САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Научный журнал
2008 Том 8

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 4

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

Издается с 2001 года

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Алдибеков Т.М.
Обобщенно-правильные системы
дифференциальных уравнений 3

Бурлуцкая М.Ш.
Теорема равносходимости для интегрального оператора
на простейшем графе с циклом 8

Кляева И.А.
Спектральные последовательности толерантных расслоений 13

Корнев В.В., Хромов А.П.
Оператор интегрирования с инволюцией,
имеющей степенную особенность 18

Науменко А.П.
О распределении чисел с двоичным разложением
специального вида в арифметических прогрессиях 34

Механика

Асланов В.С., Иванов Б.В.
Хаотическое движение нелинейной системы 38

Безгласный С.П., Мысина О.А.
Стабилизация программных движений
твердого тела на подвижной платформе 44

Илюхин А.А., Тимошенко Д.В.
Построение основных соотношений
одномерной микрополярной теории упругих стержней 52

Полянин А.Д., Журов А.И.
Электронные публикации и научно-образовательные
ресурсы Интернета 61

Информатика

Мангушева И.П.
Морфизмы по стабильным толерантностям
конечных автоматов 80

Зарегистрировано
в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации СМИ
ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Журнал принимает к публикации научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (функциональный анализ, дифференциальные уравнения, алгебра и логика, дискретная математика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, теория условно-корректных задач математической физики, вычислительные методы линейной алгебры, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, биомеханика, теоретические основы информатики, математическая кибернетика и др.)

Объем публикуемой статьи не должен превышать 18 страниц машинописи (формат А4, шрифт 14, поля не менее 2 см со всех сторон), включая библиографию. К статье прилагается сопроводительное письмо, сведения об авторе: фамилия, имя и отчество (полностью), место работы (вуз, кафедра), адрес для переписки, e-mail.

Последовательность предоставления материала: индекс УДК; название работы, инициалы и фамилия автора, место работы (вуз, кафедра), e-mail, аннотация и ключевые слова на русском языке, инициалы и фамилия автора, название статьи, аннотация и ключевые слова на английском языке, текст статьи; библиографический список. Не допускается нумерация формул, на которые в статье нет ссылок. В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. Файлы рисунков следует продублировать в формате jpg.

В редакцию высылаются 2 экземпляра текста статьи и файл, подготовленный с использованием LaTeX (согласно стилевому файлу, размещенному на web-странице журнала www.sgu.ru/journal). Файлы статьи в формате pdf и tex можно направить по адресу journal@info.sgu.ru.

Датой поступления считается дата поступления окончательного варианта статьи. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее, чем через 6 месяцев; возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Ведущий редактор
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Агальцова Людмила Владимировна

Корректор
Крылова Елена Борисовна

Адрес редакции
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Издательство Саратовского университета

Тел.: (845-2) 52-26-89, 52-26-85

E-mail: izdat@sgu.ru

Подписано в печать 17.11.08.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 10,93 (11,75).
Уч.-изд. л. 11,8.
Тираж 500 экз. Заказ 138.

Отпечатано в типографии
Издательства Саратовского университета

CONTENTS

Scientific Part

Mathematic

Aldibekov T.M.
Generalized Regular Systems of Differential Equations 3

Burlutskaya M.Sh.
The Theorem on Equiconvergence for the Integral Operator on Simplest Graph with Cycle 8

Klyaeva I.A.
Spectral Sequences of Fibre Tolerance Spaces 13

Kornev V.V., Khromov A.P.
Operator Integration with an Involution Having a Power Singularity 18

Naumenko A.P.
On the Distribution of the Numbers with Binary Expansions of a Special Type in Arithmetic Progressions 34

Mechanics

Aslanov V.S., Ivanov B.V.
Chaotic Motion of Nonlinear System 38

Bezglasnyi S.P., Mysina O.A.
The Stabilization of Program Motions of Firm Body on a Moving Platform 44

Iliykhin A.A., Timoshenko D.V.
The One-Dimensional Micropolar Theory of Elastic Rods Basic Parities Construction 52

Polyanin A.D., Zhurov A.I.
Electornic Publications and Scientific-Educational Resources of the Internet 61

Informatics

Mangusheva I.P.
Morphismes Based on Compatible Tolerances of Finite Automata 80

МАТЕМАТИКА

УДК 517.938

ОБОБЩЕННО-ПРАВИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.М. Алдибеков

Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
кафедра дифференциальных уравнений и математической физики
E-mail: tamash59@list.ru

Рассматриваются класс системы дифференциальных уравнений, асимптотика решений которых определяются обобщенными показателями и при этом некоторые известные признаки правильности получают обобщение.

Ключевые слова: показатели Ляпунова, система дифференциальных уравнений, обобщенно-правильные системы, обобщенные показатели.

Generalized Regular Systems of Differential Equations

T.M. Aldibekov

From the set of systems of differential equations we consider the class of systems with solutions asymptotic defined by generalized exponents. The generalization some known signs correct theorems are obtained.

Key words: Lyapunov's exponents, system of differential equations, generalized regular system, generalized exponents.

Одно из основных мест в ляпуновской классификации систем линейных дифференциальных уравнений с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами занимают правильные системы [1–2, с. 77]. Они включают в себя приводимые и почти приводимые системы и играют ведущую роль в теории устойчивости по линейному приближению. Для системы линейных дифференциальных уравнений с неограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами аналогичную роль играют обобщенно-правильные системы.

Пусть $f(t)$ — в общем случае, комплекснозначная функция, определенная в $J = [t_0, +\infty]$, $t_0 \in R$, Q — множество положительных, монотонно возрастающих, непрерывно дифференцируемых функций, определенных в работе [3].

Определение 1 [3]. Число или символы $-\infty, +\infty$, определенные формулой

$$\chi[f, g] = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{1}{q(t)} \ln|f(t)| & \text{при } f(t) \neq 0,\ t \in J, \\ -\infty & \text{при } f(t) = 0,\ t \in J, \end{cases}$$

где $q(t) \in Q$, будем называть *верхним обобщенным характеристическим показателем Ляпунова*, короче *обобщенным показателем $f(t)$ относительно $q(t)$*.

Если $q(t) \in Q$, то получаем обычное определение показателя Ляпунова $f(t)$ в форме Перрона. Мы рассматриваем$q(t) > t$. Отметим, что для любой $f(t) \neq 0$, $t \in J$ всегда найдется функция $q(t) \in Q$ такая, что обобщенный показатель $\chi[f, q]$принимает конечное значение. Аналогично определяются обобщенные показатели от норм непрерывной вектор-функции, непрерывной матрицы, заданных на J.

Пусть

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

— действительнозначная линейная однородная система дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами J.

Известно [3], что если матрица $A(t)$ удовлетворяет условию $\|A(t)\| \leq K\psi(t)$, где $K > 0$, $\psi(t)$ — положительная непрерывная в J функция, то система (1) имеет не более $n \in N$ различных конечных обобщенных показателей относительно $q(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)d\tau$.

Лемма 1. *Пусть система* (1) *имеет конечные обобщенные показатели относительно* $q(t) \in Q$. *Тогда имеет место обобщенное неравенство Ляпунова относительно* $q(t)$, *т.е. для любой фундаментальной системы решений* $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ *системы* (1) *выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau \leq \sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q]. \tag{2}$$

Доказательство. Действительно, из условия следует, что вронскиан $W(t) = \det[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}]$ имеет конечный обобщенный показатель $\chi[W, q]$ и на основании свойства обобщенных показателей для суммы и произведения имеем

$$\chi[W, q] \leq \sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q]. \tag{3}$$

С другой стороны, из формулы Остроградского – Лиувилля имеем

$$\chi[W, q] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau. \tag{4}$$

Следовательно, из (3) и (4) получаем (2). Лемма 1 доказана.

Определение 2. Система (1) называется *обобщенно-правильной по Ляпунову относительно* $q(t) \in Q$, если имеется ее фундаментальная система решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, для которой выполнено числовое равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau. \tag{5}$$

Теорема 1. *Если система* (1) *имеет конечные обобщенные показатели относительно* $q(t) \in Q$, *то для обобщенной правильности системы* (1) *относительно* $q(t)$ *необходимо существование точного предела*

$$S(q) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Доказательство. Если система (1) — обобщенно-правильная относительно $q(t)$, то имеется ее фундаментальная система решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, для которой выполняется равенство (5). Поэтому из (5) и из обобщенного неравенства (2) имеем

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau \geq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau.$$

Следовательно, существует точный предел (6). Теорема 1 доказана.

Пусть

$$\dot{y} = -A(t) \tag{7}$$

— сопряженная система для системы (1).

Теорема 2. *Если система* (1) *— обобщенно-правильная относительно* $q(t) \in Q$*, то сопряженная система (7) имеет фундаментальную систему решений* $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$*, для которой имеет место равенство*

$$\chi[y^{(k)}, q] + \chi[x^{(k)}, q] = 0, \quad k = \overline{1,n}, \tag{8}$$

где $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ *— некоторая фундаментальная система решений системы* (1).

Доказательство. Если система (1) — обобщенно-правильная относительно $q(t)$, то имеется фундаментальная система решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ системы (1), для которой в силу теоремы 1 имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Пусть $X(t) = [x_{jk}(t)]$, $j,k = \overline{1,n}$ — фундаментальная матрица, состоящая из решений $x^{(k)} = colon[x_{1k}, \ldots, x_{nk}]$, $k = \overline{1,n}$ системы (1). Положим $Y(t) = [X^{-1}(t)]^T$. Тогда $Y(t) = [y_{jk}(t)]$, $j,k = \overline{1,n}$, будет фундаментальной матрицей сопряженной системы (7), где $y_{jk}(t)\dfrac{X_{jk}(t)}{\det X(t)}$, $X_{jk}(t)$ — алгебраическое дополнение элемента $x_{jk}(t)$ вронскиана $W(t) = \det X(t)$.

Далее,

$$\chi[y_{jk}, q] = \chi\left[\frac{X_{jk}}{W}, q\right] = \chi\left[\frac{X_{jk}}{\det X(t_0)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau\right)}, q\right] =$$

$$= \chi\left[\frac{X_{jk}}{\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau\right)}, q\right] \le \chi[X_{jk}, q] + \chi[X_{jk}, q] + \chi\left[\exp\left(-\int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau\right), q\right] \le$$

$$\le \sum_{\substack{i=1\\ j\ne k}}^{n} \chi[x^{(i)}, q] + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)}\left(-\int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau\right) = \sum_{\substack{i=1\\ j\ne k}}^{n} \chi[x^{(i)}, q] + \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{q(t)}\int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau\right) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ j\ne k}}^{n} \chi[x^{(j)}, q] + \sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = -\chi[x^{(k)}, q].$$

Итак, для любого $j \in (1, \ldots, n)$ имеет место $\chi[y_{j,k}, q] \le -\chi[x^{(k)}, q]$. Следовательно, $\chi[y^{(k)}, q] \le -\chi[x^{(k)}, q]$. Таким образом,

$$\chi[y^{(k)}, q] + \chi[x^{(k)}, q] \le 0. \tag{10}$$

С другой стороны, как известно, скалярное произведение любых двух решений $x^{(i)}, y^{(j)}$, $i,j = \overline{1,n}$, есть число, отличное от нуля, в частности, $(x^{(k)}, y^{(k)}) = c$, $c \ne 0$. Поэтому из неравенства $|x^{(k)}||y^{(k)}| \ge |c|$, переходя к обобщенным показателям, имеем

$$\chi[y^{(k)}, q] + \chi[x^{(k)}, q] \ge 0. \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем (8). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Сопряженная система для обобщенно-правильной относительно* $q(t) \in Q$ *линейной системы есть также обобщенно-правильная линейная система относительно* $q(t)$.

Доказательство. Если система (1) — обобщенно-правильная относительно $q(t)$, то имеется фундаментальная система решений $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, для которой в силу теоремы 1 выполняется равенство (9). Следовательно, для фундаментальной системы решений $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ сопряженной системы (7) в силу (8) имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \chi[y^{(i)}, q] = -\sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)}, q] = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} [-SpA(\tau)]d\tau = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} Sp[-A^T(\tau)]d\tau.$$

Таким образом, сопряженная система — обобщенно-правильная относительно $q(t)$. Теорема 3 доказана.

Лемма 2. *Если взаимно-сопряженные системы* (1) *и* (7) *имеют фундаментальные системы* $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ *и* $y^{(1)},\dots,y^{(n)}$, *для которых при любом* $k \in \{1,\dots,n\}$ *выполняется равенство* (8), *то существует точный предел* (6).

Доказательство. В силу обобщенного неравенства Ляпунова (2) имеют место неравенства

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau \le \sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)},q], \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} Sp[-A^T(\tau)]d\tau \le \sum_{i=1}^{n} \chi[y^{(i)},q].$$

Складывая почленно эти неравенства, в силу (8) имеем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} Sp[-A^T(\tau)]d\tau \le 0.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau \le \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau.$$

Поэтому существует точный предел (6). Лемма 2 доказана.

Теорема 4. *Если взаимно-сопряженные системы* (1) *и* (7) *имеют фундаментальные системы* $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ *и* $y^{(1)},\dots,y^{(n)}$, *для которых выполняется равенство* (8), *то системы* (1) *и* (7) *— обобщенно-правильные относительно* $q(t) \in Q$.

Доказательство. В силу леммы 2 существует точный предел (6). Если допустить, что системы (1) и (7) не являются обобщенно-правильными относительно $q(t) \in Q$, то имеют место строгие неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \chi[x^{(i)},q] > \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau, \qquad \sum_{i=1}^{n} \chi[y^{(i)},q] > \lim_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} Sp[-A^T(\tau)]d\tau.$$

Складывая почленно эти неравенства и учитывая (8), получаем противоречие $0 < 0$. Теорема 4 доказана.

Пусть $\sigma(\chi,q) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \chi[y^{(i)},q]$ — сумма обобщенных показателей относительно $q(t) \in Q$ фундаментальной системы решений $x^{(1)},\dots,x^{(n)}$ системы (1).

Определение 3. Фундаментальная система решений и соответствующая фундаментальная матрица называются *нормальными относительно* $q(t) \in Q$, если сумма их обобщенных показателей является наименьшей по сравнению с другими фундаментальными системами решений.

Для нормальной фундаментальной системы решений, т.е. для нормального базиса пространства решений системы (1), сумма $\sigma(\chi,q)$ обозначается через $\sigma(q)$. Таким образом, $\sigma(q) = \min \sigma(\chi,q)$. Здесь минимум всегда существует, так как совокупность обобщенных показателей относительно $q(t)$ системы (1) образует конечное множество.

Отметим, что обобщенные показатели нормальной фундаментальной системы решений не зависят от выбора нормальной фундаментальной системы решений.

Определение 4. Обобщенные показатели нормальной фундаментальной системы решений называются *обобщенными показателями Ляпунова системы* (1) *относительно* $q(t)$ и располагаются в следующем порядке $-\infty < \lambda_n(q) \le \ldots \le \lambda_1(q) < +\infty$, $\lambda_1(q)$ называется *старшим обобщенным показателем* системы (1), $\lambda_n(q)$ — *младшим верхним обобщенным показателем*. Обобщенные показатели сопряженной системы (7) обозначаются через $\mu_i(q)$, $i = \overline{1,n}$, но в силу удобства располагаем их в обратном порядке, т.е. $-\infty < \mu_1(q) \le \ldots \le \mu_n(q) < +\infty$.

Определение 5. *Обобщенным коэффициентом Ляпунова относительно* $q(t)$ называется число

$$\Lambda(q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(q) - \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{q(t)} \int\limits_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau.$$

Из теоремы 1 следует, что всегда $\Lambda(q) \geq 0$. Если $\Lambda(q) = 0$, то система (1) является обобщенно-правильной относительно $q(t)$.

Определение 6. *Обобщенным коэффициентом Перрона* называется число

$$\Pi(q) = \max_i \{\lambda_i(q) + \mu_i(q)\}.$$

Теорема 5. (Обобщение теоремы Перрона) *Для того чтобы система* (1) *была обобщенно-правильной относительно* $q(t)$*, необходимо и достаточно, чтобы* $\Pi(q) = 0$.

Доказательство. Доказательство следует из теорем 2, 4 и определения 6. Теорема 5 доказана.

Замечание 1. Название «обобщенно-правильные системы» использовано в работе [4]. В этой работе асимптотика решений определяется функцией вида $\exp \int\limits_0^t \varrho(\tau)d\tau$ и рассматриваются системы с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами па полуоси $t \geq 0$ [4, с. 575]. При этом в некотором подклассе линейных систем с ограниченными коэффициентами получены обобщения известных признаков правильности [4, последний абзац с. 590].

Замечание 2. Название «обобщенные показатели Ляпунова» использовано в работах [5, 6]. Как следует из определения, приведенного в работе [5], показатели определяются с помощью эндоморфизма метризованного абстрактного векторного расслоения, который построен в работе [7], т.е. рассматривается классический случай, когда $q(t) = t$. В работе [6] установлены типичные свойства этих показателей в данном определенном классе.

Замечание 3. Если $q(t) = t$, то обобщенные коэффициенты Ляпунова и Перрона превращаются в обычные коэффициенты Ляпунова и Перрона. Небольшая история применения некоторых асимптотических характеристик в решении задачи экспоненциальной устойчивости имеется в обзоре работы [8], см. также [9–12].

Библиографический список

1. *Ляпунов А.М.* Собр. соч.: В 2 т. М.; Л., 1956. Т. 2.

2. *Изобов Н.А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники (мат. анализ): В 12 т. М., 1974. Т. 12. С. 71–146.

3. *Алдибеков Т.М.*Об оценке роста решений системы дифференциальных уравнений // Математический журн. Алматы, 2001. Т. 1, № 2. С. 10–14.

4. *Былов Б.Ф.* Обобщенно-правильные системы // Диф. уравнения. 1971. Т. 7, № 4. С. 575–591.

5. *Фодор Я.* Типичное свойство обобщенных показателей // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, № 6. С. 1094.

6. *Фодор Я.* Типичное свойство обобщенных показателей // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, № 12. С. 2180–2181.

7. *Миллионщиков В.М.* Показатели Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Мат. заметки. 1985. Т. 38, вып. 1. С. 92–109.

8. *Изобов Н.А.* Экспоненциальная устойчивость по линейному приближению // Диф. уравнения. 2001. Т. 37, № 8. С. 1011–1027.

9. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1966.

10. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

11. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве. М., 1970.

12. *Алдибеков Т.М.* Аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению // Диф. уравнения. 2006. Т. 42, № 6.

УДК 517.984

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПРОСТЕЙШЕМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

М.Ш. Бурлуцкая

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: burlutskaya@math.vsu.ru

На простейшем геометрическом графе из двух ребер, содержащем цикл, описан класс интегральных операторов с областью значений, удовлетворяющей условию непрерывности в узле графа. Установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в тригонометрический ряд Фурье.

Ключевые слова: интегральный оператор, геометрический граф, инволюция, разложение по собственным и присоединенным функциям, равносходимость.

The Theorem on Equiconvergence for the Integral Operator on Simplest Graph with Cycle

M.Sh. Burlutskaya

The paper deals with integral operators on the simplest geometric two-edge graph containing the cycle. The class of integral operators with range of values satisfying continuity condition into internal node of graph is described. The equiconvergence of expansions in eigen- and adjoint functions and trigonometric Fourier series is established.

Key words: integral operator, geometric graph, involution, the expansions in eigen and associated functions, equiconvergence.

Рассматривается геометрический граф Γ, состоящий из двух ребер, одно из которых образует петлю-цикл. Ранее изучались дифференциальные операторы первого порядка на таком графе. В частности, исследовались вопросы о равносходимости разложений по собственным функциям и в тригонометрический ряд Фурье. Оказалось, что если на ребре, не входящем в цикл, задан оператор чистого дифференцирования y', то равносходимость не имеет места. Если же на этом ребре вместо y' взять функционально-дифференциальный оператор с инволюцией вида $l[y] = \alpha y'(x) + \beta y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x)$, то равносходимость установлена [1].

Исследование подобных вопросов для интегральных операторов представляет собой активно развивающееся направление (напр., [2–4]). В данной работе описывается класс интегральных операторов на Γ, область значений которых удовлетворяет условию непрерывности в узле графа и обращение которых приводит к операторам, обобщающим уже изученные ранее. Устанавливается равносходимость разложений по собственным функциям заданного оператора и в тригонометрический ряд Фурье.

1. Опишем структуру интегрального оператора на графе Γ. Параметризуя каждое ребро графа отрезком $[0,1]$, зададим интегральный оператор как оператор в пространстве вектор-функций

$$y(x) = Af(x) = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (T — знак транспонирования). От $y(x)$ требуем непрерывности на всем Γ, в том числе и узле, т.е требуем $y_1(0) = y_1(1) = y_2(0)$, что накладывает определенные условия на ядро оператора. Определение структуры интегрального оператора опирается на следующую теорему.

Теорема 1 (А.П. Хромов[5]). *Если $A_1 f = \int_0^1 A_1(x,t)f(t)\,dt$ — произвольный оператор с кусочно-непрерывным ядром, $g(x) \in C[0,1]$, и $g(0) \neq g(1)$, то область значения оператора*

$$Af(x) = \int_0^1 A_1(x,t)f(t)\,dt + g(x)\int_0^1 \nu(t)f(t)\,dt,$$

где $\nu(t) = \dfrac{A_1(1,t) - A_1(0,t)}{g(0) - g(1)}$, удовлетворяет соотношению $y(0) = y(1)$.

Пусть $\widetilde{A}_1(x,t)$, $\widetilde{A}_2(x,t)$ непрерывно дифференцируемы по первой и непрерывны по второй компоненте соответственно при $t \neq x$ и $t \neq 1-x$, причем $\widetilde{A}_k(x,x) \equiv 1$ (дополнительные условия гладкости будут приведены позже).

На ребре-цикле зададим интегральный оператор следующим образом:

$$y_1(x) = A_1 f_1(x) = \int\limits_0^x \widetilde{A}_1(x,t) f_1(t)\,dt + g_1(x) \int\limits_0^1 \nu(t) f_1(t)\,dt,$$

где $g_1(x)$ и $\nu(t)$ определяются через $\widetilde{A}_1$, так же как в теореме 1. Согласно теореме 1, $y_1(0) = y_1(1)$.

На втором ребре графа положим $y_2(x) = \int\limits_0^{1-x} \widetilde{A}_2(1-x,t) f_2(t)\,dt + c_2 g_2(x)$ (ядро выбираем в таком виде для того, чтобы при обращении получить оператор, главная часть которого содержит $y_2'(1-x)$). Предполагаем, что $g_2(x) \in C[0,1]$. Константу c_2 найдем из условия $y_2(0) = y_1(0)$. Требуя $g_2(0) \neq 0$, получим $c_2 = \big(A_1 f_1\big|_{x=1} - \widetilde{A}_2 f_2\big|_{x=0}\big)/g_2(0)$, откуда

$$y_2(x) = A_2 f_2(x) + \frac{g_2(x)}{g_2(0)} \int\limits_0^1 A_1(1,t) f_1(t)\,dt,$$

где $A_2 f_2(x) = \int\limits_0^{1-x} \widetilde{A}_2(1-x,t) f_2(t)\,dt - \frac{g_2(x)}{g_2(0)} \int\limits_0^1 \widetilde{A}_2(1,t) f_2(t)\,dt$.

Таким образом, интегральный оператор на графе есть оператор (1) с ядром

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} A_1(x,t) & 0 \\ \frac{g_2(x)}{g_2(0)} A_1(1,t) & A_2(x,t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A_1(x,t) = \varepsilon(x,t)\widetilde{A}_1(x,t) + g_1(x)\nu(t)$, $A_2(x,t) = \varepsilon(1-x,t)\widetilde{A}_2(1-x,t) - \frac{g_2(x)}{g_2(0)}\widetilde{A}_2(1,t)$; $\varepsilon(x,t) = 1$, если $x \geq t$, $\varepsilon(x,t) = 0$, если $x \leq t$. Область значений оператора (1) удовлетворяет соотношениям

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \tag{3}$$

2. В дальнейшем нам понадобится знать структуру оператора A^{-1}. Займемся обращением оператора A. Предполагаем, что выполнены следующие условия: компоненты ядра $A(x,t)$, а также $\frac{\partial^k}{\partial x^k} A(x,t)$ $(k = 1,2)$, $\frac{\partial}{\partial t} A(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} A(x,t)$ непрерывны, кроме, может быть, линий $t = x$, $t = 1-x$.

Лемма 1. *Если $y = Af$, то*

$$Py'(x) = f(x) + Bf(x), \tag{4}$$

где $Py'(x) = P_1 y'(x) + P_2 y'(1-x)$, $P_1 = \mathrm{diag}(1,0)$, $P_2 = \mathrm{diag}(0,-1)$, $Bf(x) = \int\limits_0^1 B(x,t) f(t)\,dt$, $B(x,t) = P_1 A_x'(x,t) + P_2 A_x'(1-x,t) = PA_x'(x,t)$.

Доказательство. Дифференцируя (1), где $A(x,t)$ есть ядро (2), получим

$$y'(x) = P_1 f(x) + P_2 f(1-x) + \int\limits_0^1 A_x'(x,t) f(t)\,dt, \tag{5}$$

где $P_1 = \mathrm{diag}(1,0)$, $P_2 = \mathrm{diag}(0,-1)$. Меняя в (5) x на $1-x$, получим уравнение, которое вместе с (5) дает

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ y'(1-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f(1-x) \end{pmatrix} + \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} A_x'(x,t) & 0 \\ A_x'(1-x,t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ f(1-t) \end{pmatrix} dt. \tag{6}$$

Матрица $\widehat{P}$ из P_i в (6) обратима, и обратная ей совпадает с $\widehat{P}$. Преобразуя (6), придем к системе, первое уравнение в которой и есть (4). $\square$

Теперь представим оператор B в пространстве $L_2^2[0,1]$ в виде $B = W + V$, где $\|W\| < 1$, а V — конечномерный оператор и $Vf(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} (f,\psi_k)\varphi_k(x)$, где $\{\psi_k\}_1^m$, $\{\varphi_k\}_1^m$ — линейно независимые системы в пространстве функций размерности 2, причем компоненты $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ достаточно гладкие функции, $(f,\psi_k) = \sum\limits_{j=1}^{2}\int\limits_0^1 f_j(t)\psi_k^j(t)\,dt$, $\psi_k^j(t)$ — компоненты $\psi_k(t)$. Тогда из (4) получим

$$(E+W)^{-1}Py'(x) = f(x) + (E+W)^{-1}Vf(x). \tag{7}$$

В силу леммы 14 из работы [4] для существования A^{-1} необходимо и достаточно существование отличного от нуля минора Δ порядка m матрицы $M = \begin{pmatrix} E + (\widetilde{\varphi},\psi)^T \\ \int\limits_0^1 A(0,t)\widetilde{\varphi}^T(t)\,dt \end{pmatrix}$ (здесь E — единичная матрица $m\times m$, $(\widetilde{\varphi},\psi) = (\widetilde{\varphi}_j,\psi_k)_1^m$, $\widetilde{\varphi}_k = (E+W)^{-1}\varphi_k$, $\widetilde{\varphi}^T = (\widetilde{\varphi}_1,\ldots,\widetilde{\varphi}_m)$). Считаем для определенности, что Δ образован из первых m строк.

Теорема 2. *Пусть A^{-1} существует. Тогда*

$$A^{-1}y = (E+W)^{-1}Py'(x) - \frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^{m}\big((E+W)^{-1}Py',\psi_j\big)\Delta_{jk}\widetilde{\varphi}_k(x), \tag{8}$$

$$Sy(0)+Ty(1)=0, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где Δ_{jk} — алгебраические дополнения элементов определителя Δ.

Доказательство. Так же как в лемме 15 из работы [4], получаем для A^{-1} представление (8) с «естественными» краевыми условиями:

$$\int\limits_0^1 A(0,t)A^{-1}y(t)\,dt = y(0). \tag{10}$$

Условия (3) для $y = Af$ в матричной форме имеют вид (9). Покажем эквивалентность для оператора A^{-1} соотношений (9) и (10).

Согласно лемме 1 из работы [6], если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — линейно независимые аддитивные функционалы в линейном векторном пространстве L, то существуют x_1 и x_2 такие, что $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(i,j=1,2$, δ_{ij} — символ Кронекера). Аналогично может быть доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть f_1, f_2, f_3 — линейно независимые аддитивные функционалы в линейном векторном пространстве L. Существуют $x_1,x_2,x_3 \in L$ такие, что $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$.*

Доказательство. Как отмечено, для f_1 и f_2 существуют y_1 и y_2 такие, что $f_i(y_j) = \delta_{ij}$ $(i,j=1,2)$. Рассмотрим матрицу $G(y_3) = (f_i(y_j))_{j,i=1}^3$, где $y_3 = y$ — произвольно. Так как определитель $\det G(y) = -f_3(y_1)f_1(y) - f_3(y_2)f_2(y) + f_3(y)$ есть линейная комбинация $f_i(y)$, то в силу линейной независимости f_1, f_2, f_3, существует y_3 такой, что $G(y_3)$ неособая. Пусть $\Gamma = G^{-1}(y_3)$. Тогда, учитывая аддитивность функционалов, имеем $E = \Gamma G(y_3) = (f_i(x_j))_{j,i=1}^3$, где $x_i = \gamma_{i1}y_1 + \gamma_{i2}y_2 + \gamma_{i3}y_3$. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 2. Обозначим через $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ множества вектор-функций из $W_2^2[0,1]$, удовлетворяющих соотношениям (10) и (9) соответственно. Согласно построению, областью определения оператора A^{-1} является $\mathfrak{L}_1$. Так как область значений оператора A удовлетворяет (9), то $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2$. Докажем обратное включение. Положим $(f_1(y), f_2(y))^T = Sy(0)+Ty(1)$. Функционалы f_1 и f_2 линейно независимы. Для любого $y \in \mathfrak{L}_2$ имеем $f_1(y)=0$, $f_2(y)=0$. В (10) количество условий не превышает 2. Рассмотрим три случая.

1. Пусть в (10) имеем два линейно независимых краевых условия: $f_3(y)=0$, $f_4(y)=0$. Покажем, что f_1 и f_2 есть линейные комбинации f_3 и f_4. Действительно, если f_1, f_3 и f_4 линейно независимы, то по лемме 2 существует x_1 такой, что $f_1(x_1)=1$, $f_3(x_1)=f_4(x_1)=0$, откуда $x_1 \in \mathfrak{L}_1$. Но так как $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2$, то $x_1 \in \mathfrak{L}_2$, и, следовательно, $f_1(x_1)=0$. Получили противоречие. Таким образом,

f_1 есть линейная комбинация f_3 и f_4. Аналогичное утверждение доказывается для f_2. Итак, имеем преобразование $f_1 = \alpha_{11}f_3 + \alpha_{12}f_4$, $f_2 = \alpha_{21}f_3 + \alpha_{22}f_4$, с неособой (в силу линейной независимости f_1 и f_2) матрицей. Отсюда $\mathfrak{L}_2 \subseteq \mathfrak{L}_1$, что означает эквивалентность условий (9) и (10).

2. Пусть (10) дает одно условие: $f_3(y) = 0$. Тогда если f_k (где k одно из чисел 1, 2) и f_3 линейно независимы, то по лемме 1 из работы [6] существует x_1 такой, что $f_k(x_1) = 1$, $f_3(x_1) = 0$. Отсюда $x_1 \in \mathfrak{L}_1$ и, следовательно, $x_1 \in \mathfrak{L}_2$, и $f_k(x_1) = 0$. Снова получили противоречие. Таким образом, $f_k(y) = \alpha_k f_3(y)$, откуда следует линейная зависимость f_1 и f_2, что невозможно. Значит, случай 2) не может иметь место.

3. Если (10) не содержит ни одного условия, то $\mathfrak{L}_2$ оказывается собственным подпространством $\mathfrak{L}_1$, что снова противоречит условию. Значит и этот случай невозможен. □

Используя интегрирование по частям, так же как в работе [2, теорема 2] получим

Теорема 3. *Для оператора A^{-1} справедливо представление*

$$A^{-1}y(x) = Py'(x) + a_1(x)y(0) + a_2(x)y(1) + a_3(x)y(x) + a_4(x)y(1-x) + \int_0^1 a(x,t)y(t)\,dt, \tag{11}$$

$$Sy(0) + Ty(1) = 0, \tag{12}$$

где $a_i(x)$, $a_i'(x)$, $i = \overline{1,4}$, — непрерывные матрицы-функции, каждая компонента матрицы $a(x,t)$ имеет тот же смысл, что и компоненты $A_x(x,t)$, с той лишь разницей, что теперь по t предполагается лишь непрерывность, S и T — постоянные матрицы 2×2.

3. Получим краевую задачу для резольвенты $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ оператора A. Пусть $y = (E - \lambda A)^{-1}Af$. Тогда y удовлетворяет условиям (12) и интегро-дифференциальной системе:

$$A^{-1}y - \lambda y = f. \tag{13}$$

Используя представление (11) для A^{-1}, замену в (13) x на $1-x$ и полагая $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, $z(x) = (z_1(x)^T, z_2(x)^T)^T$, получим

$$Qz'(x) + \widetilde{P}_1(x)z(0) + \widetilde{P}_2(x)z(1) + \widetilde{P}_3(x)z(x) + \widetilde{N}z = \lambda z(x) + \widetilde{m}(x), \tag{14}$$

где $Q = \begin{pmatrix} P_1 & -P_2 \\ P_2 & -P_1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{P}_1(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{P}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_2(1-x) & a_1(1-x) \end{pmatrix}$, $\widetilde{P}_3(x) = \begin{pmatrix} a_3(x) & a_4(x) \\ a_4(1-x) & a_3(1-x) \end{pmatrix}$, $\widetilde{N}z = \int_0^1 \widetilde{N}(x,t)z(t)\,dt$, $\widetilde{N}(x,t) = \operatorname{diag}(a(x,t), a(1-x, 1-t))$, $\widetilde{m}(x) = (f(x)^T, f(1-x)^T)^T$.

Так как $y(0) = z_1(0) = z_2(1)$, $y(1) = z_1(1) = z_2(0)$, то краевые условия (12) примут вид $Sz_1(0) + Tz_2(0) = 0$, $Sz_2(1) + Tz_1(1) = 0$, или

$$\widetilde{M_0}z(0) + \widetilde{M_1}z(1) = 0, \quad \text{где } \widetilde{M_0} = \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & S \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Отсюда следует

Теорема 4. *Если λ таково, что резольвента R_λ оператора A существует, и $y(x) = R_\lambda f(x)$, то вектор $z(x) = (y_1(x), y_2(x), y_1(1-x), y_2(1-x))^T$ является решением задачи* (14)–(15). *И обратно, если $z(x)$ удовлетворяет* (14)–(15), *и задача* (14)–(15) *невырождена, то R_λ существует, и $R_\lambda f(x) = z_1(x)$, где $z_1(x)$ — вектор из первых двух компонент $z(x)$.*

Далее проводится преобразование системы (14)–(15), аналогично тому, как это делалось, например, в работе [4]. Все собственные значения ω_j матрицы Q^{-1} различны и отличны от нуля (числа $1, -1, i, -i$). Поэтому существует неособая матрица Γ, такая что $\Gamma^{-1}Q^{-1}\Gamma = D = \operatorname{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$. Положим $P_i(x) = \Gamma^{-1}Q^{-1}\widetilde{P}_i(x)\Gamma$, $H_0(x) = \operatorname{diag}\,(h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_4(x))$, где $h_i(x) = \exp\left\{-\int_0^x p_{ii}(t)\,dt\right\}$ и $p_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $P_3(x)$; $H_1(x)$ — матрица с нулями на главной диагонали, являющаяся единственным решением матричного уравнения:

$$H_0'(x) + P_3(x)H_0(x) + (H_1(x)D - DH_1(x)) = 0.$$

Так как элементы матрицы $P_3(x)$ из пространства $C^1[0,1]$, то элементы $H_1(x)$ из $C^1[0,1]$, а $H_0(x)$ из $C^2[0,1]$, причем $h_i(x) \neq 0$.

