрович  
Юрко Вячеслав Анатольевич

## Зарегистрировано

в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций  
Свидетельство о регистрации СМИ  
ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года

**ПРАВИЛА  
ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ**

Журнал принимает к публикации общетеоретические, методические, дискуссионные, критические статьи, результаты исследований по всем научным направлениям.

К статье прилагается сопроводительное письмо, внешняя рецензия и сведения об авторах: фамилии, имена и отчества (полностью), рабочий адрес, контактные телефоны, e-mail.

1. Рукописи объемом не более 1 печ. листа, не более 8 рисунков принимаются в редакцию в бумажном и электронном вариантах в 1 экз.:

а) бумажный вариант должен быть напечатан через один интервал шрифтом 14 пунктов. Рисунки выполняются на отдельных листах. Под рисунком указывается его номер, а внизу страницы – Ф.И.О. автора и название статьи. Подрисуночные подписи печатаются на отдельном листе и должны быть самодостаточными;

б) электронный вариант в формате Word представляется на дискете 3,5 или пересылается по электронной почте. Рисунки представляются в виде отдельных файлов в формате PCX, TIFF или GIF.

2. Требования к оформлению текста.

Последовательность предоставления материала: индекс УДК; название статьи, инициалы и фамилии авторов, аннотация (на русском и на английском языках); текст статьи; библиографический список; таблицы; рисунки; подписи к рисункам.

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте.

**Ведущий редактор**  
Бучко Ирина Юрьевна

**Редактор**  
Ишмухаметова Инга Владимировна

**Художник**  
Соколов Дмитрий Валерьевич

**Верстка**  
Багаева Ольга Львовна

**Технический редактор**  
Агальцова Людмила Владимировна

**Корректор**  
Васильева Наталья Юрьевна

**Адрес редакции**  
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
Издательство Саратовского университета

**Тел.:** (845-2) 52-26-89, 52-26-85

**E-mail:** izdat@sgu.ru

Подписано в печать 14.05.07.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 10,92 (11,75)

Уч.-изд. л. 11,9

Тираж 500 экз. Заказ 64.

Отпечатано в типографии  
Издательства Саратовского университета

© Саратовский государственный  
университет, 2007

**CONTENTS****Scientific Part****Mathematic**

**Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P.** On convergence of Riesz Means of the Expansions in Eigenfunctions of a Functional-Differential Operator on a Cycle-Graph 3

**Zinchenko N.A.** On the Binary Additive Problem 9

**Krivobok V.V.** About Dirichle's Rows whith Finite-valued Multiplicative Coefficients, Satisfy the Riman's Type Functional Equation 13

**Lukyanenko O.A.** Convergence of Multiple Vilenkin–Fourier Series in Lorentz Spaces 15

**Matveeva J.V.** Method of Hermite Interpolation by Polynomials of the Third Degree on a Triangle Using Mixed Derivatives 23

**Mitrophanov Y.I., Fokina N.P.** An Analysis of Queueing Networks with Dynamic Routing Control 27

**Sidorov S.P.** Shape-Preserving Linear  $n$ -width of Unit Balls in  $C[0,1]$  33

**Terekhin P.A.** Basis Conditions for Systems of Translates and Dilates of Functions in  $L_p$ -spaces 39

**Mecanics**

**Elshin M.A., Gulyaev J.P.** Statement Formulating and Solution of the Problem of Blood Dynamics in Arterial Systems, Using the One-Dimensional Theory 45

**Kamenskiy A.V.** Finite Element Model of the Carotid Bifurcation 48

**Kuznetsova E.O., Chernov I.A.** Exact Solutions of the Transonic Equations of Gas Dynamics 54

**Olshansky V.Y., Bakhtin K.G., Mikhailov V.Y., Nagar Y.N., Serebrjakov A.V.** Mathematical Simulating Thermal Exfoliation of Graphite 63

**Shabrykina N.S.** Modelling of Microcirculation: Unsteady Interstitial Fluid Flow in Tissue 69

**Shindyapin G.P., Matutin A.A.** The Analysis of Conditions of a Refraction of a Shock Wave with Education of a Wave of Underpressure or the Reflected Shock Wave 74

**Informatics**

**Bodrov D.A., Kozhitov S.L., Polykov V.N.** The Tasks of Interactive Processing of Search Queries in the Set Theory Formalization 78

**Ivanov A.S.** One Model for Representation of Production Knowledge Base 83

**Chronicle**

**Dudov S.I., Zakharov A.M., Prokhorov D.V., Khromov A.P.**  
Petr Lavrentievich Ulianov 89



# МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

## О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ РИССА РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ-ЦИКЛЕ

М.Ш. Бурлуцкая\*, А.П. Хромов\*\*

\* Воронежский государственный университет,  
кафедра математического анализа

\*\* Саратовский государственный университет,  
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики  
E-mail: bums@kma.vsu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

В работе найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости обобщенных средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из трех ребер, образующих цикл.

**On Convergence of Riesz Means of the Expansions in Eigenfunctions of a Functional-Differential Operator on a Cycle-Graph**

M.Sh. Burlutsкая, A.P. Khromov

The paper deals with necessary and sufficient conditions of uniform convergence of generalized Riesz means for the expansions in eigen and associated functions of the 1-st order functional-differential operator on the graph with three ribs forming a cycle.

Пусть  $\Gamma$  — геометрический граф из трех ребер, образующих цикл. Используем векторный подход [1, с. 21], когда каждое ребро графа параметризуется отрезком  $[0, 1]$ , и функция на графе понимается как вектор-функция  $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$  ( $T$  — знак транспонирования), компонента которой  $y_k(x)$ , соответствующая  $k$ -му ребру, есть скалярная функция на отрезке  $[0, 1]$ . В соответствии с таким подходом зададим на  $\Gamma$  следующий оператор:

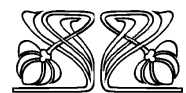
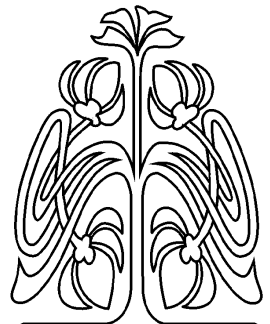
$$(Ly)(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \\ y_3'(x) + p(x)y_3(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T, \quad x \in [0, 1],$$

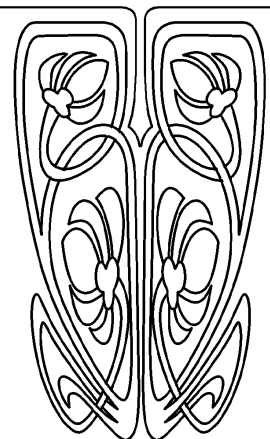
$$y_1(0) = y_3(1), \quad y_2(0) = y_1(1), \quad y_3(0) = y_2(1), \quad (2)$$

где  $\alpha_i^2 < \beta_i^2$ ,  $p_{ij}(x) \in C^1[0, 1]$ . Краевые условия (2) — это условия непрерывности  $y(x)$  во внутренних узлах  $\Gamma$ .

Оператор (1) с общими краевыми условиями  $U(y) = 0$  относится к классу функционально-дифференциальных операторов с операторами отражения, исследование которых получило интенсивное развитие [2]–[12]. В числе прочих изучаются и вопросы о разложении по собственным функциям таких операторов [5], [7]–[12]. Главные части первых двух компонент оператора  $L$  представляют собой линейную комбинацию производных  $y'(x)$  и  $y'(1-x)$ , квадрат которой есть оператор двукратного дифференцирования  $y''(x)$ . Поэтому эти компоненты есть функционально-дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией  $\nu(x) = 1-x$ , представляющие обобщения квадратного корня из  $y''(x)$ . Данные функционально-дифференциальные операторы приводятся к операторам Дирака, и тем самым



**НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ**





мы рассматриваем случай графа-цикла из трех ребер, когда на двух ребрах заданы операторы Дирака, а на одном — обычный дифференциальный оператор первого порядка.

В данной статье получим полное решение вопроса о равномерной сходимости на всем графе  $\Gamma$  обобщенных средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям оператора  $L$ . Подобные результаты для интегральных операторов содержатся, например, в [13] и [14].

**1.** Построим краевую задачу для резольвенты  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$  оператора  $L$  ( $E$  — единичный оператор,  $\lambda$  — спектральный параметр). Пусть  $y(x) = (R_\lambda f)(x)$ , где  $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ ,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$ . Тогда  $y(x)$  есть решение системы

$$\alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) = \lambda y_1(x) + f_1(x), \quad (3)$$

$$\alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) = \lambda y_2(x) + f_2(x), \quad (4)$$

$$y_3'(x) + p(x)y_3(x) = \lambda y_3(x) + f_3(x), \quad (5)$$

подчиненное краевым условиям (2).

Введем в рассмотрение следующую краевую задачу в пространстве вектор-функций размерности 5:

$$Qz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x) + m(x), \quad (6)$$

$$M_0z(0) + M_1z(1) = 0, \quad (7)$$

где  $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2, Q_3)$ ,  $Q_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & -\alpha_k \end{pmatrix}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $Q_3 = (1)$ ,  $P(x) = \text{diag}(P_1(x), P_2(x), P_3(x))$ ,  $P_k(x) = \begin{pmatrix} p_{k1}(x) & p_{k2}(x) \\ p_{k2}(1-x) & p_{k1}(1-x) \end{pmatrix}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $P_3(x) = (p(x))$ ,  $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x), m_5(x))^T$ ,  $m_1(x) = f_1(x)$ ,  $m_2(x) = f_1(1-x)$ ,  $m_3(x) = f_2(x)$ ,  $m_4(x) = f_2(1-x)$ ,  $m_5(x) = f_3(x)$ ;  $M_0$  и  $M_1$  — квадратные  $(5 \times 5)$  матрицы, для которых  $(M_0)_{11} = (M_0)_{32} = (M_0)_{54} = (M_1)_{22} = (M_1)_{41} = 1$ ,  $(M_0)_{33} = (M_0)_{55} = (M_1)_{15} = (M_1)_{25} = (M_1)_{44} = -1$ , а остальные элементы равны нулю.

**Лемма 1.** Если  $\lambda$  таково, что  $R_\lambda$  существует, и  $y = R_\lambda f$ , то  $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x), z_5(x))^T$ , где  $z_1(x) = y_1(x)$ ,  $z_2(x) = y_1(1-x)$ ,  $z_3(x) = y_2(x)$ ,  $z_4(x) = y_2(1-x)$ ,  $z_5(x) = y_3(x)$ , является решением (6)–(7). Обратно, если  $z(x)$  удовлетворяет (6)–(7) и соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение, то  $R_\lambda$  существует, и  $(R_\lambda f)(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ , где  $y_1(x) = z_1(x)$ ,  $y_2(x) = z_3(x)$ ,  $y_3(x) = z_5(x)$ .

**Доказательство.** Пусть  $y = R_\lambda f$ . Тогда  $y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$  удовлетворяет системе (3)–(5). Меняя в (3)–(4)  $x$  на  $1-x$  получим еще два уравнения, образующие вместе с (3)–(5) систему, которая при переходе к функциям  $z_i(x)$  приводится к (6). Далее, так как  $y_1(0) = z_1(0) = z_2(1)$ ,  $y_1(1) = z_1(1) = z_2(0)$ ,  $y_2(0) = z_3(0) = z_4(1)$ ,  $y_2(1) = z_3(1) = z_4(0)$ ,  $y_3(0) = z_5(0)$ ,  $y_3(1) = z_5(1)$ , то краевые условия (2) дают следующие условия для  $z_i(x)$ :  $z_1(0) = z_5(1)$ ,  $z_2(1) = z_5(1)$ ,  $z_2(0) = z_3(0)$ ,  $z_4(1) = z_5(0)$ ,  $z_4(0) = z_5(0)$ , которые и есть (7).

Обратно, пусть  $z(x)$  является решением задачи (6)–(7). Преобразовывая первые четыре уравнения в системе (6) с использованием замены  $x$  на  $1-x$ , получим, что вектор-функция  $(z_2(1-x), z_1(1-x), z_4(1-x), z_3(1-x), z_5(x))^T$  является решением (6)–(7). В силу невырожденности задачи (6)–(7) имеем, в частности, соотношения  $z_2(x) = z_1(1-x)$ ,  $z_4(x) = z_3(1-x)$ , с учетом которых из (6)–(7) получим (3), (4), (5), (2) относительно  $z_1(x)$ ,  $z_3(x)$ ,  $z_5(x)$ . Так как однородная задача для (3)–(5), (2) имеет только нулевое решение, то  $R_\lambda$  существует, и  $(R_\lambda f)(x) = (z_1(x), z_3(x), z_5(x))^T$ .  $\square$

Введем в рассмотрение следующую краевую задачу:

$$u'(x) + \tilde{P}(x)u(x) = \lambda Du(x) + \tilde{m}(x), \quad (8)$$

$$\tilde{M}_0u(0) + \tilde{M}_1u(1) = 0, \quad (9)$$

где  $\tilde{P}(x) = \text{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}P_1(x)B_1, B_2^{-1}Q_2^{-1}P_2(x)B_2, B_3^{-1}Q_3^{-1}P_3(x)B_3)$ ,  $D = \text{diag}(D_1, D_2, D_3)$ ,  $D_k = \text{diag}(i/\sqrt{d_k}, -i/\sqrt{d_k})$ ,  $d_k = \beta_k^2 - \alpha_k^2$ , ( $k = 1, 2$ ),  $D_3 = (1)$ ,  $\tilde{m}(x) = \text{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}, B_2^{-1}Q_2^{-1}, B_3^{-1}Q_3^{-1})m(x)$ ,  $\tilde{M}_0 = M_0B$ ,  $\tilde{M}_1 = M_1B$ ,  $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ ,  $B_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ b_k & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b_k = \beta_k^{-1}[i\sqrt{d_k} + \alpha_k]$ , ( $k = 1, 2$ ),  $B_3 = (1)$ .



Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

**Лемма 2.** Если  $u(x, \lambda)$  — решение краевой задачи (8)–(9), то  $z(x, \lambda) = Bu(x, \lambda)$  есть решение задачи (6)–(7), и наоборот.

**2.** При исследовании асимптотического поведения решения краевой задачи (8)–(9) возникают трудности, связанные с наличием ненулевой матрицы  $\tilde{P}(x)$ . Поэтому далее проводится преобразование системы (8), заменяющее  $\tilde{P}(x)$  на матрицу с элементами  $O(\lambda^{-1})$  [15, с. 48–58].

Пусть  $H_0(x) = \text{diag}(H_{01}(x), H_{02}(x), H_{03}(x))$ , где  $H_{01}(x) = \text{diag}(h_1(x), h_2(x))$ ,  $H_{02}(x) = \text{diag}(h_3(x), h_4(x))$ ,  $H_{03}(x) = (h_5(x))$ ,  $h_i(x) = \exp\left\{-\int_0^x \tilde{p}_{ii}(t) dt\right\}$  и  $\tilde{p}_{ii}(x)$  — диагональные элементы матрицы  $\tilde{P}(x)$ ;  $H_1(x) = \text{diag}(H_{11}(x), H_{12}(x), H_{13}(x))$ , где  $H_{13}(x) \equiv 0$ , а  $H_{1k}(x)$  ( $k = 1, 2$ ) — кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения:

$$H'_{0k}(x) + \tilde{P}_k(x)H_{0k}(x) + (H_{1k}(x)D_k - D_kH_{1k}(x)) = 0,$$

где  $\tilde{P}_k(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}P_k(x)B_k$ . Так как элементы матрицы  $P(x)$  и соответственно  $\tilde{P}(x)$  из  $C^1[0, 1]$ , то элементы  $H_1(x)$  из  $C^1[0, 1]$ , а  $H_0(x)$  из  $C^2[0, 1]$ .

**Теорема 1.** Преобразование  $u(x) = H(x, \lambda)v(x)$ , где  $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ , приводит систему (8)–(9) к виду

$$v'(x) + P(x, \lambda)v(x) = \lambda Dv(x) + m(x, \lambda), \quad (10)$$

$$M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \quad (11)$$

где  $P(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda)[H'_1(x) + \tilde{P}(x)H_1(x)]$ ,  $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)\tilde{m}(x)$ ,  $M_{0\lambda} = M_0BH(0, \lambda)$ ,  $M_{1\lambda} = M_1BH(1, \lambda)$ .

**Доказательство.** Утверждение теоремы получается простой проверкой. Действительно, так как система (8) имеет блочно-диагональный вид, ее можно рассматривать как три системы:

$$u'(x) + \tilde{P}_k(x)u(x) = \lambda D_k u(x) + \tilde{m}(x), \quad k = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где  $\tilde{P}_k(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}P_k(x)B_k$ ,  $\tilde{m}(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}m(x)$ , а  $u(x)$  и  $m(x)$  — векторы из двух компонент для  $k = 1, 2$  и одной компоненты для  $k = 3$  (здесь они имеют новый смысл, отличный от (6) и (8)).

Выполняя в каждой системе (12) преобразование  $u(x) = H_k(x, \lambda)v(x)$ , ( $v(x)$  — скалярная функция для  $k = 3$ , и  $v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T$  для  $k = 1, 2$ ), где  $H_k(x, \lambda) = H_{0k}(x) + \lambda^{-1}H_{1k}(x)$ , получим систему уравнений, которая с помощью указанных выше блочно-диагональных матриц приводится к (10). Краевые условия (11) следуют из (9).  $\square$

**3.** Для того чтобы исследовать решение задачи (10)–(11), рассмотрим сначала краевую задачу

$$w'(x) = \mu \hat{D}w(x) + m(x), \quad (13)$$

$$U(w) = M_{0\lambda}w(0) + M_{1\lambda}w(1) = 0, \quad (14)$$

где  $m = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$ ,  $m_i = m_i(x) \in L[0, 1]$ ,  $\mu = i\lambda/\sqrt{d_1}$ ,  $\hat{D} = \text{diag}(1, -1, d, -d, \omega)$ ,  $d = \sqrt{d_1/d_2} > 0$ ,  $\omega = \sqrt{d_1}/i$ , т. е.  $\lambda D = \mu \hat{D}$ .

Общее решение системы (13) имеет вид

$$w(x, \mu) = V(x, \mu)c + \int_0^1 g(x, t, \mu)m(t) dt,$$

где  $V(x, \mu) = \text{diag}(e^{\mu x}, e^{-\mu x}, e^{\mu dx}, e^{-\mu dx}, e^{\mu \omega x})$ ,  $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^T$  — произвольный вектор,  $g(x, t, \mu) = \text{diag}(g_1(x, t, \mu), g_2(x, t, \mu), g_3(x, t, \mu), g_4(x, t, \mu), g_5(x, t, \mu))$ ,

$$\begin{aligned} g_k(x, t, \mu) &= \varepsilon(x, t)e^{\mu \omega_k(x-t)}, & \text{если } \text{Re } \mu \omega_k \leq 0, \\ g_k(x, t, \mu) &= -\varepsilon(t, x)e^{\mu \omega_k(x-t)}, & \text{если } \text{Re } \mu \omega_k \geq 0, \end{aligned}$$

$\varepsilon(x, t) = 1$ , если  $x \geq t$ ,  $\varepsilon(x, t) = 0$ , если  $x \leq t$ ,  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = -1$ ,  $\omega_3 = d$ ,  $\omega_4 = -d$ ,  $\omega_5 = \omega$ . Подчиняя его краевым условиям (14), получим следующий результат.





**Доказательство.** Если  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  и  $f(x) \in C[0, 1]$ , то

$$\left\| \int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t) dt \right\|_{\infty} = O \left( \|f\|_{\infty} \cdot \left\| \int_0^x |e^{\lambda t}| dt \right\|_{\infty} \right) = O \left( \frac{\|f\|_{\infty}}{|\operatorname{Re} \lambda|} \right). \quad (17)$$

Если  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ , то

$$\left\| \int_x^1 e^{\lambda(x-t)} f(t) dt \right\|_{\infty} = O \left( \|f\|_{\infty} \cdot \left\| \int_0^{1-x} |e^{-\lambda t}| dt \right\|_{\infty} \right) = O \left( \frac{\|f\|_{\infty}}{|\operatorname{Re} \lambda|} \right). \quad (18)$$

Поэтому из (17) и (18) получаем такую оценку

$$\|g_{\mu} m\|_{\infty} = O \left( \left[ \frac{1}{|\operatorname{Re} \mu|} + \frac{1}{|\operatorname{Re} \mu d|} + \frac{1}{|\operatorname{Re} \mu \omega|} \right] \|m\|_{\infty} \right). \quad (19)$$

Так как существует константа  $c > 0$  такая, что  $c \leq \min\{d, \sqrt{d_1}\}$ , то  $|\operatorname{Re} \mu d|^{-1} \leq \frac{1}{c} |\operatorname{Re} \mu|^{-1}$ ,  $|\operatorname{Re} \mu \omega|^{-1} = |\operatorname{Re} \mu \sqrt{d_1}/i|^{-1} = |\operatorname{Im} \mu \sqrt{d_1}|^{-1} \leq \frac{1}{c} |\operatorname{Im} \mu|^{-1}$ . Поэтому из (19) получаем

$$\|g_{\mu} m\|_{\infty} = O \left( \left[ \frac{1}{|\operatorname{Re} \mu|} + \frac{1}{|\operatorname{Im} \mu|} \right] \|m\|_{\infty} \right).$$

Очевидно, что эта оценка справедлива и для  $U(g_{\mu} m)$  и тем самым, по леммам 3 и 5, для  $\|R_{1\mu} m\|_{\infty}$ . Лемма доказана.  $\square$

**4.** Теперь приступим к получению основного результата статьи.

Пусть  $g(\mu, r)$  удовлетворяет следующим требованиям:

- а)  $g(\mu, r)$  непрерывна по  $\mu$  в круге  $|\mu| \leq r$  и аналитична по  $\mu$  в  $|\mu| < r$  при любом  $r > 0$ ;
- б) существует  $C > 0$  такая, что  $|g(\mu, r)| \leq C$  при всех  $r > 0$  и  $|\mu| \leq r$ ;
- в) существуют положительные  $\beta$  и  $h$  такие, что  $g(re^{i\varphi}, r) = O(|\psi|^{\beta})$ , где  $\psi = \varphi$ , при  $|\varphi| \leq h$ ,  $\psi = \varphi - \pi$ , при  $|\varphi - \pi| \leq h$ ,  $\psi = \varphi - \pi/2$ , при  $|\varphi - \pi/2| \leq h$ ,  $\psi = \varphi + \pi/2$ , при  $|\varphi + \pi/2| \leq h$ ;
- г)  $g(\mu, r) \rightarrow 1$ , при  $r \rightarrow \infty$  и фиксированном  $\mu$ .

Примеры таких функций есть в [13].

В качестве обобщенных средних Рисса мы будем брать интегралы:

$$J_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r\sqrt{d_1}} g(\mu, r) R_{\lambda} f(x) d\lambda.$$

**Теорема 2 (формула остаточного члена).** Пусть  $f(x)$  — непрерывная вектор-функция на отрезке  $[0, 1]$ ,  $f_0(x)$  — непрерывно дифференцируемая вектор-функция на отрезке  $[0, 1]$  и удовлетворяющая условиям (2). Тогда, если на окружности  $|\lambda| = r\sqrt{d_1}$  нет собственных значений оператора  $L$ , то

$$\begin{aligned} f(x) - J_r(f, x) &= f(x) - f_0(x) + (1 - g(\mu_0, r))f_0(x) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r\sqrt{d_1}} g(\mu, r) \frac{1}{\lambda - \lambda_0} R_{\lambda} g_0(x) d\lambda - J_r(f - f_0, x), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\lambda_0$  — фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора  $L$ ,  $\mu_0 = i\lambda_0/\sqrt{d_1}$  и  $g_0 = Lf_0 - \lambda_0 f_0$ .

**Доказательство.** Имеем  $g_0 = (L - \lambda E)f_0 + (\lambda - \lambda_0)f_0$ . Отсюда  $R_{\lambda} g_0 = f_0 + (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda} f_0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} J_r(f_0, x) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r\sqrt{d_1}} g(\mu, r) \left[ -\frac{f_0(x)}{\lambda - \lambda_0} + \frac{1}{\lambda - \lambda_0} R_{\lambda} g_0 \right] d\lambda = \\ &= f_0(x)g(\mu_0, r) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r\sqrt{d_1}} g(\mu, r) \frac{1}{\lambda - \lambda_0} R_{\lambda} g_0 d\lambda. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь из  $J_r(f, x) = J_r(f - f_0, x) + J_r(f_0, x)$  и (21) получаем (20).  $\square$



**Лемма 7.** Пусть вектор-функция  $f(x)$  с непрерывными компонентами удовлетворяет (2). Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует вектор-функция  $f_0(x)$  с компонентами из  $C^1[0, 1]$ , удовлетворяющая (2), такая, что  $\|f(x) - f_0(x)\|_\infty < \varepsilon$ .

**Доказательство.** Переходим от  $f(x)$  и  $f_0(x)$  к скалярным функциям  $F(x)$  и  $F_0(x)$  по формулам:  $F(x) = f_1(x)$  ( $F_0(x) = f_{01}(x)$ ) при  $x \in [0, 1]$ ;  $F(x) = f_2(x - 1)$  ( $F_0(x) = f_{02}(x - 1)$ ) при  $x \in [1, 2]$ ;  $F(x) = f_3(x - 2)$  ( $F_0(x) = f_{03}(x - 2)$ ) при  $x \in [2, 3]$  (здесь  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$ ,  $f_0(x) = (f_{01}(x), f_{02}(x), f_{03}(x))^T$ ). Тогда  $F(x)$  ( $F_0(x)$ ) непрерывна (непрерывна и непрерывно дифференцируема, кроме, быть может, точек  $x = 1, 2$ ), и утверждение леммы есть следствие соответствующего утверждения для скалярного случая.  $\square$

**Теорема 3.** Если  $f(x)$  — та же вектор-функция, что и в лемме 7, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) - J_r(f, x)\|_\infty = 0. \quad (22)$$

Утверждение теоремы получается из теоремы 2 и леммы 7 так же, как и в [13].

**Замечание.** Так как  $J_r(f, x)$  всегда удовлетворяет условиям (2), то из теоремы 3 следует, что (22) имеет место, тогда и только тогда, когда  $f(x)$  имеет непрерывные компоненты и удовлетворяет (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

#### Библиографический список

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.
2. Babbage Ch. An essay towards the calculus of functions // Philosophical transactions of the Royal Society of London. 1816. V. 11. P. 179–226.
3. Андреев А.А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 5. С. 1126–1128.
4. Dankl Ch.G. Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 311, № 1. P. 167–183.
5. Платонов С.С. Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов // Тр. Петрозавод. госун-та. Сер. мат. 2004. Вып. 11. С. 15–35.
6. Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–949.
7. Хромов А.П. Об аналоге теоремы Жордана–Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Доклады РАЕН. 2004. № 4. С. 80–87.
8. Хромов А.П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сборник. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.
9. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.
10. Корнев В.В., Хромов А.П. Абсолютная сходимость разложений по собственным функциям интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, № 4. С. 59–74.
11. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110.
12. Луконина А.С. О сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям одного дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 67–70.
13. Гуревич А.П., Хромов А.П. Суммируемость по Риссу спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 6. С. 809–814.
14. Гуревич А.П., Хромов А.П. Суммируемость по Риссу спектральных разложений для конечномерных возмущений одного класса интегральных операторов // Изв. вузов. Математика. 2001. № 8 (471). С. 38–50.
15. Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН Укр. ССР, 1954.
16. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964.





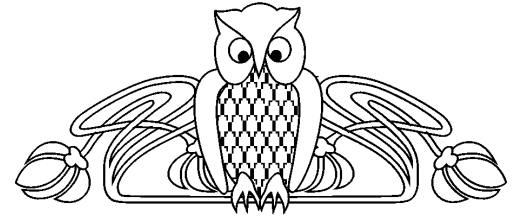
УДК 511

## ОБ ОДНОЙ БИНАРНОЙ АДДИТИВНОЙ ЗАДАЧЕ

Н.А. Зинченко

Белгородский государственный университет,  
кафедра алгебры и теории чисел  
E-mail: zinchenko@bsu.edu.ru

В работе решается бинарная аддитивная задача с полупростыми числами, на которые наложены дополнительные ограничения вида  $\{(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}$ .



On the Binary Additive Problem

N.A. Zinchenko

Let  $c$  be a number lying in the interval  $(1, 2]$ . The binary additive problem with semiprimes  $p_1 p_2$  such that  $\{\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}$  solved in this paper.

В 1940 году И.М. Виноградов методом тригонометрических сумм получил асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих  $x$  и лежащих в промежутках вида  $[(2m)^2, (2m+1)^2)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  [1].

В 1945 году Ю.В. Линник в [2] решил подобную задачу с применением формулы Мангольдта для функции Чебышева и плотностных теорем.

В 1986 году С.А. Гриценко в [3] вывел асимптотическую формулу для числа простых чисел, не превосходящих  $x$  и лежащих в промежутках вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \quad (1)$$

где  $m \in \mathbb{N}$  и  $c \in (1, 2]$ .

Заметим, что главные члены в асимптотических формулах из [1] и [3] одинаковы и равны  $\frac{1}{2}\pi(x)$ , а остаточный член в [3] имеет степенное понижение.

В 1988 году С.А. Гриценко решил ряд аддитивных задач с простыми числами, лежащими в промежутках (1) [4, 5].

Позднее задачи подобного вида рассматривались в [6] А. Балогом и Дж. Фридендером.

Отметим, что в работах [4–6] аддитивные задачи являются тернарными, или решаются по схеме тернарной задачи.

На наш взгляд, представляют интерес бинарные аддитивные задачи с простыми числами из промежутков вида (1). В настоящее время они не поддаются решению. Из исследований в этом направлении отметим работу Д. Толева [7], в которой получен специальный вариант теоремы Бомбьери–Виноградова. Однако применение этой теоремы, даже в соединении с расширенной гипотезой Римана, не дает возможности решить, например, проблему делителей Титчмарша с простыми числами из промежутков (1).

В статье [8] получена асимптотическая формула для числа решений уравнения  $p_1 p_2 - xy = 1$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — простые, а  $x$  и  $y$  — натуральные числа, при условии, что  $p_1 p_2 \leq x$  и числа  $p_1 p_2$  лежат в промежутках (1).

В настоящей работе решается родственная бинарная аддитивная задача о числе решений уравнения вида  $xy + p_1 p_2 = n$ , где  $p_1, p_2$  — простые числа, а  $p_1 p_2$  лежат в промежутках (1).

В работе будут использованы следующие обозначения:  $p_1, p_2$  — простые числа;  $\tau(n)$  — число различных натуральных делителей числа  $n$ ;  $\{x\}$  — дробная часть числа  $x$ ;  $(a, b)$  — наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$ ;  $[a, b]$  — наименьшее общее кратное чисел  $a$  и  $b$ ;  $P = n^{\frac{1}{(\ln \ln n)^2}}$ ; запись

$\sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n \\ p_1 p_2 \in [(2m)^c, (2m+1)^c)}}$  означает, что суммирование идет по натуральным числам  $x, y$  и простым числам  $p_1, p_2$ , удовлетворяющим уравнению  $p_1 p_2 + xy = n$ , причем  $p_1$  и  $p_2$  удовлетворяют еще неравенствам  $p_i > \exp(\sqrt{\ln n})$ ,  $i = 1, 2$ .

Сформулируем основной результат статьи.

**Теорема.** Пусть

$$J(n) = \sum_{p_1 p_2 + xy = n} 1, \quad J_1(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n \\ \{\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}}} 1.$$

Тогда справедлива формула

$$J_1(n) = \frac{1}{2} J(n) \left( 1 + O \left( \frac{\ln \ln \ln n}{\ln \ln n} \right) \right), \quad \text{где } J(n) \asymp n \ln \ln n.$$



**Доказательство.** Обозначим через  $\psi(y)$  характеристическую функцию промежутка  $[0, \frac{1}{2})$ , продолженную периодически с периодом 1 на всю числовую ось.

Тогда  $J_1(n) = \sum_{p_1 p_2 + xy = n} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right)$ . Преобразуем  $J_1(n)$  :

$$J_1(n) = 2 \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n, \\ x \leq \sqrt{n}}} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right) - \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n, \\ x \leq \sqrt{n}, y \leq \sqrt{n}}} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right) = 2J_{11}(n) - J_{12}(n). \quad (2)$$

Рассмотрим сначала  $J_{11}(n)$ . Имеем

$$J_{11}(n) = J'_{11}(n) + O(R_{11}(n)),$$

где  $J'_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n, \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right)$ ,  $R_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n, \\ \sqrt{n} P^{-10} < x \leq \sqrt{n}, \\ p_1 \leq \sqrt{n}}} 1$ .

Пользуясь теоремой Бруна–Титчмарша [9, с.20], имеем

$$R_{11}(n) \ll n \sum_{\sqrt{n} P^{-10} < x \leq \sqrt{n}} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{p_1 \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p_1 \ln \frac{2n}{p_1 x}} \ll \frac{n}{\ln \ln n},$$

то есть

$$J_{11}(n) = J'_{11}(n) + O\left(\frac{n}{\ln \ln n}\right). \quad (3)$$

Аналогично рассуждая, приходим к равенству

$$J_{12}(n) = J'_{12}(n) + O\left(\frac{n}{\ln \ln n}\right),$$

где

$$J'_{12}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n, \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ y \leq \sqrt{n}}} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right).$$

Рассмотрим  $J'_{11}(n)$  и  $J'_{12}(n)$ . Имеем

$$J'_{11}(n) = J''_{11}(n) + O(r_{11}(n)),$$

где

$$J''_{11}(n) = \sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \sum_{\exp(\sqrt{\ln n}) < p_1 \leq P} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{n}{p_1}, \\ p_1 p_2 \equiv n \pmod{x}}} \psi\left(\frac{1}{2}(p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}\right), \quad (4)$$

$$r_{11}(n) = \sum_{P < p_1 \leq \sqrt{n}} \sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \sum_{\substack{p_2 \leq \frac{n}{p_1}, \\ p_1 p_2 \equiv n \pmod{x}}} 1.$$

Оценим  $r_{11}(n)$  сверху. Имеем

$$r_{11}(n) = r'_{11}(n) + r''_{11}(n),$$

где  $r'_{11}(n) = \sum_{P < p_1 \leq \sqrt{n}} \sum_{x_1 \leq \frac{\sqrt{n} P^{-10}}{p_1}} \pi\left(\frac{n}{p_1}, x_1, \frac{n}{p_1}\right)$ ,  $r''_{11}(n) = \sum_{P < p_1 \leq \sqrt{n}} \sum_{\substack{x \leq \sqrt{n} P^{-10}, \\ (x, p_1) = 1}} \pi\left(\frac{n}{p_1}, x, \frac{n}{p_1}\right)$ .

Пользуясь теоремой Бомбьери–Виноградова, получаем

$$r'_{11}(n) \ll \frac{n}{\ln n} \sum_{P < p_1 \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p_1} \sum_{x_1 \leq \frac{\sqrt{n}}{p_1} P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)}, \quad r''_{11}(n) \ll \frac{n}{\ln n} \sum_{P < p_1 \leq \sqrt{n}} \frac{1}{p_1} \sum_{x \leq \sqrt{n} P^{-10}} \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Отсюда имеем  $r_{11}(n) \ll n \ln \ln \ln n$ .



Итак, из (3) и (4) следует, что  $J_{11}(n) = J''_{11}(n) + O(n \ln \ln \ln n)$ .

Аналогично получаем равенство  $J_{12}(n) = J''_{12}(n) + O(n \ln \ln \ln n)$ , где

$$J''_{12}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n, p_1 \leq P \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}, y \leq \sqrt{n}}} \psi \left( \frac{1}{2} (p_1 p_2)^{\frac{1}{c}} \right).$$

Займемся получением асимптотической формулы для  $J''_{11}(n)$ .

Воспользуемся леммой о «стаканчиках» И.М. Виноградова [10, с. 23–26] и выберем параметры  $r, \Delta, \alpha, \beta$  двумя способами.

Сначала определим эти параметры так:  $r = [\ln n], \Delta = \frac{1}{\ln^2 n}, \alpha = \Delta, \beta = \frac{1}{2} - \Delta$ . Обозначим через  $\psi_1(x)$  функцию, существование которой следует из леммы о «стаканчиках».

Затем, при тех же  $r$  и  $\Delta$  положим  $\alpha = -\Delta, \beta = \frac{1}{2} + \Delta$ , а соответствующую функцию обозначим как  $\psi_2(x)$ .

Тогда из леммы о «стаканчиках» следует, что

$$\psi_1(x) \leq \psi(x) \leq \psi_2(x),$$

и

$$I_1(n) \leq J''_{11}(n) \leq I_2(n), \tag{5}$$

где

$$I_i(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n, p_1 \leq P \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} \psi_i \left( \frac{1}{2} (p_1 p_2)^{\frac{1}{c}} \right), \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что если будут получены асимптотические формулы для  $I_1(n)$  и  $I_2(n)$  с совпадающими главными членами, то из неравенства (5) следует, что формула с таким же главным членом будет верна и для  $J''_{11}(n)$ .

Выведем асимптотическую формулу для  $I_1(n)$ .

Раскладывая функцию  $\psi_1 \left( \frac{1}{2} (p_1 p_2)^{\frac{1}{c}} \right)$  в ряд Фурье, получим

$$I_1(n) = \left( \frac{1}{2} + O(\Delta) \right) K_{11}(n) + \tilde{R}_1(n) + O(\ln n),$$

где

$$K_{11}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n, p_1 \leq P \\ x \leq \sqrt{n} P^{-10}}} 1, \quad \tilde{R}_1(n) = \sum_{0 < |m| \leq \ln^3 n} |g_m| |S_m(n)|,$$

$$S_m(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n \\ p_1 \leq P}} t'(n - p_1 p_2) e^{\pi i m (p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}}, \quad t'(k) = \sum_{\substack{xy = k \\ x \leq \sqrt{n} P^{-1}}} 1,$$

$g_m$  — коэффициент Фурье с номером  $m$  для функции  $\psi_1$ .

Оценим сумму  $S_m(n)$ . Для этого разобьем промежуток суммирования по  $p_1$  на  $O(\ln P)$  промежутков вида  $(P_1, P_2]$ , где  $\exp(\sqrt{\ln n}) < P_1 \leq P, P_1 < P_2 \leq 2P_1$ ; тогда

$$|S_m(n)| \ll \ln P |S_m(P_1, P_2)|,$$

где  $S_m(P_1, P_2) = \sum_{\substack{p_1 p_2 \leq n \\ P_1 < p_1 \leq P_2}} t'(n - p_1 p_2) e^{\pi i m (p_1 p_2)^{\frac{1}{c}}}$ .

Оценим  $S_m(P_1, P_2)$ . Имеем

$$|S_m(P_1, P_2)| \leq \sum_{k \leq \frac{n}{P_1}} \left| \sum_{\substack{P_1 < p_1 \leq P_2 \\ kp_1 < n}} t'(n - kp_1) e^{\pi i m (kp_1)^{\frac{1}{c}}} \right|.$$

Возведем обе части неравенства в квадрат и применим неравенство Коши. Применяя лемму из работы Линника [11, с. 30], получим:

$$|S_m(P_1, P_2)|^2 \leq \frac{n}{P_1} \sum_{k \leq \frac{n}{P_1}} \left| \sum_{\substack{P_1 < p_1 \leq P_2 \\ kp_1 < n}} t'(n - kp_1) e^{\pi i m (kp_1)^{\frac{1}{c}}} \right|^2 \leq$$



$$\leq \frac{n}{P_1} \sum_{P_1 < p_1 \leq P_2} \sum_{\substack{P_1 < p_2 \leq P_2 \\ p_1 \neq p_2}} V(m; p_1, p_2) + \frac{n}{P_1} \sum_{P_1 < p_1 \leq P_2} \sum_{k \leq \frac{n}{P_1}} \tau^2(n - kp_1) = \bar{S} + O\left(n^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln n}\right)\right), \quad (6)$$

где  $\bar{S} = \frac{n}{P_1} \sum_{P_1 < p_1 \leq P_2} \sum_{\substack{P_1 < p_2 \leq P_2 \\ p_1 \neq p_2}} V(m; p_1, p_2)$ ,  $V(m; p_1, p_2) = \sum_{k \leq \frac{n}{P_1}} t'(n - kp_1)t'(n - kp_2)e^{\pi im(p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}})k^{\frac{1}{c}}}$ .

Пусть  $P_1 < p_2 < p_1 \leq P_2$ . Оценим сумму  $V(m; p_1, p_2)$ . Имеем:

$$V(m; p_1, p_2) = \sum_{x_1 \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{x_2 \leq \sqrt{n}P^{-10}} \sum_{\substack{k \leq \frac{n}{P_1} \\ kp_1 \equiv n \pmod{x_1} \\ kp_2 \equiv n \pmod{x_2}}} e^{\pi im(p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}})k^{\frac{1}{c}}}.$$

Рассмотрим систему сравнений  $\begin{cases} kp_1 \equiv n \pmod{x_1}, \\ kp_2 \equiv n \pmod{x_2}. \end{cases}$  относительно переменной  $k$ . Если она неразрешима, то  $V(m; p_1, p_2) = 0$ ; если же система сравнений разрешима, то она эквивалентна сравнению  $k \equiv k_0 \pmod{x_3}$ , где

$$x_3 = \begin{cases} [x_1, x_2], & \text{если } (p_1, x_1) = 1 \text{ и } (p_2, x_2) = 1, \\ \left[\frac{x_1}{p_1}, x_2\right], & \text{если } p_1 \mid x_1 \text{ и } p_1 \mid n, \text{ но } p_2 \nmid x_2, \\ \left[x_1, \frac{x_2}{p_2}\right], & \text{если } p_2 \mid x_2 \text{ и } p_2 \mid n, \text{ но } p_1 \nmid x_1, \\ \left[\frac{x_1}{p_1}, \frac{x_2}{p_2}\right], & \text{если } p_1 \mid x_1, p_1 \mid n, p_2 \mid x_2, p_2 \mid n. \end{cases}$$

Рассмотрим сумму

$$v_m(p_1, p_2) = \sum_{\substack{k \leq \frac{n}{P_1}, \\ k \equiv k_0 \pmod{x_3}}} e^{\pi im(p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}})k^{\frac{1}{c}}}.$$

Имеем  $v_m(p_1, p_2) = \sum_{t \leq (\frac{n}{P_1} - k_0) \frac{1}{x_3}} e^{\pi im(p_1^{\frac{1}{c}} - p_2^{\frac{1}{c}})x_3^{\frac{1}{c}}(t + \xi_0)^{\frac{1}{c}}}$ , где  $\xi_0 = \frac{k_0}{x_3}$ ,  $0 \leq \xi_0 < 1$ . В работе [8] для суммы

$v_m(p_1, p_2)$  получена оценка вида  $v_m(p_1, p_2) \ll \frac{n}{P_1 x_3} \exp\left(-\gamma \frac{\ln n}{(\ln \ln n)^6}\right)$ , где  $\gamma > 0$  — константа. Отсюда и из (6) получаем, что  $|S_m(P_1, P_2)| \ll n \exp(-\sqrt{\ln n})$  и, следовательно,  $|S_m(n)| \ll n \exp(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln n})$ . Используя эту оценку и (6), приходим к формуле

$$I_1(n) = \left(\frac{1}{2} + O(\Delta)\right) K_{11}(n) + O\left(n \exp\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\ln n}\right)\right).$$

Аналогичная асимптотическая формула получается и для  $I_2(n)$ .

Далее, из (4) и (5) следует, что

$$J_{11}(n) = \left(\frac{1}{2} + O(\Delta)\right) K_{11}(n) + O(n \ln \ln \ln n) = \frac{1}{2} K_{11}(n) + O(n \ln \ln \ln n).$$

Аналогично получается формула  $J_{12}(n) = \frac{1}{2} K_{12}(n) + O(n \ln \ln \ln n)$ , где  $K_{12}(n) = \sum_{\substack{p_1 p_2 + xy = n, p_1 \leq P \\ x \leq \sqrt{n}P^{-10}, y \leq \sqrt{n}}} 1$ .

Теперь утверждение теоремы следует из равенства  $J(n) = 2K_{11}(n) - K_{12}(n) + O(n \ln \ln \ln n)$ , которое выводится аналогично формуле (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (грант РНП. 2.1.1.3263).

### Библиографический список

1. Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Мат. сб. 1940. № 7. С. 365–372.
2. Линник Ю.В. Об одной теореме теории простых чисел // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. С. 7–8.
3. Гриценко С.А. Об одной задаче И.М. Виноградова // Мат. заметки. 1986. Т. 39, вып. 5. С.625–640.
4. Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и про-

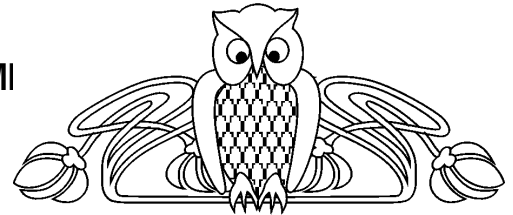


блема Гольдбаха–Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН. 1988. Т. 43, вып. 4 (262). С. 203–204.  
 5. Гриценко С.А. Три аддитивные задачи // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, № 6. С. 1198–1216.  
 6. Balog A., Friedlander K.J. A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski–Shapiro // Pacific. J. Math. 1992. V. 156. P. 45–62.  
 7. Tolev D.I. On a theorem of Bombieri–Vinogradov type for prime numbers from a thin set // Acta Arithmetica. 1997. V. 81, № 1. P. 57–68.

8. Зинченко Н.А. Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышевский сборник. 2005. Т. VI, вып. 2(14). С. 145–162.  
 9. Хооли К. Применения методов решета в теории чисел. М.: Наука, 1987.  
 10. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1971.  
 11. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.

УДК 511.3

## О РЯДАХ ДИРИХЛЕ С КОНЕЧНОЗНАЧНЫМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ РИМАНОВСКОГО ТИПА



В.В. Кривобок

Саратовский государственный университет,  
 кафедра компьютерной алгебры и теории чисел  
 E-mail: KrivobokVV@info.sgu.ru

About Dirichle's Rows with Finite-Valued Multiplicative Coefficients, Satisfy the Riman's Type Functional Equation

V.V. Krivobok

В данной работе доказывается утверждение о том, что в классе рядов Дирихле, абсолютно сходящихся в полуплоскости  $\sigma > 1$ , имеющих конечнозначные мультипликативные коэффициенты, только  $L$ -функции Дирихле удовлетворяют функциональному уравнению римановского типа.

In this paper the class of absolutely convergent on the half-plane  $\sigma > 1$  Dirichlet series with multiplicative finite-valued coefficients is considered. We prove that only Dirichlet  $L$ -functions are solutions of a functional Riemann type equation.

Известная теорема Гамбургера [1] говорит о том, что ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

абсолютно сходящийся в полуплоскости  $\sigma > 1$  и удовлетворяющий функциональному уравнению Римана

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) f(1-s),$$

с точностью до константы является  $\zeta$ -функцией Римана.

Известно также [2], что функциональному уравнению римановского типа

$$\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right) f(1-s), \quad (2)$$

где  $k$  — натуральное, кроме  $L$ -функций Дирихле удовлетворяют и другие функции, определяемые рядами Дирихле (1), и даже рядами Дирихле (1) с периодическими коэффициентами.

В данной работе будет показано, что в классе рядов Дирихле вида (1) с конечнозначными мультипликативными коэффициентами только  $L$ -функции Дирихле удовлетворяют функциональному уравнению вида (2).

### 1. О РЯДАХ ДИРИХЛЕ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С ОПРЕДЕЛЕННЫМ ПОРЯДКОМ РОСТА МОДУЛЯ В ЛЕВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В работе [3] было получено условие, при котором ряд Дирихле (1) определяет целую функцию, модуль которой в левой полуплоскости растет следующим образом:

$$|f(s)| < C e^{A|s| \ln|s| + A|s|}, \quad (3)$$

где  $A$  — некоторая положительная константа.



Это условие получено в терминах граничного поведения соответствующего степенного ряда

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad (4)$$

т.е. степенного ряда с теми же коэффициентами, что и ряд Дирихле (1). А именно в [3] доказана

**Теорема 1.** *Ряд Дирихле вида (1) тогда и только тогда определяет целую функцию, модуль которой в левой полуплоскости удовлетворяет условию (3), когда соответствующий степенной ряд  $g(z)$  определяет функцию, регулярную в точке  $z = 1$ .*

В силу известной теоремы Сёге (см. [4]), которая утверждает, что в случае конечнозначных коэффициентов, условие регулярности ряда  $g(z)$  (4) в точке  $z = 1$  эквивалентно периодичности, начиная с некоторого номера, коэффициентов этого ряда.

Из теоремы 1 следует следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Ряд Дирихле вида (1) с конечнозначными коэффициентами тогда и только тогда определяет целую функцию, модуль которой в левой полуплоскости удовлетворяет условию (3), когда коэффициенты этого ряда периодичны, начиная с некоторого номера.*

## 2. ОБ ЭЙЛЕРОВСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ РИМАНОВСКОГО ТИПА

Рассмотрим ряд Дирихле, определенный произведением Эйлера:

$$f(s) = \prod_p \left(1 - \frac{h(p)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (5)$$

где  $h(n)$  — мультипликативная конечнозначная функция натурального переменного.

Для рядов Дирихле вида (5) докажем следующее утверждение

**Теорема 3.** *Пусть ряд Дирихле вида (5) удовлетворяет функциональному уравнению вида (2) и определяет целую функцию. Тогда  $h(n)$  — периодическая функция.*

**Замечание.** Легко показать, что если ряд Дирихле (5) определяет функцию  $f(s)$ , удовлетворяющую функциональному уравнению (2), и коэффициенты этого ряда удовлетворяют условию  $S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = O(1)$ , то функция  $f(s)$  является целой.

Доказательству теоремы 3 предположим доказательство двух лемм.

**Лемма 1.** *Пусть ряд Дирихле вида (5) удовлетворяет функциональному уравнению (2) и определяет целую функцию. Тогда в левой полуплоскости имеет место неравенство (3).*

**Доказательство.** В силу функционального уравнения (2) для  $\sigma < 0$  имеет место равенство:

$$f(s) = \frac{\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right) f(1-s)}{\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}.$$

Осталось воспользоваться известной оценкой для  $\Gamma$ -функции (формула Стирлинга) [5].

