



Решением президиума ВАК Министерства образования и науки РФ от 6 июля 2007 года журнал включен в число изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

- Голованёва Ф.В.** О невырожденности одной краевой задачи четвертого порядка с производными по мере 3
- Голубь А.В., Хромов А.П.** Теорема равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с инволюцией, допускающей разрывы 5
- Дмитриев О.Ю.** Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n -го порядка с нерегулярными краевыми условиями 10
- Егоров В.В.** Восстановление отображения по матрице Якоби, нормированной однородной функцией 14
- Курдюмов В.П., Хромов А.П.** О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального оператора переменной структуры 20
- Медведева Н.М.** Исследование устойчивости экстремальных поверхностей вращения 25
- Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Ищенко А.С.** О разрешимости некоторых классов нерегулярных вариационных задач второго порядка 32
- Ткаченко А.А., Шабров С.А.** О разрешимости интегро-дифференциального уравнения с расширенным интегралом Стильтеса 36
- Фрянцев А.В.** О численной аппроксимации дифференциальных полиномов 39

Механика

- Алексеев А.В., Асланов В.С.** Движение твердого тела с жидкостью малой вязкости 44
- Толпаев В.А., Палиев В.В.** Уравнение неразрывности в двумерных моделях фильтрации жидкости и газа в искривленных пластах конечной толщины 49
- Торопова О.А.** Формулировка математической модели глубоководного нефтеподъемника в условиях действия внутреннего потока газожидкостной смеси 53
- Федоров А.Е., Самарцев В.А., Адамов А.А.** О моделировании кожи человека 57
- Черванев В.О.** Оценка структуры и параметров наблюдательной сети мониторинга загрязнения атмосферного воздуха 61
- Шиндяпин Г.П., Шевырев С.П., Поршнев В.А.** Исследование и разработка двумерных математических моделей пульсирующих детонационных двигателей для перспективных летательных аппаратов 65

Информатика

- Гольдштейн В.Б., Миронов С.В.** Хеш-функции для сокращения диагностической информации 76

Приложения

Personalia

- Прохоров Д.В., Захаров А.М., Дудов С.И.** Август Петрович Хромов 82

РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич

Заместитель главного редактора

Усанов Дмитрий Александрович

Ответственный секретарь

Клоков Василий Тихонович

Члены редакционной коллегии

Аврус Анатолий Ильич

Белов Владимир Николаевич

Бучко Ирина Юрьевна

Вениг Сергей Борисович

Дыльников Геннадий Васильевич

Захаров Андрей Михайлович

Зимняков Дмитрий Александрович

Кабанин Вячеслав Кузьмич

Комкова Галина Николаевна

Лебедева Ирина Владимировна

Левин Юрий Иванович

Мирзаханов Велихан Салманханович

Монахов Сергей Юрьевич

Первушов Евгений Михайлович

Прозоров Валерий Владимирович

Прохоров Дмитрий Валентинович

Смирнов Анатолий Константинович

Сперанский Дмитрий Васильевич

Федотова Ольга Васильевна

Худяков Глеб Иванович

Чумаченко Алексей Николаевич

Шляхтин Геннадий Викторович

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
СЕРИИ

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич

Заместители главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович

Сперанский Дмитрий Васильевич

Ответственный секретарь

Сидоров Сергей Петрович

Члены редакционной коллегии:

Дудов Сергей Иванович

Кузнецов Валентин Николаевич

Лукашов Алексей Леонидович

Митрофанов Юрий Иванович

Розен Виктор Владимирович

Салий Вячеслав Николаевич

Сытник Александр Александрович

Твердохлебов Владимир Александрович

Федорова Антонина Гавриловна

Хромов Август Петрович

Шиндяпин Георгий Петрович

Юрко Вячеслав Анатольевич

Зарегистрировано

в Министерстве Российской

Федерации по делам печати,

телерадиовещания и средств

массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации СМИ

ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года



ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Журнал принимает к публикации общетеоретические, методические, дискуссионные, критические статьи, результаты исследований по всем научным направлениям.

К статье прилагается сопроводительное письмо, внешняя рецензия и сведения об авторах: фамилии, имена и отчества (полностью), рабочий адрес, контактные телефоны, e-mail.

1. Рукописи объемом не более 1 печ. листа, не более 8 рисунков принимаются в редакцию в бумажном и электронном вариантах в 1 экз.:

а) бумажный вариант должен быть напечатан через один интервал шрифтом 14 пунктов. Рисунки выполняются на отдельных листах. Под рисунком указывается его номер, а внизу страницы – Ф.И.О. автора и название статьи. Подписанные подписи печатаются на отдельном листе и должны быть самодостаточными;

б) электронный вариант в формате Word представляется на дискете 3,5 или пересылается по электронной почте. Рисунки представляются в виде отдельных файлов в формате РСХ, TIFF или GIF.

2. Требования к оформлению текста.

Последовательность предоставления материала: индекс УДК; название статьи, инициалы и фамилии авторов, аннотация (на русском и на английском языках); текст статьи; библиографический список; таблицы; рисунки; подписи к рисункам.

В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте.

Ведущий редактор
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Ишмухаметова Инга Владимировна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Агальцова Людмила Владимировна

Корректор
Крылова Елена Борисовна

Адрес редакции
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Издательство Саратовского университета

Тел.: (845-2) 52-26-89, 52-26-85

E-mail: izdat@sgu.ru

Подписано в печать 07.08.07.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 9,98 (10,75).

Уч.-изд. л. 10,6.

Тираж 500 экз. Заказ 88.

Отпечатано в типографии
Издательства Саратовского университета

© Саратовский государственный
университет, 2007

CONTENTS

Scientific Part

Mathematic

- Golovaneva F.V.** About Nonsingularity of One Boundary Value Problem of Forth Order with Derivatives by Measure 3
- Golub A.V., Khromov A.P.** Equiconvergence Theorem for Expansions in Eigenfunctions of Integral Operators with Discontinuous Involution 5
- Dmitriev O.Yu.** Expansions in Eigenfunctions of the n -th Order Differential Operator with Non-Regular Boundary Conditions 10
- Egorov V.V.** Recovering of a Mapping Via Jacobi Matrix, Normalized Homogeneous Function 14
- Kurdyumov V.P., Khromov A.P.** On Riesz Basises of the Eigen and Associated Functions of the Functional-Differential Operator with a Variable Structure 20
- Medvedeva N.M.** Research of Stability for Extremal Rotation Surfaces 25
- Pokornyi Yu.V., Bakhtina Zh.I., Ischenko A.S.** On Solvability of Certain Classes of Irregular the Second Order Variation Problems 32
- Tkachenko A.A., Shabrov S.A.** About Solvability of Integro-Differential Equation with Extended Stieltjes Integral 36
- Fryantsev A.V.** On Numerical Approximation of Differential Polynomials 39

Mecanics

- Alekseev A.V., Aslanov V.S.** Movement of a Firm Body with a Liquid of Small Viscosity 44
- Tolpaev V.A., Paliev V.V.** The Equations of Continuousness in Bidimensional Models of Filtration Liquid and Gas in the Bent Layers of Final Thickness 49
- Toropova O.A.** The Formulation of the Mathematical Model Deep-Water of the Oil Raiser, Interacting with Internal Flow of Gas-Liquid Mixture 53
- Fedorov A.E., Samartsev V.A., Adamov A.A.** On Modelling of the Human Skin 57
- Chervanov V.O.** Estimation of Structure and Parameters of the Atmospheric Air Pollution Monitoring Observant Network 61
- Shindyapin G.P., Shevirev S.P., Porshnev V.A.** Research and Development of Bidimensional Mathematical Models of Pulsing Detonation Engines for Perspective Flying Devices 65

Informatics

- Goldshhteyn V.B., Mironov S.V.** Hash Functions for Diagnostic Information Reduction 76

Appendices

Personalia

- Prokhorov D.V., Zakharov A.M., Dudov S.I.** Avgust Petrovich Khromov 82



МАТЕМАТИКА

УДК 517.923

О НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Ф.В. Голованёва

Воронежский государственный университет,
кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей
E-mail: shaspoteha@mail.ru

В работе получены достаточные условия невырожденности краевой задачи четвертого порядка с производными по мере.

About Nonsingularity of One Boundary Value Problem of Forth Order with Derivatives by Measure

F.V. Golovaneva

In the work sufficient conditions for nonsingularity of boundary value problem of forth order with derivatives by measure are obtained.

Как известно, свойство невырожденности краевой задачи обеспечивает её интегральную обратимость и, как следствие, применимость теории вполне непрерывных операторов. Последнее позволяет получить ряд свойств, необходимых для приложений.

В данной работе обсуждаются условия невырожденности следующей задачи:

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = F'_\sigma & (x \in \overline{[0; 1]_\sigma}), \\ u(0) = pu''_{xx}(0) = 0, \\ pu''(1) = (pu'')'(1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, причём $\inf_{[0;1]} p > 0$. Внешняя производная понимается по Радону–Никодиму, а внутренние — как обычные. Решение задачи (1) будем искать в классе E непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, первая производная $u'(x)$ которых абсолютно непрерывна; $(pu'')(x)$ — абсолютно непрерывна; $(pu'')'(x)$ — σ -абсолютно непрерывна.

Множество $\overline{[0; 1]_\sigma}$ строится следующим образом. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На $[0; 1] \setminus S(\sigma)$ введём метрику $\rho(x; y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Полученное множество, как нетрудно видеть, неполно. Стандартное пополнение, при котором каждая точка ξ из $S(\sigma)$ заменяется на упорядоченную пару $\{\xi - 0; \xi + 0\}$, мы обозначим через $\overline{[0; 1]_\sigma}$. Уравнение

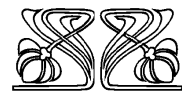
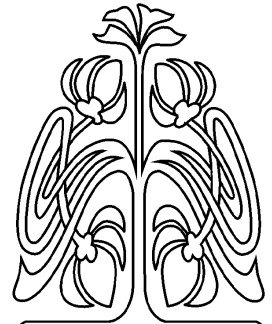
$$(pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = F'_\sigma,$$

заданное на $\overline{[0; 1]_{S(\sigma)}} = \overline{[0; 1]_\sigma} \cup S(\sigma)$, для каждой точки ξ , принадлежащей $S(\sigma)$, понимается как

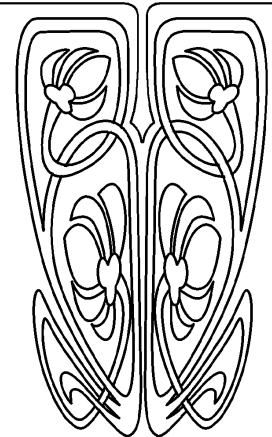
$$\Delta(pu''_{xx})'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi)$$

(здесь через $\Delta\psi(\xi)$ обозначен скачок функции $\psi(x)$ в точке ξ , т. е. $\Delta\psi(\xi) = \psi(\xi + 0) - \psi(\xi - 0)$).

Задача (1) возникает при моделировании малых деформаций



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





консоли (более подробно см. [1]), один конец которой закреплён шарнирно, а второй — свободен.

Напомним необходимое определение.

Определение. Задача (1) называется невырожденной, если однородная краевая задача (при $F(x) \equiv \text{const}$) имеет только тривиальное решение.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $p(x)$ — функция ограниченной на $[0; 1]$ вариации, причём $\inf_{[0;1]} p > 0$; $Q(x)$ — не убывает и σ -абсолютно непрерывна на $[0; 1]$. Тогда, если $Q(1) > Q(0)$, то краевая задача (1) является невырожденной, в противном случае, т. е. если $Q(x) \equiv \text{const}$, краевая задача (1) не обладает свойством невырожденности.

Доказательство. Предположим, что у однородной краевой задачи существует нетривиальное решение $\varphi(x)$. После подстановки $\varphi(x)$ в однородное уравнение, умножения полученного тождества на $\varphi(x)$ и интегрирования по $\sigma(x)$ в пределах от 0 до 1 получим равенство

$$\int_0^1 (p\varphi''_{xx})''_{x\sigma} \varphi d\sigma + \int_0^1 \varphi^2 Q'_\sigma d\sigma = 0. \quad (2)$$

Первый интеграл в левой части последнего равенства проинтегрируем дважды по частям:

$$\int_0^1 (p\varphi''_{xx})''_{x\sigma} \varphi d\sigma = (p\varphi''_{xx})'_{x\sigma} \varphi|_0^1 - p\varphi''_{xx} \varphi'_x|_0^1 + \int_0^1 p\varphi''^2 dx = \int_0^1 p\varphi''^2 dx.$$

Тогда равенство (2) принимает вид $\int_0^1 p\varphi''^2 dx + \int_0^1 \varphi^2 dQ = 0$, из которого следуют равенства:

$$\int_0^1 p\varphi''^2 dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \varphi^2 dQ = 0. \quad (3)$$

Из первого равенства следует, что $p\varphi''^2 = 0$ почти всюду, следовательно, $\varphi''(x) = 0$ почти при всех x . Так как $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывна, то $\varphi'(x) = C_1$, где C_1 — некоторая константа. Тогда $\varphi(x) = C_1x + C_2$, и с учётом краевого условия $u(0) = 0$ находим, что $\varphi(x) = C_1x$.

Второе равенство в (3), в силу теоремы о среднем, принимает вид $\varphi^2(\tau)(Q(1) - Q(0)) = 0$ при некотором $\tau \in [0; 1]$. Если $Q(1) > Q(0)$, то $\varphi^2(\tau) = 0$. Из последнего следует, что $\varphi(x) \equiv 0$, и мы приходим к противоречию.

Если же $Q(1) = Q(0)$, т.е. $Q(x) \equiv \text{const}$, то $\varphi(x) \equiv C_1x$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} = 0, \\ u(0) = pu''_{xx}(0) = 0, \\ pu''(1) = (pu'')'(1) = 0 \end{cases}$$

при всяком C_1 . Теорема доказана.

Опираясь на доказанную теорему, легко получить следующий результат.

Теорема 2. Если $Q(x)$ не убывает и σ -абсолютно непрерывна на $[0; 1]$, $Q(1) > Q(0)$, то существует непрерывная по совокупности переменных функция $G(x; s)$ такая, что для любой σ -абсолютно непрерывной функции $F(x)$ решение краевой задачи (1) представимо в виде

$$u(x) = \int_0^1 G(x; s) F'_\sigma(s) d\sigma(s).$$

Доказательство. Так как $Q(1) > Q(0)$, то из теоремы 1 вытекает невырожденность краевой задачи (1). Поэтому (применяя классические рассуждения) легко установить существование функции $G(x, s)$, называемой функцией Грина краевой задачи (1), обладающей следующими свойствами:

- 1) $G(x, s)$ непрерывна по совокупности переменных на квадрате $[0; 1] \times [0; 1]$;
- 2) при каждом $x \neq s$ функция $G(x, s)$ удовлетворяет однородному уравнению $(pu''_{xx})''_{x\sigma} + uQ'_\sigma = 0$;



- 3) для всех x из $(0; 1) \setminus S(\sigma)$ справедливо равенство $(pG''_{xx})'_x(x+0, x) - (pG''_{xx})'_x(x-0, x) = 1$, и $(pG''_{xx})'_x(x+0, x) - (pG''_{xx})'_x(x-0, x) + G(x, x)\Delta Q(x) = 1$ для $x \in S(\sigma)$;
 4) при всех s $G(0, s) = pG''_{xx}(0, s) = pG''_{xx}(1, s) = (pG''_{xx})'_x(1, s) = 0$.

Тогда, как нетрудно видеть, функция $u(x) = \int_0^1 G(x, s)F'_\sigma(s)ds$ является решением краевой задачи (1). Теорема доказана.

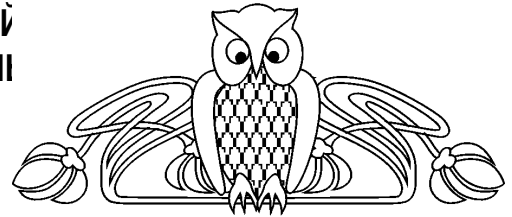
Пользуясь случаем, автор выражает благодарность и признательность своему научному руководителю профессору Юлию Витальевичу Покорному за постановку задачи и чуткое руководство.

Библиографический список

1. Покорный Ю.В., Копытин А.В. О регулярном толковании уравнения негладкого стержня // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Ижевск, 2000. № 1. С. 137–144.

УДК 517.984

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ДОПУСКАЮЩЕЙ РАЗРЫВЫ



А.В. Голубь, А.П. Хромов

Саратовский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
 E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Equiconvergence Theorem for Expansions in Eigenfunctions of Integral Operators with Discontinuous Involution

A.V. Golub, A.P. Khromov

In the paper we consider the equiconvergence of expansions in trigonometric Fourier series and in eigen- and associated functions of integral operators with involution having discontinuities of the first type.

В статье устанавливается равносходимость разложений в тригонометрический ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с инволюцией, допускающей разрывы первого рода.

Рассмотрим оператор

$$Af(x) = \int_0^{\theta(x)} A(\theta(x), t)f(t) dt, \tag{1}$$

где $\theta(x) = \frac{1}{2} - x$ при $x \in [0; \frac{1}{2}]$ и $\theta(x) = \frac{3}{2} - x$ при $x \in [\frac{1}{2}; 1]$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, т.е. $\theta(\theta(x)) = x$, причем $\theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x = \frac{1}{2}$.

Требования на ядро оператора (1): функция $A(x, t) = 0$ при $t \geq x$, $A(x, x-0) \equiv 1$ и $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A(x, t)$ непрерывны при $t \leq x$ и $k+l \leq 2$.

Операторы такого вида рассматривались в [1]. В данной статье, в отличие от результатов [1], получают просто проверяемые условия, при которых имеет место равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора (1) и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Обозначим $\tilde{A}(x, t) = A(\theta(x), t)$ при $t \leq \theta(x)$ и $\tilde{A}(x, t) \equiv 0$ при $t > \theta(x)$ и введем матрицу $B(x, t)$ с компонентами $B_{ij}(x, t) = A(\frac{i-1}{2} + x, \frac{j-1}{2} + t)$ ($i, j = 1, 2$), $x, t \in [0; \frac{1}{2}]$.

Лемма 1. Если $y(x) = Af(x)$, то $z(x) = Bg(x)$, $x \in [0; 1/2]$, где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(\frac{1}{2} + x)$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))^T$, $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f(\frac{1}{2} + x)$, $Bg(x) = \int_0^{1/2} B(x, t)g(t) dt$.

Доказательство. Из определения оператора A имеем

$$y(x) = \int_0^{\frac{1}{2}-x} A\left(\frac{1}{2} - x, t\right) f(t) dt, \quad x \in [0; 1/2], \tag{2}$$



$$y(x) = \int_0^{\frac{3}{2}-x} A\left(\frac{3}{2}-x, t\right) f(t) dt, \quad x \in [1/2; 1]. \quad (3)$$

Но $A\left(\frac{1}{2}-x, t\right) = B_{11}(x, t)$, тогда (2) переписывается как

$$z_1(x) = \int_0^{1/2} B_{11}(x, t) g_1(t) dt. \quad (4)$$

В (3) положим $x = \frac{1}{2} + \xi$. Тогда $\xi \in [0; \frac{1}{2}]$ и (3) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} y\left(\frac{1}{2} + \xi\right) &= \int_0^{1-\xi} A(1-\xi, t) f(t) dt = \int_0^{1/2} A(1-\xi, t) f(t) dt + \int_{1/2}^{1-\xi} A(1-\xi, t) f(t) dt = \\ &= \int_0^{1/2} A(1-\xi, t) f(t) dt + \int_0^{\frac{1}{2}-\xi} A\left(1-\xi, \frac{1}{2} + \eta\right) f\left(\frac{1}{2} + \eta\right) d\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $A(1-x, t) = B_{21}(x, t)$, $A\left(1-x, \frac{1}{2} + t\right) = B_{22}(x, t)$, то (5) можно переписать как

$$z_2(x) = \int_0^{1/2} B_{21}(x, t) g_1(t) dt + \int_0^{1/2} B_{22}(x, t) g_2(t) dt. \quad (6)$$

Из (4) и (6), учитывая, что $B_{12}(x, t) \equiv 0$, следует утверждение леммы. \square

Следствие. Имеет место формула $z'\left(\frac{1}{2}-x\right) = -g(x) + B_1 g(x)$, где $B_1 g(x) = \int_0^{1/2} B_x\left(\frac{1}{2}-x, t\right) \times g(t) dt$, $B_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} B(x, t)$.

Доказательство. Так как компоненты матрицы $B(x, t)$ могут терпеть разрыв на линии $t + x = \frac{1}{2}$, то $z(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} z(x) &= \int_0^{1/2} B(x, t) g(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}-x} B(x, t) g(t) dt + \int_{\frac{1}{2}-x}^{1/2} B(x, t) g(t) dt = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}-x} \begin{pmatrix} A\left(\frac{1}{2}-x, t\right) & 0 \\ A(1-x, t) & A\left(1-x, \frac{1}{2} + t\right) \end{pmatrix} g(t) dt + \int_{\frac{1}{2}-x}^{1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A(1-x, t) & 0 \end{pmatrix} g(t) dt. \end{aligned}$$

После дифференцирования получим

$$\begin{aligned} z'(x) &= - \begin{pmatrix} A\left(\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}-x-0\right) & 0 \\ A\left(1-x, \frac{1}{2}-x-0\right) & A(1-x, 1-x-0) \end{pmatrix} g\left(\frac{1}{2}-x\right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A\left(1-x, \frac{1}{2}-x+0\right) & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times g\left(\frac{1}{2}-x\right) + \int_0^{1/2} B_x(x, t) g(t) dt = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g\left(\frac{1}{2}-x\right) + \int_0^{1/2} B_x(x, t) g(t) dt. \end{aligned}$$

Поменяв x на $\frac{1}{2}-x$, получим требуемое. Лемма доказана. \square

Представим оператор B_1 в пространстве $L_2^2[0, 1/2]$ в виде $B_1 = W + V$, где $\|W\| < 1$, $Vg(x) = \sum_{k=1}^m (g, \psi_k) \varphi_k(x)$, $\{\psi_k(x)\}_1^m$, $\{\varphi_k(x)\}_1^m$ — линейно независимые системы в пространстве вектор-

функций размерности 2, $(g, \psi_k) = \sum_{j=1}^2 \int_0^{1/2} g_j(t) \psi_k^j(t) dt$. Тогда по следствию из леммы $1 z'\left(\frac{1}{2}-x\right) = (W - E)g(x) + Vg(x)$. Откуда

$$(W - E)^{-1} z'\left(\frac{1}{2}-x\right) = g(x) + \sum_{k=1}^m (g, \psi_k) (W - E)^{-1} \varphi_k(x). \quad (7)$$



Обозначим $(W - E)^{-1}\varphi_k(x) = \tilde{\varphi}_k(x)$, E — единичный оператор.

Лемма 2. Оператор B^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\text{rang } M = m$, где

$$M = \begin{pmatrix} E + (\tilde{\varphi}, \psi)^T \\ \int_0^{1/2} B(0, t)\tilde{\varphi}^T(t) dt \end{pmatrix}, \quad E - \text{единичная матрица размерности } m \times m, \quad (\tilde{\varphi}, \psi) = \{(\tilde{\varphi}_j, \psi_k)\}_{j,k=1}^m, \\ \tilde{\varphi}^T = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m).$$

Доказательство. Пусть $Bg = 0$. Тогда из (7) при $z(x) \equiv 0$ получим $0 = g(x) + \sum_{k=1}^m \gamma_k \tilde{\varphi}_k(x)$, где $\gamma_k = (g, \psi_k)$. Умножая последнее равенство скалярно на $\{\psi_k(x)\}_1^m$, получим систему

$$0 = \gamma_k + \sum_{j=1}^m \gamma_j (\tilde{\varphi}_k, \psi_j), \quad k = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Подставляя $g(x) = -\sum_{k=1}^m \gamma_k \tilde{\varphi}_k(x)$ в $\int_0^{1/2} B(0, t)g(t) dt = 0$, получаем

$$0 = \sum_{j=1}^m \gamma_j \int_0^{1/2} B(0, t)\tilde{\varphi}_j(t) dt. \quad (9)$$

Соотношения (8)–(9) представляют собой необходимые и достаточные условия для нахождения $\{\gamma_k\}$. Поэтому B^{-1} существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы M системы (8)–(9) равен m .

Лемма 3. Пусть B^{-1} существует и для определенности минор Δ матрицы M , образованный из первых m строк, отличен от нуля. Тогда

$$B^{-1}z = (W - E)^{-1}z' \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{1}{\Delta} \sum_{j,k=1}^m ((W - E)^{-1}z' \left(\frac{1}{2} - x\right), \psi_j) \Delta_{jk} \tilde{\varphi}_k(x), \quad \int_0^{1/2} B(0, t)B^{-1}z(t) dt = 0,$$

где Δ_{jk} — алгебраические дополнения элементов определителя Δ .

Лемма 4. Для оператора B^{-1} справедливо представление

$$B^{-1}z(x) = z' \left(\frac{1}{2} - x\right) + a_1(x)z(0) + a_2z \left(\frac{1}{2}\right) + a_3(x)z(x) + a_4(x)z \left(\frac{1}{2} - x\right) + \int_0^{1/2} a(x, t)z(t) dt, \\ S \cdot z(0) + T \cdot z \left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_i(x)$ ($i = 1, \dots, 4$), $a'_3(x)$, $a'_4(x)$, $a(x, t)$ — непрерывные матрицы-функции. Кроме того, каждая компонента матрицы $a(x, t)$ имеет ту же гладкость, что и компоненты $B_x(x, t)$, с той лишь разницей, что теперь по t предполагается лишь непрерывность.

Лемма 5. Если $z(x) = (E - \lambda B)^{-1}Bg(x)$, а $v(x) = (z^T(x), z^T(\frac{1}{2} - x))^T$, то $v(x)$ удовлетворяет интегро-дифференциальной системе:

$$Qv'(x) + \tilde{P}_1(x)v(0) + \tilde{P}_2(x)v \left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{P}_3(x)v(x) + \tilde{N}v - \lambda v(x) = \tilde{m}(x), \quad \tilde{M}_0v(0) + \tilde{M}_1v \left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } Q = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_1(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2 \left(\frac{1}{2} - x\right) & a_1 \left(\frac{1}{2} - x\right) \end{pmatrix}, \\ \tilde{P}_3(x) = \begin{pmatrix} a_3(x) & a_4(x) \\ a_4 \left(\frac{1}{2} - x\right) & a_3 \left(\frac{1}{2} - x\right) \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}v = \int_0^{1/2} \tilde{N}(x, t)v(t) dt, \quad \tilde{N}(x, t) = \begin{pmatrix} a(x, t) & 0 \\ a \left(\frac{1}{2} - x, t\right) & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{M}_0 = \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & S \end{pmatrix}, \quad \tilde{m}(x) = (g^T(x), g^T \left(\frac{1}{2} - x\right))^T.$$

Лемма 6. Если $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ существует, то

$$R_\lambda f(x) = v_1(x), \quad x \in [0, 1/2], \quad R_\lambda f(x) = v_2 \left(x - \frac{1}{2}\right), \quad x \in [1/2, 1], \quad (11)$$

где $v_i(x)$ — компоненты вектора $v(x)$, удовлетворяющего системе (10). Верно и обратное, то есть если λ таково, что однородная краевая задача для системы (10) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (11).



Лемма 7. Существует матрица-функция $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональна, что преобразование $v(x) = \Gamma H(x, \lambda)w(x)$, где Γ — матрица, диагонализующая матрицу Q^{-1} , т.е. $\Gamma^{-1}Q^{-1}\Gamma = D = \text{diag}(i, -i, i, -i)$, приводит систему (10) к виду

$$\begin{aligned} w'(x) + P_1(x, \lambda)w(0) + P_2(x, \lambda)w\left(\frac{1}{2}\right) + P_3(x, \lambda)w(x) + N_\lambda w - \lambda Dw(x) &= m(x, \lambda), \\ U(w) = M_{0\lambda}w(0) + M_{1\lambda}w\left(\frac{1}{2}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $P_1(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{P}_1(x)H(0, \lambda)$, $P_2(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{P}_2(x)H\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)$, $P_3(x, \lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda)[H'_1(x) + D\Gamma^{-1}\tilde{P}_3(x)H_1(x)]$, $N_\lambda = H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma H(x, \lambda)$, $M_{0\lambda} = \tilde{M}_0\Gamma H(0, \lambda)$, $M_{1\lambda} = \tilde{M}_1\Gamma H\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)$, $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)D\Gamma^{-1}\tilde{m}(x)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$w'(x) = \lambda Dw(x) + m(x), \quad U(w) = 0, \quad (13)$$

где $U(\cdot)$ — краевые условия из (12), $m(x)$ — произвольный вектор-функция с компонентами из $L[0, 1/2]$.

Лемма 8. Для решения задачи (13) имеет место формула

$$w(x, \lambda) = -Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda) \int_0^{1/2} U_x(g(x, t, \lambda))m(t) dt + g_\lambda m(x), \quad (14)$$

где $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda ix}, e^{-\lambda ix}, e^{\lambda ix}, e^{-\lambda ix})$; $\Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda))$; $g(x, t, \lambda) = \text{diag}(g_1(x, t, \lambda), \dots, g_4(x, t, \lambda))$; $g_j(x, t, \lambda) = -\varepsilon(t, x)e^{\lambda i(x-t)}$ ($j = 1, 3$); $g_j(x, t, \lambda) = \varepsilon(x, t)e^{-\lambda i(x-t)}$ ($j = 2, 4$); $\varepsilon(x, t) = 1$ при $t \leq x$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$; $g_\lambda m(x) = \int_0^{1/2} g(x, t, \lambda)m(t) dt$ и $U_x(\cdot)$ означает, что краевое условие берется по аргументу x .

Здесь и далее считаем, что $\text{Re } \lambda i \geq 0$.

Лемма 9. Для матрицы $\Delta(\lambda)$ при больших $|\lambda|$ имеет место следующее представление: $\Delta(\lambda) = ([a_{ij}] + [b_{ij}]e^{\mu\omega_j})_{i,j=1}^4$, где $\mu = \lambda/2$, $\omega_1 = \omega_3 = i$, $\omega_2 = \omega_4 = -i$, a_{ij} (b_{ij}) — компоненты матрицы K_0 (L_0), $K_0 = \begin{pmatrix} S\Gamma_{11} + T\Gamma_{21} & S\Gamma_{12} + T\Gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H_0(0)$, $L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T\Gamma_{11} + S\Gamma_{21} & T\Gamma_{12} + S\Gamma_{22} \end{pmatrix} H_0\left(\frac{1}{2}\right)$, где Γ_{ij} — блоки матрицы Γ размера 2×2 , $[a] = a + O(\lambda^{-1})$.

Доказательство. По определению $\Delta(\lambda) = U(Y(x, \lambda))$, где $Y(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda\omega_1 x}, \dots, e^{\lambda\omega_4 x})$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= M_{0\lambda}Y(0, \lambda) + M_{1\lambda}Y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = M_0H(0, \lambda)E + M_1H\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)Y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = \\ &= \tilde{M}_0\Gamma(H_0(0) + \lambda^{-1}H_1(0)) + \tilde{M}_1\Gamma\left(H_0\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda^{-1}H_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)Y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = \\ &= \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} (H_0(0) + \lambda^{-1}H_1(0)) + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \left(H_0\left(\frac{1}{2}\right) + \lambda^{-1}H_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)Y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right). \end{aligned}$$

Откуда следует утверждение леммы. \square

Следствие. Имеет место следующая асимптотическая формула:

$$\det \Delta(\lambda) = (\theta_0 + \theta_1 e^{-\mu i} + \theta_2 e^{-2\mu i} + \theta_3 e^{-3\mu i} + \theta_4 e^{-4\mu i} + O(\lambda^{-1})) e^{2\mu i},$$

где θ_i — комплексные числа, причем $\theta_0 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & b_{13} & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{41} & a_{42} & b_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 1$, $\theta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} & b_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & b_{42} & a_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 1$.

Обозначим далее через S_δ комплексную λ -плоскость с удаленными нулями $\det \Delta(\lambda)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ .

Лемма 10. В области S_δ справедлива оценка $|\det \Delta(\lambda)| \geq C|e^{\lambda i}|$.



Лемма 11. В области S_δ при больших $|\lambda|$ для решения $w(x, \lambda) = R_{1\lambda}m(x)$ задачи (13) имеют место оценки:

$$\begin{aligned} \|R_{1\lambda}m\|_\infty &= O(\|m\|_1), & \|R_{1\lambda}m\|_\infty &= O(\varkappa(\lambda)\|m\|_\infty), \\ \|R_{1\lambda}m\|_1 &= O(\varkappa(\lambda)\|m\|_1), & \|R_{1\lambda}\chi\|_\infty &= O(\lambda^{-1}), \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\cdot\|_1$) — нормы в $L_\infty [0, 1/2]$ ($L [0, 1/2]$) в пространстве вектор-функций, $\chi(x)$ — вектор-функция, у которой каждая компонента есть характеристическая функция отрезка $[0, 1/2]$,

$$\varkappa(\lambda) = \frac{1 - e^{-|\operatorname{Re} \mu i|}}{|\operatorname{Re} \mu i|}.$$

Доказательство. Найдем оценки элементов матрицы $Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$. Пусть Δ_{ij} — алгебраические дополнения элементов матрицы $\Delta(\lambda)$. Тогда имеют место оценки $\Delta_{i1} = \Delta_{i3} = O(e^{\mu i})$, $\Delta_{i2} = \Delta_{i4} = O(e^{\lambda i})$, следующие из леммы 9. Тогда, учитывая оценку из леммы 10, получаем оценку элементов матрицы $Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)$: элементы первой и третьей строк имеют оценку $O(e^{\lambda i(x-\frac{1}{2})})$; второй и четвертой — $O(e^{-\lambda i x})$. Рассуждая далее аналогично [2] получаем требуемое. \square

Рассмотрим задачу (12).

Лемма 12. В области S_δ при больших $|\lambda|$ имеет место оценка $\|R_{1\lambda}N_\lambda\|_\infty = o(1)$.

Следствие. В S_δ при больших $|\lambda|$ оператор $E + R_{1\lambda}P_3(x, \lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda$ обратим в L_∞ .

Лемма 13. В S_δ при больших $|\lambda|$ краевая задача (12) однозначно разрешима и для ее решения $w(x, \lambda)$ справедлива оценка $\|w(x, \lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x, \lambda)\|_\infty = O\left(\left(\frac{1}{|\lambda|} + \varkappa^2(\lambda)\right)\|f\|_1\right)$.

Лемма 14. Если $m(x) = \chi(x)$, то $\|w(x, \lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x)\|_\infty = O(\lambda^{-2})$.

Лемма 15. Для любой $f(x) \in L[0, 1]$ имеет место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda)[w(x, \lambda) - R_{1\lambda}H_0^{-1}m(x)] d\lambda \right\|_\infty = 0$$

(считается, что окружности $|\lambda| = r$ находятся в S_δ).

Рассмотрим еще одну краевую задачу

$$u'(x) = \lambda Du(x) + m(x), \quad U_0(u) = u(0) - u\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

и ее решение обозначим $R_{2\lambda}m$. Для $R_{2\lambda}m$ имеет место формула (14), где $\Delta(\lambda)$ заменяется на $\Delta_0(\lambda) = U_0(Y(x, \lambda))$, а $U(\cdot)$ — на $U_0(\cdot)$.

Удалим из S_δ вместе с круговыми окрестностями радиуса δ еще и собственные значения краевых задач

$$\begin{cases} u'(x) - \lambda i u(x) = 0, \\ u(0) = u(1/2) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u'(x) + \lambda i u(x) = 0, \\ u(0) = u(1/2) \end{cases}$$

и получившуюся область снова обозначим через S_δ .

Лемма 16. Если $m(x)$ — вектор-функция с компонентами из $L [0, \frac{1}{2}]$ и $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)m(x)$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda)[R_{2\lambda}m(x, \lambda) - R_{2\lambda}(H_0^{-1}m(x))] d\lambda \right\|_\infty = 0.$$

Лемма 17. Если $m(x)$ из леммы 16, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda)[R_{1\lambda}m(x) - R_{2\lambda}m(x)] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0, \quad \varepsilon \in (0, 1/4).$$

Лемма 18. Если $f(x) \in L[0, 1]$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)w(x, \lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x))] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ и $w(x, \lambda)$ — решение задачи (12), $\tilde{m}(x)$ — из (10).

Теорема. Пусть A^{-1} существует. Тогда для любой $f(x) \in L[0, 1]$ и любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$ имеют место соотношения:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_r(f, x)\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left\| S_r(f, x) - \sigma_r\left(g, x - \frac{1}{2}\right) \right\|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$



где $g(x) = f(\frac{1}{2} + x)$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел, для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(g, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по системе $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{4k\pi i x} \right\}_{-\infty}^{\infty}$ функции $g(x)$ на отрезке $x \in [0, \frac{1}{2}]$ для тех k , для которых $|4k\pi| < r$.

Доказательство. Имеем $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f(x) d\lambda$, $\sigma_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{0\lambda}f(x) d\lambda$, где $y(x) = R_{0\lambda}f(x)$ есть решение краевой задачи $y'(x) - \lambda y(x) = f(x)$, $y(0) = y(1/2)$.

Пусть $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Тогда $R_{0\lambda}f(x) = (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}))_1$, $R_\lambda f(x) = (\Gamma H(x, \lambda)w(x, \lambda))_1$, где $(\cdot)_1$ означает первую компоненту вектора, помещенного в скобки. По лемме 18 имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [(\Gamma H(x, \lambda)w(x, \lambda))_1 - (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1] d\lambda \right\|_{[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0.$$

Тогда $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1 d\lambda + o(1)$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon]$. Но $-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}\tilde{m}(x)))_1 d\lambda = \sigma_r(f, x)$ и первое соотношение теоремы получено. Второе соотношение получается аналогично. Теорема доказана. \square

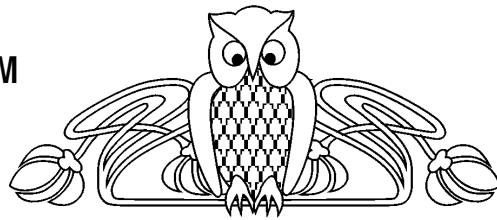
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

Библиографический список

1. Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, вып. 11. С. 115–142.
2. Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

УДК 517.984.52

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА n -ГО ПОРЯДКА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ



О.Ю. Дмитриев

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: DmitrievOU@info.sgu.ru

Expansions in Eigenfunctions of the n -th Order Differential Operator with Non-Regular Boundary Conditions

O.Yu. Dmitriev

The paper deals with the expansions in eigenfunctions of the n -th order differential operator with non-regular boundary conditions of special type. Necessary and sufficient conditions for existing of such expansions either on the interval $[0, 1]$ or inside it are derived.

В работе рассматривается задача разложения по собственным функциям дифференциального оператора n -го порядка с нерегулярными краевыми условиями специального вида. Получены необходимые и достаточные условия разложения по собственным функциям на отрезке $[0, 1]$ и внутри него.

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ краевую задачу, определенную дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} - \lambda y = 0, \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$U_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где a_i — константы, λ — спектральный параметр, $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Для случая $n = 3$ А.П.Хромовым в [1] были получены необходимые и достаточные условия разложения функции в равномерно сходящийся на $(0, 1)$ ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям краевой задачи (1)–(2) с нерегулярными краевыми условиями. Там же были получены теоремы о разложении внутри интервала $(0, 1)$.



В [2] автором этот результат был распространен на случай $n = 4k + 1$. Были получены теорема о необходимом условии и теорема о достаточном условии разложения функции в равномерно сходящийся на $(0, 1)$ ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) краевой задачи (1)–(2) с нерегулярными краевыми условиями.

Данная статья является продолжением этих исследований для разложений внутри интервала $(0, 1)$, при этом необходимые условия, полученные в [2], сохраняются. Получение достаточных условий разложения требует изучения поведения функции Грина. Основная трудность состоит в том, что функция Грина $G(x, t, \lambda)$ краевой задачи (1)–(2) с нерегулярными краевыми условиями имеет экспоненциальный рост при больших $|\lambda|$, причем такой рост наблюдается как при $t < x$, так и при $t > x$. В [1] и [2] справиться с таким ростом удавалось с помощью специального функционального уравнения, которому должна удовлетворять разлагаемая функция. Рассматриваемая в данной статье ситуация отличается тем, что в связи с уменьшением интервала разложения функциональное уравнение перестает действовать. Поэтому чтобы справиться с экспоненциальным ростом функции Грина, аналогично [1], осуществляется переход к новому оператору, порожденному многоточечной краевой задачей.

Пусть $\lambda = -\rho^n$, $\omega_j = \exp \frac{2j-1}{n} \pi i$, $j = 1, \dots, n$. Тогда если ρ пробегает сектор S с вершиной в начале координат, определяемый неравенствами $-\frac{\pi}{n} \leq \arg \rho \leq \frac{\pi}{n}$, $0 \leq |\rho| < \infty$, то λ пробегает всю комплексную плоскость. В дальнейшем будем предполагать, что $\rho \in S$. Положим $b_j = \sum_{i=1}^n a_j (-\omega_j)^{i-1}$, $j = 1, \dots, n$. Будем рассматривать такие краевые условия (2), для которых выполняется $b_j = 0$, $j = k + 1, \dots, 3k + 1$; $b_k b_{3k+2} \neq 0$. В этом случае краевые условия (2) нерегулярны по Биркгофу ([3], с. 66-67).

Аналогично [2] будем рассматривать функциональное уравнение вида

$$\Phi(y, x) = \sum_{j=1}^k b_j y(\bar{\omega}_j x) + \sum_{j=3k+2}^{4k+1} b_j y(\bar{\omega}_j x) + ny(1-x) = 0. \quad (3)$$

Определим многоугольник $T_{1-\alpha/\text{Re } \omega_k}$ системой неравенств:

$$\begin{cases} \text{Re } \omega_j z < \text{Re } \omega_{2k+1} \alpha + \text{Re } \omega_j, & j \in J^+, \\ \text{Re } \omega_j z < \text{Re } \omega_{2k+1} \alpha + \text{Re } \omega_{3k+2}, & j \in J^-, \\ \text{Re } \omega_{2k+1} z < \text{Re } \omega_{2k+1} \alpha, \end{cases}$$

где $J^+ = \{1, 2, \dots, k, 3k + 2, \dots, 4k + 1\}$, $J^- = \{k + 1, \dots, 2k, 2k + 2, \dots, 3k + 1\}$.

Разложение внутри интервала $(0, 1)$ имеет смысл рассматривать, учитывая результаты [2], на интервалах $J_\beta = (\text{Re } \omega_k(1 - \beta); \beta)$, где $\beta \in (\gamma, 1]$, $\gamma = \frac{\text{Re } \omega_k}{1 + \text{Re } \omega_k}$. Кроме того, из [2] следует, что функциональное уравнение (3) не имеет смысла при $\beta \in (\gamma, 1 - \gamma]$.

Поскольку аналитичность разлагаемой функции $f(z)$, согласно результатам [2], можно предполагать только в области T_β , а экспоненциальный рост функции Грина $G(x, t, \rho)$ тем больше, чем ближе x к концам отрезка $[0, 1]$, то для преодоления этой трудности аналогично [1] мы осуществим переход к новому оператору.

Введем в рассмотрение операторы:

$$L_0 : y^{(n)}, U_i(y) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad L_1 : y^{(n)}, V_i(y) = \frac{1}{n} D^{i-1} \Phi(y, \gamma) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Операторы L_0 и L_1 имеют одни и те же с.п.ф.

Обозначим через L_2 оператор, полученный в результате замены $w = \frac{c}{\gamma}(z - \gamma)$, $c = \omega_k + \omega_{3k+2} = 2\text{Re } \omega_k$, $y(z) = u(w)$ из оператора L_1 :

$$L_2 : u^{(n)}, \quad U_i(u) = \sum_{j \in J^+} \alpha_{ij} u^{(i-1)}(c(\bar{\omega}_j - 1)) + \alpha_{i2k+1} u^{(i-1)}(\tilde{\gamma}) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\alpha_{ij} = (\bar{\omega}_j)^{i-1} b_j$, $j \in J^+$, $\alpha_{i2k+1} = (\omega_{2k+1})^{i-1} n$, $\tilde{\gamma} = 2 - c$.

Таким образом, задача разложения по с.п.ф. оператора L_1 сводится к задаче разложения по с.п.ф. оператора L_2 функции $f(w)$, аналитичной в области, представляющей из себя треугольник T_{x_0} , гомотетичный треугольнику $T_{\tilde{\gamma}} = (c(\bar{\omega}_{3k+2} - 1), \tilde{\gamma}, c(\bar{\omega}_k - 1))$ с центром гомотетии в начале координат и



имеющий вершину x_0 на положительной полуоси, причем, $0 < x_0 \leq \tilde{\gamma}$, так как мы рассматриваем тот случай, когда функциональное уравнение (3) не имеет смысла.