Лемма 3. *Существует матричная функция $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональна, такая, что преобразование $z(x) = \Gamma H(x,\lambda)v(x)$ приводит систему* (14)–(15) *к виду*

$$v'(x) + P_1(x,\lambda)v(0) + P_2(x,\lambda)v(1) + P_3(x,\lambda)v(x) + N_\lambda v = \lambda Dv(x) + m(x,\lambda), \tag{16}$$

$$U(v) = M_{0\,\lambda}v(0) + M_{1\,\lambda}v(1) = 0, \tag{17}$$

где $P_1(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_1(x)H(0,\lambda)$, $P_2(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_2(x)H(1,\lambda)$, $P_3(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda) \times \times \left[H_1'(x) + P_3(x)H_1(x)\right]$, $N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)D\Gamma^{-1}\widetilde{N}\Gamma H(x,\lambda)$, $M_{0\,\lambda} = \widetilde{M}_0\Gamma H(0,\lambda)$, $M_{1\,\lambda} = \widetilde{M}_1\Gamma H(1,\lambda)$, $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x)$, $m(x) = D\Gamma^{-1}\widetilde{m}(x)\Gamma$.

4. Далее используются методы и результаты из работы [4]. Рассматриваются следующие краевые задачи:

$$w'(x) = \lambda Dw(x) + m(x), \quad U(w) = M_{0\,\lambda}w(0) + M_{1\,\lambda}w(1) = 0,$$

$$w'(x) = \lambda Dw(x) + m(x), \quad U_0(w) = w(0) - w(1) = 0,$$

где $m(x)$ — произвольная вектор-функция с компонентами из $L[0,1]$.

Исследуя решения $R_{1\lambda}m$ и $R_{2\lambda}m$ этих задач, сравнивая их асимптотическое поведение, а также сравнивая эти решения с решением задачи (16)–(17), придем к следующему результату (аналогично [4, лемма 25]).

Лемма 4. *Если компоненты $f(x)$ из $L[0,1]$, $v(x,\lambda)$ — решение задачи* (16)–(17), *$m(x)$ — та же функция, что и в лемме* 3, *то*

$$\lim_{r\to\infty}\left\| \int\limits_{|\lambda|=r} \left[H(x,\lambda)v(x,\lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}H_0^{-1}(x)m(x)\right]d\lambda \right\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0, \quad \varepsilon \in (0,1/2),$$

где $\|\cdot\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}$ — норма в $C[\varepsilon,1-\varepsilon]$.

Теорема 5 (равносходимости). *Пусть A^{-1} существует, ядро $A(x,t)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в п. 2. Тогда для любой функции $f(x)$ с компонентами из $L[0,1]$*

$$\lim \left\|S_r(f,x) - (\sigma_r(f_1,x), \sigma_r(f_2,x))^T\right\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел λ_k, попадающих в круг $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f_j,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f_j по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, включающая слагаемые, для которых $|2\pi k| < r$.

Доказательство. Имеем

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f\,d\lambda, \qquad \sigma_r(f_j,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_{0\lambda}f_j\,d\lambda,$$

где $R_\lambda(A)$ — резольвента оператора A, $y = R_{0\lambda}f_j$ — решение скалярной краевой задачи $y' = \lambda y + f_j$, $y(0) = y(1)$.

Согласно теореме 4 и лемме 3, $R_\lambda(A)f = z_1(x) = [\Gamma H(x,\lambda)v(x,\lambda)]_1$ (где $[\Gamma H(x,\lambda)v(x,\lambda)]_1$ означает вектор из первых двух компонент $\Gamma H(x,\lambda)v(x,\lambda)$). Учитывая лемму 4, имеем

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} [\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}H_0^{-1}(x)m(x)]_1\,d\lambda + o(1),$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Полагая $\Gamma = (\gamma_{ij})$, $\Gamma^{-1} = (\delta_{ij})$, и учитывая, что $(R_{2\lambda}m)_k = R_{0,\lambda\omega_k} m_k$, для первой компоненты $S_r(f,x)$ получим:

$$(S_r(f,x))_1 = \sum_{k=1}^{4} \gamma_{1k} h_k \sigma_{r|\omega_k|}(h_k^{-1}\varphi_k, x) + o(1),$$

где $\varphi_k = \delta_{k1} f_1(x) + \delta_{k2} f_2(x) + \delta_{k3} f_1(1-x) + \delta_{k4} f_2(1-x)$. По теореме Штейнгауза [7, гл.1, §4] и принципу локализации $\sigma_{r|\omega_k|}(h_k^{-1}\varphi_k, x) = h_k^{-1}(x)\sigma_{r|\omega_k|}(\varphi_k, x) + o(1)$. Отсюда

$$(S_r(f,x))_1 = \sum_{k=1}^{4} \gamma_{1k} \sigma_{r|\omega_k|}(\varphi_k, x) + o(1), \tag{18}$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Так как $|\omega_k| = 1$, и γ_{ij}, δ_{ij} — элементы взаимнообратных матриц, то (18) переходит в

$$(S_r(f,x))_1 = \sigma_r(f_1, x) + o(1).$$

Аналогично можно показать, что $(S_r(f,x))_2 = \sigma_r(f_2, x) + o(1)$. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 06-01-00003, 07-01-00397) *и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ* (*проект НШ*-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл // Диф. уравнения. 2007. Т. 43, №12. С. 1597–1605.

2. *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сборник. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.

3. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

4. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сборник. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.

5. *Хромов А.П.* Интегральный оператор с периодическими краевыми условиями// Совр. методы теории краевых задач: Материалы Воронеж. весен. мат. школы. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2008. С. 225–226.

6. *Хромов А.П.* Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: сб. статей. М.: Изд-во АФЦ, 1999. С. 255–266.

7. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.

УДК 513.6

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЛЕРАНТНЫХ РАССЛОЕНИЙ

И.А. Кляева

Филиал ФГОУ ВПО «ПАГС им. П.А.Столыпина» в г.Балаково,
кафедра прикладной информатики и естественно-научных дисциплин
E-mail: lana331@rambler.ru

В статье изложена теоретическая база для построения спектральной последовательности толерантных расслоений. А именно, приведен ряд важных свойств сингулярных кубов в толерантных расслоениях, доказана теорема о действии фундаментальной группы базы на группе гомологий слоя толерантного расслоения. Согласно общей теории спектральных последовательностей получены первый и второй члены спектральной последовательности толерантных расслоений.

Ключевые слова: толерантное пространство; толерантное расслоение; группы гомологий; спектральная последовательность.

Spectral Sequences of Fibre Tolerance Spaces

I.A. Klyaeva

The paper presents the theoretical base for the construction of spectral sequences of tolerant exfoliations. Namely, the authors give a number of important qualities of singular cubes in tolerant exfoliations. The fundamental base group operation on the group of fiber homology of tolerant exfoliation theorem is proved. According to the general theory of spectral sequences the first and the second terms of spectral sequence of tolerant exfoliations are got.

Key words: tolerant space; tolerant exfoliation; group of homology; spectral sequence.

Толерантные пространства были определены в работе Зимана [1] как пара вида (X,τ), где X — множество, а $\tau \subset X \times X$ — отношение толерантности, то есть рефлексивное и симметричное отношение. Толерантные пространства можно рассматривать как квазигеометрические объекты, в которых отсутствует предельный переход. Это позволяет перенести значительную часть алгебро-топологической техники [2] как на континуальные, так и на дискретные (в том числе и конечные) множества с толерантной структурой.

Толерантные пространства и отображения, сохраняющие толерантность, образуют категорию $\mathbb{T}_0$, в которой имеются прямые (декартовы) произведения.

В гомотопической теории толерантных пространств роль единичного отрезка параметров гомотопии играет бесконечная серия толерантных отрезков (I_m, ι_m) длины m $(m \in \mathbb{N})$, где

$$I_m = \left\{ \frac{k}{m} \,|k = \overline{0,m} \right\}, \quad (\forall\, k,l = \overline{0,m}) \qquad \frac{k}{m} \iota_m \frac{l}{m} \Leftrightarrow |k-l| \leqslant 1.$$

Два толерантных отображения $f_0,f_1{:}(Y,\theta) \to (X,\tau)$ называют толерантно гомотопными и записывают $f_0 \sim f_1$, если существует $m \in \overset{n}{\times}\mathbb{N}$ и толерантное отображение $F : Y \times I_m \to X$ такое, что

$$F|(Y\times 0) = f_0, \quad F|(Y \times 1) = f_1.$$

Отображение F называется толерантной гомотопией. Если $m=1$, то F называется простой толерантной гомотопией и записывается $f_0 \approx f_1$.

Определение 1. Толерантное отображение $p : (E,\overline{\tau}) \to (B,\tau)$ называется *толерантным расслоением* (см. [3]), если для всякой толерантной гомотопии $F : Y \times I_m \to B$ имеется накрывающая гомотопия $\overline{F} : Y \times I_m \to E$, такая, что $p \circ \overline{F} = F$, при условии, что начальное отображение $f_0 = F|(Y\times 0)$ имеет накрывающее отображение $\overline{f_0} = \overline{F}|(Y \times 0)$ такое, что $p \circ \overline{f_0} = f_0$. Пространства $(E,\overline{\tau})$ и (B,τ) называются соответственно *пространством* и *базой* толерантного расслоения.

Для построения гомологической спектральной последовательности толерантного расслоения наиболее удобно пользоваться пунктированными толерантными кубическими сингулярными гомологиями, теория которых изложена в работе [4] и основана на следующем определении.

Определение 2. *Толерантным кубом* размера $\overline{m} = (m_1,\ldots,m_n) \in \overset{n}{\times}\mathbb{N}$ называется толерантное пространство $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) = \left(\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} I_{m_i},\ \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} \iota_{m_i} \right)$, а любое толерантное отображение $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X,\tau)$ называется *n-мерным толерантным сингулярным кубом* (ТС кубом) пространства (X,τ). ТС куб называется *пунктированным*, если $u| \overset{n}{\times}\{0,1\} = x_0$ где x_0 — отмеченная точка в X. ТС куб u называется *вырожденным*, если u вырожден по последнему аргументу, то есть не зависит от этого аргумента.

Пусть $u : I_{(m_1,\ldots,m_n)} \to X$ — ТС куб и $(h_1,\ldots,h_n) \in \overset{n}{\times}(\mathbb{N}\cup\{0\})$. Определим ТС куб

$$d\,(h_1,\ldots,h_n)\,(u) : I_{(M_1,\ldots,M_n)} \to X, \quad M_i = 2^{h_i}\,(m_i+1) - 1, \quad i = \overline{1,n},$$

следующей формулой

$$d\,(h_1,\ldots,h_n)\,(u) \left(\left(\frac{k_i}{M_i} \right)_{i=\overline{1,n}} \right) = u \left(\left(\frac{\left[k_i/2^{h_i}\right]}{m_i} \right)_{i=\overline{1,n}} \right),$$

где скобки [ ] означают целую часть числа. Если $h_1 = \ldots = h_n = h$, то договоримся обозначать $d\,(h,\ldots,h)\,(u) = u^{\vee h}$. Для ТС куба $u : \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} I_{m_i} \to X$, фиксированного индекса $j \in \{1,\ldots,n\}$ и натурального числа $M_j \geqslant m_j$ определим продление ТС куба по j-й координате как новый ТС куб $u_{j,M_j} : \left(\underset{i=1}{\overset{j-1}{\times}} I_{m_i}\right) \times I_{M_j} \times \left(\underset{i=j+1}{\overset{n}{\times}} I_{m_i}\right) \to X$ определенный формулой

$$u_{j,M_j}\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{k_j}{M_j},\ldots,\frac{k_n}{m_n} \right) = \begin{cases} u\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,\frac{k_j}{m_j},\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right), & k_j = \overline{0,m_j}, \\ u\left(\frac{k_1}{m_1},\ldots,1,\ldots,\frac{k_n}{m_n}\right), & k_j = \overline{m_j,M_j}. \end{cases}$$

Для построения спектральной последовательности будет необходим ряд важных свойств толерантных расслоений.

Предложение 1. *Пусть в пунктированном толерантном расслоении*

$$p : ((E, \overline{\tau}), x_0) \to ((B, \tau), b_0), \quad b_0 \in B, \quad x_0 \in p^{-1}(b_0) = F \subset E$$

база (B, τ) *и слой* $(F, \overline{\tau})$ *являются линейно связными толерантными пространствами, тогда и пространство расслоения* $(E, \overline{\tau})$ *и слой* $\left(F_b = p^{-1}(b), \overline{\tau}\right)$ *в любой точке* $b \in B$ *являются линейно связными.*

Доказательство. Линейная связность пространства $(E, \overline{\tau})$ доказывается нетрудно. Доказательство линейной связности $(F_b, \overline{\tau})$ легко сводится к следующему утверждению: если слой $(F_{b_1}, \overline{\tau})$ линейно связный и $b_1 \tau b_2$, то слой $(F_{b_2}, \overline{\tau})$ тоже линейно связный. Последнее утверждение может быть сведено к следующему: если $x \in F_{b_1}$ и $y, y' \in \overline{\tau}\langle x \rangle \cap F_{b_2}$, то существует точка $y'' \in \overline{\tau}\langle x \rangle \cap F_{b_2}$, такая, что $y \;\overline{\tau}\; y'' \;\overline{\tau}\; y'$. Это утверждение доказывается с помощью техники поднятия, основанной на определении 1.

На протяжении всей статьи будем предполагать, что $p : ((E, \overline{\tau}), x_0) \to ((B, \tau), b_0)$ — пунктированное толерантное расслоение с линейно связными (B, τ) и $(F, \overline{\tau})$.

Определение 3. Будем говорить, что ТС куб $u : I_{(m^{(1)}, \ldots, m^{(n)})} \to E$ *имеет вес* $\nu(u) = s$, если ТС куб $p \circ u : I_{(m^{(1)}, \ldots, m^{(n)})} \to B$ вырожден ровно по $t = n - s$ последним аргументам.

Совершенно очевидно, что $0 \leqslant \nu(u) \leqslant \dim\ u$.

Для произвольного пунктированного ТС куба $u : I_{(m_1, \ldots, m_n)} \to E$, зафиксируем число s такое, что $\nu(u) \leqslant s \leqslant n$, обозначим $t = n - s$ и определим два новых ТС куба

$$\mathcal{B}_s(u) : I_{(m^{(1)}, \ldots, m^{(s)})} \to B, \quad \mathcal{F}_s(u) : I_{(m^{(s+1)}, \ldots, m^{(s+t)})} \to F,$$

формулами

$$\mathcal{B}_s(u)\left(\frac{k^{(1)}}{m^{(1)}}, \ldots, \frac{k_i^{(s)}}{m_i^{(s)}}\right) = (p \circ u)\left(\frac{k^{(1)}}{m^{(1)}}, \ldots, \frac{k_i^{(s)}}{m_i^{(s)}}, 0 \ldots, 0\right),$$

$$\mathcal{F}_s(u)\left(\frac{k^{(s+1)}}{m^{(s+1)}}, \ldots, \frac{k_i^{(s+t)}}{m_i^{(s+t)}}\right) = u\left(0, \ldots, 0, \frac{k^{(s+1)}}{m^{(s+1)}}, \ldots, \frac{k_i^{(s+t)}}{m_i^{(s+t)}}\right).$$

Предложение 2. *Для любого пунктированного ТС куба* $u : I_{(m^{(1)}, \ldots, m^{(s)})} \to B$ *существует число* $l(u) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *и пунктированный ТС куб* $w(l(u)) : I_{(M^{(1)}, \ldots, M^{(s)})} \to E$, $M^{(i)} = 2^{(l(u))}(m^{(i)} + 1)$, $i = \overline{1, s}$ *такие, что* $p \circ w(l(u)) = u^{\vee l(u)}$.

Доказательство. Сначала, используя толерантную стягиваемость куба $\left(\overset{s}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i}, \overset{s}{\underset{i=1}{\times}} \iota_{m_i}\right) = (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}})$ и определение 1, показывается существование ТС куба $w' : I_{\overline{m}} \to E$ такого, что $p \circ w' = u$. Отсюда получаем, что $\left\{x_\alpha = w'(\alpha) \middle|\ \alpha \in \overset{s}{\times} \{0, 1\}\right\} \subset F$. Следовательно, все точки x_α могут быть соединены с x_0 толерантными путями w_α. Длины путей w_α можно сделать одинаковыми, равными m. Далее проводим индуктивные построения. Полагая $w^{(0)} = w'$ и $w^{(k+1)} : I_{\left(M_{k+1}^{(1)}, \ldots, M_{k+1}^{(s)}\right)} \to E$, $M_{k+1}^{(i)} = 2^{k+1}\left(m^{(i)} + 1\right) - 1$, для любых $k^{(i)} = \overline{0, M_{k+1}^{(i)}}$ и $i = \overline{1, s}$ получаем

$$w^{(k+1)}\left(\left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}}\right) = \begin{cases} w^{(k)\vee}\left(\left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}}\right), \left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}} \notin \overset{s}{\times} \{0, 1\}; \\ \omega_\alpha\left(\frac{k+1}{m_1}\right), \left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}} = \alpha \in \overset{s}{\times} \{0, 1\}. \end{cases}$$

Теперь следует взять $l(u) = m$, $w(l(u)) = w^m$.

Теорема 1. *Пусть имеются два произольных пунктированных ТС куба*

$$u : I_{(m^{(1)}(u), \ldots, m^{(s)}(u))} \to B, \quad v : I_{(m^{(s)}(v), \ldots, m^{(t)}(v))} \to F,$$

где линейно связные толерантные пространства (B, τ) и $(F, \overline{\tau})$ являются базой и отмеченным слоем пунктированного толерантного расслоения

$$p : ((E, \overline{\tau}), x_0) \to ((B, \tau), b_0), \quad b_0 \in B, \quad x_0 \in p^{-1}(b_0) = F \subset E$$

и пусть $l_1(u)$ и $l_2(u)$ — два неотрицательных целых числа, определяемые в обозначениях предложения 2 следующими формулами:

$$l_1(u) = l(u) = m, \quad l_2(u) = \sum_{i=\overline{1,s}} 2\left[2^{(l_1(u))}(m^{(i)}(u) + 1) - 1\right] + 1.$$

Тогда существует пунктированный ТС куб

$$w = W(u, v) : I_{(M^{(1)}(u),\ldots,M^{(s)}(u),M^{(1)}(v),\ldots,M^{(t)}(v))} \to (E, \overline{\tau}),$$

в котором

$$M^{(i)}(u) = 2^{(l_1(u))}(m^{(i)}(u) + 1) - 1, \ i = \overline{1, s}; \qquad M^{(j)}(v) = 2^{(t \cdot l_2(u))}(m^{(j)}(v) + 1) - 1, \ j = \overline{1, t},$$

и который удовлетворяет следующим свойствам: 1) $\nu(w) \leqslant s$, 2) $\mathcal{B}_s(w) = u^{\vee l_1(u)}$, 3) $\mathcal{F}_s(w) = v^{\vee t \cdot l_2(u)}$, 4) $(\forall j = \overline{1,t})(\forall \varepsilon = \overline{0,1})$ $d^{\varepsilon}_{s+j}(w) = d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s}, \underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t-1})\left(W(u, d^{\varepsilon}_j(v))\right)$, 5) v — вырожденный $\Rightarrow$ w — вырожденный. Здесь ТС куб $d^{\varepsilon}_j(w)$ получается из ТС куба w, когда значение j-го аргумента полагается равным ε.

Доказательство. Индукция по t. При $t = 1$ утверждение теоремы 1 следует из предложения 2. Предполагаем, что теорема верна при $\dim v < t$. Для ТС куба v с $\dim\ v = t$ сначала предполагаем, что v вырожден, то есть $v \equiv d^{\varepsilon}_t$. Тогда следует определить

$$W(u, v) = d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s}, \underbrace{l_2(u),\ldots,l_2(u)}_{t})\left(W(u, d^{\varepsilon}_t(v))\right).$$

Для невырожденного v ТС куб $W(u, v)$ строится рекуррентно по возрастающей цепочке граней куба $I_{(m_1(u),\ldots,m_s(u))}$ с использованием предположения индукции и техники, аналогичной доказательству предложения 1.

Рассмотрим теперь толерантную петлю $\omega : I_{m(\omega)} \longrightarrow B$ с вершиной в точке $b_0 = \omega(0) = \omega(1)$. Обозначим через $\omega^{\wedge} : I_{m(\omega^{\wedge})} \longrightarrow B$ максимальную непродленную часть петли ω, то есть $\omega = (\omega^{\wedge})_{1,m(\omega)}$ и $\omega^{\wedge} = \omega'_{1,m(\omega^{\wedge})} \Rightarrow (\omega^{\wedge})^{\wedge} = \omega^{\wedge}$.

Согласно определению 1 имеется толерантный путь $\overline{\omega^{\wedge}} : I_{m(\omega^{\wedge})} \longrightarrow E$ такой, что $\overline{\omega^{\wedge}}(0) = x_0$, $p \circ \overline{\omega^{\wedge}} = \omega^{\wedge}$. Зафиксируем толерантный путь $\overline{\overline{\omega^{\wedge}}} : I_{m\left(\overline{\overline{\omega^{\wedge}}}\right)} \longrightarrow F$, соединяющий точку $\overline{\omega^{\wedge}}(1)$ с точкой x_0. Тогда произведение путей $w_{\omega^{\wedge}} = \overline{\omega^{\wedge}} * \overline{\overline{\omega^{\wedge}}}$ будет толерантной петлей в E с вершиной в точке x_0 и длины $M(\omega^{\wedge}) = m(\omega^{\wedge}) + m\left(\overline{\overline{\omega^{\wedge}}}\right)$.

Предложение 3. *Пусть $\omega : I_{m(\omega)} \longrightarrow (B, \tau)$ — произвольная толерантная петля с вершиной в точке $b_0 = \omega(0) = \omega(1)$. Пусть $v : I_{(m^{(1)}(v),\ldots,m^{(n)}(v))} \to F$ — произвольный n-мерный пунктированный ТС куб. Тогда существует пунктированный ТС куб $W_{\omega}(v) : I_{M(\omega),M^{(1)}(v),\ldots,M^{(n)}(v)} \longrightarrow (E, \overline{\tau})$, в котором*

$$M(\omega) = m(\omega) + m(\overline{\overline{\omega^{\wedge}}}), \ (\forall\ j = \overline{1,n})\ M^{(j)}(v) = 2^{n \cdot l(\omega)}(m^{(j)}(v) + 1) - 1$$

и который удовлетворяет следующим свойствам:

1) $d^0_1(W_{\omega}(v)) = v^{\wedge n \cdot l(\omega))}$,

2) $p \circ W_{\omega}(v) = \omega_{1,M(\omega)}$,

3) $(\forall j = \overline{1,n})(\forall \varepsilon = \overline{0,1})$ $d^{\varepsilon}_{1+j}(w) = d(0, \underbrace{l(\omega),\ldots,l(\omega)}_{n-1})\left(W_{\omega}(u, d^{\varepsilon}_j(v))\right)$,

4) v — вырожденный ТС куб $\Rightarrow W_{\omega}(v)$ — вырожденный ТС куб,

5) $W_{\omega}(v) = d(0, \underbrace{n2e(\omega),\ldots,n2e(\omega)}_{n})\left((W_{\omega^{\wedge}}(v))_{1,M(\omega)}\right)$, $e(\omega) = m(\omega) - m(\omega^{\wedge})$.

Доказательство. Аналогичное доказательству теоремы 1.

Теорема 2. *Имеется представление Φ фундаментальной группы $\pi(B,b_0)$ базы (B,τ) в группе автоморфизмов $Aut\,(H(F))$ группы гомологий $H(F)$ слоя $(F,\overline{\tau})$.*

Доказательство. Пусть ω – толерантная петля в (B,τ) с вершиной в b_0. На группе $C^\bullet(F)$ нормализованных пунктированных ТС кубических цепей (см.[4]) определим гомоморфизм Φ_ω на свободных образующих

$$\Phi_\omega\left(v + D^\bullet(F)\right) \stackrel{df}{=} d_1^1\left(W_\omega(v)\right) + D^\bullet(F).$$

Этот гомоморфизм обладает псевдоцепным свойством

$$d \circ \Phi_\omega\left(v + D^\bullet(F)\right) = \left(\Phi_\omega \circ \partial\left(v + D^\bullet(F)\right)\right)^{\vee l(\omega)},$$

которое позволяет определить индуцированный гомоморфизм $(\Phi_\omega)_* : H(F) \to H(F)$. Затем показывается, что этот гомоморфизм зависит только от класса $[\omega] \in \pi(B,b_0)$ толерантно гомотопных петель. Тогда искомый гомоморфизм $\Phi:\ \pi(B,b_0) \to Aut\,(H(F))$ определяется формулой

$$\Phi\left([\omega]\right) = \left(\Phi_\omega\right)_*.$$

Теорема 3. *Пусть $w : \mathop{\times}\limits_{i=1}^{s+t} I_{m^{(i)}(w)} \longrightarrow (E,\overline{\tau})$ — пунктированный ТС куб и $\nu(w) \leqslant s$. Возьмем соответствующие ТС кубы в базе и слое $u = \mathcal{B}_s(w)$, $v = \mathcal{F}_s(w)$. Пусть $l_1 = l_1(u),\ l_2 = l_2(u),\ M^{(i)}(u),\ M^{(j)}(v)$ — натуральные числа, определенные в теореме 1. Добавим к ним числа*

$$l_3 = l_3(u) = 2\sum_{i=1}^{s} M^{(i)}(u),\ M = 2^{(t+1)l_3+1} - 1.$$

Тогда существует пунктированный ТС куб

$$D_s(w) : \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{s} I_{M^{(i)}(u)}\right) \times I_M \times \left(\mathop{\times}\limits_{j=1}^{t} I_{M^{(j)}(v)}\right) \longrightarrow (E,\overline{\tau}),$$

который удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\nu(D_s(w)) \leqslant s$;

2) $\mathcal{B}_s(D_s(w)) = (\mathcal{B}_s(w))^{\vee l_1} = u^{\vee l_1}$;

3) $\mathcal{F}_s(D_s(w)) = (\mathcal{F}_s(w))^{\vee t\cdot l_2} = v^{\vee t\cdot l_2}$;

4) $d_{s+1}^0(D_s(w)) = d(\underbrace{l_1,\ldots,l_1}_{s},\underbrace{t\cdot l_2,\ldots,t\cdot l_2}_{t})(w),\quad d_{s+1}^1(D_s(w)) = W(u,v)$;

5) $(\forall\ j \geq s)\ \left(\forall\varepsilon = \overline{0,1}\right)\ d_{j+1}^\varepsilon(D_s(w)) = d(\underbrace{0,\ldots,0}_{s},l_3,\underbrace{l_2,\ldots,l_2}_{t-1})(D_s(d_j^\varepsilon(w)))$;

6) $t > 0$, w — вырожденный ТС куб $\Rightarrow$ $D_s(w)$ — вырожденный ТС куб.

Доказательство. Используется техника доказательств теоремы 1 и предложения 1.

Рассмотрим теперь группу пунктированных нормализованных цепей $C^\bullet(E) = \mathop{\oplus}\limits_{n\geq 0} C_n^\bullet(E)$. Ее свободные образующие однозначно определены невырожденными пунктированными ТС кубами. Обозначим через C^s подгруппу в $C^\bullet(E)$, чьи свободные образующие соответствуют ТС кубам u таким, что $\nu(u) \leqslant s$. Очевидные свойства

$$\mathop{\cup}\limits_{s\geqslant 0} C^s = C^\bullet(E),\ C^s \subset C^{s+1},\ \partial\left(C^s\right) \subset C^s$$

показывают, что имеем возрастающую фильтрацию $\{C^s|\ s \geqslant 0\}$ цепного комплекса $\{C^\bullet(E),\ \partial\}$. Точная последовательность дифференциальных групп

$$0 \to C^{s-1} \hookrightarrow C^s \to C^s/C^{s-1} \to 0$$

порождает точную гомологическую последовательность

$$\begin{tikzcd}
H(C^{(s-1)}) \arrow[rr] & & H(C^{(s)}) \arrow[dl] \\
& H(C^{(s)}/C^{(s-1)}) \arrow[ul] &
\end{tikzcd},$$

которая в свою очередь дает точную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\
& E \arrow[ul, "k"] &
\end{tikzcd}.$$

Таким образом, имеем точную пару (D, E, i, j, k), определяющую спектральную последовательность $\left\{E^m_{s,t}\right\}$ [5], которую назовем спектральной последовательностью толерантного расслоения $p : (E, \overline{\tau}) \to ((B, \tau))$.

Теорема 4. *Спектральная последовательность толерантного расслоения сходится, при этом для любой пары* $s, t \geqslant 0$ *имеется изоморфизм* $E^2_{s,\ t} \cong H_s\left(B, H_t(F)\right)$.

Доказательство. Утверждение следует из общей теории спектральных последовательностей [5], из доказанных выше свойств толерантных расслоений, с учетом предложения 8 работы [4].

Библиографический список

1. *Zeeman E.S.* The topology of brain and visual perception. The Topology of 3-Manifolds. N.Y., 1962.
2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.
3. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып.3. С. 93–106.
4. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий // Вестн. Самарск. гос. ун-та. 2007. Вып. 7(57). С. 134–151.
5. *Ху Сы-цзян.* Теория гомотопий. М.: Мир, 1964.

УДК 517.984

ОПЕРАТОР ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ИМЕЮЩЕЙ СТЕПЕННУЮ ОСОБЕННОСТЬ

В.В. Корнев, А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
E-mail: KornevVV@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Изучаются спектральные свойства интегрального оператора с инволюцией специального вида, для разложений по собственным функциям этого оператора получена теорема равносходимости.

Ключевые слова: интегральный оператор, инволюция, разложения по собственным функциям, равносходимость.

Operator Integration with an Involution Having a Power Singularity

V.V. Kornev, A.P. Khromov

Spectral properties of the integral operator with an involution of special type in the upper limit are studied and an equiconvergence theorem for its generalized eigenfunction expansions is obtained.

Key words: integral operator, involution, eigenfunction expansions, equiconvergence.

В [1] впервые был рассмотрен с инволюцией $\theta(x) = 1 - x$ интегральный оператор:

$$Af = \alpha_1 \int\limits_0^x A_1(x,t) f(t)\,dt + \alpha_2 \int\limits_x^1 A_2(x,t) f(t)\,dt + \alpha_3 \int\limits_0^{1-x} A_3(1-x,t) f(t)\,dt + \alpha_4 \int\limits_{1-x}^1 A_4(1-x,t) f(t)\,dt,$$

где $A_i(x,t)$ — достаточно гладкие функции, причем $A_i(x,x) \equiv 1$ и α_i — комплексные числа. Была изучена задача обращения оператора A, которая открывала перспективу исследования таких вопросов, как равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям, абсолютная сходимость, сходимость средних Рисса, базисы Рисса. Отметим, что большой вклад в эту важную тематику внесен отечественными математиками ([2–4]). Мы же в последующем рассматривали интересный случай оператора A, когда $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ и $A_1(x,t) = A_3(x,t)$ ([5–7]).

В настоящей статье изучается оператор

$$Af = \int\limits_0^{\theta(x)} f(t)\,dt, \qquad x \in [0,1],$$

где $\theta(x)$ — инволюция (т.е. функция со свойством $\theta(\theta(x)) \equiv x$) специального вида. Именно, будем считать, что $\theta(x)$ — непрерывна, $\theta(x) \in C^3(0,1)$ и $\theta'(x) = -x^\alpha$, где $\alpha > 0$, в окрестности точки $x = 0$. Тогда имеем $\theta(x) = 1 - \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $x \in [0,\delta]$. Далее, инволюция характеризуется тем, что график ее симметричен относительно главной диагонали. Для точки $(x,\theta(x))$ симметричной будет точка $(\theta(x),x)$. Так как $\theta(0) = 1$, то получаем, что на $[1-\delta,1]$ (δ берем то же самое) $\theta(x) = (\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha+1}}(1-x)^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Таким образом, мы рассматриваем такую инволюцию, что $\theta(x) = 1 - \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $x \in [0,\delta]$ и $\theta(x) = (\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha+1}}(1-x)^{\frac{1}{\alpha+1}}$ при $x \in [1-\delta,1]$.

1. ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $\mathbf{R}_\lambda$

Займемся построением дифференциальной системы для резольвенты Фредгольма $R_\lambda = (E-\lambda A)^{-1}A$ оператора A (здесь E — единичный оператор, λ — комплексный параметр). Пусть $y = R_\lambda f$. Тогда имеем

$$y(x) - \lambda \int\limits_0^{\theta(x)} y(t)\,dt = \int\limits_0^{\theta(x)} f(t)\,dt. \tag{1}$$

Положим $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(\theta(x))$.

Лемма 1. *Если $y = R_\lambda f$, то $z(x)$ удовлетворяет системе*

$$z_1'(x) - \lambda\theta'(x)z_2(x) = f(\theta(x))\theta'(x), \tag{2}$$

$$z_2'(x) - \lambda z_1(x) = f(x), \tag{3}$$

$$z_1(1) = z_2(0) = 0. \tag{4}$$

Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет системе (2)–(4) *и соответствующая однородная система имеет только нулевое решение, то R_λ существует и $R_\lambda f = z_1(x)$.*

Доказательство. Прежде всего из (1) следует $z_1(1) = 0$, поскольку $\theta(1) = 0$. Дифференцируя (1), придем к (2). Полагая теперь в (1) $\theta(x)$ вместо x, аналогично получим (3) и $z_2(0) = 0$.

Докажем обратное предложение. Пусть λ таково, что однородная краевая задача, соответствующая системе (2)–(4), имеет только нулевое решение. Нетрудно убедиться, что $u_1(x) = z_2(\theta(x))$, $u_2(x) = z_1(\theta(x))$ также удовлетворяют системе (2)–(4). Поэтому $z_1(\theta(x)) = z_2(x)$ и из (2) получаем

$$z_1'(x) - \lambda\theta'(x)z_1(\theta(x)) = f(\theta(x))\theta'(x).$$

Проинтегрировав это тождество, получим

$$z_1(x) - \lambda A z_1 = Af. \tag{5}$$

Так как оператор $E - \lambda A$ ограниченно обратим, то из (5) получаем, что R_λ существует и $R_\lambda f = z_1(x)$. Лемма доказана.