В каждой области  $|\arg s| \leq \pi - \delta$ ,  $\delta > 0$ , из которой исключены точки  $s = 0$  и полюсы  $\Gamma(s)$  с некоторыми окрестностями равномерно имеет место оценка:  $|\Gamma(s)| \leq ce^{|\ln|s|+B|s|}$ ,  $B > 0$ .

**Лемма 2.** *Пусть  $h(n)$  — мультипликативная функция натурального аргумента, периодическая, начиная с некоторого номера  $n_0$ . Тогда  $h(n)$  — периодическая функция.*

**Доказательство.** Пусть  $d_0$  — период функции  $h(n)$  при  $n \geq n_0$ . Допустим, что  $h(n_1 + d_0) \neq h(n_1)$ , где  $n_1 < n_0$ . Пусть  $k$  — такое натуральное, что  $kn_1 \geq n_0$ . Тогда, с одной стороны,  $h(kn_1 + kd_0) = h(kn_1) = h(k)h(n_1)$ . С другой стороны,  $h(kn_1 + kd_0) = h(k)h(n_1 + d_0)$ . Отсюда следует, что если  $h(k) \neq 0$ , то  $h(n_1) = h(n_1 + d_0)$ , что противоречит нашему предположению.

**Доказательство теоремы 3.** В силу леммы 1 и теоремы 2 функция  $h(n)$  должна быть периодической функцией, начиная с некоторого номера. Но в силу леммы 2 функция  $h(n)$  должна быть периодической функцией, что и доказывает утверждение теоремы 3.

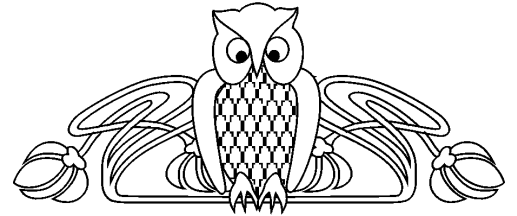


**Библиографический список**

1. Чандрасекхаран К. Арифметические функции. М.: Наука, 1975. 272 с.
2. Воронин С.И., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана. М.: Физматгиз, 1994. 376 с.
3. Кузнецов В.Н., Сецинская Е.В., Кривобок В.В. О рядах Дирихле, определяющих целые функции первого порядка // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2005. Вып. 3. С. 47–58.
4. Биббербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967. 239 с.
5. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 511 с.

УДК 517.51

**О СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ  
ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА В ПРОСТРАНСТВАХ  
ЛОРЕНЦА**



О.А. Лукьяненко

Саратовский государственный университет,  
кафедра математического анализа  
E-mail: olgalukyanyenko@mail.ru

**Convergence of Multiple Vilenkin–Fourier Series in Lorentz Spaces**

O.A. Lukyanenko

Пусть  $\Lambda_{\psi,p}[0,1]^d$  есть пространства Лоренца, близкие к  $L^\infty[0,1]^d$ . В статье найдена функция  $\tilde{\psi}$ , для которой кратный ряд Фурье–Виленкина функции  $f \in \Lambda_{\psi,p}[0,1]^d$  сходится к  $f$  по норме пространства Лоренца  $\Lambda_{\tilde{\psi},p}[0,1]^d$ .

Let  $\Lambda_{\psi,p}[0,1]^d$  be a near to  $L^\infty[0,1]^d$  Lorentz space. We find the function  $\tilde{\psi}$  for which the multiple Vilenkin–Fourier of any  $f \in \Lambda_{\psi,p}[0,1]^d$  converge to  $f$  in the norm of Lorentz space  $\Lambda_{\tilde{\psi},p}[0,1]^d$ .

**ВВЕДЕНИЕ**

В работе [1] были рассмотрены пространства Лоренца  $\Lambda_{\Psi,q}$  измеримых на  $[0,1]$  функций  $f$ , для которых конечна норма

$$\|f\|_{\Psi,q} = \left( \int_0^1 \left( \frac{f^*(t)}{\Psi(t)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \quad (p \geq 1),$$

и были получены теоремы о сходимости рядов Фурье–Уолша в этих пространствах в зависимости от свойств последовательности  $\{n_k\}$ , которую пробегает индексы  $n$  в частичных суммах  $S_n(f)$ .

В данной работе будем рассматривать аналогичные вопросы для кратных рядов Виленкина.

**1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ**

Пусть  $\{p_k\}_{k=0}^\infty$  — последовательность целых чисел  $p_k \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $m_0 = 1$ ,  $m_k = m_{k-1}p_{k-1}$ . Будем рассматривать функции Виленкина  $V_n(t)$  [2],  $n \in \mathbb{N}_0$  на отрезке  $[0,1]$ . Каждую точку  $t \in [0,1]$  можно представить в виде  $t = \prod_{k=0}^\infty \frac{t_k}{m_{k+1}}$ ,  $0 \leq t_k \leq p_k - 1$ ,  $t_k \in \mathbb{N}_0$  (если исключить точки, для которых  $t_k = p_k - 1$ , при  $k > k_0$ , то это представление единственно).

Далее, если  $n = \sum_{k=0}^\infty a_k m_k$  ( $a_k = 0, 1, \dots, p_k - 1$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ) является  $p$ -ичным представлением числа  $n \in \mathbb{N}_0$ , функции Виленкина определяются следующим образом:

$$V_n(t) = \exp\left(\pi i \sum_{k=0}^\infty a_k t_k\right) \quad (t_k = 0, 1, \dots, p_k - 1).$$

Если  $\mathbf{n} = (n^{(1)}, n^{(2)}, \dots, n^{(m)}) \in \mathbb{N}^m$  и  $\mathbf{t} = (t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(m)}) \in [0,1]^m$ , то кратная система Виленкина состоит из функций  $V_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = V_{n^{(1)}}(t^{(1)})V_{n^{(2)}}(t^{(2)}) \dots V_{n^{(m)}}(t^{(m)})$ .

Пусть  $D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} V_k(t)$  — одномерное ядро Дирихле и  $D_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \prod_{i=0}^m D_{n^{(i)}}(t^{(i)})$  —  $m$ -мерное ядро



Дирихле. Константы Лебега в одномерном и  $m$ -мерном случае определяются соответственно

$$L_n = \int_G |D_n(t)| dt, \quad L_n = \int_G |D_n(\mathbf{t})|, dt.$$

Мы определим также модифицированное ядро Дирихле  $D_n^*(t) = V_{n^*}(t)D_n(t)$ , где  $n^* = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* m_k$ ,  $a_k^* = (p_k - a_k) \bmod p_k$ . По аналогии определяем  $m$ -мерное модифицированное ядро Дирихле  $D_n^*(\mathbf{t}) = \prod_{i=0}^m D_{n^*(i)}(t^{(i)})$  и  $m$ -мерную модифицированную частичную сумму

$$S_n^*(f, \mathbf{x}) = \int_{G^m} f(\mathbf{t}) D_n^*(\mathbf{x} \oplus \mathbf{t}) dt.$$

В работе автора было доказано [3], что для констант Лебега  $L_n = \|D_n\|_1$  по системе Виленкина в случае, когда образующая последовательность  $\{p_i\}$  ограничена числом  $p$ , имеет место неравенство

$$\frac{Var(n)}{p^2} \leq L_n \leq Var(n),$$

где  $Var(n) = a_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k^* + a_{k-1}^*) \bmod 2d_k) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^*(a_{k-1}^* - 1)$ ,  $d_k = \max\{a_{k-1}^*, a_k^*\}$ . В случае, когда  $d_k = 0$ , будем считать  $(a_k^* + a_{k-1}^*) \bmod 2d_k = (a_k^* + a_{k-1}^*)$ . Если наравне с  $Var(n)$  рассматривать числа

$$Var_{\{p_k\}}(n) = \frac{a_0^*}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k^* + a_{k-1}^*) \bmod 2d_k}{p_k^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^*(a_{k-1}^* - 1)}{p_k^2},$$

то в случае, когда последовательность  $\{p_k\}$  неограничена, для констант Лебега справедлива следующая оценка:

$$Var_{\{p_k\}}(n) \leq L_n \leq Var(n).$$

Пусть функция  $\lambda_f(y) = \mu\{\mathbf{x} \in [0, 1]^m : |f(\mathbf{x})| > y\}$ ,  $y \geq 0$  — есть функция распределения для  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in [0, 1]^m$ . Перестановка функции  $f$  определяется равенством  $f^*(x) = \inf\{x : \lambda_f < x\}$ . Отметим, что  $f^*$  определена не на промежутке  $[0, 1]^m$ , а на  $[0, 1]$ , и справедливо  $\|f^*\|_q = \|f\|_q$ .

**Определение.** Функция  $\Psi$  называется функцией Лоренца если она удовлетворяет следующим условиям: 1)  $\Psi(t) \geq y_0 > 0$  на  $(0, 1)$ , убывает на  $(0, 1)$  и выпукла; 2)  $\lim_{t \rightarrow 0} \Psi(t) = +\infty$ ;

$$3) \int_0^1 \frac{dt}{\Psi^q(t)t} < +\infty, (q \geq 1).$$

Пространства Лоренца для функций многих переменных определяется как и в одномерном случае,

$$\text{а именно } \Lambda_{\Psi, q} = \left\{ f \in L_{[0,1]^m} : \|f\|_{\Psi, q} = \left( \int_0^1 \left( \frac{f^*(t)}{\Psi(t)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

В этой работе будем рассматривать пространства Лоренца, порожденные функцией Лоренца  $\Psi$ , удовлетворяющей дополнительному условию:

$$\exists C_p > 0, \quad \Psi\left(\frac{x}{p}\right) \leq \left(1 + \frac{C_p}{1 + \log \frac{1}{x}}\right) \Psi(x), \quad p \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

В работе [4] были определены пространства  $\mathcal{L}_{p, \alpha}$  измеримых на  $[0, 1)$  функций  $f$ , для которых конечна норма

$$\|f\|_{\alpha, q} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\|f\|_n}{n^\alpha} \right)^q \right)^{1/q} \quad (\alpha > 0, q \geq 1).$$

С.А. Асташкин в своей работе [5] отметил, что пространства  $\mathcal{L}_{q, \alpha}$  есть пространства Лоренца. Так же, как в работе [1], можно показать, что при выполнении условия (1) равенство

$$\|f\|_{\Psi, q} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\|f\|_n}{\Psi\left(\frac{1}{2^n}\right)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2)$$

определяет в пространстве  $\Lambda_{\Psi, q}([0, 1]^m)$  норму, эквивалентную норме  $\|f\|_{\Psi, q}$ .





## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Лемма 1.** Пусть  $\Psi$  является функцией Лоренца и удовлетворяет условию (1),  $s \in \mathbb{N}$ ,  $j_0 \in [1, 2s - 1]$ . Тогда при  $j \leq 2s - j_0$  выполняется неравенство

$$\sum_{i=j}^{2s} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}} \right) \geq \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}} \right) \frac{2s - j + 1}{C_p + 1} \left( \frac{j_0 - 1}{j_0} \right)^{C_p}.$$

**Доказательство.** Запишем сумму в виде

$$\sum_{i=j}^{2s} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}} \right) \geq \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}} \right) \left( 1 + \sum_{n=j+1}^{2s} \prod_{i=j+1}^n \left( 1 + \frac{C_p}{1 + \log 2^{2s-i}} \right)^{-1} \right).$$

Отдельно рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} \prod_{i=j+1}^n \left( 1 + \frac{C_p}{1 + \log 2^{2s-i}} \right) &\leq \prod_{i=j+1}^n \left( 1 + \frac{C_p}{2s-i} \right) = \exp \ln \prod_{i=j+1}^n \left( 1 + \frac{C_p}{2s-i} \right) = \\ &= \exp \sum_{i=j+1}^n \ln \left( 1 + \frac{C_p}{2s-i} \right) \leq \exp \sum_{i=j+1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{2s-i} \right)^{C_p} \leq \left( \frac{2s-j}{2s-n} \right)^{C_p}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \sum_{i=j}^{2s} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}} \right) &\geq \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}} \right) \left( 1 + \sum_{n=j+1}^{2s} \left( \frac{2s-n}{2s-j} \right)^{C_p} \right) \geq \\ &\geq \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}} \right) \left( 1 + \frac{1}{(2s-j)^{C_p}} \int_0^{2s-j-1} x^{C_p} dx \right) = \\ &= \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}} \right) \left( 1 + \left( 1 - \frac{1}{2s-j} \right)^{C_p} \frac{2s-j-1}{C_p+1} \right) \geq \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}} \right) \left( \frac{j_0-1}{j_0} \right)^{C_p} \frac{2s-j-1}{C_p+1}. \end{aligned}$$

**Лемма 2.** Пусть  $\Psi$  является функцией Лоренца и удовлетворяет условию (1), тогда для функции

$$\tilde{\Psi}(x) = \left( \ln \frac{1}{x} \right)^{m-1} \int_x^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt \quad (0 < x < 1), \quad (3)$$

при  $\left( 0 \leq x < \frac{1}{2} \right)$  выполняется неравенство

$$\tilde{\Psi} \left( \frac{x}{p} \right) \leq \left( 1 + \frac{2 \ln p}{\ln 2} \right)^{(m-1)} (1 + C_p)^3 \tilde{\Psi}(x).$$

**Доказательство.** Пусть  $\frac{1}{p^{k+1}} < x \leq \frac{1}{p^k}$ . Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\frac{x}{p}}^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt &\leq \int_{\frac{1}{p^{k+2}}}^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt \leq \sum_{j=k+2}^1 \int_{\frac{1}{p^j}}^{\frac{1}{p^{j-1}}} \frac{\Psi(t)}{t} dt \leq \sum_{j=k+2}^1 \Psi \left( \frac{1}{p^j} \right) \ln p \leq \\ &\leq (1 + C_p) \sum_{j=k+1}^0 \Psi \left( \frac{1}{p^j} \right) \ln p \leq (1 + C_p)^2 \sum_{j=k}^0 \Psi \left( \frac{1}{p^j} \right) \ln p + (1 + C_p) \ln p \Psi(1) \leq \\ &\leq (1 + C_p)^2 \int_x^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt + (1 + C_p) \ln p \Psi(1) \leq (1 + C_p)^3 \int_x^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим отдельно

$$\ln \frac{p}{x} \leq \ln p^{k+2} = \ln p^k + \ln p^2 \leq \ln \frac{1}{x} + 2 \ln p \leq \ln \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{2 \ln p}{\ln 2} \right).$$



Тогда окончательно получим

$$\tilde{\Psi}\left(\frac{x}{p}\right) \leq \left(1 + \frac{2 \ln p}{\ln 2}\right)^{(m-1)} (1 + C_p)^3 \tilde{\Psi}(x). \quad \square$$

Далее, через  $C_p$  будем обозначать константы, которые, вообще говоря, разные, зависящие от функции  $\Psi$  и числа  $p$ .

**Теорема 1.** Пусть функция Лоренца  $\Psi$  удовлетворяет условию (1). Тогда существует постоянная  $C = C(\Psi, q) > 0$  такая, что  $\forall f \in \Lambda_{\Psi, q}([0, 1]^m)$  выполняется

$$\|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi}, q} \leq C \|f\|_{\Psi, q},$$

где  $\tilde{\Psi}$  определяется равенством (3).

**Доказательство.** При любом  $n \in \mathbb{N}$  для одномерных частичных сумм Фурье–Виленкина выполняется неравенство [2, с. 149]:

$$\mu \{t : |S_n(f)| > y\} \leq \frac{C}{y} \int_0^1 |f(t)| dt,$$

т.е. оператор  $S_n(f)$  имеет слабый тип (1, 1). Кроме того, оператор  $S_n(f)$  имеет сильный, а значит, и слабый тип (2, 2). Тогда, аналогично как и в [4], можем получить, что для одномерного случая имеет место неравенство:

$$\|S_n(f)\|_q \leq Cq \|f\|_q \quad (q \geq 2).$$

Частичную сумму  $S_{n^{(1)}n^{(2)}\dots n^{(m)}}(f) = S_n(f)$  можно записать в виде

$$S_{n^{(1)}}(S_{n^{(2)}} \dots S_{n^{(m)}}(f)) = S_{n^{(1)}}(S_{n^{(2)}}(\dots S_{n^{(m)}}(f) \dots)).$$

Следовательно, в  $m$ -мерном случае справедливо следующее неравенство:

$$\|S_{n^{(1)}\dots n^{(m)}}(f)\|_q \leq C^m q^m \|f\|_q.$$

Так же, как в работе [6], можно показать, что если функция  $\Psi$  удовлетворяет условию (1), то существует константа  $C_1$  такая, что  $\frac{1}{n^m} \tilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^n}\right) \geq C_1 \Psi\left(\frac{1}{2^n}\right)$  (в [6] это неравенство было доказано при  $m = 1$ ). Следовательно, получим

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi}, q}^q &\leq C_2 \|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi}, q}^q = C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\|S_n(f)\|_k}{\tilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^k}\right)} \right)^q \leq C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{C^m k^m \|f\|_k}{\tilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^k}\right)} \right)^q \leq \\ &\leq C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{C_3 \|f\|_k}{\tilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^k}\right)} \right)^q = C_4 \|f\|_{\tilde{\Psi}, q}^q \leq C(\Psi, q) \|f\|_{\tilde{\Psi}, q}^q. \quad \square \end{aligned}$$

Оценка, полученная в теореме 1, является точной, по крайней мере, для функции  $\Psi(x) = \left(\ln \frac{1}{x}\right)^\gamma$ .

**Теорема 2.** Пусть  $V_n(\mathbf{t})$  — функция Виленкина, порожденная последовательностью  $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ , которая ограничена числом  $p$ , и  $S_n(f, \mathbf{t})$  — кубические частичные суммы ряда Фурье–Виленкина,  $\Psi$  — функция Лоренца, которая при  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  совпадает с функцией  $\left(\ln \frac{1}{x}\right)^\gamma$ . Тогда для любой

функции  $\alpha(t) \downarrow 0$  при  $t \downarrow 0$ , для которой  $\tilde{\Psi}\alpha$  есть функция Лоренца, отношение  $\frac{\|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi}, q}}{\|f\|_{\Psi, q}}$  — неограниченно.

**Доказательство.** 1. Проведем сначала доказательство для случая  $m = 1$ . Пусть числа  $n$  имеют вид  $n = \sum_{i=1}^s ((p_{k_{2i-1}-1} - 1)m_{k_{2i-1}-1} + (p_{k_{2i-1}-2} - 1)m_{k_{2i-1}-2} + \dots + (p_{k_{2i}} - 1)m_{k_{2i}})$ , где  $k_1 > k_2 > \dots > k_{2s}$ .

Построим  $f$  как ступенчатую на  $(0, 1)$ .

1) Если  $x \in (0, \frac{1}{m_{k_1}}]$ , то положим  $f(x) = \lambda_1 = const$ .

2) Если  $x \in (\frac{1}{m_{k_2+1}}, \frac{1}{m_{k_2}}]$ , то положим  $f(x) = \lambda_2 = const$ . Если  $\frac{1}{m_{k_1}} \neq \frac{1}{m_{k_2+1}}$ , то продолжим функцию  $f$  с  $(0, \frac{1}{m_{k_1}}]$  на  $(\frac{1}{m_{k_1}}, \frac{1}{m_{k_2+1}}]$  периодически с периодом  $\frac{1}{m_{k_1}}$ .



3) Пусть функция  $f$  уже построена на промежутке  $(0, \frac{1}{m_{k_j-1}}]$ . Построим ее на  $(\frac{1}{m_{k_j-1}}, \frac{1}{m_{k_j}}]$ . Для  $x \in (\frac{1}{m_{k_j+1}}, \frac{1}{m_{k_j}}]$  положим  $f_1(x) = \lambda_j = const$ . Если  $\frac{1}{m_{k_j-1}} \neq \frac{1}{m_{k_j+1}}$ , то продолжим  $f(x)$  с  $(0, \frac{1}{m_{k_j-1}}]$  на  $(\frac{1}{m_{k_j-1}}, \frac{1}{m_{k_j+1}}]$  периодически с периодом  $\frac{1}{m_{k_j-1}}$ .

4) Таким образом, построим функцию  $f$  на промежутке  $(0, \frac{1}{m_{k_{2s}}}]$ . Если  $\frac{1}{m_{k_{2s}}} = 1$ , то построение окончено. В противном случае продолжим  $f(x)$  с промежутка  $(0, \frac{1}{m_{k_{2s}}}]$  на промежуток  $(\frac{1}{m_{k_{2s}}}, 1]$  периодически с периодом  $\frac{1}{m_{k_{2s}}}$ .

Будем считать, что  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_{2s}|$  и  $\lambda_j = (-1)^{j+1}|\lambda_j|$ . Рассмотрим множества  $E_{j,i} = \{x \in (0, \frac{1}{m_{k_j}}] : |f(x)| = |\lambda_i|\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2s$ ,  $i = 1, 2, \dots, j$ ,  $E_j = \{x \in (0, 1] : |f(x)| = |\lambda_j|\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2s$ . Нетрудно проверить, что 1)  $\mu E_{1,1} = \frac{1}{m_{k_1}}$ , 2)  $\mu E_{j,j} = \frac{p_{k_j}-1}{p_{k_j} m_{k_j}}$ ,  $j = 2, \dots, 2s$ , 3)  $\mu E_{j,1} = \frac{1}{p_{k_2}-1} E_{j,2}$ ,  $j \geq 2$ , 4)  $\mu E_{j,i-1} = \frac{p_{k_i}-1}{(p_{k_i}-1)p_{k_i-1}} \mu E_{j,i}$ ,  $j \geq 3, i = 3, \dots, j$ . Отсюда следует, что 1)  $\mu E_1 = \frac{1}{p_{k_2}-1} \mu E_2$ , 2)  $\mu E_j = \frac{p_{k_j}-1}{p_{k_2s} p_{k_{2s-1}} \dots p_{k_j}}$ ,  $j = 2, \dots, 2s$ .

Теперь оценим норму  $\|f\|_{\Psi,q}$  сверху. Покажем, что  $\|f\|_{\Psi,q} \leq C_5 Var(n)$ . Запишем норму  $\|f\|_{\Psi,q}^q$  в виде

$$\|f\|_{\Psi,q}^q = \int_0^1 \left( \frac{f^*(t)}{\Psi(t)} \right)^q \frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{2s} |\lambda_j|^q \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{dt}{\Psi^q(t)t},$$

где  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_j = \frac{1}{p_{k_{2s}} p_{k_{2s-1}} \dots p_{k_{j+1}}}$ ,  $j = 1, \dots, 2s$ .

Рассмотрим первое слагаемое. Обозначим через  $a = p_{k_{2s}} p_{k_{2s-1}} \dots p_{k_2}$ , тогда

$$\begin{aligned} |\lambda_1|^q \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{dt}{\Psi^q(t)t} &= |\lambda_1|^q \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{ap^{k+1}}}^{\frac{1}{ap^k}} \frac{dt}{\Psi^q(t)t} \leq |\lambda_1|^q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln p}{\Psi^q(\frac{1}{ap^k})} \leq \\ &\leq \frac{|\lambda_1|^q \ln p}{\Psi^q(\frac{1}{a})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \frac{k}{2s})^{\gamma q}} \leq |\lambda_1|^q \frac{2s C_6}{\Psi^q(\frac{1}{a})}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|f\|_{\Psi,q}^q \leq |\lambda_1|^q \frac{2s C_6}{\Psi^q(\frac{1}{p_{2s} p_{2s-1} \dots p_2})} + \sum_{j=1}^{2s} \frac{|\lambda_j|^q \ln p}{\Psi^q(\frac{1}{p_{2s} p_{2s-1} \dots p_{j+1}})}.$$

Если положим  $|\lambda_j| = \Psi(\frac{1}{p_{2s} p_{2s-1} \dots p_{j+1}})$ , то  $\|f\|_{\Psi,q}^q \leq C_5 2s$ .

Теперь оценим норму  $\|S_n^*(f)\|_{\tilde{\Psi},q}^q$  снизу. Сначала найдем оценку снизу для  $|S_n^*(f, x)|$  на каждом множестве  $E_j$ . Так как  $n$  имеет  $p$ -ичное разложение (4), то для  $S_n^*(f)$  в точке  $x \in E_j, j = 1, 2, \dots, 2s$  справедливо следующее:

$$\begin{aligned} S_n^*(f, x_1) &= \int_0^1 f(t) D_n^*(t \oplus x) dt = \int_0^1 f(t \ominus x) D_n^*(t) dt = \\ &= \sum_{i=1}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int_0^{\frac{1}{m_{k_i}}} f(t \ominus x) D_n^*(t) dt = \sum_{i=1}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int_{\Delta_x^{(m_{k_i})}} f(t) dt, \end{aligned}$$

где  $\Delta_x^{(m_{k_i})}$  — это промежуток вида  $[\frac{l}{m_{k_i}}, \frac{l+1}{m_{k_i}})$ ,  $l = 0, 1, \dots, m_{k_i} - 1$ , содержащий точку  $x$ . Функция  $f(x) = \lambda_j$  на промежутке  $\Delta_x^{(m_{k_i})}$  при  $i < j$ . Следовательно,

$$S_n^*(f, x) = \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int_{\Delta_x^{(m_{k_i})}} f(t) dt + \sum_{i=j}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int_{\Delta_x^{(m_{k_i})}} f(t) dt = \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (5)$$



Рассмотрим сумму  $\Sigma_1$  в (5) отдельно. Имеем

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+1} \lambda_j = \lambda_j \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+1}.$$

Отсюда

$$|\Sigma_1| \leq |\lambda_j| = \Psi \left( \frac{1}{p_{2s} p_{2s-1} \cdots p_{j+1}} \right). \quad (6)$$

Теперь оценим сумму  $\Sigma_2$ . Выберем  $j_0$  таким образом, чтобы

$$\Psi \left( \frac{1}{p_{2s} p_{2s-1} \cdots p_{j+1}} \right) \leq \frac{p+1}{p} \Psi \left( \frac{1}{p_{2s} p_{2s-1} \cdots p_{j+2}} \right), \quad \forall j \leq 2s - j_0.$$

Пусть  $x \in E_j$  и  $j \leq 2s - j_0$ . По построению функция  $f$  на промежутке  $\Delta_x^{(m_{k_i})}$  есть сдвиг  $f$  с промежутка  $\Delta_0^{(m_{k_i})}$ . Тогда можем записать

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{i=j}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int_{\Delta_x^{(m_{k_i})}} f(t) dt = \sum_{i=j}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int_{\Delta_0^{(m_{k_i})}} f(t) dt = \\ &= \sum_{i=j}^{2s-j_0} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int_{\Delta_0^{(m_{k_i})}} f(t) dt + \sum_{i=2s-j_0+1}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int_{\Delta_0^{(m_{k_i})}} f(t) dt = \\ &= \sum_{i=j}^{2s-j_0} (-1)^{i+1} m_{k_i} \sum_{l=1}^i \int_{E_{i,l}} f(t) dt + \sum_{i=2s-j_0+1}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \sum_{l=1}^i \int_{E_{i,l}} f(t) dt = \Sigma_{21} + \Sigma_{22}. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим сумму  $\Sigma_{22}$ . Для внутренней суммы имеем

$$\sum_{l=1}^i \int_{E_{i,l}} f(t) dt = \sum_{l=1}^{2s-j_0} \lambda_l \mu E_{i,l} + \sum_{l=2s-j_0+1}^{2s} \lambda_l \mu E_{i,l}. \quad (8)$$

В силу выбора  $j_0$  последовательность  $\{|\lambda_l| \mu E_{i,l}\}_{l=1}^{2s-j_0}$  является возрастающей. Кроме этого меру множества  $E_{i,l}$  можем записать в виде  $\mu E_{i,l} = \mu E_{i,i} \frac{1}{p_{k_i} \cdots p_{k_{i-1}}} \frac{p_{k_i}-1}{p_{k_i}-1}$ ,  $i > l$ . Поэтому окончательно получим

$$\left| \sum_{l=1}^{2s-j_0} \lambda_l \mu E_{i,l} \right| \leq \frac{1}{2^{i-2s+j_0} m_{k_i}} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{2s-j_0+1}}} \right). \quad (9)$$

Для второй суммы в (8) после некоторых преобразований получим

$$\left| \sum_{l=2s-j_0+1}^i \lambda_l \mu E_{i,l} \right| \leq \frac{2}{m_{k_i}} \sum_{l=2s-j_0+1}^{2s} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{l+1}}} \right). \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим

$$\left| \sum_{l=1}^i \lambda_l \mu E_{i,l} \right| \leq \frac{1 + j_0 2^{i-2s+j_0+1}}{m_{k_i} 2^{i-2s+j_0}} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{2s-j_0+1}}} \right).$$

Подставляя последнее неравенство в (7) для суммы  $\Sigma_{22}$ , получим

$$\Sigma_{22} \leq \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{2s-j_0+1}}} \right) (2j_0^2 + 1). \quad (11)$$



Оценим сумму  $\Sigma_{21}$  в равенстве (7). Во внутренней сумме числа  $\{|\lambda_l|\mu E_{i,l}\}_{l=1}^i$  образуют возрастающую последовательность. Поэтому

$$\left| \sum_{l=1}^i \lambda_l \mu E_{i,l} \right| \geq |\lambda_i| \mu E_{i,i} - |\lambda_{i-1}| \mu E_{i,i-1} \geq \frac{1}{p^2} |\lambda_i| \frac{p_{k_i} - 1}{p_{k_i} m_{k_i}},$$

$$\text{sign} \left( \sum_{l=1}^i \lambda_l \mu E_{i,l} \right) = \text{sign} (\lambda_i \mu E_{i,i}) = (-1)^{i+1}.$$

Отсюда

$$\Sigma_{21} = |\Sigma_{21}| \geq \frac{1}{2p^2} \sum_{i=j}^{2s-j_0} |\lambda_i|. \tag{12}$$

Объединяя полученные оценки (6),(11) и(12), получим при  $x \in E_j$

$$|S_n^*(f, x)| \geq \frac{1}{2p^2} \sum_{i=j}^{2s} |\lambda_i| - |\lambda_j| - (2j_0^2 + 1) |\lambda_{2s-j_0}| - \frac{1}{2p^2} \sum_{i=1}^{j_0} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{2s-j_0+1+i}}} \right).$$

Выберем  $j_1 \geq j_0, j \leq 2s - j_1 \leq 2s - j_0$ . Пусть  $j_0$  и  $j_1$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{j_0 + 1}{C_p + 1} \left(1 - \frac{1}{j_0}\right)^{C_p} \geq 4p^2, \quad \frac{j_1 + 1}{C_p + 1} \left(1 - \frac{1}{j_0}\right)^{C_p} \geq 16p^3.$$

Тогда учитывая лемму 1, при  $j \leq 2s - j_1$ , получим  $|S_n^*(f, x)| \geq \frac{1}{8p^4} \sum_{i=j}^{2s} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}} \right)$ .

Пусть теперь  $\alpha(x) \downarrow 0$  при  $x \downarrow 0$ . Оценим норму  $\|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi}\alpha, q}$ . Функция  $\tilde{\Psi}$  определена равенством (3) в котором  $m = 1$ .

$$\|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi}\alpha, q}^q = \int_0^1 \left( \frac{|S_n^*(f, t)|}{\tilde{\Psi}(t)\alpha(t)} \right)^q \frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{2s} \int_{E_j} \geq \sum_{j=1}^{2s-j_1} \int_{E_j} \geq$$

$$\geq \left( \frac{1}{8p^2} \right)^q \sum_{j=1}^{2s-j_1} \left( \sum_{i=j}^{2s} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}} \right) \right)^q \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{1}{\tilde{\Psi}^q(t)\alpha^q(t)} \frac{dt}{t}.$$

Заменяя  $\tilde{\Psi}(t)$  и  $\alpha(t)$  наибольшим значением и используя Лемму 2 при  $m = 1$  получим,

$$\|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi}\alpha, q}^q \geq \left( \frac{1}{8p^2} \right)^q \sum_{j=1}^{2s-j_1} \left( \sum_{i=j}^{2s} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}} \right) \right)^q \frac{\ln p_{k_{j+1}}}{\tilde{\Psi}^q \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_j}} \right) \alpha^q \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}} \right)}.$$

Применяя лемму 2, получим

$$\|S_n(f_1)\|_{\tilde{\Psi}\alpha, q}^q \geq \left( \frac{1}{8p^2} \right)^q \sum_{j=1}^{2s-j_1} \left( \sum_{i=j}^{2s} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}} \right) \right)^q \frac{(1 + C_p)^3 \ln p_{k_{j+1}}}{\tilde{\Psi}^q \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}} \right)} \alpha^q \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}} \right). \tag{13}$$

Рассмотрим отдельно

$$\tilde{\Psi} \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}} \right) = \int_{\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}}}^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt = \sum_{i=j+1}^{2s-1} \int_{\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_i}}}^{\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}}} \frac{\Psi(t)}{t} dt + \int_{\frac{1}{p_{k_{2s}}}}^1 \frac{\Psi(t)}{t} dt \leq$$

$$\leq \sum_{i=j}^{2s} \Psi \left( \frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}} \right) \ln p_{k_i}.$$



Подставляя последнее неравенство в (13) имеем

$$\|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi},q}^q \geq C \sum_{j=1}^{2s-j_1} \frac{1}{\alpha^q \left(\frac{1}{p^{k_{2s}} \dots p^{k_{j+1}}}\right)} \geq C \sum_{j=1}^{2s-j_1} \frac{1}{\alpha^q \left(\frac{1}{2^{2s-j}}\right)}.$$

Отсюда с учетом оценки нормы  $\|f\|_{\Psi,q}$  имеем

$$\frac{\|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi},q}^q}{\|f\|_{\Psi,q}^q} \geq C_4 \frac{1}{2s} \sum_{j=1}^{2s-j_1} \frac{1}{\alpha^q \left(\frac{1}{2^{2s-j}}\right)} \rightarrow +\infty \quad (14)$$

при  $2s \rightarrow +\infty$ .

2. Теперь докажем теорему для произвольного  $m > 1$ . Обозначим  $\Psi_1(x) = \Psi^{\frac{1}{m}}(x)$ ,  $q_1 = mq$ ,  $\alpha_1(x) = \alpha^{\frac{1}{m}}(x)$  и пусть  $f_1$  — функция, построенная в первом пункте по функциям  $\Psi_1(x)$ ,  $\alpha_1(x)$  и числу  $q_1$ .  $f(\mathbf{x}) = f_1(x^{(1)})f_1(x^{(2)}) \dots f_1(x^{(m)})$ .

Сначала оценим сверху норму  $\|f\|_{\Psi,q}$ .

$$\|f\|_{\Psi,q}^q \leq C_7 \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\|f\|_i}{\Psi\left(\frac{1}{2^i}\right)} \right)^q = C_7 \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\|f_1\|_i^m}{\Psi\left(\frac{1}{2^i}\right)} \right)^q = C_7 \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\|f_1\|_i}{\Psi^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{2^i}\right)} \right)^{q_1} \leq C_8 \|f_1\|_{\Psi^{\frac{1}{m}},q_1}^{q_1}.$$

Обозначим через  $\tilde{\Psi}_1 = \Psi^{\frac{1}{m}}$ . Рассмотрим

$$\tilde{\Psi}(x) = \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{m-1} \int_x^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{m\gamma} d \ln \frac{1}{x} \leq \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{m(\gamma+1)} = \tilde{\Psi}_1^m(x).$$

Теперь рассмотрим норму  $\|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi},q}$ . Так как  $\|S_n(f)\|_i = \|S_n(f_1)\|_i^m$ , то

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi},q}^q &\geq C_9 \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\|S_n(f)\|_i}{\tilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^i}\right) \alpha\left(\frac{1}{2^i}\right)} \right)^q = C_9 \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\|S_n(f_1)\|_i^m}{\tilde{\Psi}_1^m\left(\frac{1}{2^i}\right) \alpha_1\left(\frac{1}{2^i}\right)} \right)^q = \\ &= C_9 \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{\|S_n(f_1)\|_i}{\tilde{\Psi}_1\left(\frac{1}{2^i}\right) \alpha_1\left(\frac{1}{2^i}\right)} \right)^{q_1} \geq C_{10} \|S_n(f_1)\|_{\tilde{\Psi}_1 \alpha_1, q_1}^{q_1}. \end{aligned}$$

Окончательно, учитывая (14), получим

$$\frac{\|S_n(f)\|_{\tilde{\Psi},q}^q}{\|f\|_{\Psi,q}^q} \geq C_{11} \frac{\|S_n(f_1)\|_{\tilde{\Psi}_1 \alpha_1, q_1}^{q_1}}{\|f_1\|_{\tilde{\Psi}_1, q_1}^{q_1}} \rightarrow +\infty$$

и теорема доказана.  $\square$

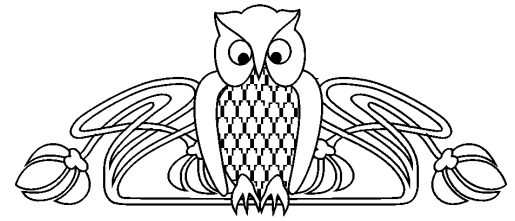
### Библиографический список

1. *Lukomskii S.F* Convergence of Fourier series in Lorentz spaces // East J. on Approximat. 2003. V. 9, № 2. P. 229–238.
2. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джаварли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонического анализа на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
3. *Лукьяненко О.А.* О константах Лебега для системы Виленкина // Механика. Математика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 70.
4. *Лукомский С.Ф.* О сходимости рядов Фурье Уолша в пространствах, близких к  $L_\infty$  // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 6. С. 882–889.
5. *Асташкин С.В.* Об экстраполяционных свойствах шкалы  $L_p$ -пространств // Мат. сборник. 2003. Т. 194, № 6. С. 26–42.
6. *Лукомский С.Ф.* О подпоследовательностях частичных сумм рядов Фурье–Уолша в пространствах Лоренца // Известия вузов. Математика. 2006. № 6. С. 48–55.



УДК 517.518.238 + 517.518.85

## ОБ ЭРМИТОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ



Ю.В. Матвеева

Саратовский государственный университет,  
кафедра математического анализа  
E-mail: KupriyanovaJulia@rambler.ru

Method of Hermite Interpolation by Polynomials of the Third  
Degree on a Triangle Using Mixed Derivatives

J.V. Matveeva

При построении треугольных конечных элементов оценки погрешности интерполяции для производных функции в знаменателе содержат синус наименьшего угла треугольника. Способ эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени, предложенный Н.В. Байдаковой, при аппроксимации любых производных свободен от условия "синуса наименьшего угла". В работе рассмотрен двумерный кубический элемент в методе конечных элементов, подобный элементу Н.В. Байдаковой. Полученные оценки погрешности для производных функции по направлениям до третьего порядка включительно не зависят явно от геометрии треугольника. Установлена с точностью до абсолютных констант неулучшаемость полученных оценок погрешности аппроксимации производных по направлениям.

There is a sine of the minimum angle of the triangle in the denominator of estimation of inaccuracy of interpolation for derivative of function in building of triangular finite elements. The way of method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle suggested by N.V. Baidakova is free of minimum angle condition for approximation of any derivatives. There is two-dimensional cubic element in finite element method equal to element of N.V. Baidakova in this paper. The considered estimations of inaccuracy for function derivatives in the directions up to derivative of order three in inclusive is free of triangle geometry. The unimprovable of calculated estimations of inaccuracy of approximations of derivatives in directions is proved in accuracy up to absolute constants.

В работе [1] Н.В. Байдаковой построен новый способ эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени. На невырожденном треугольнике рассматривается функция  $f(x, y)$ , непрерывная вместе с частными производными до четвертого порядка включительно. Треугольник с диаметром  $d$  расположен так, чтобы его наибольшая сторона располагалась на оси  $Ox$ . Равномерные нормы любых четвертых частных производных функции  $f(x, y)$  на треугольнике не превосходят  $M$ . Строится интерполяционный полином  $P_3(x, y) = P_3(z) = P_3(f; z)$  со следующими условиями: значения этого полинома и его первые частные производные в вершинах треугольника совпадают со значениями функции  $f(x, y)$  и производных функции в тех же точках соответственно, а также смешанные производные полинома и функции второго порядка в вершине треугольника по направлениям наибольшей и наименьшей сторон, исходящим из этой вершины, совпадают. В [1] доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Существует константа  $K$  такая, что для любой функции  $f$ , непрерывной на треугольнике вместе со всеми своими частными производными до четвертого порядка включительно, справедлива оценка*

$$\left\| \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^{n-j} \partial y^j} - \frac{\partial^n P_3(x, y)}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right\|_C \leq K M d^{4-n} \frac{1}{\sin^j \beta},$$

где  $0 \leq n \leq 3; 0 \leq j \leq n; \beta$  — средний угол треугольника.

Как мы видим, оценки погрешности любых производных функции до третьего порядка включительно в знаменателях отсутствует синус наименьшего угла, что позволяет ослабить требования к триангуляции. Попытки ослабления этого условия предпринимались давно. А. Женишек [2] в 1995 году рассмотрел вопрос приближения функций на треугольнике кубическими полиномами и получил оценку приближения частных производных первого порядка через синус среднего по величине угла. В 2005 году в работе Ю.Н. Субботина [3] построен новый кубический элемент, для которого оценки погрешности аппроксимации производных функции до третьего порядка включительно свободны от известного условия «синуса наименьшего угла» триангуляции. В работе [4] получены оценки приближения производных первого порядка по направлениям сторон треугольника, а в [5] — оценки приближения производных по направлениям до третьего порядка включительно, причем, как оказалось, эти оценки (в [4], [5]) не зависят явно от геометрии треугольника.

В данной работе рассмотрим задачу аппроксимации, аналогичную [1], и получим оценки отклонения производных функции и кубического интерполяционного полинома по направлениям сторон треугольника до третьего порядка включительно.



Пусть  $\overline{T} = (A_1 A_2 A_3)$  — замкнутый невырожденный треугольник на плоскости с внутренностью  $T$ . Функция  $f(\mathbf{x})$  определена на треугольнике  $\overline{T}$ . Пусть далее  $\mathbf{e}_{ij} = \frac{\overrightarrow{A_i A_j}}{|A_i A_j|}$  — единичные векторы.

Будем строить полином  $Q(\mathbf{x})$  с действительными коэффициентами степени 3, который в вершинах  $A_i, i = \overline{1, 3}$ , треугольника интерполирует функцию  $f(\mathbf{x})$  вместе с ее производными по направлениям сторон треугольника  $T$ , т.е.

$$f(A_i) = Q(A_i), \frac{\partial Q(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}}, i, j = \overline{1, 3}, i \neq j. \quad (1)$$

Такой полином имеет 10 коэффициентов. Условия (1) определяют 9 из них. Остается выбрать один, в зависимости от которого можно будет говорить о степени приближения функции  $f(\mathbf{x})$  полиномом  $Q(\mathbf{x})$ .

Теперь выберем недостающий в определении полинома  $Q(\mathbf{x})$  коэффициент способом, близким к [1]. Определим его из равенства смешанных производных в произвольной вершине треугольника по направлениям двух ребер, исходящих из этой вершины.

Для определенности положим

$$\frac{\partial^2 Q(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12} \mathbf{e}_{13}} = \frac{\partial^2 f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12} \mathbf{e}_{13}}. \quad (2)$$

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(\mathbf{x})$  определена на треугольнике  $\overline{T}$  и имеет на нем непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно,  $d$  — диаметр  $\overline{T}$ ,

$$M_4 = \max_{0 \leq i, j \leq 4, \sum i_j = 4} \max_{\mathbf{x} \in \overline{T}} \left| \frac{\partial^4 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_1^{i_1} \partial \mathbf{e}_2^{i_2} \partial \mathbf{e}_3^{i_3} \partial \mathbf{e}_4^{i_4}} \right|.$$

Тогда существует единственный интерполяционный полином  $Q(\mathbf{x})$ , удовлетворяющий условиям (1), (2), и справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^n (Q - f)}{\partial \mathbf{e}_{12}^k \partial \mathbf{e}_{13}^{n-k}} \right| \leq C M_4 d^{4-n}, 1 \leq n \leq 3, 0 \leq k \leq n, \quad (3)$$

где  $C$  — абсолютная постоянная. Можно считать, что  $C = 2$ .

**Доказательство.** Доказательство будем проводить в барицентрических координатах и считать, что  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , где  $x_1, x_2, x_3$  — барицентрические координаты точки  $\mathbf{x}$ . Тогда полином  $Q(\mathbf{x})$ , интерполирующий функцию  $f(\mathbf{x})$  на  $\overline{T}$  с условиями (1), имеет вид

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 f(A_i) x_i^3 + 3 \sum_{i \neq j, i, j \geq 0} f(A_i) x_i^2 x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} |A_i A_j| \cdot \left( \frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} x_i + \frac{\partial f(A_j)}{\partial \mathbf{e}_{ji}} x_j \right) x_i x_j + 6a_{111} x_1 x_2 x_3.$$

Из условия (2) найдем коэффициент  $a_{111}$ :

$$6a_{111} = 6f(A_1) + 2 \cdot |A_1 A_2| \cdot \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} + 2 \cdot |A_1 A_3| \cdot \frac{\partial f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{13}} + |A_1 A_2| \cdot |A_1 A_3| \cdot \frac{\partial^2 f(A_1)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}}. \quad (4)$$

Если в выражении многочлена  $Q(\mathbf{x})$  положить  $x_j = 0, j = \overline{1, 3}$ , то получим многочлен Эрмита на стороне  $A_i A_k, (i, k = \overline{1, 3}, i \neq j, k \neq j)$ .

Для краткости будем обозначать  $f_i = f(A_i), i = \overline{1, 3}; \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{e}_{kj}} = \frac{\partial f(A_i)}{\partial \mathbf{e}_{kj}}, k \neq j; k, j = \overline{1, 3}$ .

Так как  $x_i, i = \overline{1, 3}$  — барицентрические координаты, то производные по направлениям можно вычислить по следующему правилу:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{1}{|A_i A_j|} \left( \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), i, j = \overline{1, 3}, i \neq j. \quad (5)$$

Используя (5), имеем

$$\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} = \frac{1}{|A_1 A_2|} \cdot (6f_2 x_2 (x_1 + x_3) + 6a_{111} x_3 (x_1 - x_2) - 6f_1 x_1 (x_2 + x_3)) +$$





$$\begin{aligned}
& + \frac{|A_2A_3|}{|A_1A_2|} \cdot \left[ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{23}} \cdot 2x_2x_3 + \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{32}} \cdot x_3^2 \right] + \frac{|A_1A_3|}{|A_1A_2|} \cdot \left[ -\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}} \cdot 2x_1x_3 - \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{31}} \cdot x_3^2 \right] + \\
& \quad + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}} \cdot x_1(x_1 - 2x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{21}} \cdot x_2(2x_1 - x_2) \right]. \\
\frac{\partial^2 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}^2} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_{12}} \left( \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right) = \frac{1}{|A_1A_2|^2} \cdot (6f_2(x_1 + x_3 - x_2) - 12a_{111}x_3 + 6f_1(x_2 + x_3 - x_1)) + \\
& + \frac{2x_3}{|A_1A_2|^2} \cdot \left[ |A_2A_3| \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{23}} + |A_1A_3| \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}} \right] + \frac{1}{|A_1A_2|} \cdot \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}} \cdot (2x_2 - 4x_1) + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{21}} \cdot (2x_1 - 4x_2) \right], \\
\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}^3} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_{12}} \left( \frac{\partial^2 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}^2} \right) = \frac{6}{|A_1A_2|^3} \cdot \left( 2(f_1 - f_2) + |A_1A_2| \cdot \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{12}} \right] \right), \quad (6) \\
\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{13}} &= \frac{1}{|A_1A_3|} \cdot (6f_3x_3(x_1 + x_2) + 6a_{111}x_2(x_1 - x_3) - 6f_1x_1(x_2 + x_3) + \\
& + \frac{|A_2A_3|}{|A_1A_3|} \cdot \left[ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{23}} \cdot x_2^2 + \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{32}} \cdot 2x_2x_3 \right] + \frac{|A_1A_2|}{|A_1A_3|} \cdot \left[ -\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}} \cdot 2x_1x_2 - \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{21}} \cdot x_2^2 \right] + \\
& \quad + \frac{1}{|A_1A_3|} \cdot \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}} \cdot x_1(x_1 - 2x_3) + \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{31}} \cdot x_3(2x_1 - x_3) \right], \\
\frac{\partial^2 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{13}^2} &= \frac{1}{|A_1A_3|^2} \cdot (6f_3(x_1 + x_2 - x_3) - 12a_{111}x_2 + 6f_1(x_2 + x_3 - x_1)) + \\
& + \frac{2x_2}{|A_1A_3|^2} \cdot \left[ |A_1A_2| \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}} + |A_2A_3| \cdot \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{32}} \right] + \frac{1}{|A_1A_3|} \cdot \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}} \cdot (2x_3 - 4x_1) + \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{31}} \cdot (2x_1 - 4x_3) \right], \\
\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{13}^3} &= \frac{6}{|A_1A_3|^3} \cdot \left( 2(f_1 - f_3) + |A_1A_3| \cdot \left[ \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}} + \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{13}} \right] \right).
\end{aligned}$$

Оценим отклонение производных по направлениям  $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}$ . Оценим сначала отклонение производной третьего порядка по направлению  $\mathbf{e}_{12}$ . Рассмотрим выражение (6). Представим  $f_2$  и  $\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{12}}$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $A_1$  с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки  $A_1$  (в дальнейшем не будем указывать вид остатка, подразумевая форму Лагранжа), т.е.

$$\begin{aligned}
f_2 &= f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}} \cdot |A_1A_2| + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^2} \cdot |A_1A_2|^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^3} \cdot |A_1A_2|^3 + \frac{1}{4!} \cdot \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4} \cdot |A_2\xi|^4, \\
\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{e}_{12}} &= \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^2} \cdot |A_1A_2| + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^3 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^3} \cdot |A_1A_2|^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4} \cdot |A_1\eta|^3.
\end{aligned}$$

где  $\xi, \eta$  — точки, лежащие на стороне  $A_1A_2$  треугольника. Тогда

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}^3}(\mathbf{x}) \right| &= \left| \frac{\partial^3 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^3} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}^3} \right| + \frac{1}{|A_1A_2|^3} \cdot \left| |A_1A_2||A_2\eta|^3 \cdot \frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4} - \frac{|A_2\xi|^4}{2} \cdot \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4} \right| \leq \\
&\leq \left| \frac{\partial^3 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}^3} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}^3} \right| + \frac{1}{|A_1A_2|^3} \cdot \left| |A_1A_2||A_2\eta|^3 \cdot \frac{\partial^4 f(\eta)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4} - \frac{|A_2\xi|^4}{2} \cdot \frac{\partial^4 f(\xi)}{\partial \mathbf{e}_{12}^4} \right| \leq CM_4d.
\end{aligned}$$

Аналогично получается оценка для производной третьего порядка по направлению  $\mathbf{e}_{13}$ , если  $f_3$  и  $\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{13}}$  представить по формуле Тейлора в окрестности точки  $A_1$ .