Аналогично [3, с. 46–47] имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. Резольвента $\tilde{R}_\lambda f$ оператора L_2 имеет вид (λ не является собственным значением оператора L_2):

$$\tilde{R}_\lambda f = \frac{1}{\Delta(\rho)} \begin{vmatrix} \tilde{M}_\lambda f(x) & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ U_1(\tilde{M}_\lambda f) & U_1(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & U_1(e^{\rho\omega_n x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(\tilde{M}_\lambda f) & U_n(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & U_n(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix},$$

$$\tilde{M}_\lambda f(x) = -\frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{j=1}^n \int_0^x \omega_j e^{\rho\omega_j(x-\xi)} f(\xi) d\xi, \quad \Delta(\rho) = \det \|U_i(e^{\rho\omega_j x})\|_{i,j=1,\dots,n}.$$

Обозначим $P_j(x, f, \rho) = \begin{vmatrix} f_j(x) & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ U_1(f_j) & U_1(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & U_1(e^{\rho\omega_n x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(f_j) & U_n(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & U_n(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix}$, где $f_j(x) = \int_0^x e^{\rho\omega_j(x-\xi)} f(\xi) d\xi$,

$$U_m(f_j) = \sum_{l \in J^+} \alpha_{ml} \int_0^{c(\bar{\omega}_l-1)} (\rho\omega_j)^{m-1} e^{\rho\omega_j(c(\bar{\omega}_l-1)-\xi)} f(\xi) d\xi + \alpha_{m2k+1} \int_0^{\tilde{\gamma}} (\rho\omega_j)^{m-1} e^{\rho\omega_j(\tilde{\gamma}-\xi)} f(\xi) d\xi, \quad j = 1, \dots, \dots, n, \quad m = 1, \dots, n.$$

Тогда, согласно лемме 1, резольвента примет вид

$$\tilde{R}_\lambda f = -\frac{1}{n\rho^{n-1}\Delta(\rho)} \sum_{j=1}^n \omega_j P_j(x, f, \rho). \tag{4}$$

Распространим (как в [4]) резольвенту $\tilde{R}_\lambda f$ оператора L_2 на функции n раз радиально непрерывно дифференцируемые относительно начала координат. Теперь получим нужные нам оценки слагаемых P_j в формуле (4).

Лемма 2. Пусть $f(w)$ регулярна в T_{x_0} , непрерывна в \bar{T}_{x_0} , где $x_0 \in (0, \tilde{\gamma})$, и радиально продолжена в $\bar{T}_{\tilde{\gamma}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{при } \arg \rho \in [0; \pi/n] & \quad P_j(x, f, \rho) = O(\rho^\sigma e^{\rho\tilde{\alpha}x}), \quad j = 1, \dots, 4k+1, \\ \text{при } \arg \rho \in [-\pi/n; 0] & \quad P_j(x, f, \rho) = O(\rho^\sigma e^{\rho\tilde{\alpha}x}), \quad j = 1, \dots, 4k+1, \end{aligned}$$

где $\sigma = \frac{n(n-1)}{2}$, $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\alpha}_i = \begin{cases} 2\rho\omega_i - c\rho\omega_i, & i = 1, \dots, k-1, 3k+2, \dots, 4k+1, \\ c\rho\omega_i(\bar{\omega}_k - 1), & i = k, \dots, 2k, \\ c\rho\omega_i(\bar{\omega}_{3k+2} - 1), & i = 2k+1, \dots, 3k+1, \end{cases}$

$$\tilde{\alpha}_i = \begin{cases} 2\rho\omega_i - c\rho\omega_i, & i = 1, \dots, k, 3k+3, \dots, 4k+1, \\ c\rho\omega_i(\bar{\omega}_k - 1), & i = k+1, \dots, 2k+1, \\ c\rho\omega_i(\bar{\omega}_{3k+2} - 1), & i = 2k+2, \dots, 3k+2. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\arg \rho \in [0; \pi/n]$, $j = 1, \dots, k-1, 3k+2, \dots, 4k+1$. Используя радиальное продолжение f в $T_{\tilde{\gamma}}$ и теорему Коши в области T_{x_0} , представим элементы первого столбца $P_j(x, f, \rho)$ в виде суммы. Затем разложим P_j на сумму нескольких определителей:

$$\begin{aligned} P_j(x, f, \rho) &= \rho^\sigma \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ n\tilde{\varepsilon}_{j+2k} \int_{x_0}^{\tilde{\gamma}} e^{\rho\omega_j(\tilde{\gamma}-\xi)} f(\xi) d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} + \\ &+ \sum_{l \in J^+} \rho^\sigma \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ b_l \tilde{\varepsilon}_{j-l} \int_{c(\bar{\omega}_l-1)x_0/\tilde{\gamma}}^{c(\bar{\omega}_l-1)} e^{\rho\omega_j(c(\bar{\omega}_l-1)-\xi)} f(\xi) d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} + \\ &+ \sum_{l \in J^+} \rho^\sigma \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ b_l \tilde{\varepsilon}_{j-l} \int_{x_0}^{c(\bar{\omega}_l-1)x_0/\tilde{\gamma}} e^{\rho\omega_j(c(\bar{\omega}_l-1)-\xi)} f(\xi) d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} + \\ &+ \rho^\sigma \int_0^{x_0} e^{-\rho\omega_j \xi} \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_j x} \varepsilon(x, \xi) & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ \vec{U}(e^{\rho\omega_j x}) & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$



$$\vec{U}(u) = \begin{pmatrix} U_1(u) \\ \rho^{-1}U_2(u) \\ \vdots \\ \rho^{-n+1}U_n(u) \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_j \\ \vdots \\ \varepsilon_j^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon(x, \xi) = \begin{cases} 1, & x \leq \xi \\ 0, & x > \xi \end{cases}, \quad \text{где } \varepsilon_j = \exp \frac{2j\pi i}{n},$$

$$\alpha_{ij} = (\bar{\omega}_j)^{i-1} b_j, \quad j \in J^+, \quad \alpha_{i2k+1} = (\omega_{2k+1})^{i-1} n.$$

Оценим каждый определитель отдельно. Рассмотрим сначала определители вида

$$\begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ b_l \vec{\varepsilon}_{j-l} & \int_{c(\bar{\omega}_l-1)x_0/\tilde{\gamma}}^{c(\bar{\omega}_l-1)} e^{\rho\omega_j(c(\bar{\omega}_l-1)-\xi)} f(\xi) d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Легко получить предварительную оценку этого определителя:

$$O \left(\{1 + |e^{c\rho\omega_j(\bar{\omega}_l-1)(1-x_0/\tilde{\gamma})}|\} |e^{\rho\alpha}| \max_{i=1, n} |e^{\rho\omega_i x - \rho\alpha_i}| \right).$$

Поскольку $x < x_0 < \tilde{\gamma}$, то, по определению α_i , очевидно, что $\text{Re}(\rho\omega_i x - \rho\alpha_i) \leq 0, i = \overline{1, n}$.

Чтобы оценить $\text{Re}\{c\rho\omega_j(\bar{\omega}_l-1)(1-x_0/\tilde{\gamma}) + \rho\omega_i x - \rho\alpha_i\}$, рассмотрим все случаи в зависимости от значения α_i и получим, что оценка определителя (5) будет $O(e^{\rho\alpha})$.

Получим оценку следующего определителя:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ b_l \vec{\varepsilon}_{j-l} & \int_{x_0}^{c(\bar{\omega}_l-1)x_0/\tilde{\gamma}} e^{\rho\omega_j(c(\bar{\omega}_l-1)-\xi)} f(\xi) d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} = \\ & = O \left(\{ |e^{c\rho\omega_j(\bar{\omega}_l-1)(1-x_0/\tilde{\gamma})}| + |e^{c\rho\omega_j(\bar{\omega}_l-1)-c\rho\omega_j x_0}| \} |e^{\rho\alpha}| \max_{i=1, n} |e^{\rho\omega_i x - \rho\alpha_i}| \right) = \\ & = O \left(\{1 + |e^{(c\rho\omega_j(\bar{\omega}_l-1)-\rho\omega_j \tilde{\gamma})x_0/\tilde{\gamma}}|\} |e^{c\rho\omega_j(\bar{\omega}_l-1)(1-x_0/\tilde{\gamma})}| |e^{\rho\alpha}| \max_{i=1, n} |e^{\rho\omega_i x - \rho\alpha_i}| \right) = O(e^{\rho\alpha}). \end{aligned}$$

Рассмотрим еще один определитель. Сначала вынесем интеграл из первого столбца, затем вычтем первый столбец из $(j+1)$ -го столбца, разложим определитель по $(j+1)$ -му столбцу и оценим

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ n \vec{\varepsilon}_{j+2k} & \int_{x_0}^{\tilde{\gamma}} e^{\rho\omega_j(\tilde{\gamma}-\xi)} f(\xi) d\xi & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} = \\ & = \int_{x_0}^{\tilde{\gamma}} f(\xi) e^{-\rho\omega_j \xi} d\xi \begin{vmatrix} 0 & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_j x} & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ n \vec{\varepsilon}_{j+2k} e^{\rho\omega_j \tilde{\gamma}} & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_j x}) - n \vec{\varepsilon}_{j+2k} e^{\rho\omega_j \tilde{\gamma}} & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} = \\ & = O \left(\{ |e^{-\rho\omega_j x_0}| + |e^{-\rho\omega_j \tilde{\gamma}}| \} \{ |e^{\rho\omega_j x}| |e^{\rho\alpha}| + |e^{c\rho\omega_j(\bar{\omega}_j-1)}| |e^{\rho\alpha}| \max_{i=1, n, i \neq j} |e^{\rho\omega_i x - \rho\alpha_i}| \} \right) = \\ & = O \left(\{ |e^{\rho\omega_j(x-x_0)}| + |e^{c\rho\omega_j(\bar{\omega}_j-1)-\rho\omega_j x_0}| \max_{i=1, n, i \neq j} |e^{\rho\omega_i x - \rho\alpha_i}| \} |e^{\rho\alpha}| \right) = O(e^{\rho\alpha}). \end{aligned}$$

Рассмотрим последний определитель. Вычитая первый столбец из $(j+1)$ -го столбца и раскладывая по $(j+1)$ -му столбцу, получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_0} e^{-\rho\omega_j \xi} \begin{vmatrix} e^{\rho\omega_j x} \varepsilon(x, \xi) & e^{\rho\omega_1 x} & \dots & e^{\rho\omega_j x} \varepsilon(\xi, x) & \dots & e^{\rho\omega_n x} \\ \vec{U}(e^{\rho\omega_j x}) & \vec{U}(e^{\rho\omega_1 x}) & \dots & 0 & \dots & \vec{U}(e^{\rho\omega_n x}) \end{vmatrix} f(\xi) d\xi = \\ & = - \int_0^{x_0} e^{\rho\omega_j(x-\xi)} \varepsilon(\xi, x) \Delta(\rho) f(\xi) d\xi = O(e^{\rho\alpha}). \end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются все остальные случаи. Лемма доказана.



Теорема 1. Пусть $f(z)$ регулярна в T_α при $\alpha \in (\gamma; 1 - \gamma]$. Тогда на каждом интервале $J_\beta = (\operatorname{Re} \omega_k(1 - \beta); \beta)$, $\gamma < \beta < \alpha$, функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по с.п.ф. краевой задачи (1)–(2).

Доказательство. Пусть μ не является собственным значением оператора L_2 . Обозначим через $f_1(z)$ функцию, удовлетворяющую условиям: а) $f_1(z) = f(z)$ при $z \in T_\beta$; б) относительно точки $x = \gamma$ она n раз радиально непрерывно дифференцируема в $T_{1-\gamma}$; в) $U_i(f_1) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Будем рассуждать аналогично [4]. Распространим на такие функции резольвенту $\tilde{R}_\lambda f$. Пусть $C_n = \{\lambda : |\lambda| = r_n \uparrow \infty\}$. Тогда имеет место следующая формула:

$$f(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \tilde{R}_\lambda f_1(z) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\tilde{R}_\lambda F(z)}{\lambda - \mu} d\lambda, \quad z \in T_\beta, \quad (6)$$

где функция $F(z) = f_1^{(n)}(z) - \mu f_1(z)$ будет регулярна в T_β , непрерывна в \bar{T}_β и непрерывно продолжима в $\bar{T}_{1-\gamma}$. Тогда для $F(z)$ будет справедлива лемма 2. Следовательно, с учетом леммы 1, $\tilde{R}_\lambda F = -\frac{1}{n\rho^{n-1}\Delta(\rho)} O(\rho^\sigma e^{\rho^\alpha}) = O(\frac{1}{\rho^{n-1}})$. Отсюда получаем, что правая часть (6) при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю равномерно на интервале J_β . Теорема доказана.

Библиографический список

1. Хромов А.П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 17–24.
2. Дмитриев О.Ю. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n -го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Математика и ее приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1991. Вып. 2. С. 70–72.
3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
4. Хромов А.П. Оператор дифференцирования и ряды типа Дирихле // Мат. заметки. 1969. Т. 6, № 6. С. 759–766.

УДК 517.51

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПО МАТРИЦЕ ЯКОБИ, НОРМИРОВАННОЙ ОДНОРОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ

В.В. Егоров

Волгоградский государственный университет, кафедра математических методов и информатики в экономике
E-mail: yegoroff_vv@mail.ru

Рассмотрена система дифференциальных уравнений $f'(x) = \Phi(f'(x))M(x)$ с обобщенными частными производными, где $f'(x)$ — матрица Якоби искомого отображения, M — заданная матричнозначная функция размерности $n \times n$ с суммируемыми элементами, Φ — заданная функция от матриц.

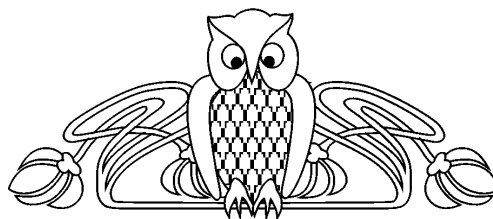
Уточним используемые в работе понятия и определения. Пусть \mathcal{M}_n — пространство матричнозначных функций, размерности $n \times n$, а $\Phi : \mathcal{M}_n \rightarrow R^1$ — заданная функция на этом пространстве. Пусть $f = (f^1, \dots, f^n) : D \subset R^n \rightarrow R^n$ — отображение класса $W_{p,loc}^1(D)$, $p \geq 1$, а $f'(x)$ — его матрица Якоби.

Введем матрицу $M_f(x) = \frac{f'(x)}{\Phi(f'(x))}$, которую назовем матрицей Якоби непостоянного отображения f , нормированной функцией Φ . В настоящей работе исследована система дифференциальных уравнений в обобщенных частных производных

$$f'(x) = \Phi(f'(x))M(x), \quad (1)$$

где $x \in D \subset R^n$ (D — односвязная область в R^n), $f : D \rightarrow R^n$ — искомое отображение, а $M : D \rightarrow \mathcal{M}_n$ и $\Phi : \mathcal{M}_n \rightarrow R^1$ — заданные функции.

Система (1) — обобщение систем, изученных в [1]–[6], что позволило на основе идей работ И.В. Журавлева [1], [2] провести исследование схожим образом, с учетом соответствующих особенностей.



Recovering of a Mapping Via Jacobi Matrix, Normalized Homogeneous Function

V.V. Egorov

Consider system of the differential equations $f'(x) = \Phi(f'(x)) \times M(x)$ with generalized partial derivatives, where $f'(x)$ is a matrix Jacobi of sought mapping, M is a given $n \times n$ matrix-value function with integrable elements, Φ is a given function of matrices.



Определение. Будем говорить, что функция $M: D \rightarrow \mathcal{M}_n$ принадлежит классу $\text{CH}_{\alpha, \beta, \gamma}(D)$ (где $\alpha \geq 1, \beta \geq 1, \gamma \geq 1$), если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) элементы матрицы $M(x)$, т. е. функции $m_{ij}(x)$, измеримы;
- 2) дифференциальные 1-формы $M^i = \sum_{j=1}^n m_{ij} dx^j$ ($i=1, \dots, n$) принадлежат пространству $L_\alpha(D)$ и обладают обобщенными дифференциалами dM^i класса $L_\beta(D)$;
- 3) функция $|M(x)|/\det M(x)$ принадлежит классу $L_\gamma(D)$.

При этом принадлежности тому или иному из классов Лебега понимаются в смысле суммируемости по Лебегу, а также используются следующие обозначения евклидовых норм $|M(x)| = \left(\sum_{i=1}^n |M^i(x)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n m_{ij}^2(x)\right)^{1/2}$ и $|dM(x)| = \left(\sum_{i=1}^n |dM^i(x)|^2\right)^{1/2}$.

Лемма 1. Если матрица $M(x)$ принадлежит классу $\text{CH}_{\alpha, \beta, \gamma}(D)$, то $\det M(x) \neq 0$ почти всюду в D .

Доказательство получается непосредственно в результате применения теоремы Чебышева (см., например, [7]), утверждающей, что если некоторая функция $g(x)$ суммируема в D по Лебегу, то $\text{mes}\{x \in D: |g(x)| \geq k\} \leq \frac{1}{k} \int_D |g(x)| dx$ (здесь mes — мера Лебега).

Тогда каждой матрице $M(x)$ класса $\text{CH}_{\alpha, \beta, \gamma}(D)$ возможно сопоставлять (пока лишь формально) дифференциальную 1-форму

$$\Lambda(M(x)) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{M^i(x)}{\det M(x)} \cdot *_n d(M^1(x) \wedge \dots \wedge M^n(x)), \quad (2)$$

где « \wedge » — операция внешнего произведения, $*_n$ — оператор Ходжа ($*_n c(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = c(x)$) и знак $\overset{i}{\cdot}$ означает пропуск во внешнем произведении множителя $M^i(x)$.

Лемма 2. Пусть D — односвязная область в R^n ($n \geq 2$) и $M(x)$ — функция класса $\text{CH}_{\alpha, \beta, \gamma}(D)$, то почти всюду в D справедливо

$$|\Lambda(M(x))| \leq \frac{\sqrt{n}}{|\det M(x)|} \cdot |M(x)|^{n-1} \cdot |dM(x)|. \quad (3)$$

А также если величины α, β, γ такие, что $\alpha > n(n-2), \beta > n, \gamma > n, \alpha\beta\gamma \geq \alpha\beta n + \alpha\gamma n + \beta\gamma n(n-2)$, то тогда дифференциальная 1-форма $\Lambda(M(x))$ является суммируемой по Лебегу со степенью $\xi = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)}$ и при этом, в частности, выполнено $\xi \geq n$ и

$$\|\Lambda(M)\|_{\xi, D} \leq \sqrt{n} \left\| |M(x)|^{n-2} \right\|_{\xi p', D} \left\| |dM(x)| \right\|_{\xi p'', D} \left\| \frac{|M(x)|}{\det M(x)} \right\|_{\xi p''', D} < \infty, \quad (4)$$

где $p' > 1, p'' > 1, p''' > 1$ — некоторые самосопряженные значения.

Доказательство. Справедливость неравенства (3) проверяется, как и в [1]. А на основе (3) и неравенства Гельдера (со значениями $p' > 1, p'' > 1, p''' > 1, \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} + \frac{1}{p'''} = 1$), приходим к (4) в результате выкладок

$$\begin{aligned} \|\Lambda(M(x))\|_{\xi, D} &= \left(\int_D |\Lambda(M(x))|^\xi dx \right)^{1/\xi} \leq \sqrt{n} \left(\int_D \left(|M(x)|^{(n-2)\xi} \right) \left(|dM(x)|^\xi \right) \left(\frac{|M(x)|}{\det M(x)} \right) dx \right)^{1/\xi} \leq \\ &\leq \sqrt{n} \left(\int_D |M(x)|^{(n-2)\xi p'} dx \right)^{1/\xi p'} \left(\int_D |dM(x)|^{\xi p''} dx \right)^{1/\xi p''} \left(\int_D \frac{|M(x)|^{\xi p'''}{\det M(x)} dx \right)^{1/\xi p'''} \end{aligned} \quad (5)$$

Докажем корректность приведенных рассуждений.

Сразу укажем на условие $\xi \geq n$, требуемое в силу того что ряд последующих в работе утверждений доказывается при его наличии. Кроме того, так как по условию данной леммы $M^i \in L_\alpha(D), dM^i \in L_\beta(D), \frac{|M|}{\det M} \in L_\gamma(D)$, то согласно полученному в левой части последнего неравенства, должно быть выполнено $(n-2)\xi p' \leq \alpha, \xi p'' \leq \beta, \xi p''' \leq \gamma$. Тогда $1 < p' \leq \frac{\alpha}{(n-2)\xi}, 1 < p'' \leq \frac{\beta}{\xi}, 1 < p''' \leq \frac{\gamma}{\xi}$. Откуда,



согласно $n \leq \xi$, имеем $n \leq \xi < \frac{\alpha}{n-2}$, $n \leq \xi < \beta$, $n \leq \xi < \gamma$, т. е. $n \leq \xi < \min \left\{ \frac{\alpha}{n-2}, \beta, \gamma \right\}$, что дает $\alpha > n(n-2)$, $\beta > n$, $\gamma > n$, и говорит о непустоте промежутка $\left[n, \min \left\{ \frac{\alpha}{n-2}, \beta, \gamma \right\} \right)$. Кроме того, из полученных ранее двойных неравенств на величины p' , p'' , p''' , с учетом самосопряженности этих величин, имеем $1 = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} + \frac{1}{p'''} \geq \frac{(n-2)\xi}{\alpha} + \frac{\xi}{\beta} + \frac{\xi}{\gamma} = \xi \cdot \frac{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)}{\alpha\beta\gamma}$, откуда $\xi \leq \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)}$.

Докажем не пустоту отрезка $(2 \leq) n \leq \xi \leq \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)}$, что эквивалентно выполнению неравенства $\alpha\beta\gamma \geq \alpha\beta n + \alpha\gamma n + \beta\gamma n(n-2)$, а значит, — неравенства $1 \geq \frac{n(n-2)}{\alpha} + \frac{n}{\beta} + \frac{n}{\gamma}$. Очевидно, что существуют достаточно большие α, β, γ , при которых это последнее неравенство выполнено, а значит, выполнено и неравенство $n \leq \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)}$ и отрезок $\left[n, \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)} \right]$ не пуст для выбора из него $\xi \in \left[n, \min \left\{ \frac{\alpha}{n-2}, \beta, \gamma \right\} \right) \neq \emptyset$.

Покажем, что всегда $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)} < \min \left\{ \frac{\alpha}{n-2}, \beta, \gamma \right\}$. Предположим, для определенности, что $\min \left\{ \frac{\alpha}{n-2}, \beta, \gamma \right\} = \gamma$, тогда неравенство $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)} < \gamma$ имеет место тогда и только тогда, когда (в силу $\gamma > n \geq 2$) выполнено $\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)} < 1$ или, что то же самое (в силу $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2) > 0$), когда $0 < \alpha + \beta(n-2)$, т. е. всегда. Аналогичное получается и в остальных случаях, когда $\min \left\{ \frac{\alpha}{n-2}, \beta, \gamma \right\} \neq \gamma$.

Таким образом, величина ξ должна быть из отрезка $\left[n, \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)} \right] \neq \emptyset$.

Осталось показать, что при установленных соотношениях возможно подобрать $1 < p' \leq \frac{\alpha}{(n-2)\xi}$, $1 < p'' \leq \frac{\beta}{\xi}$, $1 < p''' \leq \frac{\gamma}{\xi}$ самосопряженными.

Действительно, например, выбрав из отрезка $\left[n, \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)} \right] \neq \emptyset$ величину $\xi = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)}$, а величины p' , p'' , p''' равными соответственно $p' = \frac{\alpha}{(n-2)\xi}$, $p'' = \frac{\beta}{\xi}$, $p''' = \frac{\gamma}{\xi}$, имеем требуемое, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} + \frac{1}{p'''} = 1$. Лемма доказана.

Определение. Пусть $M(x) \in \text{CH}_{\alpha, \beta, \gamma}(D)$. Отображение $f: D \rightarrow R^n$ класса $W_{p, \text{loc}}^1(D)$, $p \geq 1$ назовем решением системы (1), если обобщенные производные $\frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j}$ почти всюду в D удовлетворяют равенствам $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) = \Phi(f'(x)) \cdot m_{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$.

Введем оператор $S_D \omega$, рассматриваемый на ограниченной области $D \subset R^n$, звездной относительно некоторого шара B , $\bar{B} \subset D$, действующий на дифференциальные 1-формы ω с коэффициентами ω_i из $L_p(D)$

$$S_D \omega(x) = \int_D \sum_{i=1}^n \omega_i(y) \frac{x^i - y^i}{|x - y|^n} k(x, y) dy,$$

где $k(x, y) = \int_{|x-y|}^{+\infty} \varphi \left(x + \frac{y-x}{|y-x|} u \right) u^{n-1} du$ и $\varphi \in C_0^\infty(B)$: $\int_B \varphi(x) dx = 1$.

Подобные операторы возникают в интегральных представлениях С.Л. Соболева и используются для восстановления функций с обобщенными производными. Основываясь на результатах [8], [9], [10], [11], отметим некоторые из их свойств и связанные с ними две леммы.

1) Если $p > n$, то $S_D \omega$ — непрерывная ограниченная функция и для любого $x \in D$ выполняется неравенство

$$|S_D \omega(x)| \leq C(p, n) \tau^{1-\frac{n}{p}} L \|\omega\|_{p, D}, \tag{6}$$

где $\tau = \sup_{x \in \partial D, y \in B} |x - y|$, $L = \sup_{x, y \in D} k(x, y)$ и $C(p, n)$ — постоянная.



2) Оператор $S_D \omega$ действует непрерывно из $L_p(D)$ в $L_p(D)$ ($p \geq 1$).

Лемма 3 [1]. Пусть D — ограниченная область пространства R^n ($n \geq 2$), звездная относительно шара B , $\bar{B} \subset D$. Пусть ω — дифференциальная форма первой степени, $\omega \in L_p(D)$ ($p \geq 1$). Если $d\omega = 0$, то функция $f(x) = S_D \omega(x)$ принадлежит классу $W_p^1(D)$ и для $S_D \omega(x)$ существует обобщенный дифференциал $df = d(S_D \omega) = \omega$.

Лемма 4 [2]. Пусть D — ограниченная область пространства R^n ($n \geq 2$), звездная относительно шара B , $\bar{B} \subset D$. Пусть $\omega(x)$ — дифференциальная 1-форма класса $L_p(D)$, $p \geq n$. Тогда функции $\lambda(x) = e^{S_D \omega(x)}$ и $1/\lambda(x)$ суммируемы на D с любой степенью $\sigma \geq 1$.

А также понадобится такая лемма

Лемма 5. Пусть $M(x)$ — функция класса $CH_{\alpha, \beta, \gamma}(D)$, где величины α, β, γ такие, что $\alpha > n(n-2)$, $\beta > n$, $\gamma > n$, $\alpha\beta\gamma \geq \alpha\beta n + \alpha\gamma n + \beta\gamma n(n-2)$ (и $n \geq 2$). Пусть также выполнено

а) при $n=2$ форма $\Lambda(M)$ замкнута;

б) при $n \geq 3$ форма $\Lambda(M)$ имеет обобщенный дифференциал класса $L_{\zeta, loc}(D)$, где $\zeta \geq 1$ — некоторое число, и почти всюду в D

$$dM^i \wedge M^j + dM^j \wedge M^i = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Тогда форма $\Lambda(M)$ замкнута (при $n \geq 2$) и почти всюду в D имеем

$$dM^i = M^i \wedge \Lambda(M), \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Доказательство. При $n \geq 2$ справедливость равенств (8) проверяется так же как и при доказательстве следствия 2 [3]. И тогда осталось доказать только замкнутость формы $\Lambda(M(x))$.

В случае $n=2$ форма $\Lambda(M(x))$ замкнута по условию теоремы. Рассмотрим теперь случай $n > 2$. Из равенств (8) в результате формального повторения алгебраических выкладок, приводимых при доказательстве следствия 3 [3], для случая принадлежности там элементов матрицы $M(x)$ классу $C^2(D)$, получаются соотношения:

$$d(M^1 \wedge \overset{i,j}{\wedge} M^n) = (2-n)\Lambda(M(x)) \wedge (M^1 \wedge \overset{i,j}{\wedge} M^n), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Однако в данном случае в отсутствие условий гладкости для корректности дополнительно следует привести обоснования существования обобщенного дифференциала $d(M^1 \wedge \overset{i,j}{\wedge} M^n)$ в формуле (9). Для этого воспользуемся следующей леммой Гольдштейна–Кузьминова–Шведова [12], являющейся обобщением леммы 4.4 [13].

Лемма [12]. Если ω^1 и ω^2 — внешние формы в открытой области $D \subset R^n$ такие, что $\omega^1 \in L_{p_1}(D)$, $\omega^2 \in L_{p_2}(D)$, причем существуют их обобщенные дифференциалы $d\omega^1 \in L_{q_1}(D)$, $d\omega^2 \in L_{q_2}(D)$, где $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$, $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$ и $\deg(\omega^1) + \deg(\omega^2) \leq n$. Тогда форма $\omega^1 \wedge \omega^2$ принадлежит классу $L_{1/(1/p_1 + 1/p_2)}(D)$ и имеет обобщенный дифференциал $d(\omega^1 \wedge \omega^2)$ класса $L_{1/\max\{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2}; \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_1}\}}(D)$. При этом $d(\omega^1 \wedge \omega^2) = d(\omega^1) \wedge \omega^2 + (-1)^{\deg(\omega^1)} \omega^1 \wedge d(\omega^2)$.

Здесь данную лемму требуется применить для доказательства существования обобщенного дифференциала внешнего произведения $n-2$ причем 1-форм, каждая класса $L_\alpha(D)$. Обобщая эту лемму на такой случай, рассуждая по индукции, заключаем о существовании обобщенного дифференциала $d(M^1 \wedge \overset{i,j}{\wedge} M^n)$ класса $L_{\frac{\alpha\beta}{\alpha+(n-2)\beta}}(D)$, а также — о принадлежности формы $M^1 \wedge \overset{i,j}{\wedge} M^n$ классу $L_{\frac{\alpha}{n-2}}(D)$.

Заметим дополнительно, что в силу выполнения соотношений $\alpha\beta\gamma \geq \alpha\beta n + \alpha\gamma n + \beta\gamma n(n-2)$ имеем $\frac{\alpha\beta}{\alpha+(n-2)\beta} \geq 1$ при $n \geq 2$ и, следовательно, в частности, $d(M^1 \wedge \overset{i,j}{\wedge} M^n) \in L_{\frac{\alpha\beta}{\alpha+(n-2)\beta}}(D) \subseteq L_1(D)$.

Применим далее к (как уже показано) обобщенному дифференциалу $\frac{1}{2-n} d(M^1 \wedge \overset{i,j}{\wedge} M^n)$ класса $L_1(D)$ лемму 4.6 [13].

Лемма 4.6 [13]. Если форма ω класса $L_{1, loc}(D)$ степени $r \geq 1$ является обобщенным дифференциалом некоторой формы θ , то обобщенный дифференциал формы ω равен нулю.

Учитывая указанную лемму и соотношения (9), получаем

$$0 = d\left(\frac{1}{2-n} d(M^1 \wedge \overset{i,j}{\wedge} M^n)\right) = d(\Lambda(M) \wedge M^1 \wedge \overset{i,j}{\wedge} M^n). \quad (10)$$



Для корректного продолжения вычисления правой части полученного равенства (10), т. е. применения к вычислению обобщенного дифференциала $d(\Lambda(M) \wedge M^1 \wedge \overset{i,j}{\vee} \wedge M^n)$ формулы из упомянутой выше леммы Гольдштейна–Кузьмина–Шведова [12], следует опять проверить выполнение условий этой леммы. А именно в данном случае достаточно лишь указать, что $\deg \Lambda + \deg(M^1 \wedge \overset{i,j}{\vee} \wedge M^n) = 1 + (n-2) = n-1 \leq n$ и что следующие дифференциальные формы принадлежат требуемым пространствам Лебега: $\Lambda(M) \in L_\xi(D)$ (согласно лемме 2, и там же указано $\xi = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)}$), $(M^1 \wedge \overset{i,j}{\vee} \wedge M^n) \in L_{\frac{\alpha}{n-2}}(D)$ (по доказанному ранее в данной лемме), $d\Lambda(M) \in L_\zeta(D)$ (по условию данной леммы), $d(M^1 \wedge \overset{i,j}{\vee} \wedge M^n) \in L_{\frac{\alpha\beta}{\alpha+(n-2)\beta}}(D)$ (по доказанному ранее в данной лемме), и все величины $\xi, \frac{\alpha}{n-2}, \zeta, \frac{\alpha\beta}{\alpha+(n-2)\beta}$ — больше или равны единице.

Таким образом, условия леммы Гольдштейна–Кузьмина–Шведова [12] выполнены, и для продолжения равенства (10) можно воспользоваться приведенной в этой лемме формулой, что с учетом (9) дает

$$0 = d(\Lambda(M) \wedge M^1 \wedge \overset{i,j}{\vee} \wedge M^n) = d\Lambda(M) \wedge M^1 \wedge \overset{i,j}{\vee} \wedge M^n + (n-2)\Lambda(M) \wedge (\Lambda(M) \wedge M^1 \wedge \overset{i,j}{\vee} \wedge M^n) = d\Lambda(M) \wedge M^1 \wedge \overset{i,j}{\vee} \wedge M^n.$$

Обозначив через β_{sl} — коэффициенты дифференциальной 2-формы $d\Lambda(M)$ относительно базиса $M^s \wedge M^l, 1 \leq s < l \leq n$, т. е. представив форму $d\Lambda(M)$ в виде $d\Lambda(M) = \sum_{1 \leq s < l \leq n} \beta_{sl} M^s \wedge M^l$, подставим это представление в последнее полученное равенство и получим

$$0 = \beta_{ij} M^i \wedge M^j \wedge M^1 \wedge \overset{i,j}{\vee} \wedge M^n = \beta_{ij} (-1)^{i+j-1} \det M \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

А в силу $\det M \neq 0$ имеем $\beta_{sl} = 0$, откуда $d\Lambda(M) = 0$ почти всюду в D . Лемма 5 доказана.

О существовании решений системы (1) утверждает

Теорема 1. Пусть D — ограниченная область пространства $R^n, n \geq 2$, звездная относительно шара $B, \bar{B} \subset D$. Пусть функция $M: D \rightarrow M_n$ удовлетворяет условиям леммы 5 и пусть функция $\Phi: M_n \rightarrow D$ является либо простой однородной (в смысле $\Phi(\alpha M(x)) = \alpha \Phi(M(x))$ для любого $\alpha \in R^1$) и удовлетворяющей условию $\Phi(M(x)) = 1$ почти всюду в области D , либо положительно однородной (в смысле $\Phi(\alpha M(x)) = |\alpha| \Phi(M(x))$ для любого $\alpha \in R^1$), удовлетворяющей условию $|\Phi(M(x))| = 1$ почти всюду в области D и условию неизменности знака $\Phi(M(x))$. Тогда при простой однородности Φ решение системы (1) есть отображение

$$f_0(x) = (f_0^1(x), \dots, f_0^n(x)), \text{ где } f_0^i(x) = S_D(e^{S_D \Lambda(M(x))}) M^i(x), \tag{11}$$

а при положительной однородности Φ — отображение

$$f_0(x) = (f_0^1(x), \dots, f_0^n(x)), \text{ где } f_0^i(x) = \Phi(M(x)) S_D(e^{S_D \Lambda(M(x))}) M^i(x). \tag{12}$$

При этом справедливы утверждения:

1. $d \ln \Phi(f_0'(x)) = \Lambda(M(x))$.

2. Если $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)} = n$, то функция $\Phi(f_0'(x))$ принадлежит каждому пространству $L_\sigma(D)$, где $\sigma \geq 1$, и обладает обобщенным дифференциалом класса $L_\nu(D)$ для каждого $\nu, 1 \leq \nu < n$.

3. Если $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)} > n$, то функция $\Phi(f_0'(x))$ принадлежит каждому пространству $L_\sigma(D)$, где $\sigma \geq 1$, обладает обобщенным дифференциалом класса $L_\nu(D), \nu = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)}$, и почти всюду в области D при простой однородности Φ выполняется неравенство

$$e^{-C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)} \leq \Phi(f_0'(x)) \leq e^{C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)},$$

а при положительной однородности Φ — неравенство

$$e^{-C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)} \leq |\Phi(f_0'(x))| \leq e^{C(\alpha,\beta,\gamma,n,D,M)}.$$



Здесь C — постоянная, зависящая от $\alpha, \beta, \gamma, n, D$ и M .

4. Почти всюду в D определена матрица $M_{f_0}(x) = \frac{f'_0(x)}{\Phi(f'_0(x))}$ и выполнено равенство $M_{f_0}(x) = M(x)$.

Доказательство. Введем функцию $\lambda(x) = e^{S_D \Lambda(M(x))} > 0$. А также заметим, что при выполнении условий данной теоремы по лемме 2 имеем $\Lambda(M) \in L_\xi(D)$, где $\xi = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma(n-2)} \geq n$.

По лемме 4 функция $\lambda(x)$ при $\xi = n$ локально суммируема в D с любой степенью $\sigma \geq 1$, а при $\xi > n$ в силу свойства 2) оператора S_D помимо указанного еще и непрерывна и ограничена в D .

По условию данной теоремы выполнены условия леммы 5, а значит, дифференциальная форма $\Lambda(M)$ замкнута. Тогда в силу лемм 3 и 4 существует обобщенный дифференциал функции $\lambda(x)$, равный

$$d\lambda(x) = d(e^{S_D \Lambda(M(x))}) = e^{S_D \Lambda(M(x))} d(S_D \Lambda(M(x))) = \lambda(x) \Lambda(M(x)). \quad (13)$$

Формула (13) с учетом включения $\Lambda(M) \in L_\xi(D)$ и отмеченных свойств $\lambda(x)$ показывает, что при $\xi = n$ обобщенные производные функции $\lambda(x)$ суммируемы в D с любой степенью $\nu, 1 \leq \nu < \xi = n$; а при $\xi > n$ имеет место еще и $d\lambda \in L_\xi(D)$.

Рассмотрим дифференциальные формы $\lambda M^i, i=1, \dots, n$. Дифференцируя λM^i и пользуясь равенствами (8) (имеющими место в силу выполнения леммы 5 по условию данной теоремы) и (13), получаем $d(\lambda M^i) = d\lambda \wedge M^i + (-1)^0 \lambda \cdot dM^i = \lambda \cdot \Lambda(M) \wedge M^i + \lambda \cdot M^i \wedge \Lambda(M) = 0$, т. е. формы λM^i замкнуты (наличие обобщенных дифференциалов доказывает применение упоминавшейся при доказательстве леммы 5 леммы Гольдштейна–Кузьминова–Шведова [12]).

Так как формы λM^i замкнуты, то для функций, определенных формулами (11) и (12), по лемме 3 при простой однородной Φ имеем $df_0^i(x) = dS_D(\lambda(x)M^i(x)) = \lambda(x)M^i(x), i = 1, \dots, n$, т. е.

$$f'_0(x) = \lambda(x) \cdot M(x); \quad (14)$$

а при положительной однородности у Φ (и с учетом неизменности при этом знака $\Phi(M)$) имеем $df_0^i(x) = \Phi(M(x))\lambda(x)M^i(x), i=1, \dots, n$, т. е.

$$f'_0(x) = \Phi(M(x))\lambda(x) \cdot M(x). \quad (15)$$

Тогда при простой однородности у Φ в силу (14) и по имеющему место при этом в силу условия данной теоремы $\Phi(M(x))=1$ получаем

$$\Phi(f'_0) = \Phi(\lambda \cdot M) = \lambda \Phi(M) = \lambda > 0. \quad (16)$$

При положительной однородности у Φ в силу (15) и по имеющему место при этом $|\Phi(M(x))|=1$, учитывая $\lambda > 0$, получаем

$$\Phi(f'_0) = \Phi(\Phi(M)\lambda \cdot M) = |\Phi(M)\lambda| \Phi(M) = \lambda \Phi(M), \quad (17)$$

откуда почти всюду в D (из-за $|\Phi(M(x))| = 1$ и $\lambda > 0$)

$$|\Phi(f'_0(x))| = \lambda(x) \neq 0. \quad (18)$$

Формулы (14), (16) при простой и (15), (17) при положительной однородности Φ показывают, что f_0 является решением системы (1).

Из установленных ранее свойств функции $\lambda(x) = e^{S_D \Lambda(M(x))}$ и в силу равенства (16), имеющего место при простой однородной Φ , либо равенства (18), имеющего место при положительно однородной Φ , следует, что при $\xi = n$ функция $\Phi(f'_0(x))$ принадлежит пространству $L_\sigma(D)$ для всякого $\sigma \geq 1$ и обладает обобщенными производными класса $L_\nu(D)$ для каждого $\nu, 1 \leq \nu < n$; а при $\xi > n$ функция $\Phi(f'_0(x))$ принадлежит пространству $L_\sigma(D)$ для всякого $\sigma \geq 1$ и обладает обобщенными производными класса $L_\xi(D)$.

Далее пользуясь неравенствами (4), (6) (напомним, что (6) имеет место при $\xi > n$), получаем $|S_D \Lambda(x)| \leq C(\alpha, \beta, \gamma, n, D, M)$ (где C — постоянная). А учитывая, что $\Phi(f'_0(x)) = \lambda(x) = e^{S_D \Lambda(M(x))}$ — при простой однородности Φ и что $|\Phi(f'_0(x))| = \lambda(x) = e^{S_D \Lambda(M(x))}$ — при положительной однородности Φ , заключаем $e^{-C} \leq \Phi(f'_0(x)) \leq e^C$ — при простой и $e^{-C} \leq |\Phi(f'_0(x))| \leq e^C$ — при положительной однородности Φ .

Наконец, поскольку $\Phi(f'_0(x)) \neq 0$ почти всюду в D при любой однородности у Φ , то почти всюду в D определена матрица $M_{f_0}(x) = \frac{f'_0(x)}{\Phi(f'_0(x))}$. В силу доказанного о том, что $f_0(x)$ — решение системы (1), заключаем, что почти всюду в D матрица $M_{f_0}(x)$ совпадает с $M(x)$.



Итак, все утверждения данной теоремы установлены.

Замечание. Необходимые условия $\Phi(M(x))=1$ либо $|\Phi(M(x))|=1$ существования решения системы (1) возникают при применении соответствующей однородной функции Φ к тождеству $f'(x) \equiv \Phi(f'(x))M(x)$.

Библиографический список

1. Журавлев И.В. О восстановлении отображения по нормированной матрице Якоби // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 5. С. 53–61.
2. Журавлев И.В. К задаче восстановления отображения по нормированной матрице // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 77–87.
3. Егоров В.В. О системах дифференциальных уравнений, возникающих в теории квазиконформных отображений. Волгоград, 1997. Деп. в ВИНТИ № 2777–В97. 16 с.
4. Егоров В.В. Об интегрируемости одной системы дифференциальных уравнений с частными производными, возникающей в теории квазиконформных отображений. Волгоград, 1998. Деп. в ВИНТИ № 1816–В98. 15 с.
5. Егоров В.В. О системе дифференциальных уравнений, описывающей отображения с ограниченным искажением // Вестн. ВолГУ. Сер. 1 (Математика). Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2004. Вып. 8.
6. Шушков Д.В. Восстановление отображения по характеристике $f'(x)/\|f'(x)\|$ // Тр. по геометрии и анализу. Новосибирск: Изд-во Ин-та мат., 2003.
7. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986. 368 с.
8. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
9. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
10. Буренков В.И. Интегральные представления Соболева и формула Тейлора // Тр. МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 33–38.
11. Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
12. Гольдштейн В.М., Кузьминов В.И., Шведов И.А. Дифференциальные формы на липщцевом многообразии // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 2. С. 16–30.
13. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

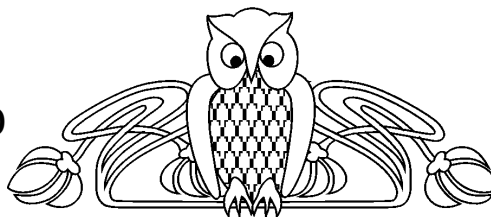
УДК 517.984

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

В.П. Курдюмов, А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной
математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Для дифференциально-разностного оператора переменной структуры с интегральными краевыми условиями доказана базисность Рисса его собственных и присоединенных функций в пространстве $L_2^3[0, 1]$.



On Riesz Bases of the Eigen and Associated Functions of the Functional-Differential Operator with a Variable Structure

V.P. Kurdyumov, A.P. Khromov

For a functional-differential operator of a variable structure with integral boundary conditions the Riesz basisness of its eigen and associated functions in the space $L_2^3[0, 1]$ is proved.

Рассмотрим функционально-дифференциальный оператор

$$Ly = l[y] = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \\ y_3'(x) + p(x)y_3(x) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ (T — знак транспонирования), $x \in [0, 1]$, с граничными условиями:

$$y_1(0) = y_3(1), \quad y_2(1) = y_3(0), \quad \int_0^1 y_1(t) d\sigma_1(t) + \int_0^1 y_2(t) d\sigma_2(t) + \int_0^1 y_3(t) d\sigma_3(t) = 0. \quad (2)$$

Предполагаем, что $\alpha_i^2 \neq \beta_i^2$, $p_{ij}(x) \in C^1[0, 1]$ ($i, j = 1, 2$), $p(x) \in C^1[0, 1]$, $\sigma_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) — функции ограниченной вариации, имеющие скачки в точках 0 и 1.



Настоящей работой продолжают исследования функционально-дифференциальных операторов с операторами отражения, которые интенсивно развиваются [1]–[2]. В работе рассматривается вопрос о базисах Рисса из собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) оператора (1)–(2). Эта задача для дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями изучалась в [3]–[4].

Пусть $y = R_\lambda f$, где $R_\lambda = (L - \lambda R)^{-1}$ — резольвента оператора L (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор), $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$. Тогда y удовлетворяет системе

$$\alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) = \lambda y_1(x) + f_1(x), \quad (3)$$

$$\alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) = \lambda y_2(x) + f_2(x), \quad (4)$$

$$y_3'(x) + p(x)y_3(x) = \lambda y_3(x) + f_3(x) \quad (5)$$

и условиям (2).