Введем в рассмотрение следующую краевую задачу:

$$w'(t) - \lambda M(t)w(t) = F(t), \qquad 0 \le t \le 1, \tag{6}$$

$$Pw(0) + Qw(1) = 0, \tag{7}$$

где $w(t) = (w_1(t),\dots,w_6(t))^T$, $M(t) = \operatorname{diag}(M_1(t),M_2(t),M_3(t))$, $M_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & \delta\theta'(\delta t) \\ \delta & 0\end{pmatrix}$[1], $M_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta'(1-\delta t) \\ -\delta & 0\end{pmatrix}$, $M_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & (1-2\delta)\theta'(\delta+t(1-2\delta)) \\ 1-2\delta & 0\end{pmatrix}$, $F(t) = (F_1^T(t),F_2^T(t),F_3^T(t))^T$, $F_1(t) = (f_1(t),f_2(t))^T$, $f_1(t) = \delta f(\theta(\delta t))\theta'(\delta t)$, $f_2(t) = \delta f(\delta t)$, $F_2(t) = (-f_3(t),-f_4(t))^T$, $f_3(t) = \delta f(\theta(1-\delta t))\theta'(1-\delta t)$, $f_4(t) = \delta f(1-\delta t)$, $F_3(t) = (f_5(t),f_6(t))^T$, $f_5(t) = (1-2\delta)f(\theta(\delta+(1-2\delta)t))\times$ $\times\,\theta'(\delta+(1-2\delta)t)$, $f_6(t) = (1-2\delta)f(\delta+(1-2\delta)t)$,

$$P = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&1&0&-1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Резольвента R_λ существует, если при этом λ краевая задача* (6)–(7) *при $F(t)\equiv 0$ имеет только нулевое решение. В этом случае*

$$R_\lambda f = \begin{cases} w_1\left(\frac{x}{\delta}\right), & x\in[0,\delta],\\ w_5\left(\frac{x-\delta}{1-2\delta}\right), & x\in[\delta,1-\delta],\\ w_3\left(\frac{1-x}{1-\delta}\right), & x\in[1-\delta,1], \end{cases}$$

где w_1, w_3, w_5 — нечетные компоненты $w(t)$ решения системы (6)–(7).

Доказательство. Система (6) распадается на три системы относительно $w_1(t)$, $w_2(t)$, затем $w_3(t)$, $w_4(t)$, и, наконец, $w_5(t)$, $w_6(t)$. Для $w_1(t)$, $w_2(t)$ из (6) имеем

$$\begin{cases} w_1'(t) - \lambda\delta\theta'(\delta t)w_2(t) = f_1(t),\\ w_2'(t) - \lambda\delta w_1(t) = f_2(t). \end{cases}$$

Отсюда следует, что функции $z_1(x) = w_1\left(\frac{x}{\delta}\right)$ и $z_2(x) = w_2\left(\frac{x}{\delta}\right)$ являются решениями системы (2)–(3) при $x\in[0,\delta]$.

Далее, для $w_3(t)$ и $w_4(t)$ из (6) имеем

$$\begin{cases} -w_3'(t) - \lambda\delta\theta'(1-\delta t)w_4(t) = f_3(t),\\ -w_4'(t) - \lambda\delta w_3(t) = f_4(t). \end{cases}$$

Поэтому функции $z_1(x) = w_3\left(\frac{1-x}{\delta}\right)$ и $z_2(x) = w_4\left(\frac{1-x}{\delta}\right)$ являются решениями системы (2)–(3) при $x\in[1-\delta,1]$.

Наконец, $w_5(t)$ и $w_6(t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} w_5'(t) - \lambda(1-2\delta)\theta'(\delta+(1-2\delta)t)w_6(t) = f_5(t),\\ w_6'(t) - \lambda(1-2\delta)w_5(t) = f_6(t). \end{cases}$$

Следовательно, функции $z_1(x) = w_5\left(\frac{x-\delta}{1-2\delta}\right)$ и $z_2(x) = w_6\left(\frac{x-\delta}{1-2\delta}\right)$ удовлетворяют системе (2)–(3) при $\delta\le x\le 1-\delta$.

Из краевых условий (7) следует, что $z_1(x)$ и $z_2(x)$ образуют непрерывное на $[0,1]$ решение системы (2)–(3) и удовлетворяют условиям (4).

Рассуждая в обратном порядке, можно из решения краевой задачи (2)–(4) получить решение краевой задачи (6)–(7). Поэтому однородная задача для (2)–(4) тоже имеет только нулевое решение. Отсюда по лемме 1 получаем утверждение теоремы 1.

[1] $\theta'(\delta t) = \frac{d}{d\xi}\theta(\xi)\Big|_{\xi=\delta t}$.

2. ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ БЕССЕЛЯ

Нам в дальнейшем потребуются следующие сведения об асимптотике некоторых решений уравнения Бесселя.

Функции Ганкеля [8, с. 304], определяемые по формулам

$$H_\nu^{(1)} = \frac{1}{i\sin\pi\nu}\{J_{-\nu}(z) - e^{-\pi\nu i}J_\nu(z)\}, \qquad H_\nu^{(2)} = \frac{1}{i\sin\pi\nu}\{-J_{-\nu}(z) + e^{\pi\nu i}J_\nu(z)\}, \tag{8}$$

где ν — вещественное и нецелое, а

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \Phi_\nu(z), \qquad \Phi_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)},$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя:

$$z^2y''(z) + zy'(z) + (z^2-\nu^2)y(z) = 0. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение следующие функции: $\varphi_1(z,\nu) = a(\nu)H_\nu^{(1)}(z)$, $\varphi_2(z,\nu) = \overline{a(\nu)}H_\nu^{(2)}(z)$, если $\arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $\varphi_1(z,\nu) = \overline{ia(\nu)}H_\nu^{(2)}(-z)$, $\varphi_2(z,\nu) = -ia(\nu)H_\nu^{(1)}(-z)$, если $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, где $a(\nu) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-1/2}e^{i\left(\frac{\pi\nu}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$.

Лемма 2. *Если* $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, *то*

$$H_\nu^{(1)}(z) = -e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(-z), \qquad H_\nu^{(2)}(z) = e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(-z) + 2\cos\pi\nu H_\nu^{(2)}(-z).$$

Доказательство. Известно [8, с. 304], что

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)], \quad H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\pi\nu i}H_\nu^{(1)}(z), \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\pi\nu i}H_\nu^{(2)}(z).$$

Так как $\Phi_\nu(z)$ целая четная функция, то

$$\Phi_\nu(z) = \Phi_\nu(-z) = \left(-\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\frac{H_\nu^{(1)}(-z) + H_\nu^{(2)}(-z)}{2}.$$

Поскольку $\arg(-z) = -\pi + \arg z$, то имеем

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{1}{i\sin\pi\nu}\{J_{-\nu}(z) - e^{-\pi\nu i}J_\nu(z)\} = \frac{1}{i\sin\pi\nu}\left\{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\Phi_{-\nu}(z) - e^{-i\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\Phi_\nu(z)\right\} = \\
&= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}\left\{e^{-i\pi\nu}[H_{-\nu}^{(1)}(-z) + H_{-\nu}^{(2)}(-z)] - [H_\nu^{(1)}(-z) + H_\nu^{(2)}(-z)]\right\} = \\
&= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}\left\{e^{-i\pi\nu}[e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(-z) + e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(-z)] - [H_\nu^{(1)}(-z) + H_\nu^{(2)}(-z)]\right\} = \\
&= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}(e^{-2i\pi\nu} - 1)H_\nu^{(2)}(-z) = -e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(-z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(2)}(z) &= \frac{1}{i\sin\pi\nu}\{-J_{-\nu}(z) + e^{\pi\nu i}J_\nu(z)\} = \frac{1}{i\sin\pi\nu}\left\{-\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\Phi_{-\nu}(z) + e^{i\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\Phi_\nu(z)\right\} = \\
&= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}\left\{-e^{-i\pi\nu}[H_{-\nu}^{(1)}(-z) + H_{-\nu}^{(2)}(-z)] + e^{2\pi\nu i}[H_\nu^{(1)}(-z) + H_\nu^{(2)}(-z)]\right\} = \\
&= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}\left\{-e^{-i\pi\nu}[e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(-z) + e^{-i\pi\nu}H_\nu^{(2)}(-z)] + e^{2\pi\nu i}[H_\nu^{(1)}(-z) + H_\nu^{(2)}(-z)]\right\} = \\
&= \frac{1}{2i\sin\pi\nu}\left\{(e^{2i\pi\nu} - 1)H_\nu^{(1)}(-z) + (e^{2i\pi\nu} - e^{-2i\pi\nu})H_\nu^{(2)}(-z)\right\} = \\
&= e^{i\pi\nu}H_\nu^{(1)}(-z) + 2\cos\pi\nu H_\nu^{(2)}(-z).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие. *Функции* $\varphi_j(z,\nu)$ $(j=1,2)$ *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (9).

Теорема 2. *При больших* $|z|$ *и* $\arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\frac{d^j}{dz^j}\varphi_1(z,\nu) = i^j \left(\frac{1}{z}\right)^{1/2} \left\{1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right\} e^{iz} \quad (j = 0, 1), \tag{10}$$

$$\frac{d^j}{dz^j}\varphi_2(z,\nu) = (-i)^j \left(\frac{1}{z}\right)^{1/2} \left\{1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right\} e^{-iz} \quad (j = 0, 1). \tag{11}$$

Доказательство. Известно [9, с. 221], что

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \tag{12}$$

если $-\pi + \varepsilon \le \arg z \le 2\pi - \varepsilon$, и

$$H_\nu^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \tag{13}$$

если $-2\pi + \varepsilon \le \arg z \le \pi - \varepsilon$.

Отсюда следует утверждения теоремы при $j = 0$. Так как [8, с. 305]

$$\frac{d}{dz}H_\nu^{(s)}(z) = H_{\nu-1}^{(s)}(z) - \frac{\nu}{z}H_\nu^{(s)}(z) \qquad (s = 1, 2), \tag{14}$$

то из (12) и (13) следует (10) и (11) и при $j = 1$. Теорема доказана.

Лемма 3. *При малых* z *имеют место асимптотические формулы:*
если $\nu > 0$, *то*

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{i\Gamma(-\nu+1)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\{1 + O(z^\varkappa)\},$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{1}{i\Gamma(-\nu+1)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\{1 + O(z^\varkappa)\},$$

если $\nu < 0$, *то*

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{e^{-\pi\nu i}}{i\Gamma(\nu+1)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\{1 + O(z^\varkappa)\},$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\pi\nu i}}{i\Gamma(\nu+1)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\{1 + O(z^\varkappa)\}.$$

Здесь $\varkappa = \min\{2, 2|\nu|\}$.

Утверждение леммы легко следует из формулы (8).

Лемма 4. *Если* $\nu > 0$, *то*

$$\frac{d}{dz}H_\nu^{(s)}(z) = \frac{(-1)^{s+1}}{i\Gamma(-\nu)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\frac{1}{z}\{1 + O(z^\varkappa)\} \qquad (s = 1, 2).$$

Если $\nu < 0$, *то*

$$\frac{d}{dz}H_\nu^{(s)}(z) = \frac{(-1)^s e^{(-1)^s\pi\nu i}}{i\Gamma(\nu)\sin\pi\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{z}\{1 + O(z^\varkappa)\} \qquad (s = 1, 2).$$

Утверждение леммы легко следует из леммы 3 на основании (14).

На основании лемм 3, 4 и определения $\varphi_j(z,\nu)$ получаем следующие результаты.

Теорема 3. *При малых* z *и* $\arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$\frac{d^s}{dz^s}\varphi_1(z,\nu) = (-|\nu|)^s b(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-|\nu|}\frac{1}{z^s}\{1 + O(z^\varkappa)\}, \tag{15}$$

$$\frac{d^s}{dz^s}\varphi_2(z,\nu) = (-|\nu|)^s \overline{b(\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-|\nu|}\frac{1}{z^s}\{1 + O(z^\varkappa)\}, \tag{16}$$

где $s = 0, 1$, $b(\nu) = \dfrac{a(\nu)}{i\Gamma(-\nu+1)\sin\pi\nu}$ *при* $\nu > 0$, $b(\nu) = -\dfrac{a(\nu)e^{-\pi\nu i}}{i\Gamma(\nu+1)\sin\pi\nu}$ *при* $\nu < 0$. *Оценки* $O(\cdots)$ *равномерны по* $\arg z$.

Теорема 4. *При малых* z *и* $\arg z \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ *имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$\frac{d^s}{dz^s}\varphi_1(z,\nu) = -i(-|\nu|)^s\overline{b(\nu)}e^{\pi|\nu|i}\left(\frac{z}{2}\right)^{-|\nu|}\frac{1}{z^s}\{1+O(z^{\varkappa})\},$$

$$\frac{d^s}{dz^s}\varphi_2(z,\nu) = -i(-|\nu|)^s b(\nu)e^{\pi|\nu|i}\left(\frac{z}{2}\right)^{-|\nu|}\frac{1}{z^s}\{1+O(z^{\varkappa})\},$$

где $s = 0, 1$ *и оценки* $O(\cdots)$ *равномерны по* $\arg z$.

Нам потребуется также следующее применение функций $\varphi_j(z,\nu)$.

Лемма 5. *Функции*

$$y_1(x,\lambda) = \sqrt{x}\varphi_1\left(\frac{i\lambda}{q}x^q, \nu\right), \qquad y_2(x,\lambda) = \sqrt{x}\varphi_2\left(\frac{i\lambda}{q}x^q, \nu\right),$$

где $q = \dfrac{\alpha+2}{2}$, $\nu = \dfrac{1}{2q}$, $\alpha \neq -2$ *вещественное и не целое, образуют фундаментальную систему решений уравнения* $y'' - \lambda^2 x^\alpha y = 0$, $x \geq 0$.

Этот факт есть, например, в работе[10, с. 401].

3. АСИМПТОТИКА КОМПОНЕНТ $w_1(t,\lambda)$, $w_2(t,\lambda)$ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (6)

Обратимся к первым двум уравнениям системы (6). Мы имеем

$$w_1'(t) + \lambda\delta^{1+\alpha}t^\alpha w_2(t) = f_1(t), \tag{17}$$

$$w_2'(t) - \lambda\delta w_1(t) = f_2(t) \tag{18}$$

(для краткости пишем $w_j(t)$ вместо $w_j(t,\lambda)$).

Рассмотрим сначала однородную систему

$$w_1'(t) + \lambda\delta^{1+\alpha}t^\alpha w_2(t) = 0, \tag{19}$$

$$w_2'(t) - \lambda\delta w_1(t) = 0. \tag{20}$$

Из (19)–(20) получаем

$$w_2''(t) + \lambda^2\delta^{2+\alpha}t^\alpha w_2(t) = 0. \tag{21}$$

По лемме 5 для (21) имеем следующую фундаментальную систему решений:

$$w_{2j}(t) = \sqrt{t}\varphi_j(\mu_1 t^{q_1}, \nu_1),$$

где $\mu_1 = -\dfrac{\lambda\delta^{1+\frac{\alpha}{2}}}{q_1}$, $q_1 = \dfrac{\alpha+2}{2}$, $\nu_1 = \dfrac{1}{2q_1}$. Отсюда получаем следующую фундаментальную систему решений для (19)–(20):

$$(x_{11}(t), x_{21}(t))^T, \qquad (x_{12}(t), x_{22}(t))^T,$$

где $x_{11}(t) = \dfrac{1}{\lambda\delta}w_{21}'(t)$, $x_{21}(t) = w_{21}(t)$, $x_{12}(t) = \dfrac{1}{\lambda\delta}w_{22}'(t)$, $x_{22}(t) = w_{22}(t)$.

Положим $X(t,\lambda) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{pmatrix}$. Тогда $D_1(t,\lambda) = \det X(t,\lambda)$ есть вронскиан системы (19)–(20).

Лемма 6. *Вронскиан* $D_1(t,\lambda)$ *не зависит от* t *и имеет следующую асимптотику при больших* $|\lambda|$:

$$D_1(t,\lambda) = \frac{2q_1}{\lambda\delta}[1],$$

где $[1] = 1 + O(\lambda^{-1})$.

Доказательство. Так как диагональные элементы матрицы $M_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{1+\alpha}t^\alpha \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$ равны нулю, то $D_1(t,\lambda)$ не зависит от t. Поэтому

$$D_1(t,\lambda) = D_1(1,\lambda) = \frac{1}{\lambda\delta}\begin{vmatrix} \frac{d}{dt}\varphi_1(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)|_{t=1} & \frac{d}{dt}\varphi_2(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)|_{t=1} \\ \varphi_1(\mu_1,\nu_1) & \varphi_2(\mu_1,\nu_1) \end{vmatrix}.$$

Но $\dfrac{d}{dt}\varphi_j(\mu_1 t^{q_1},\nu_1) = \varphi_j'(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)\mu_1 q_1 t^{q_1-1}$. Поэтому по теореме 2

$$D_1(t,\lambda) = \frac{\mu_1 q_1}{\lambda\delta}\begin{vmatrix} i\mu_1^{-1/2}[1]e^{i\mu_1} & -i\mu_1^{-1/2}[1]e^{-i\mu_1} \\ \mu^{-1/2}[1]e^{i\mu_1} & \mu^{-1/2}[1]e^{-i\mu_1} \end{vmatrix} = \frac{2q_1}{\lambda\delta}[1].$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$x_{11}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{\nu_1-1}) & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \le 1, \\ -\dfrac{\delta^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{q_1-1}{2}} e^{i\mu_1 t^{q_1}}\{1+O(|\mu_1 t^{q_1}|^{-1})\} & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \ge 1, \end{cases} \tag{22}$$

$$x_{21}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{-\nu_1}) & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \le 1, \\ -i\dfrac{\delta^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{1-q_1}{2}} e^{i\mu_1 t^{q_1}}\{1+O(|\mu_1 t^{q_1}|^{-1})\} & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \ge 1, \end{cases} \tag{23}$$

$$x_{12}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{\nu_1-1}) & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \le 1, \\ \dfrac{\delta^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{q_1-1}{2}} e^{-i\mu_1 t^{q_1}}\{1+O(|\mu_1 t^{q_1}|^{-1})\} & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \ge 1, \end{cases} \tag{24}$$

$$x_{22}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{-\nu_1}) & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \le 1, \\ -i\dfrac{\delta^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac{1}{2}}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{1-q_1}{2}} e^{-i\mu_1 t^{q_1}}\{1+O(|\mu_1 t^{q_1}|^{-1})\} & \text{при } |\mu_1 t^{q_1}| \ge 1. \end{cases} \tag{25}$$

Доказательство. Рассмотрим $x_{11}(t)$ и для определенности $\operatorname{Re}\mu_1 \le 0$. Пусть сначала $|\mu_1 t^{q_1}| \le 1$. Тогда на основании (14) имеем

$$x_{11}(t) = \frac{1}{\lambda\delta}w_{21}'(t) = \frac{1}{\lambda\delta}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}\varphi_1(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)\right) =$$

$$= \frac{a(\nu_1)}{\lambda\delta}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t}H_{\nu_1}^{(1)}(\mu_1 t^{q_1})\right) = \frac{a(\nu_1)}{\lambda\delta}q_1\mu_1 t^{q_1-\frac{1}{2}}H_{\nu_1-1}^{(1)}(\mu_1 t^{q_1}). \tag{26}$$

Так как $\nu_1 - 1 < 0$, то по лемме 3 $H_{\nu_1}^{(1)}(\mu_1 t^{q_1}) = O\left((\mu_1 t^{q_1})^{\nu_1-1}\right)$. Тем самым из (26) получаем оценку $x_{11}(t) = O(\lambda^{\nu_1-1})$.

Пусть теперь $|\mu_1 t^{q_1}| \ge 1$. Тогда имеем

$$x_{11}(t) = \frac{1}{\lambda\delta}\left\{\frac{1}{2}t^{-1/2}\varphi_1(\mu_1 t^{q_1},\nu_1) + t^{1/2}\mu_1 q_1 t^{q_1-1}\varphi_t'(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)\right\}.$$

Отсюда по теореме 2 получаем (22) в этом случае. Формулы (23)–(25) получаются аналогично.

Следствие. *Имеют место оценки:*

$$x_{11}(t) = O(\lambda^{-1/2}e^{i\mu_1 t^{q_1}}), \quad x_{12}(t) = O(\lambda^{-1/2}e^{-i\mu_1 t^{q_1}}),$$

$$x_{21}(t) = O(\lambda^{-\nu_1}e^{i\mu_1 t^{q_1}}), \quad x_{22}(t) = O(\lambda^{-\nu_1}e^{-i\mu_1 t^{q_1}}).$$

Эти оценки следуют из (22)–(25), если учесть, что $q_1 > 1$, а $\nu_1 < 1/2$.

Лемма 8. *Система* (17)–(18) *имеет следующее общее решение:*

$$(w_1(t,\lambda), w_2(t,\lambda))^T = X(t,\lambda)c + g_{1\lambda}F_1, \tag{27}$$

где $g_{1\lambda}F_1 = \int\limits_0^1 g_1(t,\tau,\lambda)F_1(\tau)\,d\tau$, $g_1(t,\tau,\lambda) = X(t,\lambda)P_1(t,\tau,\lambda)X^{-1}(\tau,\lambda)$, $P_1(t,\tau,\lambda) = \mathrm{diag}(\varepsilon(t,\tau), -\varepsilon(\tau,t))$ *при* $\mathrm{Re}\, i\mu_1 \le 0$, $P_1(t,\tau,\lambda) = \mathrm{diag}(-\varepsilon(\tau,t),\varepsilon(t,\tau))$ *при* $\mathrm{Re}\, i\mu_1 \ge 0$, $\varepsilon(x,t) = 1$ *при* $t \le x$, $\varepsilon(x,t) = 0$ *при* $t > x$, c *— постоянный вектор.*

Доказательство. Вектор-функция $X(t,\lambda)c$ есть общее решение однородной системы (19)–(20). Общее решение системы (17)–(18) получаем методом вариации произвольных постоянных, т.е. ищем его в виде $X(t,\lambda)c(t)$, где $c(t) = (c_1(t), c_2(t))^T$. Тогда имеем

$$c'(t) = X^{-1}(t,\lambda)F_1(t),$$

где $X^{-1}(t,\lambda) = \dfrac{1}{D_1(1,\lambda)}\begin{pmatrix} x_{22}(t) & -x_{12}(t) \\ -x_{21}(t) & x_{11}(t)\end{pmatrix}$. Пусть $\mathrm{Re}\, i\mu_1 \le 0$. Тогда $c_1(t)$ находим интегрированием первого соотношения от 0 до t, а $c_2(t)$ — второго соотношения от t до 1. Подставляя найденное $c(t)$ в $X(t,\lambda)c(t)$, придем к (27). В случае $\mathrm{Re}\, i\mu_1 \ge 0$ надо проводить интегрирование $c_1'(t)$ от t до 1, а $c_2'(t)$ — от 0 до t.

Замечание 1. Выбор пределов интегрирования для нахождения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ проведен с таким расчетом, чтобы в $g_1(t,\tau,\lambda)$ экспоненты из асимптотических формул (22)–(25) имели отрицательную вещественную часть.

Замечание 2. Формула (27) имеет место для любой $f(x) \in L[0,1]$. Это вытекает из следствия к лемме 7.

4. АСИМПТОТИКА КОМПОНЕНТ $w_3(t,\lambda)$, $w_4(t,\lambda)$ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (6)

Из третьего и четвертого уравнений системы (6) имеем

$$-w_3'(t) - \lambda\delta\theta'(1-\delta t)w_4(t) = f_3(t), \tag{28}$$

$$-w_4'(t) - \lambda\delta w_3(t) = f_4(t), \tag{29}$$

или, учитывая явный вид $\theta'(1-\delta t)$,

$$-w_3'(t) + \lambda\delta^{\beta+1}(\alpha+1)^\beta t^\beta w_4(t) = f_3(t), \tag{30}$$

$$-w_4'(t) - \lambda\delta w_3(t) = f_4(t), \tag{31}$$

где $\beta = -\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$. Рассмотрим сначала однородную систему

$$-w_3'(t) + \lambda\delta^{\beta+1}(\alpha+1)^\beta t^\beta w_4(t) = 0, \tag{32}$$

$$-w_4'(t) - \lambda\delta w_3(t) = 0. \tag{33}$$

Из (32)–(33) получаем

$$w_4''(t) + \lambda^2\delta^{\beta+2}(\alpha+1)^\beta t^\beta w_4(t) = 0.$$

Положим $\mu_2 = -\dfrac{\lambda\delta^{1+\frac{\beta}{2}}(\alpha+1)^{\frac{\beta}{2}}}{q_2}$, $q_2 = \dfrac{\beta+2}{2}$, $\nu_2 = \dfrac{1}{2q_2}$. Отсюда в соответствии с леммой 5 получаем для $w_4(t)$ следующую фундаментальную систему решений:

$$w_{4j}(t) = \sqrt{t}\varphi_j(\mu_2 t^{q_2}, \nu_2) \qquad (j = 1,2).$$

Теперь на случай системы (28)–(29) легко переносятся результаты раздела 3.

Таким образом, для системы (32)–(33) получаем следующую фундаментальную систему решений:

$$(y_{11}(t), y_{21}(t))^T, \qquad (y_{12}(t), y_{22}(t))^T,$$

где $y_{1j}(t) = -\dfrac{1}{\lambda\delta}w_{4j}'$, $y_{2j}(t) = w_{4j}(t)$ $(j = 1,2)$.

Положим $Y(t,\lambda) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t)\end{pmatrix}$. Тогда $D_2(t,\lambda) = \det Y(t,\lambda)$ есть вронскиан системы (32)–(33).

Лемма 9. *Вронскиан $D_2(t,\lambda)$ не зависит от t и имеет следующую асимптотику при больших $|\lambda|$:*

$$D_2(t,\lambda) = \frac{2q_2}{\lambda\delta}[1].$$

Лемма 10. *Имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$y_{11}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{\nu_2-1}) & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}| \le 1, \\ \dfrac{\delta^{-\frac12+\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{\frac{\beta}{4}} q_2^{\frac12}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{q_2-1}{2}}\{1+O(|\mu_2 t^{q_2}|^{-1})\}e^{i\mu_2 t^{q_2}} & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}| \ge 1, \end{cases}$$

$$y_{21}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{-\nu_2}) & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}| \le 1, \\ -i\dfrac{\delta^{-\frac12-\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{-\frac{\beta}{4}} q_2^{\frac12}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{1-q_2}{2}}\{1+O(|\mu_2 t^{q_2}|^{-1})\}e^{i\mu_2 t^{q_2}} & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}| \ge 1, \end{cases}$$

$$y_{12}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{\nu_2-1}) & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}| \le 1, \\ -\dfrac{\delta^{-\frac12+\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{\frac{\beta}{4}} q_2^{\frac12}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{q_2-1}{2}}\{1+O(|\mu_2 t^{q_2}|^{-1})\}e^{-i\mu_2 t^{q_2}} & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}| \ge 1, \end{cases}$$

$$y_{22}(t) = \begin{cases} O(\lambda^{-\nu_2}) & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}| \le 1, \\ -i\dfrac{\delta^{-\frac12-\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{-\frac{\beta}{4}} q_2^{\frac12}}{\lambda^{1/2}} t^{\frac{1-q_2}{2}}\{1+O(|\mu_2 t^{q_2}|^{-1})\}e^{-i\mu_2 t^{q_2}} & \text{при } |\mu_2 t^{q_2}| \ge 1. \end{cases}$$

Следствие. *Имеют место оценки:*

$$y_{11}(t) = O(\lambda^{\nu_2-1}e^{i\mu_2 t^{q_2}}), \qquad y_{21}(t) = O(\lambda^{-1/2}e^{i\mu_2 t^{q_2}}),$$
$$y_{12}(t) = O(\lambda^{\nu_2-1}e^{-i\mu_2 t^{q_2}}), \qquad y_{22}(t) = O(\lambda^{-1/2}e^{-i\mu_2 t^{q_2}}).$$

Эти оценки следуют из леммы 10, если учесть, что $q_2 < 1$, $1/2 < \nu_2 < 1$.

Лемма 11. *Система* (30)–(31) *имеет следующее общее решение:*

$$(w_3(t,\lambda), w_4(t,\lambda))^T = Y(t,\lambda)c + g_{2\lambda}F_2, \tag{34}$$

где $g_{2\lambda}F_2 = \int\limits_0^1 g_2(t,\tau,\lambda)F_2(\tau)\,d\tau$, $g_2(t,\tau,\lambda) = Y(t,\lambda)P_2(t,\tau,\lambda)Y^{-1}(\tau,\lambda)$, $P_2(t,\tau,\lambda) = \mathrm{diag}(\varepsilon(t,\tau), -\varepsilon(\tau,t))$ *при* $\mathrm{Re}\, i\mu_2 \le 0$, $P_2(t,\tau,\lambda) = \mathrm{diag}(-\varepsilon(\tau,t), \varepsilon(t,\tau))$ *при* $\mathrm{Re}\, i\mu_2 \ge 0$, c *— постоянный вектор.*

Замечание. Формула (34) имеет место при любой $f(x) \in L[0,1]$.

5. АСИМПТОТИКА КОМПОНЕНТ $w_5(t,\lambda)$, $w_6(t,\lambda)$ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (6)

Система для $w_j(t,\lambda)$ $(j = 5,6)$ имеет вид

$$w_5'(t) - \lambda(1-2\delta)\theta'(\delta+(1-2\delta)t)w_6(t) = f_5(t), \tag{35}$$

$$w_6'(t) - \lambda(1-2\delta)w_5(t) = f_6(t). \tag{36}$$

Положим $\mu_3 = \lambda(1-2\delta)$, $-\theta'(\delta+t(1-2\delta)) = p(t)$. Тогда однородная система для (35)–(36) примет вид

$$w_5'(t) + \mu_3 p(t)w_6(t) = 0, \tag{37}$$

$$w_6'(t) - \mu_3 w_5(t) = 0. \tag{38}$$

Из (37)–(38) получаем

$$w_6''(t) + \mu_3^2 p(t)w_6(t) = 0. \tag{39}$$

Лемма 12. *Уравнение* (39) *имеет фундаментальную систему решений* $\{w_{61}(t), w_{62}(t)\}$, *для которой при больших* $|\lambda|$ *имеют место асимптотические формулы:*

$$w_{61}(t) = p_1(\xi(t))e^{i\mu_3\xi(t)}[1], \qquad w_{61}'(t) = i\mu_3\sqrt{p(t)}\,p_1(\xi(t))e^{i\mu_3\xi(t)}[1],$$
$$w_{62}(t) = p_1(\xi(t))e^{-i\mu_3\xi(t)}[1], \qquad w_{62}'(t) = -i\mu_3\sqrt{p(t)}\,p_1(\xi(t))e^{-i\mu_3\xi(t)}[1],$$

где $p_1(\xi) = e^{-1/2\int\limits_0^\xi p_2(\tau)\,d\tau}$, $p_2(\xi) = p_3(t(\xi))$, $p_3(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{p'(t)}{(p(t))^{3/2}}$, $\xi = \xi(t) = \int\limits_0^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau$, $[1] = 1 + O(\lambda^{-1})$.

Доказательство. Выполним в уравнении (39) замену независимого переменного $\xi = \int\limits_0^t \sqrt{p(\tau)}\,d\tau$ и положим $y(\xi) = w_6(t(\xi))$. Тогда имеем

$$w_6'(t) = y'(\xi)\sqrt{p(t)}, \quad w_6''(t) = y''(\xi)p(t) + \frac{1}{2}(p(t))^{-1/2}p'(t)y'(\xi).$$

Подставляем это в (39). Получим

$$y''(\xi)p(t) + \frac{1}{2}(p(t))^{-1/2}p'(t)y'(\xi) + \mu_3^2 p(t)y(\xi) = 0.$$

Отсюда

$$y''(\xi) + p_3(t)y'(\xi) + \mu_3^2 y(\xi) = 0,$$

или

$$y''(\xi) + p_2(\xi)y'(\xi) + \mu_3^2 y(\xi) = 0. \tag{40}$$

В (40) выполним замену $y = p_1(\xi)v$. Тогда получим

$$v''(\xi) + \tilde{p}(\xi)v'(\xi) + \mu_3^2 v(\xi) = 0. \tag{41}$$

Уравнение (41) [11, с. 53, 58–59] имеет фундаментальную систему решений $\{v_1(\xi), v_2(\xi)\}$ с асимптотикой

$$\begin{aligned} y_1(\xi) &= p_1(\xi)e^{i\mu_3\xi}[1], & y_1'(\xi) &= i\mu_3 p_1(\xi)e^{i\mu_3\xi}[1], \\ y_2(\xi) &= p_1(\xi)e^{-i\mu_3\xi}[1], & y_2'(\xi) &= -i\mu_3 p_1(\xi)e^{-i\mu_3\xi}[1]. \end{aligned}$$

Переходя отсюда к $w_6(t)$, получим для уравнения (39) фундаментальную систему решений $\{w_{61}(t), w_{62}(t)\}$ с указанной асимптотикой. Лемма доказана.

Обратимся теперь к однородной системе (37)–(38). Для нее получаем следующую фундаментальную систему решений

$$(z_{11}(t), z_{21}(t))^T, \qquad (z_{12}(t), z_{22}(t))^T,$$

где $z_{11}(t) = \dfrac{1}{\mu_3}w_{61}'(t)$, $z_{21}(t) = w_{61}(t)$, $z_{12}(t) = \dfrac{1}{\mu_3}w_{62}'(t)$, $z_{22}(t) = w_{62}(t)$.

По лемме 12 получаем

Лемма 13. *Имеют место асимптотические формулы*

$$\begin{aligned} z_{11}(t) &= i\sqrt{p(t)}p_1(\xi(t))e^{i\mu_3\xi(t)}[1], & z_{21}(t) &= p_1(\xi(t))e^{i\mu_3\xi(t)}[1], \\ z_{12}(t) &= -i\sqrt{p(t)}p_1(\xi(t))e^{-i\mu_3\xi(t)}[1], & z_{22}(t) &= p_1(\xi(t))e^{-i\mu_3\xi}[1]. \end{aligned}$$

Положим $Z(t,\lambda) = (z_{ij}(t))_1^2$. Тогда $D_3(t,\lambda) = \det Z(t,\lambda)$ есть вронскиан системы (37)–(38) и для него, как и в разделе 3, имеет место

Лемма 14. *Вронскиан* $D_3(t,\lambda)$ *не зависит от* t *и имеет следующую асимптотику при больших* $|\lambda|$:

$$D_3(t,\lambda) = D_3(0,\lambda) = 2i\sqrt{-\theta'(\delta)}[1].$$

Для неоднородной системы (35)–(36), как и в разделе 3, получаем

Лемма 15. *Система* (35)–(36) *имеет следующее общее решение:*

$$(w_5(t,\lambda), w_6(t,\lambda))^T = Z(t,\lambda)c + g_{3\lambda}F_3,$$

где c *— постоянный вектор,* $g_{3\lambda}F_3 = \int\limits_0^1 g_3(t,\tau,\lambda)F_3(\tau)\,d\tau$, $g_3(t,\tau,\lambda) = Z(t,\lambda)P_3(t,\tau,\lambda)Z^{-1}(\tau,\lambda)$, $P_3(t,\tau,\lambda) = \operatorname{diag}(\varepsilon(t,\tau), -\varepsilon(\tau,t))$ *при* $\operatorname{Re} i\mu_3 \le \operatorname{Re}(-i\mu_3)$, $P_3(t,\tau,\lambda) = \operatorname{diag}(-\varepsilon(\tau,t), \varepsilon(t,\tau))$ *при* $\operatorname{Re} i\mu_3 \ge \operatorname{Re}(-i\mu_3)$.

6. ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ

1. В силу лемм 8, 11, 14 для решения $w(t,\lambda)$ системы (6)–(7) получаем следующую формулу:

$$w(t,\lambda) = -\Phi(t,\lambda)U^{-1}(\lambda)U(g_\lambda F) + g_\lambda F, \tag{42}$$

где $\Phi(t,\lambda) = \mathrm{diag}(X(t,\lambda), Y(t,\lambda), Z(t,\lambda))$, $g_\lambda F = \int\limits_0^1 g(t,\tau,\lambda)F(\tau)\,d\tau$, $g(t,\tau,\lambda) = \mathrm{diag}(g_1(t,\tau,\lambda),$ $g_2(t,\tau,\lambda), g_3(t,\tau,\lambda))$, $U(\lambda) = U(\Phi(t,\lambda)) = P\Phi(0,\lambda) + Q\Phi(1,\lambda)$, $U(g_\lambda F) = Pg_\lambda F|_{t=0} + Qg_\lambda F|_{t=1}$.

Введем следующие обозначения: $G_j(t,\lambda) = g_{j\lambda}F_j$, $G_j(t,\lambda) = (G_{j1}(t,\lambda), G_{j2}(t,\lambda))^T$, $G(t,\lambda) = (G_1^T(t,\lambda), G_2^T(t,\lambda), G_3^T(t,\lambda))^T$. Тогда $g_\lambda F = G(t,\lambda)$, $U(g_\lambda F) = PG(0,\lambda) + QG(1,\lambda)$. В дальнейшем нам нужна лишь пятая компонента $w_5(t,\lambda)$ решения $w(t,\lambda)$ системы (6)–(7). В силу (42) имеет место

Лемма 16. *Справедлива формула*

$$w_5(t,\lambda) = -\sum_{j=1}^{6} S_j(t,\lambda) + G_{31}(t,\lambda), \tag{43}$$

где $S_1(t,\lambda) = \eta_1(t,\lambda)G_{12}(0,\lambda)$, $S_2(t,\lambda) = \eta_2(t,\lambda)G_{21}(0,\lambda)$, $S_3(t,\lambda) = \eta_3(t,\lambda)(G_{31}(0,\lambda) -$ $- G_{11}(1,\lambda))$, $S_4(t,\lambda) = \eta_4(t,\lambda)(G_{32}(0,\lambda) - G_{12}(1,\lambda))$, $S_5(t,\lambda) = \eta_5(t,\lambda)(G_{21}(1,\lambda) - G_{31}(1,\lambda))$, $S_6(t,\lambda) = \eta_6(t,\lambda)(G_{22}(1,\lambda) - G_{32}(1,\lambda))$, $\eta(t,\lambda) = (\eta_1(t,\lambda),\ldots,\eta_6(t,\lambda))$ — *пятая строка матрицы-функции* $\Phi(t,\lambda)U^{-1}(\lambda)$.

2. В дальнейшем считаем, что $-\frac{\pi}{2} \le \arg(-\lambda) \le 0$. Тогда $\arg\lambda \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ и $(-\lambda)^{\nu_1} = \lambda^{\nu_1}e^{-\pi\nu_1 i}$. Получим асимптотические формулы для компонент $X(t,\lambda)$, $Y(t,\lambda)$, $Z(t,\lambda)$ при $t=0$ и $t=1$.

Лемма 17. *Имеют место формулы*

$$x_{1j}(0) = a_{1j}\lambda^{\nu_1-1}, \quad x_{2j}(0) = a_{2j}\lambda^{-\nu_1} \quad (j=1,2),$$

где

$$a_{11} = \frac{ia(\nu_1)(2q_1)^{1-\nu_1}e^{-2\pi\nu_1 i}\delta^{-1/2}}{\Gamma(\nu_1)\sin\pi\nu_1}, \qquad a_{12} = \frac{i\overline{a(\nu_1)}(2q_1)^{1-\nu_1}\delta^{-1/2}}{\Gamma(\nu_1)\sin\pi\nu_1},$$
$$a_{21} = b(\nu_1)(2q_1)^{\nu_1}\delta^{-1/2}e^{\pi\nu_1 i}, \qquad a_{22} = \overline{b(\nu_1)}(2q_1)^{\nu_1}\delta^{-1/2}e^{\pi\nu_1 i}.$$

Доказательство. Имеем

$$x_{11}(0) = \frac{1}{\lambda\delta}w_{21}'(0) = \frac{1}{\lambda\delta}\left(\frac{d}{dt}\sqrt{t}\varphi_1(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)\right)_{|t=0} = \frac{a(\nu_1)}{\lambda\delta}q_1\mu_1\left(t^{q_1-\frac12}H^{(1)}_{\nu_1-1}(\mu_1 t^{q_1})\right)_{|t=0}.$$

Так как $\nu_1 - 1 < 0$, то отсюда в силу леммы 3 получаем, что $x_{11}(0) = a_{11}\lambda^{\nu_1-1}$. Далее, в силу теоремы 3 $x_{21}(0) = w_{21}(0) = \left(\sqrt{t}\varphi_1(\mu_1 t^{q_1},\nu_1)\right)_{|t=0} = a_{21}\lambda^{-\nu_1}$.

Аналогично получаются формулы для $x_{12}(0)$ и $x_{22}(0)$.

Лемма 18. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$x_{j1}(1) = \frac{b_{j1}}{\lambda^{1/2}}e^{i\mu_1}[1], \quad x_{j2}(1) = \frac{b_{j2}}{\lambda^{1/2}}e^{-i\mu_1}[1],$$

где $[1] = 1 + O(\lambda^{-1})$, $b_{11} = -\delta^{-\frac12+\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac12}$, $b_{21} = -i\delta^{-\frac12-\frac{\alpha}{4}}q_1^{\frac12}$, $b_{12} = -b_{11}$, $b_{22} = b_{21}$.

Утверждение леммы — простое следствие леммы 7.

Так же, как леммы 17 и 18, получаются

Лемма 19. *Имеют место формулы:*

$$y_{1j}(0) = c_{1j}\lambda^{\nu_2-1}, \quad y_{2j}(0) = c_{2j}\lambda^{-\nu_2} \quad (j=1,2),$$

где

$$c_{11} = -\frac{ia(\nu_2)(2q_2)^{\nu_2-1}e^{-2\pi\nu_2 i}\delta^{\beta}(\alpha+1)^{\frac{\beta\nu_2}{2}}}{\Gamma(\nu_2)\sin\pi\nu_2}, \qquad c_{12} = -\frac{i\overline{a(\nu_2)}(2q_2)^{1-\nu_2}\delta^{\beta}(\alpha+1)^{\frac{\beta\nu_2}{2}}}{\Gamma(\nu_2)\sin\pi\nu_2},$$
$$c_{21} = b(\nu_2)(2q_2)^{\nu_2}\delta^{-\frac{1}{\alpha+1}}(\alpha+1)^{-\frac{\beta\nu_2}{2}}e^{\pi\nu_2 i}, \qquad c_{22} = \overline{b(\nu_2)}(2q_2)^{\nu_2}\delta^{-\frac{1}{\alpha+1}}(\alpha+1)^{-\frac{\beta\nu_2}{2}}e^{\pi\nu_2 i}.$$

Лемма 20. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$y_{j1}(1)=\frac{d_{j1}[1]}{\lambda^{1/2}}e^{i\mu_2},\quad y_{j2}(1)=\frac{d_{j2}[1]}{\lambda^{1/2}}e^{-i\mu_2}\quad (j=1,2),$$

$d_{11}=\delta^{-\frac{1}{2}+\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{\frac{\beta}{4}}q_2^{\frac{1}{2}}$, $d_{12}=d_{11}$, $d_{21}=-i\delta^{-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{4}}(\alpha+1)^{-\frac{\beta}{4}}q_2^{\frac{1}{2}}$, $d_{22}=d_{21}$.

Наконец, из лемма 13 получается

Лемма 21. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$\begin{aligned}
&z_{11}(0)=i\sqrt{p(0)}[1],\quad z_{21}(0)=[1],\quad z_{12}(0)=-i\sqrt{p(0)}[1],\quad z_{22}(0)=[1],\\
&z_{11}(1)=i\sqrt{p(1)}p_1(\xi(1))e^{i\mu_3\xi(1)}[1],\qquad z_{21}(1)=p_1(\xi(1))e^{i\mu_3\xi(1)}[1],\\
&z_{12}(1)=-i\sqrt{p(1)}p_1(\xi(1))e^{-i\mu_3\xi(1)}[1],\qquad z_{22}(1)=p_1(\xi(1))e^{-i\mu_3\xi(1)}[1].
\end{aligned}$$

3. Для определителя $\Delta(\lambda)=\det U(\lambda)$ имеем формулу

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}
x_{21}(0) & x_{22}(0) & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & y_{11}(0) & y_{12}(0) & 0 & 0\\
-x_{11}(1) & -x_{12}(1) & 0 & 0 & z_{11}(0) & z_{12}(0)\\
-x_{21}(1) & -x_{22}(1) & 0 & 0 & z_{21}(0) & z_{22}(0)\\
0 & 0 & y_{11}(1) & y_{12}(1) & -z_{11}(1) & -z_{12}(1)\\
0 & 0 & y_{21}(1) & y_{22}(1) & -z_{21}(1) & -z_{22}(1)
\end{vmatrix}.$$

В нашем случае $\operatorname{Re} i\mu_1\ge 0$, $\operatorname{Re} i\mu_2\ge 0$, $\operatorname{Re} i\mu_3\le 0$. Используя леммы 17–21 для $\Delta(\lambda)$ получаем следующую асимптотическую формулу:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^{\nu_2-\nu_1-2}e^{i(\mu_1+\mu_2-\mu_3\xi(1))}\left(a_0+\sum_{j=1}^{7}a_je^{i\lambda\gamma_j}+O(\lambda^{-1})\right),\tag{44}$$

где a_j — константы, причем $a_0\ne 0$, γ_j — положительные константы.

Удалим из рассматриваемого сектора $\frac{\pi}{2}\le\arg\lambda\le\pi$ нули определителя $\Delta(\lambda)$ вместе с окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0. Получившуюся область обозначим S_{δ_0}.

Лемма 22. *В S_{δ_0} при достаточно больших $|\lambda|$*

$$|\Delta(\lambda)|\ge C|\lambda|^{\nu_2-\nu_1-2}|e^{i(\mu_1+\mu_2-\mu_3\xi(1))}|.$$

Утверждение леммы следует из формулы (44) и свойств нулей квазимногочленов [12, с. 438].

4. Приступаем к оценке $S_j(t,\lambda)$ в формуле (43). Сначала оценим $G_{ij}(0,\lambda)$ и $G_{ij}(1,\lambda)$. Пусть $i=1$. Имеем $X^{-1}(t,\lambda)=\dfrac{1}{D_1}\begin{pmatrix}x_{22}(t) & -x_{12}(t)\\ -x_{21}(t) & x_{11}(t)\end{pmatrix}$, где $D_1=D_1(1,\lambda)$. Поэтому

$$G_{11}(t,\lambda)=\frac{1}{D_1}\int_0^1\Big\{-\left(x_{11}(t)\varepsilon(\tau,t)x_{22}(\tau)+x_{12}(t)\varepsilon(t,\tau)x_{21}(\tau)\right)f_1(\tau)+$$

$$+\left(x_{11}(t)\varepsilon(\tau,t)x_{12}(\tau)+x_{12}(t)\varepsilon(t,\tau)x_{11}(\tau)\right)f_2(\tau)\Big\}\,d\tau,\tag{45}$$

$$G_{12}(t,\lambda)=\frac{1}{D_1}\int_0^1\Big\{-\left(x_{21}(t)\varepsilon(\tau,t)x_{22}(\tau)+x_{22}(t)\varepsilon(t,\tau)x_{21}(\tau)\right)f_1(\tau)+$$

$$+\left(x_{21}(t)\varepsilon(\tau,t)x_{12}(\tau)+x_{22}(t)\varepsilon(t,\tau)x_{11}(\tau)\right)f_2(\tau)\Big\}\,d\tau.\tag{46}$$

Лемма 23. *Имеет место оценка:*

$$G_{12}(0,\lambda)=O(\lambda^{\frac{1}{2}-\nu_1}\|\tilde f\|_1), \tag{47}$$

где $\tilde f(t)=f(t)(1-t)^\beta$, $\beta=-\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$, $\|\cdot\|_1$ *— норма в* $L[0,1]$.

Доказательство. Из (46) при $t=0$ имеем

$$G_{12}(0,\lambda)=\frac{x_{21}(0)}{D_1}\int\limits_0^1(-x_{22}(\tau)f_1(\tau)+x_{12}(\tau)f_2(\tau))\,d\tau. \tag{48}$$

Оценим интеграл $J=\int\limits_0^1 x_{22}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau$. Имеем $J=J_1+J_2$, где $J_1=\int\limits_0^\xi x_{22}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau$ и $\xi=|\mu|^{-1/q_1}$. По лемме 7

$$J_1=O\left(\lambda^{-\nu_1}\int\limits_0^\xi|f_1(\tau)|\,d\tau\right)=O\left(\lambda^{-\nu_1}\int\limits_0^\xi|f(\theta(\delta\tau))|\tau^\alpha\,d\tau\right)=O\left(|\lambda|^{-\nu_1}\xi^\alpha\int\limits_0^\xi|f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau\right)=$$

$$=O\left(\lambda^{-\nu_1-\frac{\alpha}{q_1}}\int\limits_0^\xi|f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau\right)=O\left(\lambda^{-1/2}\int\limits_0^\xi|f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau\right).$$

Но

$$\int\limits_0^\xi|f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau=\int\limits_0^\xi\left|f\left(1-\frac{(\theta\tau)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\right|\,d\tau=O\left(\int\limits_0^1|f(\eta)|(1-\eta)^\beta\,d\eta\right).$$

Поэтому

$$J_1=O\left(\lambda^{-1/2}\|\tilde f\|_1\right). \tag{49}$$

Далее, по лемме 7

$$J_2=O\left(\lambda^{-1/2}\int\limits_\xi^1\tau^{\frac{1-q_1}{2}+\alpha}|f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau\right)=O\left(\lambda^{-1/2}\int\limits_\xi^1|f(\theta(\delta\tau))|\,d\tau\right)=O\left(\lambda^{-1/2}\|\tilde f\|_1\right). \tag{50}$$

Так как $x_{21}(0)D_1^{-1}=O(\lambda^{1-\nu_1})$, то из (49) и (50) получаем, что

$$x_{21}(0)D_1^{-1}J=O\left(\lambda^{1/2-\nu_1}\|\tilde f\|_1\right). \tag{51}$$

Наконец, по следствию леммы 7

$$\int\limits_0^1 x_{12}(\tau)f_2(\tau)\,d\tau=O\left(\lambda^{-1/2}\int\limits_0^1\delta|f(\delta\tau)|\,d\tau\right)=O\left(\lambda^{-1/2}\|f\|_1\right). \tag{52}$$

Из (48), (51) и (52) следует (47).

Лемма 24. *Имеют место оценки*

$$G_{1j}(1,\lambda)=O(\|\tilde f\|_1)\quad(j=1,2). \tag{53}$$

Доказательство. Из (45)–(46) заключаем, что

$$G_{11}(1,\lambda)=\frac{1}{D_1}\int\limits_0^1\Big(x_{12}(1)x_{21}(\tau)f_1(\tau)+x_{12}(1)x_{11}(\tau)f_2(\tau)\Big)\,d\tau,$$

$$G_{12}(1,\lambda)=\frac{1}{D_1}\int\limits_0^1\Big(x_{22}(1)x_{21}(\tau)f_1(\tau)+x_{22}(1)x_{11}(\tau)f_2(\tau)\Big)\,d\tau.$$

По леммам 6 и 18 имеем

$$x_{12}(1)D_1^{-1}\int\limits_0^1 x_{21}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau = O\left(\lambda^{-1/2}e^{-i\mu_1}\int\limits_0^1 x_{21}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau\right).$$

Далее, точно так же, как и для J, в доказательстве леммы 23, получаем оценку

$$e^{-i\mu_1}\int\limits_0^1 x_{21}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau = O\left(\lambda^{-1/2}\|\tilde{f}\|_1\right).$$

На основании лемм 6 и 18, как и при доказательстве леммы 23, имеем

$$x_{12}(1)D_1^{-1}\int\limits_0^1 x_{11}(\tau)f_2(\tau)\,d\tau = O\left(\lambda^{1/2}e^{-i\mu_1}\int\limits_0^1 x_{11}(\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right) = O\left(\|\tilde{f}\|_1\right).$$

Тем самым оценка (53) при $j=1$ получена. Для $G_{12}(1,\lambda)$ оценка (53) получается аналогично.

Лемма 25. *Если $f(t)=\chi(t)$есть характеристическая функция какого-нибудь отрезка $[a,b]$ из $(0,1)$, то*

$$G_{12}(0,\lambda) = O(\lambda^{-\frac{1}{2}-\nu_1}), \qquad G_{1j}(1,\lambda) = O(\lambda^{-1}) \quad (j=1,2). \tag{54}$$

Доказательство. Интеграл J из доказательства леммы 23 есть $J = \int\limits_{a_1}^{b_1} x_{22}(\tau)f_1(\tau)\,d\tau$, где $[a_1,b_1]\subset(0,1)$. Значит, $|\mu\tau^{q_1}|\geq 1$, и поэтому, используя лишь асимптотику $x_{22}(t)$ из леммы 7 при $|\mu t|^{q_1}\geq 1$ и гладкость $f_1(\tau)$, легко получаем, что $J=O(\lambda^{-3/2})$. Точно так же и $\int\limits_0^1 x_{12}(\tau)f_2(\tau)\,d\tau = O(\lambda^{-3/2})$. Тем самым оценка (54) для $G_{12}(0,\lambda)$ установлена. В силу этих же соображений получаются оценки (54) и для $G_{1j}(1,\lambda)$ $(j=1,2)$.

С помощью лемм 9, 10, 13, 14 аналогично получаются следующие факты.

Лемма 26. *Имеют место оценки:*

$$G_{21}(0,\lambda) = O(\lambda^{\nu_2-\frac{1}{2}}\|\tilde{f}\|_1), \qquad G_{2j}(1,\lambda) = O(\|\tilde{f}\|_1) \quad (j=1,2).$$

Если $f(x)=\chi(x)$, то

$$G_{21}(0,\lambda) = O(\lambda^{-\frac{3}{2}+\nu_2}), \qquad G_{2j}(1,\lambda) = O(\lambda^{-1}) \quad (j=1,2).$$

Лемма 27. *Имеют место оценки:*

$$G_{3j}(0,\lambda) = O(\|f\|_1), \qquad G_{3j}(1,\lambda) = O(\|f\|_1) \quad (j=1,2).$$

Если $f(x)=\chi(x)$, то

$$G_{3j}(0,\lambda) = O(\lambda^{-1}), \qquad G_{3j}(1,\lambda) = O(\lambda^{-1}) \quad (j=1,2).$$

Приступаем теперь к оценкам пятой строки $\eta(t,\lambda)=(\eta_1(t,\lambda),\ldots,\eta_6(t,\lambda))$ матрицы $\Phi(t,\lambda)U^{-1}(\lambda)$.

Лемма 28. *В S_{δ_0} при больших $|\lambda|$ имеют место оценки:*

$$\eta_1(t,\lambda) = O(\lambda^{\nu_1-\frac{1}{2}}e^{-i\mu_1}), \quad \eta_2(t,\lambda) = O(\lambda^{\frac{1}{2}-\nu_2}e^{-i\mu_2}),$$

$$\eta_j(t,\lambda) = O(e^{i\mu_3\xi(t)}) \quad (j=3,4),$$

$$\eta_j(t,\lambda) = O(e^{i\mu_3(\xi(1)-\xi(t))}) \quad (j=5,6).$$

Доказательство. Имеем

$$\eta_j(t,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}(z_{11}(t)A_{j5}+z_{12}(t)A_{j6}) \quad (j=1,\ldots,6), \tag{55}$$

где A_{jk} — алгебраические дополнения элементов определителя $\Delta(\lambda)$. Из явного вида A_{jk} и леммы 22 следуют оценки:

$$A_{15} = O(\lambda^{\nu_2-\frac{5}{2}}e^{i(\mu_2-\mu_3\xi(1))}), \qquad A_{16} = O(\lambda^{\nu_2-\frac{5}{2}}e^{i(\mu_2+\mu_3\xi(1))}), \tag{56}$$

$$A_{2j} = O(\lambda^{-\nu_1-\frac{3}{2}}e^{i\mu_1}) \quad (j=5,6), \tag{57}$$

$$A_{j5} = O(\lambda^{\nu_2-\nu_1-2}e^{i(\mu_1+\mu_2-\mu_3\xi(1))}), \quad A_{j6} = O(\lambda^{\nu_2-\nu_1-2}e^{i(\mu_1+\mu_2+\mu_3\xi(1))}) \quad (j=3,4) \tag{58}$$

$$A_{sj} = O(\lambda^{\nu_2-\nu_1-2}e^{i(\mu_1+\mu_2)}) \quad (s,j=5,6). \tag{59}$$

Из (55)–(59) по лемме 13 получаем утверждение леммы.

Наконец, мы приступаем к получению оценок для $S_j(t,\lambda)$.

Лемма 29. *В S_{δ_0} при больших $|\lambda|$ имеют место оценки:*

$$S_j(t,\lambda) = O(e^{-i\mu_j}\|\tilde f\|_1) \quad (j=1,2), \tag{60}$$

$$S_j(t,\lambda) = O(e^{i\mu_3\xi(t)}\|\tilde f\|_1) \quad (j=3,4), \tag{61}$$

$$S_j(t,\lambda) = O(e^{i\mu_3(\xi(1)-\xi(t))}\|\tilde f\|_1) \quad (j=5,6). \tag{62}$$

Если $f(x)=\chi(x)$, то в оценках (60)–(62) следует $\|\tilde f\|_1$ заменить на λ^{-1}.

Утверждения леммы следуют из лемм 16, 23–28.

5. Нули $\Delta(\lambda)$ совпадают с характеристическими значениями оператора A. Мы изучили асимптотическое поведение $\Delta(\lambda)$ при $\arg\lambda \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Главная часть этой асимптотики есть экспоненциальный многочлен по λ. Аналогичное исследование можно провести и при других значениях λ. Из полученной асимптотики, как известно из работы [12, с. 435–438], заключаем, что характеристические значения расположены в некоторых полосах, причем в любом прямоугольнике (две стороны — на границе полосы) каждой полосы одинаковой ширины число характеристических чисел не превосходит одного и того же числа (зависящего лишь от ширины прямоугольника). Теперь мы через S_{δ_0} обозначим область, получающуюся удалением из λ-плоскости всех нулей $\Delta(\lambda)$, вместе с окрестностями одного итого же достаточно малого радиуса δ_0. Пусть

$$\Omega_r(t;f) = \int\limits_{|\lambda|=r} \Omega(t,\lambda;f)\,d\lambda,$$

где $\Omega(t,\lambda;f)$ — пятая компонента вектора $\Phi(t,\lambda)U^{-1}(\lambda)U(g_\lambda F)$ и $|\lambda|=r$ целиком находится в S_{δ_0}.

Лемма 30. *Если $\tilde f(x) = f(x)(1-x)^\beta \in L[0,1]$, то*

$$\lim_{r\to\infty}\|\Omega_r(t;f)\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0, \quad \varepsilon>0. \tag{63}$$

Доказательство. Лемму 29 мы получили при $\arg\lambda \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Аналогичными рассуждениями получаем подобный результат и при произвольных значениях $\arg\lambda$. Тогда имеем

$$\|\Omega_r(t;f)\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} \le C\|\tilde f\|_1, \tag{64}$$

где $C>0$ и не зависит от r. Формула справедлива, если $f(x)=\chi(x)$ — характеристическая функция отрезка из $(0,1)$. Пусть $\varphi(x)$ — ступенчатая функция, обращающаяся в ноль в окрестности концов отрезка $[0,1]$. Тогда из (64) имеем

$$\|\Omega_r(t;f)\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} \le \|\Omega_r(f-\varphi)\| + \|\Omega_r\varphi\| \le C\|\tilde f - \tilde\varphi\|_1 + \|\Omega_r(\varphi)\|.$$

Но

$$\|\tilde f - \tilde\varphi\|_1 \le \int\limits_0^\varepsilon |f(x)|(1-x)^\beta\,dx + \int\limits_{1-\varepsilon}^1 |f(x)|(1-x)^\beta\,dx + \varepsilon^\beta\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon}|f(x)-\varphi(x)|\,dx.$$

Значит, $\|\tilde f - \tilde\varphi\|_1$ за счет выбора $\varphi(x)$ можно сделать сколь угодно малым, и тогда утверждение леммы легко следует из теоремы Банаха – Штейнгауза.

Теорема 5 (основная). *Пусть* $f(x)(1-x)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \in L[0,1]$. *Тогда, если* $0<\delta<\varepsilon$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(x,f) - \sigma_r(\xi,f_1)|_{\xi=\varphi^{-1}(x)}\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0, \tag{65}$$

где $S_r(x,f)$ *— частичная сумма ряда Фурье по собственным функциям оператора* A *для тех характеристических чисел* λ_k, *для которых* $|\lambda_k|<r$, $\sigma_r(\xi,f_1)$ *— частичная сумма ряда Фурье функции* $f_1(\xi) = f(\varphi(\xi))$ *по системе* $\{e^{2k\pi\gamma^{-1}\xi i}\}_{-\infty}^{+\infty}$ *для тех* k, *для которых* $|2k\pi|<\gamma r$, $\gamma = \int\limits_0^1 \sqrt{-\theta_0'(t)}\,dt$, $\varphi(\xi)$ *определяется из* $\int\limits_0^{\varphi(\xi)} \sqrt{-\theta_0'(t)}\,dt = \xi$, *а* $\theta_0(x)$ *— инволюция такая, что* $\theta_0(x)\in C^3[0,1]$, $\theta_0'(x)<0$ *для всех* x *из* $[0,1]$, $\theta_0(x)\equiv\theta(x)$ *при* $x\in[\delta,1-\delta]$.

Доказательство. Введем оператор $A_0 f = \int\limits_0^{\theta_0(x)} f(t)\,dt$ и пусть $R_\lambda^0 = (E-\lambda A_0)^{-1}A_0$ — его резольвента. По теореме 1 при $x\in[\varepsilon,1-\varepsilon]$ $R_\lambda f = w_5(\eta)$, $R_\lambda^0 f = w_5^0(\eta)$, где $\eta = (x-\delta)(1-2\delta)$ и w_5^0 — то же самое, что и w_5, но для оператора A_0. Так как пятые компоненты $g_\lambda F$ и $g_\lambda^0 F^0$ при указанных x совпадают, то по лемме 30

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} [R_\lambda f - R_\lambda^0 f]\,d\lambda \Big\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0. \tag{66}$$

Но в работе [13] было доказано, что

$$\lim_{r\to\infty} \Big\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda^0 f\,d\lambda + \sigma_r(\xi,f_1)|_{\xi=\varphi^{-1}(x)} \Big\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0. \tag{67}$$

Поскольку $S_r(x,f) = -\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda$, то из (66) и (67) получаем (65). Теорема доказана.

Замечание. Здесь мы считаем, что $|\lambda| = r$ целиком находится в S_{δ_0}, где S_{δ_0} есть пересечение областей S_{δ_0}, относящихся к A и A_0.

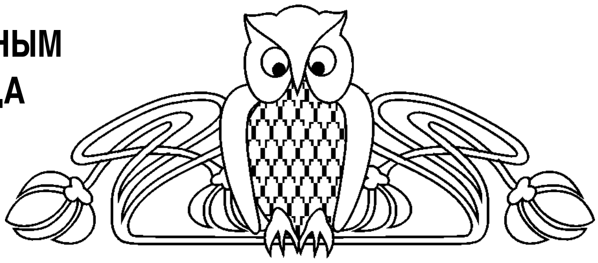
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) *и гранта Президента РФ (проект НШ*-2970.2008.1)

Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–949.
2. *Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, II // Диф. уравнения. 1980. Т. 16, № 6. С. 980–1009.
3. *Седлецкий А.М.* Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные апроксимации, II // Современная математика. Фундаментальные направления. М.: Изд-во МАИ. 2003. Т. 6. С. 3–162.
4. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
5. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.
6. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110.
7. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.
8. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. 303 с.
9. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
11. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
12. *Беллман Б., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
13. *Кувардина Л.П., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией // Изв. вузов. Математика. 2008. № 5. С. 67–76.

УДК 511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЕЛ С ДВОИЧНЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ



А.П. Науменко

Белгородский государственный университет,
E-mail: gritsenko@bsu.edu.ru

Пусть p —-простое число, такое, что 2 является первообразным корнем по модулю p. Пусть N_0 –- множество натуральных чисел, двоичное разложение которых содержит четное число 1. Для числа чисел из множества N_0, лежащих в арифметической прогрессии с разностью p и не превосходящих X, получена асимптотическая формула:
$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv a \pmod p\\ n\in N_0}} 1 = \frac{X}{2p}+O(X^{\eta}), \quad \text{где } \eta = \frac{\log_2 p}{p-1}.$$

Ключевые слова: двоичное разложение, тригонометрическая сумма

On the Distribution of the Numbers with Binary Expansions of a Special Type in Arithmetic Progressions

A.P. Naumenko

Let 2 be the primitive root mod p. Let N_0 be a set of natural numbers whose binary expansions contain even numbers of 1. Numbers from N_0 are uniformly distributed in arithmetic progressions with the difference p.

Key words: binary expansion, trigonometric sum

Пусть N_0 — множество натуральных чисел, двоичное разложение которых содержит четное число 1.

А.О. Гельфонд доказал следующую теорему [1]:

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv l \pmod m\\ n\in N_0}} 1 = \frac{X}{2m}+O(X^{\lambda}), \quad \lambda = \frac{\ln 3}{\ln 4} = 0.792\ldots \tag{1}$$

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема, которая уточняет (1) для частного случая.

Теорема 1. *Пусть p — простое число, такое, что 2 является первообразным корнем по модулю p. Пусть a — произвольное целое число из отрезка $[0; p-1]$. Тогда справедлива асимптотическая формула:*

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv a \pmod p\\ n\in N_0}} 1 = \frac{X}{2p}+O(X^{\eta}),$$

где $\eta = \dfrac{\log_2 p}{p-1}$, постоянная в знаке O зависит только от p.

Для доказательства теоремы нам потребуются четыре леммы.

Введем следующее обозначение:

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k\in N_0,\\ -1, & \text{если } k\notin N_0. \end{cases}$$

Справедливо тождество

$$\sum_{\substack{0\le n\le 2^Q-1\\ n\equiv a \pmod b}} \varepsilon(n) = \sum_{n=0}^{2^Q-1}\varepsilon(n)\frac{1}{b}\sum_{c=1}^{b} e^{2\pi i c\frac{n-a}{b}} = \frac{1}{b}\sum_{c=1}^{b} e^{-2\pi i\frac{ca}{b}}\sum_{n=0}^{2^Q-1}\varepsilon(n)e^{2\pi i\frac{cn}{b}}. \tag{2}$$

Лемма 1. *Имеет место следующее равенство:*

$$S_Q(\alpha) = \sum_{0\le n<2^Q}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n} = \prod_{r=0}^{Q-1}\left(1-e^{2\pi i\alpha 2^r}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции по Q. При $Q = 1$ имеем

$$\sum_{0\le n<2}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}=\prod_{r=0}^{0}(1-e^{2\pi i\alpha 2^r}).$$

Пусть при некотором $Q \ge 1$ лемма справедлива. Проверим ее справедливость для $Q+1$:

$$\sum_{0\le n<2^{Q+1}}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}=\sum_{0\le n<2^{Q}}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}+\sum_{2^Q\le n<2^{Q+1}}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}.$$

Заметим, что $\varepsilon\left(2^Q+n\right)=-\varepsilon(n)$, так как $n<2^Q$. Далее,

$$\sum_{0\le n<2^{Q}}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}+\sum_{2^Q\le n<2^{Q+1}}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}=\sum_{0\le n<2^{Q}}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}-e^{2\pi i\alpha 2^Q}\sum_{0\le n<2^{Q}}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}=$$

$$=(1-e^{2\pi i\alpha 2^Q})\sum_{0\le n<2^{Q}}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}.$$

Но, по предположению индукции, $\sum\limits_{0\le n<2^{Q}}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}=\prod\limits_{r=0}^{Q-1}(1-e^{2\pi i\alpha 2^r})$. Таким образом,

$$\sum_{0\le n<2^{Q+1}}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}=\prod_{r=0}^{Q}(1-e^{2\pi i\alpha 2^r}).$$

Лемма доказана.
Из леммы 1 имеем равенство

$$\left|\sum_{0\le n<2^{Q}}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}\right|=\prod_{r=0}^{Q-1}|1-e^{2\pi i\alpha 2^r}|=\prod_{r=0}^{Q-1}|e^{2\pi i\alpha 2^r}-1|=$$

$$=\prod_{r=0}^{Q-1}\left|2ie^{\pi i\alpha 2^r}\left(\frac{e^{\pi i\alpha 2^r}-e^{-\pi i\alpha 2^r}}{2i}\right)\right|=2^Q\prod_{r=0}^{Q-1}|\sin\pi\alpha 2^r|.$$

Лемма 2 [2, с.78]. *Пусть n — натуральное число, x, y — комплексные числа. Тогда*

$$x^n-y^n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(xe^{2\pi i\frac{k}{n}}-ye^{-2\pi i\frac{k}{n}}\right).$$

Лемма 3. *Пусть n — нечетное число. Тогда верно*

$$\prod_{r=0}^{Q-1}\left|\sin\frac{\pi k}{n}\right|=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Доказательство. Пусть $f(z)=e^{2\pi iz}-e^{-2\pi iz}=2i\sin 2\pi z$. Пусть $x=e^{2\pi iz}$, $y=e^{-2\pi iz}$. Тогда по лемме 2

$$f(nz)=x^n-y^n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(xe^{2\pi i\frac{k}{n}}-ye^{-2\pi i\frac{k}{n}}\right)=\prod_{k=0}^{n-1}f\left(z+\frac{k}{n}\right)=$$

$$=f(z)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}f\left(z+\frac{k}{n}\right)\prod_{k=\frac{n-1}{2}+1}^{n-1}f\left(z+\frac{k}{n}-1\right)=f(z)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}f\left(z+\frac{k}{n}\right)f\left(z-\frac{k}{n}\right).$$

Таким образом,

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(nz)}{f(z)}=\lim_{z\to 0}\frac{2i\sin 2\pi nz}{2i\sin 2\pi z}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\sin 2\pi nz}{2\pi nz}}{\frac{\sin 2\pi z}{2\pi z}}n=n.$$

При $z = 0$ имеем

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(-\frac{k}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^2 i^2 \sin^2 \frac{2\pi k}{n} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left|\sin \frac{2\pi k}{n}\right|^2 = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left|\sin \frac{\pi k}{n}\right| = n.$$

Откуда

$$\prod_{r=0}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi k}{n}\right| = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть p — простое число, такое, что 2 является первообразным корнем по модулю p. Тогда справедлива оценка*

$$\left|\sum_{pn+a\le 2^Q-1} \varepsilon(pn+a)\right| \le f(p) 2^{Q\eta},$$

где $\eta = \dfrac{\log_2 p}{p-1}$, $\quad f(p) = 2\left(\dfrac{3^{\frac{p-1}{2}}}{p}\right)^{\left\{\frac{Q-1}{p-1}\right\}}$, $\quad 0 \le a < p$.