Теперь рассмотрим смешанные производные по направлениям  $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}$  третьего порядка.

$$\frac{\partial^3 Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}^2} = \frac{2}{|A_1A_2| \cdot |A_1A_3|^2} \left( 6(f_1 - a_{111}) + |A_1A_2| \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}} + |A_2A_3| \cdot \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{32}} + |A_1A_3| \left( 2 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{13}} - \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{31}} \right) \right).$$

Подставляя значение  $a_{111}$  из (4) и представляя  $\frac{\partial f(A_3)}{\partial \mathbf{e}_{12}}$  по формуле Тейлора:

$$\frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{e}_{12}} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}_{12}} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}} \cdot |A_1A_3| + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^3 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}^2} \cdot |A_1A_3|^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^4 f(\theta)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}^3} \cdot |A_3\theta|^3,$$



где  $\theta$  — точка, лежащая на стороне  $A_1A_3$  треугольника, получаем, что

$$\left| \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}^2}(\mathbf{x}) \right| = \left| \frac{\partial^3 f_1}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}^2} - \frac{\partial^3 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{|A_3\theta|}{|A_1A_3|^2} \cdot \frac{\partial^4 f(\theta)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}^3} \right| \leq CM_4d.$$

Аналогично имеем оценку  $\left| \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{13} \partial \mathbf{e}_{12}^2} \right| \leq CM_4d$ . Итак, неравенства (3) при  $n = 3$  доказаны.

Пусть теперь  $n = 2$ . Оценим смешанную производную по направлениям  $\mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}$ . Для этого рассмотрим криволинейный интеграл:

$$\int_c^x \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}^2} d\mathbf{e}_{13} = \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}}(x) - \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}}(c), \quad (7)$$

где  $c$  — точка, являющаяся проекцией точки  $\mathbf{x}$  на сторону  $A_1A_3$  треугольника. Таким образом, нам осталось получить оценку для второго слагаемого в (7). Так как значения производных  $\frac{\partial(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}}$  по направлению  $\mathbf{e}_{12}$  в точках  $A_1, A_3$  равны нулю, то найдется точка  $B$ , лежащая в той половине  $[A_1A_3]$ , что и точка  $c$ , в которой  $\frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}} = 0$ . Тогда, используя этот факт и применяя теорему Лагранжа, имеем

$$\left| \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}}(c) \right| = \left| \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}}(c) - \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}}(B) \right| = \left| \frac{\partial^3(Q-f)(\eta)}{\partial \mathbf{e}_{12}^2 \partial \mathbf{e}_{13}} \right| \cdot |c\eta| \leq \left| \frac{\partial^3(Q-f)(\eta)}{\partial \mathbf{e}_{12}^2 \partial \mathbf{e}_{13}} \right| \cdot \frac{|A_1A_3|}{2}.$$

Используя полученные оценки для производных третьего порядка, получаем с учетом (7)

$$\left| \frac{\partial^2(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}}(\mathbf{x}) \right| \leq CM_4d^2.$$

Пользуясь теми же средствами, получим оценки отклонения производных второго и первого порядков по направлениям  $\mathbf{e}_{12}$  и  $\mathbf{e}_{13}$ . Таким образом, доказаны неравенства (3) при  $n = 1, 2$ . Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 можно получить оценки теоремы 1. Для этого расположим треугольник так, чтобы наибольшая его сторона, например, сторона  $A_1A_2$ , лежала на оси  $Ox$ . Строим интерполяционный полином третьей степени с условиями (1) и  $\frac{\partial Q(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{12}} = \frac{\partial f(P_{13})}{\partial \mathbf{e}_{12}}$ . Пусть  $A_1A_3$  — наименьшая сторона. Тогда производная по направлению  $\mathbf{e}_{12}$  совпадает с производной по  $x$ , т.е.

$$\left| \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial x^3} \right| = \left| \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}^3} \right| \leq CM_4d.$$

Чтобы получить производные по  $y$ , разложим единичный вектор  $\mathbf{e}$ , коллинеарный  $Oy$ , по единичным векторам  $\mathbf{e}_{12}$  и  $\mathbf{e}_{13}$ :

$$\mathbf{e} = \alpha_1 \mathbf{e}_{12} + \alpha_2 \mathbf{e}_{13}.$$

Обозначим через  $\beta$  и  $\gamma$  средний и наибольший углы в треугольнике соответственно. Тогда несложно найти коэффициенты разложения вектора  $\mathbf{e}$ :

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sin \beta}, \quad \alpha_2 = -\frac{\cos \beta}{\sin \beta}.$$

Имеет место неравенство  $C_1 \sin \gamma \leq \sin \beta \leq C_2 \sin \gamma$ . Тогда можно получить оценку для производной по  $y$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial y^3} \right| &= \left| \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}^3} \right| = \\ &= \left| \alpha_1^3 \cdot \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}^3} + 3\alpha_1^2\alpha_2 \cdot \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12}^2 \partial \mathbf{e}_{13}} + 3\alpha_1\alpha_2^2 \cdot \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{12} \partial \mathbf{e}_{13}^2} + \alpha_2^3 \cdot \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial \mathbf{e}_{13}^3} \right|. \end{aligned}$$

Воспользуемся результатами теоремы 2:

$$\left| \frac{\partial^3(Q-f)}{\partial y^3} \right| \leq CM_4d \cdot \left( \frac{1}{\sin \beta} \right).$$



Аналогично получаются оценки для остальных частных производных. Эти утверждения останутся справедливыми, если считать, что интерполяционное условие (2) задается в вершине любого по величине угла в треугольнике. Сравнивая результаты с утверждением теоремы 1, видно, что теорема 1 является следствием теоремы 2.

**Замечание.** Неравенства (3) являются точными по порядку в следующем смысле. Пусть  $0 < x_0 < 1$ ,  $T$  — треугольник с вершинами  $A_1(0, b)$ ,  $A_2(x_0, 0)$ ,  $A_3(0, a)$ ;  $b < 0$ ,  $d = a + |b|$ ,  $0 < a \leq |b|$ ,  $Q$  — сплайн третьей степени для функции  $f(x, y) = |y|^4$ , удовлетворяющий интерполяционным условиям (1) и  $\frac{\partial^2 Q(A_i)}{\partial e_{ij} e_{ik}} = \frac{\partial^2 f(A_i)}{\partial e_{ij} e_{ik}} (i, j, k = \overline{1, 3}, i \neq j \neq k)$ . Тогда для производных по направлениям сторон треугольника справедливы двусторонние оценки:

$$\frac{1}{96} M_4 d^{4-n} \leq \sup_{x \in T} \left| \frac{\partial^n (Q - f)}{\partial e_{ij}^k \partial e_{ik}^{n-k}} \right| \leq 2 M_4 d^{4-n}.$$

Автор выражает искреннюю благодарность С.Ф. Лукомскому за постановку задачи и внимание к работе.

### Библиографический список

1. Байдакова Н.В. Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Труды Института математики и механики. Теория функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. Т. 11, № 2. С. 47–52.
2. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type // Math. Comp. 1995. V. 64, № 211. P. 929–941.
3. Субботин Ю.Н. Новый кубический элемент в МКЭ // Труды Института математики и механики. Тео-

- рия функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. Вып. 11, № 2. С. 120–130.
4. Куприянова Ю.В. Об оценке производной по направлению Эрмитова сплайна на треугольнике // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2006. Вып. 8. С. 59–61.
5. Куприянова Ю.В. Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена по направлениям на треугольнике // Совр. методы теории функций и смеж. проблемы: Материалы конф. Воронеж, 2007. С. 120–121.

УДК 519.872

## АНАЛИЗ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ МАРШРУТИЗАЦИЕЙ

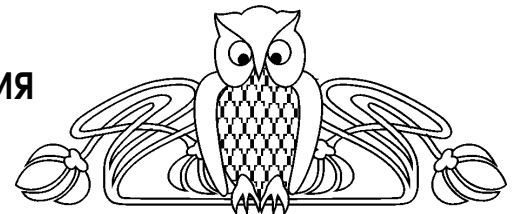
Ю.И. Митрофанов, Н.П. Фокина

Саратовский государственный университет,  
кафедра системного анализа и автоматического управления  
E-mail: MitrophanovYul@info.sgu.ru

Предлагается метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с одним классом требований и централизованным динамическим управлением маршрутизацией, основанным на использовании в процессе функционирования сети в течение фиксированных интервалов времени различных маршрутных матриц. Метод анализа основан на описании процесса функционирования сети обслуживания модельными цепями Маркова. Приводится пример анализа сети рассматриваемого типа.

### ВВЕДЕНИЕ

Применение методов динамического управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания (СеМО) позволяет значительно повысить качество их функционирования. Используемые в сетях методы управления маршрутизацией в существенной степени определяют содержание методов анализа сетей обслуживания этого типа. Достаточно полное представление о методах анализа можно получить из обзора [1]. Примерами работ, в которых рассматриваются задачи анализа сетей массового обслуживания с зависящей от состояния сетей маршрутизацией, являются [2–9]. В работе [2] исследуется замкнутая сеть с одним классом требований и интенсивностями переходов требований, зависящими от состояния сети. Определяются условия, которым должны удовлетворять интенсивности переходов, чтобы существовало стационарное распределение вероятностей состояний сети в мультипликативной



An Analysis of Queueing Networks with Dynamic Routing Control

Y.I. Mitrophanov, N.P. Fokina

A method for analysis of closed exponential queueing networks with one class of customers and central dynamic routing control is proposed. The method of control is based on a use of different routing matrices during fixed time intervals in the network operation process. The method for analysis is based on a description of the network operation process with model Markov chains. An example of analysis of this type network is given.



форме. Стационарное распределение для замкнутой сети с одним классом требований и маршрутными матрицами, зависящими от состояния сети и используемыми в течение определенных интервалов времени в процессе функционирования сети, получено в работах [3, 4], а для сети с несколькими классами требований и маршрутизацией, зависящей от времени, проведенного сетью в текущем состоянии, — в работе [5]. Работа [6] посвящена изучению характеристик выходных и маршрутных функций марковских СеМО с дискретным и непрерывным временем, групповыми переходами требований и зависящей от состояния сетей маршрутизацией. В работе [7] рассматриваются алгоритмы маршрутизации в реальном времени для открытых экспоненциальных СеМО с одним классом требований, последовательно-параллельной топологией и системами ограниченной емкости. В работе [8] предлагаются методы анализа замкнутых СеМО, в которых маршрутные вероятности для их подсетей являются рациональными функциями от числа требований, находящихся в принадлежащих подсетям системах. Аналогичная зависимость рассматривается в работе [9] для сетей с системами таких же типов, которые используются в СеМО типа ВСМР [10]. Актуальность и значимость работ по развитию методов управления маршрутизацией и методов анализа сетей с управлением маршрутизацией обусловлены эффективностью использования СеМО этого типа в качестве математических моделей больших сложных стохастических систем с сетевой структурой, функционирование которых обеспечивается развитыми подсистемами управления.

В данной работе предлагается метод анализа замкнутых сетей массового обслуживания с динамическим управлением маршрутизацией. В процессе функционирования сети система управления производит идентификацию состояния сети в заданные моменты времени и формирует зависящие от этого состояния управляющие воздействия на сеть. Целью управления является обеспечение достижения максимально возможного значения стационарной характеристики сети, являющейся основной при определении качества ее функционирования.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $N$  — замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с  $L$  системами массового обслуживания  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , типа  $M/M/1$  с интенсивностями обслуживания  $\mu_i$ ,  $Q$  требованиями одного класса и динамическим управлением маршрутизацией. Топология сети определяется матрицей смежности  $W = (w_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ , соответствующего ориентированного графа. Обозначим через  $s^{(n)} = (s_1^{(n)}, \dots, s_L^{(n)})$  состояние сети с номером  $n$ , где  $s_i^{(n)}$  — число требований в системе  $S_i$ , через  $X$  — множество состояний сети мощности  $c_X = |X|$ . Длительность пребывания сети в состоянии  $s^{(n)} \in X$  является случайной величиной с экспоненциальным распределением и математическим ожиданием (м.о.)  $\beta_n = 1/\alpha_n$ , где  $\alpha_n$  — параметр ее функции распределения. Качество функционирования сети определяется значением ее стационарной характеристики, называемой ведущей. Предполагается, что состояние  $s^{(n)}$  имеет характеристику  $V^{(n)}$  — потенциал этого состояния (значение потенциала — неотрицательное вещественное число). Потенциал состояния определяет значимость пребывания сети в данном состоянии для достижения сетью максимального значения ведущей характеристики. При нумерации состояний предполагается, что если  $V^{(m)} > V^{(n)}$ , то  $m < n$ . В случае равенства потенциалов состоянию с меньшим м.о. длительности пребывания присваивается меньший номер. Состояние  $s^{(1)}$  с максимальным потенциалом называется базовым. Соответственно значению потенциала состояния сети делятся на доминантные и ординарные. Обозначим через  $Y$  и  $Z$  множества доминантных и ординарных состояний,  $X = Y \cup Z$ ,  $c_Y = |Y|$ ,  $c_Z = |Z|$ ,  $c_X = c_Y + c_Z$ . Доминантные состояния имеют большие потенциалы по сравнению с ординарными, поэтому  $Y = \{s^{(1)}, \dots, s^{(c_Y)}\}$ . Множества номеров всех состояний сети, номеров доминантных и ординарных состояний обозначим через  $B = \{1, \dots, c_X\}$ ,  $D = \{1, \dots, c_Y\}$ ,  $U = \{c_Y + 1, \dots, c_Y + c_Z\}$  соответственно. В качестве ведущей характеристики сети  $N$  выбрана стационарная вероятность  $\pi(Y)$  пребывания сети в множестве доминантных состояний  $Y$ . Поэтому повышение качества функционирования сети непосредственно связано с увеличением значения  $\pi(Y)$ .

Процесс эволюции сети  $N$  представляет собой последовательность фрагментов, называемых тактами. Различаются такты двух видов — нормальные  $\hat{x}$  и коррективные  $\tilde{x}$ . В момент окончания каждого такта производится идентификация состояния  $s^{(g)}$  сети; если  $s^{(g)} \in Y$ , то очередной такт является нормальным, в противном случае — коррективным. В зависимости от состояния  $s^{(g)} \in Z$  различаются  $c_Z$  типов коррективных тактов. В течение такта  $\hat{x}$  используется маршрутная матрица  $\Theta = (\theta_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ , в течение коррективного такта  $\tilde{x}^J$  типа  $J = g - c_Y$ ,  $J \in \{1, \dots, c_Z\}$ , — управляющая маршрутная матрица  $\Theta^{J,\kappa} = (\theta_{ij}^{J,\kappa})$ , зависящая от начального состояния  $s^{(g)} \in Z$  и параметра управления  $\kappa \in \{1, 2, \dots, L\}$ . Целью использования управляющих маршрутных матриц в течение кор-



рективных тактов является возвращение сети в множество доминантных состояний  $Y$  из множества состояний  $Z$ . Нормальные такты имеют фиксированную длительность  $\varphi$ , длительность коррективных тактов  $\eta_g^{J,\kappa}$  зависит от их типа. Параметры  $c_Y$ ,  $\varphi$  и  $\kappa$  являются параметрами метода управления маршрутизацией, их значения задаются до начала функционирования сети и не изменяются в процессе ее функционирования. Целью данной работы является разработка метода управления маршрутизацией и метода анализа сетей обслуживания с данным методом управления.

## 2. МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ МАРШРУТНЫХ МАТРИЦ

Смежное по отношению к состоянию  $s^{(n)}$  состояние  $s^{(\cdot)}(n, i, j)$  называется состоянием, порожденным состоянием  $s^{(n)}$  и переходом требования из  $S_i$  в  $S_j$ . Пусть

$$\Omega_i^{(n)} = \{s^{(\cdot)}(n, i, l) | l \in \{1, \dots, L\}, l \neq i, s_i^{(n)} > 0, w_{il} = 1\}, i \in \{1, \dots, L\}, n \in B.$$

Состояние  $\bar{s}^{(\cdot)}(n, i, \cdot) \in \Omega_i^{(n)}$ , имеющее наибольший потенциал  $V^{(\cdot)}$  по сравнению с другими состояниями множества  $\Omega_i^{(n)}$ , называется остовным состоянием множества  $\Omega_i^{(n)}$ . Если в  $\Omega_i^{(n)}$  имеется несколько состояний с одинаковыми наибольшими потенциалами, то в качестве остовного выбирается состояние с наименьшим номером. Поэтому предполагается, что в множестве  $\Omega_i^{(n)}$  только одно состояние является остовным. Для каждого состояния  $s^{(n)}$  определим называемую матрицей передач нуль-единичную матрицу  $\mathcal{N}^{(n)} = (\nu_{ij}^{(n)})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ , обеспечивающую переход сети из состояния  $s^{(n)}$  в одно из смежных остовных состояний [3]. Введем вспомогательную функцию

$$\varepsilon(s_i^{(n)}) = \begin{cases} 1, & s_i^{(n)} > 0, \\ 0, & s_i^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Тогда параметр  $\alpha_n = \sum_{i=1}^L \varepsilon(s_i^{(n)}) \mu_i$ . Вероятность  $\gamma_{i,n}$  того, что уход сети из состояния  $s^{(n)}$  обусловлен завершением обслуживания требования в системе  $S_i$ , равна  $\mu_i / \alpha_n$ . Если в качестве маршрутной матрицы используется матрица  $\mathcal{N}^{(n)}$ , то вероятность перехода сети из  $s^{(n)}$  в остовное состояние  $\bar{s}^{(\cdot)}(n, i, j)$  за счет перехода требования из  $S_i$  в  $S_j$  равна  $\gamma_{i,n}$ , так как  $\nu_{ij}^{(n)} = 1$ .

Для каждого состояния  $s^{(n)}$  определим матрицу  $H^{(n)} = (h_{ij}^{(n)})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ , элементы которой

$$h_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & s_i^{(n)} = 0, \\ \gamma_{i,n} \nu_{ij}^{(n)}, & s_i^{(n)} > 0. \end{cases}$$

Матрица  $H^{(n)}$  является матрицей вероятностей перехода из  $s^{(n)}$  в остовные состояния множеств  $\Omega_i^{(n)}$ ,  $i \in \{1, \dots, L\}$ , за счет перехода требований из  $S_i$  в  $S_j$ .

При построении управляющей маршрутной матрицы  $\Theta^{J,\kappa}$ , используемой в течение коррективного такта, начинающегося из состояния  $s^{(n)}$ ,  $n = J + c_Y$ , последовательно просматриваются остовные состояния, расположенные на расстоянии  $1, 2, \dots, \kappa - 1$  шагов от исходного состояния  $s^{(n)}$ . Считается, что равноудаленные от  $s^{(n)}$  состояния находятся на одном уровне (состояние  $s^{(n)}$  находится на уровне 0). Пусть  $G$  — ориентированный граф с множеством вершин  $B$  и множеством дуг, соответствующих упорядоченным парам смежных состояний. Алгоритм формирования маршрутной матрицы для начального состояния  $s^{(n)} \in Z$  основывается на алгоритме поиска кратчайших путей между вершинами в графе  $G$  при начале из вершины  $n$  [11]. Для каждой просмотренной вершины  $r \in B$ , соответствующей остовному состоянию  $s^{(r)} \in X$ , строится матрица вероятностей переходов  $H^{(r)}$ . Управляющая маршрутная матрица  $\Theta^{J,\kappa}$  полагается равной сумме матриц  $H^{(r)}$  для вершин  $r \in B$ , расположенных на уровнях  $0, 1, \dots, \kappa - 1$  от начальной вершины  $n \in B$ ,  $n = c_Y + J$ . Допускается, что одна и та же вершина может быть просмотрена более одного раза. Выполнение алгоритма завершается после просмотра  $\kappa - 1$  уровней.

## 3. МЕТОД АНАЛИЗА СЕТИ $N$

Обозначим через  $\Xi$  случайный процесс с множеством состояний  $B$ , описывающий эволюцию сети  $N$ . Процесс  $\Xi$  представляет собой последовательность фрагментов, соответствующих нормальным и коррективным тактам. Эволюция сети  $N$  в течение нормальных и коррективных тактов описывается соответственно цепями Маркова  $\hat{C}$  и  $\tilde{C}^J$ ,  $J = 1, \dots, c_Z$ , с множеством состояний  $B$  и непрерывным



временем (все состояния являются устойчивыми, длительность пребывания в состоянии  $n$  является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром  $0 < \alpha_n < \infty$ ); в обозначении  $\tilde{C}^J$  индекс  $J$  указывает, что начальным состоянием эволюции цепи является  $c_Y + J$ . Длительности реализаций цепей  $\hat{C}$  и  $\tilde{C}^J$  равны соответственно длительностям нормального и соответствующих коррективных тактов. Характеристики процесса  $\Xi$  определяются характеристиками цепей Маркова  $\hat{C}$  и  $\tilde{C}^J$ ,  $J = 1, \dots, c_Z$ , и длительностями их реализаций.

Введем обозначения параметров и характеристик цепи  $\hat{C}$ :  $\hat{A} = (\hat{a}_{mn})$ ,  $m, n = 1, 2, \dots, c_X$ , — инфинитезимальный оператор;  $\hat{P} = (\hat{p}_{mn})$  — матрица вероятностей скачков марковской цепи скачков, связанной с цепью  $\hat{C}$ ;  $\hat{P}^{(t)} = (\hat{p}_{mn}^{(t)})$  — матрица вероятностей перехода за время  $t$ , определяемая известным соотношением  $\hat{P}^{(t)} = \exp(\hat{A}t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \hat{a}_{mn} &= \varepsilon(s_i^{(m)})\mu_i\theta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, L\}, \quad i \neq j, \quad m \neq n, \quad m, n \in B, \\ \hat{a}_{mm} &= -\sum_{i=1}^L \varepsilon(s_i^{(m)})\mu_i, \quad \alpha_m = -\hat{a}_{mm}, \quad m \in B, \\ \hat{p}_{mn} &= \frac{\hat{a}_{mn}}{\alpha_m}, \quad m \neq n, \quad m, n \in B, \quad \hat{p}_{mm} = 0, \quad m \in B. \end{aligned}$$

Для аналогичных параметров и характеристик цепей  $\tilde{C}^J$ ,  $J = 1, \dots, c_Z$ , используются обозначения  $\tilde{A}^J = (\tilde{a}_{mn}^J)$ ,  $m, n \in B$ ,  $\tilde{P}^J = (\tilde{p}_{mn}^J)$ ,  $\tilde{P}^{(t), J} = (\tilde{p}_{mn}^{(t), J})$ . Параметры и характеристики цепи  $\tilde{C}^J$  будут зависеть от соответствующей управляющей маршрутной матрицы  $\Theta^{J, \kappa}$ :

$$\tilde{a}_{mn}^J = \varepsilon(s_i^{(m)})\mu_i\theta_{ij}^{J, \kappa}, \quad i, j \in \{1, \dots, L\}, \quad i \neq j, \quad m \neq n, \quad m, n \in B, \quad \tilde{a}_{mm}^J = \hat{a}_{mm}.$$

Длительность  $\eta_m^{J, \kappa}$  реализации цепи  $\tilde{C}^J$  полагается равной математическому ожиданию длительности интервала времени, за который цепь  $\tilde{C}^J$  совершит  $\kappa$  переходов, и определяется как сумма м.о. длительностей пребывания цепи на уровнях  $0, 1, \dots, \kappa - 1$  от начального состояния  $m$ :

$$\eta_m^{J, \kappa} = \frac{1}{\alpha_m} + \sum_{i=1}^{\kappa-1} \sum_{l=1}^{c_X} \frac{\tilde{p}_{ml}^J(i)}{\alpha_l},$$

где  $\tilde{p}_{ml}^J(i)$  — вероятность перехода из  $m$  в  $l$  за  $i$  шагов марковской цепи скачков, связанной с цепью  $\tilde{C}^J$ . Матрица  $(\tilde{p}_{ml}^J(i))$ ,  $m, l = 1, \dots, c_X$ , равна матрице  $((\tilde{p}_{ml}^J)^i)$ .

Обозначим через  $\hat{\pi}_n^*(m, \varphi)$  и  $\tilde{\pi}_n^*(m, \eta_m^{J, \kappa})$  средние вероятности пребывания в состоянии  $n \in B$  соответственно цепи  $\hat{C}$  в течение интервала времени длительности  $\varphi$  при исходе из состояния  $m \in D$  и цепи  $\tilde{C}^J$  в течение интервала времени длительности  $\eta_m^{J, \kappa}$  при исходе из состояния  $m \in U$ . Так как вероятности пребывания этих цепей в момент времени  $t$  в состоянии  $n$  при исходном состоянии  $m \in B$  равны вероятностям их перехода из  $m$  в  $n$  за время  $t$ ,

$$\hat{\pi}_n^*(m, \varphi) = \frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \hat{p}_{mn}^{(t)} dt, \quad n \in B, \quad m \in D, \quad \tilde{\pi}_n^*(m, \eta_m^{J, \kappa}) = \frac{1}{\eta_m^{J, \kappa}} \int_0^{\eta_m^{J, \kappa}} \tilde{p}_{mn}^{(t), J} dt, \quad n \in B, \quad m \in U.$$

Обозначим через  $\delta_n$  такт сети  $N$ , начинающийся в состоянии  $s^{(n)} \in X$ , и рассмотрим случайный процесс  $\Delta$  с множеством состояний  $\{\delta_n\}$ ,  $n = 1, \dots, c_X$ . Положим длительности пребывания процесса  $\Delta$  в состояниях  $\delta_1, \dots, \delta_{c_Y}$  равными  $\varphi$ , а в состояниях  $\delta_{c_Y+J}$ ,  $J = 1, \dots, c_Z$ , — равными  $\eta_n^{J, \kappa}$ ,  $n = c_Y + J$ . Вероятность перехода процесса  $\Delta$  из состояния  $\delta_n$  в состояние  $\delta_m$

$$q_{nm} = \begin{cases} \hat{p}_{nm}^{(\varphi)}, & n \in D, \quad m \in B, \\ \tilde{p}_{nm}^{(\eta_n^{J, \kappa}), J}, & n \in U, \quad m \in B. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение цепь Маркова  $\check{C}$  с множеством состояний  $\{\delta_n\}$  и непрерывным временем, параметры экспоненциальной функции распределения длительности пребывания которой в состояниях  $\delta_1, \dots, \delta_{c_Y}$  равны  $\check{\alpha}_n = 1/\varphi$ ,  $n = 1, \dots, c_Y$ , а в состояниях  $\delta_{c_Y+J}$ ,  $J = 1, \dots, c_Z$ , — равны  $\check{\alpha}_n = 1/\eta_n^{J, \kappa}$ ,  $n = c_Y + J$ . Элементы матрицы вероятностей скачков  $\check{P} = (\check{p}_{nm})$ ,  $n, m = 1, \dots, c_X$ , и инфинитезимального оператора  $\check{A} = (\check{a}_{nm})$  этой цепи определяются выражениями:

$$\check{p}_{nm} = \frac{1}{1 - q_{nn}} q_{nm}, \quad n \neq m, \quad n, m \in B, \quad \check{p}_{nn} = 0, \quad n \in B,$$



$$\check{a}_{nm} = \check{a}_n \check{p}_{nm}, \quad n \neq m, \quad n, m \in B, \quad \check{a}_{nn} = -\check{a}_n, \quad n \in B.$$

Пусть  $\zeta = (\zeta_n)$ ,  $n = 1, \dots, c_X$ , и  $\check{\zeta} = (\check{\zeta}_n)$  — стационарные распределения вероятностей состояний процессов  $\Delta$  и  $\check{C}$  соответственно. Распределение  $\check{\zeta} = (\check{\zeta}_n)$  является решением системы уравнений  $\check{\zeta} \check{A} = 0$  с условием нормировки  $\sum_{n \in B} \check{\zeta}_n = 1$ . Из способа построения цепи  $\check{C}$  и значений ее параметров непосредственно следует, что  $\zeta \approx \check{\zeta}$ . Тогда стационарная вероятность состояния  $s^{(n)} \in X$   $\pi_n \approx \pi_n^*$ , средней вероятности пребывания процесса  $\Xi$  в состоянии  $n \in B$ , определяемой выражением

$$\pi_n^* = \sum_{m \in D} \zeta_m \hat{\pi}_n^*(m, \varphi) + \sum_{m \in U} \zeta_m \tilde{\pi}_n^*(m, \eta_m^{J, \kappa}).$$

Математическое ожидание длительности очередного такта  $\psi^\kappa$  и интенсивность управления  $R^\kappa$  (математическое ожидание числа управляющих воздействий, формируемых в единицу времени) определяются выражениями

$$\psi^\kappa = \varphi \sum_{n \in D} \zeta_n + \sum_{n \in U} \eta_n^{J, \kappa} \zeta_n, \tag{1}$$

$$R^\kappa = 1/\psi^\kappa.$$

#### 4. ПРИМЕР

Рассмотрим сеть  $N$  с  $L = 4$ ,  $Q = 4$ ,  $\mu = (0.3, 0.4, 0.5, 0.6)$ , матрицей смежности  $W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

и используемой в течение нормальных тактов маршрутной матрицей

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Множество  $X$  состояний сети включает  $c_X = 35$  состояний  $s^{(n)} = (s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, s_3^{(n)}, s_4^{(n)})$ ,  $n = 1, \dots, 35$ .

Пусть потенциалы состояний сети определяются выражением  $V^{(\cdot)} = \sum_{i=1}^L \varepsilon(s_i^{(\cdot)}) \mu_i$ . Состояния нумеруются в порядке убывания значения их потенциалов. Базовым состоянием является  $s^{(1)} = (1, 1, 1, 1)$ . Пусть множество доминантных состояний  $Y = \{s^{(1)}, \dots, s^{(10)}\}$ . Обозначим через  $N^0$  сеть массового обслуживания с маршрутной матрицей  $\Theta$ , отличающуюся от сети  $N$  только тем, что в ней отсутствует управление маршрутизацией. Стационарная вероятность пребывания сети  $N^0$  в множестве  $Y$   $\pi^0(Y) = 0.22$ .

Некоторые характеристики сети  $N$  при различных значениях  $\varphi$  и  $\kappa$  представлены в таблице, где  $\eta^\kappa = \sum_{m \in U} \eta_m^{J, \kappa} \zeta_m / \sum_{n \in U} \zeta_n$  — м.о. длительности коррективного такта, если очередной такт в сети является коррективным. Для проверки точности предлагаемого метода анализа сетей было проведено имитационное моделирование функционирования сети  $N$ , результаты которого (вероятности  $\tilde{\pi}(Y)$  пребывания сети  $N$  в множестве  $Y$ ) также представлены в таблице.

Характеристики сети  $N$

$\kappa$	Характеристики сети	Длительность нормального такта $\varphi$						
		0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0	50.0
1	$\pi(Y)$	0.35	0.39	0.39	0.34	0.29	0.26	0.24
	$\eta^1$	1.25	1.28	1.34	1.46	1.54	1.58	1.59
	$\psi^1$	1.05	1.17	1.69	3.89	8.29	17.83	47.52
	$R^1$	0.95	0.85	0.59	0.26	0.12	0.06	0.02
	$\tilde{\pi}(Y)$	0.37	0.36	0.34	0.30	0.26	0.24	0.22



Окончание таблицы

$\kappa$	Характеристики сети	Длительность нормального такта $\varphi$						
		0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0	50.0
2	$\pi(Y)$	0.27	0.30	0.31	0.30	0.28	0.25	0.23
	$\eta^2$	2.29	2.31	2.35	2.44	2.51	2.54	2.55
	$\psi^2$	2.06	2.04	2.24	3.72	7.39	16.23	45.26
	$R^2$	0.48	0.49	0.45	0.27	0.14	0.06	0.02
	$\tilde{\pi}(Y)$	0.31	0.30	0.29	0.27	0.26	0.24	0.22
3	$\pi(Y)$	0.23	0.25	0.26	0.26	0.26	0.24	0.23
	$\eta^3$	3.44	3.45	3.48	3.53	3.58	3.60	3.61
	$\psi^3$	3.23	3.15	3.18	4.06	6.87	14.64	42.42
	$R^3$	0.31	0.32	0.31	0.25	0.15	0.07	0.02
	$\tilde{\pi}(Y)$	0.25	0.26	0.26	0.25	0.25	0.22	0.21

Наибольшее отклонение  $\tilde{\pi}(Y)$  от  $\pi(Y)$  достигается при  $\varphi = 2, \kappa = 1$  и составляет менее 15% от значения  $\pi(Y)$ , что говорит о достаточной точности метода анализа.

Анализ результатов экспериментов с моделями показывает, что при фиксированной длительности нормального такта  $\varphi$  и увеличении  $\kappa$  качество управления снижается, а также изменяется интенсивность управления  $R^\kappa$ . В основном  $R^\kappa$  снижается с ростом  $\kappa$ , но при некоторых значениях  $\varphi$ , например при  $\varphi = 10$ , наблюдается увеличение  $R^\kappa$ . Это объясняется тем, что при всех значениях  $\kappa$  вероятность наблюдения в процессе функционирования сети в произвольный момент времени нормального такта  $\sum_{n \in D} \zeta_n \rightarrow 1$  при  $\varphi \rightarrow \infty$ , но скорость роста этой вероятности при разных  $\kappa$  различна. Например, при  $\varphi = 10$  и  $\kappa = 1$  вероятность равна  $\sum_{n \in D} \zeta_n = 0.80$ , а при  $\kappa = 2 - \sum_{n \in D} \zeta_n = 0.65$ .

Так как при  $\varphi = 10$  длительности коррективных тактов при  $\kappa = 1$  и  $\kappa = 2$  значительно меньше  $\varphi$  ( $0.83 \leq \eta_n^{J,1} \leq 3.33, 1.61 \leq \eta_n^{J,2} \leq 4.64$ , для всех  $n \in B$ ), то на значение  $\psi^\kappa$  существенное влияние оказывает значение первого слагаемого в (1), поэтому  $\psi^1 > \psi^2$  и  $R^1 < R^2$ .

Рассматривая зависимости интенсивности управления  $R^\kappa$  при каждом фиксированном параметре  $\kappa$  от значения длительности нормального такта  $\varphi$ , из результатов проведенных исследований можно сделать следующий вывод. При некоторых значениях  $\varphi$ , меньших  $\eta^\kappa$ , в выражении (1) величина убывания второго слагаемого больше величины возрастания первого. Поэтому возможно незначительное уменьшение м.о. длительности такта  $\psi^\kappa$  и, как следствие, незначительное возрастание интенсивности управления  $R^\kappa$ , например, при  $\kappa = 2$  и  $\varphi = 1$ .

При каждом фиксированном параметре  $\kappa$  существует оптимальное значение  $\varphi_0$ , при котором достигаются максимально возможные значения ведущей характеристики  $\pi(Y)$ . При  $\varphi \uparrow \varphi_0$  наблюдается рост характеристики, а при  $\varphi \rightarrow \infty \pi(Y) \rightarrow \pi^0(Y)$ . Для сети  $N$  при  $\kappa = 1, \kappa = 2$  и  $\kappa = 3$  ведущая характеристика  $\pi(Y)$  при  $\varphi_0 \approx 2$  возрастает соответственно на 80, 40 и 20% от значения  $\pi^0(Y)$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод анализа сетей массового обслуживания с динамическим управлением маршрутизацией обладает достаточной для практических приложений точностью. Данный метод может быть использован для решения задач определения близких к оптимальным как параметров сетей массового обслуживания, так и параметров их систем управления, а также для оценки эффективности используемых в сетях обслуживания методов управления. В частности, как следует из результатов анализа рассмотренной в примере гипотетической сети обслуживания, для оценки эффективности управления с учетом зависящих от интенсивности управления затрат на реализацию процесса управления и выбора близких к оптимальным значений параметров управления необходимо использование показателя эффективности, учитывающего значения ведущей характеристики и интенсивности управления сетью.

## Библиографический список

1. Митрофанов Ю.И., Решетникова Н.П. Методы анализа сетей массового обслуживания с управлением маршрутизацией. Саратов, 2002. Деп. в ВИНТИ, № 973-В2002. 55 с.
2. Serfozo R.F. Markovian network processes: congestion-dependent routing and processing // Queueing Systems. 1989. № 5. P. 5-36.
3. Митрофанов Ю.И., Юдаева Н.В. Модели и анализ



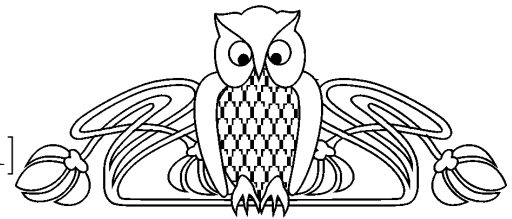


- сетей массового обслуживания с управлением маршрутизацией // *АиТ*. 2000. № 6. С. 104–113.
4. Митрофанов Ю.И. Метод управления маршрутизацией в замкнутых сетях массового обслуживания // *ТиСУ*. 2002. № 6. С. 86–92.
5. Rumsewicz M., Henderson W. Insensitivity with age-dependent routing // *Adv. Appl. Prob.* 1984. V. 21, № 2. P. 398–408.
6. Miyazawa M. Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing // *Queueing Networks*. 1997. № 25. P. 45–75.
7. Daskalaki S., Smith J.M. Real-time routing in finite queueing networks // *Queueing Network Blocking: Proc.*

- 1-st Int. Workshop, Raleigh, N.C., 1988. P. 313–324.
8. Towsley D. Queueing network models with state-dependent routing // *J. of ACM*. 1980. V. 27, № 2. P. 323–337.
9. Krzesinski A.E. Multiclass queueing networks with state-dependent routing // *Performance Evaluations*. 1987. V. 7, № 2. P. 125–143.
10. Baskett F., Chandy K.M., Muntz R.R., Palacios F.G. Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers // *J. Assoc. Comput. Mach.* 1975. V. 22. P. 248–260.
11. Лунский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988.

УДК 517.518.85

## ФОРМОСОХРАНЯЮЩИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ЕДИНИЧНЫХ ШАРОВ В $C[0, 1]$



С.П. Сидоров

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической экономики  
E-mail: SidorovSP@info.sgu.ru

Shape-Preserving Linear  $n$ -width of Unit Balls in  $C[0, 1]$ 

S.P. Sidorov

Пусть  $D^k$ ,  $k$  — натуральное или ноль, означает оператор дифференцирования порядка  $k$ , определенный в  $C^k(X)$ ,  $X = [0, 1]$ , и пусть  $C$  — конус в  $C^k(X)$ . Определим линейный относительный  $n$ -поперечник множества  $A \subset C^k(X)$  в  $C(X)$  для  $D^k$  с ограничением  $C$  следующим образом:  $\delta_n^k(A, C)_{C(X)} := \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|D^k f - D^k L_n f\|_{C(X)}$ . В настоящей статье находятся оценки линейных относительных  $n$ -поперечников шаров в  $C(X)$  для  $D^k$  с ограничением  $C = \{f \in C^k(X) : D^k f \geq 0\}$ .

Let  $D^k$ ,  $k$  is a natural number or zero, be the  $k$ -th differential operator, defined in  $C^k(X)$ ,  $X = [0, 1]$ , and let  $C$  be a cone in  $C^k(X)$ . Let us denote  $\delta_n^k(A, C)_{C(X)} := \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|D^k f - D^k L_n f\|_{C(X)}$  linear relative  $n$ -width of set  $A \subset C^k(X)$  in  $C(X)$  for  $D^k$  with constraint  $C$ . In this paper we estimate linear relative  $n$ -width of some balls in  $C(X)$  for  $D^k$  with constraint  $C = \{f \in C^k(X) : D^k f \geq 0\}$ .

### ВВЕДЕНИЕ

Для многих прикладных задач теории приближений зачастую необходимо не просто аппроксимировать некоторую функцию, а приблизить ее с сохранением некоторых ее свойств, связанных с формой функции (положительность, монотонность, выпуклость и т.п.).

Интерес к данной проблематике впервые возник в конце 60-х годов, когда появились работы О. Шиша [1], Г.Г. Лоренца и К.Л. Целлера [2]. Они дали толчок работам Р. ДеВора по монотонному приближению и работам А. С. Шведова [3], Д. Ньюмана [4], Р. Битсона и Д. Левиатана [5] по комонотонной аппроксимации в 70 и 80-е годы.

Пусть  $F$  — линейное нормированное пространство,  $A$  и  $C$  есть непустые подмножества  $F$ . Тогда относительным  $n$ -поперечником по Колмогорову множества  $A$  в  $F$  с ограничением  $C$  называется величина  $d_n(A, C)_F = \inf_{F_n} E(A, F_n \cap C) = \inf_{F_n} \sup_{f \in A} \inf_{g \in F_n \cap C} \|f - g\|_F$ , где левый инфимум ищется среди всех  $n$ -мерных линейных многообразий  $F_n$  пространства  $F$ , таких, что  $F_n \cap C \neq \emptyset$ . Если  $C = F$ , то  $d_n(A)_F = d_n(A, F)_F$  есть  $n$ -поперечник по Колмогорову множества  $A$  в  $F$  [6].

Впервые понятие относительного поперечника было введено В. Н. Коноваловым в 1984 году [7]. Оценки величин  $d_n(A, C)_F$  получены для некоторых конкретных  $A$ ,  $C$  и  $F$  в работе [8].

Пусть  $L$  есть некоторый линейный оператор, определенный в  $F$ , со значениями в  $F$  и  $C$  — некоторый конус в  $F$ ,  $C \neq \emptyset$ . Будем говорить, что оператор обладает свойством формосохранения относительно конуса  $C$ , если  $L(C) \subset C$ .

Пусть  $F$  — линейное нормированное пространство и  $A \subset F$ ,  $C \subset F$ . Линейный оператор  $L_n$ , отображающий  $F$  в линейное пространство конечной размерности  $n$ , называется оператором конечного ранга  $n$ .

Линейным относительным  $n$ -поперечником множества  $A$  в  $F$  с ограничением  $C$  назовем величину  $\delta_n(A, C)_F = \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|f - L_n f\|_F$ , где инфимум ищется среди всех непрерывных линейных



операторов  $L_n : F \rightarrow F$  конечного ранга  $n$  таких, что  $L_n(C) \subset C$ . Если  $C = F$ , то  $\delta_n(A)_F = \delta_n(A, F)_F$  есть линейный  $n$ -поперечник, по Колмогорову, множества  $A$  в  $F$  [9].

Зная величину линейного относительного поперечника  $\delta_n(A, C)_F$ , можно судить о том, насколько хорош или плох (в смысле оптимальности) тот или иной конечномерный метод  $L_n$ , обладающий свойством формосохранения  $L_n(C) \subset C$ .

Пусть  $C^k(X)$ ,  $k \geq 0$ , есть пространство действительно значных и  $k$ -раз непрерывно дифференцируемых функций на  $X = [0, 1]$ ,  $D^i$  означает оператор дифференцирования  $i$ -го порядка,  $\sigma = (\sigma_i)_{i \geq 0}$  — последовательность с  $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$ , и  $h, k$  — два целых числа таких, что  $0 \leq h < k$  и  $\sigma_h \cdot \sigma_k \neq 0$ .

Следуя [10], рассмотрим конуса функций  $C_{h,k}(\sigma)$ , производные некоторых порядков которых имеют фиксированный знак на  $X$ :  $C_{h,k}(\sigma) := \{f \in C^k(X) : \sigma_i \cdot D^i f \geq 0, i = h, \dots, k\}$ .

Определим линейный относительный  $n$ -поперечник множества  $A \subset C^k(X)$  в  $C(X)$  для  $D^k$  с ограничением  $C$  следующим образом:  $\delta_n^k(A, C)_{C(X)} := \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|D^k f - D^k L_n f\|_{C(X)}$ , где инфимум ищется среди всех непрерывных линейных операторов  $L_n : C^k(X) \rightarrow C^k(X)$  конечного ранга  $n$ , таких, что  $L_n(C) \subset C$ . Если  $k = 0$ , то  $D^0$  есть тождественный оператор,  $D^0 = I$ , и  $\delta_n^0(A, C)_{C(X)}$  есть линейный относительный  $n$ -поперечник множества  $A \subset C(X)$  в  $C(X)$  с ограничением  $C$ .

В настоящей статье находятся оценки линейных относительных  $n$ -поперечников шаров в  $C(X)$  для  $D^k$  с ограничением  $C_{k,k}(\sigma)$ .

### 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим  $B(X)$  — пространство действительных ограниченных функций с нормой

$$\|f\|_{B(X)} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

**Лемма 1.** Пусть  $\Phi : C^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$  есть линейный функционал, обладающий свойством:  $\Phi(f) \geq 0$  для всякой  $f \in C^k(X)$ , такой, что  $D^k f \geq 0$ . Пусть  $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^k(X) \times C^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$  есть бифункционал, порожденный функционалом  $\Phi$  следующим образом: для произвольных  $f, g \in C^k(X)$  полагаем  $\langle f, g \rangle = \Phi(h)$ , где  $h \in C^k(X)$ , таково, что  $D^k h = D^k f D^k g$  и  $D^i h(0) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Тогда

$$|\langle f, g \rangle| \leq [\langle f, f \rangle]^{1/2} [\langle g, g \rangle]^{1/2}, \quad f, g \in C^k(X). \quad (1)$$

**Доказательство.** Из линейности функционала  $\Phi$  следует, что бифункционал  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обладает свойством билинейности. Очевидно, что  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$  и  $\langle f, f \rangle \geq 0$ ,  $f, g \in C^k(X)$ . Значит,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  есть скалярное произведение.

Имеем  $0 \leq \langle f + cg, f + cg \rangle = \langle f, f \rangle + 2c \langle f, g \rangle + c^2 \langle g, g \rangle$  для всех  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f, g \in C^k(X)$ . Если взять  $c = -\langle f, g \rangle / \langle g, g \rangle$ , то получим (??).  $\square$

Положим  $g_x = \frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k$ . Справедливо следующее утверждение [11].

**Лемма 2.** Пусть  $L_n : C^k(X) \rightarrow C^k(X)$  — линейный оператор конечного ранга  $n$ ,  $n > k + 2$ , такой, что  $D^k L_n e_k = D^k e_k$  и

$$L_n(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma). \quad (2)$$

Тогда

$$\sup_{x \in X} |D^k L_n g_x(x)| \geq \frac{1}{4n^2}. \quad (3)$$

Следующий пример [11] показывает, что оценку (??) невозможно улучшить.

**Лемма 3.** Пусть  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $n > k + 2$  и  $\Lambda_{k,n} : C^k(X) \rightarrow C^k(X)$  есть линейный оператор, определенный следующим образом:

$$\Lambda_{k,n} f(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} x^l \left( D^l f(0) + \frac{(-1)^{k+1-l}}{(k+1-l)!(n-1)^{k-l}} D^k f(0) \right) + \\ \quad + \frac{1}{(k+1)!(n-1)^k} \left[ ((n-1)x)^{k+1} D^k f\left(\frac{1}{n-1}\right) + \right. \\ \quad \left. + (-1)^k (1 - (n-1)x)^{k+1} D^k f(0) \right], \\ \quad \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{n-1}\right], \\ \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} \left(x - \frac{i}{n-1}\right)^l \left( D^l \Lambda_{k,n} f\left(\frac{i}{n-1}\right) + \frac{(-1)^{k+1-l}}{(k+1-l)!(n-1)^{k-l}} D^k f\left(\frac{i}{n-1}\right) \right) + \\ \quad + \frac{1}{(k+1)!(n-1)^k} \left[ ((n-1)x - i)^{k+1} D^k f\left(\frac{i+1}{n-1}\right) + \right. \\ \quad \left. + (-1)^k (i+1 - (n-1)x)^{k+1} D^k f\left(\frac{i}{n-1}\right) \right], \\ \quad \text{если } x \in \left(\frac{i}{n-1}, \frac{i+1}{n-1}\right], \quad i = 1, 2, \dots, n-2. \end{cases} \quad (4)$$



Тогда: 1)  $D^k \Lambda_{k,n} e_j = D^k e_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, k + 1$ ; 2)  $\frac{2}{(k+2)!} \|D^k \Lambda_{k,n} e_{k+2} - D^k e_{k+2}\| = \frac{1}{4(n-1)^2}$ ; 3)  $\Lambda_{k,n}(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma)$ .

Таким образом,

$$\frac{1}{4n^2} \leq \inf_{L_n} \sup_{x \in X} |D^k L_n g_x(x)| \leq \frac{1}{4(n-1)^2}, \quad (5)$$

где инфимум ищется среди всех линейных операторов  $L_n : C^k(X) \rightarrow B^k(X)$  конечного ранга  $n$ , таких, что  $L_n(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma)$  и  $D^k L_n e_i = D^k e_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k + 1$ .

В следующей лемме мы отказываемся от условия  $D^k L_n e_k = D^k e_k$ .

**Лемма 4.** Пусть  $L_n : C^k(X) \rightarrow C^k(X)$  — линейный оператор конечного ранга  $n$ ,  $n > k + 2$ , такой, что

$$L_n(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma). \quad (6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} \left( \frac{2}{(k+2)!} |D^k L_n e_{k+2}(x) - D^k e_{k+2}(x)| + \frac{2}{(k+1)!} |D^k L_n e_{k+1}(x) - D^k e_{k+1}(x)| + \right. \\ \left. + \frac{1}{k!} |D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)| \right) \geq \frac{1}{4n^2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

**Доказательство.** Используя идеи [12], покажем, что

$$\sup_{x \in X} |D^k L_n g_x(x)| \geq \frac{1}{4n^2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (8)$$

Существует [11] функция  $h \in C^k(X)$ ,  $D^k h \in Lip_{2n} 1$ ,  $\|D^k h\|_{C(X)} = 1$ , такая, что

$$\|D^k L_n h - D^k h\|_{B(X)} \geq 1. \quad (9)$$

Для  $x \in X$  имеем

$$\begin{aligned} |D^k L_n h(x) - D^k h(x)| &= \\ &= \left| D^k L_n h(x) - D^k h(x) \frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) + D^k h(x) \frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) - D^k h(x) \frac{1}{k!} D^k e_k(x) \right| \leq \\ &\leq \left| D^k L_n \left( h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k \right) (x) \right| + \frac{1}{k!} |D^k h(x)| |D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)|. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть  $p_x \in C^k(X)$  такова, что  $D^k p_x = |D^k (h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k)|$ ,  $D^i p_x(0) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ .  
Имеем  $D^k (h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k) \leq D^k p_x$  и  $D^k (- (h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k)) \leq D^k p_x$ .