Введем краевую задачу

$$u' + \tilde{P}(x)u - \lambda Du = \tilde{m}(x), \quad (6)$$

$$\tilde{M}_0 u(0) + \tilde{M}_1 u(1) = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^1 (u_1(t) + b_1 u_2(t)) d\sigma_1(t) + \int_0^1 (u_3(t) + b_2 u_4(t)) d\sigma_2(t) + \int_0^1 u_5(t) d\sigma_3(t) = 0, \quad (8)$$

где $u = (u_1, \dots, u_5)^T$, $D = \text{diag}(D_1, D_2, D_3)$, $D_k = \text{diag}(i\sqrt{d_k}, -i\sqrt{d_k})$ ($k = 1, 2$), $D_3 = (1)$, $d_k = \beta_k^2 - \alpha_k^2$ ($k = 1, 2$), $\tilde{P}(x) = \text{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}P_1(x)B_1, B_2^{-1}Q_2^{-1}P_2(x)B_2, B_3^{-1}Q_3^{-1}P_3(x)B_3)$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ b_k & 1 \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2$), $b_k = \beta_k^{-1}(i\sqrt{d_k} + \alpha_k)$ ($k = 1, 2$), $B_3 = (1)$, $Q_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & -\alpha_k \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2$), $Q_3 = (1)$, $P_k(x) = \begin{pmatrix} p_{k1}(x) & p_{k2}(x) \\ p_{k2}(1-x) & p_{k1}(1-x) \end{pmatrix}$ ($k = 1, 2$), $P_3(x) = (p(x))$, $\tilde{m}(x) = \text{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}, B_2^{-1}Q_2^{-1}, B_3^{-1}Q_3^{-1})m(x)$, $m(x) = (m_1(x), \dots, m_5(x))^T$, $m_1(x) = f_1(x)$, $m_2(x) = f_1(1-x)$, $m_3(x) = f_2(x)$, $m_4(x) = f_2(1-x)$, $m_5(x) = f_3(x)$, $\tilde{M}_0 = M_0 B$, $\tilde{M}_1 = M_1 B$, M_k ($k = 0, 1$) — матрица размерности 4×5 с элементами $m_{ij}^{(k)}$, $m_{11}^{(0)} = m_{34}^{(0)} = m_{44}^{(0)} = m_{22}^{(1)} = 1$, $m_{35}^{(0)} = m_{15}^{(1)} = m_{25}^{(1)} = m_{43}^{(1)} = -1$, $m_{ij}^{(k)} = 0$ при остальных i, j и $k = 0, 1$, $B = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$.

Лемма 1. Если $y = R_\lambda f$, $u(x, \lambda)$ — решение задачи (6)–(8) и $z(x) = Bu(x, \lambda)$, то $z_1(x) = y_1(x)$, $z_3(x) = y_2(x)$, $z_5(x) = y_3(x)$, где $z(x) = (z_1(x), \dots, z_5(x))^T$.

Присутствие матрицы $\tilde{P}(x)$ в (6) является серьезным препятствием в исследовании решения задачи (6)–(8). Здесь мы приведем ее преобразование, заменяющее $\tilde{P}(x)$ на матрицу с элементами $O(\lambda^{-1})$ ([5], с.48–58).

Пусть $H_0(x) = (H_{01}(x), H_{02}(x), H_{03}(x))$, где $H_{01}(x) = \text{diag}(h_1(x), h_2(x))$, $H_{02}(x) = \text{diag}(h_3(x), h_4(x))$, $h_i(x) = \exp\left(-\int_0^x \tilde{p}_{ii}(t) dt\right)$, $\tilde{p}_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $\tilde{P}(x)$; $H_1(x) = \text{diag}(H_{11}(x), H_{12}(x), H_{13}(x))$, где $H_{13}(x) = 0$, $H_{1k}(x)$ ($k = 1, 2$) — кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения $H'_{0k}(x) + \tilde{P}_k(x)H_{0k}(x) + (H_{1k}(x)D_k - D_k H_{1k}(x)) = 0$, $\tilde{P}_k(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}P_k(x)B_k$.

Теорема 1. При больших $|\lambda|$ неособое преобразование $u = H(x, \lambda)v$, где $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, приводит систему (6)–(8) к виду

$$v' + P_\lambda(x)v - \lambda Dv = m(x, \lambda), \quad (9)$$

$$U_1(v) = U_1(H(x, \lambda)v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \quad (10)$$

$$U_2(v) = U_2(H(x, \lambda)v) = \int_0^1 [(h_1(t) + \lambda^{-1}b_1\tilde{r}_2(t))v_1(t) + (b_1h_2(t) + \lambda^{-1}\tilde{r}_1(t))v_2(t)] d\sigma_1(t) + \int_0^1 [(h_3(t) + \lambda^{-1}b_2\tilde{r}_4(t))v_3(t) + (b_2h_4(t) + \lambda^{-1}\tilde{r}_3(t))v_4(t)] d\sigma_2(t) + \int_0^1 h_5(t)v_5(t) d\sigma_3(t) = 0, \quad (11)$$

где $P_\lambda(x) = \lambda^{-1}H^{-1}(x, \lambda)(H'_1(x) + \tilde{P}(x)H_1(x))$, $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)\tilde{m}(x)$, $M_{0\lambda} = \tilde{M}_0 H(0, \lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1 H(1, \lambda)$, $\tilde{r}_k(t)$ ($k = 1, 2$) — элементы матрицы $H_{11}(t)$, $\tilde{r}_k(t)$ ($k = 3, 4$) — элементы матрицы $H_{12}(t)$.

Лемма 2. Если $v(x, \lambda) = (v_1(x, \lambda), \dots, v_5(x, \lambda))^T$ является решением (9)–(11), то

$$R_\lambda f = ((h_1(x) + \lambda^{-1}b_1\tilde{r}_2(x))v_1(x, \lambda) + (b_1h_2(x) + \lambda^{-1}\tilde{r}_1(x))v_2(x, \lambda),$$



$$(h_3(x) + \lambda^{-1}b_2\tilde{r}_4(x))v_3(x, \lambda) + (b_2h_4(x) + \lambda^{-1}\tilde{r}_3(x))v_4(x, \lambda), h_5(x)v_5(x, \lambda))^T.$$

Введем еще такую краевую задачу

$$w' - \mu\hat{D}w = m(x), \tag{12}$$

$$U_1(w) = M_{0\lambda}w(0) + M_{1\lambda}w(1) = 0, \tag{13}$$

$$U_2(w) = \int_0^1 [t_1(t, \mu)w_1(t) + t_2(t, \mu)w_2(t)] d\sigma_1(t) + \int_0^1 [t_3(t, \mu)w_3(t) + t_4(t, \mu)w_4(t)] d\sigma_2(t) + \int_0^1 t_5(t, \mu)w_5(t) d\sigma_3(t) = 0, \tag{14}$$

где $m = (m_1, \dots, m_5)^T$, $m_i = m_i(x) \in C[0, 1]$, $\mu = i\lambda/\sqrt{d_1}$, $D = \text{diag}(1, -1, d, -d, \omega)$, $d = \sqrt{d_1/d_2}$, $\omega = \sqrt{d_1}/i$, то есть $\lambda D = \mu\hat{D}$, $t_1(t, \mu) = h_1(t) + \mu^{-1}b_1r_2(t)$, $t_2(t, \mu) = b_1h_2(t) + \mu^{-1}r_1(t)$, $t_3(t, \mu) = h_3(t) + \mu^{-1}b_2r_4(t)$, $t_4(t, \mu) = b_2h_4(t) + \mu^{-1}r_3(t)$, $t_5(t, \mu) = h_5(t)$, $r_k(t) = i\tilde{r}_k(t)/d$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Предполагаем далее, что $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Обозначим через M_μ вектор-строку $M_\mu = \left(\int_0^1 t_1(t, \mu)e^{\mu(t-1)} d\sigma_1(t), \int_0^1 t_2(t, \mu)e^{-\mu t} d\sigma_1(t), \int_0^1 t_3(t, \mu) \times e^{\mu d(t-1)} d\sigma_2(t), \int_0^1 t_4(t, \mu)e^{-\mu dt} d\sigma_2(t), \int_0^1 t_5(t, \mu)e^{\mu\omega(t-1)} d\sigma_3(t) \right)$, $V(x, \mu) = \text{diag}(e^{\mu(x-1)}, e^{-\mu x}, e^{\mu d(x-1)}, e^{-\mu dx}, e^{\mu\omega(x-1)})$; $\Delta(\mu) = (U_1^T(V(x, \mu)), M_\mu^T)^T = (U_1^T(H(x, \lambda)V(x, \mu)), M_\mu^T)^T$; $g(x, t, \mu) = \text{diag}(g_1(x, t, \mu), \dots, g_5(x, t, \mu))$; $g_k(x, t, \mu) = \varepsilon(x, t)e^{\mu\omega_k(x-t)}$, если $\text{Re } \mu\omega_k \leq 0$; $g_k(x, t, \mu) = -\varepsilon(t, x)e^{\mu\omega_k(x-t)}$, если $\text{Re } \mu\omega_k \geq 0$; $\varepsilon(x, t) = 1$, если $x \geq t$, $\varepsilon(x, t) = 0$, если $x < t$; $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -1$, $\omega_3 = d$, $\omega_4 = -d$, $\omega_5 = \omega$.

Лемма 3. Если матрица $\Delta(\mu)$ обратима, то для решения $w(x) = W_\mu m(x)$ задачи (12)–(14) справедлива формула $W_\mu m(x) = \int_0^1 g(x, t, \mu)m(t) dt - V(x, \mu)\Delta^{-1}(\mu)\Phi(m, \mu)$, где $\Phi(m, \mu) = (R_1(\mu), \dots, \dots, R_5(\mu))^T$, $R_i(\mu)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) является линейной комбинацией с ограниченными по μ (при $|\mu|$ достаточно больших) коэффициентами интегралов

$$\int_0^1 n(t)e^{-\mu t} dt, \int_0^1 n(t)e^{-\mu dt} dt, \int_0^1 n(t)e^{-\mu\omega t} dt, \tag{15}$$

а $R_5(\mu)$ — интегралов

$$\int_0^1 \varphi_i(t)e^{-\mu t} dt, \int_0^1 \varphi_i(t)e^{-\mu dt} dt, \int_0^1 \varphi_i(t)e^{-\mu\omega t} dt \quad (i = 1, \dots, 5), \tag{16}$$

где $n(t)$ есть одна из функций $m_i(t)$, $m_i(1-t)$ ($i = 1, \dots, 5$); $\varphi_1(t) = \int_0^{1-t} m_1(\tau+t)\psi(\tau) d\sigma_1(\tau)$, $\varphi_2(t) = \int_t^1 m_2(\tau-t)\psi(\tau) d\sigma_1(\tau)$, $\varphi_3(t) = \int_0^{1-t} m_3(\tau+t)\psi(\tau) d\sigma_2(\tau)$, $\varphi_4(t) = \int_t^1 m_4(\tau-t)\psi(\tau) d\sigma_2(\tau)$, $\varphi_5(t) = \int_0^{1-t} m_5(\tau+t)\psi(\tau) d\sigma_3(\tau)$, $\psi(\tau)$ совпадает с одной из функций $h_1(\tau)$, $b_1h_2(\tau)$, $h_3(\tau)$, $b_2h_4(\tau)$, $h_5(\tau)$, $r_1(\tau)$, $b_1r_2(\tau)$, $r_3(\tau)$, $b_2r_4(\tau)$.

Пусть в дальнейшем выполняется условие $b_1b_2(\alpha_1 + b_1\beta_1 + \beta_3)(\alpha_2 + b_2\beta_2 + \alpha_3b_2)(\alpha_1b_1 + \beta_1 + b_2\beta_3) \times (\alpha_2b_2 + \beta_2 + \alpha_3) \neq 0$, где $\alpha_i = \sigma_i(+0) - \sigma_i(0)$, $\beta_i = \sigma_i(1) - \sigma_i(1-0)$ ($i = 1, 2, 3$). Обозначим $\varphi(\mu) = \det \Delta_1(\mu)$, где $\Delta_1(\mu) = (U_{10}^T(V(x, \mu)), M_{\mu 0}^T)^T$, $U_{10}(V(x, \mu)) = U_1(H_0(x)v(x, \mu))$, $M_{\mu 0}$ — вектор-строка, имеющая вид $M_{\mu 0} = \left(\int_0^1 h_1(t)e^{\mu(t-1)} d\sigma_1(t), \int_0^1 b_1h_2(t)e^{-\mu t} d\sigma_1(t), \int_0^1 h_3(t)e^{\mu d(t-1)} d\sigma_2(t), \int_0^1 b_2h_4(t)e^{-\mu dt} d\sigma_2(t), \int_0^1 h_5(t)e^{\mu\omega(t-1)} d\sigma_3(t) \right)$.

Далее рассматриваем область $S = \{\mu | \text{Re } \mu \geq 0, \text{Re } \mu\omega \geq 0\}$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Через S_δ обозначим область, получающуюся из S удалением всех нулей $\varphi(\mu)$ вместе с



круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ (считаем, что эти нули не находятся в δ -окрестности границы области S).

Лемма 4. Нули функции $\varphi(\mu)$ находятся в двух полуполосах: вдоль мнимой и вещественной осей. Причем в любом прямоугольнике $|\text{Im } \mu - t| \leq 1$ первой полуполосы и любом прямоугольнике $|\text{Re } \mu - t| \leq 1$ второй полуполосы число этих нулей ограничено при всех вещественных t . В S_δ справедлива оценка $|\varphi(\mu)| \geq C$, где $C > 0$ и не зависит от μ .

Из леммы 4 сразу следует

Лемма 5. Для всех достаточно больших μ в области S_δ имеет место оценка $|\det \Delta(\mu)| \geq C$, где $C > 0$ и не зависит от μ .

Обозначим через Π полуполосу из леммы 4, расположенную вдоль мнимой оси, $\Pi(\delta) = S_\delta \cap \Pi$.

Лемма 6. Если $\mu \in \Pi(\delta)$ и $|\mu|$ достаточно велико, то существует единственное решение задачи (12)–(14), для компонент которого имеют место представления:

$$\begin{aligned} (W_\mu m)_1 &= - \int_x^1 e^{\mu(x-t)} m_1(t) dt + W_1(m, \mu) e^{\mu(x-1)}, \\ (W_\mu m)_2 &= \int_0^x e^{-\mu(x-t)} m_2(t) dt + W_2(m, \mu) e^{-\mu x}, \\ (W_\mu m)_3 &= - \int_x^1 e^{\mu d(x-t)} m_3(t) dt + W_3(m, \mu) e^{\mu d(x-1)}, \\ (W_\mu m)_4 &= \int_0^x e^{-\mu d(x-t)} m_4(t) dt + W_4(m, \mu) e^{-\mu dx}, \\ (W_\mu m)_5 &= - \int_x^1 e^{\mu \omega(x-t)} m_5(t) dt + W_5(m, \mu) e^{\mu \omega(x-1)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $W_i(m, \mu)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — линейные комбинации интегралов (15), а $W_5(m, \mu)$ — интегралов (16) с ограниченными по μ коэффициентами.

Пусть $\varphi(t, g)$ — одна из функций леммы 3, когда $m_i(x)$ ($i = 1, \dots, 5$) заменены на произвольную функцию $g(x) \in C[0, 1]$.

Лемма 7. Если $g(x) \in C[0, 1]$, то справедлива оценка $\|\varphi(t, g)\| \leq C \|g\|$, где $C > 0$ и не зависит от $g(x)$, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0, 1]$.

По лемме 7 $\varphi(t, g)$ как оператор по g продолжается по непрерывности на все $L_2[0, 1]$. Это продолжение мы также обозначим через $\varphi(t, g)$. Тем самым мы можем рассматривать задачу (12)–(14), когда $m(x) \in L_2^5[0, 1]$.

Лемма 8. Если $\mu \in \Pi(\delta)$ и $|\mu|$ достаточно велико, то для краевой задачи (12)–(14) при $m(x) \in L_2^5[0, 1]$ существует единственное решение $W_\mu m(x)$ и для его компонент имеют место формулы (17), в которых $\varphi_i(t)$ из леммы 3 заменяются на соответствующие операторы $\varphi(t, g)$ в $L_2[0, 1]$.

Считаем, что функции $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) в задаче (3)–(5) принадлежат $L_2[0, 1]$. Тогда $m(x)$ из задачи (6)–(8) принадлежит $L_2^5[0, 1]$.

Лемма 9. Если μ то же, что и в лемме 8, то существует единственное решение задачи (9)–(11), причем $v(x, \lambda) = W_\mu q_1(x) + \frac{1}{\lambda} W_\mu q_2(x) - \frac{1}{\lambda} W_\mu M_\lambda q_1(x) + O\left(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\right)$, где $q_1(x) = H^{-1}(x)m(x)$, $q_2(x) = -H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)m(x)$, $M_\lambda = H_2(x)(E + M_{1\lambda})^{-1}W_\mu$, $H_2(x) = H_0^{-1}(x)[H_1'(x) + P(x)H_1(x)]$, $M_{1\lambda}m(x) = W_\mu(P_\lambda(x)m(x))$, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2^3[0, 1]$.

Лемма 10. Существуют непрерывные функции $\gamma_{ij}(x)$, $\delta_{ij}(x)$ ($i = 1, \dots, 5$; $j = 1, 2$) такие, что для $q_1(x)$ и $q_2(x)$ из леммы 9 имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} (W_\mu q_j)_1 &= - \int_x^1 e^{\mu(x-t)} \gamma_{1j}(t) f_1(t) dt - \int_0^{1-x} e^{\mu(x+t-1)} \delta_{1j}(t) f_1(t) dt + W_{1j}(\mu) e^{\mu(x-1)}, \\ (W_\mu q_j)_2 &= \int_0^x e^{-\mu(x-t)} \gamma_{2j}(t) f_1(t) dt + \int_{1-x}^1 e^{-\mu(x+t-1)} \delta_{2j}(t) f_1(t) dt + W_{2j}(\mu) e^{-\mu x}, \\ (W_\mu q_j)_3 &= - \int_x^1 e^{\mu d(x-t)} \gamma_{3j}(t) f_2(t) dt - \int_0^{1-x} e^{\mu d(x+t-1)} \delta_{3j}(t) f_2(t) dt + W_{3j}(\mu) e^{\mu d(x-1)}, \\ (W_\mu q_j)_4 &= \int_0^x e^{-\mu d(x-t)} \gamma_{4j}(t) f_2(t) dt + \int_{1-x}^1 e^{-\mu d(x+t-1)} \delta_{4j}(t) f_2(t) dt + W_{4j}(\mu) e^{-\mu dx}, \\ (W_\mu q_1)_5 &= - \int_x^1 e^{\mu \omega(x-t)} \gamma_{51}(t) f_3(t) dt + W_{51}(\mu) e^{\mu \omega(x-1)}, \quad (W_\mu q_2)_5 = W_{52}(\mu) e^{\mu \omega(x-1)}, \end{aligned}$$



где $W_{ij}(\mu) = W_{ij}(f, \mu)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — линейные комбинации с ограниченными по μ коэффициентами интегралов $\int_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu t} dt$, $\int_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu(1-t)} dt$, $\int_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu d t} dt$, $\int_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu d(1-t)} dt$, $\int_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu \omega t} dt$, $\int_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu \omega(1-t)} dt$ ($\nu = 1, 2, 3$), а $W_{5j}(\mu) = W_{5j}(f, \mu)$ — интегралов $\int_0^1 \varphi(t) \times e^{-\mu t} dt$, $\int_0^1 \varphi(t) e^{-\mu d t} dt$, $\int_0^1 \varphi(t) e^{-\mu \omega t} dt$, где $\varphi(t)$ являются продолжениями по лемме 7 следующих, рассматриваемых как операторы по $f_\nu(x)$, интегралов

$$\int_0^{1-t} f_\nu(\tau + t) \theta(\tau + t) \psi(\tau) d\sigma_l(\tau), \quad \int_0^{1-t} f_\nu(1 - \tau - t) \theta(1 - \tau - t) \psi(\tau) d\sigma_l(\tau),$$

$$\int_t^1 f_\nu(\tau - t) \theta(\tau - t) \psi(\tau) d\sigma_l(\tau), \quad \int_t^1 f_\nu(1 - \tau + t) \theta(1 - \tau + t) \psi(\tau) d\sigma_l(\tau) \quad (\nu, l = 1, 2, 3),$$
(18)

когда $\theta(x)$ являются произвольными функциями среди $\gamma_{ij}(x)$, $\delta_{ij}(x)$. Функции $\psi(\tau)$ те же, что и в лемме 3.

Рассмотрим операторы $Q_\lambda f_\nu = \int_0^1 Q(x, t, \lambda) f_\nu(t) dt$, где $Q(x, t, \lambda)$ есть одна из функций $\int_x^1 e^{\mu(x-\tau)} \times \theta(t) M(\tau, t, \lambda) d\tau$, $\int_0^x e^{-\mu(x-\tau)} \theta(t) M(\tau, t, \lambda) d\tau$, $\int_x^1 e^{\mu d(x-\tau)} \theta(t) M(\tau, t, \lambda) d\tau$, $\int_0^x e^{-\mu d(x-\tau)} \theta(t) M(\tau, t, \lambda) d\tau$, $\int_x^1 e^{\mu \omega(x-\tau)} \theta(t) M(\tau, t, \lambda) d\tau$, $e^{\mu(x-1)} N(t, \lambda, \mu)$, $e^{-\mu x} N(t, \lambda, \mu)$, $e^{\mu d(x-1)} N(t, \lambda, \mu)$, $e^{-\mu d x} N(t, \lambda, \mu)$, $e^{\mu \omega(x-1)}$. Здесь $M(x, t, \lambda)$ есть либо $M_{ij}(x, t, \lambda)$, либо $M_{ij}(1 - x, t, \lambda)$ при некоторых i, j . Функции $M_{ij}(x, t, \lambda)$ ($i, j = 1, \dots, 5$) являются компонентами ядра интегрального оператора M_λ ; $N(t, \lambda, \mu)$ есть одна из следующих функций: $\int_0^1 e^{r(\mu)\tau} M(\tau, t, \lambda) \theta(t) d\tau$, $\int_0^1 e^{r(\mu)\tau} d\tau \int_0^{1-\tau} M(s + \tau, t, \lambda) \psi(s) \theta(t) d\sigma_1(s)$, $\int_0^1 e^{r(\mu)\tau} d\tau \times \int_\tau^1 M(s - \tau, t, \lambda) \psi(s) \theta(t) d\sigma_1(s)$, $\int_0^1 e^{r(\mu)\tau} d\tau \int_0^{1-\tau} M(s + \tau, t, \lambda) \psi(s) \theta(t) d\sigma_2(s)$, $\int_0^1 e^{r(\mu)\tau} d\tau \int_\tau^1 M(s - \tau, t, \lambda) \times \psi(s) \theta(t) d\sigma_2(s)$, $\int_0^1 e^{r(\mu)\tau} d\tau \int_0^{1-\tau} M(s + \tau, t, \lambda) \psi(s) \theta(t) d\sigma_3(s)$, и, наконец, $r(\mu)$ есть одна из функций $-\mu$, $-\mu d$, $-\mu \omega$.

Лемма 11. Каждая компонента вектор-функции $W_\mu M_\lambda q_1$ есть линейная комбинация всевозможных операторов $Q_\lambda f_\nu$ с ограниченными по μ коэффициентами.

Обозначим через $\sigma(x, \mu_1, k)$ одну из функций $e^{-(\mu_1+ik)x}$, $e^{(\mu_1+ik)(x-1)}$, $e^{-(\mu_1+ik)dx}$, $e^{(\mu_1+ik)d(x-1)}$, $e^{(\mu_1+ik)\omega(x-1)}$; через $\omega(x, t, \mu_1, k)$ — одну из функций $\varepsilon(x, t) \theta(t) e^{-(\mu_1+ik)(x-t)}$, $\varepsilon(t, x) \theta(t) e^{(\mu_1+ik)(x-t)}$, $\varepsilon(1-x, t) \theta(t) e^{(\mu_1+ik)(x+t-1)}$, $\varepsilon(t, 1-x) \theta(t) e^{-(\mu_1+ik)(x+t-1)}$, $\varepsilon(x, t) \theta(t) e^{-(\mu_1+ik)d(x-t)}$, $\varepsilon(t, x) \theta(t) \times e^{(\mu_1+ik)d(x-t)}$, $\varepsilon(1-x, t) \theta(t) e^{(\mu_1+ik)d(x+t-1)}$, $\varepsilon(t, 1-x) \theta(t) e^{-(\mu_1+ik)d(x+t-1)}$, $\varepsilon(t, x) \theta(t) e^{(\mu_1+ik)\omega(x-t)}$, где $\theta(t)$ либо те же, что и в лемме 10, либо $\theta(t) \equiv 1$; $M(x, t, \mu_1, k) = M(x, t, \lambda)|_{\lambda=-i\sqrt{d_1}(\mu_1+ik)}$, $N(x, \mu_1, k) = N(t, \lambda, \mu)|_{\lambda=-i\sqrt{d_1}(\mu_1+ik), \mu=\mu_1+ik}$. Пусть $A_k f_\nu = \psi(x) \int_0^1 \sigma(x, \mu_1, k) \sigma(t, \mu_1, k) A f_\nu(t) dt$ ($\nu = 1, 2, 3$),

где $A f_\nu(t)$ — один из операторов $\theta(t) f_\nu(t)$ или операторов (18); $B_k f_\nu = \psi(x) \int_0^1 \omega(x, t, \mu_1, k) f_\nu(t) dt$,

$$M_k f_\nu = \int_0^1 M(x, t, \mu_1, k) \theta(t) f_\nu(t) dt, \quad N_k f_\nu = \psi(x) \sigma(x, \mu_1, k) \int_0^1 N(t, \mu_1, k) f_\nu(t) dt.$$

Пусть $\mu \in \Pi(\delta)$, $\mu = \mu_1 + ik$ и μ_1 принадлежит ограниченной области. Для дальнейшего резольвенту R_λ удобно обозначить $R(\lambda, \mu)$ и пусть $R(\mu) = R(\lambda, \mu)|_{\lambda=-i\sqrt{d_1}/\mu}$.

Лемма 12. Если $f_\nu(x) \in L_2[0, 1]$ ($\nu = 1, 2, 3$), то при больших $|\mu|$ для каждой компоненты вектора $R(\mu) f$ справедливо представление $(R(\mu) f)_i = \Omega(x, \mu_1, k; f) + O(\frac{\|f\|}{k^2})$, где $\Omega(x, \mu_1, k; f)$ есть конечная сумма с ограниченными по μ_1 и k коэффициентами всевозможных операторов $A_k f_\nu$, $B_k f_\nu$, $\frac{1}{k} B_k f_\nu$, $\frac{1}{k} B_k M_k f_\nu$, $\frac{1}{k} N_k f_\nu$, причем коэффициенты при $B_k f_\nu$ не зависят от μ_1 и k , $\|\cdot\|$ — норма в $L_2^3[0, 1]$.

Так же как и в [6] представим полуполосу Π в виде объединения конечного числа различных групп равных между собой прямоугольников, границы которых Γ_k ($k = 1, 2, \dots$) (при возрастании k контуры удаляются от начала координат) состоят из отрезков, лежащих на прямых $\text{Re } \mu = h$ (h — ширина полосы), $\text{Re } \mu = 0$ и из отрезков длины h , параллельных вещественной оси. Контуры Γ_k



принадлежат $\Pi(\delta)$ и для каждого Γ_k конкретной группы существует натуральное t_k , что $\Gamma_k = \Gamma + it_k$, где Γ — некоторый фиксированный прямоугольный контур из этой группы. Аналогичное построение проводится и для второй полуполосы из леммы 4. Построенные в ней контуры обозначим через Γ_k ($k = -1, -2, \dots$).

Лемма 13. Пусть J — любой конечный набор достаточно больших по модулю целых чисел. Тогда имеет место оценка $\left\| \sum_{k \in J} \int_{\Gamma_k} R(\mu) f d\mu \right\| \leq C$, равномерная по J .

Лемма 14. Система с.п.ф. оператора L полна в $L^3_2[0, 1]$.

Из лемм 13 и 14 так же, как в [7], следует

Теорема 2. Система с.п.ф. оператора L образует базис Рисса со скобками в $L^3_2[0, 1]$. При этом в скобки следует объединять те с.п.ф., которые соответствуют собственным значениям λ_m , для которых числа $i\lambda_m/\sqrt{d_1}$ попали внутрь контуров Γ_k области S и в аналогичные контуры из оставшихся нерассмотренных областей.

Библиографический список

1. Хромов А.П. Об аналоге теоремы Жордана–Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Доклады РАН. 2004. № 4. С. 80–87.
2. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110.
3. Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. 1982. № 6. С. 12–21.
4. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в гранич-

ных условиях // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.

5. Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР. 1954.
6. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием // Математика. Механика: Сб. науч.тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 80–82.
7. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с интегральным краевым условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С.61–63.

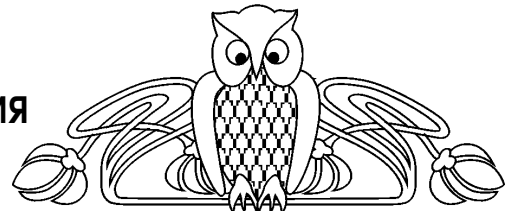
УДК 514.772.2+517.97

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Н.М. Медведева

Волгоградский государственный университет,
кафедра информатики и экспериментальной математики
E-mail: natasha_medvedeva@volsu.ru, nmedv@mail.ru

В данной работе вычисляются первая и вторая вариации функционала типа площади для поверхностей вращения; формулируется признак устойчивости и неустойчивости в терминах локальных координат на основе оценок специальных интегралов. Приводятся примеры нахождения областей устойчивости и неустойчивости, в том числе и для p -минимальных поверхностей.



Research of Stability for Extremal Rotation Surfaces

N.M. Medvedeva

In this work we obtain the first and second variations of area type functional for rotation surfaces formulas. We proof the feature of stability and instability in the terms of the local coordinates and special integrals. We consider some examples by application our results for research if stability for rotation surfaces.

Рассмотрим C^2 -гладкую поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, заданную радиус-вектором $\vec{r}(u, v)$, где u, v — главные направления поверхности, и C^2 -гладкую функцию $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\phi(-\xi) = \phi(\xi)$.

Если обозначить через $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ поле единичных нормалей к поверхности \mathcal{M} , то для любой C^2 -гладкой поверхности \mathcal{M} определена величина

$$F(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \phi(\xi_3) d\mathcal{M}, \quad (1)$$

где $d\mathcal{M}$ — элемент площади на \mathcal{M} . Заметим, что величина (1) не зависит от выбора нормали ξ .

Будем говорить, что поверхность \mathcal{M} является *экстремальной* (или — *экстремалью* функционала (1)), если первая вариация функционала (1) равна нулю (ниже подробно приведено построение вариаций).



Данная работа посвящена исследованию устойчивости экстремалей функционала типа площади (1). Рассматриваемые здесь функционалы являются многомерными, простейшим примером которых служит функционал площади [1, гл. 6, §37] (это частный случай функционала (1) при $\phi(\xi_3) \equiv 1$) на двумерной поверхности $\int_D \sqrt{EG - F^2} dx dy$, где $D \subset \mathbb{R}^2(x, y)$ — область изменения параметров x, y ; $f(x, y) \in \mathbb{R}^3$ — двумерная поверхность; E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности.

Отметим, что при $\phi(\xi_3) \equiv 1$ экстремалами функционала (1) являются минимальные поверхности, и соответствующая вариационная задача ставится на минимум. Если же $\phi(\xi_3) = \sqrt{2\xi_3^2 - 1}$, то экстремалами функционала (1) являются максимальные поверхности [2] в пространстве-времени Минковского \mathbb{R}_1^3 , для которых вариационная задача ставится на максимум.

Известно, что одной из задач теории минимальных поверхностей является задача об определении условий устойчивости. Устойчивость понимается как знакоопределенность второй вариации функционала (1) при всех бесконечно малых деформациях поверхности M с фиксированием границы ∂M . Имеется ряд работ, посвященных исследованию устойчивости минимальных поверхностей в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах: А.А. Тужилина, А.Т. Фоменко, Ю.А. Аминова, В.А. Клячина, В.М. Миклюкова, В.Г. Ткачева, А.В. Погорелова, do Carmo M., С.К. Penga, S.T. Yau, R. Finn, J. Simons и др. Подобные вопросы тесно связаны с физическими задачами о равновесии различных систем и описании их устойчивых и неустойчивых состояний. В большинстве случаев решение сводится к исследованию положительной определенности второй вариации специального функционала, связанного с потенциальной энергией системы.

Рассмотренные в данной работе экстремали функционала типа площади также имеют физический смысл и непосредственное применение в теории капиллярных поверхностей.

Введем понятие вариации функционала.

Пусть V — C^2 -векторное поле, определенное в окрестности поверхности M и такое, что выполнены условия: $V|_{\partial M} = 0$; $V|_M = h \cdot \xi$, где $h \in C_0^2(M)$, ξ — поле единичных нормалей к поверхности; интегральными кривыми поля V являются прямые линии и вдоль каждой интегральной кривой $|V| = \text{const}$.

Ясно, что любое векторное поле $V = h \cdot \xi$, заданное вдоль M , можно продолжить в некоторую окрестность M так, что будут выполнены сформулированные выше условия.

Пусть $g_t(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ — однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов векторного поля V , то есть $g_t(x)$ является решением задачи Коши:

$$\frac{dg_t(x)}{dt} = V(g_t(x)), \quad g_t(x)|_{t=0} = x.$$

Положим $M_t = g_t(M)$. Ясно, что $M_0 = M$.

Определение 1. Поверхность M является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю, т. е. $\frac{d}{dt} \int_{M_t} \phi(\xi) dM_t \Big|_{t=0} = 0$.

Определение 2. Экстремальная поверхность M *устойчива (неустойчива)*, если вторая вариация функционала (1) $\frac{d^2}{dt^2} \int_{M_t} \phi(\xi) dM_t \Big|_{t=0}$ знакоопределена (не является знакоопределенной) при всех бесконечно малых деформациях поверхности M с фиксированием границы ∂M .

Замечание. Отметим, что возможен и иной подход к определению устойчивости экстремальной поверхности. Например, в работах [3], [4] применяется понятие индекса. Индекс минимальной поверхности определяет степень ее неустойчивости. Если индекс не равен нулю, то минимальная поверхность неустойчива.

Далее будем рассматривать поверхность M , заданную радиус-вектором

$$\vec{r}(u, v) = \{r(u) \cos v, r(u) \sin v, u\}, \tag{2}$$

где $u \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, $v \in (0, 2\pi)$, $r(u)$ — C^2 -гладкая функция на (a, b) и функционал (1).

Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \phi' \dot{r} \sqrt{1 + \dot{r}^2} + \phi(1 + \dot{r}^2), & \Phi_2 &= \phi'' + \Phi_1, \\ \alpha &= \alpha(u) = \Phi_2 \frac{r}{(1 + \dot{r}^2)^{3/2}}, & \beta &= \beta(u) = \Phi_1 \frac{r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1}{r(1 + \dot{r}^2)^{5/2}}. \end{aligned} \tag{3}$$



На основе работы [5] были получены следующие результаты.

Теорема 1. Поверхность M , заданная радиус-вектором (2), является экстремальной тогда и только тогда, когда $\Phi_1 = \Phi_2 r \ddot{r} / (1 + \dot{r}^2)$. Экстремальная поверхность M устойчива тогда и только тогда, когда квадратичная форма

$$\int_a^b \{ \alpha h'^2 - \beta h^2 \} dt \tag{4}$$

знакоопределена в классе липшицевых функций $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, таких что $h(a) = h(b) = 0$.

Следствие 1.1. Экстремальная поверхность M , заданная радиус-вектором (2), является устойчивой, если $\alpha\beta \leq 0$.

Теорема 2. Поверхность M , заданная радиус-вектором (2), является экстремалью функционала (1), тогда и только тогда, когда выполнено одно из равенств:

$$\Phi_1 = \Phi_2 r \ddot{r} / (1 + \dot{r}^2) \quad \text{или} \quad \frac{d}{du} \left(\left(\phi' \frac{\dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} + \phi \right) \frac{r}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} \right) = 0.$$

На основании теоремы 1 и определения устойчивости имеет место еще одна теорема об устойчивости поверхности вращения, которая в отличие от следствия 1.1 является признаком устойчивости (неустойчивости) для других классов поверхностей, у которых $\alpha\beta \leq \nu$.

Пусть $\sup_{(a,b)} \alpha\beta = \nu^2 < +\infty$ (случай $\nu \equiv 1$ был рассмотрен в [5]). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть экстремальная поверхность M задана радиус-вектором (2). Для положительных функций α, β поверхность M является устойчивой, если $\int_a^b \frac{dt}{\alpha} \leq \frac{\pi}{\nu}$, и неустойчивой, если $\int_a^b \beta dt > \pi\nu$.

Прежде чем перейти к доказательству сформулированных результатов, приведем обозначения и теоремы, на которые будем ссылаться. Теоремы 4 и 5 были доказаны в работе [5].

Обозначим $D\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}, \frac{\partial\phi}{\partial\xi_2}, \frac{\partial\phi}{\partial\xi_3} \right)$, $D^2\phi = \left\| \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j} \right\|_{i,j=1}^3$, E_i — главные направления поверхности, k_i — главные кривизны поверхности.

Теорема 4. C^2 -гладкая поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$, заданная радиус-вектором $\vec{r}(u, v)$, где u, v — главные направления поверхности, является экстремальной тогда и только тогда, когда

$$2H\phi = \frac{1}{|\vec{r}_u||\vec{r}_v|} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(|\vec{r}_u||\vec{r}_v| \langle D\phi, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(|\vec{r}_u||\vec{r}_v| \langle D\phi, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} \rangle \right) \right). \tag{5}$$

Экстремальная поверхность M будет устойчивой (неустойчивой) тогда и только тогда, когда знакоопределена (не является знакоопределенной) квадратичная форма

$$\int_M \{ D^2\phi(\nabla h, \nabla h) + (\phi - \langle D\phi, \xi \rangle) (|\nabla h|^2 + (k_1^2 + k_2^2)) - h^2 \left(k_1^2 D^2\phi \left(\frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} \right) + k_2^2 D^2\phi \left(\frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} \right) \right) \} |\vec{r}_u||\vec{r}_v| du dv \tag{6}$$

в классе функций $h \in C_0^2(M)$.

Следующее утверждение обобщает известное свойство гармоничности координатных функций минимальных поверхностей. Для p -минимальных поверхностей в работе В. Г. Ткачева аналогичное равенство было положено в основу их определений (см. [6]).

Теорема 5. Пусть $f = x_3$ и $\phi = \phi(\xi_3)$. Тогда в метрике экстремальной поверхности M выполнено равенство $\text{div}((\phi - \phi' \xi_3) \nabla f) = 0$.

Доказательство теоремы 1. Запишем (5) и (6) для поверхности, заданной радиус-вектором (2), и функционала (1).

С этой целью вычислим $H, \langle D\phi, \vec{r}_u / |\vec{r}_u|^2 \rangle$ и $\langle D\phi, \vec{r}_v / |\vec{r}_v|^2 \rangle$. Обозначая $r_u = \dot{r}$ и $r_{uu} = \ddot{r}$, получим

$$\vec{r}_u = \{ \dot{r} \cos v, \dot{r} \sin v, 1 \}, \quad \vec{r}_v = \{ -\dot{r} \sin v, r \cos v, 0 \},$$



$$|\vec{r}_u|^2 = \dot{r}^2 + 1, \quad |\vec{r}_v|^2 = r^2, \quad (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = 0, \quad |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = r\sqrt{1 + \dot{r}^2}. \quad (7)$$

Тогда очевидно, что $\frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} = \left\{ \frac{\dot{r}}{1 + \dot{r}^2} \cos v, \frac{\dot{r}}{1 + \dot{r}^2} \sin v, \frac{1}{1 + \dot{r}^2} \right\}$, $\frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} = \left\{ -\frac{1}{r} \sin v, \frac{1}{r} \cos v, 0 \right\}$.

Используя равенства (7), запишем первую квадратичную форму $dS_{\mathcal{M}}^2$ поверхности \mathcal{M} , заданной радиус-вектором (2), $dS_{\mathcal{M}}^2 = (1 + \dot{r}^2)du^2 + r^2dv^2$. Используя стандартные формулы (см., например, [7, гл. 2, §5]), находим главные кривизны поверхности \mathcal{M} : $k_1 = \frac{\ddot{r}}{(1 + \dot{r}^2)^{3/2}}$, $k_2 = -\frac{1}{r\sqrt{1 + \dot{r}^2}}$ и среднюю кривизну поверхности $2H = \frac{r\ddot{r} - \dot{r}^2 - 1}{r(1 + \dot{r}^2)^{3/2}}$.

Так как функция ϕ зависит только от третьей координаты единичной нормали, то имеем $D\phi = (0, 0, \phi')$, $\left\langle D\phi, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} \right\rangle = \frac{\phi'}{1 + \dot{r}^2}$, $\left\langle D\phi, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} \right\rangle = 0$. Подставляя подсчитанное в (5) получаем уравнение экстремалей поверхности \mathcal{M}

$$\phi'' r \ddot{r} + \phi' \dot{r} \sqrt{1 + \dot{r}^2} (r \ddot{r} - \dot{r}^2 - 1) + \phi (1 + \dot{r}^2) (r \ddot{r} - \dot{r}^2 - 1) = 0. \quad (8)$$

Далее приступим к записи второй вариации. С этой целью вычислим выражения, требуемые для (6).

Заметим, что в метрике поверхности $dS_{\mathcal{M}}^2 = |\vec{r}_u|^2 du^2 + |\vec{r}_v|^2 dv^2$ градиент вычисляется по формуле

$$\nabla h = h_u \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} + h_v \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} = \left\{ h_u \frac{\dot{r} \cos v}{1 + \dot{r}^2} - h_v \frac{\sin v}{r}, h_u \frac{\dot{r} \sin v}{1 + \dot{r}^2} - h_v \frac{\cos v}{r}, h_u \frac{1}{1 + \dot{r}^2} \right\},$$

и тогда имеем $|\nabla h|^2 = \frac{h_u^2}{|\vec{r}_u|^2} + \frac{h_v^2}{|\vec{r}_v|^2} = \frac{h_u^2}{1 + \dot{r}^2} + \frac{h_v^2}{r^2}$. Очевидно, что единичная нормаль в метрике данной поверхности имеет координаты

$$\xi = \left\{ \frac{\cos v}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}}; \frac{\sin v}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}}; -\frac{\dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} \right\}. \quad (9)$$

Тогда несложно видеть, что $\langle D\phi, \xi \rangle = -\phi' \frac{\dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}}$. Так как $D^2\phi = \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_{i,j=1}^3$ и функция $\phi = \phi(\xi_3)$,

то имеем $D^2\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi'' \end{pmatrix}$.

Далее вычислим $D^2\phi$ на векторах ∇h и E_i :

$$D^2\phi(\nabla h, \nabla h) = \phi'' h_u^2 \frac{1}{(1 + \dot{r}^2)^2}, \quad D^2\phi\left(\frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}\right) = \frac{\phi''}{(1 + \dot{r}^2)^2}, \quad D^2\phi\left(\frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}\right) = 0.$$

Таким образом, подставляя найденные значения в (6), окончательно получим

$$\int_{\mathcal{M}} \left\{ h_u^2 \frac{r}{(1 + \dot{r}^2)^{3/2}} \left(\phi'' + \phi' \dot{r} \sqrt{1 + \dot{r}^2} + \phi(1 + \dot{r}^2) \right) + h_v^2 \frac{\phi' \dot{r} \sqrt{1 + \dot{r}^2} + \phi(1 + \dot{r}^2)}{r^2(1 + \dot{r}^2)} - h^2 \frac{\phi' \dot{r} \sqrt{1 + \dot{r}^2} + \phi(1 + \dot{r}^2)}{r(1 + \dot{r}^2)^{3/2}} \left(2 - \frac{\phi''}{\phi'' + \phi' \dot{r} \sqrt{1 + \dot{r}^2} + \phi(1 + \dot{r}^2)} \right) \right\} du dv.$$

Далее, принимая во внимание введенные обозначения (3) и полагая $h = h(u)$, получаем требуемое. Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1.1. Следствие становится очевидным, если применить к формуле второй вариации поверхности (4) определение устойчивости.

Пример 1. Пусть задана функция $\phi(\xi_3) = -\frac{1}{\xi_3}$. Зная координатную запись единичной нормали (9), будем иметь, что $\phi\left(-\frac{\dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}}\right) = \frac{\sqrt{\dot{r}^2 + 1}}{\dot{r}}$, $\phi' = \frac{1 + \dot{r}^2}{\dot{r}^2}$. Применяя теорему 2, находим функцию



$r(u)$ радиус-вектора (2) экстремальной поверхности M . С этой целью решаем уравнение

$$\left(\frac{1 + \dot{r}^2}{\dot{r}^2} \frac{\dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} + \frac{\sqrt{\dot{r}^2 + 1}}{\dot{r}} \right) \frac{r}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} = C,$$

где C — некоторая константа интегрирования, и находим его общее решение $r = e^{2u/C+C_1}$. Пусть $C_1 = 0$ и $C = -1$. Выпишем функции α и β , обозначения которых введены в (3), для данной экстремальной поверхности: $\alpha = -4 + e^{4u}$, $\beta = -\frac{(8 + e^{4u})e^{2u}}{4 + e^{2u}}$. Видно, что α меняет знак в точке $u_0 = \frac{1}{4} \ln 4$, т. е. на интервале $(-\infty; u_0)$ она отрицательна, а при $u \in (u_0; +\infty)$ принимает положительные значения; β на всем интервале отрицательна. Следовательно, применяя следствие 1.1, получим устойчивую часть поверхности при $u \in (u_0; +\infty)$.