Доказательство. На основании (2) и (3) имеем

$$\left|\sum_{0\le pn+a\le 2^Q-1} \varepsilon(pn+a)\right| = S_Q(0) + \frac{1}{p}\sum_{c=1}^{p-1} e^{-2\pi i \frac{ac}{p}} S_Q\left(\frac{c}{p}\right).$$

Оценим сумму $S_Q\left(\frac{c}{p}\right)$ при любом $c \in [1, p-1]$. Рассмотрим произведение $\prod\limits_{r=0}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right|$. Заметим, что $\left|\sin \frac{a\pi}{p}\right|$ зависит только от остатка a при делении на p. Так как 2 является первообразным корнем по модулю p, числа $2^0, 2^1, ..., 2^{p-2}$ образуют приведенную систему вычетов по модулю p. Следовательно,

$$\prod_{r=0}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right| = \left(\prod_{s=1}^{\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]} \prod_{r=(p-1)(s-1)}^{(p-1)s-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right|\right) \prod_{r=(p-1)\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right| =$$

$$= \prod_{r=(p-1)\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right| \left(\prod_{m=1}^{p-1} \left|\sin \frac{\pi m}{p}\right|\right)^{\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]}.$$

Используя тот факт [1], что $\sin x \sin 2x \le \frac{3}{4}$ при $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем

$$\prod_{r=(p-1)\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right| \le \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}\left\{\frac{Q-1}{p-1}\right\}}.$$

Пользуясь леммой 3, имеем

$$\prod_{r=0}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right| \le \left(\frac{p}{2^{p-1}}\right)^{\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}\left\{\frac{Q-1}{p-1}\right\}}.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{pn+a\le 2^Q-1} \varepsilon(pn+a)\right| \le 2^Q \left(\frac{p}{2^{p-1}}\right)^{\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}\left\{\frac{Q-1}{p-1}\right\}} \le 2^{Q\frac{\log_2 p}{p-1}+1} \left(\frac{3^{\frac{p-1}{2}}}{p}\right)^{\left\{\frac{Q-1}{p-1}\right\}}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{\substack{n\leq X\\ n\equiv a \pmod p\\ n\in N_0}} 1$. Для нее справедливо равенство

$$\sum_{\substack{n\leq X\\ n\equiv a \pmod p\\ n\in N_0}} 1 = \frac{X}{2p} + \frac{1}{2}\sum_{pn+a\leq X}\varepsilon(pn+a) + O(1).$$

Таким образом, достаточно оценить сумму

$$S(X,a) = \sum_{pn+a\leq X}\varepsilon(pn+a).$$

Определим натуральное число k неравенствами $2^k \leq X < 2^{k+1}$. Тогда имеем

$$S(X,a) = \sum_{pn+a\leq 2^k-1}\varepsilon(pn+a) + \sum_{2^k\leq pn+a\leq X}\varepsilon(pn+a).$$

Так как $2^k \leq X < 2^{k+1}$, справедливо тождество

$$\sum_{2^k\leq pn+a\leq X}\varepsilon(pn+a) = -\sum_{0\leq pn+l\leq X-2^k}\varepsilon(pn+l) = -S(X-2^k,l),$$

где $l\equiv a-2^k(\mod p)$, $l\in[0,p-1]$.

Получено равенство

$$S(X,a) = S(2^k,a) - S(X-2^k,l).$$

Применяя то же рассуждение, что к $S(X,a)$, к сумме $S(X-2^k,l)$ и так далее, приходим к неравенству

$$|S(X,a)| \leq |S(2^k,a)| + |S(2^{k_1},a_1)| + \cdots,$$

где $k > k_1 > \cdots$

Применяя к каждой сумме в правой части последнего неравенства лемму 4, получаем

$$|S(X,a)| \leq 2\frac{3^{\frac{p-1}{2}}}{p}\sum_{i=0}^{[\log_2 X]} 2^{([\log_2 X]-i)\frac{\log_2 p}{p-1}} \leq 2\frac{3^{\frac{p-1}{2}}}{p}c(p)X^{\frac{\log_2 p}{p-1}},$$

где $c(p) = \frac{1}{1-p^{-1/(p-1)}}$.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Gelfond A.O.* Sur les nombres qui ont des proprietes additives et multiplicatives donnies // Acta Arith. 1968. V. XIII. P. 259–265.

2. *Айерленд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МЕХАНИКА

УДК 531.36: 534.1

ХАОТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В.С. Асланов, Б.В. Иванов

Самарский государственный аэрокосмический университет,
кафедра теоретической механики
E-mail: aslanov_vs@mail.ru

Рассматривается хаотическое движение тела затупленной формы в атмосфере, описываемое нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. На тело действует восстанавливающий момент, малый возмущающий периодический момент и демпфирующий момент. Фазовый портрет невозмущенной системы имеет точки неустойчивого равновесия. На основании метода Мельникова найдены критерии, определяющие границы хаоса системы. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие справедливость полученных критерий.

Ключевые слова: нелинейная система, периодические возмущения, хаос, гетероклинические орбиты, метод Мельникова.

Chaotic Motion of Nonlinear System

V.S. Aslanov, B.V. Ivanov

Chaotic motion of a body of the blunted form in an atmosphere described is considered by the nonlinear differential equation of the second order. On a body the restoring moment, the small perturbed periodic moment and the damped moment operates. The phase portrait of the unperturbed system has points of unstable balance. On the basis of Melnikov method the criteria determining borders of chaos of system are found. The results of the numerical simulations confirming validity, received criterion are submitted.

Key words: nonlinear system, periodic perturbations, chaos, heteroclinic orbits, Melnikov method.

ВВЕДЕНИЕ

Для спуска в разреженной атмосфере Марса используются тела малого удлинения затупленной формы, которая обеспечивает эффективное торможение. Такие тела, в зависимости от массовой компоновки, могут иметь, помимо двух балансировочных положений пространственного угла атаки: $\alpha^* = 0, \pi$, еще и третье положение равновесия: $\alpha \in (0, \pi)$. Для аппроксимации восстанавливающего момента используют бигармоническую зависимость вида [1]

$$m_\alpha(\alpha) = a \sin\alpha + b \sin 2\alpha. \tag{1}$$

Для рассматриваемого класса космических аппаратов положение $\alpha = 0$ является устойчивым, поэтому производная от коэффициента восстанавливающего момента по углу атаки в этой точке отрицательная

$$\frac{d\ m_\alpha(\alpha)}{d\ \alpha}\Big|_{\alpha=0} = (a\cos\alpha + 2b\cos 2\alpha)|_{\alpha=0} < 0,$$

или

$$2b < -a. \tag{2}$$

А если существует промежуточное балансировочное положение на интервале $(0, \pi)$, то

$$m_\alpha(\alpha) = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha = \sin \alpha (a + 2b \cos \alpha) = 0, \tag{3}$$

что выполняется, если

$$|2b| > |a|. \tag{4}$$

Очевидно, что неравенства (2) и (4) выполняются одновременно при $b < 0$. На тело кроме восстанавливающего момента (1) действует малый демпфирующий момент вида [2]

$$m_D = -\delta(1 + \sin^2 \alpha)\dot{\alpha} \tag{5}$$

и малый возмущающий периодический момент, вызванный малым изменением положения центра масс тела:

$$m_P = \varepsilon \sin \alpha \cos(\omega t). \tag{6}$$

Здесь ε, δ — малые положительные параметры, ω — частота внешнего возмущающего момента ($\omega > 0$). С помощью соотношений (1), (5) и (6) запишем уравнение возмущенного плоского движения тела относительно центра масс в сопротивляющейся среде:

$$\ddot{\alpha} = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha + \varepsilon \sin \alpha \cos(\omega t) - \delta(1 + \sin^2 \alpha)\dot{\alpha}. \tag{7}$$

Ставится задача показать возможность возникновения хаоса тел, описываемых уравнением (7), найти с помощью метода Мельникова [3] критерии возникновения хаоса.

1. НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Уравнение возмущенного движения (7) при $\varepsilon = 0$, $\delta = 0$ сводится к невозмущенной системой с одной степенью свободы вида:

$$\ddot{\alpha} = a \sin \alpha + b \sin 2\alpha. \tag{8}$$

Очевидно, что если $b = 0$ или $a = 0$ (при замене переменных $\varphi = 2\alpha$), уравнение (8) описывает движение математического маятника.

Будем рассматривать только случаи, когда $b < 0$, тогда система (8) имеет три положения равновесия. Два устойчивых положения равновесия находятся в точках $\alpha = \pm i\pi$, где $i = 0, 1, 2, \ldots$. Неустойчивое положение равновесия

$$\alpha_S = \pm \arccos\left(-\frac{a}{2b}\right) \tag{9}$$

располагается в зависимости от знака коэффициента a. Если $a > 0$, то неустойчивое положение равновесия $\alpha_S \in (0, \pi/2)$, если $a < 0$, то $\alpha_S \in (\pi/2, \pi)$. При значении коэффициента $a = 0$ положения равновесия $\alpha_S = \pi/2$. Уравнение (8) имеет интеграл энергии

$$\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + W(\alpha) = E, \tag{10}$$

где E — полная энергия, $W(\theta) = a \cos \alpha + b \cos^2 \alpha$ — потенциальная энергия.

На рис. 1 показаны фазовые траектории, соответствующие колебаниям в окрестности центров: $\ldots c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \ldots$, $(\alpha, \dot{\alpha}) = (\pm i\pi, 0)$ и вращению. Разделяют эти зоны сепаратрисы, которые соединяют седловые точки: $\ldots s_{-2}, s_{-1}, s_1, s_2, \ldots$ $(\alpha, \dot{\alpha}) = (\pm(\alpha_S + j\pi), 0)$.

Разделим фазовый портрет вертикалями, проходящими через седловые точки, на области A_i ($i = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$). Каждая область A_i содержит центр c_i.

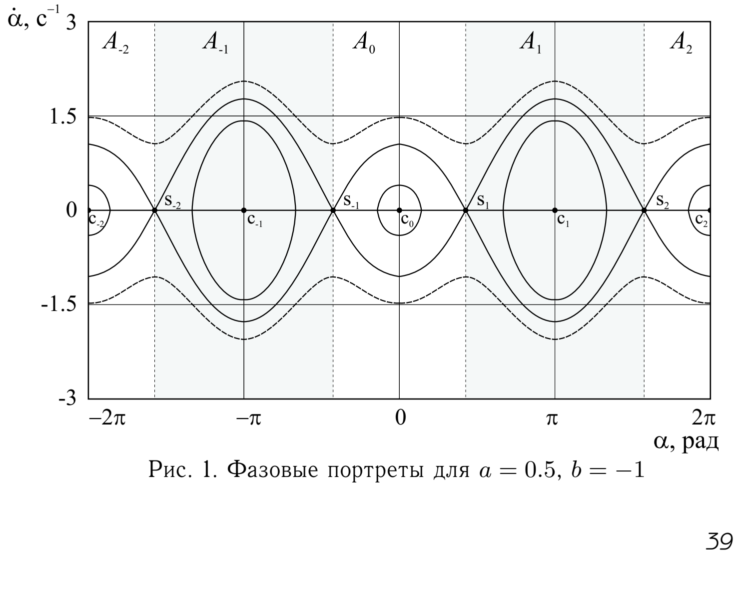


Рис. 1. Фазовые портреты для $a = 0.5$, $b = -1$

Будем изучать две группы гетероклинических траекторий, принадлежащих областям A_0 и A_1. Седловые точки соединены сепаратрисами (гетероклиническими траекториями). Согласно методу Мельникова для получения критерия возникновения хаоса в окрестности сепаратрис необходимо найти аналитические решения уравнения (7) для гетероклинических орбит. Воспользуемся интегралом энергии (10) и значение полной энергии в седловой точке (9)

$$W(\alpha_S) = a\cos\alpha_S + b\cos^2\alpha_S = -\frac{a^2}{4b}, \tag{11}$$

где $\cos\alpha_S = -a/2b$.

В начале рассмотрим гетероклинические траектории в области A_0. Произведем замену переменных

$$x = \tan\frac{\alpha}{2}$$

в интеграле энергии (10), после чего разделим переменные и возьмем квадратуру. В результате получим

$$t - t_0 = \frac{2}{\sqrt{P}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x_S^2 - x^2} = \frac{2}{\sqrt{P}}\ln\left|\frac{x_S + x}{x_S - x}\right|\Big|_{x_0}^{x}, \tag{12}$$

где $x_S = \operatorname{tg}\frac{\alpha_S}{2}$, $P = -\frac{(a-2b)^2}{2b}$ в силу условий (2) и (4).

Окончательно, решение уравнения, описывающее невозмущенное движение на сепаратрисе в области A_0, запишем в виде, удобном для использования метода Мельникова:

$$\alpha_{\pm}(t) = \pm 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_S}{2}\operatorname{th}\frac{\lambda t}{2}\right), \tag{13}$$

$$\sigma_{\pm}(t) = (\dot\alpha)_{\pm} = \pm\frac{\lambda\sin\alpha_S}{\operatorname{ch}(\lambda t) + \cos\alpha_S}, \tag{14}$$

где $\lambda = \sqrt{\dfrac{a^2 - 4b^2}{2b}}$.

Перейдем к построению гетероклинических орбит в области A_1. Для этого введем новую переменную

$$\beta = \pi - \alpha, \tag{15}$$

тогда уравнение невозмущенного движения (8) примет вид

$$\ddot\beta = -a\sin\beta + b\sin 2\beta.$$

Этому уравнению соответствует решение $\beta = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\beta_S}{2}\operatorname{th}\dfrac{\lambda(t - t_0)}{2}\right)$.

Выполняя замену, обратную замене (15), получим гетероклинические траектории для области A_1

$$\alpha_{\pm}(t) = \pi \pm 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha_S}{2}\operatorname{th}\frac{\lambda t}{2}\right), \tag{16}$$

$$\sigma_{\pm}(t) = (\dot\alpha)_{\pm} = \pm\frac{\lambda\sin\theta_S}{\operatorname{ch}(\lambda t) - \cos\theta_S}. \tag{17}$$

2. ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ. КРИТЕРИИ МЕЛЬНИКОВА

Рассмотрим возмущенную систему (7). Заменим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (7) двумя уравнениями первого порядка

$$\dot\alpha = \sigma = f_1 + g_1, \tag{18}$$

$$\dot\sigma = a\sin\alpha + b\sin 2\alpha + \varepsilon\sin\alpha\cos(\omega t) - \delta(1 + \sin^2\alpha)\sigma = f_2 + g_2. \tag{19}$$

S. Wiggins в своей книге [4] отметил влияние фазы возмущающей периодической силы на хаотическое движение и предложил вместо неавтономной системы второго порядка (18), (19) использовать автономную систему третьего порядка следующего вида:

$$\begin{gathered}\dot{\alpha} = \sigma = f_1 + g_1,\\ \dot{\sigma} = a\sin\alpha + b\sin 2\alpha + \varepsilon\sin\alpha\cos(\phi) - \delta(1+\sin^2\alpha)\sigma = f_2 + g_2,\\ \dot{\phi} = \omega,\end{gathered} \tag{20}$$

где $f_1 = \sigma,\ g_1 = 0,\ f_2 = a\sin\alpha + b\sin 2\alpha,\ g_2 = \varepsilon\sin\alpha\cos(\omega t) - \delta(1+\sin^2\alpha)\sigma$.

Функция Мельникова для возмущенной системы (20) примет вид [4]

$$\begin{aligned}M^{\pm}(t_0,\phi_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{f_1[q^0_{\pm}(t)]g_2[q^0_{\pm}(t),\omega t + \omega t_0 + \phi_0] - f_2[q^0_{\pm}(t)]g_1[q^0_{\pm}(t),\omega t + \omega t_0 + \phi_0]\}\,dt =\\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{f_1[q^0_{\pm}(t)]g_2[q^0_{\pm}(t),\omega t + \omega t_0 + \phi_0]\}\,dt,\end{aligned} \tag{21}$$

где $q^0_{\pm}(t) = [\alpha_{\pm}(t), \sigma_{\pm}(t)]$ — решения для гетероклинических орбит (13), (14) или (16), (17) для областей A_0 или A_1 соответственно. Подставляя (20) в (21), получим

$$M^{\pm}(t_0,\phi_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\pm}\{\varepsilon\sin\alpha_{\pm}\cos(\omega t + \omega t_0 + \phi_0) - \delta(1+\sin^2\alpha_{\pm})\sigma_{\pm}\}\,dt$$

или

$$M^{\pm}(t_0,\phi_0) = M_{\varepsilon} + M_{\delta},$$

где

$$M_{\varepsilon} = \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\pm}\sin\alpha_{\pm}\cos(\omega t + \omega t_0 + \phi_0)\,dt, \tag{22}$$

$$M_{\delta} = -\delta\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+\sin^2\alpha_{\pm})\sigma^2_{\pm}\,dt. \tag{23}$$

Функции M_{ε} и M_{δ} соответствуют двум видам малых возмущений: периодическому возмущающему моменту и демпфирующему моменту. Согласно методу Мельникова [3] условия пересечения сепаратрис можно записать как

$$M_{\delta} < M_{\varepsilon}, \tag{24}$$

для рассматриваемых двух областей A_0 и A_1 функции (22) и (23) представим в виде

$$M^{(k)}_{\varepsilon} = -\varepsilon I^{(k)}_{\pm}\sin(\omega t_0 + \phi_0), \tag{25}$$

$$M^{(k)}_{\delta} = -\delta J^{(k)}_{\pm}, \quad k = 0, 1, \tag{26}$$

где

$$I^{(k)}_{\pm} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma^{(k)}_{\pm}\sin\alpha^{(k)}_{\pm}\sin(\omega t)\,dt, \tag{27}$$

$$J^{(k)}_{\pm} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+\sin^2\alpha^{(k)}_{\pm})\big(\sigma^{(k)}_{\pm}\big)^2\,dt. \tag{28}$$

Несобственные интегралы (27) и (28) вычисляются с учетом решений (13), (14) и (16), (17). Условие (24) для областей A_0 и A_1 для нового параметра демпфирующего момента $\Delta = \delta/\varepsilon$ в силу соотношений (25)–(28) запишется следующим образом:

$$\Delta < \frac{I^{(0)}_{\pm}}{J^{(0)}_{\pm}} = \Delta_0 \quad \text{(для области } A_0\text{)}, \tag{29}$$

$$\Delta < \frac{I_{\pm}^{(1)}}{J_{\pm}^{(1)}} = \Delta_1 \quad (\text{для области } A_1), \tag{30}$$

В силу решений (13), (14), (16), (17) и интегралов (27), (28) параметры (29) и (30) являются функциями a, b и ω

$$\Delta_k = \Delta_k(a, b, \omega), \quad k = 0, 1. \tag{31}$$

Критерии (31) определяют поведение возмущенной системы (7) или (20) в окрестности сепаратрис.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Будем изучать поведение возмущенной системы (20) вблизи сепаратрис путем численного интегрирования методом Рунге – Кутты. Во всех расчетах будем принимать коэффициенты бигармонического момента (1), равными $a = 0.5$, $b = -1$. Согласно формуле (9) угол α в седловой точке на границе между областями A_0 и A_1 равен $\alpha_S = \arccos\left(-\dfrac{a}{2b}\right) = 1.3181$.

На рис. 2 показано влияние возмущающего момента $m_P = \varepsilon \sin\alpha \cos(\omega t)$ для частоты $\omega = 1$, малых параметров $\varepsilon = 0.01$ и $\delta = 0$ при следующих начальных условиях: $\alpha_0 = 0$, $\dot{\alpha}_0 = 1.0607$ и $\phi_0 = \pi$. На этом рисунке видно возмущенная фазовая траектория переходит из одной области в другую и, меняя только, например, начальную фазу возмущающей силы ϕ_0, можно получить самые разнообразные траектории. Наличие малого демпфирующего момента $\delta = 0.01$ при сохранении всех остальных параметров и условий фазовый портрет принципиально меняется. Фазовые траектории не покидают область A_0 и притягиваются к центру c_0 (рис.3.).

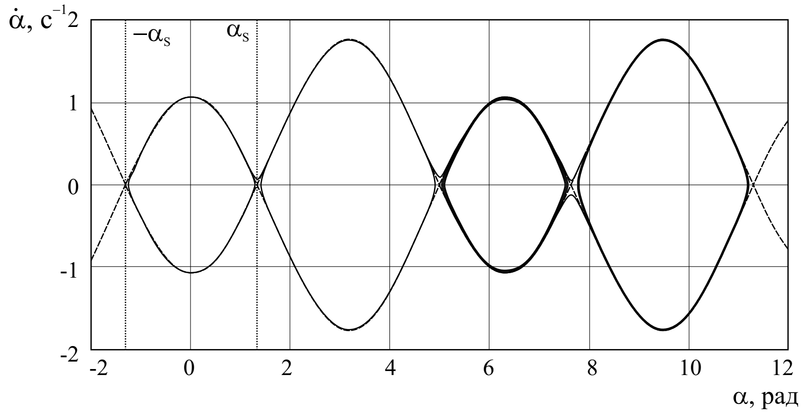


Рис. 2. Фазовый портрет возмущенной системы при $\varepsilon = 0.01$ и $\delta = 0$ (сплошная линия) и невозмущенные сепаратрисы (пунктирная линия)

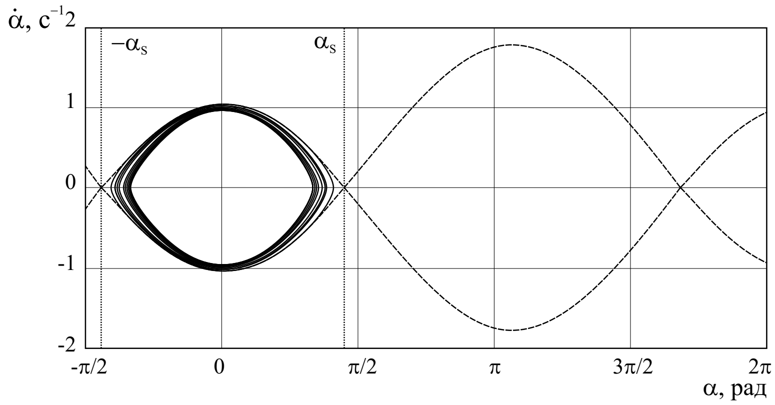


Рис. 3. Фазовый портрет возмущенной системы при $\varepsilon = 0.01$ и $\delta = 0.01$ (сплошная линия) и невозмущенные сепаратрисы (пунктирная линия)

С целью проверки критериев (29) и (30) исследуем поведение возмущенной системы в окрестности сепаратрис. Для параметров $a = 0.5$, $b = -1$ и частоты $\omega = 1$ получаем по формулам (29) и (30), с учетом (26) и (27) следующие значения критериев для областей A_0 и A_1: $\Delta_0 = 0.444$, $\Delta_1 = 0.284$ или критические значения коэффициента демпфирующего момента $\delta_0 = \varepsilon\Delta_0 = 0.00444$, $\delta_1 = \varepsilon\Delta_1 = 0.00284$.

На рис. 4 показаны результаты численного моделирования при начальных условиях вблизи сепаратрисы: $\alpha_0 = -\alpha_S - 0.05 = -1.3681$, $\dot{\alpha}_0 = 0.07$ и $\phi_0 = \pi/2$, когда коэффициента демпфирующего момента меньше критического значения $0.04 = \delta < \delta_0$.Фазовая траектория делает несколько оборотов в области A_0, а затем переходит в область A_{-1} — наблюдается хаос. При $0.05 = \delta > \delta_0$ и тех же начальных значениях возмущенная траектория только один раз пересекает невозмущенную сепаратрису, после чего остается в области A_0 (рис. 5).

Аналогичные результаты получаются при моделировании возмущенного движения в области A_1. Результаты моделирования подтверждают высокую точность критериев, найденных на основе метода Мельникова.

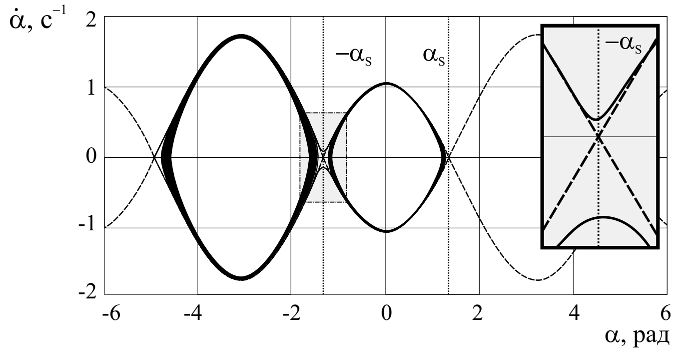


Рис. 4. Возмущенная траектория при коэффициенте демпфирующего момента меньше критического значения $0.04 = \delta < \delta_0$

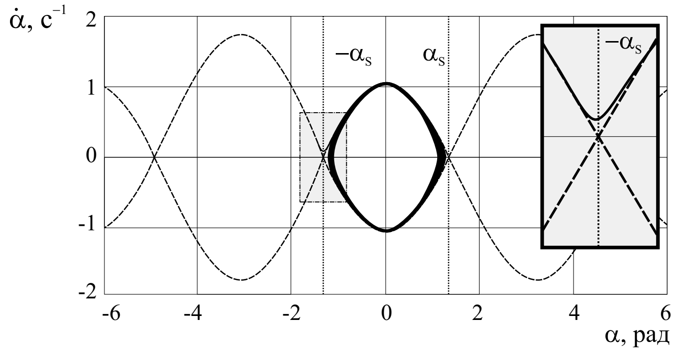


Рис. 5. Возмущенная траектория при коэффициенте демпфирующего момента больше критического значения $0.05 = \delta > \delta_0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе авторами сделана попытка описания переходных процессов, возникающих при спуске космического корабля в атмосфере планеты методами хаотической механики, в частности методом Мельникова. Установлено, что хаотические движения могут возникать в окрестности невозмущенной сепаратрисы в рассмотренной задаче. Критерии возникновения хаоса, полученные методом Мельникова, хорошо согласуются с результатами численных исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 06-01-00355а).

Библиографический список

1. *Асланов В.С.* Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М.: Физматлит, 2004.
2. *Ярошевский В.А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978.
3. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. об-ва. 1963. Т. 12. С. 1–56.
4. *Wiggins S.* Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. N.Y.: Springer, 1990.

УДК 62.534(031)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ

С.П. Безгласный, О.А. Мысина

Самарский государственный аэрокосмический университет,
кафедра теоретической механики
E-mail: bezglasnsp@rambler.ru, olgamysina@yandex.ru

Решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольных программных движений твердого тела, закрепленного на подвижной платформе. Управление получено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных систем, позволяющего использовать функции Ляпунова со знакопостоянными производными.

Ключевые слова: механическая система, стабилизация, программное движение, функция Ляпунова, предельные функции, твердое тело.

The Stabilization of Program Motions of Firm Body on a Moving Platform

S.P. Bezglasnyi, O.A. Mysina

We consider firm body with fixed point on a moving platform. We solve the problem of construction asimptotically stability programm motion. The programm motion can be any function. Control is received in the form the analytical solution. We solve the problem of stabilization by the direct Lyapunov's method and the method of limiting functions and systems. In this case we can use the Lyapunov's functions having constant signs derivatives.

Key words: mechanical system, stabilization, program motion, Lyapunov's function, limiting functions, rigid body.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи об управляемых программных движениях твердого тела на подвижном основании являются актуальными и привлекают внимание многих исследователей в связи с проблемой конструирования приборов на движущихся объектах (летательных аппаратах, кораблях и др.). Проблема построения и исследования свойств и условий устойчивости таких движений рассматривалась в работах многих ученых, например [1–3].

В данной работе ставится и решается задача об определении двухуровневого управления, реализующего и стабилизирующего произвольные заданные движения твердого тела на подвижной платформе при заданном движении платформы. Решение задачи сводится к исследованию нулевого решения неавтономной системы и проводится на основе прямого метода Ляпунова [4]. Метод предельных систем [5] и его модификация [6] позволяют при использовании функций Ляпунова со знакопостоянными производными строить искомое управление в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение платформы относительно неподвижной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$, при котором оси жестко связанной с платформой подвижной системы координат $OXYZ$ остаются параллельными осям абсолютной системы $O_1\xi\eta\zeta$ при произвольном заданном законе движения

$$\begin{cases} \xi = \xi(t) \\ \eta = \eta(t) \\ \zeta = \zeta(t) \end{cases}$$

точки O платформы. Пусть на платформе в точке O закреплено твердое тело массы m, имеющее одну неподвижную относительно платформы точку. Введем жестко связанную с телом систему координат $Oxyz$ таким образом, чтобы центр масс тела C лежал на оси Oz и имел координату $z = a > 0$. Предположим, что Oz — главная центральная ось инерции тела, а оси Ox и Oy параллельны двум другим главным осям инерции. Поставим задачу о реализации управляющими силами, прикладываемыми к телу, произвольных заданных (программных) движений твердого тела и стабилизации этих движений.

Программным (желаемым) движением системы назовем пару $(r(t), \dot{r}(t))$, где $r(t)$ — ограниченная, дважды кусочно-непрерывно дифференцируемая вектор-функция, описывающая некоторое заданное движение механической систем.

Уравнения движения для рассматриваемого тела составим в форме уравнений Лагранжа второго рода в подвижной системе координат $Oxyz$, считая силу тяжести $F = mg$ и силы инерции $F_1 = -m\ddot{\xi}$, $F_2 = -m\ddot{\eta}$, $F_3 = -m\ddot{\zeta}$, возникающие из-за движения платформы, внешними силами, приложенными к центру масс тела. Составив вектор обобщенных координат $q^\top = (\varphi, \psi, \theta)$ из переменных Эйлера (символ $()^\top$ обозначает транспонирование), запишем кинетическую энергию тела в виде

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^\top A(q)\dot{q} = \frac{1}{2}A_1(\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi)^2 + \frac{1}{2}B_1(-\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}C_1(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2,$$

где $A_1 = I_1 + ma^2$, $B_1 = I_2 + ma^2$ и $C_1 = I_3$, $I_{1,2,3}$ — центральные осевые моменты инерции тела; квадратичная по скоростям форма T_2 определяется симметричной положительно-определенной ограниченной матрицей $A = \{a_{ij}\}$ с элементами

$$a_{11} = C_1, \quad a_{12} = a_{21} = C_1\cos\theta, \quad a_{13} = a_{31} = 0,$$

$$a_{22} = (A_1\sin^2\varphi + B_1\cos^2\varphi)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta, \quad a_{23} = a_{32} = G\sin 2\varphi\sin\theta,$$

$$a_{33} = A_1\cos^2\varphi + B_1\sin^2\varphi,$$

где $G = \dfrac{1}{2}(A_1 - B_1)$.

Тогда уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial q} = Q$$

можно переписать в виде

$$A\ddot{q} + M = Q^e + Q^c, \tag{1}$$

где через $M = M(q, \dot{q})$ обозначен вектор-столбец с компонентами

$$M_i = \dot{q}^\top \frac{\partial A_i}{\partial q}\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^\top \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q} \qquad (i = \overline{1,3}), \tag{2}$$

вычисляемыми по формуле

$$M_i = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j \qquad (i = \overline{1,3}).$$

Вектор обобщенных сил $Q = Q^e + Q^c$ в правой части уравнений Лагранжа представляет собой сумму внешних сил Q^e, действующих на механическую систему, и управляющих воздействий Q^c, определяемых в дальнейшем.

В общем случае функция $r(t)$, описывающая программное движение тела, может не являться решением системы (1). Поэтому реализацию программных движений будем рассматривать как задачу о двухуровневом управлении, разделив управляющие воздействия на две группы:

$$Q^c = Q^p + Q^s,$$

где Q^p — силы, реализующие программное движение, Q^s — стабилизирующие его.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОТКЛОНЕНИЯХ

Пусть необходимо, чтобы система совершала некоторое программное движение $(r(t), \dot{r}(t))$. Прямой подстановкой функции $r(t)$ в уравнения (1) определим управляющие силы, реализующие это движение:

$$Q^p = A(r)\ddot{r} + M(r, \dot{r}) - Q^e(t, r, \dot{r}), \tag{3}$$

где координаты вектора $M = M(r, \dot{r})$ вычисляются по формулам, получающимся из формул (2) заменой величин q и $\dot{q}$ на r и $\dot{r}$ соответственно.

Сведем решение задачи о стабилизации программных движений к задаче стабилизации нулевого решения неавтономной лагранжевой системы. Это позволит применить к задаче о стабилизации программных движений методы и результаты, разработанные для исследования устойчивости и стабилизации нулевого положения равновесия неавтономных систем.

Введем новые обобщенные координаты (отклонения) по правилу $x = q - r(t)$. В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится. Кинетическая энергия системы примет вид

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^\top A(x+r)\dot{x} + \dot{r}^\top A(x+r)\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{r}^\top A(x+r)\dot{r}.$$

Вычислив производные

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}) = A\ddot{x} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{x}\right)\dot{x} + A\ddot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{x}\right)\dot{r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2}\dot{x}^\top \frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} + \dot{r}^\top \frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{r}^\top \frac{\partial A}{\partial x}\dot{r},$$

получим уравнения движения в отклонениях:

$$A\ddot{x} + M + M' + M'' + A\ddot{r} = Q^e + Q^c, \tag{4}$$

где $Q^e = Q^e(t, r+x, \dot{r}+\dot{x})$, $M = M(x,\dot{x})$ обозначает вектор-столбец, компоненты которого M_i определены равенствами

$$M_i = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j \qquad (i=\overline{1,3}),$$

M' — вектор-столбец с компонентами

$$M'_i = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{r}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{r}_j + \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{x}_j \quad (i=\overline{1,3}),$$

M'' — вектор-столбец с компонентами

$$M''_i = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{r}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{r}_j \quad (i=\overline{1,3}).$$

3. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть C — диагональная матрица, удовлетворяющая условию:

$$c_0 E \le C = \text{const} \le c_1 E, \quad (0 < c_0 < c_1 \text{ — const}), \tag{5}$$

где E — единичная матрица.