Значит,

$$D^k L_n (h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k)(x) \leq D^k L_n p_x(x) \quad (11)$$

и

$$-D^k L_n (h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k)(x) \leq D^k L_n p_x(x). \quad (12)$$

Из (??) и (??) получаем

$$\left| D^k L_n \left( h - D^k h(x) \frac{1}{k!} e_k \right) (x) \right| \leq D^k L_n p_x(x). \quad (13)$$

Пусть  $q_x \in C^k(X)$  такова, что  $D^k q_x(t) = |t - x|$  и  $D^i q_x(0) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ .  
Имеем

$$D^k p_x(t) = \left| D^k \left( h(t) - D^k h(x) \frac{1}{k!} t^k \right) \right| = |D^k h(t) - D^k h(x)| \leq 2n|t - x| = 2nD^k q_x(t).$$

Значит,  $D^k(2nq_x - p_x) \geq 0$ , и, следовательно,  $D^k L_n(2nq_x - p_x)(x) \geq 0$ , и

$$D^k L_n p_x(x) \leq 2nD^k L_n q_x(x). \quad (14)$$



Из леммы ?? следует, что

$$D^k L_n g_x(x) \leq [D^k L_n g_x(x)]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) \right]^{\frac{1}{2}} \leq [D^k L_n g_x(x)]^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{1}{k!} |D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)| \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Имеем

$$\begin{aligned} D^k L_n g_x(x) &= \frac{2}{(k+2)!} (D^k L_n e_{k+2} - D^k e_{k+2})(x) - \frac{2}{(k+1)!} x (D^k L_n e_{k+1} - D^k e_{k+1})(x) + \\ &+ \frac{1}{k!} x^2 (D^k L_n e_k - D^k e_k)(x) + \frac{2}{(k+2)!} D^k e_{k+2}(x) - \frac{2}{(k+1)!} x D^k e_{k+1}(x) + \frac{1}{k!} x^2 D^k e_k(x) \leq \\ &\leq \frac{2}{(k+2)!} |D^k L_n e_{k+2}(x) - D^k e_{k+2}(x)| + \frac{2}{(k+1)!} |D^k L_n e_{k+1}(x) - D^k e_{k+1}(x)| + \\ &\quad + \frac{1}{k!} |D^k L_n e_k(x) - D^k e_k(x)|. \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим случай  $\frac{1}{k!} \|D^k L_n e_0 - D^k e_0\|_{C(X)} \leq \frac{1}{4n^2}$ .  
Тогда из (??), (??), (??), (??) следует

$$1 - \frac{1}{k!} \|D^k L_n e_k - D^k e_k\|_{C(X)} \leq 2n \left( \sup_{x \in X} D^k L_n g_x(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{4n^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Так как обе части неравенства положительны, имеем

$$\frac{(1 - \frac{1}{4n^2})^2}{1 + \frac{1}{4n^2}} \leq 4n^2 \sup_{x \in X} D^k L_n g_x(x).$$

Так как при  $n \geq 2$

$$\frac{(1 - \frac{1}{4n^2})^2}{1 + \frac{1}{4n^2}} \geq 1 - \frac{1}{n^2},$$

получаем (??). Тогда из (??) следует (??). Если же  $\frac{1}{k!} \|D^k L_n e_0 - D^k e_0\|_{C(X)} \geq \frac{1}{4n^2}$ , то (??) тем более выполняется.  $\square$

## 2. ОЦЕНКА ЛИНЕЙНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ

Пусть  $k$  — натуральное или равное нулю число. Обозначим

$$P_k = \left\{ p = \sum_{r=0}^k a_r e_r : a_r \in \mathbb{R}, r = 0, 1, \dots, k \right\},$$

множество всех алгебраических полиномов степени не выше  $k$ , и пусть

$$P_k^* = \left\{ p = \sum_{r=0}^k a_r e_r : |a_r| \leq 1, r = 0, 1, \dots, k \right\}.$$

Пусть  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Обозначим  $B^{(m)}(X) := \{f \in C^{(m)}(X) : \|D^m f\|_{C(X)} \leq 1\}$ .

**Теорема 1.** *Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества  $P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X)$  в  $C(X)$  для  $D^k$  с ограничением  $C_{k,k}(\sigma)$*

$$\frac{1}{4(k+2)!n^2} \leq \delta_n^k \left( P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X), C_{k,k}(\sigma) \right)_{C(X)} \leq \frac{1}{4(k+2)!(n-1)^2}. \quad (18)$$

**Доказательство.** Пусть  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq m \leq k+2$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ . Обозначим

$$R_{k+3}^{(m)}(c) := \{a = (a_0, \dots, a_{k+2}) \in \mathbb{R}^{k+3} : |a_m| \leq c\}.$$

Обозначим  $\mathbb{L}_{n,k}$  как множество всех линейных операторов  $L_n : C^k(X) \rightarrow B^k(X)$  конечного ранга  $n$  таких, что  $L_n(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma)$ ,  $\mathbb{L}_{n,k}^*$  — множество всех линейных операторов  $L_n : C^k(X) \rightarrow B^k(X)$  конечного ранга  $n$  таких, что  $L_n(C_{k,k}(\sigma)) \subset C_{k,k}(\sigma)$  и  $D^k L_n e_i = D^k e_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k+1$ .



Имеем

$$\begin{aligned}
 \delta_n^k \left( P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X), C_{k,k}(\sigma) \right)_{C(X)} &= \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{p \in P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X)} \|D^k p - D^k L_n p\| = \\
 &= \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{p \in P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X)} \sup_{x \in X} |D^k p(x) - D^k L_n p(x)| = \\
 &= \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{x \in X} \sup_{a \in R_{k+2}^{(k+2)} \left( \frac{1}{(k+2)!} \right)} \left| \sum_{r=0}^{k+2} a_r (D^k e_r(x) - D^k L_n e_r(x)) \right| = \\
 &= \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{x \in X} \sup_{a \in R_{k+2}^{(k+2)} \left( \frac{1}{(k+2)!} \right)} \sum_{r=0}^{k+2} |a_r| |D^k e_r(x) - D^k L_n e_r(x)| = \\
 &= \frac{1}{(k+2)!} \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}^*} \sup_{x \in X} |D^k e_{k+2} - D^{k+2} L_n e_{k+2}(x)|.
 \end{aligned}$$

Заметим, что если  $L_n \in \mathbb{L}_{n,k}^*$ , то

$$|D^k e_{k+2} - D^k L_n e_{k+2}(x)| = D^k L_n g_x(x),$$

где

$$g_x = \frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k.$$

Тогда из (??) получаем утверждение теоремы.  $\square$

Заметим, что если  $\sigma_0 = 1$ , то  $C_{0,0}(\sigma)$  есть конус неотрицательных непрерывных на  $X$  функций, и обозначим  $C_+ := \{f \in C(X) : f \geq 0\}$ .

**Следствие 1.** *Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества  $P_2 \cap B^{(2)}(X)$  с ограничением  $C_+$*

$$\frac{1}{8n^2} \leq \delta_n \left( P_2 \cap B^{(2)}(X), C_+ \right)_{C(X)} \leq \frac{1}{8(n-1)^2}. \quad (19)$$

**Теорема 2.** *Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества  $P_{k+2} \cap B^{(k)}(X)$  в  $C(X)$  для  $D^k$  с ограничением  $C_{k,k}(\sigma)$*

$$\delta_n^k \left( P_{k+2} \cap B^{(k)}(X), C_{k,k}(\sigma) \right)_{C(X)} \asymp \frac{1}{n^2}. \quad (20)$$

**Доказательство.** Заметим, что  $\frac{1}{k+3} P_{k+2}^* \subset P_{k+2} \cap B^{(k)}(X)$ , и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{p \in P_{k+2} \cap B^{(k)}(X)} \|D^k p - D^k L_n p\|_{C(X)} &\geq \frac{1}{k+3} \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{p \in P_{k+2}^*} \|D^k p - D^k L_n p\|_{C(X)} = \\
 &= \frac{1}{k+3} \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{p \in P_{k+2}^*} \sup_{x \in X} |D^k p(x) - D^k L_n p(x)| = \\
 &= \frac{1}{k+3} \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{x \in X} \sup_{|a_r| \leq 1, r=0, \dots, k+2} \sum_{r=0}^{k+2} |a_r| |D^k e_r(x) - D^k L_n e_r(x)| = \\
 &= \frac{1}{k+3} \inf_{L_n \in \mathbb{L}_{n,k}} \sup_{x \in X} \sum_{r=0}^{k+2} |D^k e_r(x) - D^k L_n e_r(x)|.
 \end{aligned} \quad (21)$$

Утверждение теоремы следует из леммы ?? и свойств оператора  $M_n$ .  $\square$

**Следствие 2.** *Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества  $P_2 \cap B^{(0)}(X)$  с ограничением  $C_+$ :*

$$\delta_n(P_2 \cap B^{(0)}(X), C_+)_{C(X)} \asymp \frac{1}{n^2}, \quad (22)$$

где  $B^{(0)}(X) := \{f \in C(X) : \|f\|_{C(X)} \leq 1\}$



**Теорема 3.** *Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества  $B^{(k+2)}(X)$  для  $D^k$  с ограничением  $C_{k,k}(\sigma)$*

$$\delta_n^k(B^{(k+2)}(X), C_{k,k}(\sigma))_{C(X)} \asymp \frac{1}{n^2}. \quad (23)$$

**Доказательство.**

Так как  $P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X) \subset B^{(k+2)}(X)$ , то

$$\delta_n(P_{k+2} \cap B^{(k+2)}(X), C_{k,k}(\sigma))_{C(X)} = \delta_n^k(B^{(k+2)}(X), C_{k,k}(\sigma))_{C(X)}. \quad (24)$$

С другой стороны, пусть  $f \in B^{(k+2)}(X)$ . Тогда для  $t \in X$  имеем

$$f(t) = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{D^r f(x)}{r!} (t-x)^r + \frac{D^{k+2} f(\xi)}{(k+2)!} (t-x)^{k+2},$$

где  $\xi \in X$ ,  $\|D^{k+2} f\| \leq 1$ . Имеем

$$\sup_{x \in X} |D^k f(x) - D^k \Lambda_{k,n} f(x)| \leq \frac{1}{8(n-1)^2},$$

где  $\Lambda_{k,n}$  есть линейный оператор, определенный ???. □

**Следствие 3.** *Справедлива следующая оценка линейного относительного поперечника множества  $B^{(2)}(X)$  с ограничением  $C_+$*

$$\delta_n(B^{(2)}(X), C_+)_{C(X)} \asymp \frac{1}{n^2}. \quad (25)$$

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Известно [13], что для многих  $F$ ,  $A$  имеет место равенство  $\delta_n(A)_X = d_n(A)_F$ , в частности

$$\delta_n(P_k \cap B^{(0)}(X))_{C(X)} = d_n(P_k \cap B^{(0)}(X))_{C(X)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\delta_n(P_k \cap B^{(0)}(X))_{C(X)} = d_n(P_k \cap B^{(0)}(X))_{C(X)} \neq 0, \quad k = n, \dots$$

Пусть  $F$  есть линейное нормированное пространство и  $A \subset F$ ,  $C \subset F$ . Тогда

$$\delta_n(A, C)_F \geq d_n(A, C)_F,$$

то есть одним из методов оценки линейного относительного поперечника  $\delta_n(A, C)_F$  снизу может служить вычисление соответствующего нелинейного относительного поперечника  $d_n(A, C)_F$ . Тем не менее величины  $\delta_n(A, C)_F$  и  $d_n(A, C)_F$  не равны между собой даже для достаточно простых  $A$  и  $C$  в  $F = C(X)$ .

Действительно, из следствий ???, ?? следует справедливость соотношений

$$\delta_n(P_k \cap B^{(0)}(X), C_+)_{C(X)} = 0, \quad k = 0, 1; \quad \delta_n(P_k \cap B^{(0)}(X), C_+)_{C(X)} \neq 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

Пусть  $n \geq k$  и  $p \in P_k \cap C_+$ . Тогда

$$\inf_{g \in P_n \cap C_+} \|p - g\|_{C(X)} = \|p - g^*\|_{C(X)} = 0,$$

где  $g^* = p$ . Значит,

$$d_n(P_k \cap B^{(0)}(X), C_+)_{C(X)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$d_n(P_k \cap B^{(0)}(X), C_+)_{C(X)} \neq 0, \quad k = n, n+1, \dots$$

Таким образом, поведение относительных (линейных и нелинейных) поперечников значительно отличается от поведения поперечников по Колмогорову даже для конуса  $C_+$  и множества алгебраических многочленов с ограниченной в  $C(X)$  нормой.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-0003, 07-01-00167)*



**Библиографический список**

1. Shisha O. Monotone approximation // Pacific J. Math. 1965. V. 15, № 2. P. 667–671.
2. Lorentz G., Zeller K. Monotone approximation by algebraic polynomials // Trans. Amer. Soc. 1970. V. 149, № 1. P. 1–18.
3. Шведов А. Комонотонная полиномиальная аппроксимация функций // Докл. Акад. наук СССР. 1980. Т. 250, № 1. С. 39–42.
4. Newman D.J. Efficient comonotone approximation // J. Approx. Theory. 1979. V. 25. P. 189–192.
5. Beatson R.K., Leviatan D. On comonotone approximation // Canad. Math. Bull. 1983. V. 26. P. 220–224.
6. Kolmogorov A.N. Über die besste annäherung von funktionen einer gegebenen funktionklassen // Ann. of Math. 1936. V. 37. P. 107–110.
7. Коновалов В.Н. Оценки диаметров типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. 1984. V. 35. P. 369–380.
8. Konovalov V.N., Leviatan D. Shape-preserving widths

- of weighted Sobolev-type classes of positive, monotone and convex functions on finite interval // Constr. Approx. 2002. V. 19, № 1. P. 23–58.
9. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.
10. F.J. Muñoz Delgado V. Ramírez-González D. C.-M. Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. of Approx. Theory. 1998. V. 98. P. 23–58.
11. Sidorov S.P. On the order of approximation by linear shape preserving operators of finite rank // East J. on Approx. 2001. V. 7, № 1. P. 1–8.
12. Виденский В.С. Об одном точном неравенстве для линейных положительных операторов конечного ранга // Докл. АН ТаджССР. 1981. Т. 24, № 12. С. 715–717.
13. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.

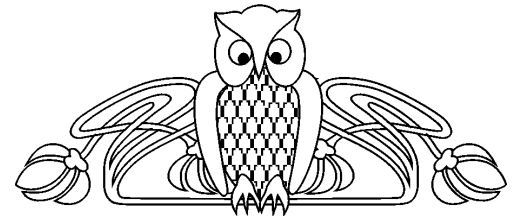
УДК 517.51

**УСЛОВИЯ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СЖАТИЙ И СДВИГОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ  $L_p[0, 1]$**

П.А. Терехин

Саратовский государственный университет,  
кафедра математического анализа  
E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Рассматривается система сжатий и сдвигов функции (или семейство функций-всплесков на отрезке) в пространствах Лебега. Указан явный вид биортогонально сопряженной системы. Установлена теорема равносходимости биортогонального ряда по системе всплесков и ряда Фурье–Хаара.



**Basis Conditions for Systems of Translates and Dilates of Functions in  $L_p$ -Spaces**

P.A. Terekhin

We consider a family of translates and dilates of function (or in other words family of wavelets on finite interval) in Lebesgue spaces. The explicit expressions for biorthogonal family are given. The theorem of equiconvergence for biorthogonal wavelets series and Fourier–Haar series is established.

Пусть  $p \in [1, \infty)$  и функция  $\varphi(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , удовлетворяет условиям:

$$\text{supp } \varphi \subset [0, 1], \quad \varphi \in L_p[0, 1], \quad \int_0^1 \varphi(t) dt = 0.$$

Системой сжатий и сдвигов функции  $\varphi$  называется система функций

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2} \varphi(2^k t - j),$$

где  $n = 2^k + j$ ,  $k \geq 0$ ,  $0 \leq j \leq 2^k - 1$ . Для функции

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 1), \end{cases}$$

система сжатий и сдвигов  $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$  является системой Хаара. Известно, что система Хаара образует базис пространства  $L_p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ . В данной работе решается следующая задача: *найти условия на порождающую функцию  $\varphi$ , при выполнении которых система сжатий и сдвигов  $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$  этой функции образует базис пространства  $L_p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ .*

Определим классы функций  $\Phi_p(\psi, \Lambda)$ , в терминах которых решается поставленная задача. Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  — последовательность неотрицательных чисел и  $\psi \in L_p[0, 1]$  — некоторая функция, система сжатий и сдвигов которой образует базис пространства  $L_p[0, 1]$  (например, функция



Хаара  $\chi$ ). Скажем, что функция  $\varphi \in L_p[0, 1]$  принадлежит классу  $\Phi_p(\psi, \Lambda)$ , если ее разложение по системе сжатий и сдвигов функции  $\psi$  имеет вид

$$\varphi = \psi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{k,j} \psi_{k,j}$$

и коэффициенты этого разложения удовлетворяют условию

$$2^{k(1/2-1/p)} \left( \sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{k,j}|^p \right)^{1/p} \leq \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

При  $\lambda_k = M2^{-\alpha k}$ ,  $M > 0$ ,  $\alpha > 0$ , класс  $\Phi_p(\psi, \Lambda)$  будем обозначать  $\Phi_p^\alpha(\psi, M)$ .

Условимся о следующих обозначениях:  $\mathbb{D} = \{0, 1\}$  — множество из двух элементов 0 и 1;  $\mathbb{D}^k = \mathbb{D} \times \dots \times \mathbb{D}$  — декартова  $k$ -я степень множества  $\mathbb{D}$ ;  $\mathbb{D}^\infty = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{D}^k$  — семейство всех конечных последовательностей  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , состоящих из нулей и единиц (включая при  $k = 0$  пустую последовательность);  $|\alpha|$  — длина последовательности  $\alpha \in \mathbb{D}^\infty$ , т.е.  $|\alpha| = k$ , если  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , длину пустой последовательности полагаем равной нулю;  $\alpha\beta$  — конкатенация последовательностей  $\alpha, \beta \in \mathbb{D}^\infty$ , если  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  и  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ , то  $\alpha\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l)$ .

Пусть  $n = 2^k + j$ ,  $k \geq 0$ ,  $0 \leq j < 2^k - 1$  и  $j = \sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu 2^{k-\nu}$  — двоичное разложение. При указанном соответствии натурального числа  $n$ , упорядоченной пары  $(k, j)$  и набора  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{D}^\infty$  будем полагать  $c_n = c_{k,j} = c(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = c_\alpha$ .

Теперь, по семейству коэффициентов  $c_{k,j}$  разложения функции  $\varphi$  по системе сжатий и сдвигов функции  $\psi$  определим другое числовое семейство  $c_{k,j}^*$  посредством рекуррентных соотношений

$$\sum_{\nu=0}^k c(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

причем для пустой последовательности  $\alpha$  полагаем  $c_\alpha = c_\alpha^* = 1$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\{1, \psi_\alpha^*\}_{\alpha \in \mathbb{D}^\infty}$  — биортогонально сопряженная система к системе сжатий и сдвигов функции  $\psi$ . Для  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{D}^\infty$  положим

$$\varphi_\alpha^* = \varphi^*(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{\nu=0}^k c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) \psi^*(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu).$$

Тогда система  $\{1, \varphi_\alpha^*\}_{\alpha \in \mathbb{D}^\infty}$  является биортогонально сопряженной к системе сжатий и сдвигов функции  $\varphi$ .

**Доказательство.** Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{D}^\infty$ ,  $|\alpha| = k$ ,  $|\beta| = l$ . Вычислим

$$\langle \varphi_\alpha^*, \varphi_\beta \rangle = \sum_{\nu=0}^k c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) \langle \psi^*(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu), \varphi(\beta_1, \dots, \beta_l) \rangle.$$

Заметим, что

$$\langle \psi^*(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu), \varphi(\beta_1, \dots, \beta_l) \rangle = \begin{cases} \langle \psi_\gamma^*, \varphi \rangle, & \text{если } (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) = \beta\gamma, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Уравнение  $(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) = \beta\gamma$  разрешимо относительно  $\gamma$  лишь в том случае, если  $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_l = \beta_l$ . При этом  $l \leq \nu$  и  $\alpha_{l+1} = \gamma_1, \dots, \alpha_\nu = \gamma_{\nu-l}$ . Так как  $\langle \psi_\gamma^*, \varphi \rangle = c_\gamma$ , то окончательно находим

$$\langle \varphi_\alpha^*, \varphi_\beta \rangle = \sum_{\nu=l}^k c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) c(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_\nu).$$

Применяя рекуррентные соотношения (1) с заменой  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  на  $(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_k)$ , получаем, что  $\langle \varphi_\alpha^*, \varphi_\beta \rangle = 0$  при  $k \neq l$ . Если же  $k = l$ , то  $\langle \varphi_\alpha^*, \varphi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ . Лемма доказана.  $\square$





Обозначим  $\lambda(z) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k z^k$ ,  $\mu(z) = \frac{1}{\lambda(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k$ , где числовая последовательность  $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$  определяется рекуррентными соотношениями  $\mu_k = \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k-\nu} \mu_{\nu}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Лемма 2.** *Справедливо неравенство*

$$2^{k(1/2-1/p)} \left( \sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{k,j}^*|^p \right)^{1/p} \leq \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

**Доказательство.** Для  $|\alpha| = k = 1$  имеем  $c_{\alpha}^* = -c_{\alpha}$ . Поэтому

$$2^{1/2-1/p} \left( \sum_{|\alpha|=1} |c_{\alpha}^*|^p \right)^{1/p} = 2^{1/2-1/p} \left( \sum_{|\alpha|=1} |c_{\alpha}|^p \right)^{1/p} \leq \lambda_1 = \mu_1.$$

Предположим, что (2) уже доказано для всех  $\nu < k$ . Для  $|\alpha| = k$  имеем

$$-c_{\alpha}^* = c_{\alpha} + \sum_{\nu=1}^{k-1} c(\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}) c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k),$$

откуда, согласно свойствам нормы, находим

$$\begin{aligned} & 2^{k(1/2-1/p)} \left( \sum_{|\alpha|=k} |c_{\alpha}^*|^p \right)^{1/p} \leq 2^{k(1/2-1/p)} \left( \sum_{|\alpha|=k} |c_{\alpha}|^p \right)^{1/p} + \\ & + 2^{k(1/2-1/p)} \sum_{\nu=1}^{k-1} \left( \sum_{|\alpha|=k} |c(\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}) c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k)|^p \right)^{1/p} \leq \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{\nu} \mu_{k-\nu} = \mu_k. \end{aligned}$$

Неравенство (2) установлено по индукции. Лемма доказана.  $\square$

Пусть  $S_n^{(0)} f = \langle f, 1 \rangle 1 + \sum_{|\alpha| < n} \langle f, \psi_{\alpha}^* \rangle \psi_{\alpha}$  — частная сумма порядка  $2^n$  ряда Фурье функции  $f$  по базису  $\{1, \psi_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{D}^{\infty}}$  и  $S_n f = \langle f, 1 \rangle 1 + \sum_{|\alpha| < n} \langle f, \varphi_{\alpha}^* \rangle \varphi_{\alpha}$  — частная сумма порядка  $2^n$  биортогонального разложения функции  $f$  по системе  $\{1, \varphi_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{D}^{\infty}}$ . Пусть, далее,  $E_n = \|\psi - S_n \psi\|_p$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — уклонение частных сумм биортогонального разложения от функции  $\psi$  в метрике пространства  $L_p[0, 1]$ .

**Теорема 1 (о равномерности).** *Если  $\sum_{n=1}^{\infty} E_n < \infty$ , то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^{(0)} f - S_n f\|_p = 0$$

*и, следовательно, система  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  сжатий и сдвигов функции  $\varphi$  является базисом пространства  $L_p[0, 1]$ .*

**Доказательство.** Сначала проверим равенство  $S_n S_n^{(0)} f = S_n f$ . Для этого вычислим при  $|\alpha| < n$  величину

$$\langle f, \varphi_{\alpha}^* \rangle - \langle S_n^{(0)} f, \varphi_{\alpha}^* \rangle = \left\langle \sum_{|\beta| \geq n} \langle f, \psi_{\beta}^* \rangle \psi_{\beta}, \varphi_{\alpha}^* \right\rangle = \sum_{|\beta| \geq n} \langle f, \psi_{\beta}^* \rangle \sum_{\nu=0}^k c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) \langle \psi_{\beta}, \psi^*(\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}) \rangle = 0.$$

Отсюда находим  $S_n S_n^{(0)} f = \langle S_n^{(0)} f, 1 \rangle 1 + \sum_{|\alpha| < n} \langle S_n^{(0)} f, \varphi_{\alpha}^* \rangle \varphi_{\alpha} = \langle f, 1 \rangle 1 + \sum_{|\alpha| < n} \langle f, \varphi_{\alpha}^* \rangle \varphi_{\alpha} = S_n f$ .

Равенство  $S_n S_n^{(0)} f = S_n f$  проверено. Перейдем непосредственно к доказательству равномерности частных сумм  $S_n f$  и  $S_n^{(0)} f$ . Будем иметь

$$\|S_n^{(0)} f - S_n f\|_p = \|S_n^{(0)} f - S_n S_n^{(0)} f\|_p = \left\| \sum_{|\alpha| < n} \langle f, \psi_{\alpha}^* \rangle \psi_{\alpha} - S_n \sum_{|\alpha| < n} \langle f, \psi_{\alpha}^* \rangle \psi_{\alpha} \right\|_p =$$



$$= \left\| \sum_{|\alpha| < n} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle (\psi_\alpha - S_n \psi_\alpha) \right\|_p \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \sum_{|\alpha|=k} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle (\psi_\alpha - S_n \psi_\alpha) \right\|_p.$$

Пусть  $|\alpha| = k < n$ . Вычислим  $S_n \psi_\alpha = \sum_{|\beta| < n} \langle \psi_\alpha, \varphi_\beta^* \rangle \varphi_\beta$ . Имеем

$$\langle \psi_\alpha, \varphi_\beta^* \rangle = \begin{cases} \langle \psi, \varphi_\gamma^* \rangle, & \text{если } \beta = \alpha\gamma, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Если  $\beta = \alpha\gamma$ , то  $|\gamma| = |\beta| - |\alpha| < n - k$ . Поэтому  $S_n \psi_\alpha = \sum_{|\gamma| < n-k} \langle \psi, \varphi_\gamma^* \rangle \varphi_{\alpha\gamma} = (S_{n-k} \psi)_\alpha$ .

Таким образом, находим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{|\alpha|=k} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle (\psi_\alpha - S_n \psi_\alpha) \right\|_p &= \left\| \sum_{|\alpha|=k} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle (\psi - S_{n-k} \psi)_\alpha \right\|_p = \\ &= 2^{k(1/2-1/p)} \left( \sum_{|\alpha|=k} |\langle f, \psi_\alpha^* \rangle|^p \right)^{1/p} \|\psi - S_{n-k} \psi\|_p. \end{aligned}$$

Обозначив  $A_k(f) = 2^{k(1/2-1/p)} \left( \sum_{|\alpha|=k} |\langle f, \psi_\alpha^* \rangle|^p \right)^{1/p}$ , окончательно получим

$$\|S_n^{(0)} f - S_n f\|_p \leq \sum_{k=0}^{n-1} A_k(f) E_{n-k}.$$

Так как  $\{1, \psi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{D}^\infty}$  — базис, то  $f = \langle f, 1 \rangle 1 + \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle \psi_\alpha$ .

В силу необходимого условия сходимости ряда

$$A_k(f) = \left\| \sum_{|\alpha|=k} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle \psi_\alpha \right\|_p \cdot \frac{1}{\|\psi\|_p} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} A_k(f) E_{n-k} &= \sum_{k=0}^{[n/2]-1} A_k(f) E_{n-k} + \sum_{k=[n/2]}^{n-1} A_k(f) E_{n-k} \leq \\ &\leq \sup_{k \geq 0} A_k(f) \cdot \sum_{k=[n/2]}^\infty E_k + \sup_{k \geq [n/2]} A_k(f) \cdot \sum_{k=0}^\infty E_k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Это доказывает равносходимость частных сумм  $S_n f$  и  $S_n^{(0)} f$ . Базисность системы функций  $\{1, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{D}^\infty}$  вытекает из оценки

$$\|f - S_n f\|_p \leq \|f - S_n^{(0)} f\|_p + \|S_n^{(0)} f - S_n f\|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.  $\square$

**Лемма 3.** Справедливо неравенство  $E_n \leq C \sum_{k=n}^\infty \mu_k$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Доказательство.** Если  $\sum_{k=1}^\infty \mu_k = \infty$ , то доказывать нечего. Пусть поэтому  $\sum_{k=1}^\infty \mu_k < \infty$ . Рассмотрим разложение функции  $\psi$  по системе функций  $\{1, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{D}^\infty}$ :  $\psi \sim \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} \langle \psi, \varphi_\alpha^* \rangle \varphi_\alpha$ .

Имеем

$$\langle \psi, \varphi_\alpha^* \rangle = \sum_{\nu=0}^k c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) \langle \psi, \psi^*(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) \rangle = c_\alpha^*.$$



Поэтому  $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \langle \psi, \varphi_{\alpha}^* \rangle \varphi_{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha}^* \varphi_{\alpha}$ . С учетом неравенства (2) леммы 2 находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha}^* \varphi_{\alpha} \right\|_p = \|\varphi\|_p \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left( \sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{k,j}^*|^p \right)^{1/p} \leq \|\varphi\|_p \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \right) < \infty.$$

Следовательно, биортогональное разложение функции  $\psi$  сходится к некоторой функции  $\psi_0$ :

$$\psi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha}^* \varphi_{\alpha}.$$

Видно, что  $\langle \psi_0, \varphi_{\alpha}^* \rangle = \langle \psi, \varphi_{\alpha}^* \rangle$  для всех  $\alpha \in \mathbb{D}^{\infty}$ . Отсюда, в силу определения системы функций  $\{1, \varphi_{\alpha}^*\}_{\alpha \in \mathbb{D}^{\infty}}$ , вытекают равенства  $\langle \psi_0, \psi_{\alpha}^* \rangle = \langle \psi, \psi_{\alpha}^* \rangle$  для всех  $\alpha \in \mathbb{D}^{\infty}$ . Поэтому

$$\psi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \langle \psi_0, \psi_{\alpha}^* \rangle \psi_{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \langle \psi, \psi_{\alpha}^* \rangle \psi_{\alpha} = \psi.$$

Таким образом, получаем  $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha}^* \varphi_{\alpha}$ , откуда, аналогично уже доказанному, находим

$$\begin{aligned} E_n = \|\psi - S_n \psi\|_p &= \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha}^* \varphi_{\alpha} \right\|_p \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left\| \sum_{|\alpha|=k} c_{\alpha}^* \varphi_{\alpha} \right\|_p = \\ &= \|\varphi\|_p \sum_{k=n}^{\infty} 2^{k(1/2-1/p)} \left( \sum_{|\alpha|=k} |c_{\alpha}^*|^p \right)^{1/p} \leq \|\varphi\|_p \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k \end{aligned}$$

для любого  $n = 1, 2, \dots$ . Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 4.** Если  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k < \infty$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} k \mu_k < \infty$ .

**Доказательство.** В силу условия  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1$  функция  $\lambda(z)$  не имеет нулей в круге ( $|z| \leq 1$ ). По теореме Винера функция  $\mu(z) = \frac{1}{\lambda(z)}$  имеет абсолютно сходящийся ряд Тейлора. Согласно условию  $\sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k < \infty$  функция  $\lambda'(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k z^{k-1}$  также имеет абсолютно сходящийся ряд Тейлора. Следовательно, такова же функция  $\sum_{k=1}^{\infty} k \mu_k z^{k-1} = \mu'(z) = -\mu^2(z) \lambda'(z)$ . Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} k \lambda_k < \infty$ , и система  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  сжатий и сдвигов функции  $\psi$  образует базис пространства  $L_p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Тогда для любой функции  $\varphi \in \Phi_p(\psi, \Lambda)$  система  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  ее сжатий и сдвигов является базисом пространства  $L_p[0, 1]$ .

**Доказательство.** Согласно леммам 3 и 4 имеем  $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k = C \sum_{k=1}^{\infty} k \mu_k < \infty$ . Осталось применить теорему 1. Теорема доказана.  $\square$

**Лемма 5.** Если для любой функции  $\varphi \in \Phi_p(\psi, \Lambda)$  система  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  ее сжатий и сдвигов является базисом пространства  $L_p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , то выполняется соотношение  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $\varphi = \psi - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} \psi_{k,j}$ . Очевидно, что функция  $\varphi$  принадлежит классу  $\Phi_p(\psi, \Lambda)$ . По условию леммы система сжатий и сдвигов функции  $\varphi$  является базисом. Разложим по этому базису функцию  $\psi$ . Получим  $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} \langle \psi, \varphi_{k,j}^* \rangle \varphi_{k,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{k,j}^* \varphi_{k,j}$ . Поскольку  $c_{k,j} = -\lambda_k 2^{-k/2}$ , то на основании рекуррентных соотношений (1) заключаем, что



$c_{k,j}^* = \mu_k 2^{-k/2}$ . Таким образом, имеем  $\psi = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} \varphi_{k,j}$ . В силу необходимого условия сходимости ряда и с учетом равенства  $\left\| 2^{-k/2} \sum_{j=0}^{2^k-1} \varphi_{k,j} \right\|_p = \|\varphi\|_p$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , находим, что  $\mu_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Лемма доказана.  $\square$

Итак, между полученными необходимыми и достаточными условиями базисности систем сжатий и сдвигов функций  $\varphi \in \Phi_p(\psi, \Lambda)$  имеется следующий «зазор»: от необходимого условия  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$  до достаточного условия  $\sum_{k=1}^{\infty} k\mu_k < \infty$ . Следующая теорема называет такие условия на последовательность  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ , при выполнении которых этот «зазор» исчезает.

**Теорема 3.** Пусть система  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  сжатий и сдвигов функции  $\psi$  образует базис пространства  $L_p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , и последовательность  $\Lambda$  удовлетворяет условию

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \leq C\lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Тогда условие  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1$  необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции  $\varphi \in \Phi_p(\psi, \Lambda)$  система  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  ее сжатий и сдвигов была базисом пространства  $L_p[0, 1]$ .

**Доказательство.** Достаточность вытекает из теоремы 2, поскольку в силу условия (3) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < C.$$

Необходимость. Предположим противное, т.е.  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \geq 1$ . Установим индукцией по  $n$  неравенство

$$\mu_n \geq \frac{1}{C}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

При  $n = 1$  имеем  $\mu_1 = \lambda_1 \geq \frac{1}{C} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \geq \frac{1}{C}$ . Предположим, что при некотором  $n > 1$  неравенство

$\mu_k \geq \frac{1}{C}$  доказано для всех  $k < n$ . Тогда  $\mu_n = \lambda_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} \mu_k \geq \frac{1}{C} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k + \frac{1}{C} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} \geq \frac{1}{C}$ .

Неравенство (4) установлено. Получили противоречие с необходимым условием  $\mu_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.  $\square$

Следует отметить, что условие (3) известно как *условие Бари* и равносильно тому, что последовательность  $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  является объединением конечного набора лакунарных последовательностей. Например, условию Бари (3) удовлетворяет последовательность  $\lambda_k = M2^{-\alpha k}$ ,  $M > 0$ ,  $\alpha > 0$ .

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

**Следствие 1.** Пусть система  $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$  сжатий и сдвигов функции  $\psi$  образует базис пространства  $L_p[0, 1]$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Тогда условие  $M < 2^\alpha - 1$  необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции  $\varphi \in \Phi_p^\alpha(\psi, M)$  система  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  ее сжатий и сдвигов была базисом пространства  $L_p[0, 1]$ .

В заключение заметим, что базисность систем сжатий и сдвигов функций (точнее, систем типа Фабера–Шаудера) в пространстве  $C[0, 1]$  изучалась в работах З.А.Чантурия [1] и Т.Н.Сабуровой [2]. Условия базисности по Риссу систем сжатий и сдвигов в пространстве  $L_2[0, 1]$  получены в работе автора [3].

### Библиографический список

1. Чантурия З.А. О базисах пространства непрерывных функций // Мат. сборник. 1972. Т. 88, № 4. С. 589–608.
2. Сабурова Т.Н. О базисах в  $C[0, 1]$  типа Фабера – Шаудера // Теория функций и приближений: Тр. третьей Саратов. зимней школы (Саратов, 1986). Саратов, 1988. Ч. 3. С. 44–46.
3. Терехин П.А. Базисы Рисса, порожденные сжатиями и сдвигами функции на отрезке // Мат. заметки. 2002. Т. 72, вып. 4. С. 547–560.



# МЕХАНИКА

УДК [611.137.83+611.711].577.3:001.57(075.8)

## ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИКИ КРОВОТОКА В КРУПНЫХ АРТЕРИЯХ ПО ОДНОМЕРНОЙ ТЕОРИИ

М.А. Елшин, Ю.П. Гуляев

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической теории упругости и биомеханики  
E-mail: michael\_ema@mail.ru, gulvis@yandex.ru

Сформулированы уравнения одномерной динамики тока крови в артериальных системах крупных кровеносных сосудов. Получено аналитическое решение сформулированной системы уравнений и рассмотрены некоторые варианты задания граничных и контактных условий.

**Statement Formulating and Solution of the Problem of Blood Dynamics in Arterial Systems, Using the One-Dimensional Theory**

M.A. Elshin, J.P. Gulyaev

The equations of the one-dimensional theory of dynamics of a blood-groove in arterial systems of large blood vessels are formulated most. Analytic solution of the formulated system of equation and some variants of edge and contact conditions are proposed.

### 1. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ КРОВОТОКА В ЧАСТИ АРТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Основная система включает в себя следующие уравнения: упрощенное одномерное дифференциальное уравнение течения вязкой несжимаемой жидкости [3]:

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial t} = -\pi R^2 \frac{\partial P}{\partial z} - 8\pi\mu \frac{1}{\pi R^2} Q; \quad (1)$$

уравнение неразрывности, которое связывает объемный расход  $Q$  с радиальным перемещением стенок сосуда  $w$ :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad (2)$$

динамические уравнения осесимметричного движения круговой цилиндрической оболочки по безмоментной теории[1]:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{S_0 - T_0}{R} \frac{\partial w}{\partial z} - K_2 u; \quad (3)$$

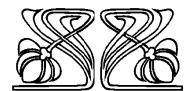
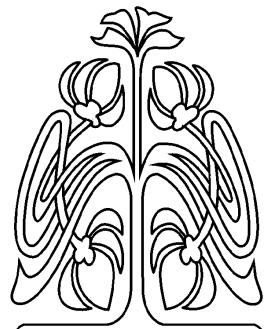
$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P + \frac{T_0}{R^2} w - \frac{T}{R} + S_0 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - K_1 w; \quad (4)$$

соотношения идеальной упругости стенок сосуда для обобщенного плоского напряженного состояния

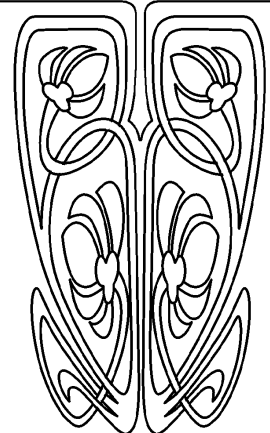
$$S = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{w}{R} \right]; \quad (5)$$

$$T = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{w}{R} \right] \quad (6)$$

или известные соотношения, учитывающие анизотропию стенок сосуда [2]. Таким образом, получаем замкнутую систему уравнений



**НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ**





(1)–(6) в частных производных относительно шести неизвестных  $u, w, Q, T, S, P$ .

Выразим из уравнения (4) давление и подставим его в уравнения (1)–(3), а также исключим из этих уравнений усилия, используя формулы (5) и (6). В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial Q}{\partial t} &= -\pi R^2 \rho h \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} + \pi R \frac{\partial w}{\partial z} \left[ \frac{T_0}{R} - \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} - k_1 R \right] - \nu \pi R \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \pi R^2 S_0 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - 8\pi \mu \frac{1}{\pi R^2} Q; \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial z} \left[ \frac{\nu Eh}{(1-\nu^2)} + S_0 - T_0 \right] + \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - K_2 u. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (7) представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно трех неизвестных функций  $u, w, Q$ .

## 2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ КРОВОТОКА

Представим функции  $u, w, Q$  в виде гармоник комплексного ряда Фурье:

$$u(z, t) = u(z) e^{i\omega_k t}, \quad w(z, t) = w(z) e^{i\omega_k t}, \quad Q(z, t) = Q(z) e^{i\omega_k t}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T}.$$

Подставляя их в уравнения (7), получим систему уравнений в частных производных с комплексными коэффициентами

$$\begin{aligned} i\omega_k \rho Q &= -\pi R^2 \rho h \omega_k^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \pi R \frac{\partial w}{\partial z} \left[ \frac{T_0}{R} - \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} - k_1 R \right] - \nu \pi R \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \pi R^2 S_0 \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - 8\pi \mu \frac{1}{\pi R^2} Q, \\ i\omega_k w &= -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad -\rho h \omega_k^2 u = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial z} \left[ \frac{\nu Eh}{(1-\nu^2)} + S_0 - T_0 \right] + \frac{Eh}{R(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - K_2 u. \end{aligned}$$

Эта система может быть преобразована к матричному виду:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = MH, \quad (8)$$

где

$$H(z) = \begin{pmatrix} Q \\ w \\ u \\ V \\ Z \\ Y \end{pmatrix}, \quad V = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 0 & E & 0 & F & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} A &= -2i\pi R \omega_k, & B &= \frac{1-\nu^2}{Eh} [k_2 - \rho h \omega_k^2], \\ C &= \frac{1-\nu^2}{EhR} \left[ \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} + S_0 - T_0 \right], & D &= \frac{i\omega_k \rho}{\pi R^2 S_0} \frac{8\pi \mu}{\pi^2 R^4 S_0}, \\ E &= \nu \frac{k_2 - \rho h \omega_k^2}{RS_0}, & F &= \frac{1}{RS_0} \left[ k_1 R - R \rho h \omega_k^2 + \frac{Eh - S_0 \nu - T_0(1-\nu)}{R} \right]. \end{aligned}$$

Запишем характеристическое уравнение для этой системы

$$\lambda^6 - (F + B)\lambda^4 + (BF - CE - AD)\lambda^2 + ABD = 0. \quad (9)$$

Характеристическое уравнение является уравнением шестой степени с комплексными коэффициентами. Так как уравнение содержит только четные степени переменной  $\lambda$ , то его можно преобразовать к уравнению третьей степени

$$\zeta^3 + \alpha \zeta^2 + \beta \zeta + \chi = 0, \quad (10)$$

где  $\alpha = -F - B$ ,  $\beta = BF - CE - AD$ ,  $\chi = ABD$ . Тогда каждому решению уравнения (10) будет соответствовать два решения уравнения (9),  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ . Таким образом, получаем шесть собственных значений системы уравнений (8). Найдем собственные вектора для каждого из шести собственных значений, решив систему уравнений  $(M - E\lambda_i)\gamma_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 6}$ ,



где  $\gamma_i = (\gamma_{1,i}, \gamma_{2,i}, \gamma_{3,i}, \gamma_{4,i}, \gamma_{5,i}, \gamma_{6,i})^T$  — собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda_i$ . Аналитическое решение даёт следующие выражения для компонент собственных векторов  $\gamma_i = (\frac{A}{\lambda_i^3}, \frac{1}{\lambda_i^2}, \frac{C}{\lambda_i(\lambda_i^2 - B)}, \frac{C}{\lambda_i^2 - B}, \frac{1}{\lambda_i}, 1)^T$ .

В результате искомые функции будут представлены в виде

$$u(z) = \sum_{i=1}^6 C_i \gamma_{3,i} e^{\lambda_i z}, \quad w(z) = \sum_{i=1}^6 C_i \gamma_{2,i} e^{\lambda_i z}, \quad Q(z) = \sum_{i=1}^6 C_i \gamma_{1,i} e^{\lambda_i z}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Для того чтобы полностью решить задачу, необходимо задать шесть произвольных постоянных для участка артериальной системы, которые будут определяться из краевых и контактных условий артериальной системы. Необходимо задать шесть условий для каждого участка. В качестве таких условий можно взять, например:

- на входе в артериальное русло:  $Q(0, t) = Q_0(t), \quad u(0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0,$
- на выходе из артериального русла:  $R^* Q(l) = P(l), \quad u(l) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0,$
- в точке соединения/разветвления нескольких участков артериального русла

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0, \quad P_1 = P_i, \quad u_1 = u_i, \quad w_1 = w_i, \quad i = \overline{2, n}, \quad S_1 = \frac{\sum_{i=2}^n S_i l_i^*}{\sum_{i=2}^n l_i^*}, \quad T_1 = \frac{\sum_{i=2}^n T_i l_i^*}{\sum_{i=2}^n l_i^*}, \quad l_i^* = 2\pi R_i,$$

где  $n$  — количество артерий, соединенных в данной точке.

Таким образом, имеем по три условия в начале и в конце артериальной системы. Чтобы система уравнений для определения произвольных констант была замкнутая, необходимо, чтобы в точке контакта на каждую из артерий приходилось по три контактных условия. Действительно, имеем одно уравнение баланса кровотоков, два осредненных уравнения равенства продольных и поперечных усилий и по  $n - 1$  уравнению для давления и перемещений:  $3 + 3(n - 1) = 3n$ , т.е. для  $n$  артерий в узле имеем  $3n$  уравнений, по 3 на каждую артерию. Следовательно, получили замкнутую систему уравнений для нахождения произвольных констант для каждой из артерий составляющих артериальную систему. Для полного решения задачи нужно задать еще средний за период пульсации кровотока. Тогда полный кровоток будет складываться из установившегося течения и пульсационного.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕГО КРОВОТОКА

Для определения среднего тока крови воспользуемся электродинамической аналогией и будем рассчитывать движение жидкости как электрический ток в цепи постоянного тока. Давление будет играть роль потенциала, объемный кровоток — роль электрического тока. В качестве аналогии для закона Ома возьмём решение Пуазейля, устанавливающий связь средней скорости течения вязкой несжимаемой жидкости в тонкой трубке с перепадом давления на её концах:

$$Q_i = \frac{P_k - P_r}{R_i^p}, \quad R_i^p = \frac{8\mu l}{\pi R_i^4},$$

где  $i$  — номер артерии,  $r$  — номер узла, в котором артерия заканчивается,  $k$  — номер узла, в котором артерия начинается.

По правилу Кирхгофа будем иметь уравнение баланса токов в каждом узле

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражения для токов, получим систему уравнений для определения давлений в каждом из узлов артериальной системы. Замкнем эту систему, задав давления на входе и выходе из артериальной системы. Решив систему, получим давления в узлах, а по уравнению Пуазейля вычислим кровотоки.

Таким образом, задача о пульсации кровотока будет окончательно решена.



#### 4. УПРОЩЕНИЯ ПОСТРОЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПУЛЬСАЦИИ КРОВОТОКА

Возможно упрощение решения поставленной задачи, которое состоит в сокращении числа произвольных постоянных интегрирования на каждом участке артериальной системы. Это можно сделать из соображений предельного перехода по некоторым параметрам. Так, например, при стремлении массовой плотности материала сосудистой стенки к нулю два корня уравнения (9) тоже будут стремиться по модулю к нулю. Такой предельный переход соответствует пренебрежению силами инерции стенок сосуда. В этом случае выбираем четыре собственных значения на каждом участке, которые не стремятся к нулю. Граничные и контактные условия можно взять такими:

- на входе в артериальное русло:  $Q(0, t) = Q_0(t), \quad w(0) = 0,$
- на выходах из артериального русла:  $R^*Q(l) = P(l), \quad w(l) = 0,$
- в узле контакта артерий:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0, \quad P_1 = P_i, \quad i = \overline{2, n}, \quad u_1 = u_i, \quad i = \overline{2, n}, \quad w_1 = \frac{\sum_{i=2}^n w_i l_i^*}{\sum_{i=2}^n l_i^*}, \quad l_i^* = 2\pi R_i.$$

Таким образом, будем иметь по два условия на артерию в точке входа и точках выхода и по два условия — на каждую артерию в узле контакта. То есть имеем по 4 уравнения на каждую артерию. Система уравнений для нахождения произвольных постоянных будет замкнута.

В самом простом случае оставляем из четырёх лишь два собственных значения, которые остаются конечными при стремлении продольной силы натяжения стенок сосуда  $S_0$  к нулю. Тогда граничные и контактные условия можно взять в виде

- на входе в артериальное русло:  $Q(0, t) = Q_0(t),$
- на выходах из артериального русла:  $R^*Q(l) = P(l),$
- в узлах контакта:  $\sum_{i=1}^n Q_i = 0, \quad P_1 = P_i, \quad i = \overline{2, n}.$

В этом случае имеем по два условия на каждую артерию для определения двух произвольных констант. Следовательно, система замкнута.

#### Библиографический список

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
3. Гуляев Ю.П., Косович Л.Ю. Математические модели биомеханики в медицине. Саратов: Изд-во Саратовского университета. 2001. 49 с.