Однако следует заметить, что возможен вариант, когда $\alpha\beta \geq 0$. Тогда, как показывает приведенный ниже пример, также возможна устойчивость поверхности M .

Пример 2. Пусть задана функция

$$\phi(\xi_3) = \sqrt{2\xi_3^2 - 1}. \tag{10}$$

Зная координатную запись единичной нормали (9), будем иметь, что

$$\phi\left(-\frac{\dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}}\right) = \sqrt{\frac{\dot{r}^2 - 1}{\dot{r}^2 + 1}}, \quad \phi' = -\frac{2\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 - 1}}. \tag{11}$$

Применяя теорему 2, из уравнения $\left(-\frac{2\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 - 1}} \frac{\dot{r}}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} + \sqrt{\frac{\dot{r}^2 - 1}{\dot{r}^2 + 1}}\right) \frac{r}{\sqrt{1 + \dot{r}^2}} = C$, где C — некоторая константа интегрирования, находим функцию $r(u)$ радиус-вектора (2) экстремальной поверхности M : $r = \text{sh } u$. Далее, подставляя в (11) соответствующие производные $\dot{r} = \text{ch } u$, $1 + \dot{r}^2 = 1 + \text{ch}^2 u$, находим для данной экстремальной поверхности функцию $\phi = \frac{\text{sh } u}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 u}}$. Затем вычисляем ее производные:

$\phi' = -2 \text{cth } u$, $\phi'' = -2 \frac{(1 + \text{ch}^2 u)^{3/2}}{\text{sh}^3 u}$ и функции α и β , обозначения которых введены в (3)

$$\alpha = \frac{\text{sh } u}{(1 + \text{ch}^2 u)^{3/2}} \left(-2 \frac{(1 + \text{ch}^2 u)^{3/2}}{\text{sh}^3 u} - 2 \text{cth } u \text{ch } u \sqrt{1 + \text{ch}^2 u} + \frac{\text{sh } u}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 u}} (1 + \text{ch}^2 u) \right) = -\frac{1 + \text{ch}^2 u}{\text{sh}^2 u},$$

$$\beta = \frac{1 + \text{ch}^2 u + \text{sh}^2 u}{\text{sh } u (1 + \text{ch}^2 u)^{5/2}} \left(-2 \text{cth } u \text{ch } u \sqrt{1 + \text{ch}^2 u} + \frac{\text{sh } u}{\sqrt{1 + \text{ch}^2 u}} (1 + \text{ch}^2 u) \right) = -2 \left(\frac{1}{\text{sh}^2 u} - \frac{1}{\text{sh}^2 u (1 + \text{ch}^2 u)} \right).$$

Далее, применяя теорему 1, выпишем квадратичную форму (4)

$$\begin{aligned} \int_a^b \{ \alpha h'^2 - \beta h^2 \} du &= \int_a^b \left(\left(-\frac{1 + \text{ch}^2 u}{\text{sh}^2 u} \right) h'^2 + 2h^2 \left(\frac{1}{\text{sh}^2 u} - \frac{1}{\text{sh}^2 u (1 + \text{ch}^2 u)} \right) \right) du \leq \\ &\leq \int_a^b \left(-2 \frac{h'^2}{\text{sh}^2 u} + 2 \frac{h^2}{\text{sh}^2 u} \right) du \leq -2 \int_a^b \left(\frac{h'^2}{\text{sh}^2 u} - \frac{h^2}{\text{sh}^2 u} \right) du. \end{aligned}$$

Покажем, что $\int_a^b \left\{ \frac{h'^2}{\text{sh}^2 u} - \frac{h^2}{\text{sh}^2 u} \right\} du \geq 0$. Тогда для всех h будет следовать, что квадратичная форма (4) неположительно определена.

Пусть $y = \text{ch } u$. Заметим, что $\left(\frac{y'}{\text{sh}^2 u}\right)' = -\frac{y}{\text{sh}^2 u}$, $\left(\frac{1}{\text{sh } u}\right)' = -\frac{\text{ch } u}{\text{sh}^2 u} = -\frac{y}{\text{sh}^2 u}$. Тогда очевидно, что для функций $h(a) = h(b) = 0$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(\frac{y'}{\text{sh}^2 u} \cdot \frac{h^2}{y} \right)' du = \int_a^b \left(\frac{y'}{\text{sh}^2 u} \right)' \frac{h^2}{y} du - \int_a^b \frac{y'}{\text{sh}^2 u} \cdot \frac{y'}{y^2} \cdot h^2 du + 2 \int_a^b \frac{h'}{y} \cdot \frac{y'}{\text{sh}^2 u} \cdot h du = \\ &= - \int_a^b \frac{h^2}{\text{sh}^2 u} du - \int_a^b h^2 \frac{y'^2}{y^2 \text{sh}^u} du + 2 \int_a^b \frac{y'}{y} \cdot \frac{hh'}{\text{sh}^2 u} du - \int_a^b \frac{h'^2}{\text{sh}^2 u} du + \int_a^b \frac{h'^2}{\text{sh}^2 u} du = \end{aligned}$$



$$= \int_a^b \left(\frac{h'^2}{\text{sh}^2 u} - \frac{h^2}{\text{sh}^2 u} \right) du - \left\{ \int_a^b \left(\left(\frac{y'h}{y} \right)^2 - 2 \frac{y'}{y} h h' + h'^2 \right) \frac{1}{\text{sh}^2 u} du \right\} \leq \int_a^b \left(\frac{h'^2}{\text{sh}^2 u} - \frac{h^2}{\text{sh}^2 u} \right) du.$$

Таким образом, пример иллюстрирует теорему 1.

Как было замечено выше, случай $\phi(\xi_3) = \sqrt{2\xi_3^2 - 1}$ соответствует классу максимальных поверхностей в пространстве-времени Минковского \mathbb{R}_1^3 , которые устойчивы и глобально максимизируют площадь в \mathbb{R}_1^3 (см., например, [8]).

Доказательство теоремы 2. Заметим, что используя теорему 5, уравнение экстремалей (8) можно записать в виде

$$\frac{d}{du} \left(\left(\phi' \frac{\dot{r}}{\sqrt{1+\dot{r}^2}} + \phi \right) \frac{r}{\sqrt{1+\dot{r}^2}} \right) = 0. \tag{12}$$

Действительно, производя непосредственное дифференцирование (12), приходим к (8). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Так как $\alpha\beta \leq \nu^2$, то справедливо неравенство

$$\int_a^b \{ \alpha h'^2 - \beta h^2 \} du \geq \int_a^b \left\{ \alpha h'^2 - \frac{\nu^2 h^2}{\alpha} \right\} du.$$

Таким образом, чтобы экстремальная поверхность вращения была устойчивой, достаточно

$$\int_a^b \left\{ \alpha h'^2 - \frac{\nu^2 h^2}{\alpha} \right\} du \geq 0. \tag{13}$$

Сделаем замену в интегралах и рассмотрим их отношение.

Пусть $y(u) = \int_0^u dt/\alpha(t)$, $t \in [0, b-a]$. Следовательно, $dy = du/\alpha(u)$ и $h'_u = h'_y y'_u = h'_y/\alpha(u)$. Тогда

$$\frac{\int_a^b \alpha h'^2 du}{\int_a^b \frac{\nu^2 h^2}{\alpha} du} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\int_{y(a)}^{y(b)} h'^2_y dy}{\int_{y(a)}^{y(b)} h^2(y) dy}.$$

Применяя неравенство Виртингера [9, §7.7], получим

$$\frac{\int_{y(a)}^{y(b)} h'^2_y dy}{\int_{y(a)}^{y(b)} h^2(y) dy} \geq \frac{\pi^2}{\left(\int_a^b du/\alpha \right)^2}. \tag{14}$$

Далее, сопоставляя (13) и (14), будем иметь неравенство для устойчивости поверхности вращения.

Для доказательства неустойчивости поступим аналогичным образом.

Так как $\alpha\beta \leq \nu^2$, то справедливо неравенство $\int_a^b \{ \alpha h'^2 - \beta h^2 \} du \leq \int_a^b \left\{ \frac{\nu^2 h'^2}{\beta} - \beta h^2 \right\} du$.

Таким образом, чтобы экстремальная поверхность вращения была неустойчивой, достаточно, чтобы существовала функция $h \in C^1_0(a, b)$, такая что $\int_a^b \left\{ \frac{\nu^2 h'^2}{\beta} - \beta h^2 \right\} du \leq 0$.

Рассмотрим функцию h , заданную равенством $h(u) = \sin \left(\frac{\int_a^u \beta du}{\int_a^b \beta du} \right)$. Тогда

$$\nu^2 \frac{\int_a^b \frac{h'^2}{\beta} du}{\int_a^b \beta h^2 du} = \nu^2 \frac{\pi^2}{\left(\int_a^b \beta du \right)^2} \cdot \frac{\int_a^b \beta \cos^2 \left(\frac{\int_a^u \beta du}{\int_a^b \beta du} \right) du}{\int_a^b \beta \sin^2 \left(\frac{\int_a^u \beta du}{\int_a^b \beta du} \right) du} =$$



$$= \nu^2 \frac{\pi^2}{\left(\int_a^b \beta du\right)^2} \cdot \frac{\int_a^b \beta \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\int_a^u \beta du}{\int_a^b \beta du}\right)\right) du}{\int_a^b \beta \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{\int_a^u \beta du}{\int_a^b \beta du}\right)\right) du} = \nu^2 \frac{\pi^2}{\left(\int_a^b \beta du\right)^2},$$

так как интегрируя по частям, получим, что $\int_a^b \beta \cos\left(2\pi \frac{\int_a^u \beta du}{\int_a^b \beta du}\right) du = 0$. Следовательно, при выпол-

нении условия $\int_a^b \beta dt > \pi\nu$ поверхность будет неустойчива. Теорема 3 доказана.

Для иллюстрации полученных в теореме 3 результатов приведем пример, в ходе которого выпишем функцию $\phi(\xi_3)$. Найдем поверхности, являющиеся экстремальными функционала, и определим области устойчивости и неустойчивости данных экстремальных поверхностей.

Пример 3. Положим на основании (9) функцию $\phi(\xi_3) = \phi(-\dot{r}/\sqrt{1+\dot{r}^2})$ для поверхности, заданной радиус-вектором (2), и обозначим

$$\tau = -\dot{r}/\sqrt{1+\dot{r}^2}. \tag{15}$$

Замечание. В работе [5] было установлено, что гауссово отображение экстремальной поверхности является отображением с ограниченным искажением. Там же было отмечено, что коэффициенты искажения экстремальных и p -минимальных поверхностей совпадают в случае $\frac{\phi''(1-\tau^2)}{\phi-\phi'\tau} = p-2$.

Таким образом, решая данное дифференциальное уравнение, мы найдем такие функции, при которых экстремальными функционала (1) будут p -минимальные поверхности, рассматриваемые в работе [6]. Такие поверхности характеризуются тем, что функция x_3 в метрике поверхности M является p -гармонической.

Получаем функцию $\phi(\tau) = \tau \left(C_1 + C \int_{\tau(t_0)}^{\tau(t)} \frac{(1-\tau^2(t))^{(p-2)/2}}{\tau^2} dt \right)$, где $C = (\phi'(\tau(t_0))\tau(t_0) - \phi(\tau(t_0))) \times (1-\tau^2(t_0))^{(2-p)/2}$, $C_1 = \frac{\phi(\tau(t_0))}{\tau(t_0)}$.

Для того чтобы получить решение уравнения экстремалей (8), вычислим ϕ'_τ и $\phi''_{\tau\tau}$, т. е.

$$\phi'(\tau) = C_1 + C \frac{(1-\tau^2)^{(p-2)/2}}{\tau} + C \int_{\tau(t_0)}^{\tau(t)} \frac{(1-\tau^2)^{(p-2)/2}}{\tau^2} d\tau, \tag{16}$$

$$\phi''(\tau) = -C(p-2)(1-\tau^2)^{(p-4)/2}. \tag{17}$$

Итак, мы обладаем всеми данными, чтобы записать уравнение экстремалей (8) функционала (1) с функцией (10) для поверхностей, заданных (2). Подставим значения производных (16), (17) и обозначение τ из (15), тогда уравнение экстремалей (8) принимает вид $-\mathcal{C}(1+\dot{r}^2)^{(4-p)/2}((p-1)r\ddot{r}-\dot{r}^2-1) = 0$. Пусть $\mathcal{C} \neq 0$, тогда будем иметь дифференциальное уравнение второго порядка $(p-1)r\ddot{r}-\dot{r}^2-1 = 0$, решая которое, получаем

$$\dot{r}(t) = \sqrt{C_0 r^{2/(p-1)} - 1} \tag{18}$$

и $\int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{C_0 r^{2/(p-1)} - 1}} = t - t_0$, где $C_0 = \frac{\dot{r}^2(t_0) + 1}{r^{2/(p-1)}(t_0)}$.

Заметим, что при $p = 2$ данное равенство задает профильную функцию минимальной поверхности вращения — катеноида.

Используя вычисления данного примера, покажем применение теоремы 3 для нахождения областей устойчивости и неустойчивости поверхности вращения.

Вычислим функции Φ_1 и Φ_2 , заданные в (3), $\Phi_1 = -\mathcal{C}(1+\dot{r}^2)^{(4-p)/2}$, $\Phi_2 = -\mathcal{C}(p-1)(1+\dot{r}^2)^{(4-p)/2}$. Аналогично выписываем α и β , введенные в (3), подставляя Φ_1 и Φ_2

$$\alpha = -\mathcal{C}(p-1) \frac{r}{(1+\dot{r}^2)^{(p-1)/2}}, \tag{19}$$



$$\beta = -C \frac{r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1}{r(1 + \dot{r}^2)^{(p+1)/2}}. \quad (20)$$

Положим $C = -1$. С использованием (18) равенство (19) примет вид $\alpha = \frac{p-1}{C_0^{(p-1)/2}}$, аналогично из (20)

получим
$$\beta = \frac{p}{p-1} \frac{1}{r^2 C_0^{(p-1)/2}}.$$

Применяя теорему 3, получаем, что p -минимальная поверхность устойчива на интервале (t_0, t) , определяемом из неравенства $t - t_0 \leq \frac{(p-1)\pi}{C_0^{(p-1)/2} \nu}$.

Для определения интервала неустойчивости p -минимальной поверхности заметим, что $t = t(r)$ — обратная функция к $r = r(t)$, тогда $d(t(r)) = t' dr$. Так как производная обратной функции определяется по формуле $t' = \frac{1}{\dot{r}}$ и, учитывая (18), получаем $dt = \frac{dr}{\dot{r}} = \frac{dr}{\sqrt{C_0 r^{2/(p-1)} - 1}}$. Следовательно,

интервал неустойчивости находится из неравенства
$$\frac{p}{(p-1)C_0^{\frac{p-1}{2}}} \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{C_0 r^{\frac{2}{p-1}} - 1}} > \pi \nu.$$

Библиографический список

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 760 с.
2. Клячин В.А., Миклюков В.М. Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 1. С. 206–217.
3. Тужилин А.А. Индексы типа Морса двумерных минимальных поверхностей в \mathbb{R}^3 и \mathbb{H}^3 // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 2. С. 581–607.
4. Тужилин А.А., Фоменко А.Т. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991. 174 с.
5. Клячин В.А., Медведева Н.М. Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади. Волгоград, 2006. Деп. в ВИНТИ 08.11.06 № 1313 - В 2006. 23 с.; Сибирские электронные математические известия. 2007. Т. 4. Статьи. С. 113–132.
6. Tkachev V.G. External Geometry of p -Minimal Surfaces // Geometry from the Pacific Rim, Eds.: Berrick/Loo/Wang, Walter de Gruyter&Co., Berlin, 1997. P. 363–375.
7. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.
8. Клячин В.А., Миклюков В.М. Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 11. С. 67–88.
9. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 250 с.

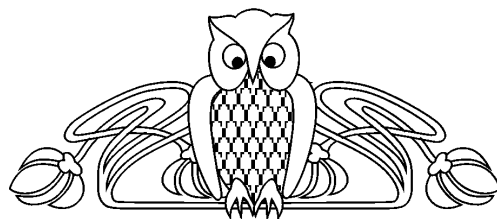
УДК 517.927

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, А.С. Ищенко*

Воронежский государственный университет, кафедра математического анализа
*Белгородский университет потребительской кооперации
E-mail: pokorny@math.vsu.ru, Ischenko-AS@Yandex.ru

В работе обсуждается нерегулярная модель стилтьесовской струны $-p(x)u'(x) + p(+0)u'(+0) + \int_0^x u(\tau)dQ(\tau) = F(x) - F(0)$ на отрезке $[0, \ell]$ при краевых условиях $u(0) = u(\ell) = 0$. Описываются условия разрешимости вышеуказанной задачи.



On Solvability of Certain Classes of Irregular the Second Order Variation Problems

Yu.V. Pokorny, Zh.I. Bakhtina, A.S. Ischenko

In the work the irregular model $-p(x)u'(x) + p(+0)u'(+0) + \int_0^x u(\tau)dQ(\tau) = F(x) - F(0)$ of the Stiltjes string on segment $[0, \ell]$ with boundary conditions $u(0) = u(\ell) = 0$ is discussed. The solvability conditions of the mentioned problem are described.

В работе обсуждаются условия разрешимости задачи

$$-(pu')' + Q'u = F' \quad (1)$$



на отрезке $[0, \ell]$ при краевых условиях

$$u(0) = u(\ell) = 0. \quad (2)$$

Условия (2) взяты однородными для упрощения формулировок. В уравнении (1) функции p , Q , F предполагаются лежащими в $BV[0, \ell]$, то есть имеющими ограниченные вариации на $[0, \ell]$. При этом Q' и F' означают обобщенные в некотором смысле производные функций Q и F . Точно так же и $(pu)'$ означает обобщенную производную от функции $p(x) \frac{du(x)}{dx}$.

Мы будем считать адекватной для (1) формой следующее уравнение:

$$-p(x)u'(x) + p(+0)u'(+0) + \int_0^x u(\tau) dQ(\tau) = F(x) - F(0). \quad (3)$$

Интеграл, определяющий здесь второе слагаемое, понимается по Стильтесу. Уравнение (1) получается из (3) формальным дифференцированием. С другой стороны, если уравнение (1) сочетает слагаемые абстрактного характера (поскольку обобщенные производные — абстрактные функционалы) и не имеет поточечного смысла, то уравнение (3) является поточечно интерпретируемым (при каждом x). Следует отметить, что уравнение (3) является формальным аналогом уравнения Эйлера для функционала

$$\Phi(u) = \int_0^\ell p \frac{u'^2}{2} dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^\ell u dF. \quad (4)$$

Последняя запись является канонической [1] для выражения потенциальной энергии стилтьесовской струны (в терминах М.Г. Крейна [2]); здесь $dQ(x)$ определяет локальный коэффициент упругости окружающей среды, dF — плотность внешней нагрузки, приходящейся на элемент dx (от x до $(x + dx)$) упругой нити, а $p(x)$ — натяжение этого элемента.

Мы рассматриваем нерегулярный случай уравнения (3). Это антитеза случаю, когда Q и F гладки и $p(x)$ непрерывна и не имеет нулей на $[0, \ell]$. В этом последнем случае (1) приобретает стандартный для обыкновенных дифференциальных уравнений вид $-(pu)'' + qu = f$ при $q = Q'$, $f = F'$ и $p \gg 0$. Обсуждаемый ниже случай допускает не только потерю гладкости у коэффициентов Q, F , но и наличие разрывов, что приводит уравнение (1) к дельта-образным членам в коэффициентах Q' и F' . При этом мы допускаем возможность обнуления функции $p(x)$. Именно в этом последнем аспекте данная работа содержит основное научное продвижение.

1. При обсуждении вопроса о разрешимости задачи (1)–(2) или, как мы увидим дальше, задачи (3)–(2) первый вопрос, требующий выяснения, это вопрос о пространстве, где должно искаться соответствующее решение. Актуальность анализа этого вопроса определена еще столетие назад классическим примером Гильберта (см. [3]), где совершенно тривиальный внешне функционал $\Phi(u) = \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} u'^2(x) dx$ при условиях $u(0) = 0$, $u(1) = 1$, очевидно, определенный на всем пространстве $C^1[0, 1]$, не достигает своего минимума в этом пространстве — легко проверяется, что $\inf \Phi(u)$ достигается на функции $u_0(x) = x^{\frac{1}{3}}$. В самом деле, для любой $h(x) \in C^1[0, 1]$ с нулями на концах имеем:

$$\Delta\Phi = \Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) = \int_0^1 2x^{\frac{2}{3}} u'_0(x) h'(x) dx + \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} h'^2(x) dx.$$

Поскольку $u'_0(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, то в предыдущей сумме первое слагаемое приобретает вид

$$\int_0^1 2x^{\frac{2}{3}} u'_0(x) h'(x) dx = \int_0^1 \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} h'(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} dh = \frac{2}{3} \int_0^1 dh = \frac{2}{3} (h(1) - h(0)) = 0.$$

Таким образом, $\Delta\Phi = \int_0^1 x^{\frac{2}{3}} h'^2 dx \geq 0$ для любого $h \in C^1[0, 1]$. Это значит, что \inf функционала $\Phi(u)$, определенного на $[0, \ell]$, достигается за пределами C^1 . Но тогда возникает резонный вопрос об использовании уравнения Эйлера для нерегулярных вариационных задач — в данном примере оно



имеет вид $(x^{\frac{2}{3}}u')' = 0$. Естественно, что следует максимально расширять пространство потенциальных решений таких уравнений.

Несложно проверяется, что уравнение (3), как формальная запись, является необходимым условием для минимали функционала (4). Точнее, если $u_0 \rightarrow \inf \Phi$, то скалярная функция $\varphi(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$ для любого допустимого h принимает минимальное значение при $\lambda = 0$ и потому $\frac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$, откуда чисто формальными выкладками следует, что $\int_0^\ell pu'h' dx + \int_0^\ell uh dQ - \int_0^\ell h dF = 0$ (для каждого допустимого h). Интересуясь непрерывными экстремальными и пользуясь теоремой о преобразовании меры [6], мы, полагая $d\sigma = u dQ$, отсюда после интегрирования по частям первого слагаемого ($\int_0^\ell pu'h' dx = \int_0^\ell pu' dh = - \int_0^\ell h d(pu')$) будем иметь $\int_0^\ell h d[-pu' + \sigma - F] = 0$. Для любой непрерывной функции $h(x)$. Отсюда напрямик следует уравнение (3), если воспользуемся леммой Дюбуа–Реймона.

В проведенной схеме рассуждений отсутствует главное — точное описание класса рассматриваемых функций. Приведенный выше пример Гильберта говорит о том, что при достаточно широких условиях на $p(x)$ даже отсутствие у функционала Φ второго и третьего слагаемых в представлении (4) не позволяет ограничиться пространством C^1 . Наличие в представлении (4) нерегулярных коэффициентов p и Q тем более требует расширения множества функций, допустимых для анализа.

2. Основное пространство рассматриваемых функций, обозначаемое через E , мы определим так: E — множество непрерывных на сегменте $[0, \ell]$ функций, каждая из которых:

а) абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$, т.е. имеет суммируемую на $[0, \ell]$ производную $u'(x)$, причем $u(x) = u(0) + \int_0^x u'(\tau) d\tau$, где суммирование подразумевается по Лебегу;

б) для произвольной $u(x)$ предполагается включение $pu' \in BV[0, \ell]$.

Последнее условие о принадлежности pu' пространству $BV[0, \ell]$, т.е. об ограниченности вариации функции $p(x)u'(x)$, является ограничением, необходимым для осмысленности первого слагаемого в (4). В самом деле, $\int_0^\ell pu'^2 dx = \int_0^\ell pu' du$ и последний интеграл в силу предполагаемой непрерывности $u(x)$ определен по теореме Стилтеса. По аналогичной причине из непрерывности $u(x)$ следует определенность второго и третьего слагаемых в (4). Пространство E , являясь более узким, чем любое соболевское пространство с весом p , оказалось по вышесказанному наиболее естественной областью определения функционала Φ . Именно в этом пространстве мы обсуждаем разрешимость вариационной задачи для функционала (4) и связанную с этим разрешимость краевой задачи (3)–(2).

Мы предполагаем всюду далее, что p, Q, F имеют ограниченные вариации на $[0, \ell]$, причем $p(x) > 0$ (при $0 < x < \ell$).

Лемма 1. Для того чтобы функция $u_0(x)$ давала минимум функционалу (4), необходимо и достаточно, чтобы функция $u_0(x)$ удовлетворяла задаче (3)–(2).

Доказательство проводится тривиальным расписыванием приращения $\Delta\Phi = \Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0)$, а именно

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = & \left(\int_0^\ell p \frac{(u'_0 + h')^2}{2} dx + \int_0^\ell \frac{(u_0 + h)^2}{2} dQ - \int_0^\ell (u_0 + h) dF \right) - \\ & - \left(\int_0^\ell p \frac{u_0'^2}{2} dx + \int_0^\ell \frac{u_0^2}{2} dQ - \int_0^\ell u_0 dF \right) = \int_0^\ell pu'_0 h' dx + \int_0^\ell u_0 h dQ - \int_0^\ell h dF. \end{aligned}$$

Если последнее выражение неотрицательно для любой допустимой $h(x)$, в силу его линейности по h оно должно быть тождественным нулем.

Таким образом, вместо вопроса о существовании минимума для функционала Φ мы вправе обсуждать вопрос о разрешимости краевой задачи (3)–(2).

3. Проблему разрешимости уравнения (3) мы сначала обсудим для уравнения (3) начальных условий $u(0) = \gamma_0, u'(0) = \gamma_1$.

Теорема 1. Пусть функция $\frac{1}{p}$ суммируема на $(0, \ell)$, функция $\frac{Q(x)}{p(x)}$ ограничена и $Q(x)$ не убывает. Тогда уравнение (3) при любых начальных условиях имеет единственное решение в E .



Доказательство. С учетом новых условий уравнение (3) можно заменить следующим:

$$(pu')(x) = p(0)\gamma_1 + \int_0^x u(s)dQ(s) - F(x) + F(0), \quad (5)$$

откуда следует, что $u(x) = \gamma_0 + \int_0^x \frac{1}{p(\tau)} (\int_0^\tau u(s)dQ(s))d\tau + \int_0^x \frac{1}{p(s)} (F(0) - F(s) + p(0)u'(0))ds$. Перепишем последнее равенство в виде

$$u = Au + z, \quad (6)$$

полагая

$$(Au)(x) = \int_0^x \frac{1}{p(\tau)} (\int_0^\tau u(s)dQ(s))d\tau \quad (7)$$

и

$$z(x) = \int_0^x \frac{1}{p(s)} (F(0) - F(s) + p(0)u'(0))ds. \quad (8)$$

Утверждение нашей теоремы эквивалентно тому, что уравнение (6) однозначно разрешимо при любом z . Из представления (8) в силу суммируемости $1/p$ видно, что при $u \in E$ (и даже при $u \in C[a, b]$) функция $z(x) \in C[a, b]$. Мы вопрос о разрешимости уравнения (6) будем обсуждать в пространстве $C[a, b]$. Допустимость сужения нашего вопроса (на пространство $C[a, b]$) легко объяснима тем, что решение $u(x)$ уравнения (6) должно удовлетворять тождеству (5), в котором стоящие справа слагаемые наверняка принадлежат $BV[0, \ell]$. Поэтому в $BV[0, \ell]$ лежит и $(pu')(x)$, а это означает, что $u(\cdot) \in E$.

Доказательство разрешимости (6) в $C[a, b]$ основано на двух обстоятельствах. Во-первых, оператор A , определяемый равенством (7), действует и ограничен в C и, кроме того, его спектральный радиус меньше 1.

Проверка действия A из C в C элементарна: для любой $u(x)$ функция $\int_0^x u(s)ds$ имеет ограниченную вариацию. Потому она суммируема и в силу суммируемости $1/p$ функция $(Au)(x)$ непрерывна. Более того,

$$|(Au)(x)| \leq \|u\| \int_0^x \frac{1}{p(\tau)} \int_0^\tau dQ(s)d\tau = \|u\| \int_0^x \frac{Q(\tau) - Q(0)}{p(\tau)} d\tau, \quad (9)$$

что и означает непрерывность оператора A в $C[a, b]$ (в (9) $\|u\|$ взята в смысле $C[a, b]$).

Оценим теперь спектральный радиус оператора A в $C[a, b]$. Аналогично (9) для любой $\varphi \in C[a, b]$ верно:

$$|(A\varphi)(x)| \leq \|\varphi\| \int_0^x \frac{Q(\tau) - Q(0)}{p(\tau)} d\tau \leq \|\varphi\| Kx, \quad (10)$$

где через K обозначена конечная по условию верхняя граница отношения $\frac{Q(x)-Q(0)}{p(x)}$. Отсюда аналогично предыдущему следует, что $|A^2\varphi(x)| \leq |A(A\varphi)(x)| \leq \|A\varphi\| Kx \leq \|\varphi\| \frac{K^2 x^2}{2}$. Поэтому при любом n $|A^n \varphi(x)| \leq \|\varphi\| \frac{K^n x^n}{n!}$. Теперь, переходя к оценке нормы левой части, имеем $\|A^n\| \leq \frac{K^n \ell^n}{n!}$. Отсюда следует, очевидно, что спектральный радиус $r = \sqrt[n]{\|A^n\|} = 0$. Теорема полностью доказана. \square

Замечание. Доказывая существование решения уравнения, мы идем к главной задаче — к доказательству существования минимума для функционала Φ .

Следствие. При $F(x) \equiv 0$ мы из (3) получаем соответствующее однородное уравнение, для которого согласно доказанной теореме однозначно определяются решения начальных задач:

$$\varphi(0) = 0, \varphi'(+0) = 1 \quad (11)$$

и

$$\psi(0) = 1, \psi'(+0) = 0. \quad (12)$$

Лемма 2. Функции $\varphi(x), \psi(x)$, определенные условиями (11) и (12) для соответствующего однородного уравнения (при $F(x) \equiv 0$), линейно независимы.



Доказательство следует из единственности решения однородного уравнения с нулевыми начальными условиями.

Таким образом, функции $\varphi(x), \psi(x)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, т.е. базис в пространстве таких решений. С помощью этой системы $\{\varphi, \psi\}$ при любых условиях на концах соответствующее решение уравнения (3) наверняка представимо при надлежащем выборе C_1, C_2 в виде $u(x) = z(x) + C_1\varphi(x) + C_2\psi(x)$, где $z(x)$ — решение уравнения (3), обеспечиваемое теоремой 1.

Теорема 2. Для однозначной разрешимости уравнения (3) при любом $F(x) \in BV$ и при любых значениях на концах необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение (3) (при $F(x) \equiv 0$) и условиях (2) имело только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.

Теорема 3. Для однозначной разрешимости вариационной задачи (2), (4) достаточно, чтобы функция $Q(x)$ была неубывающей.

Доказательство. Покажем, что однородное уравнение (3) (при $F(x) \equiv 0$) при условиях (2) имеет только тривиальное решение. Пусть $u_0(x)$ — нетривиальное решение уравнения $(pu')(x) = \int_0^x u dQ$ при условиях (2). Пусть для определенности $u_0(\tau) > 0$ всюду на промежутке $[0, \tau]$. Тогда, так как $u'_0(\tau) = 0$, мы должны иметь $\int_0^\tau u(s) dQ(s) = 0$, откуда в силу неубывания Q мы получаем противоречие с неравенством $u(x) > 0$ при $0 < x < \tau$. \square

В заключение отметим, что введенное нами пространство E является банаховым по норме

$$\|u\| = \sup_{[0, \ell]} |u(x)| + V_0^\ell [pu'(x)].$$

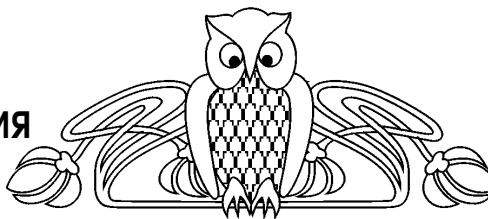
Доказательство этого факта существенно опирается на классические теоремы Хелли и ввиду достаточной деликатности в сочетании с громоздкостью в данной работе не приводится.

Библиографический список

1. Покорный Ю.В. О дифференциалах Стильеса в обобщенной задаче // Докл. АН. 2002. Т. 383, № 5. С. 1–4.
2. Кац И.С., Крейн М.Г. О спектральных функциях струны // Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
3. Алексеев В.М., Тихонов В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат.лит., 1979. 432 с.
4. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны // Изв. вузов. Северокавказ. регион. Естественные науки. Математика и механика сплошной среды. 2004. Спецвыпуск. С. 186–191.
5. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville Theory for an Equation With Generalised Coefficient // J. of Mathematical Sciences. 2004. V. 119, № 6. P. 769–787.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

УДК 517.923

О РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАСШИРЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ СТИЛЬЕСА



А.А. Ткаченко, С.А. Шабров

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: 191180@mail.ru, shabrov_s_a@info.vsu.ru

About Solvability of Integro-Differential Equation with Extended Stieltjes Integral

A.A. Tkachenko, S.A. Shabrov

В работе доказывается разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с расширенным интегралом Стильеса.

In the paper are proved solvability of initial-value problem for integro-differential equation with Stieltjes integral.

В работе изучается вопрос о разрешимости интегро-дифференциального уравнения

$$-pu'_\mu(x) + \int_0^x u d[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0) \quad (x \in \overline{[0, 1]}^\mu) \quad (1)$$



в форме задачи Коши. В уравнении $p(x)$ ($\inf p > 0$), $Q(x)$ и $F(x)$ являются функциями ограниченной вариации. Подобное уравнение возникает при моделировании малых деформаций разорванной струны, концы которой имеют упругое сочленение с помощью пружин (см., напр., [3, 4]).

Обозначим через $S(\mu)$ множество точек разрыва функции $\mu(x)$. Пусть $J_\mu = [0, 1] \setminus S(\mu)$. Введем на J_μ метрику $\rho(x, y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Метрическое пространство (J_μ, ρ) , очевидно, не является полным. Обозначим через $\overline{[0, 1]}^\mu$ его стандартное пополнение по метрике ρ . При таком пополнении каждая точка ξ из $S(\mu)$ превращается в собственные элементы, которые ранее были предельными, обозначаемые нами через $\xi - 0$ и $\xi + 0$. Пусть $\overline{[0, 1]}_1^\mu = \overline{[0, 1]}^\mu \cup S(\mu)$. Множество $\overline{[0, 1]}_2^\mu$ получается из $\overline{[0, 1]}_1^\mu$ заменой каждой точки $\xi \in S(\mu)$ на пару собственных элементов τ_1^ξ и τ_2^ξ , причем будем считать, что $\xi - 0 < \tau_1^\xi < \tau_2^\xi < \xi + 0$.

Производная $u'_\mu(x)$ определена на $\overline{[0, 1]}_2^\mu$, причем для точек $\xi \in S(\mu)$

$$u'_\mu(\tau_1^\xi) = \frac{u(\xi) - u(\xi - 0)}{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)} \quad \text{и} \quad u'_\mu(\tau_2^\xi) = \frac{u(\xi + 0) - u(\xi)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi)}.$$

Интеграл в (1) понимается как π -интеграл и задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta v d[u] &= \int_\alpha^\beta v du_0 + \sum_{\substack{\alpha < s \leq \beta \\ s \in S(u)}} v(s - 0)(u(\tau_1^s) - u(s - 0)) + \\ &+ \sum_{\substack{\alpha \leq s < \beta \\ s \in S(u)}} v(s)(u(\tau_2^s) - u(\tau_1^s)) + \sum_{\substack{\alpha \leq s < \beta \\ s \in S(u)}} v(s + 0)(u(s + 0) - v(\tau_2^s)), \end{aligned}$$

где $v \in \overline{[0, 1]}_1^\mu$, $u \in \overline{[0, 1]}_2^\mu$, u_0 – непрерывная часть u , точки $\alpha, \beta \in \overline{[0, 1]}_2^\mu$.

Подобный интеграл впервые был введен Ю.В. Покорным [1], [2] и получил дальнейшее свое развитие и применение в работах [3], [4].

Заметим, что уравнение (1) в точках разрыва ξ функции $\mu(x)$ реализуется в виде равенств

$$\begin{aligned} -[(pu'_\mu)(\tau_1^\xi) - (pu'_\mu)(\xi - 0)] + u(\xi - 0)[Q(\tau_1^\xi) - Q(\xi - 0)] &= F(\tau_1^\xi) - F(\xi - 0), \\ -[(pu'_\mu)(\tau_2^\xi) - (pu'_\mu)(\tau_1^\xi)] + u(\xi)[Q(\tau_2^\xi) - Q(\tau_1^\xi)] &= F(\tau_2^\xi) - F(\tau_1^\xi), \\ -[(pu'_\mu)(\xi + 0) - (pu'_\mu)(\tau_2^\xi)] + u(\xi + 0)[Q(\xi + 0) - Q(\tau_2^\xi)] &= F(\xi + 0) - F(\tau_2^\xi). \end{aligned} \tag{2}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. Для любой точки $x_0 \in \overline{[0, 1]}_2^\mu \setminus S(\mu)$ и любых чисел u_0, v_0 задача

$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0) = u_0, \\ u'_\mu(x_0) = v_0 \end{cases} \tag{3}$$

имеет единственное значение.

Доказательство. В случае, когда $Q(x) \equiv \text{const}$, разрешимость задачи (3) очевидна. Пусть $Q(x) \not\equiv \text{const}$. Рассмотрим два случая, когда множество $S(\mu)$ точек разрыва функции $\mu(x)$ конечно и когда $S(\mu)$ счетно. Пусть $S(\mu)$ конечно, т.е. $S(\mu) = \{0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < 1\}$.

Уравнение (1) нам удобно заменить эквивалентным уравнением

$$u(x) = \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{p(t)} \int_{x_0}^t u(s) d[Q(s)] \right) d\mu(t) + z(x),$$

где $z(x) = u_0 + \int_{x_0}^x \frac{p(x_0) - F(t) + F(x_0)}{p(t)} d\mu(t)$. В последних двух (и последующих) равенствах внешние интегралы (по μ) понимаются по Лебегу–Стилтьесу.



Разрешимость последнего уравнения эквивалентна разрешимости уравнения $u = Au + z$ с оператором $(Au)(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{p(t)} \left(\int_{x_0}^t u(s) d[Q(s)] \right) d\mu(t)$, действующим из $C(\overline{[0, 1]_1^\mu})$ в $C(\overline{[0, 1]_1^\mu})$, где $C(\overline{[0, 1]_1^\mu})$ — пространство μ -непрерывных на $\overline{[0, 1]_1^\mu}$ функций.

Покажем, что для любых двух функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, определенных на $\overline{[0, 1]_2^\mu}$, выполняется неравенство

$$|A(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| \leq \frac{V_0^1(Q)}{\min_{x \in \overline{[0, 1]_1^\mu}} p(x)} |\mu(x) - \mu(x_0)| \cdot \max_{s \in [x_0, x]} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|, \quad (4)$$

где $V_0^1(Q)$ — полная вариация $Q(x)$ на $\overline{[0, 1]_2^\mu}$. Имеем

$$\begin{aligned} |A(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x \frac{1}{p(t)} \int_{x_0}^t (\varphi_1 - \varphi_2)(s) d[Q(s)] d\mu(t) \right| \leq \frac{1}{\min_{x \in \overline{[0, 1]_2^\mu}} p(x)} \max_{s \in [x_0, x]} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| \times \\ &\times \int_{x_0}^x \left| \int_{x_0}^t d[Q(s)] \right| d\mu(t) \leq \frac{V_0^1(Q)}{\min_{x \in \overline{[0, 1]_2^\mu}} p(x)} |\mu(x) - \mu(x_0)| \cdot \max_{s \in [x_0, x]} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|. \end{aligned}$$

Пусть $x_0 \in [\xi_i + 0, \xi_{i+1} - 0]$ и $\varepsilon = \frac{p_0}{2V_0^1(Q)}$, где $p_0 = \inf_{\overline{[0, 1]_2^\mu}} p > 0$. Так как функция $\mu(x)$ строго монотонно возрастает и непрерывна на $[\xi_i + 0, \xi_{i+1} - 0]$, то существует такое разбиение множества $[\xi_i + 0, \xi_{i+1} - 0]$ точками $\xi_i = x_0^{\xi_i} < x_1^{\xi_i} < \dots < x_{n_i}^{\xi_i} = \xi_{i+1} - 0$, из $\overline{[0, 1]_2^\mu} \setminus S(\mu)$, что $0 < \mu(x_{j+1}^{\xi_i}) - \mu(x_j^{\xi_i}) < \varepsilon$ для всех $j = 0, \dots, n_i - 1$. Тогда $x_0 \in [x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}]$ при некотором k . Воспользовавшись теперь неравенством (4) получаем, что для всех $x \in [x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}]$ справедливо неравенство

$$|Au(x)| \leq \frac{1}{p_0} \max_{[x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}]} |u(x)| V_0^1(Q) (\mu(x_{k+1}^{\xi_i}) - \mu(x_k^{\xi_i})) < \frac{1}{2} \|u\|.$$

Следовательно, оператор A является сжимающим, и уравнение $u = Au + z$ разрешимо в $C([x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}])$ — пространстве μ -непрерывных на $[x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}]$ функций. Обозначим через $\varphi(x)$ решение уравнения на этом отрезке.

Рассмотрим отрезок $[x_{k+1}^{\xi_i}, x_{k+2}^{\xi_i}]$, примыкающий к $[x_k^{\xi_i}, x_{k+1}^{\xi_i}]$ справа. Поставим теперь задачу Коши в точке $x_{k+1}^{\xi_i}$:

$$\begin{cases} u(x_{k+1}^{\xi_i}) = \varphi(x_{k+1}^{\xi_i}), \\ u'_\mu(x_{k+1}^{\xi_i}) = \varphi'_\mu(x_{k+1}^{\xi_i}). \end{cases} \quad (5)$$

Аналогичными рассуждениями устанавливается, что в $C([x_{k+1}^{\xi_i}, x_{k+2}^{\xi_i}])$ оператор A также будет сжимающим, следовательно, существует решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (5). Продолжим этот процесс вправо до тех пор, пока не достигнем точки $x = \xi_{i+1}$. Тогда после проведения описанной выше процедуры нам становятся известны значения $\varphi(\xi_{i+1} - 0)$ и $\varphi'_\mu(\xi_{i+1} - 0)$. Воспользовавшись формулами (2) получаем значения для $\varphi(\xi_{i+1} + 0)$ и $\varphi'_\mu(\xi_{i+1} + 0)$. Проводя теперь для отрезка $[\xi_{i+1} + 0, \xi_{i+2} - 0]$ аналогичные рассуждения покажем существование на нем решения. Таким образом, решение продолжаемо до точки $x = 1$. Аналогично решение продолжается и влево до точки $x = 0$.

Пусть теперь $S(\mu)$ счетно. Выберем из $S(\mu)$ только те точки ξ_i , в которых величина скачка функции $\mu(x)$ превышает ε . Таких точек будет конечное количество, поскольку функция $\mu(x)$ имеет ограниченную вариацию. Поэтому отрезок $[0, 1]$ разбивается на конечное число отрезков, и дальнейшие рассуждения проводятся как и в случае конечного числа точек разрыва.

Замечание. При постановке задачи Коши мы исключали точки разрыва x_0 разрыва функции $\mu(x)$. Дело в том, что если $x_0 \in S(\mu)$, то функция $u(x)$ в точке $x = x_0$ имеет единственное значение, а производная $u'_\mu(x)$ имеет два значения. Поэтому при $x_0 \in S(\mu)$ мы можем рассматривать задачи

$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int_0^x u d[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0 - 0) = u_0, \\ u'_\mu(\tau_1^\xi) = v_0, \end{cases} \quad (6)$$



$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0) = u_0, \\ u'_\mu(\tau_1^\xi) = v_0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0) = u_0, \\ u'_\mu(\tau_2^\xi) = v_0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} -pu'_\mu(x) + \int_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0), \\ u(x_0 + 0) = u_0, \\ u'_\mu(\tau_2^\xi) = v_0, \end{cases} \quad (9)$$

В силу равенств (2) задачи (6), (7), (8), (9) сводятся к задаче вида (3). Поэтому в силу предыдущей теоремы задачи (6), (7), (8), (9) также однозначно разрешимы.

Авторы выражают признательность и благодарность Юлию Витальевичу Покорному за постановку задачи и чуткое руководство, а также Маргарите Борисовне Зверевой за замечания, которые способствовали улучшению текста статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00397).

Библиографический список

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стильтеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 2. С. 167–169.
2. Покорный Ю.В. О дифференциалах Стильтеса в обобщенной задаче Штурма–Лиувилля // Докл. АН. 2002. Т. 383, № 5. С. 1–4.
3. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. О задаче Штурма–Лиувилля с разрывными решениями // Труды математического факультета. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 2005. Вып. 10. С. 119–130.
4. Зверева М.Б. О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стильтеса: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2005. 120 с.