Рассмотрим положительно-определенную по отклонениям x и скоростям $\dot{x}$, допускающую бесконечно-малый высший предел функцию Ляпунова

$$V(t,x,\dot{x}) = \frac{1}{2}x^\top Cx + \frac{1}{2}\dot{x}^\top A\dot{x}. \tag{6}$$

Тогда ее полная производная по времени будет иметь вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^\top \dot{x} + \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)^\top \ddot{x} = \dot{x}^\top Cx + \dot{x}^\top A\ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^\top\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{r} + \frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{x}\right)\dot{x},$$

и в силу системы (4) получим

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}^\top Cx + \dot{x}^\top\left(-M - M' - M'' - A\ddot{r} + Q^e + Q^c\right) + \frac{1}{2}\dot{x}^\top\left(\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{r}\right)\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^\top\left(\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{x}\right)\dot{x}.$$

Пусть

$$-\dot{x}^\top M + \frac{1}{2}\dot{x}^\top \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{x}\right)\dot{x} = \frac{1}{2}\dot{x}^\top N,$$

где символом N обозначен вектор-столбец с компонентами

$$N_i = \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j \qquad (i = \overline{1,3}).$$

Учтя, что

$$M' = \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{x}\right)\dot{r} - \frac{1}{2}\dot{x}^\top\frac{\partial A}{\partial x}\dot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{r}\right)\dot{x} - \frac{1}{2}\dot{r}^\top\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x} = \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{x}\right)\dot{r} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{r}\right)\dot{x} - \dot{r}^\top\frac{\partial A}{\partial x}\dot{x},$$

перепишем полученное выражение для производной следующим образом:

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^\top\left(\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{x}\right)\dot{r} - \frac{1}{2}\dot{x}^\top\left(\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{r}\right)\dot{x} + \dot{x}^\top\left(\dot{r}^\top\frac{\partial A}{\partial x}\right)\dot{x} + \dot{x}^\top(Cx - M'' - A\ddot{r} + Q^e + Q^c) + \frac{1}{2}\dot{x}^\top N. \quad (7)$$

Пусть существует положительно определенная диагональная матрица D такая, что выполняется условие

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{r} - \dot{r}^\top\frac{\partial A}{\partial x} + L + D\right) \geq d_0 E \qquad (d_0 > 0 - \text{const}), \quad (8)$$

где L — матрица, задающая квадратичную форму $\dot{x}^\top\left(\dfrac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{x}\right)\dot{r}$, т.е. матрица с элементами $\{l_{ik}\}$, вычисляемыми через элементы матрицы A по правилу:

$$l_{ik} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_j \qquad (i,k = \overline{1,3}).$$

Выберем стабилизирующее управление согласно равенству

$$Q^s = -Cx - D\dot{x} + M'' + A\ddot{r} - Q^e - Q^p. \quad (9)$$

При управлении (9) уравнения движения (4) будут иметь вид

$$A\ddot{x} + M + M' + D\dot{x} + Cx = 0, \quad (10)$$

а полная производная (7) от функции (6) по времени в силу системы (10)

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{x}^\top\left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{r} - \dot{r}^\top\frac{\partial A}{\partial x} + L + D\right)\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^\top N,$$

где последнее слагаемое является функцией третьего порядка малости относительно скоростей $\dot{x}$, при выполнении условия (10) и при указанном управлении и малых скоростях (т.е. в окрестности тривиального решения $x = \dot{x} = 0$) будет иметь оценку

$$\frac{dV}{dt} \cong -\dot{x}^\top\left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x^\top}\dot{r} - \dot{r}^\top\frac{\partial A}{\partial x} + L + D\right)\dot{x} \leq -d_0\|\dot{x}\|^2 \leq 0$$

и тем самым будет определенно-отрицательной по скоростям функцией. Пусть вектор-функции M и M' в уравнении (10) удовлетворяют условию Липшица равномерно по x относительно t, тогда предельная система к системе уравнений (10) существует [5], имеет аналогичный ей вид, и множество $\{\dot{x} = 0\}$ не содержит решений предельной системы, кроме $x = \dot{x} = 0$. Тогда на основе теоремы из [6] об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы можно сделать вывод, что управление (9) при выполнении условия (8) решает задачу стабилизации программного движения $x = \dot{x} = 0$ системы (4). При этом устойчивость равномерная асимптотическая.

Полученный результат развивает и обобщает соответствующие результаты из [2, 7, 8] и может быть использован при построении заданных движений твердого тела на движущихся объектах.

4. СКАЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В выбранных переменных для вектора M в системе (1) согласно формулам (2) получим выражение компонент

$$M_1 = -\frac{1}{2}\dot\psi^2\frac{\partial a_{22}}{\partial\varphi} - \frac{1}{2}\dot\theta^2\frac{\partial a_{33}}{\partial\varphi} + \dot\theta\dot\psi\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial\theta} - \frac{\partial a_{23}}{\partial\varphi}\right),$$

$$M_2 = \dot\theta^2\frac{\partial a_{23}}{\partial\theta} + \dot\varphi\dot\psi\frac{\partial a_{22}}{\partial\varphi} + \dot\theta\dot\varphi\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial\theta} + \frac{\partial a_{23}}{\partial\varphi}\right) + \dot\theta\dot\psi\frac{\partial a_{22}}{\partial\theta},$$

$$M_3 = -\frac{1}{2}\dot\psi^2\frac{\partial a_{22}}{\partial\theta} + \dot\psi\dot\varphi\left(-\frac{\partial a_{12}}{\partial\theta} + \frac{\partial a_{23}}{\partial\varphi}\right) + \dot\theta\dot\varphi\frac{\partial a_{33}}{\partial\varphi},$$

где $\dfrac{\partial a_{12}}{\partial\theta} = -C_1\sin\theta$, $\dfrac{\partial a_{22}}{\partial\varphi} = 2G\sin2\varphi\sin^2\theta$, $\dfrac{\partial a_{22}}{\partial\theta} = (A_1\sin^2\varphi + B_1\cos^2\varphi - C_1)\sin2\theta$, $\dfrac{\partial a_{23}}{\partial\varphi} = 2G\cos2\varphi\sin\theta$, $\dfrac{\partial a_{23}}{\partial\theta} = G\sin2\varphi\cos\theta$, $\dfrac{\partial a_{33}}{\partial\varphi} = -G\sin2\varphi$.

Действие сил инерции и силы тяжести описываются обобщенными силами Q^e, вычисляемыми в подвижной системе координат $Oxyz$ согласно равенствам

$$Q_1^e = 0, \qquad Q_2^e = -am\ddot\xi\cos\psi\sin\theta - am\ddot\eta\sin\psi\sin\theta,$$

$$Q_3^e = -am\ddot\xi\sin\psi\cos\theta + am\ddot\eta\cos\psi\cos\theta + a(m\ddot\zeta + mg)\sin\theta.$$

Тогда уравнения управляемых движений (1) твердого тела можно записать в виде

$$C_1\ddot\varphi + C_1\ddot\psi\cos\theta - \dot\psi\dot\theta(2G\cos2\varphi + C_1)\sin\theta - \dot\psi^2G\sin^2\theta\sin2\varphi - \dot\theta^2G\sin2\varphi = Q_1^s + Q_1^p,$$

$$\begin{gathered}\ddot\varphi C_1\cos\theta + \ddot\psi\left((A_1\sin^2\varphi + B_1\cos^2\varphi)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta\right) + \ddot\theta G\sin\theta\sin2\varphi + \dot\varphi\dot\psi2G\sin2\varphi\sin^2\theta + \\ +\dot\varphi\dot\theta\,(2G\cos2\varphi - C_1)\sin\theta + \dot\psi\dot\theta\left(A_1\sin^2\varphi + B_1\cos^2\varphi - C_1\right)\sin2\theta + \dot\theta^2G\cos\theta\sin2\varphi = \\ = -am\ddot\xi\cos\psi\sin\theta - am\ddot\eta\sin\psi\sin\theta + Q_2^s + Q_2^p,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\ddot\psi G\sin\theta\sin2\varphi + \ddot\theta\left(A_1\sin^2\varphi + B_1\cos^2\varphi\right) + \dot\varphi\dot\psi(2G\cos2\varphi + C_1)\sin\theta - \dot\varphi\dot\theta2G\sin2\varphi - \\ -\frac{1}{2}\dot\psi^2\left((A_1\sin^2\varphi + B_1\cos^2\varphi) - C_1\right)\sin2\theta = -am\ddot\xi\sin\psi\cos\theta + am\ddot\eta\cos\psi\cos\theta + \\ +a(m\ddot\zeta + mg)\sin\theta + Q_3^s + Q_3^p.\end{gathered}$$

Зная заданное программное движение как функции времени

$$r(t) = \begin{pmatrix}\varphi^*(t)\\ \psi^*(t)\\ \theta^*(t)\end{pmatrix}, \quad \dot r(t) = \begin{pmatrix}\dot\varphi^*(t)\\ \dot\psi^*(t)\\ \dot\theta^*(t)\end{pmatrix} \tag{11}$$

и введя новые обобщенные координаты (отклонения) $x = q - r(t)$,

$$\begin{cases}\varphi = x_1 + \varphi^*\\ \psi = x_2 + \psi^*\\ \theta = x_3 + \theta^*\end{cases},$$

вычислим в переменных x, $\dot x$ кинетическую энергию

$$\begin{gathered}T = \frac{1}{2}A_1((\dot x_3 + \dot\theta^*)\cos(x_1 + \varphi^*) + (\dot x_2 + \dot\psi^*)\sin(x_3 + \theta^*)\sin(x_1 + \varphi^*))^2 + \frac{1}{2}B_1(-(\dot x_3 + \dot\theta^*)\sin(x_1 + \varphi^*) + \\ +(\dot x_2 + \dot\psi^*)\cos(x_1 + \varphi^*)\sin(x_3 + \theta^*))^2 + \frac{1}{2}C_1(\dot x_1 + \dot x_2\cos(x_3 + \theta^*) + \dot\varphi^* + \dot\psi^*\cos(x_3 + \theta^*))^2,\end{gathered}$$

координаты векторов M, M', M''

$$M_1 = -\frac{1}{2}\dot x_3^2\frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\dot x_3^2\frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} + \dot x_2\dot x_3\left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}\right),$$

$$M_2 = \dot x_3^2\frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} + \dot x_2\dot x_1\frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot x_1\dot x_3\left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}\right) + \dot x_2\dot x_3\frac{\partial A_{22}}{\partial x_3},$$

$$M_3 = -\frac{1}{2}\dot x_2^2\frac{\partial A_{22}}{\partial x_3} + \dot x_3\dot x_1\left(-\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}\right) + \dot x_1\dot x_3\frac{\partial A_{33}}{\partial x_1},$$

$$M_1' = -\dot x_2\dot\psi^*\frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} - \dot x_3\dot\theta^*\frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \dot x_2\dot\theta^*\left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}\right) + \dot x_3\psi^*\left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}\right),$$

$$M_2' = \dot x_1\left(\dot\psi^*\frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot\theta^*\left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}\right)\right) + \dot x_2\left(\dot\varphi^*\frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot\theta^*\frac{\partial A_{22}}{\partial x_3}\right) +$$

$$+\dot x_3\left(2\dot\theta^*\frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} + \dot\psi^*\frac{\partial A_{22}}{\partial x_3} + \dot\varphi^*\left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}\right)\right),$$

$$M_3' = \dot x_2\left(-\dot\psi^*\frac{\partial A_{22}}{\partial x_3} + \dot\varphi^*\left(-\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}\right)\right) + \dot x_1\left(\dot\theta^*\frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} + \dot\psi^*\left(-\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}\right)\right) + \dot x_3\dot\varphi^*\frac{\partial A_{33}}{\partial x_1},$$

$$M_1'' = -\frac{1}{2}(\dot\psi^*)^2\frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} - \frac{1}{2}(\dot\theta^*)^2\frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} + \dot\theta^*\dot\psi^*\left(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}\right),$$

$$M_2'' = (\dot\theta^*)^2\frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} + \dot\varphi^*\dot\psi^*\frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot\theta^*\dot\varphi^*(\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}) + \dot\theta^*\dot\psi^*\frac{\partial A_{22}}{\partial x_3},$$

$$M_3'' = -\frac{1}{2}(\dot\psi^*)^2\frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} + \dot\psi^*\dot\varphi^*\left(-\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1}\right) + \dot\theta^*\dot\varphi^*\frac{\partial A_{33}}{\partial x_1},$$

где

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} = -C_1\sin(\theta^* + x_3), \quad \frac{\partial A_{22}}{\partial x_1} = 2G\sin 2(\varphi^* + x_1)\sin^2(\theta^* + x_3),$$

$$\frac{\partial A_{22}}{\partial x_3} = (A_1\sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1\cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1)\sin 2(\theta^* + x_3),$$

$$\frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} = 2G\cos 2(\varphi^*{+}x_1)\sin(x_3{+}\theta^*), \quad \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} = G\sin 2(\varphi^*{+}x_1)\cos(x_5{+}\theta^*), \quad \frac{\partial A_{33}}{\partial x_1} = -G\sin 2(\varphi^*{+}x_1),$$

и обобщенные внешние силы, действующие на систему

$$Q_1^e = 0,$$

$$Q_2^e = -am\ddot\xi\cos(\psi^* + x_2)\sin(\theta^* + x_3) - am\ddot\eta\sin(\psi^* + x_2)\sin(\theta^* + x_2),$$

$$Q_3^e = -am\ddot\xi\sin(\psi^* + x_2)\cos(\theta^* + x_3) + am\ddot\eta\cos(\theta^* + x_3)\cos(\psi^* + x_2) + a(m\ddot\zeta + mg)\sin(\theta^* + x_3).$$

Тогда, учитывая (9), управление $Q^c = Q^p + Q^s$ с компонентами

$$\begin{aligned}Q_1^c = &- c_{11}x_1 - d_{11}\dot x_1 + C_1\ddot\varphi^* + \ddot\psi^* C_1\cos(\theta^* + x_3) - \left(\dot\psi^*\right)^2 G\sin 2(\varphi^* + x_1)\sin^2(\theta^* + x_3) - \\ &- \dot\psi^*\dot\theta^*(2G\cos 2(\varphi^* + x_1)\sin(\theta^* + x_3) + C_1\sin(\theta^* + x_3)) + (\dot\theta^*)^2 G\sin 2(\varphi^* + x_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_2^c = &- c_{22}x_2 - d_{22}\dot x_2 + \ddot\varphi^* C_1\cos(\theta^* + x_3) + \ddot\psi^*((A_1\sin^2(\varphi^* + x_1) + B_1\cos^2(\varphi^* + x_1))\sin^2(\theta^* + x_3) + \\ &+ C_1\cos^2(\theta^* + x_3)) + \ddot\theta^* G\sin 2(\varphi^* + x_1)\sin(x_3 + \theta^*) + \dot\varphi^*\dot\psi^* 2G\sin 2(\varphi^* + x_1)\sin^2(\theta^* + x_3) + \\ &+ \dot\varphi^*\dot\theta^*(2G\cos 2(\varphi^* + x_1)\sin(\theta^* + x_3) - C_1\sin(\theta^* + x_3)) + \dot\psi^*\dot\theta^*(A_1\sin^2(\varphi^* + x_1) + \\ &+ B_1\cos^2(\varphi^* + x_1) - C_1)\sin 2(\theta^* + x_3) + (\dot\theta^*)^2 G\sin 2(\varphi^* + x_1)\cos(x_3 + \theta^*) + \\ &+ am\ddot\xi\sin(\psi^* + x_2)\cos(\theta^* + x_3) - am\ddot\eta\cos(\theta^* + x_3)\cos(\psi^* + x_2) - a(m\ddot\zeta + mg)\sin(\theta^* + x_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_3^c = &- c_{33}x_3 - d_{33}\dot x_3 + \ddot\psi^* G\sin 2(\varphi^* + x_1)\sin(x_3 + \theta^*) + \ddot\theta^*(A_1\cos^2(\varphi^* + x_1) + B_1\sin^2(\varphi^* + x_1)) + \\ &+ \dot\varphi^*\dot\psi^*(2G\cos 2(\varphi^* + x_1)\sin(x_3 + \theta^*) + C_1\sin(x_3 + \theta^*)) + +\dot\varphi^*\dot\theta^* 2G\sin 2(\varphi * + x_1) - \\ &- (\dot\psi^*)^2 G\sin 2(\varphi^* + x_1)\sin(x_3 + \theta^*) + am\ddot\xi\sin(\psi^* + x_2)\cos(\theta^* + x_3) - \\ &- am\ddot\eta\cos(\theta^* + x_3)\cos(\psi^* + x_2) - a(m\ddot\zeta + mg)\sin(\theta^* + x_3)\end{aligned}$$

реализует асимптотически устойчивое программное движение (11), и при этом управлении уравнения (10) движения в отклонениях имеют вид

$$\begin{gathered}
C_1\ddot{x}_1+\ddot{x}_2C_1\cos(\theta^*+x_3)-\dot{x}_2^2G\sin 2(\varphi^*+x_1)\sin^2(\theta^*+x_3)-\dot{x}_2\dot{x}_3\Big(2G\cos 2(\varphi^*+x_1)\sin(\theta^*+x_3)+\\
+C_1\sin(\theta^*+x_3)\Big)+\dot{x}_3^2G\sin 2(\varphi^*+x_1)-\dot{x}_2\Big(\dot{\theta}^*(2G\cos 2(\varphi^*+x_1)+C_1)\sin(\theta^*+x_3)+\\
+\dot{\psi}^*2G\sin 2(\varphi^*+x_1)\sin^2(\theta^*+x_3)\Big)-\dot{x}_3\Big(\dot{\psi}^*(2G\cos 2(\varphi^*+x_1)\sin(\theta^*+x_3)+C_1\sin(\theta^*+x_3))+\\
+\dot{\theta}^*2G\sin 2(\varphi^*+x_1)\Big)+c_{11}x_1+d_{11}\dot{x}_1=0,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\ddot{x}_1C_1\cos(\theta^*+x_3)+\ddot{x}_2\Big((A_1\sin^2(\varphi^*+x_1)+B_1\cos^2(\varphi^*+x_1))\sin^2(\theta^*+x_3)+C_1\cos^2(\theta^*+x_3)\Big)+\\
+\ddot{x}_3G\sin 2(\varphi^*+x_1)\sin(x_3+\theta^*)+\dot{x}_1\dot{x}_22G\sin 2(\varphi^*+x_1)\sin^2(x_3+\theta^*)+\\
+\dot{x}_1\dot{x}_3\Big(2G\cos 2(\varphi^*+x_1)\sin(\theta^*+x_3)-C_1\sin(\theta^*+x_3)\Big)+\dot{x}_2\dot{x}_3\Big((A_1\sin^2(\varphi^*+x_1)+\\
+B_1\cos^2(\varphi^*+x_1)-C_1\Big)\sin 2(\theta^*+x_3)+\dot{x}_3^2G\sin 2(\varphi^*+x_1)\cos(x_3+\theta^*)+\\
+\dot{x}_1\Big(\dot{\theta}^*(2G\cos 2(\varphi^*+x_1)-C_1)\sin(\theta^*+x_3)+\dot{\psi}^*2G\sin 2(\varphi^*+x_1)\sin^2(\theta^*+x_3)\Big)+\\
+\dot{x}_2\Big(\dot{\theta}^*(A_1\sin^2(\varphi^*+x_1)+B_1\cos^2(\varphi^*+x_1)-C_1)\sin 2(\theta^*+x_3)+\dot{\varphi}^*2G\sin 2(\varphi^*+x_1)\sin^2(\theta^*+x_3)\Big)+\\
+\dot{x}_3\Big(\dot{\theta}^*2G\sin 2(\varphi*+x_1)\cos(\theta^*+x_3)+\dot{\varphi}^*(2G\cos 2(\varphi^*+x_1)-C_1)\sin(\theta^*+x_3)+\\
+\dot{\psi}^*\Big(A_1\sin^2(\varphi^*+x_1)+B_1\cos^2(\varphi^*+x_1)-C_1\Big)\sin 2(\theta^*+x_3)\Big)+c_{22}x_2+d_{22}\dot{x}_2=0,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\ddot{x}_2G\sin 2(\varphi^*+x_1)\sin(x_3+\theta*)+\ddot{x}_3\Big(A_1\cos^2(\varphi^*+x_1)+B_1\sin^2(\varphi^*+x_1)\Big)+\\
+\dot{x}_1\dot{x}_2\sin(x_3+\theta^*)(2G\cos 2(\varphi^*+x_1)+C_1)-\dot{x}_1\dot{x}_32G\sin(\varphi^*+x_1)-\\
-\frac{1}{2}\dot{x}_2^2(A_1\sin^2(\varphi^*+x_1)+B_1\cos^2(\varphi^*+x_1)-C_1)\sin 2(x_3+\theta^*)+\\
+\dot{x}_1\Big(\dot{\psi}^*(2G\cos 2(\varphi^*+x_1)+C_1)\sin(x_3+\theta^*)-\dot{\theta}^*2G\sin 2(\varphi^*+x_1)\Big)+\\
+\dot{x}_2\Big(\dot{\varphi}^*(2G\cos 2(\varphi^*+x_1)+C_1)\sin(x_3+\theta^*)-\dot{\psi}^*(A_1\sin^2(\varphi^*+x_1)+\\
+B_1\cos^2(\varphi^*+x_1)-C_1)\sin 2(\theta^*+x_3)\Big)-\dot{x}_3\dot{\varphi}^*2G\sin(\varphi^*+x_1)+c_{33}x_3+d_{33}\dot{x}_3=0.
\end{gathered}$$

В качестве иллюстрации численно проинтегрируем и представим графики величин $x, \dot{x}$ для следующего примера. Пусть твердое тело — маятник (рис. 1) в виде однородного диска радиуса $r = 0,1$ м, массы $m = 1$ кг на невесомом стержне длины $l = 1$ м. Конец стержня O шарнирно закреплен на подвижной платформе. Платформа движется по закону

$$\begin{cases} \xi = cos(t) \\ \eta = sin(t) \\ \zeta = 5t^2 \end{cases}.$$

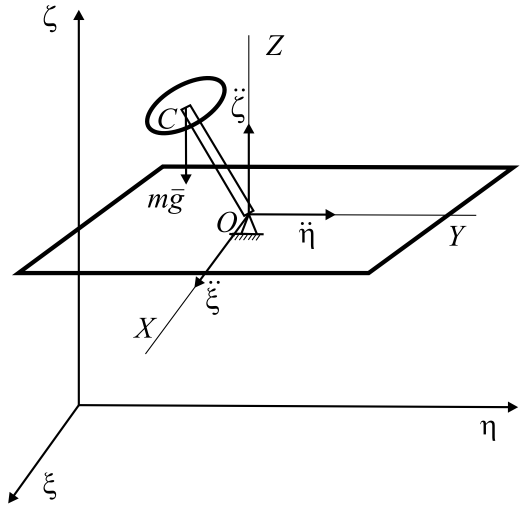


Рис. 1. Система

В качестве программного движения зададим равномерное вращение оси маятника вокруг вертикали с постоянным углом наклона:

$$\begin{cases} \varphi^*(t) = 20t \\ \psi^*(t) = 0 \\ \theta^*(t) = \pi/6 \end{cases}.$$

Матрицы C и D — единичные матрицы.

На рис. 2–4 изображены зависмости отклонений x_1, x_2, x_3 от времени при следующих начальных условиях: $x_1(0) = 0.01$, $\dot{x}_1(0) = 0.02$, $x_2(0) = 0.05$, $\dot{x}_2(0) = 0.03$, $x_3(0) = 0.05$, $\dot{x}_3(0) = 0.01$.

На рис. 5–7 изображены зависмости скоростей отклонений $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ от времени при тех же начальных условиях.

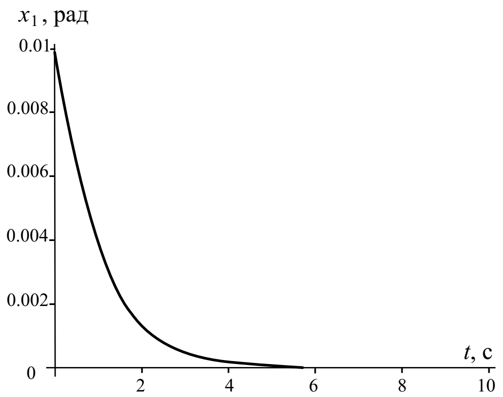


Рис. 2. График поведения отклонения $x_1(t)$

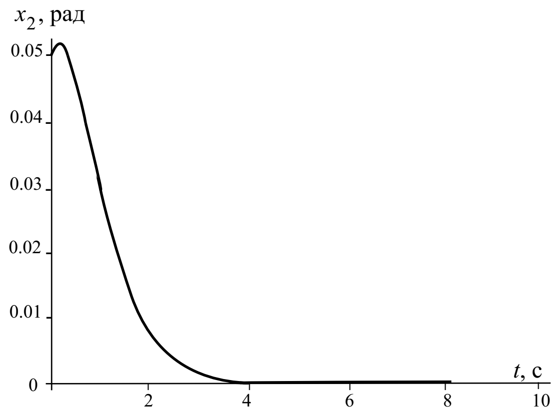


Рис. 3. График поведения отклонения $x_2(t)$

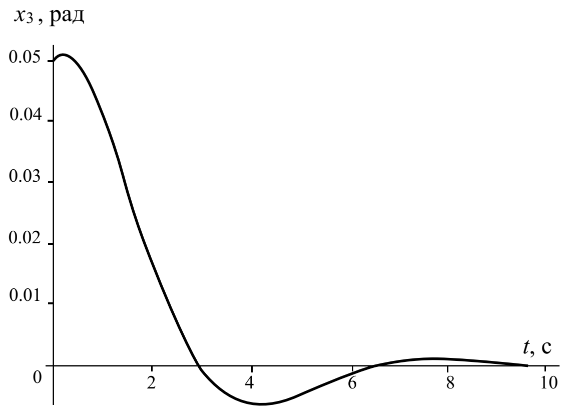


Рис. 4. График поведения отклонения $x_3(t)$

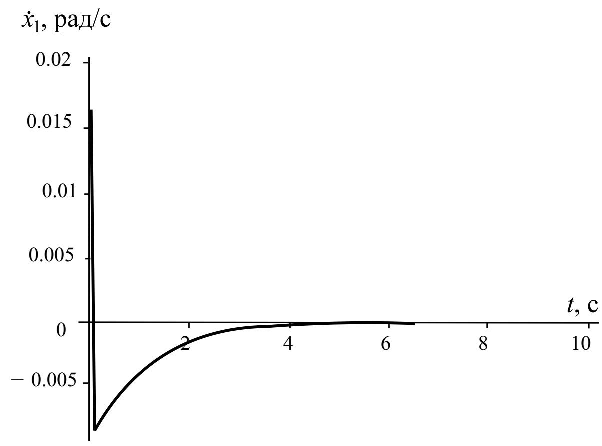


Рис. 5. График поведения скорости отклонения $\dot{x}_1(t)$

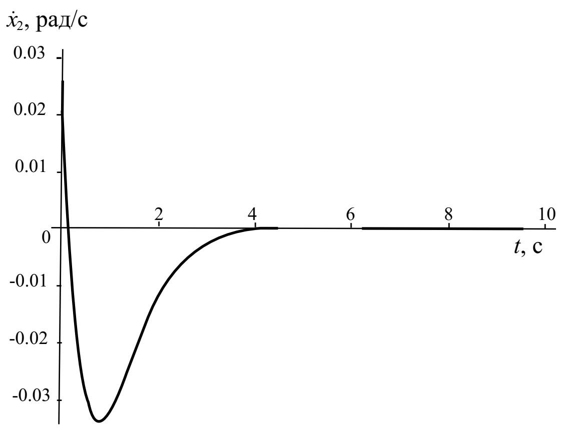


Рис. 6. График поведения скорости отклонения $\dot{x}_2(t)$

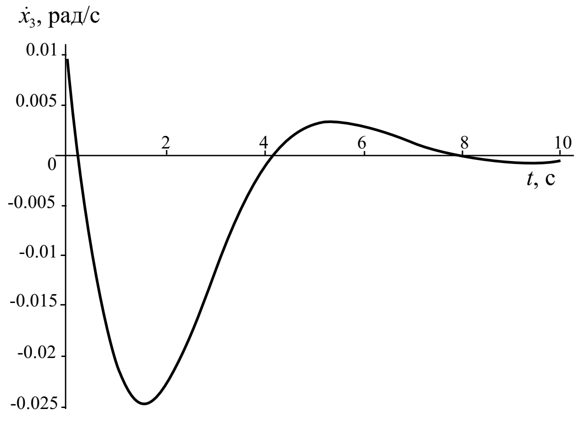


Рис. 7. График поведения скорости отклонения $\dot{x}_3(t)$

Библиографический список

1. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 447 с.

2. *Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г., Фурасов В.Д.* Построение систем программного движения. М.: Наука, 1971. 352 с.

3. *Зубов В.И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 375 с.
4. *Руш Н., Абетс Р., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 301 с.
5. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary equations // J. Differ. Equat. 1977. V. 23. P. 216–223.
6. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48, вып. 2. С. 225–232.
7. *Смирнов Е.Я., Павликов И.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В.* Управление движением механических систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 347 с.
8. *Bezglasnyi S.P.* The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical systems // Korean J. Comput. and Appl. Math. 2004. V. 14, № 1–2. P. 251–266.

УДК 531.38, 575

ПОСТРОЕНИЕ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

А.А. Илюхин, Д.В. Тимошенко

Таганрогский государственный педагогический институт,
кафедра математического анализа,
E-mail: stab@tgpi.org.ru, dmitrytim@yandex.ru

Осуществлена редукция от трёхмерной задачи несимметричной теории упругости к одномерной посредством расщепления трёхмерной задачи на совокупность двумерной и одномерной задач. Указаны кинематические параметры, которые нужно привлечь, чтобы вместе с системой дифференциальных уравнений Кирхгофа получить замкнутую систему уравнений одномерной микрополярной теории стержней. Остальные геометрические величины найдены из определяющих их соотношений. Получены условия, которым должны удовлетворять коэффициенты в замыкающих соотношениях. Оценён вклад в эти соотношения, который привносит учёт моментных напряжений. Для одномерной теории указано общее решение при наличии жесткостной симметрии.

Ключевые слова: упругий стержень, несимметричная теория упругости, редукция, замыкающие соотношения, моментные напряжения.

The One-Dimensional Micropolar Theory of Elastic Rods Basic Parities Construction

A.A. Ilyukhin, D.V. Timoshenko

The reduction from a three-dimensional problem of the asymmetrical theory of elasticity to one-dimensional by means of splitting a three-dimensional problem on set of two-dimentional and one-dimensional problems is carried out. Kinematic parameters with which it is necessary to involve are specified that together with system Kirchoff differential equations to receive the closed system of the equations of the one-dimensional micropolar theory of cores. Other geometrical sizes are found from parities defining them. Conditions with which should satisfy factors in closing parities are received. The contribution to these parities which introduces the account moment pressure is estimated. For the one-dimensional theory the common decision at presence stiffnesse is specified to symmetry.

Key words: elastic rod, asymmetrical theory of elasticity, reduction, closing parities, moment pressures.

Развитие механики сплошной среды тесно связано с появлением обобщенных математических моделей, рассматривающих частицу материала не как материальную точку, а как более сложный объект, наделенный дополнительными свойствами, описывающими микроструктуру материала. Классическая теория упругости описывает свойства тел, у которых между частицами действуют центральные силы. Эта теория не всеобъемлющая: она, в частности, не в состоянии корректно описать закономерности распространения коротких акустических волн, в особенности в жидких кристаллах, и (в некоторых случаях) законы пьезоэлектрических явлений, а также аномалии динамической упругости пластиков и тонких тел [1, 2]. В связи с этим в работах [1–5] была развита теория упругости сплошных сред, учитывающая моментное (вращательное) взаимодействие частиц — моментная теория упругости. В значительной степени выдающимся этапом в развитии механики сплошной среды в данном направлении явилась работа братьев Коссера [3], в которой описана модель, впоследствии получившая название континуума Коссера, или микрополярной среды. В рамках этой модели каждая «микрочастица», образующая тело, представляет собой абсолютно твердое тело. Другими словами, учитывается не только изменение центров тяжести «микрочастиц», но и их ориентации. Поскольку частицы вещества представляют собой не точки, а пространственные образования, расположенные на расстояниях, сравнимых с их размерами, действие одной частицы на другую определяется целой системой сил и моментов. Известно, что даже система одних сил в общем случае не может быть сведена к одной лишь равнодействующей, необходимо введение ещё и результирующего момента [1].

Тогда взаимодействие любых двух частиц, например A и B (рис. 1), необходимо воспроизводить с помощью двух нецентральных сил F_i^A и F_i^{B} (можно считать, что они приложены к центрам инерции частиц) и двух моментов M_i^A и $\mathrm{M}_i^{\mathrm{B}}$, для которых выполняются соотношения:

$$F_i^A + F_i^B = 0, \qquad M_i^A + M_i^B + r_m^{AB} F_n^A e_{imn} = 0,$$

где r_m^{AB} — вектор, соединяющий центры инерции частиц, e_{imn} — компоненты тензора Леви – Чивита.

Таким образом, в рамках континуума Коссера учитывается вращательное взаимодействие частиц. Наряду с обычным полем напряжений в микрополярной среде присутствуют также и моментные напряжения.

Начиная с работы Э. и Ф. Коссера [3], опубликованной в 1909 г., механика микрополярной среды (континуума Коссера) получила значительное развитие в основополагающих работах Э.Л. Аэро и Е.В. Кувшиновского [1, 2], В.А. Пальмова [6], В.Т. Койтера [4], В. Новацкого [5, 7].

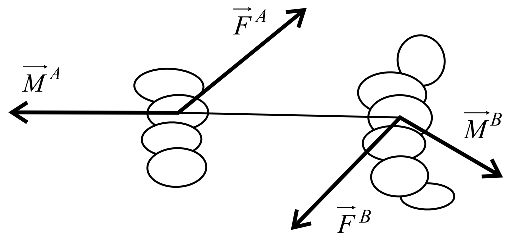


Рис. 1

Более общие модели сред, содержащие бóльшее число степеней свободы (микроморфные среды или среды с микродеформацией), изучались В.Т. Койтером [4], Р.А. Тупиным [8], К. Эрингеном [9–11] и др.

Модель микрополярной среды (континуума Коссера) нашла значительные приложения в механике твердого тела и жидкости. Отметим здесь только некоторые приложения к моделированию гранулированных и сыпучих сред, поликристаллических тел, композитов, геоматериалов, а в последнее время также и в наномеханике [12].

В продолжение сказанного отметим, что экспериментальные исследования структуры и свойств органических молекул и кристаллов, а также практика химического синтеза свидетельствуют о том, что модель органической молекулы в виде системы частиц (атомов или групп атомов) с нецентральным взаимодействием является хорошим приближением к действительности [13]. В частности, в случае молекул ДНК в качестве таких составных частиц рассматривают четыре типа нуклеотидов, образующих двойную спираль.

Учитывая сказанное, участок молекулы в виде системы взаимосвязанных частиц можно представить следующим образом (рис. 2):

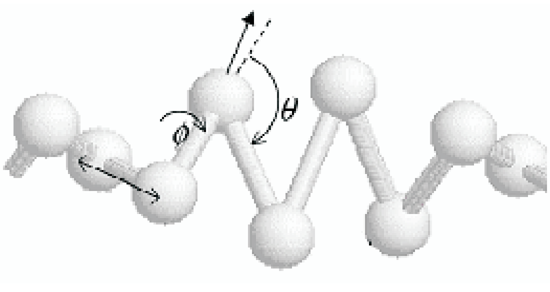


Рис. 2

Углы ϕ и θ, обозначенные на рисунке, характеризуют поворот частиц как вокруг своей оси, так и относительно водородных связей, соединяющих компоненты двойной спирали.