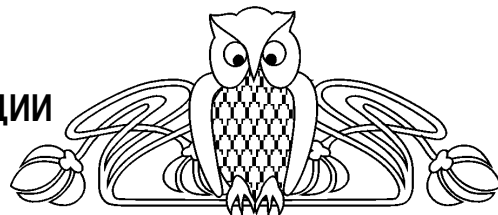
УДК 539.3

### МОДЕЛИРОВАНИЕ КАРОТИДНОЙ БИФУРКАЦИИ МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

А.В. Каменский

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической теории упругости и биомеханики  
E-mail: avkamensky@gmail.com

Методом конечного элемента решена совместная задача гидродинамики и теории упругости о пульсации каротидной бифуркации человека. Использована ортотропная гиперупругая модель, учитывающая анатомическое строение стенки. Получено решение для геометрии сосуда, восстановленной по *in-vivo* КТ-ангиограмме. Граничные условия для жидкости определялись *in-vivo* при помощи ультразвукового аппарата Доплера. Результаты моделирования были проанализированы на предмет корреляции зон низкого сдвигового напряжения (WSS) для жидкости, высоких циклических деформаций (CS) и высокого эффективного напряжения (ES) для стенки с зонами атеросклеротического поражения на КТ-ангиограмме.



#### Finite Element Model of the Carotid Bifurcation

A.V. Kamenskiy

A fluid-solid interaction problem of a pulsation of the human carotid bifurcation was solved using finite element method. Hyperelastic orthotropic wall model that accounts for the carotid histological structure and *in-vivo* vessel geometry obtained from the CT-imaging were utilized. *In-vivo* blood flow boundary conditions for the problem were determined using Doppler Ultrasound. Results of the modeling were analyzed for correlation between zones of low wall shear stress (WSS) for blood flow, high cyclic strain (CS) and high effective stress (ES) for vessel wall with the zones of atherosclerosis formation on the CT-angiogram.





## ВВЕДЕНИЕ

Биомеханика сосудов является одной из важнейших, но, к сожалению, плохо изученных областей механики. На протяжении многих десятилетий различные авторы пытаются с разной степенью достоверности описать структуру, геометрию и работу стенки сосуда человека. Огромное количество работ посвящено изучению каротидной бифуркации, части сосудистого русла, отвечающей за кровоснабжение головного мозга и являющейся местом локализации атеросклероза.

Стенка каротидной бифуркации состоит из трех слоев (по степени удаления от кровяного русла): *intima*, *media* и *adventitia* [1]. *Intima* состоит из одного эндотелиального и одного субэндотелиального слоя клеток. В здоровых молодых сосудах *intima* имеет незначительную толщину и практически не влияет на механику сосуда в целом. Это утверждение, однако, может не являться истинным в случае, если сосуд поражен атеросклерозом. Слой *media* состоит из сложной трехмерной структуры гладких мышечных клеток, эластина и коллагеновых волокон. Эта структура может быть условно разделена на слои, в каждом из которых можно выделить четкую геометрическую организацию волокон [2]. По большей части именно этот слой определяет механическое поведение здорового сосуда. *Adventitia* состоит в основном из фибробластов и фиброцитов (клеток, которые синтезируют коллаген и эластин), гистологической субстанции и толстых пучков коллагеновых волокон. Толщина *adventitia* в среднем в два раза меньше толщины *media*. Отметим, что влияние этого слоя на механику сосуда особо велико при избыточных внутренних давлениях, когда составляющие его коллагеновые волокна выпрямляются, и жесткость артерии резко возрастает. При физиологических же нагрузках поведение сонной артерии в основном определяется механическими свойствами *media*. Приведенное описание обосновывает возможность приближенного моделирования стенки сосуда как двухслойного или даже однослойного объекта.

Исторически предполагалось, что стенка сосуда под нормальным внутренним кровяным давлением ведет себя линейно и изотропно. Однако чтобы убедиться в обратном, достаточно провести простейшие механические эксперименты, что и было проделано в [4]. Одной из самых известных моделей для изотропной стенки, учитывающей нелинейность свойств сосуда, является модель, разработанная Delfino [4]. Дальнейшее усложнение модели на случай трансверсальной изотропии материала было начато Spencer [5] и Fung с соавт. [8], а в последствие продолжено Касьяновым с соавт. [6] и Humphrey с соавт. [7]. Отметим, что модели, основанные на модели Fung, являются весьма популярными среди современных авторов, однако ни одна из них не учитывает анатомического строения стенки сосуда.

Революционным подходом к изучению вопроса стал учет анатомического строения артерии. Первые попытки в этом направлении были сделаны еще Spencer, Humphrey и Касьяновым, которые рассматривали стенку как совокупность волокон одного семейства. Дальнейшее усложнение модели до случая реального анатомического строения было произведено сравнительно недавно Holzapfel с соавт. [1]. Однако, использование модели для конечно-элементного моделирования представляет определенные трудности, которые до настоящего времени были преодолены лишь частично [9].

В настоящей статье предлагается метод применения ортотропной модели Holzapfel к смешанной гидродинамической гиперупругой задаче для трехмерной восстановленной геометрии.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТЕНКИ

Стенка каротидной бифуркации моделируется нелинейным, гиперупругим, однородным и ортотропным материалом [1]. Вязкоупругие эффекты в данном моделировании не рассматриваются. Стенка предполагается несжимаемой, так как состоит в основном из воды.

Функция энергии деформации для описанного материала может быть представлена как сумма двух составляющих — изотропной и анизотропной:

$$\psi(\bar{C}, n_a, n_b) = \psi_{iso}(\bar{C}) + \psi_{aniso}(\bar{C}, n_a, n_b).$$

Здесь  $\bar{C}$  — правый модифицированный тензор Коши–Грина, а вектора  $n_a$  и  $n_b$  определяют направления каждого из двух семейств волокон, составляющих каротидную стенку (рис. 1).

Напомним, что  $\bar{C} = \bar{F}^T \bar{F}$ , а  $F = (J^{1/3} I) \bar{F}$ , где  $F$  — градиент деформации,  $J = \det F$ , а  $I$  — единичный тензор второго рода.

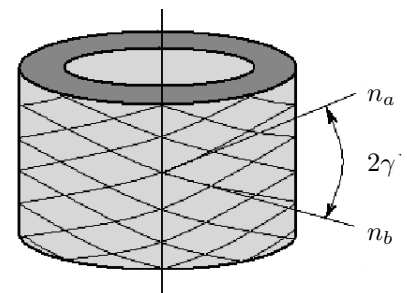


Рис. 1. Строение стенки каротидной бифуркации



Рассмотрим изотропную составляющую энергии деформации  $\psi_{iso}$ . В общем виде  $\psi_{iso} = \psi_{iso}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3)$ , где  $\bar{I}_1(\bar{C}) = tr(\bar{C})$ ,  $\bar{I}_2(\bar{C}) = \frac{1}{2} [(tr(\bar{C}))^2 - tr(\bar{C}^2)]$ ,  $\bar{I}_3(\bar{C}) = det(\bar{C})$  суть инварианты правого модифицированного тензора Коши–Грина. Условие несжимаемости стенки позволяет избавиться от третьего инварианта  $\bar{I}_3 = det(\bar{C}) = 1$ . Таким образом,  $\psi_{iso}$  зависит только от первых двух инвариантов и может быть представлена в общей форме Моoney–Rivlin для изотропного, гиперупругого несжимаемого материала.

В целях уменьшения параметров модели в качестве  $\psi_{iso}$  принимается модель материала Neo-Hookean, зависящего только от одного первого инварианта правого модифицированного тензора Коши–Грина:  $\psi_{iso} = \psi_{iso}(\bar{I}_1) = C_1(\bar{I}_1 - 3)$ . Здесь  $C_1$  — параметр материала, определяемый экспериментально. Его размерность совпадает с размерностью напряжений.

Теперь рассмотрим анизотропную составляющую функции энергии деформации. В общем случае она зависит от восьми инвариантов правого модифицированного тензора Коши–Грина. Для уменьшения количества параметров, определяемых экспериментально, предположим, что анизотропная часть функции энергии деформации зависит только от двух инвариантов — четвертого и шестого, которые представляют собой квадраты удлинений в направлениях  $n_a$  и  $n_b$  соответственно. Иными словами,  $\psi_{aniso} = \psi_{aniso}(\bar{I}_4, \bar{I}_6)$ , где  $\bar{I}_4(\bar{C}, n_a) = \bar{C} : N_1$ ,  $\bar{I}_6(\bar{C}, n_b) = \bar{C} : N_2$ ,  $N_1 = n_a \otimes n_a$ ,  $N_2 = n_b \otimes n_b$ .

Энергию деформации, накопленную коллагеновыми волокнами, примем в виде экспоненциальной функции:  $\psi_{aniso}(\bar{I}_4, \bar{I}_6) = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \{e^{k_2(\bar{I}_i - 1)^2} - 1\}$ . Здесь  $k_1, k_2$  — параметры материала, определяемые экспериментально. При этом  $k_1$  имеет размерность напряжений, а  $k_2$  — безразмерный.

Таким образом, функция энергии деформации зависит от четырех параметров, определяемых экспериментально:  $C_1, k_1, k_2$  и угла  $2\gamma$  между двумя семействами волокон.

## 2. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ

Одним из основных вопросов реализации приведенной модели является определение ориентации семейств волокон в каждой точке произвольной трехмерной геометрии. Hariton [9] предложил определять плоскость, в которой расположены волокна, как образуемую двумя главными направлениями соответствующими двум наибольшим главным напряжениям. Такой подход предполагает нагружение изотропной модели, расчет главных напряжений и направлений для каждого элемента изотропной модели и последующее задание плоскости волокон для каждого элемента анизотропной модели в соответствии с полученными результатами для изотропного случая.

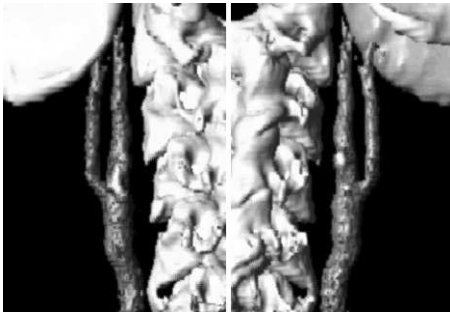


Рис. 2. *In-vivo* КТ-ангиограмма, полученная при помощи Philips CT Secuga томографа

В данной работе предлагается использовать другой подход: геометрия модели, построенная по *in-vivo* КТ-ангиограмме (рис. 2), разбивается на более простые объемы таким образом, чтобы каждый объем состоял из простых поверхностей, для которых можно однозначно определить ориентацию плоскости ортотропии в каждой точке.

Для каждого элемента объемов определяется локальная система координат (рис. 3). Две оси этой системы лежат на внешней грани элемента, образующего стенку, а третья направлена по внешней нормали к образующей поверхности. Ввиду малости самих элементов, поверхность ортотропии будет изогнута так же, как и внешняя поверхность, образующая стенку. При этом стоит отметить, что если толщина стенки значительно

меняется на рассматриваемом сегменте объема, стоит использовать срединную поверхность в качестве поверхности привязки.

Построенные таким образом объемы связываются вместе посредством задания контактных условий и связок (face link), образуя единую модель с однородной сеткой. Такой подход к моделированию позволяет задавать различные свойства материала для каждого из объемов, из которых состоит модель, таким образом, можно учитывать различие механических свойств разных участков сосудистой стенки. Однако в данном исследовании, по причине отсутствия экспериментальных данных о различных частях сосуда, материал всех объемов предполагается одинаковым.

В качестве инструмента для реализации модели использовался КЭ пакет ADINA R D. Стенка моделировалась 11-узловым 3D-solid элементами, общее количество которых для модели составило 6668. На торцы сосуда накладывались ограничения на перемещения по всем трем осям. Деформации и перемещения предполагались большими. Кровь моделировалась 4-узловыми элементами как

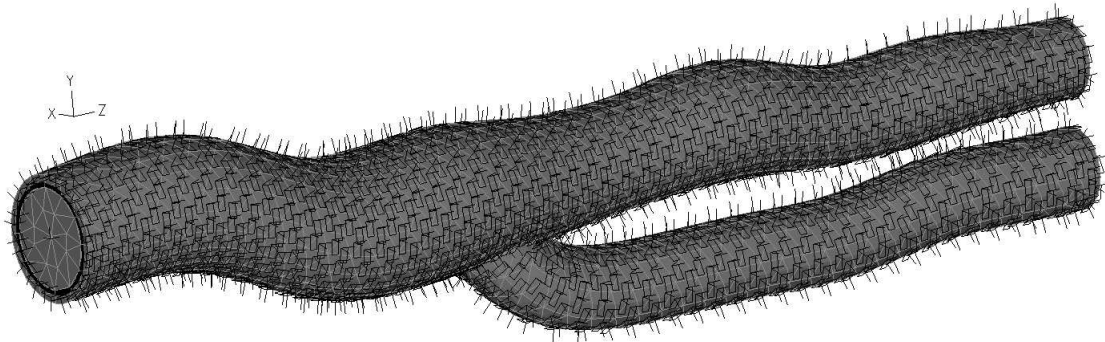


Рис. 3. Ориентация осей локальных систем координат

ньютоновская жидкость с вязкостью 0.004 Па·с и плотностью 1100 кг/м<sup>3</sup>. Количество элементов 5525, поток ламинарный. Для решения совместной задачи использовалась формулировка Лагранжа–Эйлера (Lagrangian Eulerian Formulation) для уравнения моментов. Для выполнения условий совместности, для каждого шага по времени итерационно, до достижения заданного критерия сходимости, накладывалось требование неразрывности перемещений и равновесия сил на границе сред. В качестве граничных условий для жидкости на входе общей сонной артерии (ОСА) задавалось изменяющееся давление, а на выходах внутренней сонной артерии (ВСА) и наружной сонной артерии (НСА) задавалось изменение скоростей, соответствующих этим давлениям. Давление и скорость для различных моментов сердечного цикла были получены при помощи ультразвукового аппарата Доплера Philips SD 800 in-vivo в НЦССХ им. Бакулева в Москве. Для достижения сходимости использовался измененный метод «установления течения» [9], суть которого заключается в постепенном увеличении давления жидкости до 10 кПа с нулевыми скоростями на выходе НСА и ВСА; затем увеличения скорости до диастолических значений с постоянным давлением в 10 кПа на входе ОСА; далее подъем давления до диастолического уровня и совместное увеличение скоростей и давления до систолического значения с последующим возвратом на диастолический уровень.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве экспериментальных параметров модели стенки использовались следующие значения [9]:  $C_1 = 35.74$  кПа,  $k_1 = 13.9$  кПа,  $k_2 = 13.2$ ,  $2\gamma = 78$  е. Диастолическая скорость ВСА принималась равной 38.7 см/с, НСА 24.9 см/с, соответствующее диастолическое давления ОСА 85 мм рт.ст. (11 332 Па). Систолические скорости в 94 см/с и 110 см/с были приняты для ВСА и НСА соответственно, а систолическое давление для ОСА 130 мм рт.ст. (17 332 Па).

Основной целью моделирования служило определение параметров или их совокупности, коррелирующих с зонами поражения атеросклерозом. Таких критериев несколько. Основными общепринятыми в литературе служат: низкое значение сдвигового напряжения для жидкости (Wall Shear Stress (WSS)), высокое значение циклических деформаций по Фон Мизесу (Von Mises Cyclic Strain (CS)) и высокое значение эффективного напряжения (Effective Stress (ES)) для стенки.

Как отмечалось в [11] низкое значение сдвигового напряжения (WSS) в определенных местах сосудистого русла является сигнализатором оседания в этом месте моноцитов на эндотелии, что, как отмечается многими авторами, является причиной образования атеросклероза. Однако, критерий низкого WSS не позволяет объяснить атеросклеротических формирований в области НСА и апекса. Для учета этих зон применяются два других критерия.

Определим циклические деформации (CS) как

$$\varepsilon_{VM\ cyclic} = \varepsilon_{VM\ systolic} - \varepsilon_{VM\ diastolic},$$

где  $\varepsilon_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 \right)}$ ,  $\varepsilon_{VM\ systolic}$ ,  $\varepsilon_{VM\ diastolic}$  — значение в период систолы и диастолы соответственно, а  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  — логарифмические значения главных деформаций.

Атеросклероз всегда сопровождается утолщением *intima*. Такое утолщение является защитной реакцией стенки на определенные раздражающие механические факторы, такие как повышенное напряжение [12]. Поэтому также важно рассмотреть третий критерий — эффективное напряжение

(ES), определяемый как  $\sigma_{ES} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right)}$ , где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — значения главных напряжений. Отметим, что повреждение эндотелиальной ткани, причиной которому



может служить механическое воздействие, такое как CS или ES, ведет к увеличению ее пропускной способности, что является причиной накопления гладкомышечными клетками липидов. При прогрессировании процесса клетки погибают, формируя атеросклеротическую бляшку. Рассмотрим каждый критерий в отдельности и сравним результаты с исходной ангиограммой (см. рис. 2).

Рассмотрим каждый критерий в отдельности и сравним результаты с исходной ангиограммой (см. рис. 2).

### 3.1. Низкое значение WSS

Логарифмическое распределение WSS для жидкости представлено на рис. 4 в момент систолы. Видно, что области низкого WSS формируются вблизи бифуркации на ОСА; также имеется небольшая зона в дистальной части ВСА. Сравнение с ангиограммой рис. 2 показывает, что областям формирования бляшки соответствуют области, в которых наблюдаются самые низкие значения WSS.

Области, в которых WSS больше 1.5 Па, считаются областями пониженного риска [13]. Исходя из WSS распределения, такими областями являются область апекса и вся НСА.

Как уже было отмечено, для исследования риска возникновения атеросклероза в этих областях применяются другие критерии, которые будут приведены далее.

Заметим также, что схожая картина распределения WSS наблюдается и в другие моменты сердечного цикла.

### 3.2. CS распределение

На рис. 5 представлено CS распределение как разность значений в систоле и диастоле. Сравнение с рис. 2 показывает частичное совпадение областей повышенного CS и областей формирования бляшки на ангиограмме.

Детальный анализ области апекса показывает, что максимальные значения CS наблюдаются непосредственно в области разделения потока, на внутренней стороне стенки. Значения на внутренней стенке сосуда, ближней к потоку, в среднем больше, чем значения на наружной стенке.

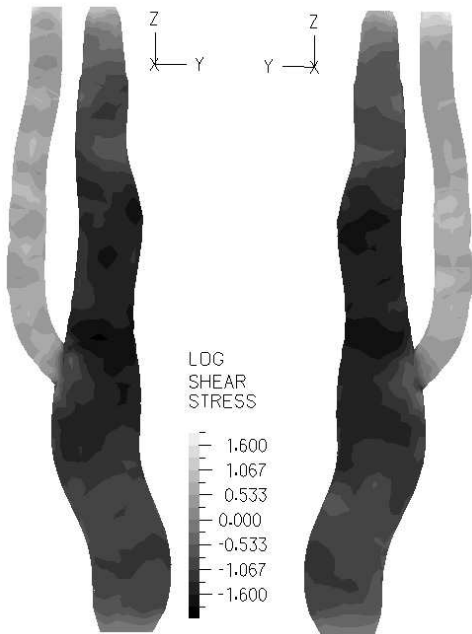


Рис. 4. Распределение WSS для систолы

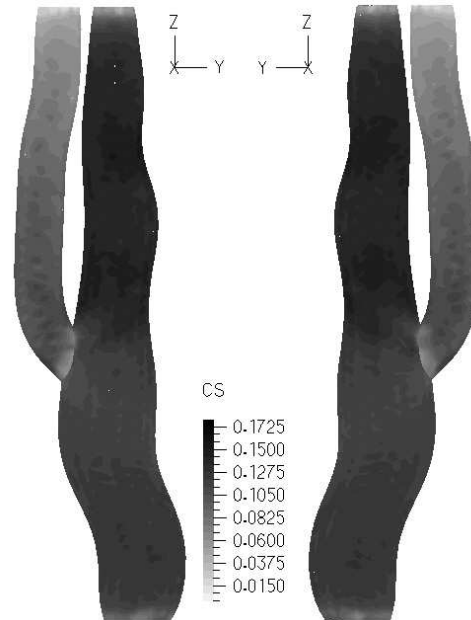


Рис. 5. Распределение CS, разность систолических и диастолических значений



### 3.3. ES распределение

На рис. 6 представлено логарифмическое ES распределение для систолы. Максимальные значения ES наблюдаются на внутренней поверхности сосуда; распределение относительно однородное. При этом в области ОСА ниже бифуркации, в области апекса и в дистальной части ВСА наблюдаются зоны повышенного ES. Верхняя дистальная зона и зона в районе апекса совпадают с зонами атеросклеротического поражения, представленными на ангиограмме. Однако нижняя зона высокого ES находится ниже представленного на рис. 2.

Отметим также, что подобный результат был получен Harington с соавт. [9] для случая сечения стенки под внутренним давлением без жидкости. Harington с соавт. отмечает, что при использовании гиперупругой модели для ортотропной стенки, распределение ES является более локализованным, нежели в случае использования гиперупругой модели изотропной стенки.

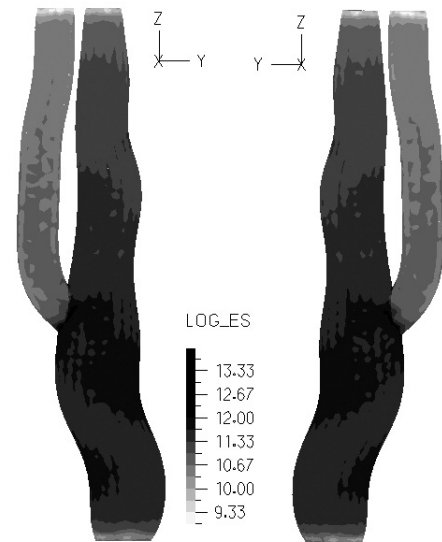


Рис. 6. Распределение ES для систолы

### ВЫВОДЫ

Клетки эндотелия, располагаясь между кровью и соединительной тканью, служат своеобразным разделителем двух сред. Установлено [14, 15], что повреждение эндотелиальной ткани ведет к увеличению ее пропускной способности, массивному срашиванию тромбоцитов с последующим их разрушением и проникновением через эндотелий. Как следствие, гладкомышечные клетки накапливают липиды в цитоплазме, разрушаются и формируют атеросклеротическую бляшку [16, 17]. Подобное повреждение может быть следствием механических воздействий, таких как высокие распределения CS и ES в стенке. Корреляция атеросклеротического поражения с этими зонами была установлена в результате моделирования.

С другой стороны, крайне важным является моделирование каротидной эндалтеректомии и последующей пластики артериотомного отверстия заплатой. Рестеноз реконструированной области — довольно частое и плохо изученное явление. Однако исследование реконструированного русла невозможно без предварительного моделирования сосуда без заплаты и выявления опорных параметров, таких как распределение WSS, CS и ES. Приведенная методика позволяет моделировать подобные операции.

Используемая модель материала стенки является одной из самых современных на данный момент, что делает результаты моделирования ценными и с точки зрения сравнения с другими существующими моделями.

В дальнейшем планируется учесть при моделировании остаточные напряжения, укорочения при изъятии и вязкоупругие свойства сосуда.

### Библиографический список

1. Holzapfel G.A., Gasser T.C. A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models // J. of Elasticity. 2000. V. 61. P. 1–48.
2. Rhodin J.A.G. Architecture of the Vessel Wall // Handbook of Physiology, The Cardiovascular System / Eds. H.V. Sparks, Jr.D.F. Bohr, A.D. Somlyo, S.R. Geiger V. 2. Amer. Physiological Society. Bethesda, Maryland, 1980. P. 1–31.
3. Weizsacker H.W., Pinto J.G. Isotropy and Anisotropy of the Arterial Wall // J. of Biomech. 1988. V.21. P.477–487.
4. Deljino A. Analysis of Stress Field in a Model of the Human Carotid Bifurcation. PhD thesis #1599. Lausanne, 1996.
5. Spencer A.J.M. Deformations of Fibre-Reinforced Materials. Oxford. Clarendon Press, 1972.
6. Касьянов В.А., Кнетс И.В. Функция энергии деформации крупных кровеносных сосудов человека // Механика полимеров. 1974. Т. 1. С. 122–128.
7. Humphrey J.D., Strumpf R.K., Yin F.C.P. Determination of a Constitutive Relation for Passive Myocardium // J. of Biomechanical Engineering. 1990. V. 112. P. 333–346.
8. Fung Y.C., Fronek K, Patitucci P. Pseudoelasticity of Arteries and the Choice of its Mathematical Expression // Amer. J. Physiol. 1979. V. 237. P. H620–H631.
9. Harington I., de Botton G., Gasser T.C., Holzapfel G.A. How to Incorporate Collagen Fibers Orientations in an Arterial Bifurcation? // Proc. of the 3rd IASTED



Int Conference on Biomechanics. September 7–9. 2005. Benidorm, Spain, 2006.

10. *Leung JH, Wright AR, Cheshire N. et al.* Fluid Structure Interaction of Patient Specific Abdominal Aortic Aneurysms: a Comparison with Solid Stress Models // *BioMedical Engineering OnLine*. 2006. V. 5:33 doi:10.1186/1475–925X–5–33.

11. *Younis H.F., Kaazempur–Mofrad M.R., Chan R.C. et al.* Hemodynamics and Wall Mechanics in Human Carotid Bifurcation and its Consequences for Atherosclerosis: Investigation of Inter-Individual Variation // *Biomechan. Model Mechanobiol.* 2004. V. 3. P. 17–32.

12. *Delfino A., Stergiopoulos N., Moore J.E. et al.* Residual Strain Effects on the Stress Field in a Thick Wall Finite Element Model of the Human Carotid Bifurcation // *J. of Biomech.* 1997. V. 30, № 8. P. 777–786.

13. *Malek A.M., Alper S.L., Izumo S.* Hemodynamics

Shear Stress and its Role in Atherosclerosis // *JAMA*. 1999. V. 282, № 21. P. 2035–2042.

14. *Howard B.V., Macarak E.I., Gunson D., Kefalides N.A.* Characterization of the Collagen Synthesized by Endothelial Cells in Culture // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1976. V. 73. P. 2361–2364.

15. *Haust M.D.* Arterial Endothelium and its Potentials. N.Y.: Plenum Press, 1977. P. 34.

16. *Weinbaum S., Tzeghai G., Ganatos P. et al.* Effect of Cell Turnover and Leaky Junctions on Arterial Macromolecular Transport // *Amer. J. Physiol.* 1985. V. 248. P. H945–H960.

17. *Tropea BI, Schwarzacher SP, Chang A et al.* Reduction of Aortic Wall Motion Inhibits Hypertension-Mediated Experimental Atherosclerosis // *Artheroscler. Thromb. Vasc. Biol.* 2000. V. 20. P. 2127–2133.

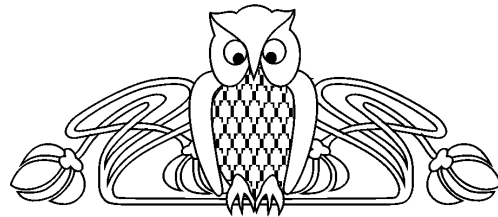
УДК 533.6.011

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Е.О. Кузнецова, И.А. Чернов

Саратовский государственный университет,  
кафедра вычислительного эксперимента в механике  
E-mail: Jane-83@yandex.ru, ChernovIA@info.sgu.ru

Дан обзор точных, описываемых алгебраическими функциями, решений трансзвуковой системы уравнений Кармана–Фальковича. Рассмотрены автомодельные решения и два класса параметрических решений, ассоциированных с автомодельными при показателях автомодельности  $n = 2$  и  $n = 3$ . Указана связь с локальным описанием особенностей трансзвуковых течений, в частности, в соплах Лаваля.



### Exact Solutions of the Transonic Equations of Gas Dynamics

E.O. Kuznetsova, I.A. Chernov

The review exact (described by algebraic functions) solutions of a transonic set of Karman–Falkovitch equations is given. Self-similar solutions and two classes of the polynomial-parametrical solutions associated with self-similar at indexes  $n = 2$  and  $n = 3$  are considered. Connection with local exposition of singularities of transonic flows is specified, in particular in Laval nozzles.

Рассмотрим классическое трансзвуковое течение идеального газа. Будем считать, что поток стационарный, изэнэргетический и изэнтропический. Приближенная система уравнений Кармана–Фальковича в случае плоского ( $\omega = 0$ ) и осесимметричного ( $\omega = 1$ ) околзвуквого потока имеет вид

$$uu_x = v_y + \omega(v/y), \quad u_y = v_x. \quad (1)$$

Здесь  $u$  и  $v$  — приведенные проекции скорости возмущения основного звукового потока на оси прямоугольной системы координат.

### 1. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Возьмем автомодельные решения уравнения (1) вида

$$u = y^{2n-2}U(\zeta) \quad v = y^{3n-3}V(\zeta) \quad \zeta = xy^{-n},$$

где  $n$  — показатель автомодельности. С помощью перехода к переменным  $t, \tau$

$$t = \zeta^{-2}U, \quad \tau = \zeta^{-3}V$$

система уравнений (1) сводится к уравнению в плоскости  $(t, \tau)$ :

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{(2n-2)t^2 - 3\tau t + (3n - \omega n)\tau}{2t^2 - 2nt + (3 - 3n - \omega)\tau} = -\frac{P_1(t, \tau, n)}{P_2(t, \tau, n)}. \quad (2)$$

При  $\omega = 0$  существует решение этого уравнения в форме  $\tau = \pm(2/3)t^{3/2}$  — интеграл Жермена. Уравнение (2) имеет частное семейство решений вида

$$\tau = A + Bt \pm (C + t)\sqrt{D + Et}. \quad (3)$$



Класс таких решений был изучен в [1]. Список частных решений (3) приведен в табл. 1.

Таблица 1

Показ. автотод.	Решение при $\omega = 0$					Интерпретация
	A	B	C	D	E	
$n = 5$	625/12	5/4	-25	75/16	3/8	?
$n = 3$	9	1	9	1	1/3	Течение Р.Г.Баранцева
$n=2$	4/3	1	-4	1/9	2/9	Сопло Мейера
$n = 5/3$	-125/81	5/3	25/9	25/3	-3	Обтекание угла со струей при $ y  < 1$
$n = 5/4$	-125/48	5/2	-25/16	25/9	-16/9	Обтекание угла при $ y  < 1$
$n = 6/5$	0	1	0	1	-2/3	Струя при $ y  < 1$
$n = 5/6$	0	-5/6	0	25/36	-2/3	Струя при $ y  > 1$
$n = 4/5$	4/3	-2	-1	16/9	16/9	Течение Ф.И.Франкля при $ y  > 1$
$n = 3/5$	1/3	-1	-1	1/9	1/9	Обтекание угла со струей при $ y  > 1$
$n = 1/2$	-1/6	-1/2	-1	1/36	2/9	?
$n = 1/3$	-1/3	-1/3	-1	1/9	1/3	?
$n = 1/5$	-5/12	-1/4	-1	3/16	3/8	?
Решение при $\omega = 1$						
$n = 4$	128/5	4/5	-16	208/75	26/75	?
$n = 2$	2	1/2	-4	1/4	1/4	Сопло Мейера
$n = 7/6$	-343/486	7/9	-49/36	196/729	-16/81	Обтекание угла $ y  < 1$
$n = 4/7$	8/9	-2	-2/3	16/9	-8/3	Течение Гудерлея-Йошихары при $ y  > 1$
$n = 1/3$	-2/9	-1/3	-2/3	1/9	2/3	?
$n = 1/6$	-8/27	-2/9	-2/3	52/243	52/81	?

С помощью формул

$$\ln C\zeta = \int \frac{(n^2 - t)dt}{P_2(t, \tau(t), n)}, \quad U(t) = t\zeta(t)^2, \quad V(t) = \tau(t)\zeta(t)^3$$

для решений вида (3) получены автомодельные представители для  $u$  и  $v$ , приведенные в табл. 2, некоторые решения в табл. 2 сведены к параметрическому виду [2].

Таблица 2

$\omega = 0$	
$n = 5$ $\begin{cases} u = \frac{x^2}{y^2} + Cxy^3 + \frac{C^2}{54}y^8 \\ v = -\frac{2}{3}\frac{x^3}{y^3} + \frac{3}{2}Cx^2y^2 + \frac{4}{27}C^2xy^7 + \\ + \frac{1}{648}C^3y^{12} \end{cases}$	$n = 3$ $\begin{cases} u = 6Cxy + 3C^2y^4 \\ v = 3Cx^2 + 12C^2xy^3 + 3C^3y^6 \end{cases}$
$n = 2$ $\begin{cases} u = Cx + \frac{C^2}{2}y^2 \\ v = C^2xy + \frac{C^3}{6}y^3 \end{cases}$	$n = 5/3$ $\begin{cases} x = p^{-4}y^3 + Cp^5 \\ u = p^{-8}y^4 + 10Cpy \\ v = -\frac{2}{3}p^{-12}y^6 + \frac{50}{3}Cp^{-3}y^3 + \frac{25}{3}C^2p^6 \end{cases}$
$n = 6/5$ $\begin{cases} x = -p^{-3}y^3 + Cp^2 \\ u = -6Cp^{-1}y \\ v = -12pC \end{cases}$	$n = 5/6$ $\begin{aligned} \zeta(z) &= \frac{C}{(z-1)^{5/12}(5z-1)^{11/36}(z+1)^{5/18}} \\ U(z) &= -\frac{25}{24} \frac{(z^2-1)C^2}{(z-1)^{5/6}(5z-1)^{11/18}(z+1)^{5/9}} \\ V(z) &= -\frac{125}{144} \frac{(z^2-1)C^3}{(z+1)^{5/6}(5z-1)^{11/12}(z-1)^{1/4}} \end{aligned}$



Окончание табл. 2

$\omega = 0$	
$n = 4/5$ $\begin{cases} x = p^{-3}y^2 - C_2p^2 \\ u = p^{-6}y^2 - 2C_2p^{-1} \\ v = -\frac{2}{3}p^{-9}y^3 + 2C_2p^{-4}y \end{cases}$	$n = 3/5$ $\begin{cases} x = p^{-4}y^3 + C_1p \\ u = p^{-8}y^4 + 2C_1p^{-3}y \\ v = -\frac{2}{3}p^{-12}y^6 - 2C_1p^{-7}y^3 - C_1^2p^{-2} \end{cases}$
$n = 1/2$ $\zeta(z) = \frac{C}{(z-1)^{1/4}(z+3)^{1/4}(z-3)^{1/2}}$ $U(z) = \frac{1}{8} \frac{(z^2-1)C^2}{(z-1)^{1/2}(z+3)^{1/2}(z-3)}$ $V(z) = -\frac{1}{48} \frac{(z+5)(z-1)^{5/4}C^3}{(z+3)^{3/4}(z-3)^{3/2}}$	$n = 1/3$ $\zeta(z) = \frac{C}{(z-1)^{1/9}(z-2)^{2/3}(z+2)^{2/9}}$ $U(z) = \frac{1}{3} \frac{(z^2-1)C^2}{(z-1)^{2/9}(z-2)^{4/3}(z+2)^{4/9}}$ $V(z) = -\frac{1}{9} \frac{(z^2+2z-2)(z-1)^{2/3}C^3}{(z-2)^2(z+2)^{2/3}}$
$n = 1/5$ $\zeta(z) = \frac{C}{(z-1)^{4/5}(z+1)^{1/5}}$ $U(z) = \frac{3(z^2-1)C^2}{2(z-1)^{8/5}(z+1)^{2/5}}$ $V(z) = -\frac{1}{24} \frac{(7+9z^2+27z^3-27z)C^3}{(z-1)^{12/5}(z+1)^{3/5}}$	$n = 5/4$ $\begin{cases} x = -Cp^5 + p^{-3}y^2 \\ u = p^{-6}y^2 - 5Cp^2 \\ v = -\frac{2}{3}p^{-9}y^3 - 10Cp^{-1}y \end{cases}$
$\omega = 1$	
$n = 2$ $\begin{cases} u = Cx + C^2y^2/4 \\ v = C^2xy/2 + C^3y^3/16 \end{cases}$	$n = 4$ $\begin{cases} u = \frac{2}{3} \frac{x^2}{y^2} + Cxy^2 + \frac{3}{104}C^2y^6 \\ v = -\frac{4}{9} \frac{x^3}{y^3} + Cx^2y + \frac{9}{52}C^2xy^5 + \frac{3}{1040}C^3y^9 \end{cases}$
$n = 4/7$ $\begin{cases} x = -p^{-5}y^2 + 3p^2C \\ u = \frac{2}{3}p^{-10}y^2 - 4p^{-3}C \\ v = \frac{4}{9}p^{-15}y^3 - 4Cp^{-8}y \end{cases}$	$n = 7/6$ $\begin{cases} x = p^{-5}y^2 - 9p^7C \\ u = \frac{2}{3}p^{-10}y^2 - 42p^2C \\ v = -\frac{4}{9}p^{-15}y^3 - 28Cp^{-3}y \end{cases}$
$n = 1/3$ $\zeta = \frac{C(z-\sqrt{5}) \left(-\frac{1}{12}\sqrt{5}\right) (z+\sqrt{5}) \left(\frac{1}{12}\sqrt{5}\right) (z-1)^{1/4}}{(-z^2+5-5z+z^3)^{5/12}}$ $U = \frac{(z^2-1)C^2(z-\sqrt{5}) \left(-\frac{1}{6}\sqrt{5}\right) (z+\sqrt{5}) \left(\frac{1}{6}\sqrt{5}\right) \sqrt{z-1}}{6(-z^2+5-5z+z^3)^{5/6}}$ $V = -\frac{(z-1)^{3/4}(z+\sqrt{5}) \left(\frac{1}{4}\sqrt{5}\right) (z-\sqrt{5}) \left(-\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)}{18(-z^2+5-5z+z^3)^{1/4}(z^2-5)} C^3(z^2+2z-3)$	$n = 1/6$ $\zeta = C(z-1)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\sqrt{13}\right)}(z+1)^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\sqrt{13}\right)}$ $U = \frac{1}{3}(3z^2-1)C^2(z-1)^{\left(-1-\frac{1}{6}\sqrt{13}\right)}(z+1)^{\left(-1+\frac{1}{6}\sqrt{13}\right)}$ $V = -\frac{2}{9}(1+z^2+\sqrt{13}z^3-\sqrt{13}z)C^3(z-1)^{\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{13}\right)}(z+1)^{\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{13}\right)}$

При  $\omega = 0$  справедливы две теоремы, первая из которых позволяет размножать решения, а вторая — отражает свойство парности решений в табл. 1.

**Теорема 1.** Если имеется автомодельное решение с  $\{n, t, \tau, \zeta\}$ , то также будет решение с  $\{n_1, t_1, \tau_1, \zeta_1\}$ , где

$$n_1 = \frac{3-2n}{4-3n}, \quad t_1 = \frac{t(2nt-3\tau)^2}{(2t^2-3n\tau)^2}, \quad \tau_1 = \frac{\tau(2nt-3\tau)^3}{(2t^2-3n\tau)^3},$$

$$\zeta_1 = \zeta^{-\frac{1}{3n-4}}(n-1)^{-\frac{n-1}{3n-4}}(2t^2-3n\tau)(2nt-3\tau)^{-\frac{2n-3}{3n-4}}(4t^3-9\tau^2)^{-\frac{n-1}{3n-4}}.$$

**Теорема 2.** Если имеется автомодельное решение с  $\{n, t, \tau, \zeta\}$ , то также будет решение с  $\{n_2, t_2, \tau_2, \zeta_2\}$ , где

$$n_2 = \frac{1}{n}, \quad t_2 = \frac{t}{n^2}, \quad \tau_2 = -\frac{\tau}{n^3}, \quad \zeta_2 = 2^{\frac{n+1}{3n}} \zeta^{-\frac{1}{n}}(4t^3-9\tau^2)^{-\frac{n+1}{6n}}.$$

Заметим, что некоторые из полученных решений укладываются в три основных полиномиально-параметрических класса: известные симметричный и несимметричный классы решений Заславского–Гриба (ассоциированные с показателем автомодельности  $n = 2$ ) и менее известный (изученный в [4], [5]) класс решений, ассоциированный с  $n = 3$ .

## 2. ПОЛИНОМО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

**2.1.** Рассмотрим класс решений, ассоциированный с  $n = 3$  ( $\omega = 0$ ) (включает известные автомодельные решения для показателя автомодельности  $n = 3, 5/3, 6/5, 3/5$ ). Для этого случая решение системы уравнений (1) представляется в следующем виде (здесь и далее  $s$  обозначает параметр):





$$x = x_0(s) + sy^3, \quad u = u_1(s)y + u_4(s)y^4, \quad v = v_0(s) + v_3(s)y^3 + v_6(s)y^6. \quad (4)$$

Подстановка (4) в (1) при  $\omega = 0$  дает систему ОДУ, разрешенную относительно первых производных от коэффициентов:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \frac{u_1}{u_4 - 9s^2}, & u'_1 &= \frac{3(v_3 - su_1)}{u_4 - 9s^2}, & u'_4 &= \frac{6(v_6 - 2su_4)}{u_4 - 9s^2}, \\ v'_0 &= \frac{u_1^2}{u_4 - 9s^2}, & v'_3 &= \frac{5(u_1u_4 - 9sv_3)}{u_4 - 9s^2}, & v'_6 &= \frac{4u_4^2 - 18sv_6}{u_4 - 9s^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) можно выделить нелинейное ядро относительно коэффициентов  $u_4(s)$  и  $v_6(s)$ , которое сводится к одному ДУ второго порядка для  $u_4(s)$

$$u''_4(u_4 - 9s^2) + (u'_4)^2 + 12su'_4 - 12u_4 = 0. \quad (6)$$

В [4] приведено общее решение (6) в следующей параметрической форме ( $z$  — параметр;  $E, H$  — постоянные интегрирования):

$$\begin{aligned} u_4 &= -3\sqrt{3}H^2(z^4 - 2\sqrt{3}z^2 - 1)Q(z)(E + z)^{-4}, & s = x_3 &= HQ(z)(E + z)^{-3}, \\ Q(z) &= 1 + \sqrt{3}Ez - \sqrt{3}z^2 + Ez^3. \end{aligned}$$

Рассмотрим технологию восстановления остальных коэффициентов подробнее [2]. Если функция  $u_4(s)$  известна, то следует использовать замену переменных:  $u'_1 = \mu + u'_4x'_0$ ,  $\nu = x'_0$ . Отсюда выводятся линейные ОДУ первого порядка для  $\mu, \nu$ :

$$\mu'(u_4 - 9s^2) - 6s\mu + 2\mu u'_4 = 0, \quad \nu'(u_4 - 9s^2) - 18s\nu - \mu = 0.$$

Считая, таким образом, функции  $u_4(s)$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  найденными из соответствующих дифференциальных уравнений, можно записать решение класса (4) для системы (1) в виде квадратур:

$$\begin{aligned} x &= \int \nu(s)ds + sy^3, & u &= (\nu(s)u_4(s) - 9\nu(s)s^2)y + u_4(s)y^4, \\ v &= \left( \int (u_4(s) - 9s^2)\nu(s)^2 ds + C_4 \right) + \left( \frac{1}{3} \frac{d\nu(s)}{ds} u_4(s)^2 - 6 \frac{d\nu(s)}{ds} u_4(s)s^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{3} \nu(s) \frac{du_4(s)}{ds} u_4(s) - 3 + \frac{1}{3} \nu(s) \frac{du_4(s)}{ds} s^2 + 27 \frac{d\nu(s)}{ds} s^4 - 5s\nu(s)u_4(s) + 45s^3\nu(s) \Big) y^3 + \\ &+ \left( \frac{1}{6} \frac{du_4(s)}{ds} u_4(s) - \frac{3}{2} \frac{du_4(s)}{ds} s^2 + 2su_4(s) \right) y^6. \end{aligned}$$

Поскольку в общем случае квадратуры приводят к сложным и громоздким вычислениям, то ограничимся рассмотрением частных решений ключевого уравнения (6). Возьмем особый интеграл (6) в виде ( $B$  — масштабная постоянная):

$$s(z) = Bz, \quad u_4(z) = B^2z^2.$$

Далее воспользуемся идеями из [6],[7], получаем точное решение системы (1) (с целью освобождения от иррациональностей используем замену  $z = t^4$ )

$$\begin{aligned} x &= -\frac{4}{5} \frac{C_2B}{t^5} + \frac{1}{2} \frac{C_1}{t} + C_3 + Bt^4y^3, & u &= \left( t^3C_1B - 8 \frac{C_2B^2}{t} \right) y + B^2t^8y^4, \\ v &= \frac{16}{3} \frac{C_2^2B^3}{t^6} - 4 \frac{C_1C_2B^2}{t^2} - \frac{1}{4} t^2 BC_1^2 + C_3 + \left( -\frac{40}{3} t^3 C_2B^3 - t^7 C_1B^2 \right) y^3 - \frac{2}{3} B^3 t^{12} y^6. \end{aligned}$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3, B$  — произвольные постоянные. Рассмотрим теперь интеграл Жермена для (6)

$$s = \pm(z - 1)Cz^2, \quad u_4 = C^2z^4.$$



Соответствующее решение системы (1) имеет вид (с целью освобождения от иррациональностей используем замену  $z = t^2$ ):

$$x = \mp \frac{9tC_2C}{10\sqrt{3t^2-4}} \pm \frac{3C_2C}{5t\sqrt{3t^2-4}} \pm \frac{C_2C}{5t^3\sqrt{3t^2-4}} \mp \frac{C_2C}{5t^3\sqrt{3t^2-4}} \mp \frac{C_1}{2t\sqrt{3t^2-4}} + \frac{3tC_1}{4\sqrt{3t^2-4}} +$$

$$+ C_3 + (\pm t^6 C \mp t^4 C)y^3,$$

$$u = \left( \pm \frac{t^3 C C_1}{\sqrt{3t^2-4}} - \frac{3tC^2 C_2}{\sqrt{3t^2-4}} + \frac{2C^2 C_2}{t\sqrt{3t^2-4}} \right) y + C^2 t^8 y^4,$$

$$v = \left\{ \mp \frac{C^3 C_2^2}{3(3t^2-4)t^6} \pm \frac{C C_1^2}{3(3t^2-4)} - \frac{4C_3}{(3t^2-4)} - \frac{C^2 C_1 C_2}{(3t^2-4)t^2} + \frac{3t^2 C_3}{(3t^2-4)} \pm \frac{C^3 C_2^2}{(3t^2-4)t^4} \right\} +$$

$$+ \left( -\frac{4t^7 C_1 C^2}{(3t^2-4)^{3/2}} \mp \frac{9t^9 C_2 C^3}{(3t^2-4)^{3/2}} + \frac{3t^9 C_1 C^2}{(3t^2-4)^{3/2}} \mp \frac{30t^5 C_2 C^3}{(3t^2-4)^{3/2}} \pm \frac{40t^3 C^3 C_2}{(3t^2-4)^{3/2}} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{27t^7 C^3 C_2}{(3t^2-4)^{3/2}} \right) y^3 + \left( \mp \frac{8t^{12} C^3}{3(3t^2-4)} \pm \frac{2t^{14} C^3}{(3t^2-4)} \right) y^6.$$

Здесь  $C, C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные.

В заключение рассмотрим потерянные решения (когда в (4) старшие коэффициенты — константы)

$$x = s + Dy^3, \quad u = u_1(s)y + 9D^2y^4, \quad v = v_0(s) + v_3(s)y^3 + 18D^3y^6.$$

После подстановки в (1) получаем систему ОДУ:

$$\frac{du_1(s)}{ds} = -\frac{3(Du_1(s) - v_3(s))}{u_1(s)}, \quad \frac{dv_0(s)}{ds} = u_1(s), \quad \frac{dv_3(s)}{ds} = \frac{9D(5Du_1(s) - v_3(s))}{u_1(s)}.$$

Из первого и третьего уравнений получаем ОДУ для  $u_1(s)$ :

$$\frac{d^2 u_1(s)}{ds^2} - \frac{-12D \frac{du_1(s)}{ds} + 108D^2 - \left(\frac{du_1(s)}{ds}\right)^2}{u_1(s)} = 0.$$

Рассмотрим решение данного уравнения в параметрической форме:

$$s = C_1 z + C_1/z^3 + C_2, \quad u_1 = 6DC_1 z - \frac{18DC_1}{z^3}.$$

Тогда потерянное решение примет вид

$$x = C_1 z + C_1/z^3 + C_2 + Dy^3, \quad u = (6DC_1 z - 18DC_1/z^3)y + 9D^2y^4,$$

$$v = 3DC_1^2 z^2 + \frac{18DC_1^2}{z^2} - \frac{9DC_1^2}{z^6} + C_3 + \frac{18D^2 C_1 (z^4 + 5)}{z^3} y^3 + 18D^3 y^6.$$

Здесь  $D, C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные.