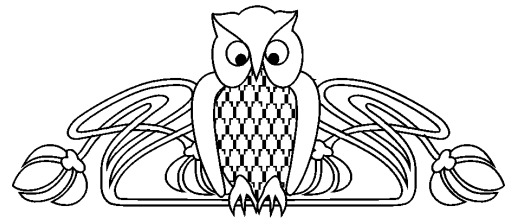
УДК 517.53

О ЧИСЛЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

А.В. Фрянцев

Владимирский государственный университет,
студент 4 курса
E-mail: versionfalex@vpti.vladimir.ru

Получена формула аппроксимации дифференциальных операторов специального вида. Указана оценка абсолютной погрешности аппроксимации. Показано, что рассматриваемая аппроксимация является точной на многочленах.



On Numerical Approximation of Differential Polynomials

A.V. Fryantsev

A numerical approximation formula was devised for differential operators of a special form. An absolute approximation error value was indicated. It was shown that the mentioned approximation is accurate for polynomials.

1. ТЕОРЕМА ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В работах [1, 2] предложен метод аппроксимаций аналитических функций посредством сумм вида $\sum_k \lambda_k f(\lambda_k z)$ (здесь f — некоторая фиксированная аналитическая в окрестности точки $z = 0$ функция, а аппроксимация проводится за счет подбора комплексных чисел λ_k) и указаны приложения метода к численному дифференцированию и интегрированию аналитических функций. В теореме 1 настоящей работы метод модифицируется применительно к аппроксимации дифференциальных многочленов, обобщающих оператор дифференцирования.

Пусть функция $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z - z_0)^j$ аналитична в некотором замкнутом круге $\mathbb{U}(r, z_0) := \{z : |z - z_0| \leq r\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ и $P(\lambda) = \sum_{s=1}^q p_s \lambda^s$ — некоторый фиксированный многочлен степени q , $p_q \neq 0$, $P(0) = 0$.



Теорема 1. При любом натуральном $n > q + 5$ существуют комплексные числа $\lambda_k, k = 1, \dots, Nq, N = [n/q]$ (целая часть числа n/q), $|\lambda_k| < 1$, такие, что имеет место приближенное равенство

$$D(f; z_0, z) := \sum_{s=0}^{q-1} p_{q-s} \frac{f^{(s)}(z_0)}{s!} (z - z_0)^s \approx \sum_{k=1}^{Nq} P(\lambda_k) \cdot f(z_0 + \lambda_k(z - z_0)), \quad (1.1)$$

причем при $z \in \mathbb{U}(r, z_0)$ его абсолютная погрешность $\delta_n(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|\delta_n(z)| \leq n \cdot M(r) \cdot \max_{1 \leq s \leq q} |p_s| \cdot \frac{t^{-q} - 1}{(1-t)^2} t^{n+1} \left(\frac{5}{n-q} \right)^{(n+1)/q}, \quad (1.2)$$

где $M(r) = \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|, t = r^{-1}|z - z_0| < 1$.

Теорема 1 без доказательства приведена в работе [3].

Примечания. Отметим, что числа λ_k находятся как корни некоторого алгебраического уравнения (см. (1.5)), зависящего лишь от параметров n и q , и не зависят от выбора функций $f(z), P(\lambda)$. В этом смысле набор чисел λ_k является универсальным, т.е. пригодным для любой аналитической функции $f(z)$.

Полученная погрешность аппроксимации (1.2) имеет порядок $(C/n)^{n/q}$ при достаточно больших n , то есть убывает весьма быстро с ростом n .

Доказательство. Достаточно доказать теорему в случае $z_0 = 0$. Пусть λ_k – какое-либо фиксированное число. Тогда при $z \in \mathbb{U}(r, 0)$ имеем

$$P(\lambda_k) \cdot f(\lambda_k z) = \sum_{s=1}^q \sum_{j=0}^{\infty} p_s f_j \lambda_k^{s+j} z^j = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\tilde{m}} p_s f_{m-s} \lambda_k^m z^{m-s},$$

где $\tilde{m} = \min\{q, m\}$. Следовательно, для произвольного набора чисел $\lambda_k, k = 1, \dots, n$, имеем

$$\sum_{k=1}^n P(\lambda_k) f(\lambda_k z) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m \sum_{s=1}^{\tilde{m}} p_s f_{m-s} z^{m-s}, \quad (1.3)$$

где через S_m обозначены степенные суммы

$$S_m = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Определим теперь числа λ_k так, что $S_q = 1$, и $S_m = 0$ при всех $m \neq q, m = 1, \dots, n$ (напомним, что q – степень многочлена P и $n > q + 5$). Покажем, что при таких условиях на степенные суммы отличные от нуля значения $\lambda_k = \lambda_k^{(n)}$ находятся как решения уравнения

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{\tau^k}{k!} = 0, \quad \tau = \frac{1}{q\lambda^q}, \quad N = \left[\frac{n}{q} \right] \quad (1.5)$$

(имеющего Nq различных корней $\lambda_k \neq 0$), при этом (см. [1])

$$|\lambda_k| \leq \left(\frac{5}{n-q} \right)^{1/q}, \quad k = 1, \dots, Nq. \quad (1.6)$$

В самом деле, вычислим элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_m = \sigma_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_m}, \quad m = 1, \dots, n,$$

по рекуррентным формулам Ньютона

$$m\sigma_m = (-1)^{m+1} \left(S_m + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \cdot S_{m-j} \sigma_j \right), \quad m = 1, \dots, Nq.$$



Методом математической индукции несложно проверить, что отличны от нуля симметрические многочлены лишь с номерами, кратными числу q , и при этом

$$\sigma_{qk} = \frac{(-1)^{(q+1)k}}{q^k k!}; \quad \sigma_l = 0, \quad l \neq qk.$$

Следовательно, для определения чисел λ_k получаем уравнение порядка n (теорема Виета):

$$\sum_{0 \leq qk \leq n} (-1)^k \frac{\lambda^{n-qk}}{q^k k!} = \lambda^n \sum_{0 \leq qk \leq n} (-1)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{q\lambda^q} \right)^k = 0.$$

Отсюда для нахождения отличных от нуля величин λ_k и получается уравнение (1.5) (каждому корню τ_s этого уравнения соответствует q различных комплексных значений $\lambda = 1/(q\tau_s)^{1/q}$).

В работе [4] показано, что корни τ_s уравнения (1.5) удовлетворяют неравенству $|\tau_s| \geq N/5$. Отсюда и из того, что $N > -1 + n/q$, находим, что корни λ_k удовлетворяют неравенству (1.6). Из (1.6), в частности, находим оценку степенных сумм при $m > n > q$:

$$|S_m| \leq n \left(\frac{5}{n-q} \right)^{m/q} =: A_{n,m}. \quad (1.7)$$

Отметим, что оценки (1.7) ранее использовались в работах [1, 2]. При указанном выборе величин λ_k равенство (1.3) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{Nq} P(\lambda_k) f(\lambda_k z) = D(f; 0, z) + \sum_{m=n+1}^{\infty} S_m \sum_{s=1}^q p_s f_{m-s} z^{m-s}, \quad z \in U(r, 0).$$

Получим оценку (1.2) остатка. Имеем

$$\begin{aligned} |\delta_n(z)| &= \left| D(f; 0, z) - \sum_{k=1}^{Nq} P(\lambda_k) f(\lambda_k z) \right| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} S_m \sum_{s=1}^q p_s f_{m-s} z^{m-s} \right| \leq \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} |S_m| \sum_{s=1}^q |p_s| |f_{m-s}| |z|^{m-s}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Воспользуемся стандартной оценкой коэффициентов Тейлора:

$$|f_{m-s}| = \frac{|f^{(m-s)}(0)|}{(m-s)!} \leq \frac{M(r)}{2\pi} \int_{|\tau|=r} \frac{|d\tau|}{|\tau|^{m-s+1}} = \frac{M(r)}{r^{m-s}}.$$

Отсюда с учетом (1.7) и (1.8) и условия теоремы $n > q + 5$ (из которого следует, что $|S_m| < A_{n,n+1}$ при $m \geq n + 1$) получаем

$$|\delta_n(z)| \leq M(r) \cdot \max_{1 \leq s \leq q} |p_s| \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} |S_m| \sum_{s=1}^q t^{m-s} \leq n \cdot M(r) \cdot \max_{1 \leq s \leq q} |p_s| \cdot A_{n,n+1} \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} \sum_{s=1}^q t^{m-s},$$

где $t = r^{-1}|z| < 1$, что и доказывает теорему 1 при $z_0 = 0$. \square

2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 1

1. Положив все коэффициенты многочлена $P(\lambda)$ равными единице, получим приближенно (с указанной точностью) частичную сумму ряда Тейлора функции $f(z)$. То есть в данном случае формула (1.1) принимает вид

$$\sum_{s=0}^{q-1} \frac{f^{(s)}(z_0)}{s!} (z - z_0)^s \approx \sum_{k=1}^{Nq} \lambda_k \frac{\lambda_k^q - 1}{\lambda_k - 1} \cdot f(z_0 + \lambda_k(z - z_0)), \quad (2.1)$$

где λ_k — корни уравнения (1.5). В данном случае абсолютная погрешность вычисляется по формуле (см. (1.2)):

$$|\delta_n(z)| \leq n \cdot M(r) \cdot \frac{t^{-q} - 1}{(1-t)^2} t^{n+1} \left(\frac{5}{n-q} \right)^{(n+1)/q}, \quad t = \frac{|z - z_0|}{r}. \quad (2.2)$$



2. Пусть один из коэффициентов p_{q-s} многочлена P равен единице, а остальные — нулю. Тогда из (1.1) получается формула для приближенного вычисления производной $f^{(s)}(z_0)$ порядка s . Точнее, пусть фиксированы натуральные n и q , $n > q + 5$, и пусть при некотором s имеем $p_{q-s} = 1$, $p_{q-k} = 0$, $k = \overline{0, q-1}$, $k \neq s$. Тогда из (1.1) получается формула

$$\frac{1}{s!} f^{(s)}(0) z^s \approx \sum_{k=1}^n \lambda_k^{q-s} f(\lambda_k z), \quad \frac{1}{s!} f^{(s)}(0) \approx \sum_{k=1}^n \lambda_k^{q-s} f(\lambda_k), \quad s = 0, \dots, q-1, \quad (2.3)$$

где λ_k — корни уравнения (1.5), причем абсолютная погрешность формулы (2.3) вычисляется по формуле (2.2) при $z_0 = 0$.

3. Подбирая коэффициенты полинома $P(\lambda)$ соответствующим образом, из частичной суммы заданной аналитической функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ с ненулевыми коэффициентами Тейлора c_k можно

получить частичную сумму $\sum_{s=0}^{q-1} p_{q-s} c_s (z - z_0)^s$ любой аналитической в окрестности точки z_0 функции.

Тем самым можно аппроксимировать любую аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $g(z)$, зная значения некоторой фиксированной функции $f(z)$ (этот вопрос рассматривался также в работах [1, 2]).

Рассмотрим, к примеру, случай $z_0 = 0$, $f(z) = e^z$, $g(z) = \cos z$. Пусть m — некоторое натуральное число, $q = 2m + 1$, коэффициенты многочлена $P(\lambda) = \sum_{s=1}^{2m+1} p_s \lambda^s$ с нечетными номерами вычисляются так: $p_{2m+3-2k} = (-1)^{k-1}$, $k = 1, \dots, m+1$, коэффициенты с четными номерами равны нулю. Тогда

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} \lambda^{2m+3-2k} = \lambda \frac{\lambda^{2m+2} + (-1)^m}{1 + \lambda^2},$$

и из (1.1) получается формула

$$\cos z \approx \sum_{k=1}^{Nq} \lambda_k \frac{\lambda_k^{2m+2} + (-1)^m}{1 + \lambda_k^2} e^{\lambda_k z}. \quad (2.4)$$

В (2.4) числа λ_k являются корнями уравнения (1.5), абсолютная погрешность вычисляется по формуле (2.2) при $z_0 = 0$, $M(r) = e^r$.

3. ЗАМЕЧАНИЕ О ТОЧНОСТИ ОДНОЙ ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В работах [4, 5] получен следующий результат о численном дифференцировании аналитических функций.

Теорема А [4, 5]. Для любой аналитической в $\mathbb{U}(r, z_0)$ функции f имеем:

$$f'(z_0) = -n \cdot f(z_0) + \sum_{k=1}^n f(z_0 + \tau_k^{-1}) + \delta(f; z_0, n) \quad (3.1)$$

с погрешностью $|\delta(f; z_0, n)| \leq 5n(5/(nr))^n M(r)$, $n \geq 6/r$, где τ_k — корни уравнения (1.5) при $q = 1$.

Этот результат можно дополнить.

Теорема 2. Для любого многочлена $P_s(z)$ степени $s \leq n$ формула (3.1) точна, то есть

$$P'_s(z) = -n \cdot P_s(z) + \sum_{k=1}^n P_s(z + \lambda_k). \quad (3.2)$$

Доказательство. При $s = 0$ равенство (3.2) выполняется очевидным образом для любого набора чисел λ_k . Пусть имеется набор комплексных чисел λ_k , для которых выполняется равенство (3.2) при $s = \overline{1, n}$. Через S_m обозначим степенные суммы (1.4). При $s = 1, 2$ из равенства (3.2) получаем

$$1 = -n \cdot z + \sum_{k=1}^n (z + \lambda_k) = S_1, \quad 2 \cdot z = -n \cdot z^2 + \sum_{k=1}^n (z + \lambda_k)^2 = 2zS_1 + S_2.$$



Отсюда находим $S_1 = 1$, $S_2 = 0$. Докажем далее по индукции, что $S_m = 0$ при $m = 3, \dots, n$. Действительно, предположим, что $S_m = 0$ при всех $m = 3, \dots, \mu$, $\mu < n$. Покажем, что и $S_{\mu+1} = 0$. Воспользуемся равенством (3.2) при $P_{\mu+1}(z) = z^{\mu+1}$:

$$(\mu + 1)z^\mu = -nz^{\mu+1} + \sum_{k=1}^n (z + \lambda_k)^{\mu+1} = -n \cdot z^{\mu+1} + \sum_{j=0}^{\mu+1} C_{\mu+1}^j z^{\mu+1-j} S_j.$$

Отсюда по предположению индукции получаем

$$(\mu + 1)z^\mu = -nz^{\mu+1} + z^{\mu+1}S_0 + (\mu + 1)z^\mu S_1 + S_{\mu+1},$$

т.е. $S_{\mu+1} = 0$.

Таким образом, $S_1 = 1$ и $S_m = 0$ при $m = 2, \dots, n$. Отсюда однозначно определяются числа $\lambda_1 = \tau_1^{-1}, \dots, \lambda_n = \tau_n^{-1}$, как это уже делалось выше (см. (1.5) при $q = 1$). \square

Следствие. Для любых $j = 2, \dots, s$

$$P_s^{(j)}(z) = (-n)^j \cdot P_s(z) + \sum_{k=1}^j C_j^k (-n)^{j-k} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n P_s(z + \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}). \quad (3.3)$$

Аналогичное приближенное равенство (3.3) для произвольных аналитических функций с соответствующей оценкой погрешности приведено в работе [6].

Библиографический список

1. Данченко В.И. Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2006. С. 86–88.
2. Данченко В.И. Об аппроксимации суммами вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Третья Петрозаводская Международная конференция по теории функций комплексного переменного, посвященная 100-летию Г.М. Голузина. Петрозаводск, 2006. С. 18–20.
3. Фрянецев А.В. О численной аппроксимации дифференциальных полиномов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тр. воронеж. зимней мат. шк. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2007. С. 233–234.
4. Данченко В.И. Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 4. С. 33–52.
5. Данченко В.И., Данченко Д.Я. О приближении наипростейшими дробями // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 4. С. 553–559.
6. Кувшинов А.А. О численном дифференцировании аналитических функций // Дифференциальные уравнения и динамические системы: Тез. докл. Суздаль, 2006. С. 133–134.



МЕХАНИКА

УДК 629.7; 531.36

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

А.В. Алексеев, В.С. Асланов

Самарский государственный аэрокосмический университет,
кафедра теоретической механики
E-mail: alexeeff05@mail.ru, aslanov@ssau.ru

На основании подхода Ф.Л. Черноусько получены уравнения в интегро-дифференциальной форме пространственного движения тела с полостью целиком заполненной жидкостью малой вязкости. Для частного случая движения интегро-дифференциальное уравнение сведено к обыкновенному дифференциальному, и с помощью метода усреднения получено приближенное аналитическое решение. Даны примеры, иллюстрирующие точность полученного решения и влияние параметров системы на ее движение.

Movement of a Firm Body With a Liquid of Small Viscosity

A.V. Alekseev, V.S. Aslanov

On the basis of the approach F.L. Tchernousko the equations in the integro-differential form of spatial movement of a body with a cavity wholly filled liquid of small viscosity are received. For a special case of movement the integro-differential equation is shown to ordinary differential, and with the help of a method of averaging the approached analytical decision is received. The examples showing accuracy of the received decision and influence of parameters of system on its movement are given.

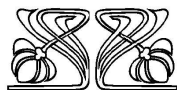
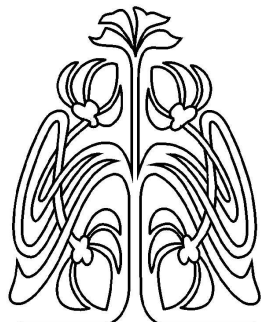
ВВЕДЕНИЕ

Задачи о движении твердого тела с полостями, содержащими жидкость, являются актуальными и привлекают внимание многих исследователей в связи с проблемами динамики летательных аппаратов, имеющих на борту запас жидкого топлива. Одним из первых подобными задачами занимался Н.Е. Жуковский [1]. В дальнейшем теория движения систем с жидкими компонентами получила развитие в работах Ф.Л. Черноусько [2], Б.И. Рабиновича [3], Н.Н. Моисеева и В.В. Румянцева [4].

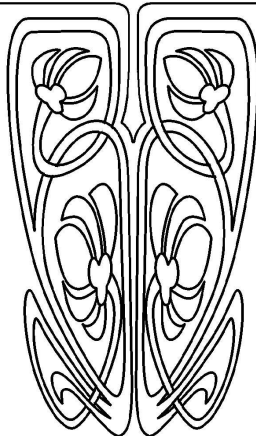
При построении математических моделей движения систем с жидким наполнением учитывают два фактора: мера заполнения полости и вязкость жидкости. При частичном заполнении полости приходится учитывать изменение положения центра масс системы, а также силы поверхностного натяжения жидкости. Уравнения движения системы с большой вязкостью жидкости (кинематическая вязкость $\nu \gg 1$) с точностью порядка ν^{-1} могут быть сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а при малой вязкости движение системы описывается интегро-дифференциальными уравнениями [2].

Жидкое топливо, используемое, например, для ракетных двигателей, как правило, имеет малую вязкость. При незаполненном баке возмущения, вызванные движением жидкости, более значительны, чем в случае полностью заполненного бака. Во избежание подобных возмущений жидкость внутри баков подавливается мембранами.

Ставится задача получения уравнений пространственного движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью малой вязкости, и нахождения приближенных аналитических решений для плоского случая движения.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим движение вокруг неподвижной точки твердого тела с односвязной полостью D , полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Пусть $Oy_1y_2y_3$ — неподвижная система координат, а подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$ свяжем с твердым телом. Для получения уравнений движения системы воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента, выбирая в качестве полюса неподвижную точку O твердого тела:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}^e. \quad (1)$$

Кинетический момент системы относительно неподвижной точки согласно [2] запишется в следующем виде:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{J}_0 + \mathbf{J})\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}^0 + \mathbf{K}^*. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{J}_0 — тензор инерции твердого тела относительно неподвижной точки; \mathbf{J} — тензор присоединенных масс; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости твердого тела; \mathbf{K}^0 — кинетический момент, характеризующий непотенциальность движения жидкости; \mathbf{K}^* — кинетический момент, характеризующий вязкость жидкости.

Кинетический момент, характеризующий непотенциальность движения жидкости внутри полости, определяется формулой

$$\mathbf{K}^0 = \rho \int_D \mathbf{r} \times \mathbf{a} \, d\nu, \quad (3)$$

где D — объем жидкости, \mathbf{r} — радиус вектор.

Вектор-функция \mathbf{a} зависит от формы полости и от начального распределения скоростей частиц жидкости, однозначно находится из условий:

$$\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{u}_0, \quad \text{div } \mathbf{a} = 0 \text{ в } D, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } S.$$

Кинетический момент, характеризующий неидеальность жидкости, определяется следующим образом:

$$\mathbf{K}^* = \frac{\rho\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}} \left[2\mathbf{b}\sqrt{t-t_0} + \mathbf{E} \int_{t_0}^t \frac{\boldsymbol{\omega}(\tau) \, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right], \quad (4)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \oint_s (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_i + \nabla\Phi_i) \mathbf{a} \, ds, \quad (5)$$

где \mathbf{e}_i — орты, задающие систему координат, связанную с телом, $\nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$ — оператор Гамильтона, Φ_i — потенциалы Жуковского, зависящие только от формы полости [1].

Компоненты тензора \mathbf{E} вычисляются по формуле

$$E_{ij} = \oint_s (\mathbf{r} \times \mathbf{e}_i + \nabla\Phi_i)(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_j + \nabla\Phi_j) \, ds. \quad (6)$$

В силу симметрии подынтегрального выражения в интеграле (6) тензор \mathbf{E} также симметричен ($E_{ij} = E_{ji}$). Очевидно, что связанную систему координат $Ox_1x_2x_3$ можно выбрать так, что тензор \mathbf{E} будет диагональным, то есть $E_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Согласно [2], вектор \mathbf{b} и тензор \mathbf{E} инвариантны по отношению к выбору полюса O , то есть не зависят от положения полости внутри тела. Тензор \mathbf{E} характеризует диссипацию энергии в вязкой жидкости, заключенной в полости, и зависит только от формы полости.

После подстановки формул (2)–(4) в уравнение (1) с учетом (5) и (6) и вычисления производных по времени получим интегро-дифференциальное векторное уравнение сферического движения тела с жидкостью малой вязкости

$$(\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}) \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \int_D \mathbf{r} \times \mathbf{a} \, d\nu + \frac{\rho\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\mathbf{b}}{\sqrt{t-t_0}} + \mathbf{E} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \frac{\boldsymbol{\omega}(\tau) \, d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right] = \mathbf{M}^e. \quad (7)$$



Интегро-дифференциальное уравнение (7) справедливо с погрешностью порядка ν на интервале времени $(t - t_0) \sim 1$ [2].

Если в начальный момент течение потенциально всюду, кроме области пограничного слоя [2], а функции $\int_{t_0}^t \frac{\omega_i(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$ ($i = 1, 2, 3$) ограничены величиной порядка угловой скорости ω вращения твердого тела при всех $t \geq t_0$, что означает отсутствие вращательного движения (то есть движение тела представляет собой колебания около некоторого среднего положения), тогда уравнение движения будет справедливо и при $t - t_0 \gg 1$. В этом наиболее важном случае имеем $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{K}^0 = 0$, $\mathbf{b} = 0$, а \mathbf{K}^* есть величина порядка $\nu^{1/2}$ по сравнению с $(\mathbf{J}_0 + \mathbf{J})\boldsymbol{\omega}$ в (2) при всех $t \geq t_0$.

Отметим, что соотношение (7) справедливо не только для твердого тела с полостью, но и для системы тел с несколькими полостями. Для этого необходимо просуммировать кинетические моменты жидкости каждой полости.

2. ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА С ЖИДКОСТЬЮ. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

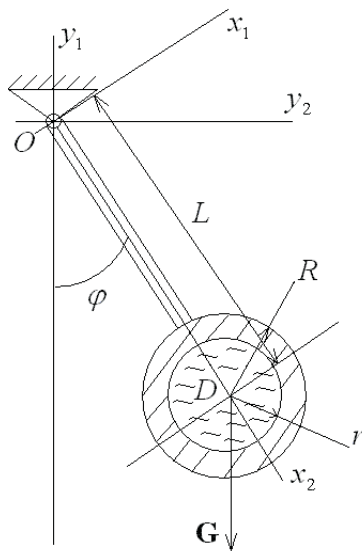


Рис. 1. Схема маятника с жидкостью

Рассмотрим плоское движение маятника, состоящего из твердого шара радиусом R , подвешенного на невесомом стержне, под действием силы тяжести \mathbf{G} (рис. 1). Внутри шара расположена сферическая полость, с центром, совпадающим с центром шара, и радиусом $r \leq R$. Полость заполнена жидкостью с плотностью ρ и кинематической вязкостью $\nu \ll 1$. Пусть маятник совершает колебательные движения, а течение жидкости в начальный момент потенциально, тогда $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{b} = 0$, а уравнение (7) приобретает вид

$$(J_0 + J)\ddot{\varphi} + \frac{\rho\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}} E \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \frac{\dot{\varphi} d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + GL \sin \varphi = 0, \quad (8)$$

где $E = 8\pi r^4/3$ [2].

Пусть амплитуда колебаний маятника будет малой, тогда уравнение (8) можно переписать в виде

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = -\varepsilon \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{\varphi} d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad (9)$$

где $k^2 = GL/(J_0 + J)$, $\varepsilon = \rho E \sqrt{\nu}/((J_0 + J)\sqrt{\pi})$. Учитывая, что величина $\rho E/((J_0 + J)\sqrt{\pi}) \sim 1$, а вязкость $\nu \ll 1$, величину $\varepsilon \ll 1$ будем считать малой.

Выберем в качестве начальных условий движения: $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, тогда в соответствии с процедурой усреднения [5] в правую часть уравнения (9) подставим решение соответствующего однородного уравнения:

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt, \quad \dot{\varphi} = -\varphi_0 k \sin kt. \quad (10)$$

Уравнение (9) примет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = \varepsilon \varphi_0 k F(t), \quad (11)$$

где

$$F(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sin k\tau d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (12)$$

Так как подынтегральная функция в (12) ограничена и интегрируема, то согласно [6] несобственный интеграл вычисляют по формуле

$$\int_0^t \frac{\sin k\tau d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \lim_{X \rightarrow t-0} \int_0^X \frac{\sin k\tau d\tau}{\sqrt{X-\tau}}.$$



Будем аппроксимировать функцию (12) интегралами Френеля [7]

$$F(t) \approx k \left(C(kt) - \frac{1}{2} \right). \quad (13)$$

где $C(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$. Разложим функцию (13) в асимптотический ряд [7]

$$F(t) \approx k \left[\frac{\sin kt}{\sqrt{2\pi kt}} \left(1 - \frac{1 \cdot 3}{(2kt)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2kt)^4} - \dots \right) - \frac{\cos kt}{\sqrt{2\pi kt}} \left(\frac{1}{2kt} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2kt)^3} + \dots \right) \right]$$

и будем учитывать только первое слагаемое

$$F(t) \approx k \frac{\sin kt}{\sqrt{2\pi kt}}, \quad (14)$$

тогда уравнение (9) примет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = \varepsilon \varphi_0 k^2 \frac{\sin kt}{\sqrt{2\pi kt}}. \quad (15)$$

На рис. 2 показано соответствие функции (12) аппроксимации (14).

Умножим уравнение (15) на $d\varphi$ и приведем его к виду $\dot{\varphi} d\dot{\varphi} + k^2 \varphi d\varphi = \varepsilon A \frac{\sin kt}{\sqrt{t}} \dot{\varphi} dt$,

где $A = \varphi_0 k^2 / \sqrt{2\pi k}$. Учитывая (10), заменим в правой части последнего уравнения $\dot{\varphi}$ и получим

$$\dot{\varphi} d\dot{\varphi} + k^2 \varphi d\varphi = -\varepsilon A \varphi_0 k \frac{\sin^2 kt}{\sqrt{t}} dt.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим интеграл энергии

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + k^2 \frac{\varphi^2}{2} = E_0 - \varepsilon A \varphi_0 k \left[\sqrt{t} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} C \left(2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{t} \right) \right]. \quad (16)$$

В силу малых возмущений в уравнении (11) будем считать амплитуду $\varphi_0 = \varphi_{\max}$ в (10) переменной величиной. Воспользуемся заменой переменных (10), в результате получим

$$k^2 \frac{\varphi_{\max}^2}{2} = E_0 - \varepsilon A \varphi_0 k \left[\sqrt{t} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} C \left(2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{t} \right) \right].$$

Возвращаясь к физическим величинам, выразим амплитуду колебаний

$$\varphi_{\max}(t) = \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{\rho E \sqrt{\nu}}{(J - 0 + J) \sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\frac{2kt}{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2}} C \left(2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sqrt{t} \right) \right]}. \quad (17)$$

На рис. 3 изображены зависимости угла отклонения маятника от времени, полученные путем численного интегрирования уравнения (8) — пунктирная линия, и использования формулы (17) — сплошная линия.

Из выражения (16) видно, что полная механическая энергия исследуемой системы со временем уменьшается, что свидетельствует о демпфирующих свойствах неидеальной жидкости.

Исследуем влияние параметров системы на

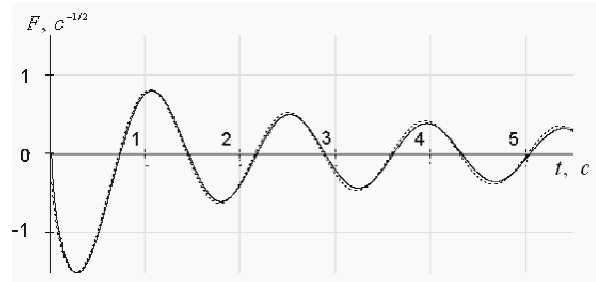


Рис. 2. Зависимость функции $F(t)$ от времени: сплошная линия — численный расчет по формуле (12), пунктирная — аппроксимация (14)

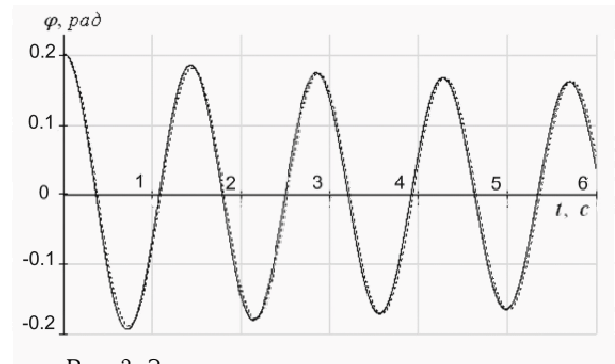


Рис. 3. Зависимость угла отклонения от времени



ее движение. На рис. 4 и 5 изображены зависимости амплитуды колебаний от времени при различных значениях кинематической вязкости и плотности жидкости. При увеличении этих параметров амплитуда колебаний уменьшается быстрее.

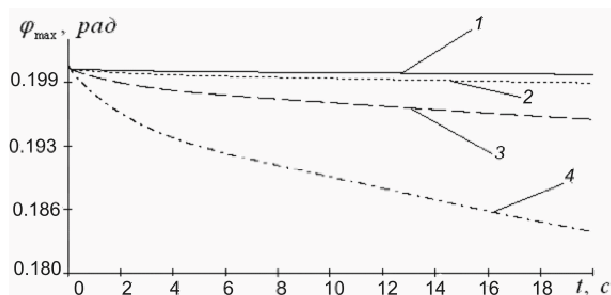


Рис. 4. Зависимость амплитуды колебаний маятника от времени при разных вязкостях: 1 – $\nu = 1.25 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, 2 – $\nu = 8 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, 3 – $\nu = 1 \times 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, 4 – $\nu = 1 \times 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

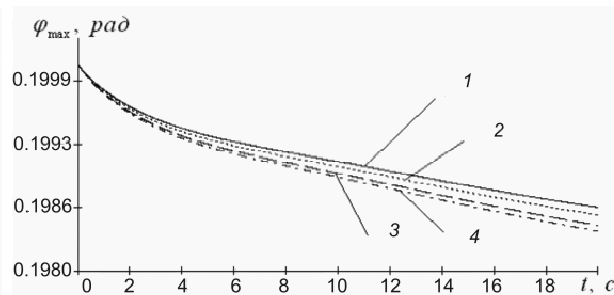


Рис. 5. Зависимость амплитуды колебаний маятника от времени при разных плотностях: 1 – $\rho = 780 \text{ кг}/\text{м}^3$, 2 – $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, 3 – $\rho = 1500 \text{ кг}/\text{м}^3$, 4 – $\rho = 2000 \text{ кг}/\text{м}^3$

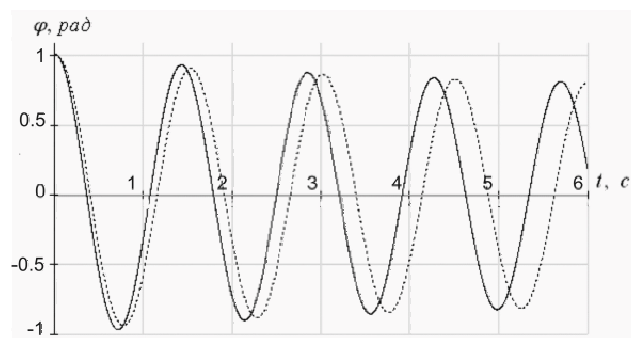


Рис. 6. Зависимость угла отклонения от времени при большом начальном отклонении

На рис. 6 изображены зависимости угла отклонения маятника от времени при большом начальном отклонении маятника $\varphi_0 = 1$ рад, полученные путем численного интегрирования уравнения (8) – пунктирная линия, и с помощью приближенного решения (17) – сплошная линия. Наблюдается хорошее соответствие результатов по амплитуде и расхождение по фазе колебаний.

В работе выведены уравнения движения твердого тела с полостью, целиком заполненной жидкостью малой вязкости, вокруг неподвижной точки, которые могут быть распространены на случай системы тел с несколькими полостями. Рассмотрен частный случай: плоское

движение маятника со сферической полостью, для которого получено приближенное аналитическое решение уравнения движения. Показано, что неидеальная жидкость внутри твердого тела обладает демпфирующими свойствами. Проведен анализ влияния различных параметров системы на ее движение. Полученные результаты могут быть использованы для исследования движения космических аппаратов с жидким топливом, а также всевозможных механизмов с жидким наполнением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-08-00325, 06-01-00355).

Библиографический список

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т. 2. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1949.
2. Черноушко Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968.
3. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975.
4. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
5. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974.
7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Мир, 1964.



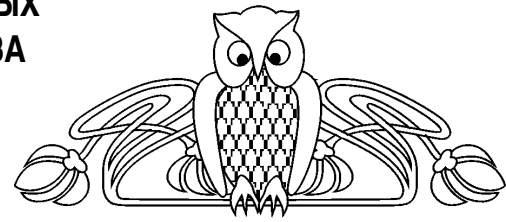
УДК 532.5

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ В ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ИСКРИВЛЕННЫХ ПЛАСТАХ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

В.А. Толпаев*, В.В. Палиев**

Северо-Кавказский государственный технический университет, кафедра прикладной математики и компьютерных технологий, Северо-Кавказский научно-исследовательский проектный институт природных газов,
E-mail: *pm@ncstu.ru, **wwwowa@bk.ru

Дается вывод уравнения неразрывности для построения двумерных моделей фильтрации сжимаемой жидкости в искривленных пластах конечной толщины, пористая среда в которых может проявлять сорбирующие свойства. Как частный случай дается уравнение неразрывности для фильтрации сжимаемой жидкости в весьма тонких искривленных пластах с сорбирующей и несорбирующей пористой средой.



The Equations of Continuously in Bidimensional Models of Filtration Liquid and Gas in the Bent Layers of Final Thickness

V.A. Tolpaev, V.V. Paliev

The finding of equation of continuousness for construction a bidimensional models of filtration a compressed liquid in the bent layers of final thickness is given, the porous environment in which can show sorb properties. As the special case is given the equation of continuousness for filtration of a compressed liquid in rather thin bent layers with sorbing and nonsorbing porous environment.

ВВЕДЕНИЕ

В естественных условиях продуктивные пористые пласты, содержащие воду, нефть или газ (обобщенно называемых в теории фильтрации флюидами), имеют, как правило, искривленную форму и переменную толщину. Фильтрационные движения флюида в таких пластах в общем случае трехмерны. Но поскольку в природных условиях подошва и кровля продуктивных пластов (по-другому, слоев) чаще всего непроницаемы, то и движения флюида в таких слоях с достаточной для практических целей точностью можно моделировать как двумерные. В связи с этим становится актуальной задача вывода уравнения неразрывности применительно к двумерным моделям течений газа и, как частный случай, несжимаемой жидкости в искривленных пластах переменной толщины с непроницаемыми подошвой и кровлей.

1. АППРОКСИМАЦИЯ КИНЕМАТИКИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

Будем рассматривать только такие продуктивные пласты, непроницаемые криволинейные поверхности подошвы и кровли которых можно задавать координатными поверхностями $\zeta = \zeta_1 = \text{const}$ (подошва) и $\zeta = \zeta_2 = \text{const}$ (кровля) некоторой ортогональной криволинейной системы координат ξ, η, ζ (рис. 1).

Поверхности тока изучаемых фильтрационных течений примем за стационарные, совпадающие с координатными поверхностями $\zeta = \text{const}$ (рис. 2).

Это, конечно, идеализация, но в большинстве случаев реальное течение флюида почти во всём пласте близко к предлагаемой кинематической схеме. Предложенная схема течения могла бы быть реализована практически, если бы в пласте удалось построить тонкие непроницаемые поверхности $\zeta = \text{const}$. Эти поверхности $\zeta = \text{const}$ увеличат фильтрационное сопротивление пласта и, следовательно, расчёты потоков по предлагаемой кинематической схеме окажутся заниженными против реальных значений. Предположение, что реальные поверхности тока почти во всём пласте близки к координатным поверхностям $\zeta = \text{const}$ заставляет считать, что проекция

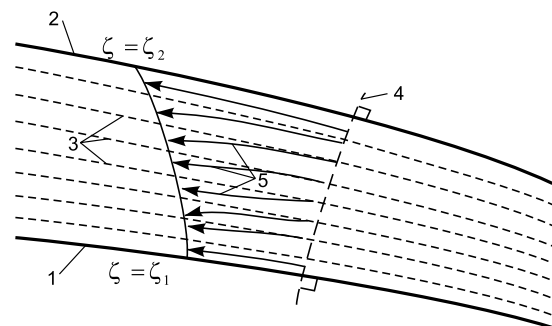


Рис. 1. Участки линий тока и эпюра скоростей реального фильтрационного течения флюида в искривлённом слое переменной толщины (1 и 2 — непроницаемые подошва и кровля слоя; 3 — координатные поверхности $\zeta = \text{const}$; 4 — ζ -координатная линия; 5 — линии тока, соответствующие перемещениям жидких частиц за одну единицу времени)

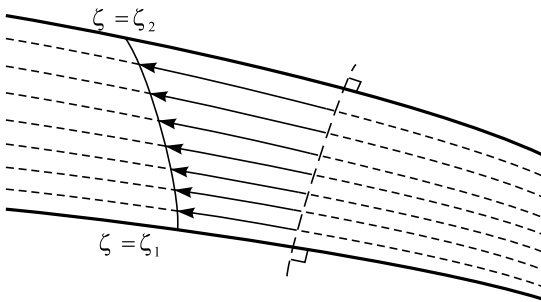


Рис. 2. Кинематическая схема предлагаемой двумерной модели течения. За поверхности тока принимаются координатные поверхности $\zeta = \text{const}$.

скорости фильтрации на ζ -координатные линии $V_\zeta = V_3 = 0$. Таким образом, в рассматриваемой схеме течения поле скоростей фильтрации аппроксимируется выражением

$$\vec{V} = V_\xi(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot \vec{e}_1 + V_\eta(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot \vec{e}_2, \quad (1)$$

в котором $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — орты локального базиса в системе ξ, η, ζ , а $V_\xi = V_1$ и $V_\eta = V_2$ — проекции скорости фильтрации на ξ - и η -координатные линии.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ИСКРИВЛЕННЫХ ПЛАСТАХ С СОРБИРУЮЩЕЙ СРЕДОЙ

Рассмотрим вначале фильтрационные течения газа в искривленном пласте с сорбирующей средой. Типичным примером таких пластов являются каменноугольные пласты. Их характерным свойством является то, что поверхность пор каменного угля за счет сил межмолекулярного взаимодействия угля и газа (проявляющихся в виде электростатического притяжения) способна удерживать на себе без химического изменения определенную часть (называемую адсорбированной частью) содержащегося в порах массы газа. В связи с этим адсорбированная часть газа оказывается обездвиженной и поэтому в фильтрационном движении в каменноугольных пластах участвует лишь неадсорбированная часть массы газа.

Для вывода уравнения неразрывности при фильтрации газа в искривленном пласте с сорбирующей пористой средой рассмотрим поток его неадсорбированной части с полем скоростей (1) через боковые грани криволинейного параллелепипеда $\xi = \text{const}$,

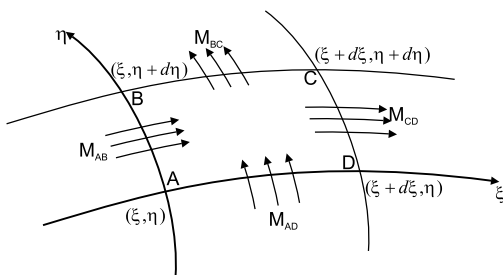


Рис. 3. Сечение $ABCD$ элементарного криволинейного параллелепипеда поверхностью $\zeta = \text{const}$. Основания параллелепипеда расположены на непроницаемых подошве ($\zeta = \zeta_1$) и кровле ($\zeta = \zeta_2$) слоя. Вдоль AD $\eta = \text{const}$; вдоль BC $\eta + d\eta = \text{const}$; вдоль AB $\xi = \text{const}$; вдоль CD $\xi + d\xi = \text{const}$

границы криволинейного параллелепипеда $\xi = \text{const}$, $\xi + d\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$, $\eta + d\eta = \text{const}$. Сечение $ABCD$ этого параллелепипеда поверхностью $\zeta = \text{const}$ показано на рис.3.

Через грань AB за время dt в параллелепипед

входит масса газа $M_{AB} = dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho[P(\xi, \eta, \zeta, t)] \times$

$\times V_\xi(\xi, \eta, \zeta, t) \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta$, где H_1, H_2 и H_3 — параметры Ламе криволинейной системы координат ξ, η, ζ а $\rho(P)$ — плотность газа при пластовых температуре и давлении $P(\xi, \eta, \zeta, t)$. Через противоположную грань из параллелепипеда за время dt выйдет масса газа

$M_{CD} = dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho[P(\xi + d\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot V_\xi(\xi + d\xi, \eta, \zeta, t) \times$

$\times H_2(\xi + d\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi + d\xi, \eta, \zeta) d\zeta$. Поэтому за счёт разницы потоков через пару противоположных

граней AB и CD из параллелепипеда за время dt за его пределы уходит масса газа

$$M_1 = M_{CD} - M_{AB} = d\xi \cdot d\eta \cdot dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial \xi} [H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(P) \cdot V_\xi(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot d\zeta. \quad (2)$$

Совершенно аналогично подсчитывается, что за время dt за пределы параллелепипеда из-за разницы потоков через противоположные грани AD и BC уходит масса газа:

$$M_2 = M_{BC} - M_{AD} = d\xi \cdot d\eta \cdot dt \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial}{\partial \eta} [H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(P) \cdot V_\eta(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot d\zeta. \quad (3)$$



Общее количество массы газа, вытекающего за время dt из параллелепипеда $ABCD$ за счёт потоков через боковые грани, равно: $M = M_1 + M_2$.

Уход из параллелепипеда $ABCD$ массы M газа вызовет в нем при заданной постоянной пластовой температуре изменение давления P , а значит, плотности газа, а также соотношения долей между адсорбированной и неадсорбированной частями газа. Для учета влияния ушедшей из выделенного объема массы M газа на изменение его плотности и соотношения долей адсорбированной и неадсорбированной частей подсчитаем вторично изменение в $ABCD$ массы газа как разность между имевшейся в момент t и оставшейся в момент $t + dt$.

Пусть в момент t давление газа в $ABCD$ равно $P(\xi, \eta, \zeta, t)$. Тогда при заданной пластовой температуре плотность неадсорбированной части реального газа найдется из уравнения его состояния [1] и будет равна $\rho = \rho(P)$. Поэтому масса $M_{01}(t)$ содержащейся в порах пласта неадсорбированной части газа равна

$$M_{01}(t) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho[P(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot m[P(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot H_1(\xi, \eta, \zeta) d\xi \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta,$$

где $m(P)$ — пористость пласта, которая в общем случае может зависеть от давления. Масса $M_{02}(t)$ адсорбированной части газа определяется по уравнению изотермы сорбции [1] $\tilde{g} = \tilde{g}(P)$, где \tilde{g} (с размерностью $\text{кг}/\text{м}^2$) — количество адсорбированного вещества, приходящееся на единицу площади $S_{\text{пор}}$ поверхности пор пласта. Заметим, однако, что площадь $S_{\text{пор}}$ в реальных пористых средах пропорциональна произведению $m \cdot V$, где V — объем пористой среды. Элементарное объяснение этому факту дает формула для пористости идеальной среды со сферическими (для упрощения рассуждений) порами в объеме V . По определению пористости она равна $m = \frac{V_{\text{пор}}}{V} = \frac{4\pi r^3 n}{3V}$, где $V_{\text{пор}} = \frac{4}{3}\pi r^3 n$ — суммарный объем пор с радиусом r и общим их количеством n . Поэтому суммарная площадь пор $S_{\text{пор}}$ в объеме V идеальной среды, равная $4\pi r^2 \cdot n$, через пористость m и радиус r будет выражаться формулой $S_{\text{пор}} = \frac{3mV}{r}$, а масса адсорбированной части газа в порах идеальной среды будет равна $\frac{3}{r} \cdot \tilde{g}(p) \cdot m \cdot V = g(P) \cdot m \cdot V$, причем коэффициент пропорциональности $g(P)$ имеет, в отличие от $\tilde{g}(P)$, другую размерность — $\text{кг}/\text{м}^3$.