Построение одномерной механической модели, учитывающей моментные взаимодействия частиц среды, важно с точки зрения самой теории стержней поскольку появляется возможность анализа поведения известных общих и частных решений системы уравнений Кирхгофа и получения новых с учётом изменения взаимосвязей между силовыми и геометрическими характеристиками поведения стержня.

Данная работа посвящена построению микрополярной стержневой модели посредством редукции от трёхмерной моментной теории упругости к одномерной (теории стержней). При этом возникает задача обоснования осуществимости такой редукции и замкнутости основной системы уравнений полученной теории.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В дальнейшем предполагается, что латинские индексы принимают значения от 1 до 3, греческие — от 2 до 3, по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирования от 1 до 3, а по греческим — от 2 до 3.

Оператор Гамильтона в главных осях изгиба и кручения имеет следующее представление:

$$\nabla = \vec{Э}_1 \frac{1}{\sqrt{g}}(\tilde{\nabla}_1 + e_{1\alpha\beta}\omega_1 x_\beta \nabla_\alpha) + \vec{Э}_\alpha \nabla_\alpha, \tag{1}$$

где $\tilde{\nabla}_1 = \frac{\partial}{\partial s}$, $\nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.

Предполагаем, что тело деформировано распределенной торцевой нагрузкой. С учетом представления (1) для оператора Гамильтона уравнения равновесия тела при отсутствии массовых сил имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{g}}(\tilde{\nabla}_1\sigma_{1j} - e_{1\alpha\beta}\omega_1 x_\alpha \nabla_\beta \sigma_{1j} + \omega_s(e_{1si}\sigma_{ij} + e_{jsm}\sigma_{1m})) + \nabla_\alpha \sigma_{\alpha j} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}(\tilde{\nabla}_1\mu_{1j} - e_{1\alpha\beta}\omega_1 x_\alpha \nabla_\beta \mu_{1j} + \omega_s(e_{1si}\mu_{ij} + e_{jsm}\mu_{1m})) + \nabla_\alpha \mu_{\alpha j} + e_{jnm}\sigma_{nm} = 0, \tag{2}$$

где μ_{ij}, σ_{ij} — компоненты несимметричных тензоров моментных и силовых напряжений, e_{ijk} — компоненты тензора Леви – Чивита в рассматриваемом базисе. Граничные условия на боковой поверхности тела представимы в виде [14]

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sigma_{1j}\omega_1 e_{1\alpha\beta} n_\alpha x_\beta + n_\alpha \sigma_{\alpha j} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{g}}\mu_{1j}\omega_1 e_{1\alpha\beta} n_\alpha x_\beta + n_\alpha \mu_{\alpha j} = 0. \tag{3}$$

Тензоры деформации и кривизны в главных осях в диадном представлении имеют вид

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\vec{Э}_1 \otimes \vec{Э}_i\{\tilde{\nabla}_1 u_i + e_{isp}\omega_s u_p - e_{1\alpha\beta}\omega_1 x_\alpha \nabla_\beta u_i) + \vec{Э}_\alpha \otimes \vec{Э}_i \nabla_\alpha u_i + e_{mij}\theta_j \vec{Э}_i \otimes \vec{Э}_m,$$

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{g}}\vec{Э}_1 \otimes \vec{Э}_i\{\tilde{\nabla}_1 \theta_i + e_{isp}\omega_s \theta_p - e_{1\alpha\beta}\omega_1 x_\alpha \nabla_\beta \theta_i) + \vec{Э}_\alpha \otimes \vec{Э}_i \nabla_\alpha \theta_i, \tag{4}$$

где θ_i — компоненты вектора поворота.

Условия Сандру [5], накладываемые на компоненты тензоров деформаций и кривизн, могут быть записаны как

$$\frac{e_{m1i}}{\sqrt{g}}(\tilde{\nabla}_1 \kappa_{ij} + \omega_s(\kappa_{pj}e_{isp} + \kappa_{ip}e_{jsp})) = 0,$$

$$\frac{e_{m1i}}{\sqrt{g}}(\tilde{\nabla}_1 \gamma_{ij} + \omega_s(\gamma_{pj}e_{isp} + \gamma_{ip}e_{jsp})) - \kappa_{jm} + \delta_{mj}\kappa_{ii} = 0, \tag{5}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Относительно свойств материала предполагаем, что тело является однородным, криволинейно-изотропным и связь между силовыми и геометрическими компонентами представима в виде [5]

$$i \neq j, \quad \sigma_{ij} = \mu(\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) + \alpha(\gamma_{ij} - \gamma_{ji}), \quad \mu_{ij} = \beta(\kappa_{ij} + \kappa_{ji}) + \nu(\kappa_{ij} - \kappa_{ji}),$$

$$i = j, \quad \sigma_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}, \quad \mu_{ij} = 2\beta\kappa_{ij} + \pi\kappa_{kk}, \tag{6}$$

где константы β, λ, μ, π, ν определяют физические свойства материала.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Пусть h — характерный размер поперечного сечения стержня, а l — длина кривой L или ее минимальный радиус кривизны. Введем параметр $\varepsilon = h/l$ (если минимальный радиус кривизны $R_{\min}$ кривой L значительно меньше его длины, то $\varepsilon = h/R_{\min}$), который для рассматриваемого тела будем считать достаточно малым. Введем безразмерные величины следующим образом: $s = ls^{'}$, $x_\alpha = hx_\alpha^{'}$, $u_i = hu_i^{'}$, $\omega_i = l\omega_i^{'}$, $\kappa_{ij} = \kappa_{ij}^{'/h}$.

В уравнениях (2)–(6) перейдем к безразмерным переменным (штрихи в дальнейшем опускаем для сокращения записи).

В [15] показано, что решение уравнений теории упругости может быть построено в виде асимптотических рядов по введенному малому параметру, а также определены порядки разложений для компонентов тензоров деформаций, напряжений и вектора перемещений. Выбирая в качестве основных переменных задачи компоненты тензоров силовых и моментных напряжений, в случае преимущественно изгибного характера деформаций получим следующие разложения:

$$\hat{\gamma} = \sum_{k=-2}^{\infty} \gamma_{ij}^{(k+2)} \varepsilon^k \vec{\mathcal{Э}}_i \otimes \vec{\mathcal{Э}}_j, \quad \hat{\kappa} = \sum_{k=-2}^{\infty} \kappa_{ij}^{(k+2)} \varepsilon^k \vec{\mathcal{Э}}_i \otimes \vec{\mathcal{Э}}_j, \quad \vec{u} = \sum_{k=-4}^{\infty} u_i^{(k+4)} \varepsilon^k \vec{\mathcal{Э}}_i, \quad \vec{\theta} = \sum_{k=-4}^{\infty} \theta_i^{(k+4)} \varepsilon^k \vec{\mathcal{Э}}_i.$$

3. АНАЛИЗ СООТНОШЕНИЙ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В случае нулевого приближения для коэффициентов разложения основных переменных задачи имеем следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\nabla_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(0)} = 0, \quad \nabla_\alpha \mu_{\alpha j}^{(0)} + e_{jik} \sigma_{ik}^{(0)} = 0, \tag{7}$$

$$n_\alpha \sigma_{\alpha i}^{(0)} = 0, \quad n_\alpha \mu_{\alpha i}^{(0)} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{8}$$

$$e_{m\alpha i} \nabla_\alpha \kappa_{ij}^{(0)} = 0 \quad , \quad e_{m\alpha i} \nabla_\alpha \gamma_{ij}^{(0)} - \kappa_{jm}^{(0)} + \delta_{mj} \kappa_{ii}^{(0)} = 0, \tag{9}$$

$$\begin{gathered} i \neq j, \quad \sigma_{ij}^{(0)} = \mu(\gamma_{ij}^{(0)} + \gamma_{ji}^{(0)}) + \alpha(\gamma_{ij}^{(0)} - \gamma_{ji}^{(0)}), \quad \mu_{ij}^{(0)} = \beta(\kappa_{il}^{(0)} + \kappa_{ji}^{(0)}) + \nu(\kappa_{ij}^{(0)} - \kappa_{ji}^{(0)}), \\ i = j, \quad \sigma_{ij}^{(0)} = 2\mu\gamma_{ij}^{(0)} + \lambda\gamma_{kk}^{(0)}, \quad \mu_{ij}^{(0)} = 2\beta\kappa_{ij}^{(0)} + \pi\kappa_{kk}^{(0)}. \end{gathered} \tag{10}$$

В [15] показано, решение системы уравнений нулевого приближения должны удовлетворять дополнительным соотношениям, вытекающим из интегральных условий разрешимости задачи первого приближения. Используя уравнения и граничные условия для определения коэффициентов разложения тензоров моментных и силовых напряжений

$$\nabla_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(1)} = -\{\tilde{\nabla}_1 \sigma_{1j}^{(0)} - e_{1\alpha\beta}\omega_1 x_\alpha \nabla_\beta \sigma_{1j}^{(0)} + (e_{1si}\sigma_{ij}^{(0)} + e_{jsm}\sigma_{1m}^{(0)})\omega_s\},$$

$$\nabla_\alpha \mu_{\alpha j}^{(1)} + e_{jnm}\sigma_{nm}^{(1)} = -\{\tilde{\nabla}_1 \mu_{1j}^{(0)} - e_{1\alpha\beta}\omega_1 x_\alpha \nabla_\beta \mu_{1j}^{(0)} + (e_{1si}\mu_{ij}^{(0)} + e_{jsm}\mu_{1m}^{(0)})\omega_s\},$$

$$n_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(1)} = -\sigma_{1j}^{(0)} \omega_1 e_{1\alpha\beta} n_\alpha x_\beta, \quad n_\alpha \mu_{\alpha j}^{(1)} = -\mu_{1j}^{(0)} \omega_1 e_{1\alpha\beta} n_\alpha x_\beta$$

получим следующие дополнительные соотношения:

$$Q_{ij}^{(0)} = Q_{ji}^{(0)} = 0,$$

где

$$Q_{ij}^{(0)} = \int_\Omega \sigma_{ij}^{(0)} d\Omega. \tag{11}$$

Анализ выражений для компонентов тензоров деформаций и кривизн показал, что коэффициенты $u_i^{(0)}$, $u_i^{(1)}$, $\theta_i^{(0)}$, $\theta_i^{(1)}$ имеют следующее представление [15]:

$$u_i^{(0)} = \tilde{u}_i^{(0)}, \quad \theta_i^{(0)} = 0, \quad u_i^{(1)} = \tilde{u}_i^{(1)} + e_{ij\alpha} \tilde{\theta}_j^{(1)} x_\alpha, \quad \theta_i^{(1)} = \tilde{\theta}_i^{(1)},$$

в котором величины со знаком тильды зависят только от дуговой координаты s. С учетом соотношений (11) для коэффициентов $\gamma_{ij}^{(0)}$ и $\kappa_{ij}^{(0)}$ получим

$$\begin{gathered} \gamma_{11}^{(0)} = \chi_1^{(1)} - x_2\kappa_3^{(1)} + x_3\kappa_2^{(1)}, \quad \gamma_{12}^{(0)} = \chi_2^{(1)} - x_3\kappa_1^{(1)} - \theta_3^{(2)}, \quad \gamma_{13}^{(0)} = \chi_3^{(1)} + x_2\kappa_1^{(1)} + \theta_2^{(2)}, \\ \kappa_{\alpha i}^{(0)} = \nabla_\alpha \theta_i^{(2)}, \quad \gamma_{\alpha i}^{(0)} = \nabla_\alpha u_i^{(2)} - e_{\alpha ij}\theta_j^{(2)}, \quad \kappa_{1i}^{(0)} = \kappa_i^{(1)}, \end{gathered} \tag{12}$$

где введены следующие обозначения:

$$\kappa_i^{(1)} = \frac{d}{ds}\tilde{\theta}_i^{(1)} + e_{ijk}\omega_j\tilde{\theta}_k^{(1)}, \quad \chi_i^{(1)} = \frac{d}{ds}\tilde{u}_i^{(1)} + e_{ijk}\omega_j\tilde{u}_k^{(1)}.$$

Подставляя выражения (12) в (7)–(10), получим систему шести дифференциальных уравнений:

$$(\mu+\alpha)\tilde{\Delta}u_1^{(2)}+2\alpha(\nabla_2\theta_3^{(2)}-\nabla_3\theta_2^{(2)})=0,$$

$$(\lambda+2\mu)\nabla_2\nabla_2u_2^{(2)}+(\mu+\alpha)\nabla_3\nabla_3u_2^{(2)}+(\lambda+\mu-\alpha)\nabla_2\nabla_3u_3^{(2)}+2\alpha\nabla_3\theta_1^{(2)}=\lambda\kappa_3^{(1)},$$

$$(\lambda+2\mu)\nabla_3\nabla_3u_3^{(2)}+(\mu+\alpha)\nabla_2\nabla_2u_3^{(2)}+(\lambda+\mu-\alpha)\nabla_2\nabla_3u_2^{(2)}-2\alpha\nabla_2\theta_1^{(2)}=-\lambda\kappa_2^{(1)},$$

$$(\beta+\nu)\tilde{\Delta}\theta_1^{(2)}-4\alpha\theta_1^{(2)}+2\alpha(\nabla_2u_3^{(2)}-\nabla_3u_2^{(2)})=0, \qquad (13)$$

$$(\pi+2\beta)\nabla_2\nabla_2\theta_2^{(2)}+(\beta+\nu)\nabla_3\nabla_3\theta_2^{(2)}+(\pi+\beta-\nu)\nabla_2\nabla_3\theta_3^{(2)}-4\alpha\theta_2^{(2)}+2\alpha\nabla_3u_1^{(2)}=2\alpha(\chi_3^{(1)}+x_2\kappa_1^{(1)}),$$

$$(\pi+2\beta)\nabla_3\nabla_3\theta_3^{(2)}+(\beta+\nu)\nabla_2\nabla_2\theta_3^{(2)}+(\pi+\beta-\nu)\nabla_2\nabla_3\theta_2^{(2)}-4\alpha\theta_3^{(2)}-2\alpha\nabla_2u_1^{(2)}=-2\alpha(\chi_2^{(1)}-x_3\kappa_1^{(1)})$$

и граничных условий

$$(\mu+\alpha)\frac{\partial}{\partial n}u_1^{(2)}+2\alpha e_{1\alpha\beta}n_\alpha\theta_\beta^{(2)}=-(\mu-\alpha)\{n_\alpha\chi_\alpha^{(1)}+\kappa_1^{(1)}e_{1\alpha\beta}x_\alpha n_\beta\},$$

$$n_2\{(\lambda+2\mu)\nabla_2u_2^{(2)}+\lambda\nabla_3u_3^{(2)}\}+n_3\{(\mu+\alpha)\nabla_3u_2^{(2)}+(\mu-\alpha)\nabla_2u_3^{(2)}+2\alpha\theta_1^{(2)}\}=-\lambda n_2(\chi_1^{(1)}+e_{1\alpha\beta}\kappa_\alpha^{(1)}x_\beta),$$

$$n_3\{(\lambda+2\mu)\nabla_3u_3^{(2)}+\lambda\nabla_2u_2^{(2)}\}+n_2\{(\mu+\alpha)\nabla_2u_3^{(2)}+(\mu-\alpha)\nabla_3u_2^{(2)}-2\alpha\theta_1^{(2)}\}=-\lambda n_3(\chi_1^{(1)}+e_{1\alpha\beta}\kappa_\alpha^{(1)}x_\beta),$$

$$(\beta+\nu)\frac{\partial}{\partial n}\theta_1^{(2)}=-(\beta-\nu)n_\alpha\kappa_\alpha^{(1)},$$

$$n_2\{(\pi+2\beta)\nabla_2\theta_2^{(2)}+\pi\nabla_3\theta_3^{(2)}\}+n_3\{(\beta+\nu)\nabla_3\theta_2^{(2)}+(\beta-\nu)\nabla_2\theta_3^{(2)}\}=-\pi n_2\kappa_1^{(1)},$$

$$n_3\{(\pi+2\beta)\nabla_3\theta_3^{(2)}+\pi\nabla_2\theta_2^{(2)}\}+n_2\{(\beta+\nu)\nabla_2\theta_3^{(2)}+(\beta-\nu)\nabla_3\theta_2^{(2)}\}=-\pi n_3\kappa_1^{(1)}$$

для определения шести неизвестных функций $u_i^{(2)},\theta_i^{(2)}$. Полученная система допускает представление решения в виде

$$u_2^{(2)}=\tilde{u}_2^{(2)}-\frac{\lambda\chi_1^{(1)}}{2(\lambda+\mu)}x_2-\tilde{\theta}_1^{(2)}x_3+\frac{\kappa_3^{(1)}}{\beta+\nu}(\frac{\lambda\beta}{\lambda+2\mu}x_2^2+\frac{\beta-\nu}{2}x_3^2)+\frac{(\beta-\nu)}{\beta+\nu}\kappa_2^{(1)}x_2x_3+\kappa_\alpha^{(1)}v_\alpha^{(2)},$$

$$u_3^{(2)}=\tilde{u}_3^{(2)}-\frac{\lambda\chi_1^{(1)}}{2(\lambda+\mu)}x_3+\tilde{\theta}_1^{(2)}x_2-\frac{\kappa_2^{(1)}}{\beta+\nu}(\frac{\lambda\beta}{\lambda+2\mu}x_3^2+\frac{\beta-\nu}{2}x_2^2)-\frac{(\beta-\nu)}{\beta+\nu}\kappa_3^{(1)}x_2x_3+\kappa_\alpha^{(1)}v_\alpha^{(3)},$$

$$u_1^{(2)}=\tilde{u}_1^{(2)}-x_\alpha\chi_\alpha^{(1)}+k_1^{(1)}v_1^{(1)},$$

$$\theta_1^{(2)}=\tilde{\theta}_1^{(2)}-\frac{\beta-\nu}{\beta+\nu}x_\alpha\kappa_\alpha^{(1)}+\kappa_\alpha^{(1)}\Theta_\alpha^{(3)}, \qquad (14)$$

$$\theta_2^{(2)}=-\chi_3^{(1)}-\frac{\pi\kappa_1^{(1)}}{2(\pi+\beta)}x_2+\kappa_1^{(1)}\Theta_1^{(2)},$$

$$\theta_3^{(2)}=\chi_2^{(1)}-\frac{\pi\kappa_1^{(1)}}{2(\pi+\beta)}x_3+\kappa_1^{(1)}\Theta_1^{(3)}.$$

В соотношениях (14) функции $v_i^{(j)}$, $\Theta_i^{(j)}$ являются функциями только точек поперечного сечения. Для нахождения этих функций допустим определённый произвол в силу неединственности решения задачи Сен-Венана. Уравнения для нахождения функций $v_i^{(j)}$, $\Theta_i^{(j)}$ можно получить следующим образом: запишем шесть дифференциальных уравнений равновесия для функций $v_i^{(j)}$, $\Theta_i^{(j)}$, используя соотношения (14). В полученных соотношениях приравняем к нулю коэффициенты при величинах $\kappa_i^{(1)}$, в результате получим уравнения для нахождения девяти неизвестных функций $v_i^{(j)}$, $\Theta_i^{(j)}$.

$$\frac{2\lambda\beta}{\beta+\nu}+(\lambda+2\mu)\,\nabla_2^2\nu_3^{(2)}+(\mu+\alpha)\,\frac{\beta-\nu}{\beta+\nu}+(\mu+\alpha)\,\nabla_3^2\nu_3^{(2)}-(\lambda+\mu-\alpha)\,\frac{\beta-\nu}{\beta+\nu}+$$

$$+(\lambda+\mu-\alpha)\,\nabla_2\nabla_3\nu_3^{(3)}-2\alpha\frac{\beta-\nu}{\beta+\nu}+2\alpha\nabla_3\Theta_3^{(3)}-\lambda=0,$$

$$(\lambda+2\mu)\,\nabla_2^2\nu_2^{(2)}+(\mu+\alpha)\,\nabla_3^2\nu_2^{(2)}+(\lambda+\mu-\alpha)\,\nabla_2\nabla_3\nu_2^{(3)}+2\alpha\nabla_3\Theta_2^{(3)}=0,$$

$$(\mu+\alpha)\,\tilde{\Delta}\nu_1^{(1)}+2\alpha\left(\nabla_2\Theta_1^{(3)}+\nabla_3\Theta_1^{(2)}\right)=0,$$

$$-\frac{2\lambda\beta}{\beta+\nu}+(\lambda+2\mu)\,\nabla_3^2\nu_2^{(3)}-(\mu+\alpha)\,\frac{\beta-\nu}{\beta+\nu}+(\mu+\alpha)\,\nabla_2^2\nu_2^{(3)}-(\lambda+\mu-\alpha)\,\frac{\beta-\nu}{\beta+\nu}+$$

$$+(\lambda+\mu-\alpha)\,\nabla_2\nabla_3\nu_2^{(2)}+2\alpha\frac{\beta-\nu}{\beta+\nu}-2\alpha\nabla_2\Theta_2^{(3)}+\lambda=0,$$

$$(\lambda+2\mu)\,\nabla_3^2\nu_3^{(3)}+(\mu+\alpha)\,\nabla_2^2\nu_3^{(3)}+(\lambda+\mu-\alpha)\,\nabla_2\nabla_3\nu_3^{(2)}+2\alpha\nabla_3\Theta_3^{(3)}=0,$$

$$(\beta+\nu)\,\tilde{\Delta}\Theta_2^{(3)}+2\alpha\left(\nabla_2\nu_2^{(3)}-\nabla_3\nu_2^{(2)}-2\Theta_2^{(3)}\right)=0,$$

$$(\beta+\nu)\,\tilde{\Delta}\Theta_3^{(3)}+2\alpha\left(\nabla_2\nu_3^{(3)}-\nabla_3\nu_3^{(2)}-2\Theta_3^{(3)}\right)=0, \tag{15}$$

$$(\pi+2\beta)\,\nabla_2^2\Theta_1^{(2)}+(\beta+\nu)\,\nabla_3^2\Theta_1^{(2)}+(\pi+\beta-\nu)\,\nabla_2\nabla_3\Theta_1^{(3)}+\left(2\alpha\frac{\pi}{\pi+\beta}-1\right)x_2-4\alpha\Theta_1^{(2)}+2\alpha\nabla_3\nu_1^{(1)}=0,$$

$$(\pi+2\beta)\,\nabla_3^2\Theta_1^{(3)}+(\beta+\nu)\,\nabla_2^2\Theta_1^{(3)}+(\pi+\beta-\nu)\,\nabla_2\nabla_3\Theta_1^{(2)}+\left(2\alpha\frac{\pi}{\pi+\beta}-1\right)x_3-4\alpha\Theta_1^{(3)}-2\alpha\nabla_2\nu_1^{(1)}=0.$$

Граничные условия для функций $v_i^{(j)}$, $\Theta_i^{(j)}$ имеют вид

$$\lambda n_2\nu_2^{(2)}+\lambda n_3\nu_2^{(3)}=0,\quad n_2\nabla_2\Theta_2^{(3)}-n_3\nabla_3\Theta_2^{(3)}=0, n_2\nabla_2\Theta_3^{(3)}+n_3\nabla_3\Theta_3^{(3)}=0,$$

$$n_2\,(\pi+2\beta)\,\nabla_2\Theta_1^{(2)}+n_3\,(\beta+\nu)\,\nabla_3\Theta_1^{(2)}=0, (\beta-\nu)\,n_2\Theta_3^{(3)}-(\beta+\nu)\,n_3\Theta_2^{(3)}=0, \tag{16}$$

$$n_2\,(\beta-\nu)\,\nabla_2\Theta_1^{(3)}+n_3\pi\nabla_3\Theta_1^{(3)}=0,$$

Девять уравнений (15) являются независимыми, что указывает на расщепление трехмерной задачи на систему двумерных уравнений для нахождения функций точек поперечного сечения $v_i^{(j)}$, $\Theta_i^{(j)}$ и одномерных уравнений для нахождения функций дуговой координаты.

Полученные соотношения (10) и (14) позволяют определить силы и моменты, действующие в поперечном сечении стержня, которые задаются следующими соотношениями:

$$F_i=\int\limits_{\Omega}\sigma_{1i}d\Omega\quad,\quad M_i=\int\limits_{\Omega}\{e_{i\alpha k}\sigma_{1k}+\mu_{1i}\}d\Omega. \tag{17}$$

Используя формулы (17), получим следующие выражения для компонент M_i вектора-момента:

$$M_1=B_1\omega_1+A_1\omega_1,\quad M_2=B_{22}\omega_2+B_{23}\omega_3+A_2\omega_3,\quad M_3=B_{31}\omega_2+B_{33}\omega_3+A_3\omega_2, \tag{18}$$

где

$$B_1=\iint\limits_{\Omega}\left(\mu x_2\nabla_3\nu_1^{(1)}+\mu x_2^2-\frac{\alpha\pi}{\pi+\beta}x_2^2+2\alpha x_2\Theta_1^{(2)}+\alpha x_2^2-\alpha x_2\nabla_3\nu_1^{(1)}-\mu x_3\nabla_2\nu_1^{(1)}\right)d\Omega+$$

$$+\iint\limits_{\Omega}\left(\mu x_3^2-\frac{\alpha\pi}{\pi+\beta}x_3^2+2\alpha x_3\Theta_1^{(3)}+\alpha x_3\nabla_2\nu_1^{(1)}+\alpha x_3^2\right)d\Omega,$$

$$A_1=\iint\limits_{\Omega}\left(\pi\nabla_2\Theta_1^{(2)}+\pi\nabla_3\Theta_1^{(3)}\right)d\Omega,$$

$$B_{22}=\iint\limits_{\Omega}\left((2\mu+\lambda)\,x_3^2+\lambda\frac{\beta-\nu}{\beta+\nu}x_3^2+\lambda x_3\nabla_2\nu_2^{(2)}-\frac{2\lambda^2\beta}{(\beta+\nu)\,(\lambda+2\mu)}x_3^2+\lambda x_3\nabla_3\nu_2^{(3)}\right)d\Omega,$$

$$B_{23}=\iint\limits_{\Omega}\left(-(2\mu+\lambda)\,x_2x_3+\frac{2\lambda^2\beta}{(\beta+\nu)\,(\lambda+2\mu)}x_2x_3+\lambda\nabla_2\nu_3^{(2)}-\lambda\frac{\beta-\nu}{\beta+\nu}x_2x_3+\lambda\nabla_3\nu_3^{(3)}\right)d\Omega,$$

$$A_2=\iint\limits_{\Omega}(\beta-\nu)\,\nabla_2\Theta_3^{(3)}d\Omega, \tag{19}$$

$$B_{31} = \iint\limits_{\Omega} x_2 \left(\lambda \nabla_2 \nu_2^{(2)} + \lambda \nabla_3 \nu_2^{(3)}\right) d\Omega,$$

$$B_{33} = \iint\limits_{\Omega} \left((2\mu + \lambda) x_2^2 + \lambda \frac{\beta - \nu}{\beta + \nu} x_2^2 + \lambda x_2 \nabla_3 \nu_3^{(2)} - \frac{2\lambda^2 \beta}{(\beta + \nu)(\lambda + 2\mu)} x_2^2 - \lambda x_2 \nabla_3 \nu_3^{(2)} \right) d\Omega,$$

$$A_3 = \iint\limits_{\Omega} (\beta + \nu) \nabla_3 \Theta_2^{(3)} d\Omega.$$

Коэффициенты A_i в соотношениях (19) характеризуют вклад моментных напряжений, возникающих между частицами в процессе деформации, в величину компонент вектора-момента.

Анализ выражения для коэффициента B_{23} показывает, что следующие интегралы обращаются в нуль как интегралы в главных осях инерции поперечного сечения

$$\iint\limits_{\Omega} \left(-(2\mu + \lambda) x_2 x_3\right) d\Omega = 0, \quad \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{2\lambda^2 \beta}{(\beta + \nu)(\lambda + 2\mu)} x_2 x_3 \right) d\Omega = 0, \quad \iint\limits_{\Omega} \left(\lambda \frac{\beta - \nu}{\beta + \nu} x_2 x_3 \right) d\Omega = 0.$$

Таким образом, выражение для коэффициента B_{23} принимает вид

$$B_{23} = \iint\limits_{\Omega} \left(\lambda x_3 \nabla_2 \nu_3^{(2)} + \lambda x_3 \nabla_3 \nu_3^{(3)} \right) d\Omega.$$

Применим к последнему интегралу формулу Грина:

$$B_{23} = \iint\limits_{\Omega} \left(\lambda x_3 \nabla_3 \nu_3^{(2)} + \lambda x_3 \nabla_3 \nu_3^{(3)} \right) d\Omega = \int\limits_{\Gamma} \lambda \left(n_2 \nu_3^{(2)} + n_3 \nu_3^{(3)} \right) d\Gamma.$$

В последнем соотношении интеграл в правой части обращается в нуль в силу граничных условий (16). Таким образом, показано, что имеет место равенство

$$B_{23} = 0.$$

Аналогично, анализируя соотношение для коэффициента B_{31}, с учётом граничных условий (16) получим:

$$B_{31} = 0.$$

Таким образом, показано, что величины B_{23} и B_{31} в соотношениях (18) обращаются в нуль без каких-либо дополнительных ограничений на характер деформаций или свойства деформируемого объекта. Последнее означает, что учет моментных напряжений не приводит к изменению структуры замыкающих соотношений системы уравнений Кирхгофа посредством появления величин, зависящих от силовых напряжений. Таким образом, при отсутствии моментных напряжений ($A_i = 0$) замыкающие соотношения (18) переходят в соотношения, соответствующие классической теории Кирхгофа.

Проанализируем величины A_i. Коэффициент A_1 является величиной неотрицательной, таким образом, учёт моментных напряжений приводит к увеличению сопротивления материала стержня деформации растяжения (увеличению суммарной жёсткости) и, как следствие, к увеличению растягивающего момента M_1.

Рассмотрим выражения для коэффициентов A_2 и A_3:

$$A_2 = \iint\limits_{\Omega} (\beta - \nu) \nabla_2 \Theta_3^{(3)} d\Omega, \quad A_3 = \iint\limits_{\Omega} (\beta + \nu) \nabla_3 \Theta_2^{(3)} d\Omega,$$

вычтем из A_2 величину A_3, получим:

$$A_2 - A_3 = \iint\limits_{\Omega} \left((\beta - \nu) \nabla_2 \Theta_3^{(3)} - (\beta + \nu) \nabla_3 \Theta_2^{(3)} \right) d\Omega.$$

В последнем равенстве воспользуемся формулой Грина:

$$A_2 - A_3 = \int\limits_{\Gamma} \left(\left(\beta - \nu\right) n_2 \Theta_3^{(3)} - \left(\beta + \nu\right) n_3 \Theta_2^{(3)} \right) d\Gamma, \tag{20}$$

где Γ — контур поперечного сечения. В силу граничных условий (16) подынтегральное выражение в (20) обращается в нуль, откуда следует, что

$$A_2 = A_3. \tag{21}$$

Соотношение (21) носит общий характер, поскольку получено без каких-либо дополнительных ограничений на систему уравнений (13) трёхмерной задачи.

Компоненты M_i вектора-момента, найденные по формулам (28), представляют собой замыкающие соотношения для системы уравнений Кирхгофа.

Соотношения (21) совместно с системой уравнений Кирхгофа представляют собой замкнутую систему, описывающую деформации стержня под действием концевых нагрузок с учётом моментных напряжений, возникающих в процессе деформации между частицами, из которых состоит материал стержня.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩИХ СООТНОШЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ТЕОРИИ

Система уравнений Кирхгофа сохраняет свой вид:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d\mathrm{M}_1}{ds} + \omega_2 M_3 - \omega_3 \mathrm{M}_2 = 0, \\ &\frac{d\mathrm{M}_2}{ds} + \omega_3 M_1 - \omega_1 \mathrm{M}_3 + \mathrm{P}\gamma_3 = 0, \\ &\frac{d\mathrm{M}_3}{ds} + \omega_1 M_2 - \omega_2 \mathrm{M}_1 - \mathrm{P}\gamma_2 = 0, \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\gamma_1}{ds} + \gamma_3\omega_2 - \gamma_2\omega_3 = 0, \\ &\frac{d\gamma_2}{ds} + \gamma_1\omega_3 - \gamma_3\omega_1 = 0, \\ &\frac{d\gamma_3}{ds} + \gamma_2\omega_1 - \gamma_1\omega_2 = 0, \end{aligned} \right. \tag{22}$$

а замыкающие соотношения с учётом проделанного анализа принимают вид

$$M_1 = \tilde{B}_1\omega_1, \quad M_2 = B_2\omega_2 + A\omega_3, \quad M_3 = B_3\omega_3 + A\omega_2, \tag{23}$$

где $\tilde{B}_1 = B_1 + A_1$.

Система (22) без дополнительных ограничений на коэффициенты соотношений (23) допускает следующие три интеграла:

$$\begin{gathered} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3 = K, \end{gathered} \tag{24}$$

как видно, структура геометрического интеграла и интеграла площадей сохранилась, в то же время интеграл энергии имеет вид

$$B_1\omega_1^2 + B_2\omega_2^2 + B_3\omega_3^2 + 2A\omega_2\omega_3 - 2P\gamma_1 = 2H. \tag{25}$$

При дополнительном условии $B_2 = B_3$ система (22) допускает четвёртый интеграл, который следует из первого уравнения:

$$B_1\omega_1^2 + 2A\omega_2\omega_3 + 2\frac{A}{B_2}P\gamma_1 = \mathrm{C}.$$

Преобразовав интегралы (24) и (25) с помощью кинематических уравнений Эйлера, получим следующее уравнение для нахождения величины γ_1:

$$n^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = f\left(v\right) = \left(h + \left(a_2 + 1\right) v\right)\left(1 - v^2\right) - \left(\left(an\left(a - 1\right) - b\right) v + \beta\right)^2, \tag{26}$$

где введены обозначения:

$$\sqrt{B_2/2P} = n, \quad (2H - \mathrm{C})/2P = h, \quad a = \frac{A}{B_1}, \quad a_2 = \frac{A}{B_2}, \quad K\Big/\sqrt{2PB_2} = \beta, \quad \gamma_1 = \cos\vartheta = v.$$

Так как левая часть уравнения (26) неотрицательна, то как и в предыдущих случаях, возникает необходимость определить те значения v, при которых выполнено условие $f(v) \geq 0$. В силу свойств системы дифференциальных уравнений (22) её решение определено при любых начальных значениях $\vartheta|_{s=0} = \vartheta_0$ (при этом необходимо иметь в виду соответствующие начальным значениям переменных значения безразмерных параметров). Поэтому можно считать выполненным неравенство $f(v_0) = f(\cos\vartheta_0) \geq 0$, $|v_0| \leq 1$. Заметим далее, что $f(-\infty) > 0$, $f(-1) \leq 0$, $f(1) \leq 0$. Отсюда следует, что уравнение $f(v) = 0$ имеет три действительных корня. Один корень принадлежит полуоси $v \leq -1$, а два других находятся в интервале $(-1;1)$. При этом некоторые корни могут совпадать. Обозначим эти корни v_1, v_2, v_3 в соответствии с их расположением на числовой оси: $v_1 \leq -1 \leq v_2 \leq v_3 \leq 1$. Функция $f(v)$ будет принимать следующие значения:

$$f(v) > 0 \quad \text{для} \quad v < v_1 \leq -1, \qquad f(v) < 0 \quad \text{для} \quad v_1 < v < v_2,$$

$$f(v) > 0 \quad \text{для} \quad v_2 < v \leq v_3, \qquad f(v) < 0 \quad \text{для} \quad v > v_3.$$

Учитывая, что $v = \cos\vartheta$ не превосходит по абсолютной величине единицы, областью определения правой части дифференциального уравнения (26) следует читать отрезок $v_2 \leq v \leq v_3$.