## 2.2. Рассмотрим несимметричное решение Заславского–Гриба

$$x = x_0(s) + x_1(s)y + sy^2, \quad u = u_0(s) + u_1(s)y + u_2(s)y^2,$$

$$v = v_0(s) + v_1(s)y + v_2(s)y^2 + v_3(s)y^3. \tag{7}$$

Подставим (7) в основную систему трансзвуковых уравнений (1)

$$x'_0 = \frac{u_0 - x_1^2}{u_2 - 4s^2}, \quad x'_1 = \frac{-(4x_1 s - u_1)}{u_2 - 4s^2}, \quad u'_0 = \frac{-(u_1 x_1 - v_1)}{u_2 - 4s^2}, \quad u'_1 = \frac{-2(u_2 x_1 - v_2 + u_1 s)}{u_2 - 4s^2},$$

$$u'_2 = \frac{3v_3 - 4s u_2}{u_2 - 4s^2}, \quad v'_0 = \frac{u_0 u_1 - v_1 x_1}{u_2 - 4s^2}, \quad v'_1 = \frac{u_1^2 - 2v_2 x_1 + 2u_0 u_2 - 2v_1 s}{u_2 - 4s^2}, \tag{8}$$

$$v'_2 = \frac{3(u_1 u_2 - v_3 x_1) - 4v_2 s}{u_2 - 4s^2}, \quad v'_3 = \frac{-2(3v_3 s - u_2^2)}{u_2 - 4s^2}.$$



В (8) можно выделить нелинейное ядро относительно коэффициентов  $u_2(s)$  и  $v_3(s)$ , которое сводится к одному ОДУ второго порядка для  $u_2(s)$ :

$$u_2''(u_2 - 4s^2) + (u_2')^2 + 2su_2' - 2u_2 = 0. \quad (9)$$

Общее решение этого уравнения в параметрической форме имеет вид ( $z$  — параметр;  $E, H$  — постоянные интегрирования)

$$u_2 = B^2[4(1 + z^2) + Ez], \quad s = x_2 = B(z^2 - 1).$$

Используя переход к переменным  $\mu, \nu, \xi, \eta$

$$u_0' = \mu + u_2'\nu, \quad x_0' = \nu, \quad u_1' = \xi + u_2'\eta, \quad x_1' = \eta,$$

выводятся линейные уравнения первого порядка:

$$\xi'(u_2 - 4s^2) - 2s\xi + 2\xi u_2' = 0, \quad \eta'(u_2 - 4s^2) - 4s\eta - \xi + 4x_1 = 0,$$

$$\mu'(u_2 - 4s^2) + 2\xi x_1 + 2u_2'\mu - 6s\mu = 0, \quad \nu'(u_2 - 4s^2) - 8s\nu - \mu + 2x_1\eta = 0.$$

Считая функции  $u_2(s), \xi, \eta, \mu, \nu$  известными после решения системы соответствующих дифференциальных уравнений, записываем решение

$$x = \int \nu(s)ds + \int \eta(s)dsy + sy^2,$$

$$u = \left( \nu(s)u_2(s) - 4\nu(s)s^2 + \left( \int \eta(s)ds \right)^2 \right) + \left( \eta(s)u_2(s) - 4\eta(s)s^2 + 4s \int \eta(s)ds \right) y + u_2(s)y^2,$$

$$\begin{aligned} v = & \left( -4 \int s^2 \eta(s) \nu(s) ds + 4 \int s^2 \int \eta(s) ds \frac{d\nu(s)}{ds} ds + 12 \int s \nu(s) \int \eta(s) ds ds + \right. \\ & + \int \nu(s) u_2(s) \eta(s) ds - 2 \int \left( \int \eta(s) ds \right)^2 \eta(s) ds - \int \int \eta(s) ds u_2(s) \frac{d\nu(s)}{ds} ds - \\ & - \int \int \eta(s) ds \nu(s) \frac{du_2(s)}{ds} ds \left. \right) + \left( \frac{d\nu(s)}{ds} u_2(s)^2 + u_2(s) \nu(s) \frac{du_2(s)}{ds} - 8u_2(s) \frac{d\nu(s)}{ds} s^2 - \right. \\ & - 8u_2(s) s \nu(s) + 3 \int \eta(s) ds \eta(s) u_2(s) - 4s^2 \nu(s) \frac{du_2(s)}{ds} + 16s^4 \frac{d\nu(s)}{ds} + 32s^2 \nu(s) - \\ & - 12 \int \eta(s) ds \eta(s) s^2 + 4s \left( \int \eta(s) ds \right)^2 \left. \right) y + \left( \frac{1}{2} \frac{d\eta(s)}{ds} u_2(s)^2 + \frac{1}{2} u_2(s) \eta(s) \frac{du_2(s)}{ds} - \right. \\ & - 4u_2(s) \frac{d\eta(s)}{ds} s^2 - s \eta(s) u_2(s) + 3u_2(s) \int \eta(s) ds - 2s^2 \eta(s) \frac{du_2(s)}{ds} + 8s^4 \frac{d\eta(s)}{ds} + \\ & \left. + 4\eta(s) s^3 - 4s^2 \int \eta(s) ds \right) y^2 + \left( \frac{1}{3} \frac{du_2(s)}{ds} u_2(s) - \frac{4}{3} \frac{du_2(s)}{ds} s^2 + \frac{4}{3} s u_2(s) \right) y^3. \end{aligned}$$

Функции  $\xi, \eta, \mu, \nu$  выражаются в квадратурах через  $u_2(s)$  как решения линейных ОДУ 1-го порядка. Поскольку в общем случае квадратуры приводят к сложным и громоздким вычислениям, то ограничимся рассмотрением частного решения. Возьмем особый интеграл уравнения (9) в виде ( $B$  — масштабная постоянная)

$$s(z) = Bz, \quad u_2(z) = B^2 z^2.$$

Тогда решение системы (1) примет вид (с целью освобождения от иррациональностей используем замену  $z = t^3$ )

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{4} C_4^2 B t^3 + \frac{1}{4} C_1 C_4 t^2 + \frac{1}{2} \frac{C_2}{t^2} - \frac{27}{2156} \frac{B^3 C_3^2}{t^{11}} + \frac{9}{56} \frac{C_4 C_3 B^2}{t^4} - \frac{3}{5} \frac{C_5 B}{t^5} + C_6 + \\ & + \left( \frac{1}{2} C_1 t^2 + \frac{9}{28} \frac{C_3 B^2}{t^4} + C_4 B t^3 \right) y + B t^3 y^2, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 u &= tC_2B - \frac{27}{784} \frac{B^4C_3^2}{t^8} + \frac{9}{7} \frac{C_4C_3B^3}{t} + \frac{1}{2}t^5C_4C_1B + \frac{1}{4}C_4^2B^2t^6 - 3\frac{C_5B^2}{t^2} + \\
 &+ \frac{9}{28} \frac{C_3B^2C_1}{t^2} + \frac{1}{4}t^4C_1^2 + \left( \frac{18}{7} \frac{B^3C_3}{t} + t^5BC_1 + C_4B^2t^6 \right) y + B^2t^6y^2, \\
 v &= \left\{ -\frac{1}{12}C_4^3B^3t^9 - \frac{243}{10976} \frac{C_3^3B^6}{t^{12}} - \frac{1}{2}BC_1C_2t^3 - \frac{1}{4}BC_1^2C_4t^7 + \frac{27}{28} \frac{C_3B^3C_2}{t^3} - \right. \\
 &- \frac{27}{784} \frac{C_1B^4C_3^2}{t^6} + \frac{27}{28} \frac{C_3^2B^5C_4}{t^5} + \frac{117}{112}C_3B^4C_4^2t^2 - \frac{1}{4}C_1C_4^2B^2t^8 - \frac{1}{12}t^6C_1^3 + C_7 - \\
 &- \left. \frac{27}{28} \frac{C_5B^4C_3}{t^6} - 3B^3C_5C_4t - \frac{1}{2}C_2C_4B^2t^4 + \frac{9}{8}C_3B^3C_1C_4t \right\} + \\
 &+ \left( -\frac{1}{2}t^9B^3C_4^2 - t^4B^2C_2 - 6tC_5B^3 - \frac{1}{2}t^7BC_1^2 + \frac{9}{4}tB^3C_1C_3 - t^8B^2C_4C_1 + \right. \\
 &+ \left. \frac{27}{49} \frac{B^5C_3^2}{t^5} + \frac{117}{28}t^2B^4C_4C_3 \right) y + \left( -C_4B^3t^9 + \frac{117}{28}t^2B^4C_3 - t^8C_1B^2 \right) y^2 - \frac{2}{3}B^3t^9y^3.
 \end{aligned}$$

Здесь  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, B$  — константы. Рассмотрим потерянное решение для несимметричного класса (когда старшие коэффициенты в (7) — константы)

$$\begin{aligned}
 x &= s + x_1(s)y + x_{20}y^2, & u &= u_0(s) + u_1(s)y + 4x_{20}^2y^2, \\
 v &= v_0(s) + v_1(s)y + v_2(s)y^2 + \frac{16}{3}x_{20}^3y^3.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Подстановка (10) в (1) дает систему уравнений, записанную относительно производных от коэффициентов в (10). Разрешая ее, получим следующее точное решение системы (1) (в процессе решения системы был сделан переход к новому параметру  $z$ )

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{40z^9x_{20}^2 + 144Bz^6x_{20}^2 + 15C_0z^5 - 120z^3C_2x_{20}^2 + 120x_{20}^2B^2z^3 + 15C_0Bz^2 + 240x_{20}^2C_1 + 480C_4zx_{20}^3}{480zx_{20}^3} + \\
 &+ \frac{(16x_{20}^2Bz + 16x_{20}^2z^4 + C_0)y}{16x_{20}^2} + x_{20}y^2, \\
 u &= z^2C_2 + \frac{C_1}{z} + \frac{(-768Bz^5 - 256z^8)x_{20}^4 - 96C_0(-\frac{1}{2}B + z^3)zx_{20}^2 + 3C_0^2}{768x_{20}^4} - \\
 &- \frac{(-8x_{20}^2Bz + 16x_{20}^2z^4 - C_0)}{4x_{20}}y + 4x_{20}^2y^2, \\
 v &= \frac{1}{3}Bz^9 + \frac{C_0z^8}{24x_{20}^2} + B^2z^6 + \frac{BC_0z^5}{4x_{20}^2} + \frac{z^4C_0^2}{64x_{20}^4} + z^3C_1 - z^3BC_2 + \frac{1}{3}z^3B^3 - \\
 &- \frac{z^2C_0C_2}{8x_{20}^2} + \frac{z^2B^2C_0}{16x_{20}^2} + \frac{BzC_0^2}{256x_{20}^4} + \frac{C_0C_1}{16x_{20}^2z} + C_3 + \\
 &+ (-768x_{20}^4z^3C_2 + 384x_{20}^4C_1 + 48x_{20}^2Bz^2C_0 + 192x_{20}^2z^5C_0 + 1536x_{20}^4Bz^6 + 256x_{20}^4z^9 + \\
 &+ 384x_{20}^4B^2z^3 + 3zC_0^2) \frac{y}{192zx_{20}^3} + (4x_{20}^2Bz + 16x_{20}^2z^4 + \frac{1}{2}C_0)y^2 + \frac{16}{3}x_{20}^3y^3.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, x_{20}, B$  — произвольные постоянные.

**2.3.** Симметричное решение Заславского–Гриба, ассоциированное с автомодельным ( $n = 2, \omega = 0$ ) (включает автомодельные решения для показателей автомодельности  $n = 2, 5/4, 4/5$  из табл. 1) является частным случаем несимметричного класса (достаточно занулить коэффициенты  $x_1(s), u_1(s), v_0(s)$  и  $v_2(s)$ ). Возьмем в качестве частного решения уравнения (9) — интеграл Жермена

$$s(z) = \pm(z - 1)zC, \quad u_2(z) = C^2z^2.$$



Тогда получаем следующее решение системы (1) (с целью освобождения от иррациональности используем замену  $z = t^3$ )

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{C_1}{10(2t^3 - 3)^{1/3}t^5} \pm \frac{C_2C}{5(2t^3 - 3)^{1/3}t^5} \mp \frac{3C_2C}{5(2t^3 - 3)^{1/3}t^2} + \frac{C_1}{5(2t^3 - 3)^{1/3}t^2} \pm \frac{6tC_2C}{5(2t^3 - 3)^{1/3}} - \\
 &\quad - \frac{2tC_1}{5(2t^3 - 3)^{1/3}} + C_3 + (\mp t^6C \pm t^3C)y^2, \\
 u &= -\frac{2C^2tC_2}{(2t^3 - 3)^{1/3}} \pm \frac{CC_1}{2t^2(2t^3 - 3)^{1/3}} + \frac{C^2C_2}{t^2(2t^3 - 3)^{1/3}} + C^2t^6y^2, \\
 v &= \left( -\frac{C^2t^4C_1}{(2t^3 - 3)^{1/3}} \pm \frac{2C^3tC_2}{(2t^3 - 3)^{1/3}} + \frac{C^2tC_1}{(2t^3 - 3)^{1/3}} \right) y \mp \frac{2}{3}C^3t^9y^3.
 \end{aligned}$$

Здесь  $C, C_1, C_2, C_3$  — произвольные константы.

**2.4.** Осесимметричный случай при  $\omega = 1$  описывается симметричным классом решений Заславского–Гриба (включает автомодельные решения для показателя автомодельности  $n = 2, 7/6, 4/7$  из табл. 1 при  $\omega = 1$ ).

Частное решение системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-20C_2B + 21C_1t^5 + 28C_3t^7}{28t^7} + Bt^5y^2, & u &= \frac{B(3C_1t^5 - 10C_2B)}{3t^2} + \frac{2}{3}B_2t^{10}y^2, \\
 v &= \left( -\frac{20}{9}t^3C_2B^3 - B^2t^8C_1 \right) y - \frac{4}{9}B^3t^{15}y^3.
 \end{aligned}$$

Здесь  $B, C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные. Потерянные решения записываются в форме

$$x = s + Dy^2, \quad u = u_0(s) + 4D^2y^2, \quad v = v_1(s)y + 4D^3y^3.$$

с  $u_0(s), v_1(s)$ , найденными через  $Z(a, C_1, D)$ , где  $Z(a, C_1, D)$  — корень уравнения

$$-5 \ln(Z^2 + 4DZ - 16D^2) - 2\sqrt{5} \arctan h \left( \frac{(Z + 2D)\sqrt{5}}{10D} \right) - 10 \ln(a) + 5C_1 = 0,$$

$$s = \int_{u_0}^{\frac{1}{Z(a, C_1, D)}} da - C_2, \quad v_1 = \frac{8D^2u_0}{4D + Z(a, C_1, D)} + u_0^{\left(-\frac{4D}{Z(a, C_1, D)}\right)} C_2,$$

здесь  $s = s(u_0)$  — обратная функция к  $u_0(s)$ ,  $C_1, C_2$  — постоянные интегрирования,  $D$  — произвольная постоянная.

Заметим, что в случае  $\omega = 1$  алгебраические решения редки.

### 3. ПРИЛОЖЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ К СОПЛОВЫМ ТЕЧЕНИЯМ

В качестве примера возьмем течение в сопле Лавалья с параболической ударной волной (УВ). Интересным для изучения является вопрос «склейки» симметричного течения Мейера (М.) до УВ и несимметричного Томотика-Тамады (Т.-Т.) после УВ. Течение после УВ соответствует потерянным решениям (11). Симметричное течение Мейера:

$$u = A_1x + \frac{A_1^2}{2}y^2, \quad v = A_1^2xy + \frac{A_1^3}{6}y^3. \quad (12)$$

Для выполнения условий на параболической УВ вида  $x = x_{00} + x_{10}y + x_{20}y^2$  получены следующие значения параметров  $x_{20}$  и  $x_{10}$  ( $x_{00}$  — произвольно):

$$1) x_{20} = -1/4, \quad x_{10} = -1/4, \quad 2) x_{20} = 1/2, \quad x_{10} = 1/5, \quad 3) x_{20} = -1/16, \quad x_{10} = 1/32, \quad (13)$$

где  $x_{20}$  — кривизна УВ на оси параболы,  $x_{00}$  — сдвиг УВ от начала координат по горизонтали,  $x_{10}$  — сдвиг УВ — по вертикали.



Возьмем первый случай в (13). Используя приведенные выше аналитические решения (11) и (12) (предварительно получив значения всех констант в (12) из начальных условий на УВ), удалось построить склейку симметричного и несимметричного течения на УВ. На рис.1 течение происходит слева направо, приведены изолинии  $u = const$ , которые встречаются в одной и той же точке на УВ, пунктиром обозначены звуковые линии  $u = 0$  для течения М. слева и для течения Т.-Т. [8]–[9].

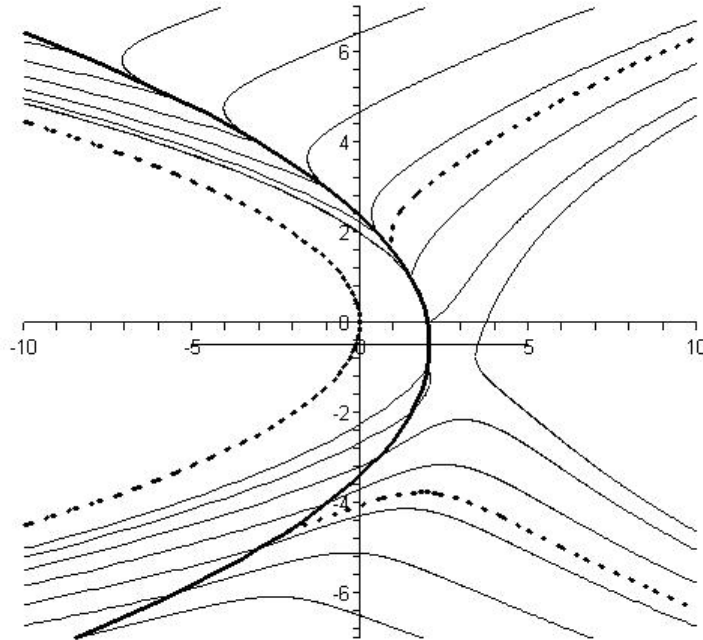


Рис. 1

Изолинии слева от УВ имеют вид (снизу вверх):  $u_1 = 7, u_2 = 6, u_3 = 5, u_4 = 4, u_5 = 3, u_6 = 2, u_7 = 1, u_9 = 1, u_{10} = 2, u_{11} = 3, u_{12} = 4, u_{13} = 5, u_{14} = 6, u_{15} = 7$ . Изолинии справа от УВ:  $u_1 = 5.12, u_2 = 2.62, u_3 = 0.62, u_4 = -0.87, u_5 = -1.87, u_6 = -2.37, u_7 = -2.37, u_9 = -0.87, u_{10} = 0.62, u_{11} = 2.62, u_{12} = 5.12, u_{13} = 8.12, u_{14} = 11.62, u_{15} = 15.62$ .

Аналогично можно рассмотреть второй случай в (23), картина склейки двух течений отображена на рис.2

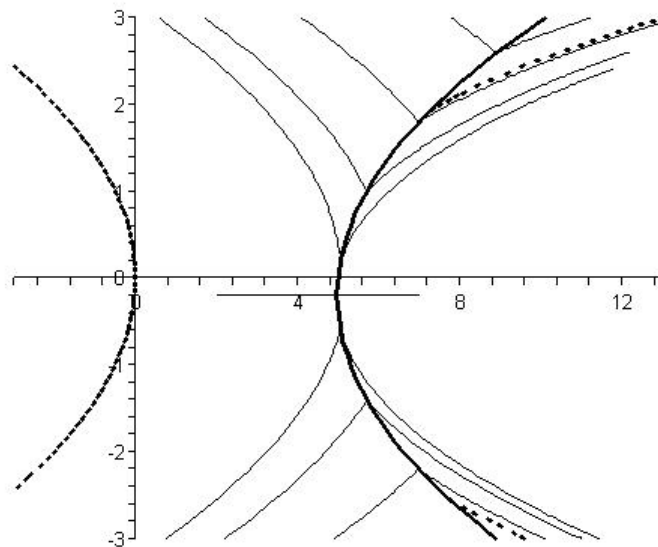


Рис. 2

Изолинии слева от УВ имеют вид (снизу вверх):  $u_1 = 3, u_2 = 2.2, u_3 = 1.4, u_4 = 0.6, u_5 = 0.2, u_6 = 1.0, u_7 = 1.8, u_8 = 2.6$ . Изолиний справа от УВ:  $u_1 = 2.28, u_2 = -1.4, u_3 = -3.8, u_4 = -4.92, u_5 = -4.76$ ,



$u_6 = -3.32$ ,  $u_7 = -0.6$ ,  $u_8 = 3.4$ . Эти два случая являются обобщением аналогичных результатов Рыжова [9] при рассмотрении вопроса склейки течения Мейера с симметричным течением Т.-Т.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучены автомодельные решения, соответствующие основным (имеющим определенный газодинамический смысл) показателям автомодельности. Установлена связь автомодельных решений с полиномо-параметрическими и осуществлен переход к компонентам скорости  $u$ ,  $v$ . Класс полиномо-параметрических решений является некоторым обобщением автомодельных, поскольку содержит одновременно несколько автомодельных и поэтому весьма интересен с точки зрения дальнейшего изучения (так как позволяет исследовать несколько различных задач с помощью одного решения). Реализована технология нахождения всех коэффициентов в полиномо-параметрическом представлении при выбранном решении ключевого уравнения. Изучены сопловые течения с параболической УВ, переводящей симметричное течения Мейера в несимметричное относительно продольной оси канала.

## Библиографический список

1. Фалькович С.В., Чернов И.А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. С. 280–284.
2. Немцова Е.О. Параметрический метод в изучении трансзвуковых уравнений / Саратов, 2005. Деп. в ВИНИТИ 26.07.05 № 1089-B2005. 18 с.
3. Немцова Е.О. Параметрические решения трансзвукового уравнения и их связь с автомодельными // Материалы Четвертой молодежной науч. школы-конф.: Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. 2005. Т. 31. С. 110–113.
4. Чернов И.А. Полиномо-параметрические решения трансзвуковых уравнений // Аэродинамика. Нелинейные проблемы: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. Вып. 14(17). С. 91–102.
5. Севостьянов Г.Д. Структура элементарных околозвуковых решений // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. Вып. 14(17). С. 109–117.
6. Заславский Б.И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда со свободной поверхностью воды // Прикладная математика и техническая физика. 1964. № 4. С. 57–65.
7. Заславский Б.И., Клепикова Н.А. Об одном классе точных частных решений уравнений околозвуковых течений газа // Прикладная математика и техническая физика. 1965. № 6. С. 65–68.
8. Кузнецова Е.О. Модель нерасчетного режима течения в сопле Лавала // Материалы Пятой молодежной науч. школы-конф.: Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. 2006. Т. 34. С. 136–139.
9. Рыжов О.С. О работе сопел Лавала в нерасчетных режимах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. Т. 7, №4.

УДК 517.958:536.2

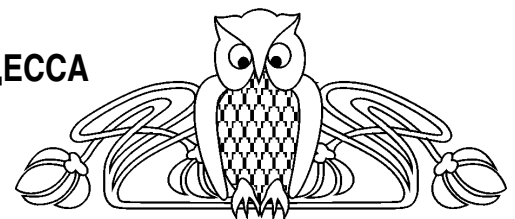
## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕРМОРАСЩЕПЛЕНИЯ ГРАФИТА

В.Ю. Ольшанский\*, К.Г. Бахтин, В.Ю. Михайлов, Ю.Н. Нагар, А.В. Серебряков

\*Саратовский государственный университет, кафедра вычислительного эксперимента в механике, Энгельский технологический институт (филиал Саратовского государственного технического университета), кафедра высшей математики и механики  
E-mail: olsh@techn.sstu.ru

Рассмотрена математическая модель процесса получения изделий из порошка окисленного графита путем терморасширения при нагреве в металлической форме. Выявленное в численном эксперименте выравнивание температур к заключительной стадии процесса позволяет построить асимптотическое разложение решения в одномерном случае. Поле температур и скоростей в двумерном осесимметричном случае определяется численно методом сквозного счета.

Изделия из терморасширенного графита (ТРГ) широко используются в технике в силу своих теплоизолирующих и огнезащитных свойств и устойчивости к агрессивным средам. Одним из перспективных способов получения изделий заданной формы и пористости является терморасширение окисленного графита (ОГ) в газопроницаемой форме [1] — так называемое химическое прессование.



### Mathematical Simulating Thermal Exfoliation of Graphite

V.Y. Olshansky, K.G. Bakhtin, V.Y. Mikhailov, Y.N. Nagar, A.V. Serebrjakov

There has been examined a mathematical model of item obtaining from the oxidized graphite powder by means of exfoliating at heating in a metal mould. Temperature equaling discovered in a numerical experiment by the ultimate stage of the process allows to build asymptotic expansion of the solution in one-dimensional case. Temperature- and speeds fields in two-dimensional axisymmetric case are numerically defined by the shock-capturing method.



Механизм терморасширения, а также теплофизические свойства ТРГ изучены достаточно мало. Ниже рассмотрена математическая модель процесса вспенивания графита в ограниченном объеме, когда образование ТРГ представляется как фазовый переход с учетом тепломассопереноса [2].

1. Рассмотрим одномерную модель процесса химического прессования, когда слой ОГ толщины  $h_0$ , насыпанный на нижнюю пластину пресс-формы, под действием нагрева извне начинает вспениваться. Слой ТРГ толщины  $\xi_n(t)$  поднимает на себе слой ОГ толщины  $h(t)$ . В некоторый момент  $t = t_1$  слой ОГ касается верхней пластины и начинает образовываться верхний слой ТРГ толщины  $\xi_b(t)$ . Процесс заканчивается к моменту времени  $t = t_2: h(t_2) = 0$ .

Распределение температуры и положение границ раздела фаз можно получить из решения краевой задачи для уравнений теплопроводности, включающих конвективные члены, с условиями на внешних границах и условиями Стефана на подвижных границах раздела [4]. При  $t_1 < t < t_2$  имеем

$$\rho_i(t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = F_i \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad x \in D_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = Bio^{(i)} \cdot (u_i(l_i, t) - u_\infty), \quad i = 1, 3, \quad (2)$$

$$u_1(x_2(t), t) = u_2(x_2(t), t) = u_2(x_3(t), t) = u_3(x_3(t), t) = u_*, \quad (3)$$

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{k_j}{k_1} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_j} = \Lambda \cdot \left( \frac{\partial x_j}{\partial t} - y'(t) \right) \cdot (-1)^j, \quad j = 2, 3. \quad (4)$$

Здесь  $\rho_i = \tilde{\rho}_i / \tilde{\rho}_1$ ,  $t = \tilde{t} / T$ ,  $x = \tilde{x} / l$ ,  $u = \tilde{u} / u_*$ ,  $\tilde{\rho}_i$ ,  $c_i$ ,  $k_i$  — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности в области  $D_i$ ,  $u_*$  — температура термического расщепления ОГ,  $F_i = (k_i T) / (\rho_i c_i l^2)$  — число Фурье,  $\Lambda = (\lambda \rho_i l^2) / (k_1 u_* T)$ ,  $\lambda$  — количество тепла на фазовый переход единицы массы,  $v_i(x, t)$  — безразмерные скорости вещества в областях  $D_1$ ,  $D_3$ ,  $y'(t)$  — скорость слоя ОГ.

Распределение температуры в начальный момент  $t = 0$  задано, расчет стадии процесса от  $t = 0$  до  $t = t_1$  [4] дает начальное распределение температуры для задачи (1)–(4).

Возможность замены внешних слоев из тонких металлических пластин условиями третьего рода (2) на внешних границах областей  $D_1$ ,  $D_3$  была изучена в работе [5], где показано, что для тонких пластин (до 0.1l) вносимая погрешность достаточно мала.

Плотности ТРГ в нижнем и верхнем слоях можно выразить через положения границ раздела и смещение  $y$  слоя ОГ,

$$\rho_2(t) = \rho_1 \left( 1 - \frac{1 - h_0 + y(t)}{\xi_n(t)} \right), \quad \rho_3(t) = \rho_1 \left( 1 + \frac{y(t)}{\xi_b(t)} \right).$$

Закон движения слоя графита  $y(t)$  можно определить из решения присоединенного ОДУ второго порядка, если рассмотреть этот слой как объект переменного состава, движущийся под действием сил давления со стороны верхнего и нижнего слоев ТРГ. Скорости движения слоя графита в моделируемом процессе достаточно малы (2–10 мм/мин), что приводит к выравниванию давлений и плотностей в верхнем и нижнем слоях ТРГ; при этом зависимость плотностей от положения границ раздела имеет вид [3]:

$$\rho_2(t) = \rho_3 = \rho_1 \cdot \left( 1 - \frac{1 - h_0}{\xi_n(t) + \xi_b(t)} \right).$$

Задача определения полей температур и законов движения границ, как и в одномерном случае без учета конвективных членов [4], решалась методом выпрямления фронтов [3, 6]. В численном эксперименте было выявлено, что к моменту  $t_1$  касания ОГ верхней пластины и далее, при  $t > t_1$ , градиенты температур во всех областях  $D_i$  мало отличаются от постоянных, а температура в области  $D_2$ , занятой ОГ, близка всюду к температуре фазового перехода  $u_*$  (рис. 1).



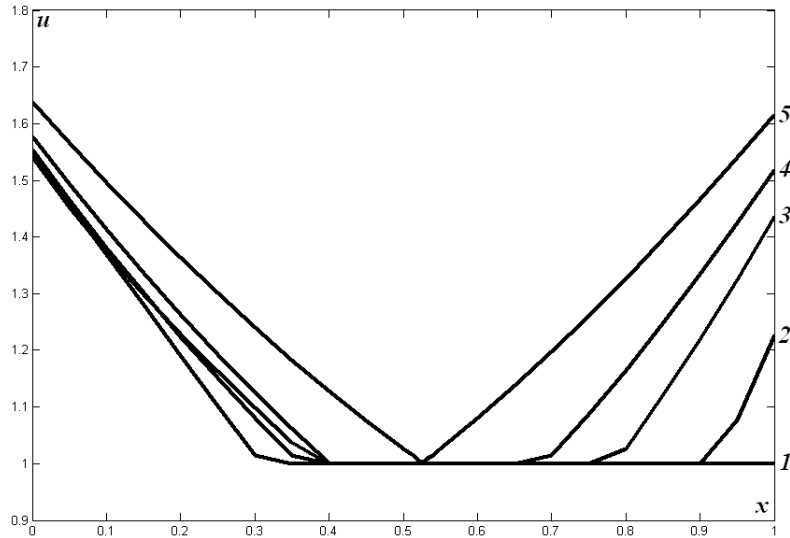


Рис.1. Распределение температуры в моменты времени:  
 1 –  $t = t_1 = 0.661$ , 2 –  $t = 0.702$ , 3 –  $t = 0.772$ , 4 –  $t = 0.872$ ,  
 5 –  $t = t_2 = 1.142$

2. Установленное выравнивание температуры ОГ к заключительной стадии процесса дает возможность построить [7, 8] приближенное решение задачи разложением по малому параметру — отношению коэффициентов теплопроводности ТРГ и ОГ,  $\varepsilon = k_2/k_1$ . Для одного из типовых наборов параметров имеем  $k_2/k_1 = 0.1$ ;  $F_1 = 3.9$ ;  $F_2 = 51.4$ ;  $\Lambda = 0.21$ ;  $\kappa = 20$ . Это позволяет принять  $F_1 \sim 1$ ,  $F_2 = \kappa_2 \varepsilon^{-1}$ ,  $\Lambda = \bar{\Lambda} \cdot \varepsilon$ ,  $\bar{\Lambda} \sim 1$ ,  $\kappa_2 \sim 1$ .

После применения метода выпрямления фронтов с переменными

$$\theta = \frac{x - \xi_H(t)}{1 - \xi_H(t) - \xi_B(t)}, \quad \varsigma = 1 - \frac{x}{\xi_H(t)}, \quad \eta = \frac{1 - x}{\xi_B(t)}$$

в слое ОГ, нижнем и верхнем слоях ТРГ соответственно, приходим к задаче

$$(1 - \xi_H(t) - \xi_B(t))^2 \frac{\partial u_1}{\partial t} + (1 - \xi_H(t) - \xi_B(t)) \left[ (\dot{\xi}_B + \dot{\xi}_H) \theta - \xi_H \right] \frac{\partial u_1}{\partial \theta} = F_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2},$$

$$\rho(t) \left[ \xi_H^2(t) \frac{\partial u_2}{\partial t} + \xi_H(t) \frac{\partial u_2}{\partial \varsigma} (\dot{\xi}_H(t)(1 - \varsigma) - v_2) \right] = F_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varsigma^2},$$

$$\rho(t) \left[ \xi_B^2(t) \frac{\partial u_3}{\partial t} - \xi_B(t) \frac{\partial u_3}{\partial \eta} (\dot{\xi}_B(t) \eta + v_3) \right] = F_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \eta^2},$$

$$-\xi_H^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial \varsigma} \Big|_{\varsigma=1} - Bi^{(2)} u_2(1, t) + Bi^{(2)} u_\infty = 0,$$

$$-\xi_B^{-1} \frac{\partial u_3}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} + Bi^{(2)} u_3(0, t) - Bi^{(2)} u_\infty = 0,$$

$$u_2(0, t) = u_3(1, t) = u_1(0, t) = u_1(1, t) = 1,$$

$$(1 - \xi_H(t) - \xi_B(t))^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} + \xi_H^{-1}(t) \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial u_2}{\partial \varsigma} \Big|_{\varsigma=0} = \Lambda (\dot{\xi}_H - \dot{\xi}_r),$$

$$-(1 - \xi_H(t) - \xi_B(t))^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=1} - \xi_B^{-1}(t) \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial u_2}{\partial \varsigma} \Big|_{\varsigma=1} = \Lambda (\dot{\xi}_H - \dot{\xi}_r).$$

Используя асимптотические разложения



$$\xi_H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \xi_{Hk}(t), \quad \xi_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \xi_{Bk}(t), \quad u_1(\theta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot u_{1k}(\theta, t),$$

$$u_2(\zeta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot u_{2k}(\zeta, t), \quad u_3(\eta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \cdot u_{3k}(\eta, t)$$

для главных членов получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 u_{20}}{\partial \zeta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial \eta^2} = 0, \quad (1 - \xi_{H0}(t) - \xi_{B0}(t))^2 \frac{\partial u_{10}}{\partial t} = F_1 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \theta^2}, \quad (8)$$

причем  $u_{10}$  должна удовлетворять условиям  $\left. \frac{\partial u_{10}}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial u_{10}}{\partial \theta} \right|_{\theta=1} = 0$ .

Результаты численных расчетов [12] дают близкое к линейному распределение температур по координате в ТРГ и близкое к постоянному  $u = u_*$  в ОГ в начале последней стадии процесса. Это позволяет записать начальное условие  $u_{10}(\theta, t_2) = 1$ . Решением уравнения (8) при данном условии для  $u_{10}$  является  $u_{10}(t) \equiv 1$ . Тогда условия (7) примут вид

$$\xi_{H0}^{-1}(\partial u_{20}/\partial \zeta) \Big|_{\zeta=0} = \bar{\Lambda}(\dot{\xi}_{H0} - \dot{\xi}_{r0}), \quad \xi_{B0}^{-1}(\partial u_{30}/\partial \eta) \Big|_{\eta=0} = \bar{\Lambda}(\dot{\xi}_{B0} - \dot{\xi}_{r0}). \quad (9)$$

Из уравнений (8) с учетом условий (5), (6) имеем

$$u_{20} = 1 + \varsigma \xi_{H0}(u_{\infty} - 1) \frac{\varsigma \xi_{H0}(u_{\infty} - 1)}{\xi_{H0} + 1/Bi^{(2)}}, \quad u_{30} = \frac{(\xi_{B0} u_{\infty} + 1/Bi^{(2)}) - \eta \xi_{B0}(u_{\infty} - 1)}{\xi_{B0} + 1/Bi^{(2)}}.$$

Подставляя в условия (9), получаем

$$\frac{\alpha}{\xi_{H0} + 1/Bi^{(2)}} = \dot{\xi}_{H0} - \dot{\xi}_{r0}, \quad \frac{\alpha}{\xi_{B0} + 1/Bi^{(2)}} = \dot{\xi}_{B0} + \dot{\xi}_{r0}, \quad \alpha = \frac{u_{\infty} - 1}{\bar{\Lambda}}.$$

Обозначив  $z_1 = \xi_{H0}(t) + \xi_{B0}(t) + 2\gamma$ ,  $z_2 = \xi_{B0}(t) + \gamma$ ,  $\gamma = 1/Bi^{(2)}$ , получаем систему уравнений (с новой переменной времени  $t' = \alpha(t - t_2)$ )

$$\begin{cases} \dot{z}_1/z_1 = (z_2(z_1 - z_2))^{-1}, \\ \dot{z}_2(z_2 - \beta(z_2 - \gamma)/(z_1 - 2\gamma)) = 1 \end{cases} \quad (10)$$

с начальными условиями

$$z_1(0) = \xi_{H0}(t_2) + 2\gamma, \quad z_2(0) = \gamma. \quad (11)$$

Для случая  $Bi^{(2)} = \infty$  получаем граничные условия первого рода. Система (10) в этом случае (при  $\gamma = 0$ ) интегрируется в элементарных функциях [13]:

$$z_2(z_1) = \frac{z_1}{2} - \frac{\xi_{H0}^2(t_2)}{2\kappa^2} \cdot \frac{z_1}{(z_1 - \beta)^2}, \quad t'(z_1) = \frac{z_1^2}{8} + \frac{\xi_{H0}^4(t_2)}{24\kappa^4} \cdot \frac{3z_1 - \beta}{(z_1 - \beta)^3} - \frac{\xi_{H0}^2(t_2)}{24\kappa^2} (3\kappa^2 + 2\kappa + 1).$$

Система (10)–(11) решается в численном виде, и находятся параметрические зависимости

$$\begin{cases} \xi_{H0}(t) = z_1 - z_2(z_1) \\ t = t'(z_1)/\alpha + t_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \xi_{B0}(t) = z_2(z_1) \\ t = t'(z_1)/\alpha + t_2 \end{cases}, \quad \text{где } z_1 \in [\alpha, 1].$$

Сравнение численных результатов с асимптотическим разложением показывает, что для приведённого диапазона параметров уже главная часть разложения дает хорошее приближение как для закона движения фронтов, так и для температурного поля. На рис. 2 представлено сравнение для условий третьего рода при различных значениях малого параметра и  $Bi^{(1)} = 2$ ,  $u_{\infty}/u_* = 2$ .

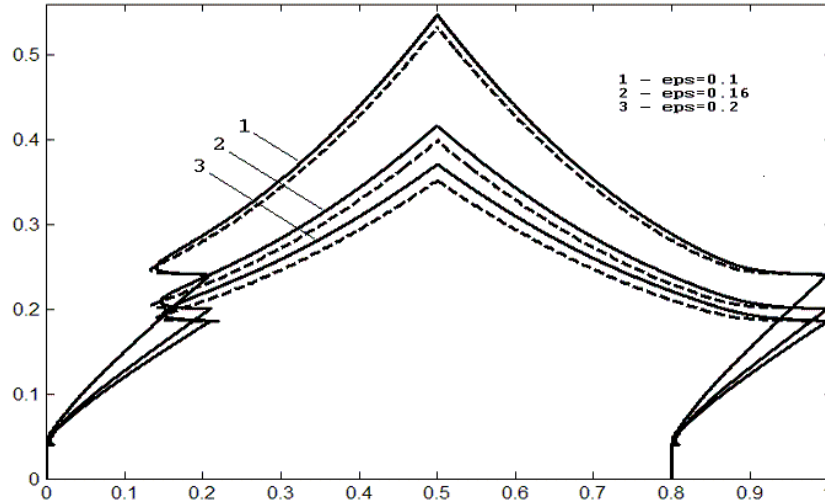


Рис.2. Движение границ раздела фаз и свободной поверхности ОГ  
( — численные расчеты, -- асимптотическое разложение)

**3.** При решении нелинейной краевой задачи типа Стефана в двумерной области применение метода выпрямления фронтов приводит к очень громоздким алгоритмам и обычно прибегают к методам сквозного счета [3, 9]. Рассмотрим схему, примененную ранее [10] в плоском двумерном случае, для расчета полей температур и скоростей в осесимметричном случае.

Задача Стефана записывается в следующем виде:

$$\rho_i c_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \text{grad}(u_i) \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_i \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_i \frac{\partial u_i}{\partial z} \right), \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

$$u_1(r, z, 0) = u^0(r, z), \quad (r, z) \in D, \quad (13)$$

$$F(u(r, z, t)) = 0, \quad (r, z) \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (14)$$

$$u_1(r, z, t) = u_2(r, z, t) = u_*, \quad (r, z) \in \sigma(t), \quad t > t_*, \quad (15)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = \lambda \rho_1 (v_\sigma - v_{1n}), \quad (r, z) \in \sigma(t), \quad t > t_*, \quad (16)$$

где  $D = \{(r, z): r_0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq l\}$ ,  $\rho_i, c_i, k_i$  — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности вещества в области  $D_i(t)$ ,  $u_*$  — температура фазового перехода,  $v_{in}$  — нормальная составляющая (по отношению к границе  $\sigma$ ) скорости частиц в области  $D_i(t)$ ,  $v_\sigma$  — скорость движения межфазной границы,  $\lambda$  — удельное количество тепла, затрачиваемое на фазовый переход ОГ — ТРГ. Как и прежде индекс  $i = 1$  для ОГ,  $i = 2$  для ТРГ.

Используем при определении полей скоростей уравнение неразрывности и уравнение Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0,$$

$$\rho \left( \mathbf{v} \text{grad}(v_i) + \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \left( \Delta v_i + \frac{1}{3} \frac{\partial(\text{Div}(\mathbf{v}))}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Поскольку скорости частиц малы и между ними существует значительное трение, то, пренебрегая массовыми и инерционными силами, получим

$$\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \text{grad}(\text{Div}(\mathbf{v})) = \frac{1}{\eta} \text{grad}(p), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (17)$$

Примем, что плотность в каждой из областей  $D_i$  является функцией только времени, тогда  $\text{Div}(\mathbf{v}) = -(\ln(\rho))'_t$ , и из (17) следует  $\Delta \mathbf{v} = \frac{1}{\eta} \text{grad}(p)$ . Исключая из равенства (17) давление  $p$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \quad (18)$$



$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad v_r|_{\Gamma} = 0, \quad v_z|_{\Gamma} = 0. \quad (19)$$

Как и в работе [10], перейдем к упрощенной задаче для потенциала скоростей  $\theta$ :  $\mathbf{v} = grad(\theta)$ . В этом случае уравнение (18) выполнено тождественно. Тогда функцию  $\theta(r, z)$  требуется определить из решения задачи Неймана:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\rho \frac{\partial\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial n}|_{\Gamma} = 0. \quad (20)$$

Задача решалась итерационно. При заданном поле скоростей определялось из решения задачи (12)–(16) поле температур и продвижение границы раздела, затем находились функция  $\rho'_i$  и поле скоростей из задачи Неймана (20). Задача Стефана (12)–(16) решалась методом сквозного счета, когда уравнение (12) рассматривается во всей области  $D$  и коэффициенты  $c_i\rho_i$  заменяются на единую в области  $D$  функцию  $c(u)\rho(u) + \lambda\rho(u)\delta(u - u_*)$ . Условие Стефана (16) при этом выполняется автоматически.

При расчетах дельта-функция заменяется сглаженной дельтаобразной функцией. Возникает квазилинейное уравнение параболического типа, которое решалось с помощью локально-одномерной конечно-разностной схемы [11]. Задача Неймана решалась методом матричной прогонки.

На рис. 3 изображены положения межфазной границы в моменты времени  $t = 0.06, t = 0.2, t = 0.45$  и поле скоростей при  $t = 0.45$ .

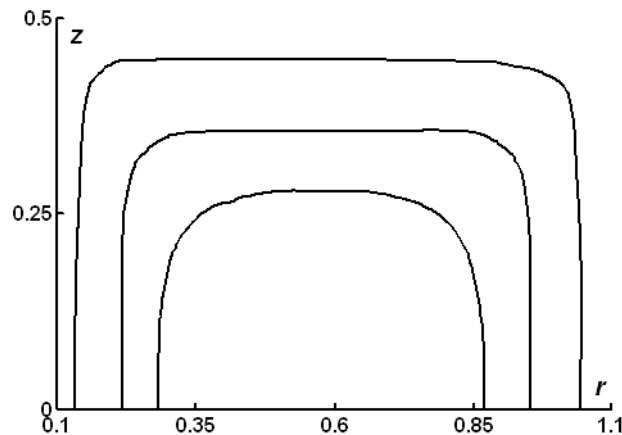


Рис. 3. Движение межфазной границы

Расчеты показывают, что значения конвективных членов и скорость изменения температуры являются величинами одного порядка, и при моделировании процесса терморасширения ОГ необходимо учитывать движение вещества.

### Библиографический список

1. Финаёнов А.И., Трифонов А.И., Журавлев А.М., Яковлев А.В. Области применения и получение терморасширенного графита // Вестник СГТУ. 2003. № 1(2). С. 75–85.
2. Ольшанский В.Ю. Математическое моделирование процесса терморасширения графита с учетом фазовых переходов // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Сб. аннот. докл. (Н.Новгород, 23–28 августа 2006г.). Н.Новгород, 2006. С. 141.
3. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М., 2003. 784 с.
4. Ольшанский В.Ю., Михайлов В.Ю., Серебряков А.В. Результаты применения метода выпрямления фронтов при моделировании термического расщепления графита // Вестник СГТУ. 2006. №2(12), вып.1. С.19-24.
5. Ольшанский В.Ю., Серебряков А.В., Бахтин К.Г. Метод сквозного счета в задаче нагрева многослойной среды с подвижными внутренними границами // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз.науч.сб. Саратов, 2004. С. 87–91.
6. Будак Б.М., Васильев Ф.П., Успенский А.Б. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана // Численные методы в газовой динамике: Сб. работ ВЦ МГУ. М., 1965. С. 139–183.
7. Ольшанский В.Ю., Нагар Ю.Н. О движении границ раздела в задаче о терморасщеплении графита // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники: Тр. междунар. конф. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике». Ульяновск, 2006. С. 244–246.



8. Ольшанский В.Ю., Нагар Ю.Н. Исследование закона движения границ раздела в задаче о терморасщеплении графита // Математические методы в технике и технологиях: Сб.тр. XIV Междунар. науч. конф. Воронеж, 2006. С. 91–93.
9. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.
10. Бахтин К.Г., Ольшанский В.Ю. Расчет движения границы раздела в задаче терморасширения графита при учете конвективных членов // Вестник СГТУ. 2006. № 3(15), вып. 2. С. 7–12.
11. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. М., 2001. 319 с.
12. Ольшанский В.Ю., Серебряков А.В., Михайлов В.Ю. Расчет движения границ раздела компонент в одной модели тепломассопереноса при термическом расщеплении графита // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов, 2005. Вып. 7. С. 24–28.
13. Ольшанский В.Ю., Нагар Ю.Н. Движение границы раздела при значительном отличии плотности агрегатных состояний в задаче о терморасщеплении графита // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов, 2005. С. 72–76.

УДК 531/534: [57+61]

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОЦИРКУЛЯТОРНЫХ ПРОЦЕССОВ: НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТКАНИ

Н.С. Шабрыкина

Пермский государственный технический университет,  
кафедра теоретической механики  
E-mail: sns@theormech.pstu.ac.ru

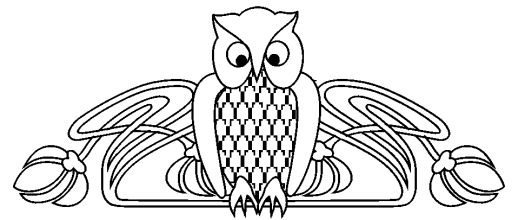
Микроциркуляторное русло является одним из ключевых звеньев сердечно-сосудистой системы человека. Любые патологические процессы, происходящие в организме человека, вызывают различные изменения кровотока и наоборот, расстройства микроциркуляции при многих заболеваниях возникают раньше и держатся дольше их клинических проявлений. Моделирование микроциркуляции позволяет лучше понять сложные взаимосвязанные процессы, обеспечивающие обмен веществ в организме, а также выявить причины возникновения патологий микроциркуляции и предложить пути их лечения.

Важность микроциркуляторного русла подчеркивает тот факт, что большая часть обмена питательных веществ и продуктов распада осуществляется на уровне мельчайших сосудов. Основные количественные данные в области механики микроциркуляторных процессов и обмена веществ были получены в течение последних 30 лет, благодаря существенным инновациям методов и технологий измерения параметров микроциркуляции и методик анализа полученных данных [1]. Но кроме эмпирических существуют и теоретические исследования, которые не только помогают интерпретировать экспериментальные данные, но и служат основанием для проведения дальнейших экспериментов.

К настоящему времени разработано большое количество моделей, описывающих течение крови в капиллярах, а также моделей ткани, без учета их взаимосвязи с сосудистой системой [2]. Однако суть обменных процессов в организме состоит в постоянном перераспределении веществ между кровеносным капилляром, окружающей тканью и лимфатическими капиллярами. Значит, для адекватного описания обменных процессов, необходимо строить комплексные модели, учитывающие взаимосвязь процессов, происходящих во всех частях микроциркуляторного русла.

Представленная здесь модель посвящена описанию процесса обмена веществ в организме человека и животных. Особенность данной модели состоит в том, что предлагается формулировка краевой задачи, описывающей следующие взаимосвязанные процессы: движение жидкости в кровеносном капилляре, одновременно с ее фильтрацией и реабсорбцией в межклеточное пространство; движение жидкости в межклеточном пространстве; абсорбция в лимфатический капилляр. При этом давление и скорость течения жидкости в капилляре и ткани, а также зависящие от них величины рассматриваются как функции времени и двух пространственных координат.

В моделях микроциркуляции обычно предполагается, что все капилляры в органе одинаковы по размеру, характеристикам течения жидкости и т.д. Поэтому можно рассматривать один представи-



Modelling of Microcirculation: Unsteady Interstitial Fluid Flow in Tissue

N.S. Shabrykina

Microcirculation is a key element of human metabolism. Every pathological condition of human organism causes different changes in blood flow. And vice versa, many of the microcirculatory disorders appear before and stay longer after then other disease symptoms. Modelling of microcirculation help us to understand complex interconnected metabolic processes, to find out causes of different diseases and to offer ways of their treatment.



тельный капилляр. Будем описывать прямой цилиндрический кровеносный капилляр (радиуса  $R_c$  и длиной  $L$ ) и окружающую его тканевую мантию (рис. 1).

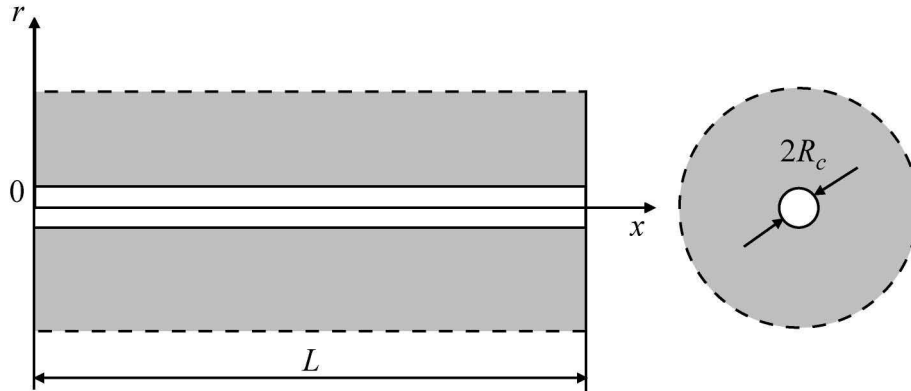


Рис. 1. Модель представительного капилляра в цилиндрической системе координат:  $R_c$  — радиус капилляра,  $L$  — длина капилляра,  $r$  — радиальная координата,  $x$  — аксиальная координата

Известно, что кровь является неньютоновской жидкостью. Сравнения с экспериментальными данными показывают, что при низких скоростях сдвига одной из лучших моделей неньютоновской жидкости является модель, предложенная авторами работы [3]. Уравнения, описывающие ее, имеют вид

$$\sigma = f(\gamma_i)\gamma - PI, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma, \quad \nabla \cdot V = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2} (\nabla V + \nabla V^T), \quad (1)$$

$$f(\gamma_i) = C_1 e^{C_2 H + C_4 \frac{a}{H^2}} (\gamma_i)^{-C_3 H}, \quad \gamma_i = \sqrt{2} \sqrt{I_1^2 - 2I_2} = \sqrt{2\gamma_{ij}\gamma_{ij}},$$

где  $\sigma$  — тензор напряжений,  $P = P(t, r, x)$  — давление в капилляре,  $I$  — единичный тензор,  $\gamma$  — тензор скоростей деформации,  $V = V(t, r, x)$  — вектор скорости,  $\rho$  — плотность жидкости,  $H$  — гематокрит крови,  $a$  — количество протеинов за исключением альбумина,  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) — эмпирически найденные коэффициенты.