В выделенном объеме $ABCD$ естественной пористой среды масса $M_{02}(t)$ адсорбированной части газа через коэффициент $g(P)$, определяющий количество адсорбированного вещества в единице объема пласта, найдется по формуле

$$M_{02}(t) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} g[P(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot m[P(\xi, \eta, \zeta, t)] \cdot H_1(\xi, \eta, \zeta) d\xi \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) d\eta \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (4)$$

Коэффициент $g(P)$ в формуле (4) определяется по уравнению объемной изотермы сорбции, которое для большинства случаев дается зависимостью Ленгмюра [1] $g = \frac{a \cdot P}{1 + b \cdot P}$, где a и b — размерные положительные постоянные, определяемые экспериментальным путем. Суммарная масса адсорбированной и неадсорбированной частей газа в параллелепипеде $ABCD$ в момент t равна $M_{01}(t) + M_{02}(t)$.

В момент $t + dt$ общая масса адсорбированной и неадсорбированной частей газа в параллелепипеде $ABCD$ подсчитывается совершенно аналогично и равна

$$M_{01}(t + dt) + M_{02}(t + dt) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \rho[P(\xi, \eta, \zeta, t + dt)] \cdot m[P(\xi, \eta, \zeta, t + dt)] \cdot H_1 d\xi \cdot H_2 d\eta \cdot H_3 d\zeta + \\ + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} g[P(\xi, \eta, \zeta, t + dt)] \cdot m[P(\xi, \eta, \zeta, t + dt)] \cdot H_1 d\xi \cdot H_2 d\eta \cdot H_3 d\zeta.$$

Поэтому по второму способу выход массы газа из параллелепипеда $ABCD$ получим как разность $[M_{01}(t) + M_{02}(t)] - [M_{01}(t + dt) + M_{02}(t + dt)]$, для которой после перехода к дифференциалам найдем, что

$$M = -dt \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial[\rho(P) \cdot m(P)]}{\partial t} \cdot H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta - \\ - dt \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\partial[g(P) \cdot m(P)]}{\partial t} \cdot H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta. \quad (5)$$



Сравнивая сумму $M = M_1 + M_2$, где M_1 определено по формуле (2), а M_2 — по формуле (3), со значением M из формулы (5), после очевидных упрощений приходим к следующему уравнению:

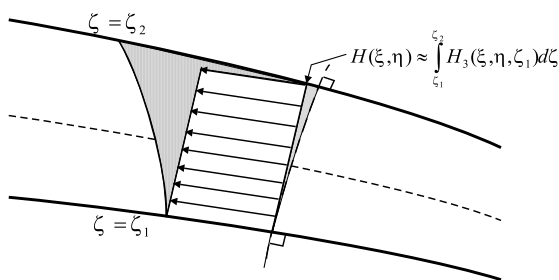
$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(P) \cdot V_\xi(\xi, \eta, \zeta, t) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \rho(P) \cdot V_\eta(\xi, \eta, \zeta, t) \right] + H_1(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_2(\xi, \eta, \zeta) \cdot H_3(\xi, \eta, \zeta) \cdot \left[\frac{\partial[\rho(P) \cdot m(P)]}{\partial t} + \frac{\partial[g(P) \cdot m(P)]}{\partial t} \right] \right\} = 0. \quad (6)$$

Полученное уравнение (6) и будет уравнением неразрывности в интегральной форме для двумерных моделей течений сжимаемой жидкости (газа) в искривлённом пласте переменной толщины с деформируемой пористой средой, обладающей сорбционными свойствами.

Отдельно рассмотрим частный случай, относящийся к фильтрации газа в весьма тонких искривлённых слоях переменной толщины.

3. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ВЕСЬМА ТОНКИХ ИСКРИВЛЕННЫХ ПЛАСТАХ С СОБИРАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

Пусть в искривлённом пласте непроницаемые подошва $\zeta = \zeta_1$ и кровля $\zeta = \zeta_2$ расположены настолько близко, что зависимостью параметров Ламе H_1, H_2, H_3 и проекций скоростей фильтрации



V_ξ и V_η от координаты ζ можно пренебречь и, следуя схеме О. В. Голубевой [2], представленной на рис. 4, принять, что

$$\begin{aligned} H_1 &= H_1(\xi, \eta, \zeta_1) = h_1(\xi, \eta); \\ H_2 &= H_2(\xi, \eta, \zeta_1) = h_2(\xi, \eta); \\ H_3 &= H_3(\xi, \eta, \zeta_1) = \frac{H(\xi, \eta)}{\zeta_2 - \zeta_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Рис. 4. Кинематическая схема двумерного течения в теории О.В. Голубевой. Затемнённые участки указывают на главные источники погрешностей в схеме О.В. Голубевой. $H(\xi, \eta)$ — локальная «толщина» слоя в точке (ξ, η) , через которую выражается H_3

Тогда, предполагая последние равенства справедливыми, из уравнения (6) после подстановки в него (7) получим, как частный случай, уравнение неразрывности в приближении О. В. Голубевой для фильтрации газа в весьма тонких искривлённых пластах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} [h_2(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \rho(P) \cdot V_\xi(\xi, \eta, t)] + \frac{\partial}{\partial \eta} [h_1(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \rho(P) \cdot V_\eta(\xi, \eta, t)] + \\ + h_1(\xi, \eta) \cdot h_2(\xi, \eta) \cdot H(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{ [\rho(P) + g(P)] \cdot m(P) \} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Функция $H(\xi, \eta)$ в теории О. В. Голубевой выбирается наперед и называется толщиной слоя. Это связано с тем, что в (7) параметр Ламе $H_3(\xi, \eta, \zeta_1)$ удастся выразить через наперед заданную функцию $H(\xi, \eta)$.

Если пористая среда не проявляет сорбирующих свойств, то в уравнениях (6) и (8) нужно положить $g(P) \equiv 0$.

Для случая фильтрации несжимаемой жидкости в несорбирующей пористой среде в уравнениях (6) и (8) полагаем $g(P) \equiv 0$ и $\rho(P) = \text{const}$.

Если уравнения неразрывности (6) и (8) дополнить законом Дарси, уравнениями состояния флюида $\rho = \rho(P)$, пористой среды $m = m(P)$ и уравнением изотермы сорбции $g = g(P)$ [1], то получим замкнутую систему уравнений, описывающую фильтрацию жидкости и газа в искривлённых сорбирующих слоях переменной толщины.

В частности, уравнения несжимаемой жидкости в несорбирующей пористой среде названным способом выведены в [3–5].



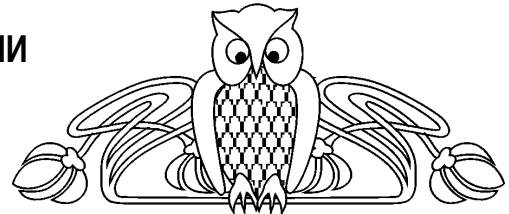
Примеры конкретных оценок точности расчетов пространственных фильтрационных течений несжимаемой жидкости в искривленных слоях переменной толщины по предлагаемым двумерным математическим моделям приведены в [6].

Библиографический список

1. Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И.М., Ковалев А.Г. Физика нефтяного и газового пласта. М.; Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2005.
2. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972.
3. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Уравнения линейной двумерной фильтрации в искривленных пластах конечной толщины // ОПИПМ. 2004. Т.11, вып.1. С.143–146.
4. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Математическое моделирование фильтрационных течений несжимаемой жидкости в искривленных пластах конечной толщины // ОПИПМ. 2005. Т. 12, вып. 2. С. 524–527.
5. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Двумерные математические модели течений жидкости в круговом коническом слое постоянной толщины // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы конф. Воронеж: Воронежск. гос. техн. акад., 2005. С. 222.
6. Толпаев В.А., Ледовской В.И. Оценки точности расчета дебитов скважин в искривленных пластах // Нефтепромысловое дело. 2004. № 12. С. 9–13.

УДК 539.3

ФОРМУЛИРОВКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЛУБОКОВОДНОГО НЕФТЕПОДЪЕМНИКА В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ ВНУТРЕННЕГО ПОТОКА ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ



О.А. Торопова

Саратовский государственный технический университет, Институт социально-производственного менеджмента, кафедра информационных систем
E-mail: toropova@sstu.ru

The Formulation of the Mathematical Model Deep-Water of the Oil Raiser, Interacting with Internal Flow of Gas-Liquid Mixture

O.A. Toropova

Сформулирована новая математическая модель расчета характеристик напряженно-деформированного состояния глубоководного райзера, взаимодействующего с внутренним двухфазным потоком газожидкостной смеси. Решается задача нелинейной гидроупругости сингулярно возмущенного типа.

A new mathematical model for calculating the characteristics of a stress-deformed state of a deepwater raiser that interacts with an inner two-phase stream of the gas-liquid mixture, is formulated. The singular-disturbance type problem of nonlinear hydroelasticity is being solved.

В известных публикациях ограничивались исследованием влияния внешнего потока подводных течений на характеристики НДС глубоководного нефтеподъемника (райзера). При этом внутренний поток гидросмеси моделировался, как правило, однородным установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости. В реальных условиях, однако, сырая нефть представляет собой двухфазную газожидкостную среду, свойства которой существенно зависят от начальных значений скорости транспортировки, давления, весового газового фактора и т.п.

Целью статьи является формулировка новой математической модели расчета характеристик НДС глубоководного райзера, взаимодействующего с внутренним двухфазным потоком газожидкостной смеси и с внешним потоком подводных течений. Она непосредственно может быть использована и при рассмотрении актуальных задач исследования длительной прочности райзера в условиях наведенной неоднородности свойств материала стенок, вызванной агрессивным воздействием внутреннего потока гидросмеси.

Сформулируем модель установившегося движения газожидкостной смеси в вертикальном трубопроводе. Характер движения (эрлифта) газожидкостной смеси определяется, как правило, значением фактора газонасыщенности ω (отношением объема свободного газа в смеси к ее объему, $0 \leq \omega \leq 1$).

При постепенном увеличении этого фактора происходит последовательный переход от эмульсионного состояния смеси к диспергированному:

- 1) движение смеси в состоянии эмульсии, когда пузырьки газа более или менее равномерно распределены в жидкости;
- 2) слоистое движение, когда в трубопроводе перемещаются, заполняя почти все сечение, цилиндрики газа значительной длины, разделенные цилиндриками жидкости меньшей длины;



3) газ с частицами жидкости движется в осевой части трубы, а жидкость — тонким слоем по ее стенкам;

4) диспергированное движение жидкости ($\omega \approx 1$) — это движение газа, заполняющего все сечение трубопровода и увлекающего за собой частицы жидкости.

Последний случай в реальных условиях эксплуатации нефтяных скважин практически не встречается, так как он связан с недостаточной сепарацией газа от жидкости при низких давлениях. Далее, предельное количество газа, которое можно растворить в единице объема жидкости с увеличением давления, возрастает. Поэтому существует значение давления P^* , ниже которого начинается выделение газа (оно называется давлением насыщения). Движение газированных жидкостей при значениях давлений $P < P^*$ происходит в смеси со свободным газом, а по мере снижения давления (т.е. с ростом ω) происходит постепенное увеличение его массы в смеси. Рассмотрим случай установившегося движения смеси, принимая для газа изотермический закон состояния, а его растворимость в жидкости, подчиняющейся закону Генри [1], $V_g = a_0 \hat{p}^0 V_f$, где V_g — объем стандартного (т.е. при нормальном атмосферном давлении и при некоторой нормальной температуре) газа, растворенного в жидкости, V_f — объем жидкости, a_0 — объемный коэффициент растворимости газа (эмпирическая безразмерная функция давления, в расчетах обычно полагают $a_0 = \text{const}$), $\hat{p}^0 = p/\text{атм}$. Тогда

$$\rho_c = \omega \hat{p}^0 \rho_g + (1 - \omega) \rho_f, \quad (1)$$

где ρ_c — плотность газожидкостной смеси, ρ_g, ρ_f — плотности стандартного газа и жидкости. Если пренебречь эффектом усадки (т.е. увеличением удельного веса жидкости по мере снижения количества растворенного в смеси газа), то в формуле (1) $\rho_g = \text{const}$, $\rho_f = \text{const}$, $\omega = \omega(p^0)$: $0 < \omega < 1$ при $0 < \hat{p}^0 < \hat{p}_*^0$, $\omega = 0$ при $\hat{p}^0 \geq \hat{p}_*^0$.

Определим вектор распределенных гидродинамических нагрузок со стороны внутреннего потока гидросмеси и внешнего потока окружающей жидкости. Будем считать, что райзер (гибкий стержень кольцевого поперечного сечения с внутренним и внешним диаметрами d_0, D_0) в недеформированном состоянии имеет прямолинейную форму. Тогда формулами перехода от ортов локальной подвижной системы координат $\vec{\tau}, \vec{n}$ к единичным базисным векторам \vec{i}_1, \vec{i}_2 осей декартовой правой системы отсчета $x_1 O x_2$ (начало которой выбрано на дне океана глубиной H) являются [2]

$$\vec{\tau} = -\sin \varphi \vec{i}_1 + \cos \varphi \vec{i}_2, \quad \vec{n} = -\cos \varphi \vec{i}_1 - \sin \varphi \vec{i}_2, \quad (2)$$

при этом $d\vec{\tau}/ds = k\vec{n}$, $d\vec{n}/ds = -k\vec{\tau}$. Здесь s — эйлерова дуговая координата, начало которой ($s = 0$) выбрано в нижнем сечении райзера, φ — угол отклонения касательной к осевой линии деформированного райзера по отношению к вертикальной координате x_2 , k — кривизна осевой линии. В осях связанной системы координат вектор распределенных гидродинамических нагрузок (\vec{q}), действующих на элемент райзера, можно представить в виде

$$\vec{q} = \vec{q}_f + \vec{q}_w - mg \cos \varphi \vec{\tau} + mg \sin \varphi \vec{n}, \quad (3)$$

где \vec{q}_f, \vec{q}_w — векторы сил взаимодействия элемента райзера с внутренним и внешним потоками жидкости, m — погонная масса райзера в воздухе. Вектор сил взаимодействия между частицами жидкости и газа (\vec{q}_{fg}) не входит в выражение (3). Действительно, пусть $\vec{v}_f = v_f \vec{\tau}$ — вектор скорости движения центра масс жидкости в элементарном объеме смеси, а $\vec{v}_g = v_g \vec{\tau}$ — вектор скорости движения центра масс свободного газа относительно скорости движения центра масс жидкости в том же объеме. Динамические уравнения Эйлера движения элементов жидкости и газа [1] запишутся для рассматриваемого случая в виде

$$m_f(d\vec{v}_f/dt) = -(pF_f \vec{\tau})/s - m_f g \vec{e}_{10} - \vec{q}_f + \vec{q}_{fg}; \quad m_g(d(\vec{v}_g + \vec{v}_f)/dt) = -(pF_g \vec{\tau})/s - m_g g \vec{e}_{10} - \vec{q}_{fg}.$$

Складывая эти уравнения, находим $\vec{q}_f = -m_f(d\vec{v}_f/dt) - m_g(d(\vec{v}_g + \vec{v}_f)/dt) - (P_c \vec{\tau})/s - m_c g \vec{e}_{10}$. Здесь $m_f = \rho_f F_f$; $m_g = \rho_g F_g$; $m_c = \rho_c F_0$; $P_c = pF_0$; $\vec{e}_{10} = \cos \varphi \vec{\tau} - \sin \varphi \vec{n}$; F_f, F_g — части площади поперечного сечения райзера $F_0 = 0.25\pi d_0^2$, занимаемые жидкостью и газом: $F_0 = F_f + F_w$. Так как $\vec{q}_f \perp \vec{\tau}$ и $\vec{q}_f = (\vec{q}_f, \vec{\tau})\vec{\tau} + \vec{\tau} \times (\vec{q}_f \times \vec{\tau})$, $(\vec{q}_f \times \vec{\tau}) = 0$, то

$$P_c/s + ((m_f(d\vec{v}_f/dt) + m_g(d(\vec{v}_g + \vec{v}_f)/dt)), \vec{\tau}) + m_c g (\vec{e}_{10}, \vec{\tau}) = 0, \quad (4)$$

$$\vec{q}_f = \vec{q}_{hc} + \vec{q}_{ac}, \quad \vec{q}_{hc} = -kP_c \vec{n} - m_c g \vec{\tau} \times (\vec{e}_{10} \times \vec{\tau}) = -(kP_c - m_c g \sin \varphi) \vec{n}, \quad (5)$$

$$\vec{q}_{ac} = -\vec{\tau} \times ((m_f(d\vec{v}_f/dt) + m_g(d(\vec{v}_g + \vec{v}_f)/dt)) \times \vec{\tau}). \quad (6)$$



Формулы (5)–(6) представляют собой обобщенные выражения для векторов нормальной силы гидростатического давления на стенки райзера (\vec{q}_{hc}) и нормальной силы инерции присоединенной массы газожидкостной гидросмеси (\vec{q}_{ac}) (при отсутствии свободного газа в формулах (4)–(6) следует положить $P_c = P_f$, $m_g = \omega = v_g = 0$ и они переходят в аналогичные выражения для нагрузок, полученные в [2]).

Преобразуем скалярные компоненты формул (4), (6). Имеем:

$$m_f(d\vec{v}_f/dt) = m_f((\vec{v}_f\vec{\tau})/s)v_f = m_f v_f(v_f/s)\vec{\tau} + km_f v_f^2 \vec{n},$$

$$m_g(d(\vec{v}_g + \vec{v}_f)/dt) = m_g(v_f + v_g)((v_g + v_f)/s)\vec{\tau} + km_g(v_g + v_f)^2 \vec{n}.$$

Для недиспергированного движения жидкости обычно $v_g \approx \text{const}$, кроме того, нетрудно показать, что $F_g \approx \omega F_0$, $F_f \approx (1 - \omega)F_0$, поэтому соотношения (4)–(6) преобразуются окончательно к виду

$$p/s + v_f/s(\rho_c v_f + \rho_g \omega v_g) + \rho_c g \cos \varphi = 0, \quad (7)$$

$$\vec{q}_{hc} = -(kp - \rho_c g \sin \varphi)F_0 \vec{n}, \quad \vec{q}_{ac} = -k(\rho_f(1 - \omega)v_f^2 + \omega \rho_g(v_g + v_f)^2)F_0 \vec{n}, \quad (8)$$

$$\rho_c = \omega \hat{p}^0 \rho_g + (1 - \omega)\rho_f.$$

Пусть на райзер действует стационарный поток подводных течений со скоростью $\vec{v}_c = v_{c1}\vec{\tau} + v_{c2}\vec{n} = -(v_c \sin \varphi \vec{\tau} + v_c \cos \varphi \vec{n})$, $v_c = v_c(x_2)$, $0 \leq x_2 \leq H$. Вектор сил взаимодействия элемента райзера с внешним потоком окружающей жидкости \vec{q}_w состоит из векторов нормальных сил гидростатического давления на стенки (\vec{q}_{hw}), инерции присоединенной массы жидкости (\vec{q}_{aw}) и гидродинамического сопротивления (\vec{q}_n) [2]:

$$\vec{q}_{hw} = (kP_w - m_w g \sin \varphi)\vec{n} = (km_w g(H - x_2) - m_w g \sin \varphi)\vec{n},$$

$$\vec{q}_{aw} = -\vec{\tau} \times ((m_w(d\vec{v}_{aw}/dt)) \times \vec{\tau}) = -km_w v_c^2 \sin^2 \varphi \vec{n},$$

$$\vec{q}_n = -0.5c_n \rho_w D_0 v_c \cos \varphi |v_c \cos \varphi| \vec{n} \quad (m_w = \rho_w F_w, F_w = 0.25\pi D_0^2).$$

Таким образом,

$$\vec{q} = -mg \cos \varphi \vec{\tau} + [(m + m_c - m_w)g \sin \varphi - k(pF_0 - m_w g(H - x_2) + (\rho_f(1 - \omega)v_f^2 + \omega \rho_g(v_g + v_f)^2)F_0 + m_w v_c^2 \sin^2 \varphi) - 0.5c_n \rho_w D_0 v_c \cos \varphi |v_c \cos \varphi|] \vec{n}. \quad (9)$$

Для определения зависимости входящего в (9) фактора газонасыщенности ω от давления \hat{p}^0 воспользуемся уравнениями неразрывности для потока гидросмеси. Они представляют собой условия постоянства весовых расходов стандартной жидкости (Q_f) $(\rho_f - a_0 \hat{p}^0 \rho_g) \times Q_f = \text{const}$ и газа (Q_g) $\rho_g(Q_g + a_0 \hat{p}^0 \rho_f Q_f) = \text{const}$, что позволяет сформулировать выражение для весового газового фактора (при эксплуатации нефтяных скважин его определяют обычно из замеров дебитов газа и нефти после сепарации).

$$\Gamma = \rho_g(\alpha_0 + a_0 \hat{p}^0)/(\rho_f - a_0 \hat{p}^0 \rho_g) = \text{const}, \quad \alpha_0 = Q_g/Q_f,$$

откуда

$$\alpha_0 = (\rho_f/\rho_g)\Gamma - a_0 \hat{p}^0(\Gamma + 1). \quad (10)$$

С другой стороны,

$$\alpha_0 = \hat{p}^0 \omega(v_f + v_g)/v_f(1 - \omega) = (\hat{p}^0 \omega/(1 - \omega))(1 + v_g/v_f). \quad (11)$$

Из (10)–(11), учитывая, что $v_f = v_{f0}/(1 - \omega)$ ($v_{f0} > 0$ — известное значение начальной скорости жидкости на входе $s = 0$), получаем уравнение

$$\beta_0 \omega + \omega/(1 - \omega) = \beta_1, \quad \beta_0 = v_g/v_{f0}, \quad \beta_1 = \alpha_0/\hat{p}^0. \quad (12)$$

Его корень, удовлетворяющий условию $0 \leq \omega < 1$,

$$\omega = \frac{2\beta_1}{1 + \beta_0 + \beta_1 + \sqrt{(1 + \beta_0 - \beta_1)^2 + 4\beta_1}} \quad (13)$$



дает искомую, нелинейную зависимость $\omega = \omega(\hat{p}^0)$, $0 < \hat{p}^0 \leq \hat{p}_*^0$. Давление насыщения \hat{p}_*^0 определяется из (10), принимая там $\alpha_0 = 0$:

$$\hat{p}_*^0 = (\rho_f / (a_0 \rho_g))(\Gamma / (\Gamma + 1)). \quad (14)$$

В этом случае в (13) $\beta_1 = 0$ и $\omega = 0$. Видно также, что при $\hat{p}^0 \rightarrow +0$ ($\beta_1 \rightarrow +\infty$) $\omega(\hat{p}^0) \rightarrow 1$.

Сформулируем математическую модель. В задачах расчета морских нефтеподъемников удобно использовать уравнения их равновесия [2] в проекциях на оси декартовой системы координат Ox_1x_2 . Учитывая соотношения (2) и связь между независимыми переменными $ds = dx_2 / \cos \varphi$, имеем

$$T' = kN / \cos \varphi - (\vec{q}, \vec{\tau}) / \cos \varphi, \quad N' = -kT / \cos \varphi - (\vec{q}, \vec{n}) / \cos \varphi,$$

$$EI k' = -N / \cos \varphi, \quad \varphi' = k / \cos \varphi, \quad u' = -\operatorname{tg} \varphi.$$

Здесь T , N — продольные и перерезывающие усилия, $EI = \operatorname{const}$ — изгибная жесткость, u — смещение осевой линии в горизонтальном направлении, $(\cdot)' = d(\cdot)/dx$ ($x = x_2$).

Подстановка вектора внешних нагрузок (g) и использование уравнения (7) дает следующую систему:

$$\begin{aligned} T' &= \omega + kN / \cos \omega, \\ N' &= -(m + m_c - m_w)g \operatorname{tg} \varphi - k / \cos \varphi [T - pF_0 - (\rho_f(1 - \omega)v_f^2 + \omega\rho_g(v_g + v_f)^2)F_0 + \\ &\quad + m_w g(H - x) - m_w v_c^2 \sin^2 \varphi] + 0.5c_n \rho_w D_0 v_c |v_c \cos \varphi|, \\ EI k' &= -N / \cos \varphi, \quad \varphi' = k / \cos \varphi, \quad u' = -\operatorname{tg} \varphi, \quad p' + v_f'(\rho_c v_f + \omega\rho_g v_g) + \rho_c g = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Выберем в качестве характерных масштабов длины, погонного веса, площади и скорости соответственно величины H [м], $w = \rho_t(F_w - F_0)g$ [кН/м], F_0 [м²], v [м/с], ($v = 1$ м/с). После перехода к безразмерным переменным и параметрам

$$\begin{aligned} x^0 &= x/H, \quad T^0 = T/(wH), \quad N^0 = N/(wH\mu), \quad k^0 = kH, \quad u^0 = u/H, \quad v_0^0 = v_0/v, \\ \mu &= \sqrt{EI/wH^3}, \quad \gamma_1 = 0.01\rho_g gH, \quad \gamma_2 = \rho_f d_0^2 / (\rho_t \times (D_0^2 - d_0^2)), \quad \gamma_3 = \rho_w D_0^2 / (\rho_t (D_0^2 - d_0^2)), \\ \gamma_4 &= 0.01\rho_t gH(D_0^2 - d_0^2)/d_0^2, \quad \gamma_5 = \gamma_2(v^2/(gH)), \quad \gamma_6 = (\rho_g/\rho_t)\gamma_5, \quad \gamma_7 = \gamma_3(v^2/(gH)), \\ \gamma_8 &= 0.5c_n \rho_w D_0 v^2/w, \quad \gamma_9 = 0.01\rho_g v^2, \quad \gamma_{10} = (\rho_f/\rho_g)\Gamma, \quad \gamma_{11} = \gamma_4 a_0 \times (\Gamma + 1), \\ p_0^0 &= \gamma_{10}/\gamma_{11}, \quad \hat{p}^0 = \gamma_4 p^0, \quad \beta_0 = v_g/v_{f0}, \end{aligned}$$

(опуская верхний индекс ноль в обозначениях безразмерных величин), система уравнений (15) с учетом (13) запишется окончательно в виде

$$\begin{aligned} T' &= 1 + \mu k N / \cos \varphi, \\ \mu N' &= -(1 + \gamma_1 \omega p + \gamma_2(1 - \omega) - \gamma_3) \operatorname{tg} \varphi - k / \cos \varphi \times [T + \gamma_3(1 - x) - p - \\ &\quad - v_{f0}^2(\gamma_5(1 - \omega)^{-1} + \gamma_6 \omega((1 - \omega)^{-1} + \beta_0)^2) - \gamma_7 v_c^2 \sin^2 \varphi] + \gamma_8 v_c |v_c \cos \varphi|, \\ \mu k' &= -N / \cos \varphi, \quad \varphi' = k / \cos \varphi, \quad u' = -\operatorname{tg} \varphi, \\ p' &= \frac{\gamma_1 \omega p + \gamma_2(1 - \omega)}{\frac{\alpha_0 v_{f0}^2}{p^2(1 + \beta_0(1 - \omega)^2)} [\omega(\gamma_9 p(1 - \omega)^{-1} + \gamma_6 \beta_0) + \gamma_5(1 - \omega)] - 1}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_0}{\gamma_4 p}, \\ \alpha_0 &= \begin{cases} \gamma_{10} - \gamma_{11} p, & 0 < p \leq p_*, \\ 0, & p > p_*, \end{cases} \quad \omega = \begin{cases} \frac{2\beta_1}{1 + \beta_0 + \beta_1 + \sqrt{(1 + \beta_0 - \beta_1)^2 + 4\beta_1}}, & 0 < p \leq p_*, \\ 0, & p > p_*. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

При известном давлении гидросмеси на входе p_0 и при шарнирном закреплении граничных сечений райзера краевыми условиями для системы (16) являются:

$$k(0) = u(0) = 0, \quad p(0) = p_0, \quad k(1) = u(1) = 0, \quad T = T_1. \quad (17)$$



Здесь $T_1 > 1$ — заданное значение тягового усилия на платформе.

Таким образом, предложенная здесь математическая модель глубоководного райзера, взаимодействующего с внутренним двухфазным потоком газожидкостной смеси (16)–(17), относится к классу связанных задач нелинейной гидроупругости сингулярно возмущенного типа (так как при $H > 1000$ м значение параметра μ в (16) $\mu < 10^{-3}$). Ее асимптотическое решение можно построить на основе использования алгоритма, предложенного в [3].

Библиографический список

1. Лойцанский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
2. Кузнецов В.В. Моделирование статических характеристик глубоководных трубопроводов морских гидротехнических комплексов. Ч.1. Формулировка уравнений установившегося пространственного движения // Изв. вузов. Строительство. 1994. № 3. С. 69–72.
3. Кузнецов В.В. Моделирование статических характеристик глубоководных трубопроводов морских гидротехнических комплексов. Ч.2. Асимптотический анализ модельных уравнений // Изв. вузов. Строительство. 1994. № 4. С. 57–60.

УДК 501.1

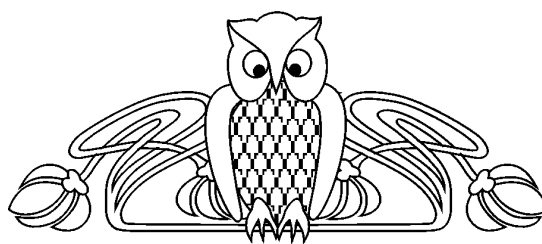
О МОДЕЛИРОВАНИИ КОЖИ ЧЕЛОВЕКА

А.Е. Федоров*, В.А. Самарцев**, А.А. Адамов***

*Пермский государственный технический университет, кафедра теоретической механики,

**Пермская государственная медицинская академия им. акад. Е.А. Вагнера, кафедра общей хирургии,

***Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук,
E-mail: * spider@perm.raid.ru, ** adamov@icmm.ru



On Modelling of the Human Skin

A.E. Fedorov, V.A. Samartsev, A.A. Adamov

В работе исследованы механические свойства кожи человека в случае малых и больших деформаций. Предложены модели, позволяющие описать вязкоупругое поведение кожи. Записаны определяющие соотношения для трехмерного напряженно-деформированного состояния. Определены параметры моделей, которые идентифицированы из экспериментов на одноосное растяжение кожных лоскутов.

The mechanical properties of the skin at small and finite deformations are investigated. The models are suggested approximating viscoelastic properties of the skin. The constitutive relations for three-dimensional stress-strain state are developed. Models parameters are determined by experiments in uniaxial tension of the skin specimens.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в области пластической, реконструктивной и эстетической хирургии делается большое количество операций, где кожа испытывает малые и большие деформации. Это восстановительные операции после различных ожогов, косметические операции по иссечению рубцов и закрытию дефектов на коже и т.д. Успех операции во многом зависит от напряжений, которые останутся после операции.

Для математического моделирования механического поведения кожи при этих операциях необходимы уравнения состояния, описывающие её поведение с учетом экспериментально наблюдаемых эффектов ползучести и релаксации.

Первые исследования кожи с точки зрения ее механических свойств были сделаны Дюпюитреном (Dupuytren) [1] в 1831 году во время расследования самоубийства в Париже. Он провел эксперименты на трупе и доказал, что раны на коже, сделанные конусообразным предметом, становятся похожими на линии и направления этих линий в различных частях тела отличаются.

Первая статья, посвященная анатомическому обобщению линий расщеплений на коже, была написана Лангером (Langer) [2] в 1861 году. Им были обнаружены линии натяжения кожи (линии Лангера), а также был установлен факт, что кожа на теле человека имеет некоторое начальное натяжение.

По-видимому, эти явления объясняются тем, что ненатянутая кожа имеет значительное количество ненатянутых и скрученных волокон коллагена. Натяжение кожи ведет к распутыванию волокон, которые в итоге воспринимают деформацию, вызванную давлением содержимого тела или движениями сустава. Отсутствие натяжения кожи головы, ступней и ладоней, по-видимому, обусловлено характером нагрузок, действующих на эти участки кожи, и в соответствии с законом адаптации



структура кожи соответствует некоторым оптимальным образом тем нагрузкам, которые испытывает элемент кожи в процессе эволюции человека как биологического вида.

Исследованию механических свойств кожи посвящен широкий спектр работ [3–7], но определяющее соотношение, удобное для решения краевых задач и идентификации параметров, не предложено.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОЖИ ЧЕЛОВЕКА

Для построения определяющих соотношений существуют три подхода: макромеханический, микромеханический и мезомеханический. В работе [8] был использован макромеханический подход для построения определяющего соотношения кожи. Микромеханический подход основан на анализе взаимодействий, имеющих место между атомами или молекулами вещества, что представляет существенные трудности и на данный момент не позволяет построить определяющее соотношение. Мезомеханический подход позволяет учесть структурные изменения и вместе с гистологическими исследованиями дает возможность более корректного построения определяющего соотношения.

Гистологические исследования [9] показывают, что во внутренних слоях кожи волокна коллагена, воспринимающие нагрузку, упорядочены, но имеют волнообразное расположение. В близких к поверхности слоях волокна коллагена расположены хаотично. При деформировании происходит выпрямление волокон коллагена во внутренних слоях и упорядочивание волокон в слоях, которые расположены ближе к поверхности. Эти эффекты обеспечивают «задержку» деформации и вызывают эффект ползучести материала. При дальнейшем нагружении все волокна упорядочиваются и воспринимают нагрузку, что ограничивает ползучесть. При фиксировании деформации эффект переориентации коллагеновых волокон обуславливает релаксацию напряжений, но так как коллагеновые волокна во внутренних слоях кожи натягиваются, то полной релаксации напряжений быть не должно.

Описанные явления (ограниченная ползучесть и неполная релаксация напряжений) описываются моделью Кельвина [9] (рис. 1), где упругий элемент с модулем упругости E_1 характеризует поведение волокон коллагена во внутренних слоях кожи, комбинация упругого и вязкого элементов с параметрами E_2 соответственно характеризует слой кожи, в котором имеет место переориентация волокон коллагена.

Связь между напряжениями и деформациями имеет вид

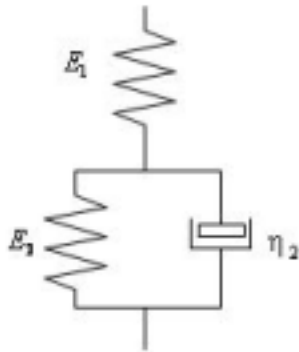


Рис. 1. Модель Кельвина

$$\lambda \sigma = E (\dot{\varepsilon} + \mu \varepsilon), \quad E = E_1, \quad \lambda = \frac{E_1 + E_2}{3\eta_2}, \quad \mu = \frac{E_2}{3\eta_2}, \quad (1)$$

где E — мгновенный модуль упругости, $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\mu}$ характеризует

время запаздывания системы на изменение нагрузки и деформации. Величина $\frac{E\mu}{\lambda}$ называется длительным модулем упругости E^* . При длительном нагружении, когда скоростями можно пренебречь, связь между напряжениями и деформациями будет выражаться через длительный модуль упругости.

Подстановка в уравнение (1) вместо σ и ε девиаторных компонент напряжения и деформации дает трехмерное обобщение в предположении о линеаризованных геометрических соотношениях [10]

$$\dot{\tilde{s}} + \lambda \tilde{s} = E (\dot{\xi} + \mu \tilde{\varepsilon}). \quad (2)$$

Девиатор напряжений представлен в виде разности тензора напряжений и шарового тензора напряжений

$$\tilde{s} = \tilde{\sigma} - \sigma_m \tilde{g}. \quad (3)$$

Девиатор скорости напряжений представлен в виде

$$\dot{\tilde{s}} = \dot{\tilde{\sigma}} - \dot{\sigma}_m \tilde{g}. \quad (4)$$

Таким же образом запишем девиатор деформации и девиатор деформации скорости

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon} - \varepsilon_m \tilde{g}, \quad \tilde{\xi}_D = \tilde{\xi} - \dot{\varepsilon}_m \tilde{g}. \quad (5)$$

Относительное изменение объема ε и среднее напряжение σ связаны уравнением

$$\sigma_m = K \varepsilon_m. \quad (6)$$



Запишем уравнение (2) с учетом (3), (4), (5) и (6)

$$\dot{\sigma} + \lambda \tilde{\sigma} - (\dot{\sigma}_m + \lambda \sigma_m) \tilde{g} = E \left(\tilde{\xi} + \mu \tilde{\varepsilon} \right) - \frac{E}{K} (\dot{\sigma}_m + \mu \sigma_m) \tilde{g}, \quad (7)$$

где E , K , λ и μ — коэффициенты модели.

2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ КОЖИ

В качестве исходных гипотез при формулировке уравнений состояния для деформируемого твердого тела приняты стандартные гипотезы сплошности, изотропности, однородности и естественного ненапряженного состояния в отсчетной конфигурации.

Кожу человека в первом приближении можно считать несжимаемым изотропным упругим материалом. В работе [7] было показано, что кожа — материал сжимаемый, меняет свой объем во время экспериментов, однако это изменение незначительно.

При моделировании в рамках теории упругости наиболее распространено задание удельной потенциальной энергии деформации через главные инварианты I_1 , I_2 , I_3 меры деформаций Коши–Грина \tilde{G} в форме двухконстантного потенциала Муни $W(I_1, I_2)$ при наложении условия несжимаемости $I_3 = G/g = 1$:

$$W = \frac{1}{4} \mu [(1 + \beta)(I_1 - 3) + (1 - \beta)(I_2 - 3)]. \quad (8)$$

Упрощенной формой потенциала Муни

$$W = \frac{1}{2} \mu (I_1 - 3) \quad (\beta = 1) \quad (9)$$

является «неогуков» потенциал, иначе называемый потенциалом Трелоара.

В работе [11] было показано, что потенциал (9) обладает удовлетворительной способностью к аппроксимации резиноподобных материалов, как систем, связанных друг с другом длинных молекулярных цепочек, в широкой области изменения упругих постоянных для диапазона умеренно больших деформаций (до 100%) при различных видах однородного напряженно-деформированного состояния. Анализ гистологических данных показал [9], что кожа человека обладает схожей структурой, содержит сети эластических и коллагеновых волокон.

Связь энергетического (приведенного) тензора напряжений \tilde{Q} с обратным тензором меры деформаций Коши–Грина $\tilde{E} = (\tilde{G})^{-1}$ и метрическим тензором начальной конфигурации \tilde{g} (9) можно записать в виде

$$\tilde{Q} = \mu \left(\tilde{g} - \frac{I_1}{3} \tilde{E} \right) + p \tilde{E}, \quad (10)$$

где μ — упругая постоянная, являющаяся модулем сдвига при малых деформациях; p — неопределенный множитель Лагранжа, имеющий смысл среднего физического напряжения.

В качестве второго приближения для описания наблюдаемых релаксационных эффектов предлагается использовать вязкоупругую модель несжимаемого материала при умеренных больших деформациях [11], которая получена путем формального обобщения модели (10) заменой упругой постоянной μ интегральным оператором наследственной теории вязкоупругости:

$$\mu^* l(t) = \int_0^t R(t - \tau) dl(\tau) = \mu_0 \left[l(t) - \int_0^t \Gamma(t - \tau) l(\tau) d\tau \right], \quad (11)$$

где $R(t)$, $\Gamma(t)$, μ_0 — функции релаксации, скорости релаксации и мгновенный модуль.

В результате имеем вязкоупругий аналог «неогукова тела»

$$\tilde{Q} = \mu^* \left(\tilde{g} - \frac{I_1}{3} \tilde{E} \right) + p \tilde{E}. \quad (12)$$

Определяющее уравнение (12) обладает инвариантностью к геометрическому преобразованию систем координат во времени благодаря использованию тензорных величин, определенных в базе отсчетной конфигурации, а используемые операторы наследственной теории вязкоупругости инвариантны к изменениям масштаба времени и начала его отсчета.

Для дальнейшего использования соотношения (12) необходимо идентифицировать интегральный оператор μ^* на основе полученных экспериментальных данных. Процедура идентификации представлена в работе [11].



3. ЭКСПЕРИМЕНТ

Для исследования брали кожу с внутренней поверхности бедра ампутированных конечностей ног. Хранение и транспортировка кожи осуществлялись в физиологическом растворе при пониженной температуре. Хранение кожи в физиологическом растворе осуществлялось для продления «жизни» кожи, поскольку раствор подпитывает кожу и препятствует процессам отмирания и разложения. Перед экспериментом лоскуты вынимались из раствора, нагревались до комнатной температуры и после этого проводились испытания. С момента забора ткани до проведения эксперимента проходило не более суток.

Для создания одинаковых условий исследования из лоскутов кожи, предварительно освобожденных от подкожно-жировой клетчатки, при помощи вырубного ножа (рис. 2) вырезали образцы с общей длиной 75 мм и шириной рабочей части 7 мм. После измерения толщины и нанесения рисок на рабочей части образец закреплялся в захватах и испытывался на настольном релаксметре осевого растяжения (рис. 3), созданного на базе прибора для определения кольцевого модуля резины. Последовательность процедур при испытаниях изложены в работе [11].

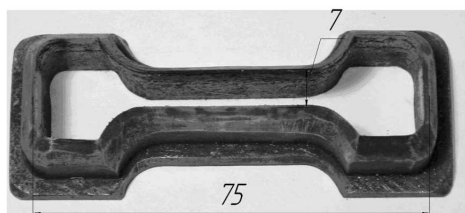


Рис. 2. Вырубной нож

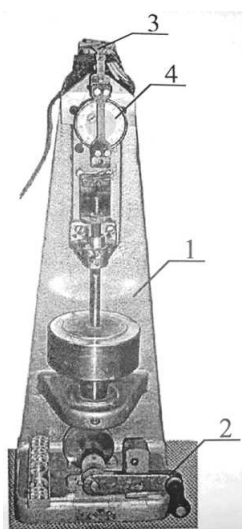


Рис. 3. Релаксметр осевого растяжения; 1 — станина; 2 — нагружающее устройство; 3 — силоизмерительная балка равного сопротивления изгибу; 4 — индикатор часового типа с ценой деления 1 или 10 мкм

С использованием предложенной методики были определены параметры модели Кельвина и вязкоупругого «неогукова тела». Полученные результаты приведены в таблице 1 и 2.

Таблица 1
Экспериментальные значения для модели Кельвина

Возраст, годы	Пол	λ, c^{-1}	μ, c^{-1}	$E, \text{МПа}$	$K, \text{МПа}$	Место
49	Муж.	0,395	0,041	48,53	1,95	Живот
52	Жен.	0,41	0,041	43,21	1,64	Бедро
61	Жен.	0,42	0,041	41,79	1,48	Бедро
65	Жен.	0,40	0,043	41,42	1,87	Бедро
70	Муж.	0,40	0,042	42,12	1,56	Бедро
73	Жен.	0,43	0,043	39,7	1,5	Бедро
78	Муж.	0,43	0,041	40,1	1,65	Бедро
85	Жен.	0,43	0,043	37,84	1,86	Бедро

Таблица 2
Экспериментальные значения параметров модели «неогукова тела»

Объект	α	β, c^{-m}	m	$A, c^{-\alpha}$	$\mu_0, \text{МПа}$
Жен. 52 года	0,0189	0,5	0,0292	0,0202	26,29
Муж. 49 лет	0,157	0,32	0,25	0,0197	30,63
Жен. 65 лет	0,0176	0,43	0,032	0,02	28,47

ВЫВОДЫ

В работе предложены определяющие соотношения кожи человека для случая малых и больших деформаций и определены их параметры соотношений на основе экспериментов по одноосному растяжению образца.

Из полученных экспериментальных результатов видно, что кожа имеет различные механические свойства с возрастом. Это подтверждается и другими исследованиями [12].

Полученные результаты могут быть использованы для расчета напряженно-деформированного состояния кожи при пластических и реконструктивных операциях.

Библиографический список

1. Cox H.T. The cleavage lines of the skin // The British J. of Surgery. 1941–1942. V. 29. P. 234–240.
2. Langer K. On the anatomy and physiology of the skin // British J. of Plastic Surgery. 1978. V. 31. P. 3–8, 93–106, 185–199, 273–278.
3. Escoffier C., Rigal J., Rochefort A., Vasselet R. Age-



related mechanical properties of human skin: an in vivo study // J. Investigative Dermatology. 1989. V. 93, № 3. P. 353–357.

4. *Reihsner R., Balogh B., Menzel E.J.* Two-dimensional elastic properties of human skin in terms of an incremental model at the in vivo configuration // J. Med. Eng. Phys. 1995. V. 17, No. 4. P. 304–313.

5. *Danielson D.A.* Human skin as an elastic membrane // J. Biomechanics. 1973. V. 6. P. 539–546.

6. *Tong P., Fung Y.C.* The stress-strain relationship for the skin // J. Biomechanics. 1976. V. 9. P. 649–657.

7. *Veronda D.R., Westmann R.A.* Mechanical characterization of skin-finite deformations // J. Biomechanics. 1970. V. 3. P. 111–124.

8. *Федоров А.Е., Лохов В.А.* О применении теории вяз-

коупругости в эстетической хирургии // Рос. журн. биомеханики. 2003. Т. 7, № 4. С. 32–43.

9. *Федоров А.Е., Самарцев В.А., Кириллова Т.А.* О механических свойствах человека // Рос. журн. биомеханики. 2006. Т. 10, № 2. С. 29–42.

10. *Циглер Ф.* Механика твердых тел и жидкостей. Ижевск; М.: РХД, 2002.

11. *Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003.

12. *Селезнев С.А., Шульпина В.В.* Механические свойства кожи передней поверхности туловища человека // Биомеханика кровообращения, дыхания и биологических тканей. Рига: Зинатне, 1981. С. 268–271.

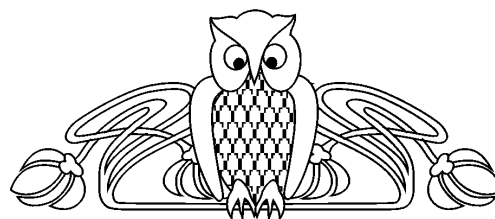
УДК 681.5.017

ОЦЕНКА СТРУКТУРЫ И ПАРАМЕТРОВ НАБЛЮДАТЕЛЬНОЙ СЕТИ МОНИТОРИНГА ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА

В.О. Черванев

Уральский государственный горный университет,
кафедра информатики
E-mail: victor_ua@pochta.ru

Приводится методика оценки существующей структуры и параметров наблюдательной сети на основе результатов имитационного моделирования, проведенного с использованием диффузионной математической модели переноса примеси с учетом введенных ограничений.



**Estimation of Structure and Parameters of the Atmospheric Air
Pollution Monitoring Observant Network**

V.O. Chervanov

The estimation procedure of existing structure and parameters of the observant network on basis of results of the imitating model with use of diffusion mathematical model of impurity carrying in view of restrictions is given.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ СУЩЕСТВУЮЩЕЙ СТРУКТУРЫ И ПАРАМЕТРОВ НАБЛЮДАТЕЛЬНОЙ СЕТИ

Задача оценки существующей структуры и параметров наблюдательной сети формулируется следующим образом.

Известна структура и параметры источников загрязнения $M(G_i)$, т.е. пространственное расположение и параметры стационарных источников загрязнения (высота труб, объемы выбросов и концентрация в них загрязняющих веществ). Кроме того, известны: значения предельно-допустимых выбросов (ПДВ), существующая структура и параметры наблюдательной сети $H(G_i)$, в том числе типы наблюдательных постов, их пространственное расположение, перечень контролируемых параметров, интервалы дискретности наблюдения, погрешности наблюдения, а также метеоусловия (скорость и направление ветра, величина атмосферного давления, влажность воздуха).

Известно, что вероятность экологически обусловленных заболеваний зависит от частоты, уровня и продолжительности превышения предельно-допустимой концентрации (ПДК); тогда качество мониторинга определяется потерями от пропусков обнаружения превышений ПДК.

Вероятность пропуска событий может быть найдена путем имитационного моделирования (ИМ). ИМ заключается в генерации выбросов загрязняющих веществ конкретными источниками; расчете концентраций загрязняющих веществ в атмосферном воздухе с учетом динамики их распространения при известных метеоусловиях и сопоставлении рассчитанных концентраций с допустимыми нормами в точках расположения наблюдательных постов.

Использование полученных результатов ИМ позволяет решить тактическую и стратегическую задачи, связанные с мониторингом загрязнения атмосферного воздуха. Тактическая задача заключается в оценке (при существующей структуре и параметрах наблюдательной сети) качества мониторинга загрязнения атмосферного воздуха по вероятности обнаружения выбросов от стационарных источников загрязнения, превышающих ПДВ. Низкая эффективность обнаружения выбросов от источников загрязнения при существующей структуре и параметрах наблюдательной сети является предпосылкой решения стратегической задачи. Стратегическая задача заключается в обосновании структуры



и параметров наблюдательной сети, обеспечивающей минимум потерь, обусловленных наличием в определенных периоды времени концентраций загрязняющих веществ в воздухе населенного пункта, превышающих ПДК.

Ниже рассматривается постановка тактической задачи при следующих допущениях.

1. Полагаем, что известно взаимное расположение стационарных источников загрязнения и стационарных наблюдательных постов.

2. Полагаем, что стационарные источники загрязнения могут работать либо генерируя постоянные выбросы в атмосферу, либо в импульсном режиме. Причем длительность импульса, соответствующая выбросу загрязнителя, превышающему ПДВ, оказывается существенно меньше длительности паузы между импульсами. Характер этих выбросов определяется технологическими особенностями функционирования объектов — источников загрязнения.

3. Полагаем, что метеоусловия определяются по результатам наблюдения на нескольких метеопостах. В качестве примера нами использованы результаты наблюдений скорости и направления ветра на трех метеопостах, установленных в городах Первоуральске, Екатеринбурге и Ревде. Результаты наблюдения на метеопостах были сегментированы как по направлению ветра с шагом в 15 град., так и по скорости ветра с шагом в 0,5 м/с. В результате сегментации получены вероятности для всех значений скорости и направления ветра. В силу повторяемости метеоусловий полученные результаты могут быть распространены на любой период моделирования.

4. Полагаем, что режим i -го источника загрязнения описывается дискретными ступенчатыми функциями Δu_i . Тогда наблюдаемые концентрации загрязнителей на стационарных наблюдательных постах (СНП) могут быть записаны в виде $x(t + \tau) = \sum_i g_{xu}(\tau) \cdot \Delta u_i(t)$, где $g_{xu}(\tau)$ — импульсная переходная функция, связывающая импульсные воздействия источника загрязнения с концентрацией загрязнителя, измеренной на СНП.

Полагаем также, что вероятность одновременного изменения направления и скорости ветра, а также интенсивности выброса пренебрежимо мала.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В соответствии с принятыми допущениями была выполнена серия вычислительных экспериментов.

Цель эксперимента:

- показать принципиальную возможность обнаружения источника загрязнения, нарушающего предельно-допустимые объемы выброса при различных режимах работы источников загрязнения;
- оценить качество системы мониторинга, состоящей из нескольких постов наблюдения при различных режимах работы источников загрязнения;
- оценить вероятность обнаружения выброса от источника загрязнения при известных метеоусловиях.

В результате решения прямой задачи распространения выбросов от стационарных источников загрязнения при конкретных метеоусловиях получены оценки расчетных значений концентрации загрязнителей в узлах наблюдательной сети, покрывающей исследуемую территорию. Расчет производили на сетке с ячейкой 200×200 м с шагом по времени в 2 мин. При расположении наблюдательных постов в каждом узле наблюдательной сети превышение источниками ПДВ будет гарантировано обнаружено.

Требуется определить вероятность пропуска события за определенный промежуток времени, заключающегося в превышении источником ПДВ, при разряженной сети наблюдения, соответствующей фактическому расположению наблюдательных постов на исследуемой территории. Вероятности пропусков событий вычисляются как отношение числа пропущенных событий, длительность каждого из которых не менее интервала дискретности наблюдений, к общему числу событий, заключающихся в превышении источником ПДВ.

Формальной физико-математической основой моделирования для прямой задачи являются: уравнение непрерывности потока загрязнения; уравнение движения Эйлера для воздушной среды; уравнение состояния среды и ряд краевых или граничных условий [1–3]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(C\vec{V}) = f, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \text{grad})\vec{V} + \frac{1}{\rho} \text{grad}P = 0, \quad P\rho^{-\chi} = \text{const}, \quad \chi = \frac{c_P}{c_v}, \quad (1)$$

где $V(x, t) = (V_x, V_y, V_z)$ — вектор скорости движения воздушной среды, который подчиняется второму уравнению системы (1). Скорости движения воздушной среды получены путем наблюдения на сети метеорологических станций и постов; $C(x, t)$ — концентрация изучаемого компонента загрязнения; $\rho(x, t)$ — плотность воздушной среды; $P(x, t)$ — давление, $f(x, t)$ — интенсивность источников



загрязнения (в данном случае функция учитывает также поглощение загрязнения средой), c_p, c_v — удельные теплоемкости газа соответственно при постоянном давлении и постоянном объеме.

Граничные условия обычно принимаются в следующем виде: $\frac{\partial C(x, t)}{\partial n} = 0 \Big|_G$. При этом область распространения загрязнения ограничена поверхностями G , которая образована снизу рельефом местности, сверху априорно выбранным уровнем H , а с боков — вертикальными плоскостями. Для верхнего уровня H концентрация загрязнения пренебрежимо мала (или на H обеспечиваются условия изоляции слоя). На удаленных от источников боковых вертикальных гранях исследуемой области при отсутствии трансграничного переноса можно принять это же условие.

Дифференциальное уравнение переноса примеси, первое уравнение системы (1), в скалярной форме с детализацией структуры источников можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} - v \frac{\partial C}{\partial y} - w \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial C}{\partial z} \right) + F + R - P - W,$$

где F — интенсивность источников загрязнения; R — скорость образования загрязнения за счет химических реакций; P — скорость уничтожения загрязнения за счет химических реакций; W — скорость выпадения примеси на подстилающую поверхность; C — объемная концентрация загрязнения; u, v, w — компоненты скорости ветра; k — коэффициент атмосферной диффузии.

Граничные условия детализируются в виде

$$z = H_{\max}, \quad C = 0, \quad k \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad k \frac{\partial C}{\partial z} + wC = \beta C,$$

где β — коэффициент аккомодации, или поглощения, на поверхности осаждения (зависит от характера поверхности, например, лес, водоем, поле, застройки различной этажности и др.). В приближении двумерной (x, y) задачи переноса и постоянном коэффициенте диффузии k , а также без учета R, P основное уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -u \frac{\partial C}{\partial x} - v \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial C}{\partial y} \right) - \beta C + F.$$

К этому уравнению на достаточно малых сетках по (x, y, t) применим метод простых итераций. При известных функциях скорости ветра $V = (u, v)$ мощности действующих стационарных источников $F(x, y, t)$ и параметрах k, β этот метод сходится достаточно быстро

$$C^{(n+1)} = \Delta t \left[-u \frac{\partial C^{(n)}}{\partial x} - v \frac{\partial C^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial C^{(n)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial C^{(n)}}{\partial y} \right) - \beta C^{(n)} + F \right],$$

где $n, n + 1$ — последовательные шаги вычисления.

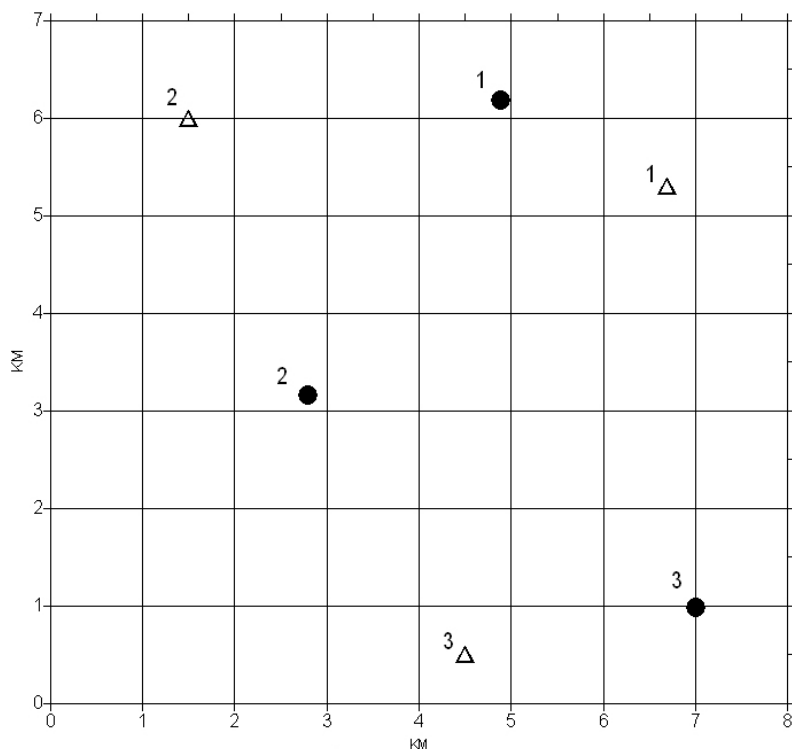
Отметим, что здесь шаг по времени Δt может не совпадать с временным интервалом, применяемым для визуализации отдельных сцен и должен быть намного меньше.

На рисунке представлена возможная схема взаимного расположения стационарных источников загрязнения и постов наблюдения. Расположение источников загрязнения и поста наблюдения № 1 соответствует существующему в г. Первоуральске; расположение постов наблюдения № 2 и 3 выбрано произвольно. В соответствии с планом вычислительного эксперимента задавались различные режимы работы источников загрязнения (табл. 1) и рассчитывались поля концентрации СО на исследуемой территории. Расчет концентраций проводился для равномерного режима работы источников загрязнения в условиях изменения скорости и направления ветра согласно статистическим данным, рассчитанным по трем постам.

Таблица 1

Режимы работы источников загрязнения в вычислительных экспериментах

№ п/п	Объем выброса (ед. ПДВ) номер источника загрязнения			Режим работы источника загрязнения	Количество постов наблюдения
	1	2	3		
1	1	0	0	Равномерный	1
2	0	1	0	Равномерный	1
3	0	0	1	Равномерный	1
4	1	0	0	Равномерный	3
5	0	1	0	Равномерный	3
6	0	0	1	Равномерный	3



Взаимное расположение источников загрязнения и постов наблюдения

● — источник загрязнения, Δ — пост наблюдения

Для упрощения расчетов, в качестве нулевого уровня концентрации СО была выбрана концентрация СО при условии равномерного режима работы всех источников загрязнения с объемом выброса 1 ПДВ — фоновый уровень. Также в качестве нулевого уровня объема выброса источником загрязнения был принят уровень в 1 ПДВ.

Далее производился анализ концентрации СО в точках, соответствующих координатам расположения наблюдательных постов. При существовании выброса источником загрязнения (табл. 1), отсутствия обнаружения в определенном узле сети концентрации заданного уровня происходит пропуск события.

Обнаружение и пропуск выбросов рассчитывались для случаев системы наблюдения, состоящей из одного наблюдательного поста (№ 1 на рисунке) или из трех постов (в этом случае считаем, что при существовании выброса от источников загрязнения (табл. 1) и отсутствии, хотя бы в одном из трех СНП, концентрации заданного уровня происходит пропуск события). Соответственно для каждого наблюдательного поста существует два состояния: 1 — произошло обнаружение выброса, 0 — произошел пропуск выброса. С учетом скорости и направления ветра мы можем вычислить вероятность обнаружения выброса для известных метеоусловий и оценить вероятность обнаружения выброса в целом для данной системы наблюдения.

Таким образом, вероятность обнаружения выброса системой наблюдения вычисляется как произведение вероятности определенной скорости и направления ветра и вероятности наличия выброса источником загрязнения.

Сумма вероятностей обнаружения выброса для всех значений скорости и направления ветра являются вероятностью обнаружения выброса системой наблюдения в целом. Оценка вероятности обнаружения выброса системой наблюдения, состоящей из одного или трех постов наблюдения приведена в табл. 2.

Таблица 2
Оценка вероятности обнаружения выброса

Тип выброса	Номер источника нарушителя	Количество постов наблюдения	
		1	3
Равномерный	1	32,513 %	55,089 %
Равномерный	2	86,691 %	100 %
Равномерный	3	79,742 %	80,166 %



С использованием предложенного алгоритма оценки качества системы наблюдения можно поставить обратную задачу обоснования структуры наблюдательной сети, а именно взаимного расположения источников выбросов и постов наблюдения. Целью такой задачи может быть максимизация вероятности обнаружения нарушения любым источником загрязнения.

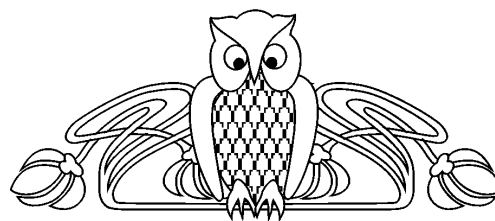
Выводы, которые можно сделать из результатов имитационного моделирования, показывают возможность определения источников залповых выбросов. В ряде неблагоприятных случаев возможен пропуск события при существовании одной станции мониторинга, однако, наличие трех и более станций существенно уменьшает вероятность пропуска. Результаты имитационного моделирования создают основу для решения задачи обоснования структуры и параметров наблюдательной сети при заданных ограничениях (количество постов, вероятность обнаружения и т.д.)

Библиографический список

1. Овчаренко А.В., Белозеров А.Б., Березина С.В., Зобнин Б.Б., Уткин В.И., Черванев В.О. Отчет о научно-исследовательской работе РФФИ – Урал № 04-01-95096 «Динамические модели загрязнения воздушной среды в городской агломерации Екатеринбург–Первоуральск, Ревда, Дегтярск, Арамилы, Кольцово, Березовский, Среднеуральск». Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2005. 51 с.
2. Овчаренко А.В., Белозеров А.Б., Березина С.В., Зобнин Б.Б., Уткин В.И., Черванев В.О. Методика создания динамической модели загрязнения воздушного бассейна Екатеринбурга // Геологическая интерпретация гравитационных, магнитных и электрических полей: Материалы 33 сессии Междунар. семинара им. Д.Г. Успенского. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2006. С. 264–267.
3. Зобнин Б.Б., Черванев В.О. Модель наблюдения совокупности природного и техногенного процессов // Глубинное строение, геодинамика, мониторинг, интерпретация геофизических полей: Материалы 3 науч. чтений Ю.П. Булашевича. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2005. С. 124–126.

УДК 533.6.011

ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА ДВУМЕРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ДЕТОНАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ДЛЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ



Г.П. Шиндяпин*, С.П. Шевырев, В.А. Поршневу

Саратовский государственный университет,
*кафедра вычислительного эксперимента в механике,
кафедра прикладной информатики
E-mail: kpi@info.sgu.ru

В настоящей статье разрабатывается методика расчета параметров и характеристик пульсирующего детонационного двигателя с диффузором и эжектором на различных режимах и этапах его работы.

Ведется построение численных методов решения задачи по определению параметров течения продуктов детонации и воздуха в детонационном двигателе в различные моменты времени. Определяется суммарный импульс детонационного двигателя с диффузором и эжектором за один такт работы.

Проведены пробные расчеты для математической модели детонационного двигателя с диффузором и эжектором на различных этапах его работы.

Research and Development of Bidimensional Mathematical Models of Pulsing Detonation Engines for Perspective Flying Devices

G.P. Shindyapin, S.P. Shevirev, V.A. Porshnev

In the present paper the design procedure of parameters and performances of the pulsing detonation engine with a diffuser and the ejector on different conditions and stages of its operation develops. Construction of numerical methods of a solution of a commitment by definition parameters of flow of yields of a knocking and air to the detonation engine in different instants is carried on. Determining of a general pulse of the detonation engine with a diffuser and the ejector for one clock tick of operation.

Trial accounts of a mathematical model of the detonation engine with a diffuser and the ejector at different stages of his operation are conducted.

Детонационные двигатели привлекают внимание разработчиков практически всех видов транспорта своей высокой производительностью. Создаются различные модели таких двигателей [1]–[3].

В [3] был дан обзор состояния исследований в разработке детонационных двигателей, построена математическая модель импульсного детонационного двигателя в квазидвумерной постановке, приведены результаты расчета параметров течения продуктов детонации и воздуха в случае наличия диффузора.

В настоящей статье исследования продолжены на случай плоской и осевой симметрии. Также добавлен эжектор, функция которого – засасывать окружающий воздух. Сложная геометрия иссле-



дуемого комплекса заставляет численно решать краевые задачи, зависящие от двух пространственных переменных и от времени.

Рассмотрены следующие задачи:

- разработка методики расчета параметров и характеристик пульсирующего детонационного двигателя с диффузором и эжектором на различных режимах и этапах его работы;
- разработка численных методов решения задачи по определению параметров течения продуктов детонации и воздуха в детонационном двигателе в различные моменты времени. Определение суммарного импульса детонационного двигателя с диффузором и эжектором за один такт работы;
- проведение пробных расчетов для математической модели детонационного двигателя с диффузором и эжектором на различных этапах его работы.

В первом разделе представлена методика расчета параметров и характеристик пульсирующего детонационного двигателя, опирающаяся на известные теоретические положения [4] и разработанные авторами математические модели [5], методы расчета [6] параметров детонационных двигателей. Методика расчёта содержит два этапа:

- этап распространения фронта детонации по камере (I этап). Этот этап исследован в [3];
- этап течения продуктов детонации и воздуха после завершения процесса детонации (II этап).

Этот этап связан с распространением ударной волны и линии контактного разрыва в диффузорном и эжекторном участках и исследуется численным методом.

Методика позволяет рассчитать параметры и характеристики пульсирующего детонационного двигателя с диффузором и эжектором на различных режимах и этапах его работы, а также суммарный импульс давления на дно камеры и стенки диффузора и эжектора двигателя за один такт работы.

Во втором разделе разработан численный метод расчета параметров течения продуктов детонации и воздуха на II этапе работы двигателя после завершения процесса детонации. Сформулирована краевая задача для дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение продуктов детонации и воздуха, решение которой строится численным методом Давыдова [7], [8], обобщенным на случай треугольной сетки [9].

Обсуждаются результаты расчетов при проведении вычислительного эксперимента по разработанной методике на этапах I и II. На всех этапах работы двигателя определяются: время протекания процесса; давление на дно камеры, стенки диффузора и эжектора; импульсы давления на дно камеры, стенки диффузора и эжектора в различные моменты времени, а также суммарный импульс для двигателя с диффузором и эжектором. Результаты вычислений иллюстрируются таблицами и графиками. Приведены сравнения с натурными экспериментами авторов. Обсуждаются физические закономерности и особенности работы детонационного двигателя.

1. АНАЛИЗ ОБЛАСТЕЙ ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВ И ПРОДУКТОВ ДЕТОНАЦИИ В ДЕТОНАЦИОННОМ ДВИГАТЕЛЕ В РАЗЛИЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ. РЕЖИМЫ И ЭТАПЫ РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЯ

1.1. Постановка задачи для импульсного детонационного двигателя с диффузором и эжектором

Детонационный двигатель представляет собой (рис. 1, а) цилиндрическую камеру постоянного сечения, заполненную при давлении, равном давлению окружающей среды, взрывчатой вещью, соединенную с диффузором и эжектором, заполненными при том же давлении нейтральным газом (воздухом).

Длина цилиндрической камеры l_1 , диаметр d_1 , длина диффузорного участка l_0 , угол полураствора диффузора α . Эжектор характеризуют длины l_2, l_3 , диаметр d_2 , угол полураствора β . В камере находится взрывчатая смесь с давлением p_1 , плотностью ρ_1 . Скорость смеси $v_1 = 0$. Область камеры, где находится невозмущенная взрывчатая смесь, далее называется областью I.

Давление воздуха в диффузорном участке p_0 , плотность ρ_0 , скорость $v_0 = 0$. Назовем эту область с невозмущенным воздухом областью 0.

Ось OX направлена вдоль оси камеры, а ее начало совпадает с дном камеры.

У дна камеры в момент времени $t = 0$ инициируется детонационная волна (см. рис. 1), которая распространяется по взрывчатой смеси в режиме Чепмена–Жуге. После того, как в момент времени t_1 фронт волны детонации закончит движение по взрывчатой смеси, по воздуху от сечения $x = l_1$ пойдет ударная волна. Подвижная граница, разделяющая продукты детонации и воздух, будет представлять собой контактный разрыв, на котором плотность, температура и химический состав будут испытывать разрыв. Ударная волна, распространяясь по диффузорному участку, придет в сечения $x = l_1 + l_0$ и далее будет происходить вытекание воздуха из диффузора. Когда контактный разрыв достигнет сечения $x = l_1 + l_0 + l_2$, начнется вытекание продуктов детонации из детонационного двигателя.



Области: 0 — невозмущенный воздух в диффузоре и эжекторе; 1 — невозмущенная взрывчатая смесь в камере; 2 — простая волна разрежения в продуктах детонации; 3 — область покоя в продуктах детонации; 4 — область разрежения в продуктах детонации; 5 — область воздуха, прошедшего через ударную волну

Фронты: D — фронт волны детонации; F_1 — задний фронт волны разрежения; S — фронт ударной волны; F_2 — фронт волны разрежения, движущийся в отрицательном направлении оси OX ; C — линия контактного разрыва между воздухом и продуктами детонации

Время: $t = 0$ — начало детонации; $t = t_1$ — завершение детонации; $t = t_2$ — выхода ударной волны из диффузора; $t = t_C$ — выхода контактного разрыва из двигателя; $t = t^*$ — прихода волны разрежения в сечение $x = 0$; $t = t_K$ — при котором на выходе из диффузора скорость продуктов детонации обратиться в нуль

Задача состоит в том, чтобы определить изменение параметров течения продуктов детонации и газа в детонационном двигателе с течением времени и определить суммарный импульс тяги двигателя за счет действия давления продуктов детонации на дно его камеры, а затем воздуха и продуктов детонации на стенки диффузора и эжектора.

1.2. Области течения продуктов детонации и воздуха на этапе распространения фронта детонации по камере (I этап)

На рис. 1 изображены режимы (a, b, c, d, e, f, g, h) и этапы (I, II) работы импульсного детонационного двигателя в различные моменты времени.

После того как от дна камеры начнет распространяться детонационная волна D (рис. 1, b , $0 \leq t < t_1$), в детонационном двигателе возникнут четыре области. Кроме областей покоя 0, 1 за фронтом детонационной волны D возникнет область 2 — область простой волны разрежения в продуктах детонации. Задний фронт F_1 простой волны разрежения будет отделять область простой волны 2 от области покоя 3 и распространяться в положительном направлении оси OX . На рис. 1, b стрелками указаны направления распространения фронтов.

В момент времени t_1 область 1 исчезнет (рис. 1, c), так как фронт детонации достигнет сечения $x = l_1$, процесс детонации закончится. Завершится I этап — этап детонации.

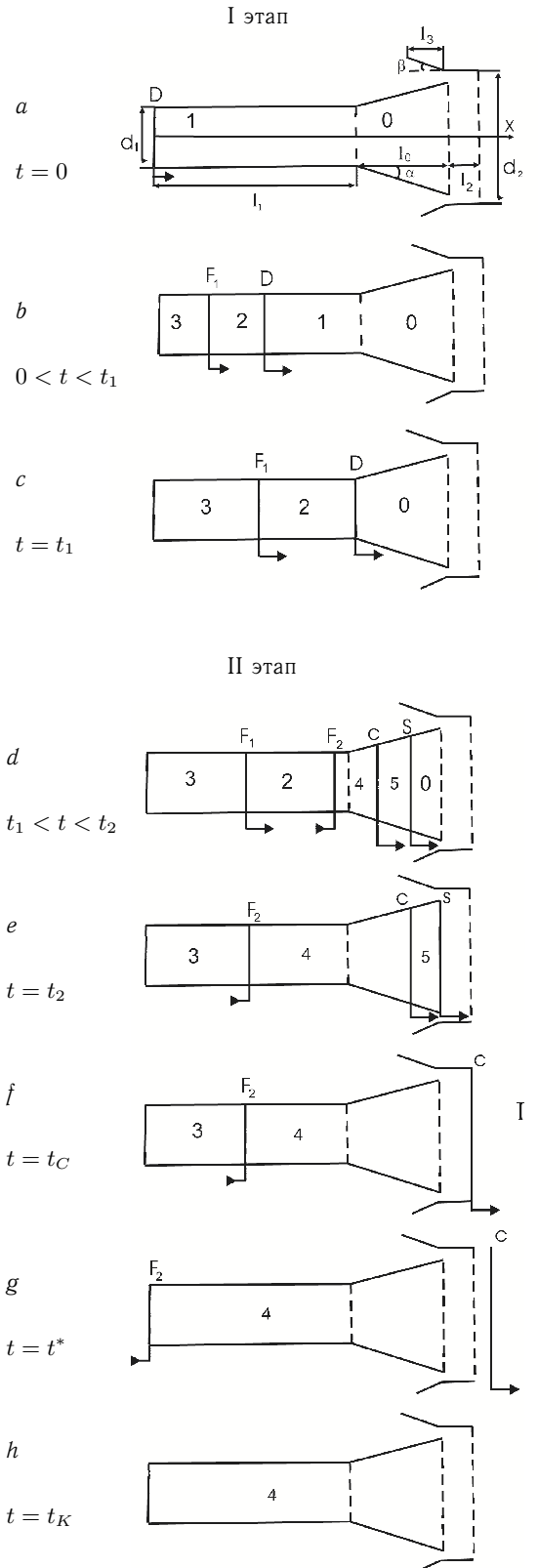


Рис. 1. Режимы и этапы работы детонационного двигателя:

I — этап распространения фронта детонации по камере

II — этап течения продуктов детонации и воздуха после завершения детонации



1.3. Области течения продуктов детонации и воздуха после завершения процесса детонации (II этап)

В момент времени t_1 в сечении $x = l_1$ возникает произвольный разрыв, который сразу распадается (рис. 1, *d*). Возникает ударная волна S , которая движется по воздуху в диффузоре участка двигателя, возникают контактный разрыв C , разделяющий продукты детонации и воздух, и волна разрежения F_2 в продуктах детонации, которая движется от контактного разрыва в сторону дна камеры.

При $t_1 < t \leq t_2$ по воздуху будет распространяться ударная волна, за которой образуется область 5 воздуха, прошедшего через ударную волну. Далее движется контактный разрыв C , разделяющий воздух и продукты детонации. За контактным разрывом находится область 4 волны разрежения, которая возникает за счет распада произвольного разрыва. Фронт волны разрежения F_2 движется по области 2 в продуктах детонации в отрицательном направлении оси Ox .

Область 2 после момента времени t_1 постепенно будет уменьшаться и затем в момент $t = t_p$ исчезнет. В момент $t = t_2$ ударная волна S достигнет выходного сечения диффузора $x = l_1 + l_0$, а в момент $t = t_m$ — выходного сечения двигателя $x = l_1 + l_0 + l_2$, и воздух начнет вытекать через выходное сечение двигателя (рис. 1, *e*). Область 0 невозмущенного состояния воздуха исчезнет.

В момент времени $t = t_3$ (рис. 1, *f*) контактный разрыв C достигнет выходного сечения диффузора $x = l_1 + l_0$, а в момент $t = t_c$, сечения $x = l_1 + l_0 + l_2$ и продукты детонации начнут вытекать через выходное сечение двигателя. Область 5 исчезнет.

На рис. 1, *g* изображена картина течения при $t = t^* > t_c$ для момента времени, когда область 3 исчезнет, то есть фронт F_2 достигнет дна камеры. При $t > t^*$ в камере, в диффузоре и эжекторе продукты детонации движутся в положительном направлении оси Ox в сторону выходного сечения.

Расчет движения продуктов детонации при $t > t^*$ (рис. 1, *h*) будет производиться до момента времени $t = t_k$, при котором скорость продуктов детонации на выходе из сопла обратится в ноль.

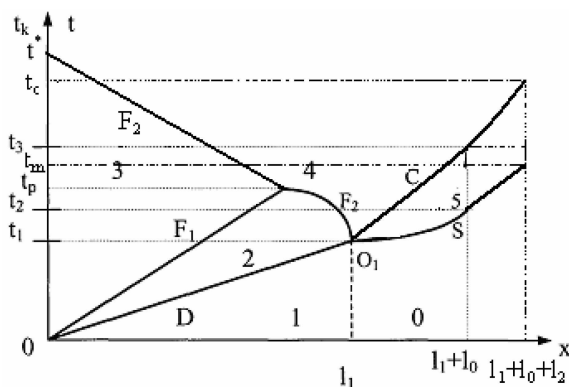


Рис. 2. Области течений в детонационном двигателе

1.4. Представление областей течения газов в детонационном двигателе

На рис. 2 изображены основные линии слабых и сильных разрывов и различные области течений в детонационном двигателе. Обозначения областей и линий разрывов соответствуют описаниям процессов п. 1.1–1.3, а также режимам и этапам работы детонационного двигателя (рис. 1, *a–h*).

Этап I использует классическое решение для одномерного нестационарного случая [1] и полностью описан в статье [3].

2. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЯ НА ЭТАПЕ II

2.1. Системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие течения на этапе II

Второй этап работы двигателя начинается с момента t_1 , когда в сечении $x = l_1$ возникает ударная волна S , которая движется по воздуху и приводит его в движение, и контактный разрыв C , который разделяет продукты детонации, и воздух, прошедший через ударную волну. Контактный разрыв ведет себя как поршень. Он поджимает воздух и создает ударную волну и в то же время в продуктах детонации создает волну разрежения с фронтом F_2 , движущимся в отрицательном направлении оси Ox (рис. 1, *d*).

Движение продуктов детонации в камере и диффузоре можно описать системой уравнений газовой динамики идеального газа в двумерной постановке (зависимость от двух пространственных переменных и от времени) [10].

Выпишем эти системы для случаев плоской и осевой симметрии.



Плоская симметрия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial((e + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((e + p)v)}{\partial y} &= 0, \\ p &= (\kappa - 1)\rho e, & E &= e + \frac{u^2 + v^2}{2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t, x, y — независимые переменные, ρ — плотность, u, v — компоненты вектора скорости вдоль осей x и y соответственно, e — внутренняя энергия единицы массы газа, p — давление, E — полная энергия единицы массы газа, κ — отношение удельных теплоемкостей.

Осевая симметрия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} &= -\frac{\rho v}{r}, & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial r} &= -\frac{\rho uv}{r}, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial r} &= -\frac{\rho v^2}{r}, & \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial((e + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((e + p)v)}{\partial r} &= -\frac{(e + p)v}{r}, \\ p &= (\kappa - 1)\rho e, & E &= e + \frac{u^2 + v^2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь t, x, r — независимые переменные. Остальные параметры те же, что и в плоском случае.

2.2. Граничные условия

Решения систем (1), (2) должны удовлетворять граничным условиям: на дне камеры, на стенках камеры, на стенках диффузора, на эжекторе и в выходном сечении двигателя. На поверхности детонационного фронта, на контактном разрыве и на ударной волне граничные условия не ставятся, так как будет иметь место сквозной счет.

На дне, стенках камеры, а также на стенках эжектора выполняется граничное условие для скорости: нормальная к дну и стенкам компонента скорости равна нулю. То же самое выполняется на оси (плоскости) симметрии. На остальных внешних границах производные по нормали от всех интегрируемых функций равны нулю.

2.3. Начальные условия

Состояние продуктов детонации и воздуха в момент $t = t_1$, т.е. в конце I этапа, служит начальным условием для II этапа. Начальные условия имеют следующий вид: $v = v_1(x)$, $\rho = \rho_1(x)$, $p = p_1(x)$ при $t = t_1$, $0 \leq x \leq l_1$; $v = v_0$, $\rho = \rho_0$, $p = p_0$ при $t = t_1$, $l_1 \leq x \leq l_1 + l_0$.

Здесь $v_1(x)$, $\rho_1(x)$, $p_1(x)$ — функции распределения скоростей, плотностей и давлений в трубе в момент прихода фронта детонации D в сечение $x = l_1$. Эти функции определяются по известному аналитическому решению при $t = t_1$ из предыдущей статьи [3].

Отметим также, что хорошей и быстрой аппроксимацией полного начального условия является задание соответствующего энергоперепада между цилиндрической частью камеры и всем остальным пространством. Через небольшое число шагов по времени решение краевой задачи выходит на нужный режим.

2.4. Определение суммарного импульса давления на дно камеры, стенки диффузора и стенки эжектора

В результате численного решения краевой задачи, описанной ниже, в части 2 отчета, определяют: поля газодинамических параметров внутри и в окрестности детонационной камеры с диффузором и эжектором, давление $p(0, y, t)$, действующее на дно камеры, распределение давления p на участке диффузора $l_1 \leq x \leq l_1 + l_0$ и на участке эжектора, который составляет с детонационной камерой единое целое.

Теоретическое значение суммарного размерного импульса давления I_c (за промежуток времени $0 \leq t \leq t_k$) складывается из донного размерного импульса I_1 , дополнительного размерного импульса I_2 за счет диффузорного участка и дополнительного размерного импульса I_3 за счет эжекторного участка

$$I_c = I_1 + I_2 + I_3, \quad (3)$$



где

$$I_1 = \int_0^{t_k} \int_0^{d_1/2} FP_1(y)(p(0, y, t) - p_0) dy dt, \quad (4)$$

$$I_2 = \int_0^{t_k} \int_{l_1+l_0} p_D(x, y(x), t) - p_B^D(x, y(x), t) FP_D(x, y(x)) \tan(\alpha) dx dt, \quad (5)$$

$$I_3 = \int_0^{t_k} \int_{l_1+l_0-l_3} p_B^B(x, y(x), t) - p_B(x, y(x), t) FP_B(x, y(x)) \tan(\beta) dx dt. \quad (6)$$

Здесь $FP_1(y) = 2\pi y$, $0 < y < d_1/2$, $FP_D(x, y(x))$ — периметр сечения канала на диффузорном участке, $FP_B(x, y(x))$ — периметр сечения канала на эжекторном участке в точке x , $FP_D(x) = \pi(d_1 + 2(x - l_1) \tan(\alpha))$, $l_1 \leq x \leq l_1 + l_0$, $FP_B(x) = \pi(d_2 + 2(l_1 + l_0 - x) \tan(\beta))$, $l_1 + l_0 - l_3 \leq x \leq l_1 + l_0$, $p_D(x, y(x), t)$, $p_B^D(x, y(x), t)$ — давление на внутренней и внешней стенках диффузора, $p_B(x, y(x), t)$, $p_B^B(x, y(x), t)$ — давление на внутренней и внешней стенках эжектора.

Внутренние интегралы в (4), (5) и (6) вычисляются по методу трапеций, внешние интегралы вычисляются по методу левых прямоугольников.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

3.1. Описание численного метода крупных частиц (метода Давыдова)

Численные методы в поставленных в работе задачах применяются по причине сложной нелинейной природы исходных систем уравнений, которые не поддаются аналитическому решению.

Статья [3] дает решение подобных задач при отсутствии эжектора как функцию от одной пространственной переменной x и от времени t . Этого достаточно, чтобы исследовать течение на первом этапе аналитически, а на втором этапе — численно с помощью метода Лакса–Вендроффа. Учет двух измерений (x, y) по пространству в настоящем исследовании заставляет применять более сложные системы уравнений и более мощные численные методы для их решения на II этапе. К числу таких методов относится метод крупных частиц (метод Давыдова) [7]–[10]. Расчетная область разбивается на простые геометрические фигуры (прямоугольники, треугольники и т.д.), прилегающие друг к другу. Газ, попавший в каждую такую фигуру, объявляется крупной частицей. Решение получается продвижением небольшими шагами по времени. Основной идеей этого метода является идея расщепления «по физическим факторам», когда сначала «работают» силы давления, затем происходит перетекание газа из одной крупной частицы в другую, и в конце происходит объединение результатов двух первых этапов в исходные уравнения, но уже на новом временном шаге.

Две системы (1), (2) будут численно интегрироваться, используя метод Давыдова (крупных частиц) [7], [8], [10], модифицированный на случай произвольной треугольной сетки [9].

Выпишем разностные схемы метода Давыдова для случая плоской симметрии. Для случая осевой симметрии разностные схемы аналогичны.

Расчетное поле с помощью алгоритма триангуляции разбивается на множество треугольников. Достоинство треугольной сетки — в ее быстрой адаптации к произвольным границам.

Все вычисляемые газодинамические параметры (плотность, скорость, полная энергия, давление) относятся к геометрическим центрам треугольников.

Расчет одного временного шага разбивается на три этапа. На первом, *эйлеровом этапе*, пренебрегают дивергентными членами. Укороченные дифференциальные уравнения эйлера этапа

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial pu}{\partial x} + \frac{\partial pv}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

дискретизируются на треугольной сетке. В частности, члены с давлением можно заменить через контурные интегралы (применяется *теорема Грина* и *теорема о среднем* [11]):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\oint_{\Delta} p dy}{\oint_{\Delta} x dy}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\oint_{\Delta} p dx}{\oint_{\Delta} x dy}, \quad \frac{\partial pu}{\partial x} + \frac{\partial pv}{\partial y} = \frac{\oint_{\Delta} pu dy - \oint_{\Delta} pv dx}{\oint_{\Delta} x dy}.$$



Контурные интегралы при численных расчетах обходятся по сторонам треугольника против часовой стрелки:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\sum_{j=1}^3 (p_{j+1} + p_j)(y_{j+1} - y_j)}{\sum_{j=1}^3 (x_{j+1} + x_j)(y_{j+1} - y_j)}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{-\sum_{j=1}^3 (p_{j+1} + p_j)(x_{j+1} - x_j)}{\sum_{j=1}^3 (x_{j+1} + x_j)(y_{j+1} - y_j)},$$

$$\frac{\partial pu}{\partial x} + \frac{\partial pv}{\partial y} \approx \frac{\sum_{j=1}^3 \{(p_{j+1}u_{j+1} + p_j u_j)(y_{j+1} - y_j) - (p_{j+1}v_{j+1} + p_j v_j)(x_{j+1} - x_j)\}}{\sum_{j=1}^3 (x_{j+1} + x_j)(y_{j+1} - y_j)}.$$

Здесь $p_4 = p_1$, $x_4 = x_1$, $y_4 = y_1$; p_1, p_2, p_3 — значения давления в трех соседних треугольниках; $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ — координаты центров этих треугольников.

Внешние границы и границы на теле заменяется виртуальными ячейками, чтобы сохранить единую схему расчета. Все параметры в виртуальных ячейках, кроме скорости, заменяются аналогичными параметрами из соседних реальных ячеек, нормальная компонента скорости меняет знак на противоположный на стенках.

После аппроксимации производных с давлением величины с «волнами» определяются обычным образом, как это принято в классическом методе Давыдова [7], [8]:

$$\begin{cases} \widetilde{u}_i^n = u_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n} (\partial p / \partial x)_i^n, \\ \widetilde{v}_i^n = v_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n} (\partial p / \partial y)_i^n, \\ \widetilde{E}_i^n = E_i^n - \frac{\Delta t}{\rho_i^n} [(\partial pu / \partial x)_i^n + (\partial pv / \partial y)_i^n]. \end{cases} \quad (7)$$

На *лагранжевом этапе* учитывают то, что было опущено на эйлеровом этапе, то есть члены, описывающие перенос массы, импульса, энергии.

Выберем произвольную сторону треугольника, например, отрезок $(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$. Выпишем формулу для потока массы через выбранную границу:

$$\Delta M_{K_{1,2}}^n = \rho_p^n \frac{\widetilde{u}_{i(\text{норм})}^n + \widetilde{u}_{k_{1,2}(\text{норм})}^n}{2} \Delta t L((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \quad (8)$$

где $\Delta M_{K_{1,2}}^n$ — поток массы через сторону $(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$; ρ_p^n — плотность в текущем треугольнике, если поток вытекает из него, и плотность в соседнем через указанную сторону треугольнике, если поток втекает; $\widetilde{u}_{i(\text{норм})}^n$ — нормальная составляющая вектора скорости для текущего треугольника; $\widetilde{u}_{k_{1,2}(\text{норм})}^n$ — нормальная составляющая вектора скорости для соседнего треугольника; $L((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$ — длина стороны $(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$; Δt — шаг по времени.

На *заключительном этапе*

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \sum_{j=1}^3 \Delta M_j^n / S_i, \\ u_i^{n+1} = (\widetilde{u}_i^n \rho_i^n + \sum_{j=1}^n \Delta M_j^n \widetilde{u}_p^n / S_i) / \rho_i^{n+1}, \\ v_i^{n+1} = (\widetilde{v}_i^n \rho_i^n + \sum_{j=1}^n \Delta M_j^n \widetilde{v}_p^n / S_i) / \rho_i^{n+1}, \\ E_i^{n+1} = (\widetilde{E}_i^n \rho_i^n + \sum_{j=1}^n \Delta M_j^n \widetilde{E}_p^n / S_i) / \rho_i^{n+1}, \end{cases} \quad (9)$$

где S_i — площадь текущего (i -того) треугольника, p — нижний индекс у переменных $\widetilde{u}_p^n, \widetilde{v}_p^n, \widetilde{E}_p^n$, равен номеру текущего треугольника, если поток вытекает из него через указанную сторону, в противном



случае, этот индекс равен номеру соседнего треугольника с общей указанной стороной. В процессе триангуляции номера соседних треугольников не обязательно образуют упорядоченную последовательность, поэтому, хотя задача двумерная по пространству, целесообразно применять векторную запись для хранения искоемых газодинамических параметров.

На теле ставится условие *непротекания*:

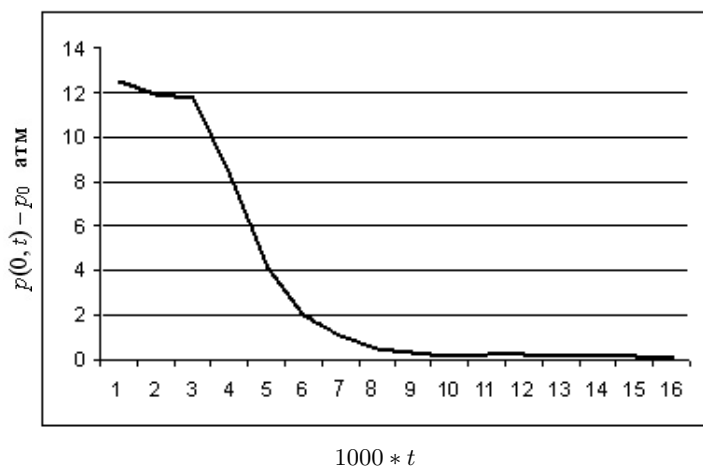
$$u_{гр.норм}^n = u_{вирт.норм}^n \cdot \quad (10)$$

На внешних границах ставятся обычные условия «мягкого» сопряжения (равенство нулю производных от интегрируемых функций по нормали к границе).