Рассматриваемая здесь биологическая ткань моделируется как пористый, упругий, изотропный матрикс или каркас, насыщенный интерстициальной жидкостью, содержащейся в порах матрикса. Далее приведены уравнения, описывающие деформацию упругого матрикса, и течение жидкости в его порах [4, 5]:

$$\bar{\sigma} = 2\mu\varepsilon + \lambda eI - \bar{P}I, \quad e = \nabla \cdot U, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla U + \nabla U^T), \quad \nabla \cdot \bar{\sigma} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \left( \phi u + (1 - \phi) \frac{\partial U}{\partial t} \right) = -J_v, \quad (3)$$

$$\phi \left( u - \frac{\partial U}{\partial t} \right) = -K \nabla \bar{P}, \quad (4)$$

где  $\bar{\sigma}$  — тензор напряжений для ткани,  $\lambda$  и  $\mu$  — константы Ляме для упругого каркаса,  $\bar{P} = \bar{P}(t, r, x)$  — давление жидкости в порах,  $e$  — расширение твердой фазы,  $U = U(t, r, x)$  — смещение твердой фазы,  $\varepsilon$  — тензор малых деформаций,  $\phi$  — объемная доля жидкости в ткани (пористость),  $u = u(t, r, x)$  — скорость интерстициальной жидкости,  $J_v = J_v(t, r, x)$  — лимфатический дренаж жидкости,  $K$  — влагонепроводимость ткани.

Важной особенностью микроциркуляторных процессов является наличие обмена жидкости и растворенных в ней веществ между кровеносным капилляром и окружающей его тканью. Транскапиллярный обмен описывается законом Старлинга [6], согласно которому скорость течения жидкости через капиллярную стенку пропорциональна разнице гидростатического и онкотического давления в



кровеносном капилляре и в ткани. Используя закон Старлинга, можно записать граничное условие на радиальную компоненту скорости на границе между кровеносным капилляром и тканевой областью:

$$v_r = L_p ((P - \bar{P}) - P_o), \quad (5)$$

где  $L_p$  — гидравлическая проницаемость капиллярной стенки,  $P_o$  — результирующее онкотическое давление — разница между онкотическим давлением в капилляре и ткани (в данной модели считается постоянным).

Представленные выше определяющие соотношения для течения крови в кровеносном капилляре (1), течения жидкости в ткани (3), (4) и деформации тканевого матрикса (2) совместно с условием транскапиллярного обмена (5) позволяют найти характеристики течения в капилляре и ткани. Но решить такую задачу без каких-либо упрощающих предположений затруднительно. Ранее были рассмотрены несколько упрощенных вариантов предложенной выше модели: модель одномерного нестационарного течения в ткани с учетом лимфатического дренажа и двумерная стационарная модель течения жидкости в ткани [5]. В данной статье будет рассмотрена модель нестационарного течения жидкости в ткани без учета лимфатического дренажа. Постановка задачи в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = d^2 \Delta \bar{P}, & r > R_c, \quad 0 < x < L, \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, & \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \\ \left( -\frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + c\bar{P} \right) \Big|_{r=R_c} = cP_{bound}(x, t), \\ |\bar{P}| \Big|_{r \rightarrow \infty} < \infty, \end{cases} \quad (6)$$

где  $d^2 = K(\lambda + 2\mu)$ ,  $c = \frac{\phi L_p}{K}$ .

Первые два граничных условия предполагают отсутствие течения жидкости в ткани в аксиальном направлении при  $x = 0$  и  $x = L$ . Следующее условие представляет собой граничное условие (5), записанное в терминах давления с учетом закона Дарси (4).

Процессы, происходящие в кровеносном капилляре, являются периодическими, а значит и функцию  $P_{bound}(x, t)$  следует искать в классе периодических функций. В этом случае с течением времени (при  $t \rightarrow \infty$ ) решение задачи (6) становится периодическим — наблюдаются установившиеся колебания  $\bar{P}_{steady}(r, x, t)$ . Поскольку именно эти установившиеся колебания представляют интерес, решение ищется в виде  $\bar{P}_{steady}(r, x, t) = \bar{P}_{av}(r, x) + \text{Re}(\tilde{P}(r, x)e^{-i\omega t})$ , где  $\bar{P}_{av}(r, x)$  — среднее значение давления, около которого происходят колебания,  $\tilde{P}(r, x)$  — амплитуда колебаний,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  — частота колебаний,  $T$  — период колебаний.

Давление на границе между капилляром и тканью  $P_{bound}(x, t)$  изменяется со временем, поскольку кровь в кровеносный капилляр поступает периодически и давление на артериальном конце капилляра периодически меняется. При этом будем считать, что давление на венозном конце остается постоянным и в каждый момент времени распределение давления по капилляру линейное. Тогда описать изменение давления внутри кровеносного капилляра по времени и координате можно следующей функцией:  $P_{bound}(x, t) = \frac{P_a - P_v}{L}(L - x) \frac{1 + \cos \omega t}{2} + P_v - P_o$ , где  $P_a$  и  $P_v$  — давление внутри кровеносного капилляра на артериальном и венозном концах соответственно.

Решение представленной задачи было найдено методами математической физики [7] и имеет вид

$$\bar{P}_{av}(r, x) = \frac{P_a + 3P_v}{4} - P_o + \frac{2(P_a - P_v)}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_0\left(\frac{\pi(2n+1)r}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)x}{L}\right)}{(2n+1)^2 \left( \frac{\pi(2n+1)}{cL} K_1\left(\frac{\pi(2n+1)R_c}{L}\right) + K_0\left(\frac{\pi(2n+1)R_c}{L}\right) \right)},$$

$$\tilde{P}(r, x) = \frac{c(P_a - P_v) H_0^{(1)}\left(\sqrt{\frac{i\omega}{d^2}} r\right)}{4\sqrt{\frac{i\omega}{d^2}} H_1^{(1)}\left(\sqrt{\frac{i\omega}{d^2}} R_c\right)} + \frac{2Lc(P_a - P_v)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_0^{(1)}\left(m_n \frac{r}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)x}{L}\right)}{(2n+1)^2 m_n H_1^{(1)}\left(m_n \frac{R_c}{L}\right)},$$

где  $m_n = \sqrt{\frac{i\omega L^2}{d^2} - \pi^2(2n+1)^2}$ .

Все результаты решения будем рассматривать для одного цикла установившихся колебаний. В момент начала цикла давление на артериальном конце капилляра равно давлению на венозном конце. Затем в капилляр поступает кровь, и давление на артериальном конце капилляра возрастает,



пока не достигнет максимального значения. После чего давление на артериальном конце капилляра постепенно падает до первоначального значения, затем цикл повторяется.

На рис. 2 изображено векторное поле скорости течения тканевой жидкости в различные моменты времени. При расчетах использовались значения параметров, приведенные в работах [4, 8, 9]. В начале цикла (рис. 2, а) практически во всей рассматриваемой области наблюдается течение жидкости от внешней границы области к кровеносному капилляру. Затем вблизи артериального конца капилляра на небольшом участке начинает появляться течение жидкости в направлении от капилляра к периферии и течение вдоль капилляра (рис. 2, б). Величина этого участка постепенно увеличивается, пока не достигнет половины длины капилляра (рис. 2, в). В это же время наблюдается наиболее интенсивное течение жидкости вдоль капилляра. Затем течение в радиальном направлении от капилляра к периферии начинает преобладать (рис. 2, г), пока не охватит почти всю рассматриваемую область (рис. 2, д). После этого процессы начинают происходить в обратной последовательности до достижения первоначального состояния.

Рис. 2 показывает, что в начале цикла практически на всей длине капилляра наблюдается реабсорбция жидкости из ткани в кровеносный капилляр, затем появляется участок фильтрации, длина которого увеличивается. В тот момент, когда давление в кровеносном капилляре максимально (рис. 2, д), практически на всей длине кровеносного капилляра наблюдается фильтрация жидкости из капилляра в ткань. Такой результат расширяет традиционные представления о транскапиллярном обмене, согласно которым на артериальном конце капилляра всегда идет фильтрация жидкости, а на венозном — реабсорбция [1, 6, 8].

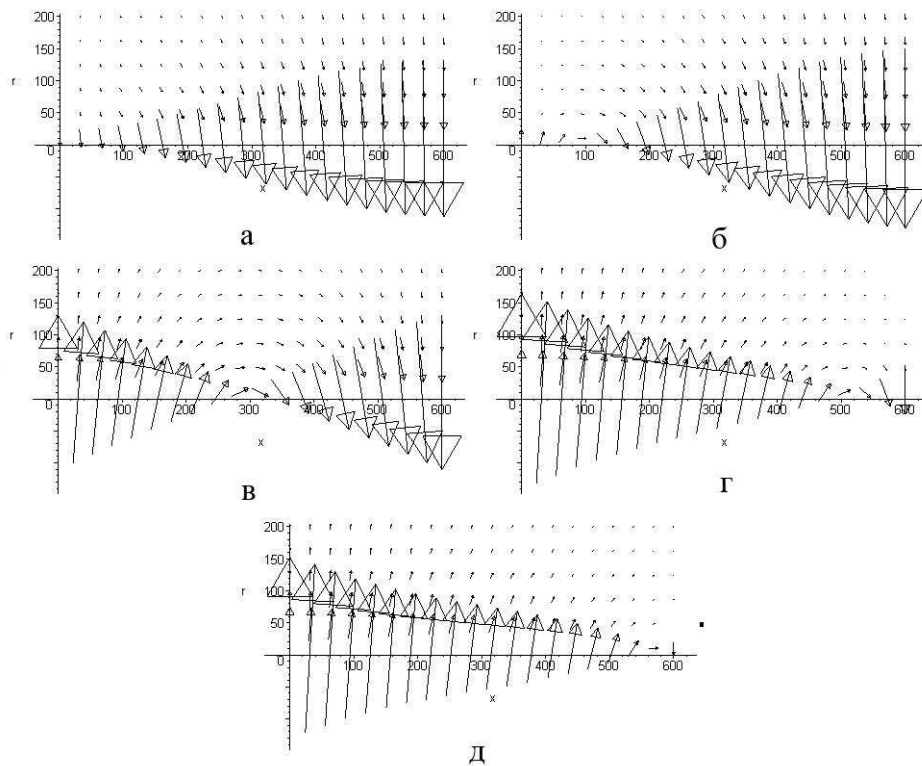


Рис. 2. Векторное поле скорости течения тканевой жидкости в различные моменты времени

Сравним результаты, полученные с помощью представляемой модели, с экспериментальными данными, полученными методом компьютерной капилляроскопии [10]. Данная методика позволяет произвести микровидеосъемку движения крови в единичном капилляре. Затем по данным съемки определяются различные характеристики микроциркуляции, в частности — объемная скорость транскапиллярного течения жидкости, т.е. количество жидкости, выходящей из капилляра за единицу времени.





В таблице сведены экспериментальные и расчетные данные для трех испытуемых [11].

	Артериальное давление, мм рт.ст.	Диаметр капилляра на артериальном/венозном конце, мкм	Объемная скорость фильтрации (эксперимент), мкм <sup>3</sup> /с	Объемная скорость фильтрации (модель), мкм <sup>3</sup> /с
Пациент К	111 / 73	15 / 18	36578	35188
Пациент Б	131 / 79	15 / 17	67323	46199; 62786
Пациент Н	161 / 99	14 / 18	8371	64453; 39496; 8424

Для первого (здорового) пациента модель показывает хорошее соответствие экспериментальным результатам (погрешность составляет 3,8%).

У второго пациента объемная скорость транскапиллярного течения значительно повышена по сравнению с нормой. При этом у пациента линейная скорость капиллярного кровотока вдвое выше нормы. Такое повышение скорости при практически нормальном артериальном давлении может быть достигнуто за счет уменьшения давления на венозном конце капилляра. Модель подтверждает такой вывод: в таблице приведены два значения объемной скорости (для нормального и пониженного вдвое венозного давления).

Для третьего пациента транскапиллярная объемная скорость значительно ниже нормы. При этом, на основе анализа характера капиллярного кровотока, автор работы [11] делает вывод, что у пациента либо повышено давление на венозном конце капилляра, либо проницаемость стенки капилляра значительно ниже нормы. В таблице приведены расчеты объемной скорости при условии изменения только артериального давления и при двух приведенных выше предположениях. Наиболее близок к экспериментальному значению результат при пониженной проницаемости стенки капилляра, а значит именно изменения эндотелия капилляра являются наиболее вероятной причиной патологии в этом случае.

В данной работе рассмотрена математическая модель нестационарных обменных процессов, происходящих в микроциркуляторном русле. Полученные данные о скорости течения тканевой жидкости позволяют расширить имеющиеся представления о функционировании системы микроциркуляции. Даваемые моделью результаты позволяют количественно оценивать интенсивность обменных процессов в норме и патологии, и делать выводы о наиболее вероятных причинах возникновения патологий микроциркуляции.

### Библиографический список

1. *Popel A., Pittman R.* Mechanics and transport in the microcirculation // Biomechanics: principles and applications / Ed. by D.J. Schneck, J.F. Bronzino. L.; N.Y.; Washington: CRT Press, 2002.
2. *Nyashin Y.I., Nyashin M.Y., Shabrykina N.S.* Models of microcirculation and extravascular fluid exchange // Russian J. of Biomechanics. 2002. V. 6, № 2. P. 62–77.
3. *Walburn F.J., Schneck D.J.* A constitutive equation for whole human blood // Biorheology. 1976. V.13. P.201–210.
4. *Swartz M.A., Kaipainen A., Netti P.A.* Mechanics of interstitial-lymphatic fluid transport: theoretical foundation and experimental validation // J. of Biomechanics. 1999. V. 32. P. 1297–1307.
5. *Шабрыкина Н.С.* Математическое моделирование микроциркуляторных процессов // Рос. журн. биомеханики. 2005. Т. 9, № 3. С. 70–88.
6. *Starling E.H.* On the adsorbtion of fluid from interstitial spaces // J. Physiol. 1896. № 19. P. 312–326.
7. *Шабрыкина Н.С.* Математическое моделирование микроциркуляторных процессов: нестационарная модель // Рос. журн. биомеханики. 2006. Т. 10, № 4. С. 70–83.
8. *Fung Y.C.* Biomechanics: mechanical properties of living tissues. N.Y., Berlin: Springer-Verlag, 1993.
9. *Netti P.A., Baxter L.T., Boucher Y., Skalak R., Jain R.K.* Macro- and microscopic fluid transport in living tissues: application to solid tumors // AIChE J. 1997. V. 43. P. 818–834.
10. *Gurfinkel Yu.I.* Computer capillaroscopy as a channel of local visualization, noninvasive diagnostics, and screening of substances in circulating blood // Optical Technologies in Biophysics and Medicine- II, V.V. Tuchin — Editor. Proc. SPIE. 2000. V. 4241. P. 467–472.
11. *Федорович А.А.* Капиллярная гемодинамика в эпонихии верхней конечности // Регионарное кровообращение и микроциркуляция. 2006. Т. 5, № 1. С. 20–28.



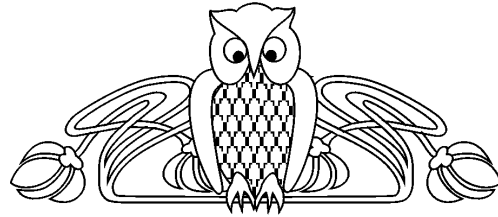
УДК 533.6.0116:532.529

## АНАЛИЗ РЕЖИМОВ РЕФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ОБРАЗОВАНИЕМ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ ИЛИ ОТРАЖЕННОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Г.П. Шиндяпин, А.А. Матутин

Саратовский государственный университет,  
кафедра вычислительного эксперимента в механике  
E-mail: matutinaa@mail.ru

Рассматриваются режимы рефракции ударной волны, при взаимодействии плоской ударной волны со свободной поверхностью, разделяющей газовую и газожидкостную (пузырьковую) среды. Анализ течений с помощью асимптотической теории коротких волн, использующих локально равновесную термодинамическую модель газожидкостной среды, приводит к установлению областей существования режимов рефракции: нерегулярного, регулярного с волной разрежения; регулярного, образованием ударной волны, замыкающей зону разрежения; регулярного с отраженной ударной волной. Для параметра, характеризующего эффективность рефракции, построены поверхности в пространстве параметров подобия ( $\alpha^V, c_\gamma, \bar{L}$ ), характеризующие границы областей существования режимов рефракции с волной разрежения и область существования для рефракции с отраженной ударной волной.



The Analysis of Conditions of a Refraction of a Shock Wave with Education of a Wave of Underpressure or the Reflected Shock Wave

G.P. Shindyapin, A.A. Matutin

Conditions of a refraction of a shock wave are considered, at interaction of a flat shock wave with a free surface dividing gas and Gas-liquid (bubble) medium. The analysis of fluxions with the help of the asymptotic theory of the short waves using locally fixed-ratio thermodynamic model газожидкостной of a medium, reduces in an establishment of fields of existence of conditions of a refraction: non-regular, the regular with a suction wave; the regular, education of the shock wave closing a zone of underpressure; the regular with the reflected shock wave. For the parameter describing efficiency of a refraction, surfaces in space of parameters of a similarity ( $\alpha^V, c_\gamma, \bar{L}$ ), describing boundaries of fields of existence of conditions of a refraction with a suction wave and field of existence for a refraction with the reflected shock wave built.

Интерес к задачам рефракции ударных волн обусловлен широким классом задач возникающих в приложениях, к которым относятся взаимодействия ударных волн с поверхностью океана, гидроудар, подводные взрывы, возникновение цунами и др; а также сложностью и противоречивостью исследуемых явлений [1]–[5].

В задачах рефракции ударных волн (УВ) на свободной поверхности, разделяющей газовую и газожидкостные среды (ГЖС), при падении УВ со стороны ГЖС обычно лишь малая часть энергии передается в область газа, что соответствует относительно малой интенсивности преломленной волны ( $q^+ = \varepsilon_{20}/\varepsilon_{10}(\varepsilon_{ji} = (p_j - p_i)/p_i)$ ), по сравнению с интенсивностью падающей УВ  $\varepsilon_{10}$ . Найдена область существования нелинейной рефракции УВ с волной разрежения или отраженной УВ, когда интенсивность преломленной волны сравнима с интенсивностью падающей УВ ( $q^+ \cong O(1)$ ) и значительная часть энергии передается из газожидкостной среды в газовую.

Установлено, что отмеченный феномен возникает при различных режимах рефракции, соответствующих перестройке потока от течения с волной разрежения: (NR-нерегулярной (рис. 1, a), RR-регулярной (рис. 1, b), RRV-регулярной рефракции с УВ, замыкающей зону разрежения, в том числе, RV-регулярной рефракции с вырождением волны разрежения  $q^+ = 1$  (рис. 1, c) к течению с отраженной ударной волной (рис. 1, d). Перестройка зависит от свойств газовой и газожидкостной сред (случай fast-slow ( $c_\gamma \geq 0$ ) или случай slow-fast ( $c_\gamma < 0$ )) выражающихся в величине скоростей звука в покоящихся средах.

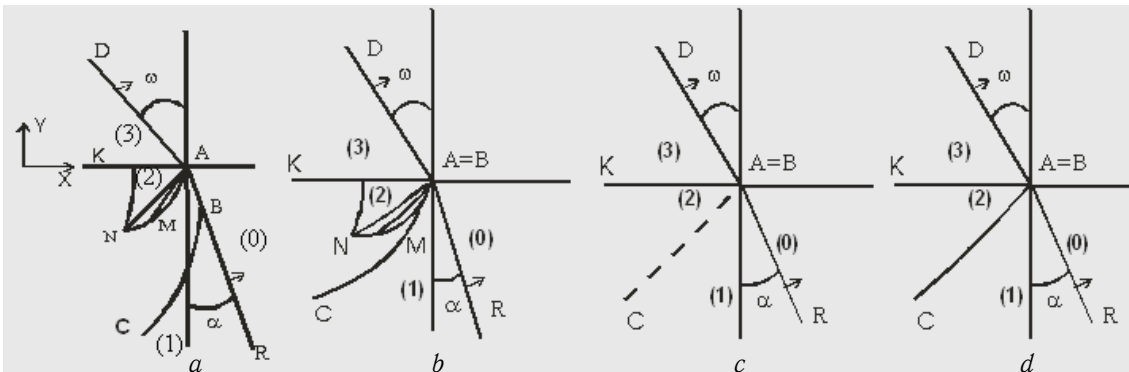


Рис. 1



При падении ударной волны AR(BR) относительной интенсивности  $\Delta p/\rho_0 c_0^2$ , под углом  $\alpha$  к вертикали на свободную поверхность КА, разделяющую газ и ГЖС, с газосодержаниями  $\gamma^+, \gamma^-$  возникают различные режимы рефракции, характеризующиеся фронтом преломленной волны AD и разрежением AMN или отраженной УВ AC. Параметр  $q^+$  характеризующий интенсивность преломленной волны одновременно характеризует интенсивность волны разрежения или отраженной УВ ( $\varepsilon_{20} = \varepsilon_{30}$ ). Исследования проводятся с использованием локально равновесной термодинамической модели ГЖС [1] для описания непрерывных и разрывных процессов, связанных с распространением и взаимодействием УВ относительно малой и умеренной интенсивности  $\Delta p/\rho_0 c_0^2$  в газожидкостных пузырьковых средах, характеризующихся массовым  $\gamma = m_{II}/m_I$  и объемным  $\varphi = V_{II}/(V_I + V_{II})$  газосодержаниями (индекс  $I$  — соответствует жидкости,  $II$  — газу). Уравнение термодинамического и калорического состояния смеси, в которой жидкая и газообразная фазы сжимаемы и описываются уравнениями состояния:  $\rho_1 = f(p)$ ,  $p = R\rho_{II}T$  (т.е. жидкость — баротропная, газ — термически и калорически совершенный) имеют вид [1]:

$$p \left[ \frac{a}{\rho} - \frac{b}{f(p)} \right] = c_V T, \quad c_V = \frac{c_{VI} + c_{VII}\gamma}{1 + \gamma}, \quad U = c_V T, \quad a = (1 + \gamma)b, \quad b = \frac{c_V}{\gamma R}. \quad (1)$$

Одними из основных термодинамических параметров, характеризующих свойства сжимаемой смеси, является адиабатическая скорость звука  $c$  ( $c^2 = (dP/d\rho)_S$ ), скорость  $D$  распространения УВ и энтропия  $S$  ( $R_0(\gamma)$  — характеризует влияние газосодержания среды)

$$c^2 = \frac{a + 1}{a - b\rho \frac{d}{dp} \frac{p}{f(p)}} \frac{p}{\rho}, \quad (D_0/c_0)^2 = 1 + \bar{\varepsilon}_{10}, \quad (2)$$

$$\bar{\varepsilon}_{10} = R_0(\gamma)P_{10} = L_0(\gamma)\varepsilon_{10}, \quad S - S_0 = c_V \frac{a + 1}{a} \ln \frac{T}{p^{1/(a+1)}}.$$

Анализ задач рефракции УВ при относительно малой интенсивности падающей УВ ( $P_{10} = \Delta p/\rho_0 c_0^2$ ) характерных для ГЖС пузырькового типа, как и других случаев взаимодействия УВ может быть проведен с помощью асимптотической теории коротких волн (для областей больших градиентов параметров) [1], [5]. Интерес к приближенным и асимптотическим методам в настоящее время объясняется с одной стороны достижениями в этой области, значение которых выходит за рамки рассматриваемых проблем, и, с другой стороны, необходимостью дальнейшего развития исследований [1], [4]–[5]. Вводя асимптотическое разложение  $\xi = x/c_0 t$ ,  $\eta = y/c_0 t$

$$r/c_0 t = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \quad \Theta = \bar{\varepsilon}^{1/2}Y, \quad \delta = X + (1/2)Y^2, \quad (3)$$

$$u/c_0 = \bar{\varepsilon}\mu/R_0, \quad v/c_0 = \bar{\varepsilon}^{3/2}\nu/R_0, \quad P = (p - p_0)/\rho_0 c_0^2, \quad P = P_{10}\mu,$$

получим решение для волны разрежения в виде

$$\mu = -\frac{1}{2}z^2 + \delta_A, \quad \nu = \frac{1}{3}z^3 - \mu Y + d, \quad z = (X - X_A)/Y, \quad (4)$$

а условие на свободной поверхности ( $N$  — скорость фронта ударной волны;  $\varepsilon^+ = (p_3 - p_0)/p_0$ ,  $\varepsilon^- = (p_1 - p_0)/p_0$ ) в виде

$$N^- \cos(\alpha) = N^+ \cos(\omega), \quad N^\pm = 1 + \frac{1}{2}L_0^\pm \varepsilon^\pm. \quad (5)$$

Используя решение (4) с параметрами для регулярной (RR) и регулярной с УВ, замыкающей волну разрежения (RRV):  $X_A = (\alpha^{\nu^2} + 1)/2$ ,  $d = \alpha^{\nu^2} - \frac{1}{3}(\alpha^{\nu^2} - 1)^{3/2}$ ,  $\omega^{\nu^2} = \tan(\omega)/\bar{\varepsilon}^{1/2}$  получим

$$\beta_k^\nu = \sqrt{2(X_A - q^+)}, \quad \omega^{\nu^2} q^{+2} = \left[ \frac{1}{3}(2X_A - 2q^2)^{3/2} + d \right]. \quad (6)$$

Условие (5) в принятых обозначениях примет вид

$$2c_\gamma = (\omega^{\nu^2} - \alpha^{\nu^2}) + \frac{L_0^+}{L_0^-} q^+ - 1. \quad (7)$$

Исключая  $\omega^\nu$  из (6) и (7) получим окончательно выражение ( $\bar{L} = \frac{L_0^-}{L_0^+}$ )

$$2c_\gamma = \frac{1}{q^{+2}} \left\{ \frac{1}{3} [2(X_A - q^+)]^{3/2} + d \right\}^2 - \alpha^{\nu^2} - 1 + \frac{q^+}{\bar{L}}. \quad (8)$$



Здесь  $\alpha^\nu = \tan(\alpha)/\bar{\varepsilon}^{1/2}$ ,  $c_\gamma = (c_0^- - c_0^+)/c_0^- \bar{\varepsilon}$ ,  $\bar{L} = L_0^-/L_0^+$  - параметры подобия, характеризующие в общем случае процессы рефракции. При нерегулярной рефракции, (рис. 1, а) [5] используется частное решение для уравнений коротких волн для области NABC, получим аналогичный (8) результат при

$$d = q^-(\alpha^{\nu 2} + 1 - q^-)^{1/2} - \frac{1}{3}(\alpha^{\nu 2} + 1 - 2q^-)^{3/2}. \quad (9)$$

В случае возникновения отраженной УВ (рис. 1, d) выражению (8) будет соответствовать

$$2c_\gamma = (1 - q^+) - 1 + \frac{q^+}{\bar{L}}. \quad (10)$$

На рис. 2, а, b приведены результаты расчетов для параметра  $q^+ = \varepsilon_{20}/\varepsilon_{10}$ , характеризующего эффективность рефракции на поверхности, разделяющей газ и ГЖС, при различных режимах, в зависимости от параметров подобия:  $\alpha^\nu = \alpha^\nu(\varepsilon_{10}, \alpha, \gamma^-)$ ,  $c_\gamma = c_\gamma(\gamma^+, \gamma^-, \varepsilon_{10})$ ,  $\bar{L} = \bar{L}(\gamma^+, \gamma^-, \varepsilon_{10})$ . Фиксированным значениям  $\alpha^\nu$  соответствует:  $\alpha^\nu = 0.0 - E$  - граница области существования нерегулярной рефракции NR;  $\alpha^\nu = 1.0 - A$  - граница между областями NR и RR;  $\alpha^\nu = 2.1 - A^1$  - граница между областями RR и RRV. Поверхность К соответствует режиму рефракции с отраженной УВ (RV).

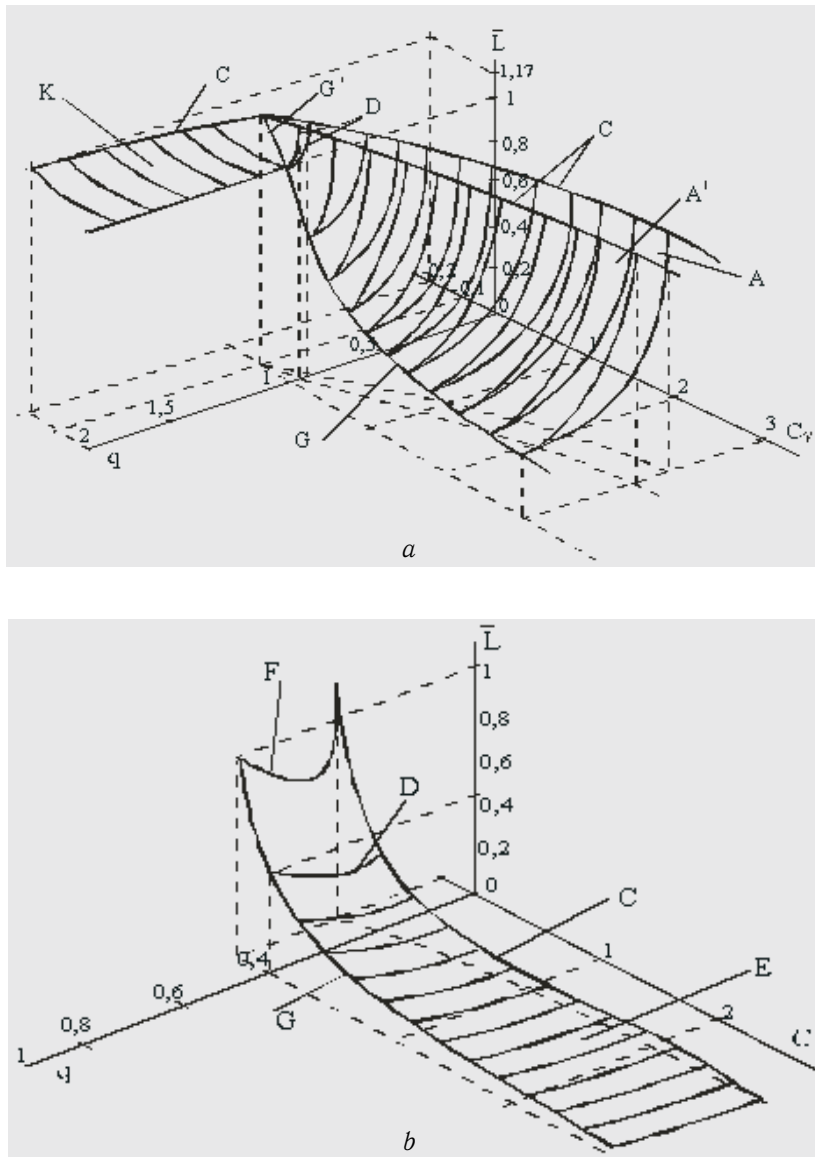


Рис. 2



Кривая G в плоскости  $q^+ = 1.0$  является для режимов RR и RRV при  $c_\gamma \geq 0$  и всех  $\alpha^\nu$  универсальной кривой, соответствующей вырождению волны разрежения.

Кривая  $G^1$  ( $q^+ = 1.0$ ) при  $c_\gamma < 0$  представляет универсальную границу между режимами RR, RRV, RV или границей перехода от режима с волной разрежения к режиму с отраженной УВ.

Для режима нерегулярной рефракции (NR) кривая G соответствует  $q_{max}^+$  (минимально возможное разрежение) при соответствующих фиксированных  $\alpha^\nu$  и  $c_\gamma$ .

Границы F  $c_\gamma$  ( $c_\gamma < 0$ ) при режиме (NR) соответствуют предельным значениям  $c_\gamma$  ( $c_\gamma = c_{\gamma min}$ ) в случае slow-fast.

Границы C — при различных  $\alpha^\nu$  в режимах RR, RRV и RV соответствуют предельно допустимым значениям  $\bar{L}$  для рассматриваемых сред газ-ГЖС. В нашем случае для газовых многоатомных сред

( $\chi = c_{pII}/c_{vII} = 1.4$ ) и водовоздушных пузырьковых сред  $\bar{L} = 1.17$ . Однако это предельное значение может не достигаться, как в случае RR и RRV, при  $c_\gamma \gg 1$ , а также в случае NR.

В плоскости  $c_\gamma = 0$  (рис. 3) сечения D при различных  $\alpha^\nu$  соответствуют переходу от случая fast-slow ( $c_\gamma \geq 0$ ) к случаю slow-fast ( $c_\gamma < 0$ ).

Как видно из рис. 3 эффективность рефракции в целом возрастает до своего предельного значения ( $q^+ = 1$ ) по мере увеличения  $\alpha^\nu$ , достигая предельных значений на границе G.

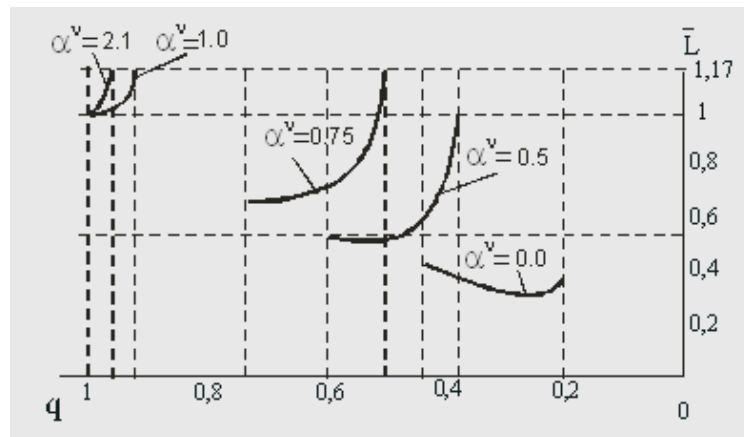


Рис. 3

Настоящие результаты имеют важное практическое приложение для построения границ существования режимов в исходных физических переменных.

### Библиографический список

1. Шиндяпин Г.П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. 104 с.
2. Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
3. Шиндяпин Г.П., Маркушин А.Г. Рефракция ударной волны на свободной поверхности в газожидкостной среде с образованием волны разрежения // Аэродинамика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 12 (15). С. 24–39.
4. Шиндяпин Г.П., Матутин А.А. Аналитическое исследование нелинейной рефракции ударной волны на поверхности, разделяющей газовую и газожидкостную среды // Механика и процессы управления: Сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во УРО РАН, 2004. С. 190-197.
5. Шиндяпин Г.П. Об особенности «сверхзвукового» взаимодействия слабых ударных волн и задаче преломления слабой ударной волны в воде на свободной поверхности // Аэродинамика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 3(6).

## ИНФОРМАТИКА

УДК 81.32

### ЗАДАЧИ ИНТЕРАКТИВНОЙ ОБРАБОТКИ ПОИСКОВЫХ ЗАПРОСОВ В ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Д.А. Бодров, С.Л. Кожитов, В.Н. Поляков

Московский государственный институт стали и сплавов (Технологический университет),  
Кафедра АСУ  
E-mail: polyakovvn@misis.ru

В работе представлено теоретико-множественное описание основных интерактивных механизмов обработки запросов в рамках проекта «Интеллектуальная поисковая машина»: фокусировка и расширение полноты. Новизна подхода заключается в том, что впервые рассматривается систематизация интерактивных методов разрешения многозначности в человеко-машинном комплексе «пользователь — поисковая система». Инженерная реализация методов выполнена в нотации языка *SQL*.

Результаты исследований найдут применение в поисковых модулях систем документооборота предприятия, в библиотечных системах, в сети Интернет.

**The Tasks of Interactive Processing of Search Queries in the Set Theory Formalization**

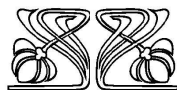
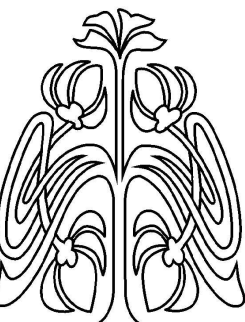
**D.A. Bodrov, S.L. Kozhitov, V.N. Polykov**

In the paper description in the set theory of main mechanisms of query processing is fulfilled. Focusing and widening of fullnes are described as query processing. The methods are used in the project of Intelligent Search Engine. Newness of the approach consists that there is the first systematization of interactive methods of word sense disambiguation in man-machine complex «user-search engine». Engineer realization of the methods was done in *SQL*. This results can be used in the search modules of documents workflow systems of ERP, in bibliotic systems, in network Internet.

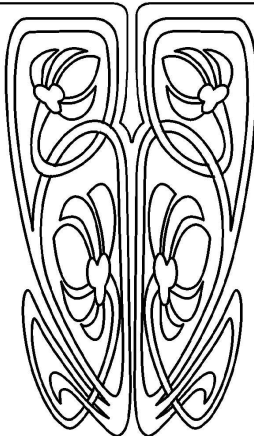
#### ВВЕДЕНИЕ

Рост объемов информации в сети Интернет и возможности доступа к библиотечным ресурсам средствами коммуникаций поставили проблему качественного поиска чрезвычайно остро. Несмотря на обилие поисковых систем в Интернете, современные технологии не предоставляют достаточно средств для организации эффективного поиска. Поэтому результат поиска по-прежнему больше зависит от уровня подготовленности самого пользователя, нежели от поисковой системы, что достаточно ярко иллюстрируют исследования (табл. 1) [1].

Из результатов исследования видно, что пользователи поисковых систем Интернета и открытых библиотечных ресурсов гораздо менее точно формулируют свои информационные потребности (используют 1–2 коротких запроса) и практически не используют возможностей языка запроса поисковой системы. Это можно объяснить недостаточно высокой подготовкой и опытом пользователей, в отличие от пользователей, работающих с традиционными поисковыми системами. Можно предположить, что релевантность поиска неопытными пользователями в сети Интернет будет невысокой, так как невысокими будут полнота и точность поиска. Однако для пользователей библиотечных ресурсов это не вполне верно, так как им для поиска доступны и специальные поля, такие как автор, название, ключевые слова. Что в результате может привести к достаточно высокой релевантности даже с использованием



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





коротких запросов и без использования расширенных возможностей поиска. Проблема улучшения качества работы поисковых систем тесно связана с фундаментальными задачами обработки естественного языка, которыми занимается компьютерная лингвистика. Так, например, хорошо известно, что неполнота поиска тесно связана с обработкой синонимии в различных ее аспектах, включая не только лексическую синонимию (*помидор — томат*), но и синонимические перифразы (*обучение — образовательный процесс*), аббревиатуры (*высшее учебное заведение — вуз*), использование терминов с расширительным толкованием (*гипоним — гипероним: студент — учащийся*). Другая актуальная проблема улучшения качества поисковых систем, проблема информационного шума, тесно связана с такими явлениями языка, как омонимия и полисемия<sup>1</sup>. Полисемия обычно трактуется как разновидность более широкого явления, многозначности в языке, на лексическом уровне. Проблеме лексической многозначности посвящено сравнительно много исследований в области компьютерной лингвистики. Наиболее полный обзор подходов и алгоритмов, сопровождаемый историческим экскурсом, представлен в работе [2]. В работе [3] приведена альтернативная классификация методов разрешения многозначности, основанная на видах используемой информации. В работе [4] представлен концептуальный проект информационной поисковой системы, построенный на систематических принципах разрешения многозначности, переформулирования запросов с целью расширения результатов поиска или снижения информационного шума. Традиционно разрешение лексической многозначности проводится на этапе индексирования текста, когда составляется индекс, содержащий ссылки не только на слово, но и его значение. Система значений в этом случае представляется в виде специализированной семантической сети по типу лексических онтологий [6,7]. В работе [5] впервые был поставлен вопрос систематизации на научной основе интерактивных методов переформулирования запросов в интерфейсном модуле поисковой системы. В настоящей работе представлена логико-математическая интерпретация базовых операций по фокусировке запросов, их расширению и переформулированию с целью улучшения поиска. Инженерная реализация методов выполнена в нотации языка *SQL*.

#### Сравнение типичных поисковых сессий в разных категориях

Характеристика	Поиск в Интернете	Традиционная ИПС	Библиотечные ресурсы
Длина сессии (число запросов пользователей в поисковой системе)	1–2	7–16	2–5
Длина запроса (число слов в запросе)	2	6–9	1–2
Число релевантных документов, просмотренных за сессию	не более 10	около 10	менее 50
Использование расширенных возможностей (с использованием дополнительных опций языка запросов)	9 %	9 %	8 %
Использование логических операций (число запросов с использованием логических операций)	8 %	37 %	1 %
Частота отказов (частота неправильно сформулированных запросов)	10 %	17 %	7–19 %

## 1. ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Опишем исходные множества<sup>2</sup>.

- множество документов  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ ,
- множество лексем  $L = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ ,
- множество значений  $I = \{i_{11}, i_{12}, \dots, i_{m1}, i_{mk}\}$ ,
- поисковый запрос  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_v\} \subset L$ ,  $z_j$  — ключевая лексема.

Введем определения для исходных отношений:

- пословный индекс  $R_1(D, L) : (l_j, d_f) \in R_1(D, L) \leftrightarrow$  лексема  $l_j$  содержится в документе  $d_f$ ,
- толковый словарь  $R_2(I, L) : (i_{jk}, l_j) \in R_2(I, L) \leftrightarrow$  значение  $i_{jk}$  относится к лексеме  $l_j$ ,

<sup>1</sup>Омонимия — одинаковое написание различных морфологических форм одного и того же или различных слов (*стали (глагол) — стали (существительное)*). Полисемия — наличие нескольких значений одного и того же слова: (*реву́н — обезьяна и маяк*).

<sup>2</sup>Лексема — слово в словаре. Значение — смысловое содержание слова. Для многозначных слов одной лексеме соответствует несколько значений.



- индекс по значениям  $R_3(D, I) : (d_f, l_j) \in R_3(D, I) \leftrightarrow$  лексема  $l_j$  содержится в документе  $d_f$  в значении  $i_{jk}$ .

«И-запрос» представляет собой поиск пересекающихся множеств документов по двум и более ключевым словам. При этом выполняются шаги 1–4.

Шаг 1. Строится сечение  $R(z_1) = \{z_{1z}\} \subset I$  на отношении  $R_2(I, L)$ .

Шаг 2. Строится сечение каждого элемента  $R(z_1)$  — множества  $R(z_{1z}) = \{d_{zd}\} \subset D$  на отношении  $R_3(D, I)$ .

Шаг 3. Создается множество  $M\{m_d\} : m_d = R(z_{1z}) \cap \bigcap_{u=2}^v R(z_u) \subset D$ , где  $R(z_u) \subset D$  — сечение отношения  $R_1(D, L)$  по  $z_u$ .

Шаг 4. Осуществляется выбор пользователем одного из элементов множества  $M$ , обозначенного далее  $M_p \subset D$ , где  $p$  — номер значения из подмножества  $I^{z^1} = \{i_1, \dots, i_p, \dots, i_r\}, I^{z^1} \subset I$ .

Ниже приводятся соотношения, которые активируют сценарии

- фокусировки запроса

$$|M_p| > 10, \quad (1)$$

- расширения полноты поиска

$$|M_p| < 10. \quad (2)$$

При выполнении И-запроса разрешение многозначности выполняется для ядерной лексемы. Будем для простоты полагать, что ядерной лексемой является первое ключевое слово в запросе  $z_1$ . Сечение  $R(z_1)$  представляет собой выборку — множество значений для ключевого слова  $z_1$ . Сечение  $R(z_{1z})$  представляет собой выборку — множество документов в БД, которые включают ключевое слово  $z_1$ . Множество  $M$  описывает результаты обработки запроса поисковой системой с условием вхождения слова  $z_1$  при одновременном вхождении остальных слов из  $Z$ , сгруппированные по значениям  $1 \dots r$  слова  $z_1$ .  $M_p$  — подмножество документов  $M$ , включающих лексему  $z_1$  в значении  $p$ . В зависимости от мощности этого множества выполняются два сценария: фокусировки, т.е. сужения полноты поиска (при условии (1)) и расширения полноты (при условии (2)).

Фокусировка представляет собой операцию по формированию подмножества  $M$  путем использования следующих ассоциативных и семантических связей:

- между словом и другими терминами из данной предметной области (тематический кластер) (*сталь* → {*домна, прокат*});

- между словом и его словосочетаниями (*интеллект* → *искусственный интеллект*);

- между словом и потенциальными вопросами, на которые может ответить данный текст (*МИСиС* → *Как поступить в МИСиС?*);

- между словом и областью деятельности, сферой интересов, которую разработчики ИПМ назвали коммуникативным кластером (*ЕГЭ* → *обучение в вузе*).

Операция фокусировки может быть сформулирована следующим образом.

Множества:

- множество тематических кластеров  $K = \{k_k\}$ ,
- множество словосочетаний  $E = \{e_p\}$ ,
- множество вопросов  $Q = \{q_q\}$ ,
- множество коммуникативных кластеров  $C = \{c_c\}$ .

Отношения:

- индекс по тематическим кластерам  $R_K(K, D)$  — кластер  $k_k$  содержится в документе  $d_i$ ,
- индекс по словосочетаниям  $R_E(E, D)$  — словосочетание  $e_p$  содержится в документе  $d_i$ ,
- индекс по вопросам — вопрос  $q_j$  относится к документу  $d_i$ ,
- индекс по коммуникативным кластерам  $R_C(C, D)$  — кластер  $c_r$  (или его часть) содержится в документе  $d_i$ ,
- онтологическая связь  $R_O(I, I)$  — значение  $i_{j1, l1}$  состоит в онтологической связи со значением  $i_{j2, l2}$ .

Расширение полноты поиска как операция переформулирования запроса (переход от  $M_1$  к  $M_2$ ) используется в том случае, если на запрос пользователя интеллектуальная поисковая система выдала незначительное количество документов ( $|M| < 10$ ). К основным механизмам расширения полноты поиска относятся:

- переход от слова к словообразовательной парадигме (*борт* → *бортпроводник*);
- переход от слова к синонимическому ряду (*бегемот* → *гиппопотам*);





– переход от аббревиатуры к ее расшифровке, и наоборот (МИСиС → Московский институт стали и сплавов)

Кроме того, существуют еще возможности переформулирования запросов по элементам онтологического дерева (Пример: самолет → когипонимы = виды транспорта: поезд, метро, трамвай, троллейбус, автобус).

Операция расширения может быть сформулирована следующим образом.

Отношения:

- словообразовательная парадигма  $R_W(L, I)$  — лексема  $l_j$  является морфологическим дериватом другой лексемы со значением  $i_{j1}$ ,
- синонимический ряд  $R_S(L, L)$  — лексема  $l_i$  является синонимом лексемы  $l_j$ ,
- аббревиатура  $R_A(L, E)$  — лексема  $l_j$  является аббревиатурой словосочетания  $e_e$ ,
- онтологическая связь  $R_O(I, I)$  — значение  $i_{j1,k1}$  состоит в онтологической связи со значением  $i_{j2,k2}$ .

Расширение в общем виде  $R(x_x) : (x_x, y_y) \in R(X, Y), R(x_x) \subset Y, R(x_x) \cup R(z_1)$ .

Далее представлена задача интерактивного поиска как задача принятия решения. Под pertinентностью документа мы понимаем субъективную оценку пользователем этого документа с точки зрения удовлетворения его информационной потребности.

Найти такой поисковый запрос  $S^*$ , который обеспечит выполнение следующих критериев:

$$\max_{s \in S} P(s), \quad \max_{s \in S} (-|M(s)|), \quad S = \{s : S \in \Omega, P(s) > 0, M(s) > 0\},$$

$P(s)$  — суммарная pertinентность множества найденных документов,  $M(s)$  — множество результатов (найденных документов),  $S$  — множество результативных запросов,  $\Omega$  — множество всех запросов.

Нечеткие лингвистические переменные — критерии

$$\langle \text{ПЕРТИНЕНТНОСТЬ}, T(L), [0, 1], G, H \rangle,$$

где  $T(L) = \{\text{неpertinentно, среднеpertinentно, pertinentно}\}$  — терм-множество;  $G$  — процедура образования новых термов с помощью связей и модификаторов типа «очень», «слегка», «совсем», «не» и др. Например: «малопertinentно»;  $H$  — процедура задания на множестве  $[0, 1]$  нечетких подмножеств, выполняемая пользователем в процессе работы с поисковой системой.

$$\langle \text{ЧИСЛО РЕЗУЛЬТАТОВ}, T(L), [0, |D|], G, H \rangle,$$

где  $T(L) = \{\text{мало, много}\}$  — терм-множество;  $G$  — процедура образования новых термов с помощью связей и модификаторов типа «очень», «слегка», «совсем», «не» и др. Например: «слишком много»;  $|D|$  — мощность множества всех документов;  $H$  — процедура задания на множестве нечетких подмножеств, выполняемая пользователем в процессе работы с поисковой системой.

На рис. 1–2 представлены алгоритм обработки запросов и обобщенный алгоритм сценария поиска.