Таким образом, формулы (7)–(10) представляют метод Давыдова для случая произвольной треугольной сетки.

Создано три комплекса программ, один из которых выстраивает геометрию конкретного обтекаемого тела, второй — численно решает краевые задачи, третий — обрабатывает результаты (изолинии, параметры на обтекаемом теле и т.д.)

На рис. 3 и в таблице представлены результаты вычисления превышения донного давления над давлением окружающей среды во времени ($0 < t < t_k$). Время завершения решения краевой задачи t_k . Угол $\alpha = 15^\circ$, длина диффузорного участка $l_0 = 0.050$ м, длина цилиндрического участка $l_1 = 0.450$ м; длина эжекторного участка $l_3 = 0.400$ м; угол $\beta = 15^\circ$, $h^2 = 120$.



Время	Давление
0.0	12.512
0.1	11.901
0.2	11.788
0.3	8.213
0.4	4.110
0.5	2.002
0.6	1.015
0.7	0.478
0.8	0.311
0.9	0.199
1.0	0.256
1.1	0.214
1.2	0.161
1.3	0.144
1.4	0.123
1.5	0.100

Рис. 3. Превышение донного давления

На рис. 4. представлены зависимости суммарного интегрального импульса I_c от времени: 1 — без эжектора; 2 — с эжектором; 3 — отдельные компоненты суммарного интегрального импульса: 3.1 — донный импульс, 3.2 — диффузорный импульс, 3.3 — эжекторный импульс.

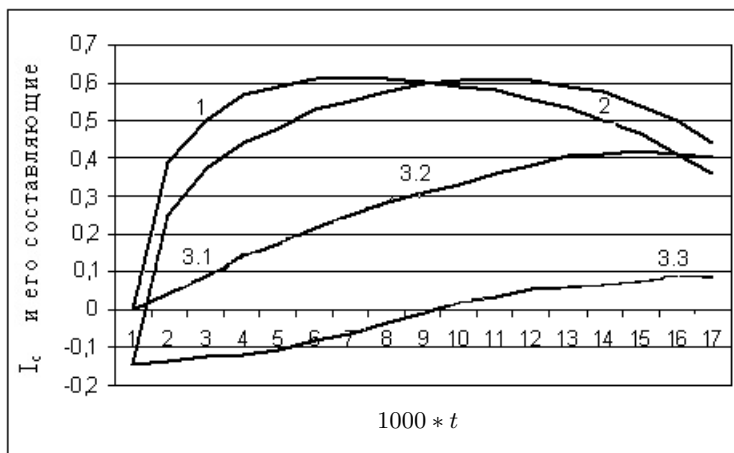


Рис. 4. Размерные интегральные импульсы



При сравнении результатов рис. 4 с результатами статьи [3] эжектор повышает это отношение на 19%, причем в начальные моменты времени — отношение меньше (кривые 1 и 2), чем без эжектора (через эжектор уходит газ за счет перепада давления), зато в конце расчета эжектор начинает выполнять свою основную функцию — засасывать воздух из окружающей среды.

На рис. 5 представлены поля давления в детонационном двигателе в фиксированные моменты времени $t = 0.10t_k, 0.25t_k, 1.00t_k$. Как видно из приведенных результатов, поток существенно перестраивается при изменении времени. Если в начальные моменты времени ($t = 0.1t_k, 0.25t_k$) масса газа выбрасывается через эжектор, то в последующие моменты ($t > 0.5t_k$) воздух из окружающей среды засасывается через эжектор, что создает дополнительный положительный суммарный импульс I_3 эжектора (для нашего варианта расчёта 19% при $t = t_k$). Ввиду наличия оси симметрии расчёты велись для половины камеры.

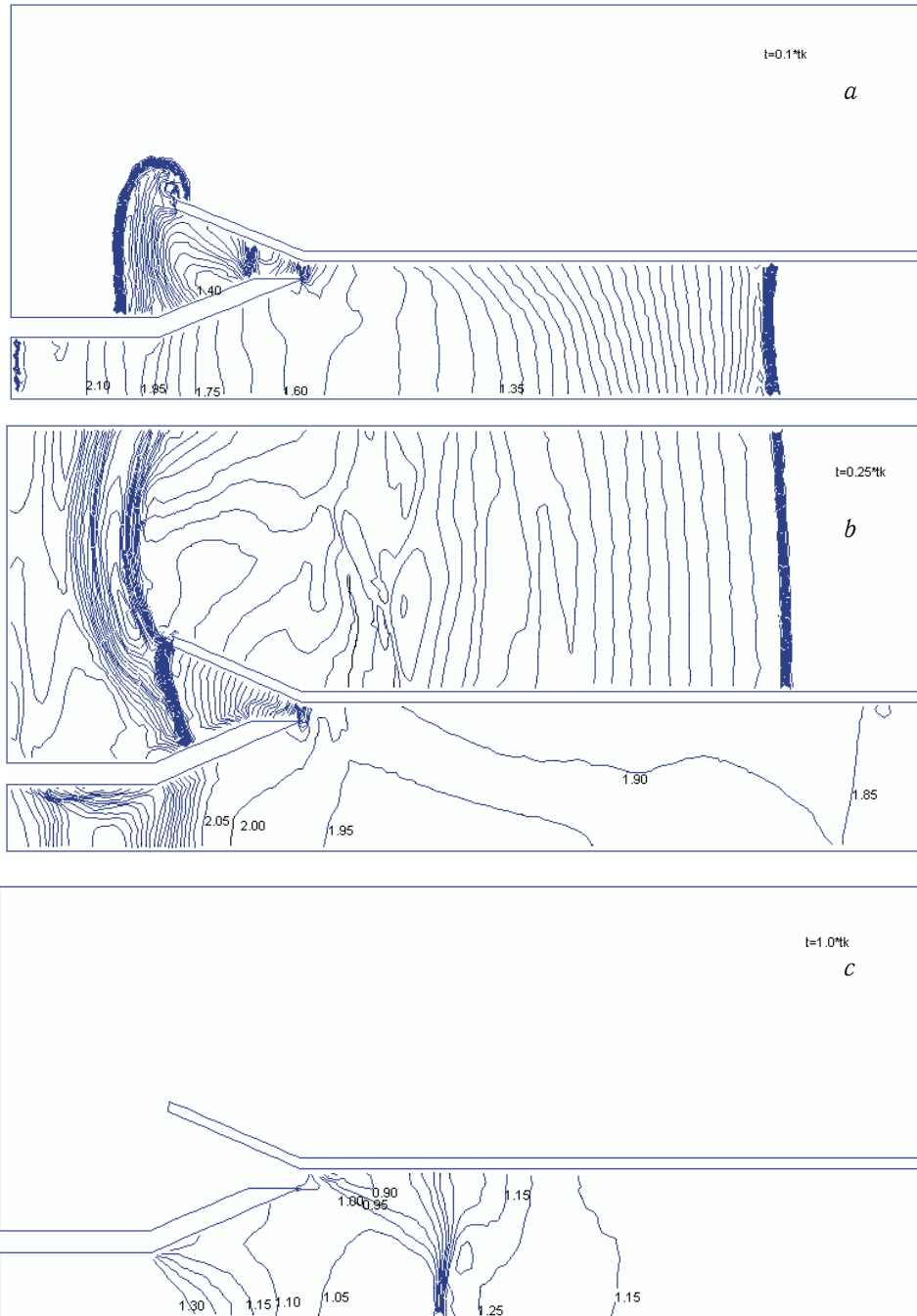


Рис. 5. Поля давления в детонационном двигателе в различные моменты времени:
 $a - t = 0.10t_k, b - t = 0.25t_k, c - t = 1.00t_k$



3.2. Физические закономерности, отмеченные в результате расчетов

В результате аналитического (этап I) и численного (этап II) решения были получены распределения параметров продуктов детонации и воздуха после завершения детонации ($t = t_1$), определены при численном решении положение контактного разрыва и ударной волны в фиксированные моменты времени (для выделенных номеров итераций), а также значения давления продуктов детонации на дно камеры, донный и суммарный размерный импульсы. Определены зависимости этих импульсов по времени за один цикл работы двигателя, характеризующие работу отдельных элементов (цилиндрической, диффузорной и эжекторной частей) двигателя.

Вычисление каждого варианта заканчивалось, как только значение скорости в выходном сечении диффузора становилось отрицательным.

На рис. 3, иллюстрирующем превышение давления в донной части над давлением окружающей среды (в расчетах — атмосферным), начальный участок превышения представляет собой слабо изменяющуюся линию, так как соответствует области покоя продуктов детонации (с постоянным давлением). После прихода в эту область волны разрежения давление у дна камеры начинает падать и становится ниже давления окружающей среды.

Как видно из графика для полного интегрального импульса, а также составляющих полный импульс донного, диффузорного и эжекторного импульсов (рис. 4), он имеет качественно тот же вид, что и в одномерном нестационарном случае. Добавление третьего слагаемого неоднозначно влияет на вид графика, хотя в конечные моменты времени, превышающие $0.5t_k$ расчета, эжектор начинает выполнять свою основную функцию — засасывать воздух из окружающей среды.

На рис. 5 изображены поля давления p/p_0 в три момента времени ($t = 0.10t_k, 0.25t_k, 1.00t_k$). Первые два момента иллюстрируют отрицательное действие эжектора, когда избыточное давление выдавливает газ наружу. На рис. 5, *с*, газ начинает засасываться.

На рис. 6 приведены экспериментальные результаты авторов (снимки, запечатлевшие моменты натурального эксперимента с макетом детонационного двигателя в режиме выхлопа), показывающие удовлетворительное совпадение численного и натурального экспериментов.

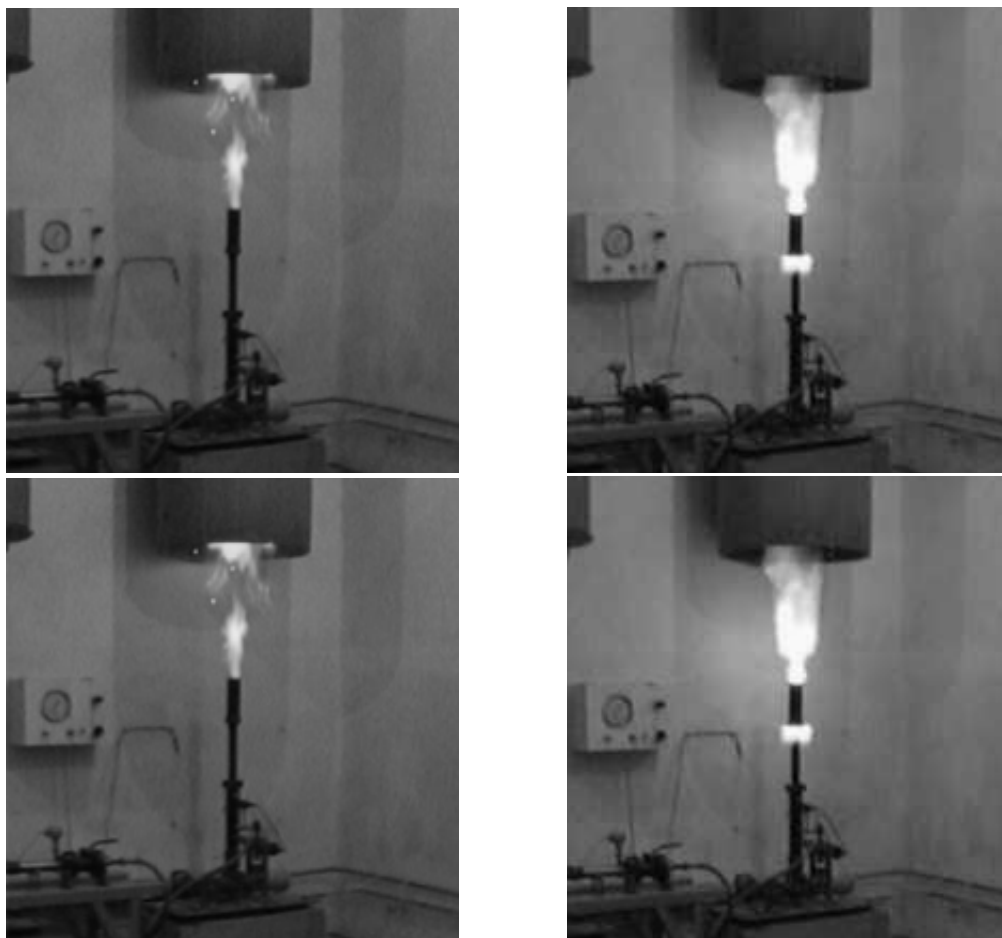


Рис. 6. Результаты натурального эксперимента



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований по разработке математических моделей пульсирующих детонационных двигателей, представляющих значительный практический интерес для решения задач авиации, космонавтики, транспорта.

Для двигателя, представляющего цилиндрическую камеру с диффузором и эжектором, разработана методика расчета параметров и характеристик пульсирующего детонационного двигателя на различных режимах и этапах его работы.

На I этапе работы (этап детонации) построено аналитическое решение, на II этапе – численное решение задачи. Составлен комплекс программ для расчета течения продуктов детонации и воздуха, в результате работы которого определены параметры течения (поля давления и чисел Маха) в различные моменты времени, составляющие импульса давления, характеризующие давления в донной части, в эжекторе и диффузоре; суммарный импульс давления детонационного двигателя.

Таким образом, в работе разработаны методика расчета и математическая модель пульсирующего детонационного двигателя, позволяющие исследовать закономерности и особенности детонационных процессов. Результаты могут быть использованы при разработке и проектировании лабораторных образцов пульсирующих детонационных двигателей.

Библиографический список

1. Ремеев Н.Х. и др. Численное моделирование и экспериментальное исследование рабочего процесса в детонационной камере сгорания // Химическая физика. 2003. Т. 22, № 8. С. 45–56.
2. Зубов В.И. и др. Численное моделирование пространственных турбулентных течений газа в сложных сопловых устройствах // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2005. Т. 45, № 10. С. 1871–1885.
3. Шиндяпин Г.П., Сапунков Я.Г., Шевырев С.П., Поршнев В.А., Федорец Н.В., Федорец В.Н. Проблемы математического моделирования детонационных двигателей для перспективных летательных аппаратов // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6, вып. 1/2. С. 74–85.
4. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. 2-е изд. М.: Наука, 1971.
5. Сапунков Я.Г., Шиндяпин Г.П., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Математическая модель детонационного двигателя // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Из-во Саратов. гос. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 178–181.
6. Сапунков Я.Г., Шиндяпин Г.П., Поршнев В.А., Федорец В.Н. Расчет гидродинамических параметров в импульсном детонационном двигателе с диффузором // Тяжелое машиностроение. М., 2003. № 11. С. 7–10.
7. Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Сов. энцикл., 1982.
8. Математический энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1988.
9. Шевырев С.П. Разностные схемы метода Давыдова на произвольной сетке // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 205–209.
10. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. Т. III.



ИНФОРМАТИКА

УДК 681.518

ХЕШ-ФУНКЦИИ ДЛЯ СОКРАЩЕНИЯ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

В.Б. Гольдштейн, С.В. Миронов

Саратовский государственный университет,
кафедра математической кибернетики и компьютерных наук
E-mail: Goldshtein@mail.ru, MironovSV@info.sgu.ru

Исследуется задача сокращения диагностической информации, используемой при локализации неисправностей дискретных устройств (ДУ). Предлагается решать эту задачу за счет подбора хеш-функции, возвращающей компактные свертки для полных реакций ДУ и реакций его неисправных модификаций на диагностический тест. Приводятся статистические данные, подтверждающие эффективность предложенного подхода.

Hash Functions for Diagnostic Information Reduction

V. B. Goldshteyn, S. V. Mironov

In this paper we present a new approach for the solution of problem of the diagnostic information reduction. This approach is based on use of hash functions delivering a compact signature for records in a fault dictionary. The experimental results show a considerable decrease in the storage requirement of diagnostic information reduced with the help of such functions.

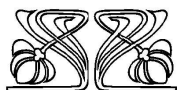
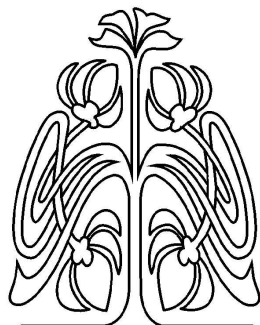
ВВЕДЕНИЕ

Можно выделить два главных подхода к процессу диагностирования: диагностирование с использованием предварительно подготовленной диагностической информации (ДИ) и динамическое диагностирование [1,2]. При первом подходе в составе ДИ сохраняется реакция на диагностическую последовательность (тест) исправного ДУ (эталонная реакция) и реакции всех рассматриваемых неисправных модификаций этого ДУ (словарь неисправностей). Процесс диагностирования с использованием ДИ предполагает подачу на вход исследуемого ДУ диагностической последовательности, получения выходной последовательности и ее сравнение с реакциями в ДИ. Реакция в ДИ, равная полученной выходной последовательности, свидетельствует об исправности ДУ или о наличии в нем соответствующей неисправности. При динамическом диагностировании анализируется реакция исследуемого ДУ с целью локализации неисправности.

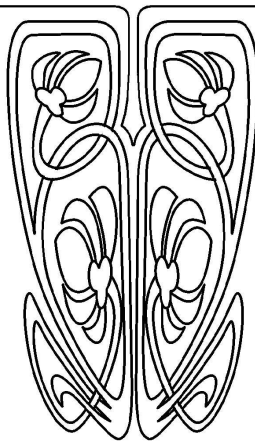
Существуют два основных препятствия к диагностированию с использованием ДИ: для современных ДУ объем ДИ, как правило, чрезвычайно велик; для генерации ДИ требуются значительные временные затраты. Однако генерация ДИ для конкретного ДУ проводится лишь один раз, тогда как время непосредственного диагностирования значительно сокращается по сравнению со временем, необходимым для динамического диагностирования [3].

К сокращению объема ДИ предложено множество подходов [3–9]. Большинство из них предполагает значительное сокращение словаря неисправностей за счет того, что вместо полной реакции на диагностические тесты в словаре сохраняется некоторая компактная свертка этой реакции. В некоторых случаях [8–9] компактная свертка заменяет и реакцию эталонного устройства.

Сокращение объема словаря неисправностей влечет за собой изменение процесса диагностирования. Для локализации неисправности



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





производится поиск в сокращенном словаре неисправностей не полной реакции исследуемого ДУ, а ее компактной свертки. Это означает, что генерация компактной свертки реакции исследуемого ДУ должна быть вписана в процесс диагностирования. Следовательно, время на диагностирование одного ДУ увеличивается за счет времени, необходимого для генерации компактной свертки реакции этого ДУ на тест.

Существенное сокращение объема словаря неисправностей может привести к потере «полезной» информации [3, 9], а следовательно, и к уменьшению глубины диагностирования.

Таким образом, при сокращении ДИ возникают следующие проблемы: так как алгоритм получения компактной свертки реакции ДУ выполняется в процессе диагностирования, время на его выполнение должно быть сведено к минимуму; глубина диагностирования после сокращения ДИ должна оставаться неизменной.

Далее для решения изложенных проблем предлагается использовать механизм хеш-функций.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $B = \{0, 1\}$ — бинарный алфавит.

Пусть рассматриваемое ДУ f_0 имеет m выходных полюсов и множество $F = \{f_i \mid 1 \leq i \leq N\}$ есть множество его неисправных модификаций. Предполагаем, что на каждом выходном полюсе упомянутых ДУ может появиться только сигнал из B .

Пусть $T = t_0, t_2, \dots, t_{k-1}$ — диагностическая последовательность для рассматриваемого устройства, где t_j , $0 \leq j \leq k-1$, — входные вектора. Тогда количество бит $n = mk$ в полной реакции ДУ назовем объемом полной реакции. Саму полную реакцию устройства f_i на тест T можно представить в виде вектора $R_i \in B^n$, в котором на s -м месте, $0 \leq s \leq n-1$, стоит значение сигнала на выходном полюсе с номером $s - m\lfloor s/m \rfloor$ после подачи входного вектора с номером $\lfloor s/m \rfloor$.

Представим ДИ для ДУ f_0 с множеством неисправностей F в виде матрицы R порядка $(N+1) \times n$, где строка с номером i , $0 \leq i \leq N$, есть вектор R_i . Не теряя общности будем предполагать, что все строки матрицы попарно различны, т. е. нет ни одной пары устройств f_i и f_j , неразличимых с помощью представленной ДИ. В противном случае каждый класс неразличимых устройств можно заменить одним представителем.

Объемом ДИ назовем количество элементов в соответствующей матрице R , т. е. величину $(N+1)mk$.

Обозначим $H(r)$, $r \leq n$, множество функций вида $B^n \rightarrow B^r$.

Результатом применения функции $h \in H(r)$ к ДИ R назовем матрицу R^h , в которой строка R_i^h , $0 \leq i \leq N$, есть результат применения функции h к строке R_i исходной матрицы R

$$R_i^h = h(R_i).$$

Строку R_i^h можно воспринимать как компактную свертку полной реакции i -й модификации ДУ, а матрицу R^h — как результат сокращения ДИ.

Из всех функций из $H(r)$, подходящими для сокращения ДИ, являются только такие h , для которых выполняется

$$R_i^h \neq R_j^h \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad (1)$$

т. е. которые сохраняют неизменной глубину диагностирования.

Из того, что R^h — бинарная матрица, очевидно, что условие (1) может выполняться только тогда, когда выполняется условие

$$r \geq \lceil \log_2(N+1) \rceil. \quad (2)$$

В качестве меры сокращения ДИ R с помощью функции $h \in H(r)$ введем величину

$$E(h) = \frac{\lceil \log_2(N+1) \rceil}{r}, \quad (3)$$

которую назовем эффективностью сжатия. С учетом (2) ясно, что для функции h максимальная величина $E(h)$, соответствующая наилучшему сжатию информации при выполнении условия (1), равна 1.



2. ХЕШ-ФУНКЦИИ ДЛЯ СОКРАЩЕНИЯ ДИ

В литературе описано множество различных видов хеш-функций и методов их построения [10, 11]. Ряд экспериментов показал целесообразность применения для сокращения ДИ двух разновидностей хеш-функций — полиномиальной (мультипликативной) и позиционной. Преимуществом этих хеш-функций является их простота, высокая скорость вычисления.

Полиномиальная хеш-функция $h \in H(r)$ в качестве результата выдает последние r бит результата вычисления многочлена $X_{n-1} + X_{n-2}P + X_{n-3}P^2 + \dots + X_0P^{n-1}$ т. е.

$$h(X) = (X_{n-1} + X_{n-2}P + X_{n-3}P^2 + \dots + X_0P^{n-1}) \pmod{2^r},$$

где $X = X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ — входной битовый набор (вектор полной реакции ДУ), P — параметр хеш-функции, — целое нечетное число из диапазона $[1, 2^r)$.

Для вычисления результата позиционной хеш-функции $h \in H(r)$ от аргумента X вычисляются значения

$$h_0(X), h_1(X), \dots, h_n(X).$$

Величина $h_0(X)$ принимается равной нулю, а для определения величины $h_i(X)$, $1 \leq i \leq n$ вычисляется

$$k_i = (X_{i-1} + \dots + X_0P^{i-1} + (r-1)P^i) \pmod{r},$$

где P — параметр хеш-функции, после чего принимается $h_i(X) = h_{i-1}(X) \oplus (2^{k_i} X_{i-1})$. Здесь \oplus — побитовая операция сложения по модулю 2. В качестве результата хеш-функция $h(X)$ возвращает значение $h_n(X)$.

Как в полиномиальных, так и в позиционных хеш-функциях высокая скорость вычислений достигается за счет простоты выполняемых операций. Кроме того, в позиционных хеш-функциях исключается умножение длинного числа на параметр P (в общем случае тоже длинное число), и таким образом позиционная хеш-функция более эффективна с точки зрения скорости вычисления, чем полиномиальная.

Как видно из определений, полиномиальную или позиционную хеш-функцию из класса $H(r)$ можно считать определенной, если задан параметр P . Логично предположить, что не для любого параметра P для хеш-функции будет выполняться условие (1) и более того, что выполнение условия (1) для хеш-функции для некоторой ДИ R не гарантирует выполнение этого условия для другой ДИ.

Оценим вероятность того, что функция $h \in H(r)$ для ДУ с N неисправностями будет удовлетворять условию (1). Предположим хеш-функция h выдает равновероятные значения. Будем получать новые значения хеш-функции последовательно. Получая очередное значение считаем, что все полученные значения различны. Тогда вероятность того, что i -е (начиная с нуля) значение функции h не совпадает ни с одним из полученных ранее, равна $\frac{2^r - i}{2^r}$. Таким образом, вероятность того, что для $h \in H(r)$ выполняется (1) равна

$$\prod_{i=0}^N \frac{2^r - i}{2^r}. \tag{4}$$

Зная полученное значение вероятности можно подсчитать количество итераций (шагов) перебора, которое гарантирует с вероятностью 99% получение хеш-функции, обеспечивающей выполнение условия (1). Обозначим это количество M . Значения величины M для некоторых значений N и r приведены в табл. 1. Здесь M_i , $1 \leq i \leq 4$, — значения M для $r = r_i$. Как видно из табл. 1, с помощью небольшого перебора вероятнее всего получить хеш-функцию, обеспечивающую эффективность сжатия от 0.58 до 0.67.

Таблица 1

Количество итераций, необходимое для получения хеш-функции

$N+1$	r_1	$E(h_1)$	M_1	r_2	$E(h_2)$	M_2	r_3	$E(h_3)$	M_3	r_4	$E(h_4)$	M_4
100	12	0.5833	14	11	0.6364	52	10	0.7000	681	9	0.7778	$1.4 \cdot 10^5$
250	13	0.6154	212	12	0.6667	10776	11	0.7273	$3.5 \cdot 10^7$	10	0.8000	$1.2 \cdot 10^{15}$
300	15	0.6000	16	14	0.6429	71	13	0.6923	1174	12	0.7500	$3.4 \cdot 10^5$
500	15	0.6000	210	14	0.6429	10094	13	0.6923	$2.6 \cdot 10^7$	12	0.7500	$2.9 \cdot 10^{14}$
800	17	0.5882	51	16	0.6250	615	15	0.6667	85895	14	0.7143	$1.9 \cdot 10^9$
900	17	0.5882	100	16	0.6250	2271	15	0.6667	$1.2 \cdot 10^6$	14	0.7143	$3.8 \cdot 10^{11}$
1100	18	0.6111	45	17	0.6471	468	16	0.6875	49135	15	0.7333	$5.8 \cdot 10^8$
1500	18	0.6111	337	17	0.6471	25269	16	0.6875	$1.5 \cdot 10^8$	15	0.7333	$5.9 \cdot 10^{15}$



3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для оценки эффективности сокращения ДИ с помощью хеш-функций были проведены две серии экспериментов. В процессе экспериментов подбирались полиномиальные и позиционные хеш-функции для каждого варианта ДИ. Для каждого из значений r , начиная с наименьшего, делалось несколько попыток подбора соответствующего параметра P . При обнаружении хеш-функции, удовлетворяющей условию (1), процесс поиска прекращался.

В первой серии экспериментов производился поиск хеш-функций для исходных данных, сгенерированных случайным образом. Генерация ДИ проводилась в предположении, что полная реакция любой неисправной модификации ДУ отличается от эталонной реакции не более чем на 5%. Такая модель была выбрана в связи с тем, что одиночные неисправности в ДУ обычно приводят к незначительным изменениям реакций ДУ. Объем полной реакции варьировался от 38 до 5028 бит, а количество неисправных модификаций было взято равным 600.

В табл. 2 приведены результаты этой серии экспериментов. В первой колонке табл. 2 указана доля вариантов ДИ, для которых была найдена хеш-функция h с эффективностью сжатия $E(h)$, приведенной в третьей колонке. Четвертая и пятая колонки показывают соответственно значение вероятности (4) нахождения такой хеш-функции и необходимое количество M итераций для получения такой хеш-функции с вероятностью 99%. Из табл. 2 видно, что хеширование позволяет добиться сокращения исходной информации до размеров, всего лишь на несколько бит превосходящих оптимальный.

В табл. 3 приводятся результаты тех же экспериментов, но с несколько другой точки зрения. Табл. 3 показывает, что средняя эффективность сжатия ДИ с помощью найденной хеш-функций не зависит от длины полной реакции ДУ.

Первая серия экспериментов показала, что поиск полиномиальной хеш-функции для одних и тех же параметров r и P происходит быстрее, чем поиск позиционной хеш-функции. Так, в поставленных экспериментах полиномиальная хеш-функция осуществляет наиболее эффективное сокращение ДИ в 83.33% случаев, тогда как позиционная — только в 16.67%.

Для следующей серии экспериментов была использована ДИ, полученная для ДУ из каталога ISCAS'89 при моделировании одиночных неисправностей с помощью тестовых последовательностей NITEC [12]. Результаты экспериментов приведены в табл. 4.

Из табл. 4 видно, что эффективность сжатия ДИ для реальных ДУ с использованием хеш-функций не уступает результатам, полученным для случайных данных. Объем сокращенной с помощью хеш-функции ДИ в большинстве случаев составляет менее процента от исходного объема.

Стоит отметить, что дальнейшее увеличение длины диагностического теста приводит к довольно малому росту числа обнаруженных с его помощью неисправностей. По этой причине увеличение длины теста, следствием которого является возрастание объема ДИ, по-видимому, может только улучшить показатели в предпоследнем столбце табл. 4, но не ухудшить их.

Время поиска компактной свертки с помощью уже найденной хеш-функции для одной реакции на тест любого ДУ, упомянутого в табл. 4, составило менее 1 мс.

Все проведенные эксперименты подтверждают тот факт, что поиск хеш-функции с эффективностью сжатия от 0.58 до 0.67 наиболее вероятно завершается успехом за небольшое число итераций перебора.

Таблица 2

Получение хеш-функции для случайных данных

Доля вариантов ДИ, %	r	$E(h)$	Вероятность нахождения h , %	M
5	15	0.6667	0.40148	1200
61.6	16	0.6250	6.39021	70
33.4	17	0.5882	25.33211	16

Таблица 3

Зависимость эффективности сжатия ДИ от объема полной реакции

Объем полной реакции, бит	Среднее значение $E(h)$
38–1028	0.6154
1038–2028	0.6135
2038–3028	0.6158
3038–4028	0.6150
4038–5028	0.6109



Таблица 4

Сокращение ДИ для ДУ из каталога ISCAS'89 с помощью хеш-функций

ДУ	N	Объем полной реакции, бит	Объем ДИ, бит	r	$E(h)$	Объем сокращенной ДИ, бит	Доля сокращенной ДИ от полной ДИ, %	Время подбора h , мс
S298	177	1932	343896	13	0.6154	2314	0.673	235
S344	240	1397	336677	14	0.5714	3374	1.002	266
S349	243	1474	359656	14	0.5714	3416	0.950	266
S382	190	12444	2376804	13	0.6154	2483	0.091	3453
S386	274	2002	550550	15	0.6000	4125	0.749	406
S400	194	13284	2590380	14	0.5714	2730	0.105	2000
S444	191	13440	2580480	13	0.6154	2496	0.097	6359
S526	138	13548	1883172	13	0.6154	1807	0.095	750
S641	345	5016	1735536	15	0.6000	5190	0.299	1390
S713	343	3979	1368776	15	0.6000	5160	0.377	1281
S820	712	21185	15104905	17	0.5882	12121	0.080	14469
S832	719	21603	15554160	17	0.5882	12240	0.079	2344
S1423	293	750	220500	15	0.6000	4410	2	219
S1488	1359	22230	30232800	19	0.5789	25840	0.085	20234
S1494	1360	23655	32194455	19	0.5789	25859	0.080	31641
S1488	55	100	5600	10	0.6000	560	10	16

Для проведения сравнительной оценки сокращения ДИ с помощью хеш-функций был реализован жадный метод поиска маски ДИ, описанный в [13] и примененный, в частности, в [7].

Этот метод находит маску, применяя которую к вектору полной реакции ДУ можно получить компактную свертку для этой реакции. Количество r бит в компактной свертке обусловлено так называемым объемом найденной маски. Результат применения этого метода к тем же исходным данным, что использовались во втором наборе экспериментов приведены в табл. 5.

Таблица 5

Сокращение ДИ для ДУ из каталога ISCAS'89 с помощью масок

ДУ	N	Объем полной реакции, бит	Объем ДИ, бит	r	$E(h)$	Объем сокращенной ДИ, бит	Доля сокращенной ДИ от полной ДИ, %	Время поиска маски, мс
S298	177	1932	343896	62	0.0363	11036	3.209	984
S344	240	1397	336677	58	0.0411	13978	4.152	3688
S349	243	1474	359656	61	0.0391	14884	4.138	1218
S382	190	12444	2376804	55	0.0415	10505	0.442	11421
S386	274	2002	550550	90	0.0271	24750	4.496	2453
S400	194	13284	2590380	57	0.0402	11115	0.429	13594
S444	191	13440	2580480	60	0.0381	11520	0.446	13328
S526	138	13548	1883172	39	0.0550	5421	0.288	6328
S641	345	5016	1735536	128	0.0198	44288	2.552	11968
S713	343	3979	1368776	131	0.0194	45064	3.292	9219
S1423	293	750	220500	93	0.0265	27342	12.400	906
S2081	55	100	5600	17	0.1029	952	17	31

Сравнивая табл. 4 и 5 можно утверждать, что сокращение ДИ с помощью хеш-функций оказалось эффективнее сокращения с помощью масок, полученных реализованным алгоритмом. Прежде всего следует отметить, что объем информации, сокращенной с помощью найденных хеш-функций, в среднем в пять раз меньше объема информации, сокращенного с помощью масок. Кроме того, время, затраченное на получение маски, в среднем в шесть раз превышает время поиска хеш-функции.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в предыдущем разделе результаты решения задач минимизации диагностической информации с помощью предложенных в работе хэш-функций показывают, что такой подход оказался весьма эффективным. Достоинством этого подхода является прежде всего малое время поиска хэш-функции для реальных объектов и устройств и незначительное время на получение компактной свертки отдельной реакции ДУ. Кроме того, найденные хэш-функции позволяют весьма существенно сократить объем информации, подлежащей хранению в памяти ЭВМ. Так, по совокупности параметров это сокращение достигает в среднем 99%, что следует признать хорошим результатом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-08-18082)

Библиографический список

1. Abramovici M., Breuer M.A., Friedman A.D. Digital Systems Testing and Testable Design. N.Y.: Computer Science Press, Inc., 1996.
2. Ryan P.G., Rawat S., Fuchs W.K. Two-stage fault location // Proc. of International Test Conf. 1991. P. 963–968.
3. Voppana V., Hartanto I., Fuchs W.K. Full fault dictionary storage based on labeled tree encoding // Proc. of 14th VLSI Test Symposium. 1996. P. 174–179.
4. Pomeranz I., Reddy S.M. On the generation of small dictionaries for fault location // Proc. of the 1992 IEEE/ACM International Conf. on Computer-Aided design (ICCAD '92). 1992. P. 272–279.
5. Ryan P.G., Fuchs W.K., Pomeranz I. Fault dictionary compression and equivalence class computation for sequential circuits // Proc. of IEEE International Conf. on Computer-Aided Design (ICCAD'93). 1993. P. 508–511.
6. Chess B., Larrabee T. Creating small fault dictionaries // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 1999. Vol. 18. № 3. P. 346–356.
7. Arslan B., Orailoglu A. Fault dictionary size reduction through test response superposition // Proc. of the 2002 IEEE International Conf. on Computer Design: VLSI in Computers (ICCD'02). 2002. P. 480–485.
8. Сперанский Д.В. Об одном подходе к решению задач сокращения объема диагностической информации // Автоматика и телемеханика. 1984. № 3. С. 151–160.
9. Барашко А.С., Скобцов Ю.А., Сперанский Д.В. Моделирование и тестирование дискретных устройств. Киев: Наук. думка, 1992.
10. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Структуры данных и алгоритмы. М.: Изд. дом «Вильямс», 2003.
11. Кармен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы, построение и анализ. М.: МЦНМО, 2002.
12. Niermann T., Patel J. HITES: a test generation package for sequential circuits // Proc. European Design Automation Conf. 1991. P. 214–218.
13. Закревский А.Д., Поттосин Ю.В., Черемисинова Л.Д. Основы логического проектирования. Кн. 1. Комбинаторные алгоритмы дискретной математики. Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2004.



PERSONALIA

АВГУСТ ПЕТРОВИЧ ХРОМОВ

Д.В. Прохоров*, А.М. Захаров*, С.И. Дудов**

Саратовский государственный университет,
*кафедра математического анализа,
**кафедра математической экономики,
E-mail: ProkhorovDV@info.sgu.ru, DudovSI@info.sgu.ru

Статья написана к 70-летию со дня рождения Августа Петровича Хромова — выдающегося математика, заслуженного деятеля науки РФ, почетного профессора Саратовского государственного университета, президента Саратовского математического общества, академика Международной академии наук высшей школы, академика РАЕН, заведующего кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики.

Avgust Petrovich Khromov

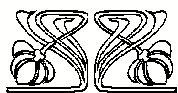
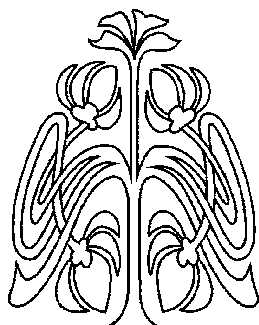
D.V. Prokhorov, A.M. Zakharov, S.I. Dudov

The article is dedicated to the 70-th birthday of Avgust Petrovich Khromov — an outstanding mathematician, Honoured Scientist of Russia, honorary professor of the Saratov state university, president of Saratov mathematical society, member of International High School Sciences Academy and Russian Academy of Natural Sciences, head of the chair of differential equations and applied mathematics.

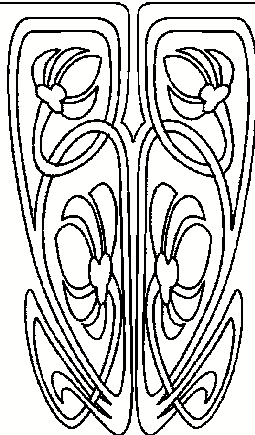
Недавно Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского чествовал Августа Петровича Хромова, заслуженного деятеля науки РФ, почетного профессора, которому 17 июня 2005 года исполнилось 70 лет.

А.П. Хромов родился в Тульской области в семье рабочего. Во время Великой Отечественной войны семья его была эвакуирована в город Петровск Саратовской области, где он окончил среднюю школу. В 1953 году он поступил в Саратовский госуниверситет на механико-математический факультет. С тех пор вся его научная и педагогическая деятельность связана с СГУ, кроме 1963 и 1964 годов, когда он работал в Свердловском отделении Математического института АН СССР. С 1976 года по настоящее время А.П.Хромов возглавляет кафедру дифференциальных уравнений и прикладной математики механико-математического факультета СГУ.

Сфера научных интересов А.П. Хромова в основном относится к спектральной теории дифференциальных и интегральных операторов, одному из важнейших разделов современного функционального анализа, начало изучения которого в СГУ было заложено Н.П. Купцовым, учителем А.П. Хромова. Работы А.П. Хромова явились новым крупным вкладом в эту важную активно развивающуюся область исследований. В кандидатской диссертации, защищенной в 1964 году в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР, им впервые был проведен спектральный анализ дифференциальных операторов n -го порядка на конечном интервале в случае слабо нерегулярных краевых условий (случай степенного роста резольвенты). В исследованиях А.П. Хромова спектральная теория несамосопряженных дифференциальных и интегральных операторов получила



ПРИЛОЖЕНИЯ





глубокое развитие, он стал известным специалистом в этой области и постепенно, начиная с 70-х годов, после защиты в 1973 году докторской диссертации «Конечномерные возмущения вольтерровых операторов», создал солидную научную школу по этой теории.

Исследования А.П. Хромова по спектральной теории дифференциальных операторов являются развитием фундаментальных работ Дж. Биркгофа, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна, Н. Гопкинса, Д. Джексона, М.В. Келдыша. Им впервые для случая, когда резольвента допускает любой степенной рост по спектральному параметру, найдены точные зависимости гладкости разлагаемой функции по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) от степени роста резольвенты. А.П.Хромов провел большое исследование дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями, т.е. когда резольвента имеет экспоненциальный рост. Для этого случая он полностью описал классы разлагаемых функций (это операторно-аналитические функции Фэге) и окончательно решил вопрос о сходимости разложений по с.п.ф. в самом общем случае. Для нераспадающихся краевых условий при экспоненциальном росте резольвенты им полностью решена задача о разложении по с.п.ф. оператора n -кратного дифференцирования. А.П. Хромов вывел дифференциально-разностные уравнения, которым должна удовлетворять разлагаемая функция.

А.П.Хромов впервые рассмотрел задачу представления аналитических функций рядами экспонент как задачу разложения по собственным функциям оператора дифференцирования с краевыми условиями, порождаемыми различными линейными функционалами в аналитических пространствах. Это позволило ему выяснить природу известной интерполирующей функции А.Ф.Леонтьева и распространить понятие интерполирующей функции на более сложные объекты, порождаемые дифференциальными, интегро-дифференциальными и интегральными операторами. В этом направлении им была также решена важная задача о представлении рядами экспонент произвольных функций, аналитических в какой-либо внутренней подобласти для сопряженной диаграммы характеристической функции.

Некоторые важные операторы могут быть представлены в виде суммы вольтерровых и конечномерных. А.П. Хромов первый выполнил исследование таких операторов в абстрактном банаховом пространстве. В качестве конкретных операторов им подробно были исследованы интегральные операторы с полувырожденными ядрами. В основе исследования резольвент этих операторов лежит фундаментальный результат А.П. Хромова об асимптотическом поведении резольвенты интегрального вольтеррова оператора. Эта асимптотика позволяет исследовать достаточно полно вопрос о полноте с.п.ф. и сводить эту проблему к вопросу о порождающих функциях вольтерровых операторов. Для порождающих функций А.П. Хромов получил глубокие результаты типа теоремы Мюнца, на основе которых дал полное решение трудного вопроса о полноте с.п.ф. Интегральные операторы рассматриваемого вида в настоящее время являются единственным хорошо исследованным классом интегральных операторов с экспоненциально растущей резольвентой. Итоги исследований по данному циклу работ подведены в его монографии «Конечномерные возмущения вольтерровых операторов» (2004 г.).

Профессор А.П. Хромов внес значительный вклад в исследование равносходимости разложений по с.п.ф. и в тригонометрические ряды Фурье, открытой впервые В.А. Стекловым и А. Хааром. Он описал классы нерегулярных краевых условий для случая дифференциальных операторов на конечном интервале, когда равносходимость имеет место на некоторых интервалах, и указал точную зависимость этих интервалов от степени нерегулярности. Им впервые был поставлен вопрос о равносходимости разложений по с.п.ф. интегральных операторов и получен принципиально важный факт о каноническом виде таких операторов, для которых он получил наилучшаемые теоремы равносходимости.

В 80-х годах XX в. внимание А.П. Хромова привлекли задачи оптимального управления. Он нашел новый вид вариаций испытываемых на оптимальность траекторий, когда независимыми параметрами являются углы наклона траектории при выходе на границу. Теперь испытываемая траектория становится для таких параметров внутренней точкой, что облегчает получение основных соотношений принципа максимума Понтрягина. Предложен новый подход к задаче синтеза как к задаче построения оптимального управления в виде функции текущего состояния так, чтобы любое решение замкнутой системы давало оптимальную траекторию заданного семейства оптимальных траекторий. Для линейной управляемой системы с квадратичным критерием качества без ограничений им полностью описан класс синтезирующих функций, удовлетворяющих произвольным аффинным граничным условиям.

Со второй половины 90-х годов А.П. Хромов занимается исследованием спектральных свойств операторов, ядра которых имеют особенности на диагоналях или на ломаных из основного квадрата. Им найдены широкие классы интегральных операторов, для которых имеет место равносходимость спектральных разложений с разложениями Фурье по тригонометрической системе, установлена базисность Рисса систем с.п.ф. этих операторов, получено полное решение вопроса о равномерной



сходимости на всем отрезке обобщенных средних Рисса спектральных разложений (соответствующие результаты являются новыми даже для случая функций Грина дифференциальных операторов), изучены вопросы сходимости спектральных разложений конечномерных возмущений таких операторов. В основе этих фундаментальных результатов, которые подводят итог многолетней научной деятельности А.П. Хромова и его учеников в указанной области, лежит разработанный им перспективный метод исследования резольвент указанных операторов, базирующийся на привлечении глубоких свойств дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов самого общего вида.

А.П. Хромовым создана активно работающая научная школа, под его руководством защищено 25 кандидатских диссертаций, двое его учеников стали докторами наук. Все это сделало его имя широко известным как среди ученых нашей страны, так и за рубежом.

Велик вклад А.П. Хромова в дело организации математической жизни в Саратове. А.П.Хромов является одним из основных организаторов Саратовских зимних школ по теории функций, собирающих в Саратове математиков всех уровней, от академиков до аспирантов и студентов со всей России и ближнего зарубежья. Он избран президентом Саратовского математического общества с момента его создания, а также возглавляет диссертационный совет по защите кандидатских диссертаций.

Бескорыстная преданность науке, высокая требовательность к себе, щедрость в передаче своих знаний ученикам в сочетании с доброжелательностью, отзывчивостью и прекрасным чувством юмора создали ему заслуженную репутацию прекрасного математика, талантливого педагога и замечательного человека.

В свои 70 лет Август Петрович полон творческой энергии и новых идей. Мы сердечно поздравляем юбиляра и желаем ему доброго здоровья, дальнейших успехов в его многогранной деятельности.