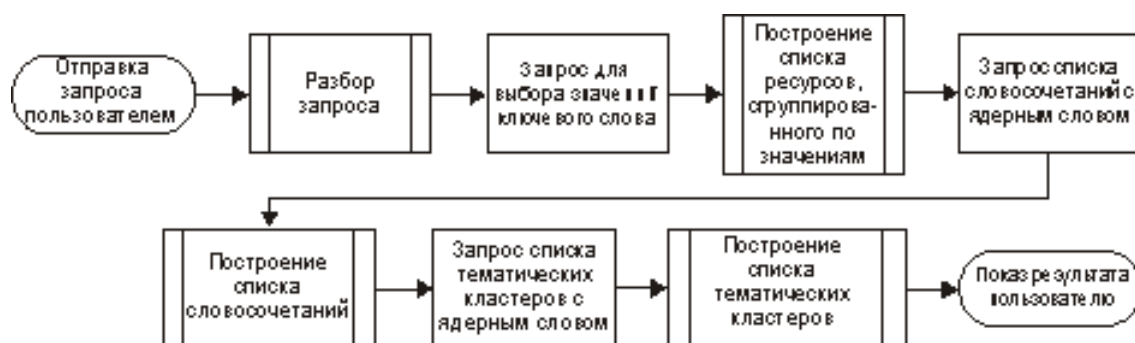


Рис. 1. Алгоритм обработки запросов в Интернете

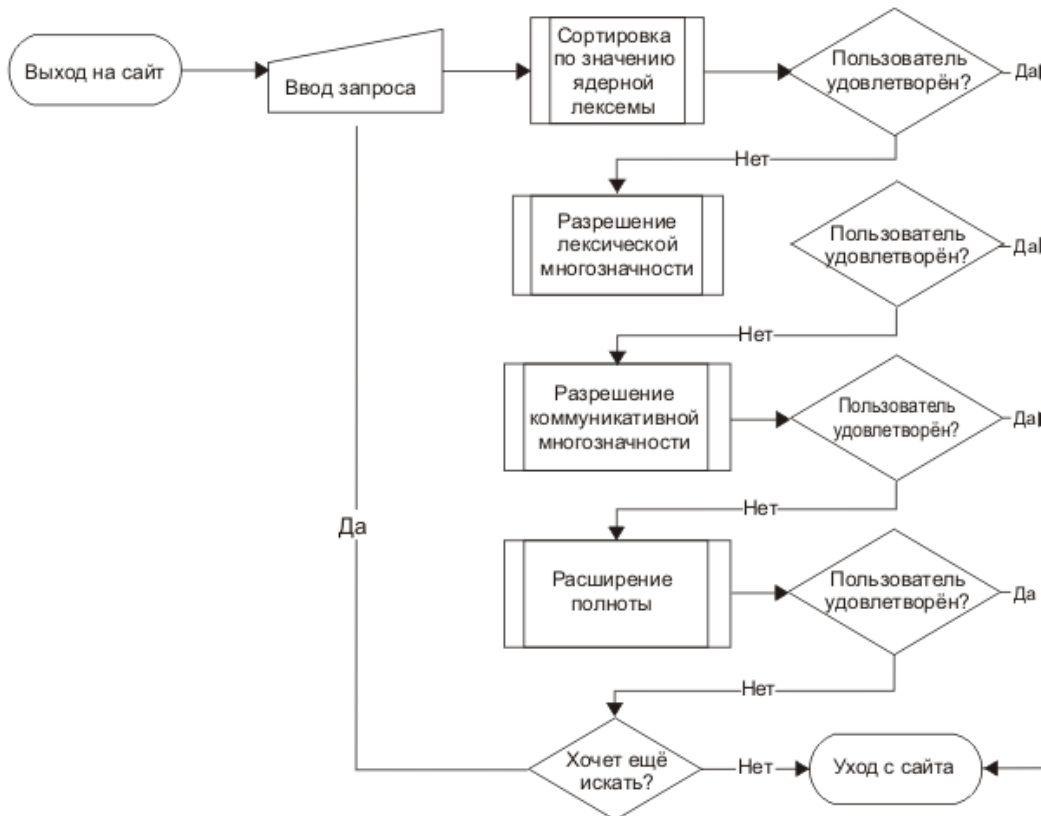


Рис. 2. Обобщенный алгоритм сценария поиска в Интернете

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлено теоретико-множественное описание основных интерактивных механизмов обработки запросов в рамках проекта «Интеллектуальная поисковая машина»: фокусировка, расширение полноты. Новизна подхода заключается в том, что впервые рассматривается систематизация интерактивных методов разрешения многозначности в человеко-машинном комплексе «пользователь – поисковая система». Инженерная реализация методов выполнена в нотации языка *SQL*. Результаты исследований найдут применение в поисковых модулях систем документооборота предприятия, в библиотечных системах, в сети Интернет.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 05-07-90339).*

## Библиографический список

1. Jansen B.J., Pooch U. Web user studies: A review and framework for future work // J. of the Amer. Society of Information Science and Technology. 2000. V. 52(3). P. 235–246.
2. Ide N., Veronis J. Word Sense Disambiguation: The State of the Art. // Computational Linguistics. 1998. V. 24, № 1. P. 1–40.
3. Поляков В.Н. Использование технологий, ориентированных на лексическое значение, в задачах поиска и классификации // Проблемы прикладной лингвистики. Вып.2. Сборник статей /Отв. ред. Н.В. Васильева. М.: Азбуковник, 2004. С. 101–117
4. Поляков В.Н. Интеллектуальная поисковая машина. Концептуальный проект // Труды Казан. шк. по комп. и когнитивной лингвистике. Казань: Сэлэт, 2000. № 5.
5. Бодров Д.А., Поляков В.Н., Точин А.В. Интерактивные методы фокусировки и расширения поиска в интеллектуальной поисковой машине. М., 2002.
6. Miller G.A. WordNet: a lexical database for English // Communications of the ACM 38. 1995. № 11. <http://www.acm.org/pubs/articles/journals/cacm/1995-38-11/p39-miller/p39-miller.pdf>.
7. Поляков В.Н. Проект WordNet и его влияние на технологии компьютерной и когнитивной лингвистики. М., 2003.
8. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика/ Пер. с фр.; Под ред. А.Н.Колмогорова. М.: Мир, 1966. 273 с.

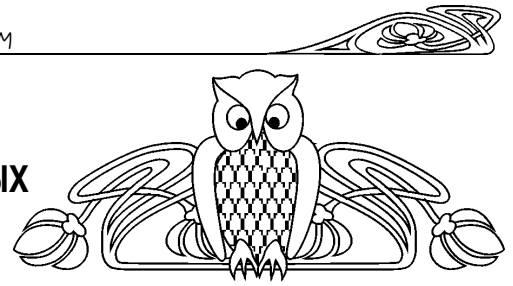
УДК 004(063)

## МОДЕЛЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОДУКЦИОННЫХ БАЗ ЗНАНИЙ НА ЭВМ

А.С. Иванов

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической кибернетики и компьютерных наук  
E-mail: ac\_ivanov@mail.ru

Предлагается модель представления продукционных баз знаний на ЭВМ в виде мультиграфа специального вида. Для этой модели разработан алгоритм проведения логического вывода. Приводятся экспериментальные данные временных затрат, подтверждающие эффективность предложенного алгоритма.



One Model for Representation of Production Knowledge Base

A.S. Ivanov

We offer a new approach to structure of production knowledge bases. In our approach the knowledge base is modeled by multigraph. We offer a deduction algorithm for such a model. The experimental results show the effectiveness of proposed methods.

В экспертных системах (ЭС) одной из основных моделей представления знаний является продукционная модель. Достоинства продукций отмечались многими авторами, такими как Д.А. Поспелов [1], Э.В. Попов [2], А. Newell [3] и др. Близость продукций к логическим импликациям позволяет легко реализовать логический вывод. Кроме того, продукционные эвристики близки стилю мышления человека-эксперта, знания которого хранятся в базе знаний (БЗ). Тем не менее при работе с продукционными БЗ приходится сталкиваться с синтаксическими и семантическими проблемами. Проверка реальной базы знаний, хранящей сотни и тысячи правил, на правильность заполнения, на полноту и непротиворечивость, структуризация базы, оценка времени, затрачиваемого на проведение логического вывода, представляет собой ряд непростых задач.

Продукционные правила имеют вид **ЕСЛИ — ТО**. В части «**ЕСЛИ**» описывается условие применимости правила, в части «**ТО**» — заключение, которое делается в случае применения правила.

Продукционная БЗ представляет собой набор продукционных правил, содержащий необходимые для проведения логического вывода знания. Обычно известные данные представляются в виде «объект – атрибут – значение». Под объектом понимается некоторый объект предметной области, под атрибутом — некоторая его характеристика. В дальнейшем в статье объект БЗ интерпретируется как «объект – атрибут» предметной области. Кроме того, каждый объект в БЗ снабжается списком разрешенных значений.

Логический вывод (ЛВ) представляет собой поиск ответа на вопрос пользователя, заданный экспертной системе. Этот ответ будет отыскиваться ЭС на основе анализа знаний, накопленных в БЗ к этому моменту. Ответ является одним из элементов списка разрешенных значений. Если используемая БЗ не дает возможности найти ответ на заданный вопрос, то информация об этом должна быть сообщена пользователю. Таким образом, результатом ЛВ всегда является либо конкретное значение из списка разрешенных значений, либо сообщение о невозможности получить ответ. Последнее формально можно рассматривать как некоторое специфическое значение (например, «неизвестно») и добавить его в список разрешенных значений. Присвоение объекту некоторого значения из расширенного списка разрешенных значений назовем *установлением значения*.

Логический вывод, реализуемый экспертной системой, проводится следующим образом. Вначале у пользователя запрашивается имя объекта, для которого ему необходимо установить значение, а также известные пользователю знания о предметной области, в дополнение к тем, что заложены в БЗ. Затем ЭС из знаний, хранящихся в БЗ, используя полученные от пользователя дополнительные сведения, выводит новые знания. Далее, используя предыдущие и вновь полученные знания, ЭС получает новые знания. Этот процесс продолжается аналогичным образом до тех пор, пока ЭС не сможет ответить на вопрос пользователя, т.е. присвоить объекту какое-либо из разрешенных значений или значение «неизвестно». Сеанс работы ЭС называется консультацией.

Отметим, что реальные базы знаний могут насчитывать сотни правил. Они хранятся в базе в хаотичном порядке, т.е. для нахождения нужного правила приходится просматривать всю БЗ, что снижает скорость работы продукционных экспертных систем. Очевидно, что если бы можно было упорядочить правила в БЗ таким образом, чтобы при установлении нового факта пришлось бы просматривать не всю базу знаний, а только часть ее, то время проведения ЛВ сократилось бы.



Ниже предлагается способ представления продукционной БЗ в виде мультиграфа специального вида, который позволит повысить эффективность работы ЭС.

Модель продукционной БЗ предлагается представить в виде конечного мультиграфа  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество вершин, а  $E$  — множество дуг. Множество  $V$  является объединением двух непересекающихся множеств: множества  $O$  вершин-объектов и множества  $B$  вершин-ветвлений. Таким образом,  $V = O \cup B$ . Каждая вершина-объект  $o_i$  соответствует конкретному объекту предметной области, для которой создана используемая БЗ.

Остановимся подробнее на том, каким образом продукционная БЗ будет представлена мультиграфом  $G$ . Пусть объект  $o_1$  имеет разрешенные значения  $o_{1,1}, o_{1,2}, \dots, o_{1,n_1}$ ,  $o_2 — o_{2,1}, o_{2,2}, o_{2,n_2}$ , и так далее. В дальнейшем множество разрешенных значений для  $o_k$  будем обозначать через  $leg(o_k)$ .

Пусть продукция  $P$  имеет вид

$$\begin{array}{ll}
 \text{ЕСЛИ} & o_1 = l_{1,i_1} & \text{И} \\
 & o_2 = l_{2,i_2} & \text{И} \\
 & \dots & \\
 & o_k = l_{k,i_k} & \text{ИЛИ} \\
 & o'_1 = l'_{1,j_1} & \text{И} \\
 & \dots & \\
 & o'_m = l'_{m,i_m} & \text{ИЛИ} \\
 & \dots & \\
 \text{ТО} & o_t = l_{t,i_t} & .
 \end{array}$$

Из структуры продукции видно, что она является объединением нескольких **ИЛИ**-компонент, каждая из которых представлена набором пар  $(o_t, l_{t,i_t})$ , соединенных логической связкой **И**. Каждый набор пар, составляющий **ИЛИ**-компоненту, далее интерпретируется как вершина-ветвление  $b$ . Множество всех вершин-ветвлений и есть упомянутое выше множество  $B$ .

Опишем теперь тип вершин мультиграфа  $G$ , составляющих множество  $O$ . Вершина-объект  $o_k \in O$  является иерархической. Сама она считается вершиной нулевого уровня. В ее состав входит конечное число вершин 1-го уровня  $l_{k,1}, l_{k,2}, \dots, l_{k,n_k}$ , взаимно однозначно соответствующих возможным значениям объекта  $o_k$ .

Приведенной выше продукции  $P$  в мультиграфе  $G = (V, E)$  будет соответствовать подграф, конструируемый следующим образом.

Вначале среди вершин множества  $O$  выбирается вершина  $o_r$ , которая фигурирует в части «**ТО**» продукции  $P$ . Из вершины 1-го уровня этой вершины-объекта  $l_{r,i_r}$  проводятся дуги во все вершины-ветвления, порожденные продукцией  $P$ .

Пусть  $b = \{(o_1 = l_{1,i_1}), \dots, (o_k = l_{k,i_k})\}$  является одной из упомянутых вершин-ветвлений. Для каждой пары  $(o_j = l_{j,i_j})$ , где  $j = 1, \dots, k$ , из этой вершины проводится дуга в вершину 1-го уровня  $l_{j,i_j}$  вершины-объекта  $o_j$ . Если в объекте  $o_j$  значение  $l_{j,i_j}$  отсутствует, то это свидетельствует об ошибке в описании продукции  $P$ . Аналогичные построения проводятся для всех остальных вершин-ветвлений.

Для рассматриваемой в качестве примера продукции  $P$  соответствующий ей подграф мультиграфа  $G = (V, E)$  изображен на рис. 1.

Модель БЗ в целом представляет собой объединение всех подграфов описанного вида, каждый из которых соответствует некоторой продукции, входящей в состав БЗ.

Как видно из изложенного, в построенном подграфе имеется два типа дуг. К первому типу относятся дуги, ведущие из вершины-объекта в вершину-ветвление, ко второму — дуги, ведущие из вершины-ветвления в вершину-объект. Условимся дуги первого типа обозначать в виде  $((o_k, l_{k,i_k}), b_m)$ , где  $o_k$  — вершина-объект,  $l_{k,i_k}$  конкретное значение из множества  $leg(o_k)$ ,  $b_m$  — вершина-ветвление, являющаяся одним из **ИЛИ**-компонент в продукции  $P$ . Отметим, что начало этой дуги однозначно определяется  $(o_k, l_{k,i_k})$ . Далее, дуги второго типа условимся обозначать  $(b_m, (o_k, l_{k,i_k}))$ , где  $b_m$  — вершина-ветвление, из которой исходит дуга,  $o_k$  — вершина-объект и входящая в ее состав вершина 1-го уровня  $l_{k,i_k}$ , в которую дуга заходит. При этом должно удовлетворяться следующее условие: среди всех пар, составляющих вершину-ветвление  $b_m$ , есть пара  $(o_k, l_{k,i_k})$ .

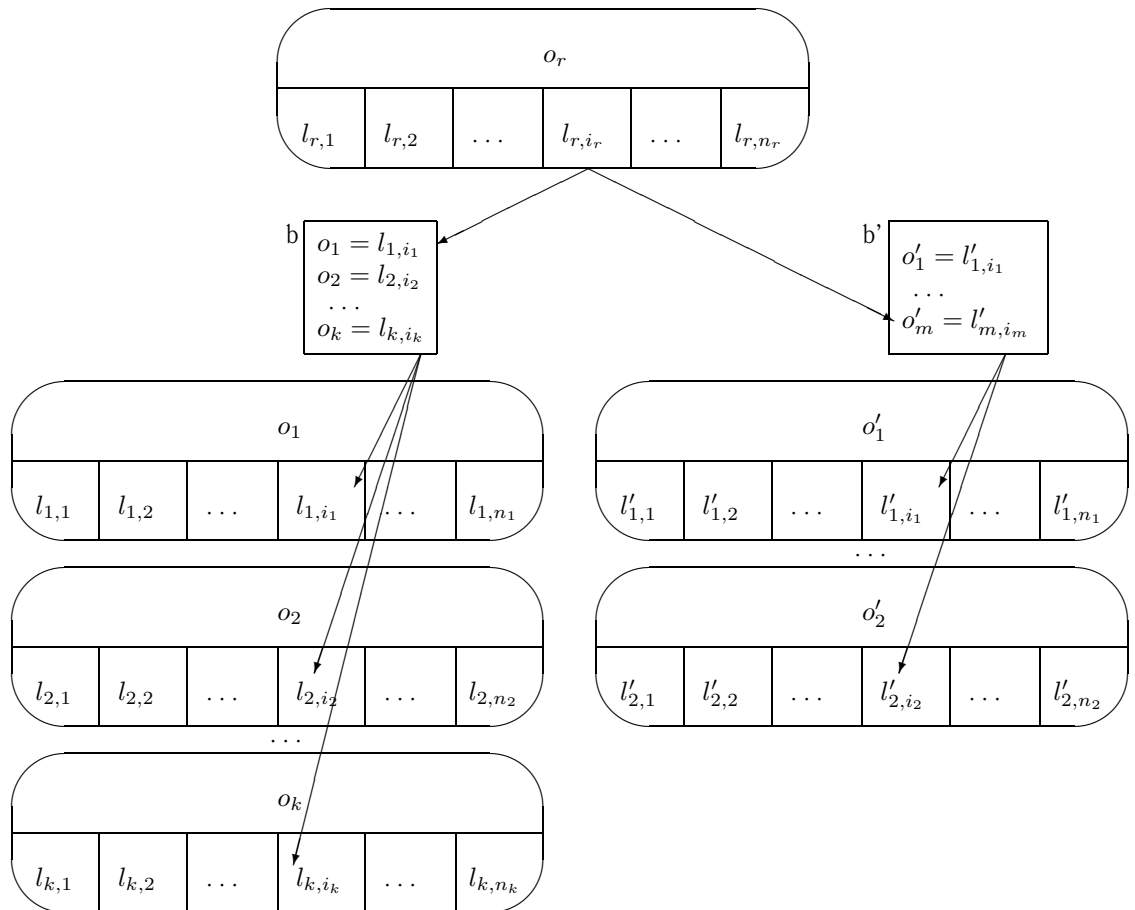


Рис.1. Представление продукции в виде графа

Введем следующие определения.

Вершину-объект  $o$  назовем невыводимой, если из нее не исходит дуг первого типа. Все остальные вершины-объекты будем считать выводимыми.

Каждой вершине  $o_k$  поставим в соответствие множество  $VL(o_k) \in leg(o_k)$ , которое формируется в процессе проведения ЛВ и представляет собой множество установленных значений объекта  $o_k$ .

Отметим, что для выводимых вершин имеет место следующее утверждение:

$$(l_{k,i_k} \in VL(o_k)) \iff \exists ((o_k, l_{k,i_k}), b_j) \forall (b_j, (o_p, l_{p,i_p})) (l_{p,i_p} \in VL(o_p)).$$

Условимся, что для невыводимой вершины  $o$  множество ее значений  $VL(o)$  должно быть запрошено у пользователя до начала ЛВ.

Для проведения логического вывода предлагается следующий рекурсивный алгоритм.

На вход подается стартовая вершина-объект.

1. Если вершина  $o_{start}$  невыводима и  $VL(o_{start})$  пусто, запросить значение  $VL(o_{start})$  у пользователя. Перейти к шагу 2.
2. Если  $VL(o_{start})$  непустое, то вернуть его в качестве ответа и завершить работу алгоритма, в противном случае перейти к шагу 3.
3. Если вершина выводима и  $VL(o_{start})$  пусто, тогда для  $k = 1, \dots, i_{start}$  и для всех  $((o_{start}, l_{start,k}), b_j)$  необходимо проверить выполнение условия  $\forall (b_j, (o_p, l_{p,i_p})) (l_{p,i_p} \in VL(o_p))$ . Если оно выполняется, то добавить  $l_{start,k}$  в  $VL(o_{start})$ . Если в процессе проверки какое-либо множество  $VL(o_p)$  пусто, то необходимо выполнить этот алгоритм с вершиной  $o_p$  в качестве стартовой. После завершения перечисленных в этом пункте действий перейти к шагу 4.
4. Вернуть  $VL(o_{start})$  в качестве ответа и завершить работу алгоритма.

После окончания работы алгоритма множества  $VL(o)$  будут содержать в себе результаты проведенного вывода. Если для некоторой вершины-объекта  $o$  множество  $VL(o)$  пусто, то это означает, что значение для данного объекта при проведении консультации установить не удалось.



Теперь рассмотрим вопрос о представлении предложенной модели в компьютере. На рис. 2 представлены основные элементы модели и отношения между ними.

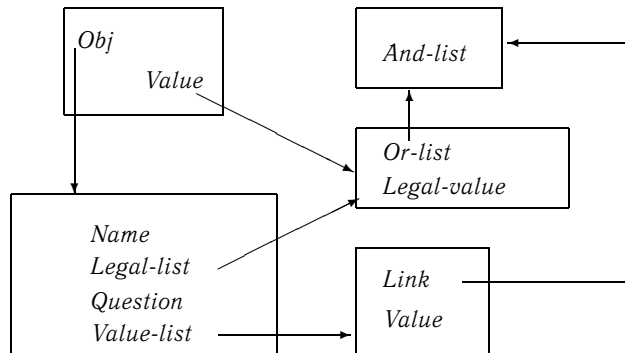


Рис. 2. Модель представления продукционной БЗ в виде списков

Множество всех объектов БЗ будем представлять в виде линейного односвязного списка *obj-list* вершин-объектов графа *G*. Каждый элемент списка взаимно однозначно соответствует вершине-объекту модели и включает в себя поля:

- *name* — название объекта;
- *question* — вопрос о значении объекта, задаваемый пользователю; — *legal-list* — ссылка на список разрешенных значений (соответствует *leg*);
- *value-list* — ссылка на список полученных в результате консультации значений (соответствует *VL*).

Перед началом консультации все списки *VL* должны быть пусты. Их заполнение будет происходить во время проведения ЛВ.

Список разрешенных значений состоит из двух составляющих:

- *legal-value* — разрешенного значения;
- *or-list* — списка ссылок на вершины-ветвления, в которые ведут дуги первого типа, начинающиеся в вершине первого уровня *legal-value* вершины-объекта *name*.

Вершина-ветвление на рис. 2 обозначена как *and-list* и представляет собой список пар вида [объект]=[значение], являющихся частью дуг второго типа, исходящих из данной вершины-ветвления. Каждая пара [объект]=[значение] из списка — это пара ссылок на соответствующую вершину-объект *obj* и соответствующее ей разрешенное значение *value*.

Очевидно, что на описанной выше модели проведение ЛВ будет осуществляться намного быстрее, чем в традиционном представлении БЗ. Причиной тому являются два обстоятельства:

1. Для установления значения объекта нет необходимости просматривать всю БЗ, поскольку каждый объект содержит ссылки на все продукции, в части «ТО» которых он фигурирует.
2. Происходит сокращение времени на проверку условий применимости продукции, поскольку это сводится всего лишь к установлению факта наличия требуемого значения в списке *value-list* нужного объекта. Заметим, что в традиционной продукционной БЗ это происходит путем сравнения каждого условия продукции с каждым значением, полученным в процессе консультации.

Теперь приведенный выше рекурсивный алгоритм логического вывода можно переформулировать следующим образом.

На входе задается имя объекта, значение которого необходимо установить.

1. Если в процессе работы этот объект уже получил какое-то значение, т.е. список *value-list* этого объекта не пуст, полученное значение (или значения, если их несколько) возвращается в качестве ответа и алгоритм завершается. В противном случае осуществляется переход к шагу 2.
2. Используя список разрешенных значений данного объекта, производится обращение к объектам, значения которых необходимы для проведения логического вывода. Далее этот алгоритм применяется к каждому из указанных объектов. Если для какого-либо разрешенного значения хотя бы для одного элемента списка *or-list* для каждой пары [объект]=[значение] списка *and-list* соответствие установлено, данное разрешенное значение считается установленным и тогда выполняется переход к шагу 3 алгоритма.



3. Полученное значение (или значения, если их несколько) возвращается в качестве ответа и одновременно присоединяются к списку *value-list*, после чего алгоритм завершается. При этом в список *value-list* заносится не только найденное значение, но и ссылка на правило, которое при этом использовалось. Заметим, что эта информация необходима для функционирования подсистемы объяснения.

Оценим временную и емкостную сложность приведенного алгоритма.

Пусть  $n$  — количество вершин-объектов графа, т.е. количество объектов в предметной области, а  $t$  — количество вершин-ветвлений, т.е. правил в БЗ. Заметим, что данный алгоритм выполняется только для тех вершин-объектов, которые еще не участвовали в логическом выводе. Из этого следует, что каждую вершину-объект алгоритм обрабатывает не более одного раза. Для вершин-объектов, чьи значения непосредственно или опосредованно не влияют на значения устанавливаемого объекта, алгоритм не выполнится ни разу. Число же операций шага 2 алгоритма будет порядка  $t$ , так как каждое правило используется не более одного раза. Все это дает общую сложность алгоритма  $O(n+t)$ .

Теперь перейдем к оценке емкостной сложности. Основу предложенной модели составляют ссылки. Каждая ссылка занимает фиксированный объем памяти. Поэтому размер модели напрямую зависит от общего числа ссылок в ней.

Произведем оценку количества ссылок, необходимых для введения нового правила. Каждая пара «[объект]=[значение]» из части «ЕСЛИ» правила требует по одной ссылке соответственно на объект и его значение и еще одну для создания списка *and-list*. Для такой же пары из части «ТО» потребуется только две ссылки. Одна — для элемента в списке *or-list*, вторая — на *and-list*. Таким образом, количество добавленных ссылок зависит только от количества пар «[объект]=[значение]» в частях «ЕСЛИ» и «ТО» правила и не зависит от количества правил в БЗ.

Легко видеть, что число ссылок во всей БЗ, если имеется  $n$  объектов,  $m$  — общее количество разрешенных значений для всех объектов,  $l$  пар в части «ЕСЛИ» и  $k$  пар в части «ТО», равно  $O(n + m + l + k)$ .

Очевидным недостатком предлагаемой модели является замедление процесса добавления новых правил в БЗ. Так, чтобы добавить новое правило в рамках данной модели необходимо для каждой пары [объект]=[значение] из частей «ЕСЛИ» и «ТО» просматривать в поисках нужного правила всю модель. Данное обстоятельство приводит к увеличению загрузки БЗ в оперативную память, но не перечеркивает преимуществ предложенной модели.

Это вытекает из следующих соображений. Широкое распространение баз данных привело к тому, что для них понадобилось проектировать не только специальное программное обеспечение, как, например СУБД, но и аппаратное обеспечение. Подобное ожидает и экспертные системы. Их дальнейшее распространение потребует разработки такого аппаратно-программного обеспечения, которое смогло бы повысить производительность этих систем по сравнению с работающими на обычных компьютерах. Это, в свою очередь, потребует разработки специальных моделей представления знаний или модификации уже имеющихся, усовершенствования механизмов логического вывода и поиска в БЗ. В этом случае поскольку необходимость добавления новых знаний в БЗ возникает значительно реже, чем реализация ЛВ, увеличение скорости проведения консультаций даст существенное увеличение общей эффективности работы ЭС, несмотря на неизбежное при этом замедление процесса пополнения и корректировки БЗ.

В таблице приведены экспериментальные данные, отражающее время, затраченное на работу рассматриваемых в статье алгоритмов. Эксперимент проводился на процессоре Pentium-166 с помощью системной функции GetTickCount.

Зависимость времени работы рассмотренных алгоритмов от размеров БЗ

Кол-во правил в базе знаний	Кол-во объектов в базе знаний	Время, затраченное на создание модели	Время проведения ЛВ на предложенной модели	Время проведения ЛВ без использования предложенной модели	Отношение времени проведения ЛВ на модели ко времени без ее использования
5621	1728	10420	17	12420	731
2805	864	3807	11	2802	255
1397	432	1560	5	613	123
693	216	685	2	135	68
341	108	165	1	33	33
165	54	70	1	9	9



Время, указанное в таблице, исчисляется в тиках процессорного времени. Для сравнения приведем три характеристики:

- время, затраченное на конвертирование базы знаний из текстового файла в предложенную модель;
- время, затраченное на проведение ЛВ на предложенной модели;
- время, затраченное на проведение ЛВ без использования предложенной модели.

Поскольку время может колебаться в зависимости от вводимых значений, алгоритм выполнялся многократно при различных входных данных. В таблице приводится среднее время. В последнем столбце приведено отношение времени проведения ЛВ на предложенной модели ко времени такого же ЛВ, но без ее использования.

На рис. 3–5 приведены графики зависимости времени, затраченного на выполнение трех описанных выше алгоритмов, от количества правил в БЗ, где на горизонтальной оси откладывается количество продукционных правил в БЗ, на вертикальной — время, затраченное на выполнение соответствующего алгоритма.

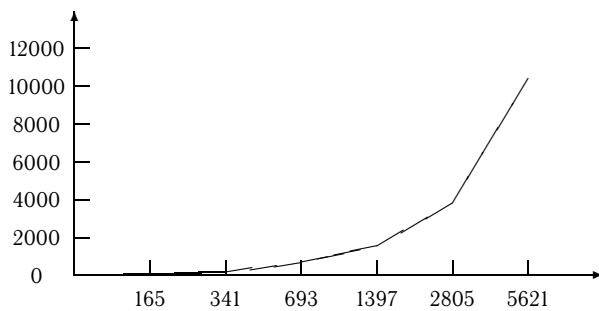


Рис. 3. Зависимость времени, затраченного на представление БЗ в виде предложенной модели от количества правил в БЗ

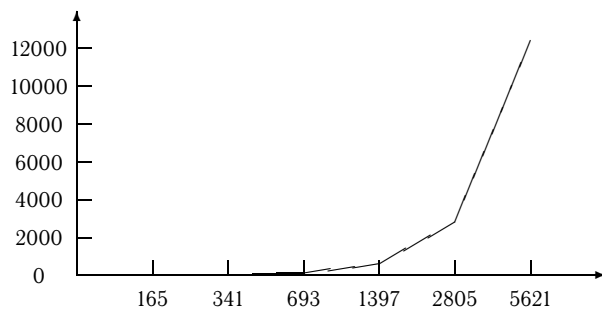


Рис. 4. Зависимость времени, затраченного на проведение одного сеанса ЛВ без предложенной модели от количества правил в БЗ

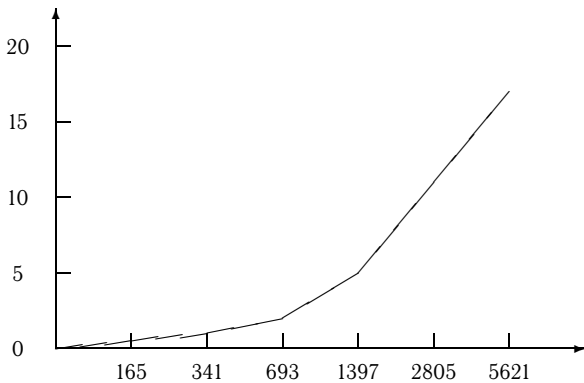


Рис. 5. Зависимость времени, затраченного на проведение одного сеанса ЛВ на предложенной модели от количества правил в БЗ

Таким образом, приведенные экспериментальные данные показывают, что время, затрачиваемое на построение модели, имеет тот же порядок, что и время, необходимое для проведения логического вывода без использования предложенной модели. Эти данные также наглядно демонстрируют, что время проведения ЛВ на предложенной модели значительно ниже, чем без ее использования. Отсюда вытекает, что применение такой модели представления продукционной БЗ на ЭВМ позволит существенно повысить эффективность логического вывода.

### Библиографический список

1. Поспелов Д.А. Продукционные модели // Искусственный интеллект. М.: Радио и связь, 1990. Кн. 2.
2. Попов Э.В. Экспертные системы. М.: Наука, 1987.
3. Newell A. Production systems: models of control structures. N.Y.: Acadmik press, 1973.





## ХРОНИКА

### ПЕТР ЛАВРЕНТЬЕВИЧ УЛЬЯНОВ

С.И. Дудов\*, А.М. Захаров\*\*, Д.В. Прохоров\*\*, А.П. Хромов\*\*\*

Саратовский государственный университет,

\*кафедра математической экономики,

\*\*кафедра математического анализа,

\*\*\*кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Статья посвящена памяти Петра Лаврентьевича Ульянова — выдающегося математика, действительного члена Российской академии наук, заведующего кафедрой теории функций и функционального анализа Московского государственного университета. В ней приводятся биографические данные и основные научные достижения П.Л. Ульянова.

**Petr Lavrentievich Uliyanov**

**S.I. Dudov, A.M. Zakharov, D.V. Prokhorov, A.P. Khromov**

The paper is dedicated to the memory of prof. P. L. Ulyanov, a remarkable mathematician, a full member of Russian Academy of Sciences, a head of the function theory and functional analysis department of Moscow State University. The paper tells about prof. P.L. Ulyanov biography and his major scientific achievements.

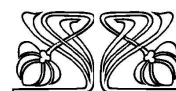
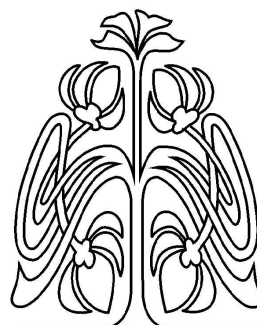


13 ноября 2006 года перестало биться сердце Петра Лаврентьевича Ульянова — выдающегося математика, действительного члена Российской академии наук, заведующего кафедрой теории функций и функционального анализа Московского государственного университета, а также нашего земляка, имя которого вошло в энциклопедию Саратовского края.

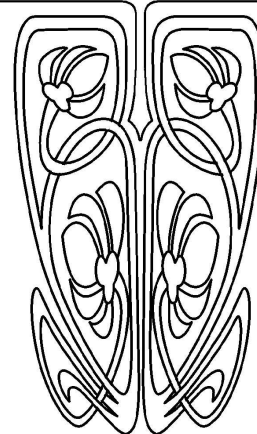
П.Л. Ульянов родился 3 мая 1928 года в селе Слепцовка Аткарского уезда Саратовской области в семье крестьянина.

Когда он заканчивал среднюю школу, то узнал об открытии механико-математического факультета в Саратовском университете и решил пойти туда учиться. Его учителями в университете были профессора Г.П. Боев, С.Г. Лехницкий, Н.Г. Чудаков, доценты Ю.Е. Пензов, Г.Н. Положий и другие. На третьем курсе он писал курсовую работу под руководством Г.П. Боева по аналитической теории дифференциальных уравнений, а на четвертом курсе — под руководством Г.Н. Положего о продолжении аналитических функций. В 1949 году Г.Н. Положий уехал в Киевский университет, и Петр Лаврентьевич стал писать дипломную работу у Н.П. Купцова, который только что приехал в Саратов после окончания аспирантуры в МГУ у профессора Д.Е. Меньшова. В дипломной работе Петр Лаврентьевич дал новое доказательство теоремы Каратеодори о соответствии границ при конформном отображении.

Все годы учебы в университете П.Л. Ульянов получал на экзамене только отличные оценки, занимался научной работой, с третьего курса был сталинским стипендиатом. Прекрасную учебу он сочетал с активной работой (был секретарем комсомольской организации факультета) и занятиями спортом: он закончил трехгодичную



## ХРОНИКА





спортивную школу при обществе «Наука» и довольно часто выступал в соревнованиях по лыжным гонкам, завоевывая первые места. До конца жизни лыжные прогулки по лесу были для него лучшим зимним отдыхом. После окончания Саратовского университета П.Л. Ульянов был рекомендован в аспирантуру СГУ, но по совету одного аспиранта решил попытаться сдать экзамены в аспирантуру МГУ, куда и был принят. Его научным руководителем была профессор Н.К. Бари. В 1953 году П.Л. Ульянов досрочно защитил кандидатскую диссертацию «Применение  $A$ -интеграла к тригонометрическим рядам и некоторые теоремы о сходимости рядов Фурье», признанную ученым советом выдающейся. После окончания аспирантуры встал вопрос: где работать? Можно было вернуться в Саратовский университет, но возникли проблемы с жильем. Единственное, на что можно было рассчитывать — это комната в общежитии на Цыганской улице. Поэтому Петр Лаврентьевич согласился на предложение остаться работать в Московском университете, где ему дали комнату в коммунальной квартире в новом доме. И с этого времени вся его жизнь связана с кафедрой теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ. С 1953 года он работал на этой кафедре сначала ассистентом, потом доцентом и профессором, а с 1979 года — заведующим кафедрой. Одновременно по совместительству он работал в отделе теории функций Математического института им. В.А. Стеклова.

В 1960 году П.Л. Ульянов защитил докторскую диссертацию на тему «Интеграл типа Коши. Сходимость и суммируемость». Диссертация, так же как и кандидатская, была признана ученым советом выдающейся.

Основные направления научной деятельности П.Л. Ульянова посвящены теории интеграла и его применениям в вещественном и комплексном анализе, теории тригонометрических и ортогональных рядов, вопросам суммирования рядов и последовательностей по системе Хаара, теоремам вложения, теории приближения функций, вопросам представления и изучения пространств функций  $\varphi(L)$ , алгебрам функций.

Сформулируем некоторые наиболее значимые утверждения П.Л. Ульянова, полученные им в теории функций.

### 1. $A$ -ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

Функция  $f(t)$  называется  $A$ -интегрируемой на отрезке  $[a, b]$ , если мера  $\mu(\{t : |f(t)| \geq n\}) = o(\frac{1}{n})$  при  $n \rightarrow \infty$  и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t)]_n dt = J,$$

где  $[f(t)]_n = f(t)$  при  $|f(t)| \leq n$  и  $[f(t)]_n = 0$  при  $|f(t)| > n$ . В этом случае полагают

$$J = (A) \int_a^b f(t) dt.$$

Данное определение было введено в теории вероятностей А.Н. Колмогоровым и в теории функций Титчмаршем.

Аналогичное определение вводится и для  $A$ -интеграла по кривым от функций комплексного переменного.

Справедливы утверждения:

1) Для достаточно гладких замкнутых жордановых контуров  $\ell = \{z : z = z(s)\}$  (например,  $z'(s) \in \text{Lip } \alpha$  с некоторым  $\alpha > 0$ ) всякий интеграл типа Коши – Лебега является  $A$ -интегралом Коши от предельных значений (результат нов и для случая окружности  $\{|\xi| = 1\}$ ). Более точно, пусть  $G$  — конечная область, ограниченная кривой  $\ell$ , и суммируемая функция  $f(\xi) \in L(\ell)$ . Тогда интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} (L) \int_{\ell} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} (A) \int_{\ell} \frac{F_i(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

для  $z \in G$ , где  $F_i(\xi)$  — угловые предельные значения  $F(z)$  при  $z \rightarrow \xi \in \ell$  с  $z \in G$ . Функция  $F_i(\xi)$  может оказаться неинтегрируемой на  $\ell$  ни в смысле Лебега, ни в смысле Данжуа.

2) Из утверждения 1) вытекает, что если функция  $F_i(\xi)$  интегрируема по Лебегу на  $\ell$ , то интеграл типа Коши – Лебега от  $f$  превращается в интеграл Коши – Лебега от  $F_i(\xi)$  на  $\ell$ . Для случая единичной окружности этот результат был получен В.И. Смирновым.



3) Если  $a_n \downarrow 0$ , то ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = f(t)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt = g(t)$  сходятся на  $(0, 2\pi)$  к  $A$ -интегрируемым функциям и являются рядами Фурье в смысле  $A$ -интегрирования от этих функций. При этом данные функции могут быть неинтегрируемы по Лебегу на  $[0, 2\pi]$ .

## 2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Базис  $\{f_n\}$  в пространстве  $L^2(a, b)$  (в частности, полная ортонормированная система (ОНС)) является *системой сходимости почти всюду*, если ряд Фурье от любой функции  $f \in L^2(a, b)$  по системе  $\{f_n\}$  сходится почти всюду на  $(a, b)$ .

1) Всякий базис  $\{f_n\}$  в пространстве  $L^2(a, b)$  после некоторой перестановки  $\{f_{\sigma(n)}\}$  не является системой сходимости почти всюду, т.е. после некоторой перестановки базис становится «плохим» для сходимости почти всюду.

Для тригонометрической системы этот результат был сформулирован А.Н. Колмогоровым в 1927 году.

Заметим, что до сих пор не решена проблема о том, можно ли *любую* ОНС переставить так, чтобы она стала системой сходимости почти всюду.

2) Существуют *полные* ОНС, которые *не имеют* точного множителя Вейля для безусловной (т.е. при всех порядках) сходимости почти всюду рядов Фурье из  $L^2$ .

3) Функция  $f \in H_p^\omega(a, b)$ , если  $\omega_p(\delta, f) \equiv \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left( \int_a^b |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = O(\omega(\delta))$ , где  $\omega = \omega(\delta)$  — заданная гладкость. Справедливо утверждение: если дано число  $p \in (1, \infty)$ , то для равномерной сходимости на отрезке  $[0, 2\pi]$  тригонометрического ряда Фурье от всякой  $2\pi$ -периодической функции  $f \in H_p^{\omega(\delta)}(0, 2\pi)$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < \infty. \quad (1)$$

4) Для любой последовательности  $\{a_n\} \notin \ell_2$  существует ортогональный ряд  $\sum_{\ell_2} a_n \varphi_n(t)$ , который всюду сходится к  $+\infty$ . Это утверждение теряет силу при  $\{a_n\} \in \ell_2$ .

## 3. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

В этом направлении были получены необходимые и достаточные условия для разных вложений.

1) Пусть даны числа  $0 < \alpha \leq 1 \leq p < \nu < \infty$ , класс  $\text{Lip}(\alpha, \nu) \equiv H_\nu^{\delta^\alpha}(0, 1)$ . Тогда для вложения  $H_p^{\omega(\delta)} \subset \text{Lip}(\alpha, \nu)$  необходимо и достаточно, чтобы  $\omega(\delta) = O(\delta^{\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{\nu}})$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Достаточность была установлена Харди и Литтлвудом в 1928 году, а необходимость — П.Л. Ульяновым в 1968 году.

2) Всякая функция  $f \in H_p^{\omega(\delta)}(0, 1)$  с  $1 \leq p < \infty$  эквивалентна непрерывной функции тогда и только тогда, когда выполнено (1).

3) Вложение  $H_p^{\omega(\delta)} \subset L^\nu(0, 1)$  с  $1 \leq p < \nu < \infty$  имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\nu}{p}-2} \omega^\nu\left(\frac{1}{n}\right) < \infty.$$

Наиболее сложным было доказательство утверждения 3). Из него можно было выводить результаты, характеризующие взаимосвязь наилучших приближений и модулей непрерывности в различных метриках.

Полученные результаты потом распространялись на функции многих переменных.

## 4. СИСТЕМА ХААРА $\{X_m\}$

1) Положительная последовательность  $\tau(m) \uparrow$  является множителем Вейля для безусловной сходимости почти всюду рядов по системе Хаара  $\{X_m\}$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\tau(m)} < \infty.$$



Для тригонометрических рядов до сих пор не получен окончательный результат в этом направлении.

2) Если  $a_m \downarrow 0$ , то ряд  $\sum a_m X_m(t)$  сходится почти всюду на  $[0, 1]$  тогда и только тогда, когда  $\{a_m\} \in \ell_2$ .

3) Для того чтобы всякая функция  $f \in H_p^{\omega(\delta)}(0, 1)$  с  $1 \leq p < \infty$  раскладывалась в ряд Фурье – Хаара абсолютно сходящийся всюду на  $[0, 1]$ , необходимо и достаточно выполнения неравенства (1).

4) Для частных сумм  $s_n(t, f)$  ряда Фурье – Хаара от функции  $f \in L^p(0, 1)$  справедлива оценка типа Джексона, т.е.

$$E_n^{(p)}(f) \leq \|f(t) - s_n(t, f)\|_p \leq 24\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right)$$

при  $n \geq 1$  и  $p \in [1, \infty)$ , где  $E_n^{(p)}(f)$  – наилучшие приближения в  $L^p$  функции  $f$  полиномами порядка  $n$  по системе Хаара.

Эта оценка для  $p = \infty$  была ранее (в 1953 г.) установлена Б.С. Надем.

5) Пусть  $A_1 = \left\{ f : \sum_{m=1}^{\infty} |(f, X_m)| < \infty \right\}$ , а функция  $\varphi(t)$  определена на прямой  $(-\infty, +\infty)$ . Тогда для того чтобы функция  $\varphi(f) \in A_1$  при всякой функции  $f \in A_1$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $\varphi \in \text{Lip } 1$ , т.е.  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq D|x - y|$  при всех  $x$  и  $y$  из  $(-\infty, +\infty)$ .

Это утверждение указывает на принципиальное различие поведения рядов Фурье – Хаара от поведения тригонометрических рядов Фурье, где от функции  $\varphi$  требовалась аналитичность на множестве  $\{f([0, 2\pi])\}$  для сохранения класса  $A_1$  (теоремы Леви и Кацнельсона).

## 5. КЛАССЫ $\varphi(L)$

$\varphi(L)$  – класс измеримых функций, определяемых следующим образом:

$$\varphi(L) = \left\{ f : \int_0^1 \varphi(f(t)) dt < \infty \right\},$$

где  $\varphi(t)$  – конечная, четная, неотрицательная и неубывающая на  $[0, \infty)$  функция, такая что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$ .

Под обобщенным  $\varphi$ -расстоянием понимается число  $\rho_{\varphi}(f, g) = \int_0^1 \varphi(f(t) - g(t)) dt$ .

П.Л. Ульянов показал, что всякую функцию  $f \in \varphi(L)$  можно приблизить по  $\varphi$ -расстоянию сколь угодно точно алгебраическими или тригонометрическими полиномами и для этого необходимо и достаточно, чтобы: а)  $\varphi(+0) = 0$  и б)  $\overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u+1)}{\varphi(u)} < \infty$ .

Если же функция  $f \in \varphi(L)$  неотрицательна, то для ее приближения необходимо и достаточно лишь выполнения условия а).

С помощью  $\varphi$ -расстояния можно сделать множество  $\varphi(L)$  топологическим пространством. Оно будет сепарабельным в том и только том случае, когда будут выполнены приведенные выше условия а) и б). Если  $\varphi(t) \in C[0, \infty)$ ,  $\varphi(0) = 0$  и  $\varphi(t) > 0$  при  $t > 0$ , то для метризуемости пространства необходимо и достаточно, чтобы  $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Исследования П.Л. Ульянова послужили стимулом для их дальнейшего развития в работах многих математиков, отечественных и зарубежных (В.А. Андриенко, С.В. Бочкарев, Р. Ганди, А. Гарсиа, Б.И. Голубов, Л.В. Жижиашвили, Б.С. Кашин, В.И. Коляда, В.Г. Кротов, Л. Лейндлер, Т.П. Лукашенко, Ф. Мориц, Е.М. Никишин, А.М. Олевский, М.К. Потапов, А.И. Рубинштейн, Э.А. Стороженко, Л.В. Тайков, А.А. Талалаян, К. Тандори, Н. Термингалиев, М.Ф. Тиман, К. Чень, З. Чисельский, Г.А. Чхаидзе и др.)

Далеко не все поставленные П.Л. Ульяновым задачи и проблемы решены и сегодня.

Научные результаты П.Л. Ульянова представлены в более чем 150 научных работах (среди них монография и более 10 обзорных статей). Среди его учеников около 50 кандидатов наук и 15 докторов.

П.Л. Ульянов являлся членом редколлегий ряда престижных математических журналов («Математический сборник», «Математические заметки», «Известия вузов. Математика», «Analysis Mathematic», «Вестник Московского университета»), был в редакции по изданию «Математической энциклопедии», около 30 лет работал в составе ВАК по присуждению ученых степеней и званий.



Огромна роль Петра Лаврентьевича Ульянова в подготовке и становлении отечественных научных математических кадров. С 1959 года он являлся одним из руководителей научного семинара по теории функций действительного переменного в Московском университете, семинара, ведущего свое начало от Н.Н. Лузина, основателя знаменитой научной школы по теории функций.

На протяжении всей своей жизни Петр Лаврентьевич поддерживал связь с саратовскими математиками: встречался с ними на съездах и конференциях, слушал и обсуждал их научные доклады на семинаре в МГУ. Этот научный контакт наладился после организации в 1981 году саратовских зимних школ по теории функций и приближений. Председателем оргкомитета сначала был академик С.М. Никольский, а позже стал П.Л. Ульянов. В Саратове главным организатором был профессор А.А. Привалов; после его кончины в 1993 году обязанности организатора взял на себя профессор А.П. Хромов. Саратовские зимние школы проводятся каждые два года, эта регулярность является мощным стимулом научной работы, и поэтому зимние школы стали настоящей кузницей научных кадров.

Многие саратовские (и не только саратовские) ученые-математики получили на этих школах путевки в научную жизнь. Организация таких школ — это реальная работа по возрождению и сохранению отечественной науки, и роль Петра Лаврентьевича в этой работе трудно переоценить. При его активном содействии школы по теории функций были организованы и в Воронеже, и в Казани.

П.Л. Ульянов был избран в 1981 году членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 2006 году, за несколько месяцев до кончины, — действительным членом РАН. Кроме этого он являлся действительным членом Международной академии наук высшей школы и заслуженным профессором МГУ.

#### **Основные научные труды П.Л. Ульянова**

Об интегралах типа Коши // Тр. мат. ин-та АН СССР. 1961. Т. 60;

Решённые и нерешённые проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов // Успехи мат. наук. 1964. Т. XIX, № 1.

Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1967. Т. 72, № 2.

Теоремы вложения и отношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 1.

Подпоследовательности сходимости рядов // Тр. мат. ин-та АН СССР. 1965. Т. 86 (в соавт.).

Влияние Андрея Николаевича Колмогорова на мою жизнь // Колмогоров в воспоминаниях. М., 1993.

Мера и интеграл. М., 1998 (в соавт.).

Действительный анализ в задачах. М., 2005 (в соавт.)

#### **Литература о П.Л. Ульянове**

Научная элита. Кто есть кто в Российской академии наук. (Справочник)// Успехи мат. наук. 1998. Т.53, № 3.