Перепишем уравнение (26), воспользовавшись разложением полинома $f(v)$:

$$n^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = (v_3 - v)(v - v_2)(v - v_1). \tag{27}$$

С целью определения зависимости $v = v(s)$ выполним ряд последовательных преобразований. После замены $v = v_3 - (v_3 - v_2)w^2$ уравнение (27) примет вид

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)^2 = m^2\left(1 - w^2\right)\left(1 - k^2w^2\right), \tag{28}$$

где $m = \frac{1}{2b}\sqrt{v_3 - v_2}$, $k^2 = \frac{v_3 - v_2}{v_3 - v_1}$, причём интервал изменения переменной w фиксирован:

$$0 \leq w^2 \leq 1. \tag{29}$$

Обе величины в скобках в уравнении (28) положительны, когда w^2 изменяется в интервале (29), так как $k^2 < 1$.

Полагая $w = \sin x$, решение уравнения (28) представим в нормальной форме Лежандра:

$$m(s - s_1) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}}, \tag{30}$$

или в обозначениях Лежандра, $m(s - s_1) = F(k, x)$. С помощью функций Якоби равенство (30) представим в виде $w = snm(s - s_1)$. Окончательно получаем

$$v = v_3 - (v_3 - v_2)\, sn^2 m(s - s_1).$$

Оставшиеся неизвестные величины системы (22) находятся при помощи кинематических уравнений Эйлера в виде квадратур от эллиптических функций. Таким образом, получено точное решение системы уравнений Кирхгофа в микрополярной теории тонкого стержня.

Библиографический список

1. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 2, № 7. С. 1399–1409.

2. *Кувшинский Е.В., Аэро Э.Л.* Континуальная теория асимметрической упругости // ФТТ. 1969. Т. 5, № 9. С. 2591–2598.

3. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps deformables. Paris, 1909. vi+226 p. (Appendix, p. 953–1173 of Chwolson's Traite de Physicue. 2nd ed., Paris).

4. *Koiter W.T.* Couple-stresses in the theory of elasticity. Pt. I–II // Proc. Koninkl. Neterland. Akad. Wetensh. 1964. V. B67, № 1. P. 17–44.

5. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

6. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несим-

метричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28, вып. 3. С. 401–408.

7. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, N.Y., Toronto et al: Pergamon-Press, 1986. 383 p.

8. *Toupin R.A.* Theories of elasticity with couple-stress // Arch. Ration. Mech. Anal. 1964. V. 17, № 2. P. 85–112.

9. *Eringen A.C.* Nonlocal polar field theories // Continuum Physics. V. 4. N.Y.: Academic Press, 1976. P. 205–268.

10. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. Berlin, Heidelberg, N.Y. et al: Springer-Verlag. 1999. 325 p.

11. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories. II. Fluent Media. Berlin, Heidelberg, N.Y. et al: Springer-Verlag. 2001. 342 p.

12. *Иванова Е.А. и др.* Учет моментного взаимодействия при расчете изгибной жесткости наноструктур // Докл. РАН. 2003. Т. 391, № 6. С. 764–768.

13. *Китайгородский А.И.* Невалентные взаимодействия атомов в органических кристаллах и молекулах // УФН. 1979. Т. 127, вып. 3. С. 391–419.

14. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 920 с.

15. *Илюхин А.А., Щепин Н.Н.* К моментной теории упругих стержней // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2001. Спецвыпуск. С. 92–94.

УДК 001.89+001.92:37+004.738.5

ЭЛЕКТРОННЫЕ ПУБЛИКАЦИИ И НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ ИНТЕРНЕТА

А.Д. Полянин, А.И. Журов

Институт проблем механики РАН
E-mail: polyanin@ipmnet.ru

В статье описаны основные направления и тенденции развития электронных публикаций в России и за рубежом. Показано, почему авторам полезно размещать свои статьи и книги в Интернете. Даны адреса и краткое описание наиболее крупных физико-математических ресурсов Интернета. Сформулировано, что надо делать для развития научных электронных ресурсов России.

Ключевые слова: электронная публикация, Интернет, веб-сайт, наука, образование, математика, физика.

Electornic Publications and Scientific-Educational Resources of the Internet

A.D. Polyanin, A.I. Zhurov

The paper presents current developments and trends in electronic publications in Russia and abroad. It is explained why authors may find it useful to publish their papers and books online. Web addresses with brief descriptions of major mathematics and physics Internet resources are given. Suggestions are offered for the development of scientific online resources in Russia.

Key words: electronic publication, Internet, website, science, education, mathematics, physics.

В 2001 году один из авторов данной статьи написал заметку [1], в конце которой он довольно скромно оценивал возможности Интернета. За последующие шесть лет произошло много событий (в том числе велась работа над созданием научно-образовательного сайта «EqWorld — Мир математических уравнений»), которые привели его и соавтора к излагаемым далее существенно более оптимистическим оценкам и выводам.

ВВЕДЕНИЕ

Международная компьютерная сеть Интернет (Всемирная паутина) является огромным информационным ресурсом, без которого работа научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов в настоящее время становится малоэффективной. Интернет позволяет не только вести научную переписку в электронном виде, но также оперативно публиковать результаты исследований и эффективно осуществлять поиск необходимых материалов, тем самым активно вытесняя общепринятые бумажные носители (книги, журналы, препринты и др.) в качестве основного источника информации.

Интернет — виртуальное образование, которое никому не принадлежит, поскольку является объединением огромного числа независимых глобальных и корпоративных сетей. Интернет не имеет ни политических, ни территориальных границ. Интернет делает информацию доступной, вне зависимости от того, где вы находитесь, где живете, какова ваша национальность и каких взглядов вы придерживаетесь.

1. ИЗ ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ ПЕЧАТНЫХ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

Первые печатные научные журналы начали появляться во второй половине XVII века, спустя 200 лет после изобретения печатного станка. Первые печатные журналы позволили вести хронологию развития науки, изобретательской деятельности и научных исследований. В то время технология книгопечатания казалась ученым такой же прогрессивной и полезной, какой представляется современным исследователям электронная технология.

Постепенно журнальные статьи стали теснить книги как основной способ представления учеными результатов исследований и открытий. Несколько столетий стоимость журналов в основном покрывалась за счет индивидуальных подписок, оплаты собственных публикаций авторами, кто хотел напечатать свои работы, и отчасти самих издательств, которые использовали доход от более популярных журналов, выходивших большими тиражами, для покрытия расходов по узкоспециальным и малотиражным изданиям.

В середине прошлого столетия расходы по изданию журнальной продукции покрывались в основном за счет библиотечных подписок. По мере того как увеличивалось количество журналов и цены на них росли, библиотеки были вынуждены выделять на их комплектование все большую часть своего бюджета (за счет уменьшения доли бюджета, расходуемого на покупку книг).

В 1960-е и 1970-е годы библиотекам еще удавалось находить средства на оплату этих непрерывно возраставших расходов, но затем их бюджета просто перестало хватать [2]. В результате библиотеки начали отказываться от подписки на малоспрашиваемые и вторичные названия и стали более разборчивыми в выборе новых журналов. Но цены продолжали расти, и многие библиотеки были вынуждены принять программы по сокращению комплектования периодических изданий. Чтобы компенсировать это сокращение, издательства подняли цены еще выше. Это привело к очередному витку роста цен на журнальную продукцию и новому кругу сокращения подписок. На первой ежегодной конференции североамериканской профессиональной группы по периодике (NASIG — North American Serials Interest Group), состоявшейся в июне 1986 года и собравшей сотрудников отделов сериальных изданий библиотек всей Северной Америки, звучали слова горечи и возмущения в адрес издательств, прежде всего тех, кто особенно наживается на невообразимо и преступно высоком повышении цен на журналы и книги.

К сожалению, в настоящее время высокие цены на англоязычные научные журналы и книги и малый (и постоянно сокращающийся) бюджет библиотек институтов Российской академии наук и большинства российских вузов практически не позволяют им выписывать иностранные журналы и книги.

Замечание. Стоимость годовой подписки на англоязычные научные журналы обычно составляет не меньше 500 долл. Например, подписка на 2008 г. на «Journal of Computational and Applied Mathematics» (Elsevier), «Applied Mathematics» (Springer), «Applied Physics A» (Springer) и «Journal of Fluid Mechanics» (Cambridge Univ. Press) для библиотек стоит соответственно 4727 долл., 1397 долл., 4989 долл. и 3200 долл. Стоимость англоязычных монографий обычно составляет 80–200 долл. и нередко бывает и выше.

Издание научной литературы в России убыточно[1], монографии издаются небольшими тиражами (подробности см. в разд. 13) в основном по грантам РФФИ или за счет авторов. В результате современной научной литературы выпускается недостаточно, а уже имеющаяся литература в библиотеках постепенно изнашивается и теряется.

2. ЭЛЕКТРОННЫЕ ПУБЛИКАЦИИ В ИНТЕРНЕТЕ: ДВА ОСНОВНЫХ НАПРАВЛЕНИЯ

В последнее время в связи со стремительным развитием сети Интернет появляется все больше электронных научных публикаций, доступ к которым бесплатный для конечных пользователей. Многочисленных издателей таких публикаций относят к движению Open Access — «Свободный доступ»

[1]Единственной (но существенной) доходной частью научной издательской деятельности является перевод журналов Российской академии наук (и некоторых других журналов, всего около 200 наименований) на английский язык с последующим распространением по подписке за рубежом. Именно это обстоятельство, в первую очередь, позволяет сейчас сохранить финансирование оригинальных версий этих журналов на русском языке.

[3, 4]. В его рамках выделяют *два основных направления*, которые образно называют *Green Road* (Зеленый путь) и *Golden Road* (Золотой путь).

Первое направление объединяет сторонников так называемого «самоархивирования», которые поддерживают усилия исследователей по публикации своих собственных работ в свободном доступе в Интернете (что не исключает параллельную публикацию их в традиционных изданиях). Обычно необходимые средства для этого выделяются организациями, в которых работают ученые, либо организациями, выдающими гранты. Самый известный и наиболее объемный (более 430 000 статей) архив таких публикаций — автоматический электронный архив статей и препринтов по физике, математике, информатике, механике, астрономии и биологии (arxiv.org[2]). В разд. 9.1 будет дано более подробное описание этого архива.

Второе направление развивает альтернативные модели издания научных публикаций, прежде всего журналов и материалов конференций, в рамках которых все затраты несут издатели, а для конечного пользователя доступ к публикациям бесплатный. Для финансирования этих моделей также привлекаются грантовые средства и средства научных организаций. Наиболее известные программы «Золотого пути» — «Open Access» института «Открытое общество» (www.soros.org/openaccess) и Public Library of Science (www.plos.org). В настоящее время существует уже более 2000 научных журналов, работающих на принципах открытого доступа (в том числе около 160 журналов по математике и физике), что составляет около 10% всех рецензируемых научных журналов, выходящих во всем мире[3]. Эти журналы перечислены на веб-сайте Directory of Open Access Journals (www.doaj.org), около четверти из них проиндексированы на уровне статей.

Данные о журналах открытого доступа имеются в наиболее представительном издании по периодике — Ulrich's International Periodicals Directory, статьи из них индексируются во многих поисковых системах, в том числе в наиболее крупной в мире поисковой системе Google (www.google.com) и системе Scirus (www.scirus.com), последняя ориентирована исключительно на научную информацию в Сети. По данным за 2005 год, 239 журналов открытого доступа были включены в список из 9000 тщательно отобранных журналов, составляющих базу анализа цитирования и импакт-факторов журналов[4] в ISI Web of Science [3].

По оценкам участников проекта OCLC «Web Characterization Project», общедоступные сайты составляют примерно 35%, при этом основная часть электронных научных публикаций (более 90%) сосредоточена вне общедоступного веба. Тем не менее уже сейчас с помощью Интернета (см. разд. 9, 10 и прил. 1) бесплатно можно получить практически любую информацию по всем разделам математики и физики, которые изучаются в базовых курсах университетов и вузов, и много полезной научной информации в развивающихся и новых областях.

3. ИЗ ИСТОРИИ ДВИЖЕНИЯ OPEN ACCESS

Далее перечислим основные вехи в истории движения Open Access [3, 4]

1991 г. — создание архива препринтов работ по физике (Open Archives — Открытые архивы).

1993 г. — обращение Стивена Харнада в листе рассылок по теме «Электронные журналы», призывающее ученых создавать архивы своих публикаций и размещать их в свободном доступе в Интернете.

1998 г. — основание SPARC (Scholarly Publishing and Academic Resources Coalition), ставящей своей целью учреждение новых журналов, авторитетных и недорогих.

1999–2000 гг. — Харольд Вармус (Harold Varmus), специалист в области молекулярной биологии и вирусологии, нобелевский лауреат, выступает с предложением выкладывать в свободный доступ все статьи по биомедицинской тематике и основывает Public Library of Science (PLoS).

2002 г. — инициатива Джорджа Сороса «Budapest Open Access Initiative».

2003 г. — ряд авторитетных журналов признал открытый доступ к результатам научных исследований одним из пяти важнейших научных событий 2003 г. (Nature и The Scientist), одним из

[2]Здесь и далее мы опускаем префикс «http://» в электронном адресе, т. е., например, запись «arxiv.org» будет означать «http://arxiv.org».

[3]Отметим, что за два года общее количество электронных журналов увеличилось на 600, т. е. более чем на 40%.

[4]Импакт-факторы журналов за 2005 г. можно найти на стр. eqworld.ipmnet.ru/ru/info/sci-edu.htm.

семи научных прорывов 2003 г., которому следует уделить максимум внимания в 2004 г. (Science Magazine), а также одним из десяти самых громких событий года (The Wall Street Journal) [5].

2004 г. — Комитет Палаты Представителей США принял решение об обязательной публикации результатов всех научных работ биомедицинской тематики, которые выполнены при финансовой поддержке Национального института здравоохранения, на сервере PubMedCentral (www.pubmedcentral.nih.gov) не позднее шести месяцев после их публикации в научной периодике.

2004 г. — в Великобритании были проведены парламентские слушания по проблемам издания научной литературы. В результате комитет по науке и технике британского Парламента рекомендовал правительству страны обязать участников всех исследований, выполненных за счет государственного финансирования, публиковать их результаты в свободном доступе в Интернете.

2006 г. — пять крупнейших научных фондов Великобритании обязали публиковать в открытых архивах результаты работ, выполненных при поддержке этих фондов.

2006 г. — Григорий Перельман номинировался[5] на Филдсовскую премию (самая престижная премия по математике для ученых до 40 лет — аналог Нобелевской премии) за две электронные статьи в архиве arXiv.org, которые не были опубликованы в «бумажных журналах». Таким образом, математическое сообщество, фактически, приравняло по значимости электронные и бумажные публикации.

4. ПУБЛИКАЦИИ В ОТКРЫТОМ ДОСТУПЕ УВЕЛИЧИВАЮТ ИХ ЦИТИРОВАНИЕ

Важную роль в пропаганде открытого доступа сыграли проведенные его сторонниками исследования влияния предоставления публикаций в открытый доступ на индекс цитирования этих публикаций. Результаты этих исследований представлены на веб-сайте CiteSeer (citeseer.ist.psu.edu). На примере исследования цитирования около 120 000 докладов, сделанных на конференциях по прикладной математике и информатике, было убедительно показано, что в последние годы доклады, выложенные в открытый доступ, цитировались в других публикациях в несколько раз чаще, чем доклады, доступ к которым предоставлялся за плату.

Специальное исследование [6] привело к следующим важным выводам:

1) с каждым годом все больше цитируются электронные статьи, открытые для бесплатного доступа;

2) среднее число библиографических ссылок на печатную статью — 2,74; среднее число ссылок на бесплатную электронную — 7,3 или в 2,6 раза больше, чем на печатную;

3) если взять процентное соотношение печатных и бесплатных электронных статей по годам, а затем усреднить полученные результаты на интервале 1989–2000 гг., то окажется, что электронные статьи цитируются в 4,5 раза чаще печатных и это соотношение быстро возрастает.

Объяснение очевидно: с каждым годом ученые проводят все меньше времени в библиотеках и все больше черпают информацию из Интернета. В этих условиях каждый ученый должен понять, что для признания его идей, гипотез, научных результатов и адекватной их цитируемости мировым научным сообществом, недостаточно печатных публикаций и публичных выступлений, нужно позаботиться о том, чтобы представить их в Интернете, привлечь к ним внимание и заинтересовать предельно широкую целевую аудиторию [7].

5. ОСНОВНЫЕ ТЕНДЕНЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С БЫСТРЫМ РАЗВИТИЕМ ИНТЕРНЕТА

1. Многие исследователи, включая ученых с мировым именем, входящих в редколлегии известных журналов, наряду с обычными публикациями в бумажной форме параллельно выкладывают свои работы в электронном виде в Интернете[6]. Это объясняется рядом причин, перечисленных ниже.

- Электронные публикации появляются очень быстро — практически сразу же с момента размещения публикации в Интернете (и индексируются крупными поисковиками при размещении на хорошо посещаемых веб-сайтах через одну — две недели, а иногда в течение нескольких дней), что особенно важно для приоритетных работ. Статьи в журналах обычно выходят не раньше,

[5] Григорий Перельман — единственный ученый, который отказался получать эту премию.

[6] Это в первую очередь относится к западным странам, однако и в России эти процессы постепенно начинают набирать силу.

чем через шесть месяцев после того, как они приняты, а очень часто этот процесс занимает более года.

- Охватывается существенно более широкий круг читателей из многих стран мира, если электронные публикации размещены на известных и хорошо посещаемых веб-сайтах. Тиражи специализированных научных журналов обычно составляют нескольких сотен экземпляров. Сами журналы (особенно иностранные) стоят довольно дорого, и многие библиотеки не имеют возможности их приобретать. В то же время известные сайты имеют более тысячи посетителей ежедневно, а искомые материалы предоставляются либо бесплатно, либо за существенно меньшую плату.
- Размещение в Интернете электронных версий статей может значительно увеличить их цитируемость (см. разд. 4).
- Публикации в Интернете «страхуют» учёных от недобросовестных рецензентов. Известны случаи, когда статья отклоняется или задерживается, а позже похожие результаты появляются в работах других авторов. Такое бывает даже с книгами.
- Электронные публикации, размещенные на сайтах, со временем могут дополняться новым материалом, расширяться и редактироваться (и поэтому не столь быстро устаревают, как публикации в обычных журналах).

Замечание. Основная причина, мешающая авторам публиковать статьи в электронном виде, — инертность и привычка к традиционной форме публикаций (что в первую очередь характерно для авторов пожилого возраста и части авторов среднего возраста). В России сейчас имеется несколько дополнительных причин для сдерживания электронных публикаций — подобные публикации практически не учитываются ВАК при защите диссертаций (подробности см. далее в разд. 7) и слабо учитываются при оценке деятельности научных работников.

2. В западной научной литературе (как в журналах, так и в книгах) довольно часто встречаются ссылки на электронные публикации и веб-сайты. Для крупных российских журналов (особенно академических) это скорее исключение, чем практика. Для иллюстрации цитирирования электронных ресурсов в научной литературе широкого профиля приведем несколько ярких примеров.

- Энциклопедия [8], состоящая из более чем 3 000 страниц, является самым крупным в мире однотомным источником по математике на английском языке. На каждой третьей — четвертой странице этой книги даются ссылки на электронные материалы (например, на стр. 1766 в разделе «Lindenmayer system» даются три ссылки на электронные материалы, на стр. 2310 в разделе «Polylogarithm» даются четыре ссылки на электронные материалы и т. д.).
- В справочниках по математике [9, 10] электронным математическим источникам посвящены целые разделы, где даются их краткое описание и адреса в Интернете.

Ссылки на открытые электронные источники очень удобно использовать. Единственным ограничением при этом является наличие компьютера с доступом в Интернет. Подавляющее большинство научных работников сейчас такими возможностями обладают. Тогда, указав соответствующий электронный адрес, можно быстро получить нужный материал. Использование книг и журналов на бумажных носителях имеет гораздо больше ограничений.

3. Многие журналы (в основном англоязычные) в настоящее время имеют две версии: бумажную и электронную. Эти версии могут иметь разную подписку, причем электронная версия стоит дешевле (в качестве такого примера можно привести англоязычную версию журнала «Теоретические основы химической технологии» — «Theoretical Foundations of Chemical Engineering»). Иногда электронные версии журнальных статей выставляются в Интернете существенно раньше, чем появляется бумажная версия журнала (такой политики, например, придерживается журнал «Applied Mathematical Modelling», который требует плату за электронные статьи).

4. Многие учебные курсы (за рубежом и в России) частично или полностью переводятся в интернет-форму. Это обусловлено большей доступностью и наглядностью (могут использоваться цветовые выделения, анимация и др.) материалов, размещенных в Интернете, а также возможностью диалога с обучающей программой или преподавателем. Особенно важно это для заочного обучения студентов вузов и школьников в заочных физико-математических школах.

5. Основные достоинства электронных публикаций: максимально быстро становятся доступными для читателей, нет ограничений по объему текста, низкая стоимость (на один — два порядка дешевле бумажных публикаций), наглядность (можно использовать цветовые выделения, анимации, «живые» ссылки на источники внутри статьи и внешние источники, размещенные в Интернете, возможность звукового сопровождения и др.), возможность увеличения масштаба текста и иллюстраций (особенно это важно для людей со слабым зрением), максимально широкий охват потенциальных читателей, непосредственный доступ с рабочего места пользователя (нет потерь времени, связанных с посещением библиотек), привычная форма подачи материала для молодежи, которая с детства привыкла к компьютеру, и части среднего поколения. Более подробно эти и некоторые другие вопросы освещаются в статьях [11, 12].

6. Переход от бумажных носителей к электронным самым положительным образом влияет на решение экологических проблем и природоохранных вопросов. Это обусловлено тем, что производство бумаги требует значительного количества лесных ресурсов и обычно включает экологически опасные технологии.

7. Использование электронных публикаций позволяет эффективно решить основные проблемы библиотек, связанные с сохранностью и порчей книг и журналов, поиском необходимой информации и свободных площадей. Сейчас мощность настольных компьютеров позволяет разместить в их памяти небольшую библиотеку, содержащую 20 000 и более электронных книг и статей. Компьютеризация библиотек дает возможность автоматизировать поиск информации в каталогах и позволяет одновременно работать над одним документом сразу нескольким читателям.

8. По утверждению ряда экспертов, в ближайшие 10–20 лет многие журналы полностью «перейдут» из бумажной формы в «электронную». В бумажной форме сохранятся только известные журналы, имеющие большую подписку. Сказанное позволяет сделать следующие выводы относительно обычных журналов:

- Надо максимально поддерживать уже существующие российские научные журналы и очень осторожно относиться к проектам открытия новых «бумажных» журналов (по оценке западных специалистов, для «раскрутки» журнала требуется по крайней мере пять — семь лет и большие затраты).
- Надо максимально расширить тематику узкоспециализированных журналов по физике и механике за счет включения статей из смежных областей (полезно, например, публиковать статьи по разработке численных методов решения соответствующих задач, статьи по качественному анализу и точным решениям уравнений по тематике журнала и др.). Это позволит расширить круг потенциальных авторов и читателей журнала и приведет к увеличению подписки.

6. ОТНОШЕНИЕ ИЗДАТЕЛЬСТВ К ЭЛЕКТРОННЫМ ПУБЛИКАЦИЯМ

Движение за открытый доступ к научным публикациям в Интернете сталкивается с мощным противодействием крупных издательств, которые пытаются контролировать рынок научной литературы. Крайним выражением этого противодействия явилось включение в договоры ряда издательств, заключаемые с авторами публикаций, условия, запрещающего авторам предоставление этих публикаций в свободный доступ в Интернете. Очевидно, что подобная политика сдерживает распространение научной информации и наносит вред научному сообществу.

Проект SHERPA — RoMEO (www.sherpa.ac.uk/romeo.php) отслеживает политику издательств по отношению к «архивированию» статей. Информация о политике издателей помогает решить две задачи: для авторов — узнать о возможности размещения собственных статей в Интернете, а для потенциальных читателей — узнать о целесообразности обращения к автору с просьбой прислать полный текст его работы. Во многих случаях автору разрешается размещать в Интернете электронную версию своей статьи, сделанную им лично (с полным выходными данными, где эта статья опубликована), но он не может размещать PDF-файл своей статьи, который сделан издательством[7]. В таблице в качестве примеров приведены данные по четырем издательствам (МАИК «Наука», Elsevier, Springer,

[7]Такое положение типично для российских академических журналов, которые издаются на русском языке издательством МАИК «Наука/Interperiodica» и на английском языке — компанией Pleiades Publishing (текст авторского договора можно получить на стр. www.maik.rssi.ru/cgi-perl/contents.pl?lang=rus&catalog=4&page=2).

Taylor & Francis). Отметим, что условия предоставления статей в открытый доступ иногда могут различаться для отдельных журналов одного и того же издательства. Кроме того, автор обычно имеет право передавать журнальные копии своих статей (как в бумажном, так и электронном виде) своим коллегам на некоммерческой основе для личного пользования.

Возможность предоставления авторами своей статьи в свободный доступ

Издательство	Оригинальный вариант статьи	Рецензированный и исправленный вариант	Финальный вариант издательства
МАИК «Наука» (англоязычные версии статей)	Разрешено	На личной странице, сайте работодателя; обязательна ссылка на издательство	Ссылка на финальный вариант на сайте издательства
Elsevier	Разрешено	Разрешено	Ссылка на финальный вариант на сайте издательства
Springer	Разрешено	На личной странице, сайте работодателя, сайте спонсора; обязательна ссылка на издательство	Ссылка на финальный вариант на сайте издательства
Taylor & Francis	Разрешено	Через 12 месяцев после выхода статьи в журнале	Ссылка на финальный вариант на сайте издательства

В России сложилась парадоксальная ситуация: сейчас статьи в академических журналах на русском языке недоступны в Интернете (аннотации статей из математических журналов можно найти на сайте www.mathnet.ru Математического института им. В. А. Стеклова РАН), а многие из этих же статей на английском языке доступны в академических институтах (например, статьи, которые распространяет издательство Springer).

7. ЮРИДИЧЕСКИЙ СТАТУС ЭЛЕКТРОННЫХ ЖУРНАЛОВ

В Постановлении Правительства РФ от 20 апреля 2006 г. № 227 «О внесении изменений в Постановление Правительства РФ от 30 января 2002 г. № 74» в п. 11 говорится: «Основные научные результаты докторской диссертации должны быть опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях. Результаты кандидатской диссертации должны быть опубликованы хотя бы в одном ведущем рецензируемом журнале или издании. Перечень указанных журналов и изданий определяется Высшей аттестационной комиссией. К опубликованным работам, отражающим основные научные результаты диссертации, приравниваются дипломы на открытия и авторские свидетельства на изобретения, ..., базы данных, ... публикации в *электронных научных изданиях*, зарегистрированных в федеральном государственном унитарном предприятии Научно-технический центр «Информрегистр»...» (полный текст постановления можно найти на стр. vak.ed.gov.ru/news/depart/335).

В конце 2006 г. ВАК исключил научные электронные журналы из списка ведущих рецензируемых журналов (список см. на стр. vak.ed.gov.ru/files/materials/516/per3.doc), в которых соискатели обязаны опубликовать свои основные результаты (отметим, что ранее некоторые электронные журналы входили в список ведущих рецензируемых журналов). Таким образом, сейчас в России юридический статус электронных журналов и обычных журналов, которые не содержатся в списке ВАК, одинаковый.

8. КАК ИСКАТЬ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ В ИНТЕРНЕТЕ

При поиске научных публикаций в Интернете лучше всего использовать самую мощную поисковую систему Google (www.google.com или www.google.ru в русской зоне Интернета). Поскольку подавляющее большинство электронных научных публикаций в Интернете, в особенности материалы с формулами, имеет формат PDF (значительно реже формат PS), в окне поисковой системы помимо перечня ключевых слов, которые должны содержаться в статьях искомого направления, надо добавить символ «pdf» (если этого не сделать, то в первых нескольких сотнях ссылок по запросу окажется мало статей). Вторым по значимости после PDF ключевым словом при поиске статей в англоязычном Интернете является «references» (поскольку научная публикация содержит список литературы). В список ключевых слов помимо основных терминов надо добавлять и узкоспециальные слова, конкретизирующие задаваемую тему. Например, при использовании списка ключевых слов «Klein-Gordon equation» Google выдает около 415 000 документов (на день написания этой статьи); добавление в список узкоспециальных слов резко уменьшает количество документов, например, набор ключевых слов «Klein-Gordon equation exact solutions pdf» и «Klein-Gordon equation exact solutions pdf references» дают уже соответственно 82 900 и 67 200 документов. Набрав ««Klein-Gordon equation» «exact solutions» pdf references», получим 10 600 документов (в искомых документах, слова, взятые в кавычки, будут расположены вместе и в том же порядке, что и в окне поисковика; при снятии кавычек ключевые слова могут находится в любом месте документа в любом порядке, причем в промежутке между ключевыми словами могут быть другие слова). Если требуется найти публикации некоторого автора, то добавляется его фамилия[8] (если фамилия распространенная – то и его инициалы).

Следует отметить, что количество материала в Интернете на английском языке на полтора–два порядка превышает объем русскоязычного материала. Так, например, поиск словосочетания «differential equations» в www.google.ru дает 70 400 000 веб-страниц, а аналогичная фраза на русском «дифференциальные уравнения» дает 1 620 000 страниц.

9. КРУПНЕЙШИЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ ИНТЕРНЕТА

9.1. ArXiv. Электронный ресурс arXiv (arxiv.org) является крупнейшим бесплатным архивом электронных научных публикаций по всевозможным разделам физики, математики, информатики, механики, астрономии и биологии (рис. 1). Имеется подробный тематический каталог и возможность

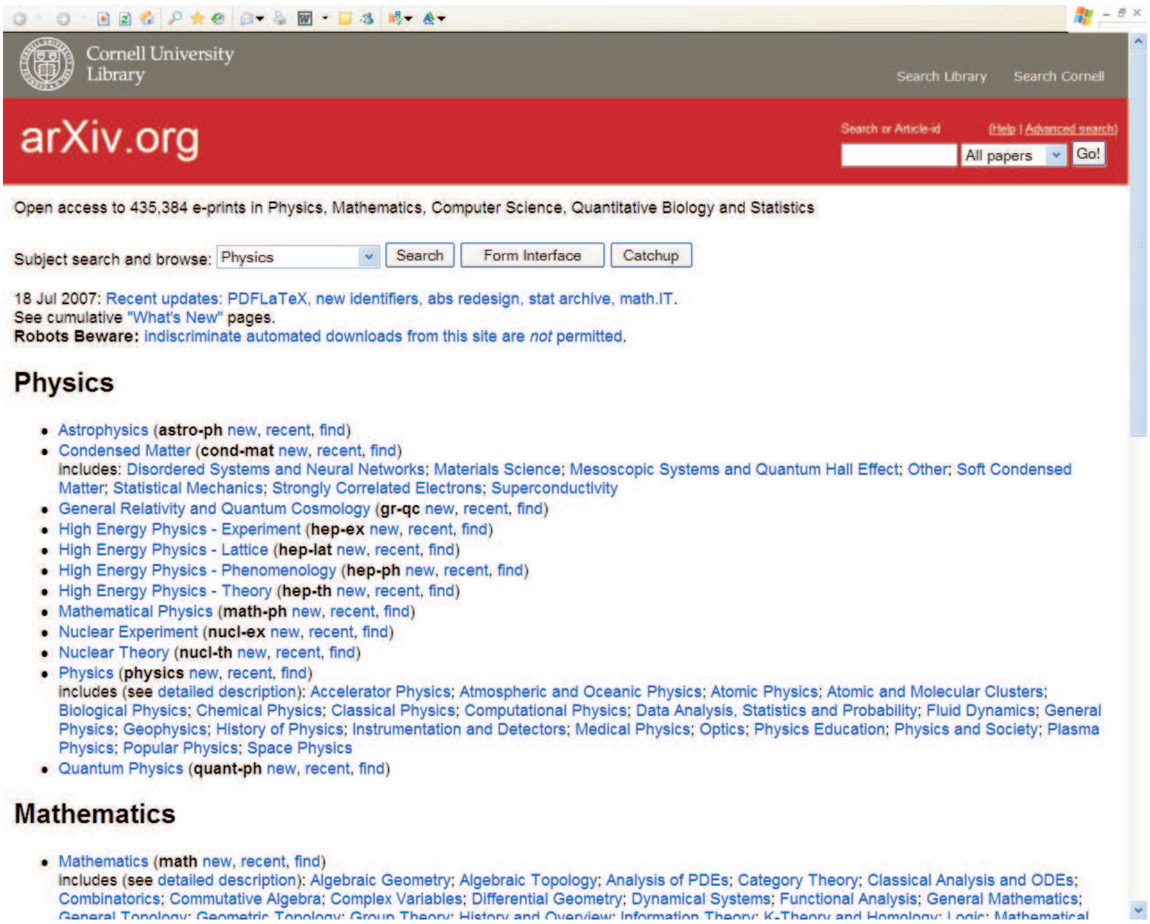


Рис. 1. Автоматический электронный архив статей и препринтов arXiv.org (arxiv.org)

[8]При поиске ссылок на российского автора в англоязычных публикациях фамилия может писаться различными способами (например, букву «я» обычно переводят «ya», реже — «ia» или «ja»).

поиска статей по множеству критериев. На конец сентября 2007 г. в нём содержится более 440 000 публикаций и ежемесячно добавляется по несколько тысяч статей.

После предварительной регистрации, авторы могут представлять свои статьи в архив. Статьи рекомендуется подавать на английском, но могут быть написаны и на любом языке с обязательной англоязычной аннотацией. Публикация материалов происходит очень быстро — как правило через несколько часов после подачи. По желанию авторы могут обновлять свои статьи, предоставляя исправленную и дополненную версию, а также имеют право удалять свои публикации при необходимости.

Архив был создан в 1991 г. в Лос-Аламосской национальной лаборатории (США), а в настоящее время является частью библиотеки Корнелльского университета (США, штат Нью-Йорк, г. Итака). Существует несколько десятков зеркал (автономно действующих копий) архива во многих странах мира, в том числе в России (ru.arxiv.org).

Отметим, что среди электронных публикаций, размещенных в arXiv, содержится немало обзоров и статей, которые параллельно поданы в традиционные журналы. Это дает возможность заинтересованным лицам знакомиться с некоторыми статьями, которые журналы не выставляют в открытый доступ.

9.2. Wikipedia. Wikipedia (wikipedia.org) — это крупнейшая бесплатная электронная энциклопедия, содержащая более 5 300 000 статей (на сентябрь 2007 г.) на более чем 100 языках по всевозможным областям человеческого знания (рис. 2). Ежедневно ее посещают сотни тысяч пользователей со всего мира. Русское название энциклопедии — Википедия.

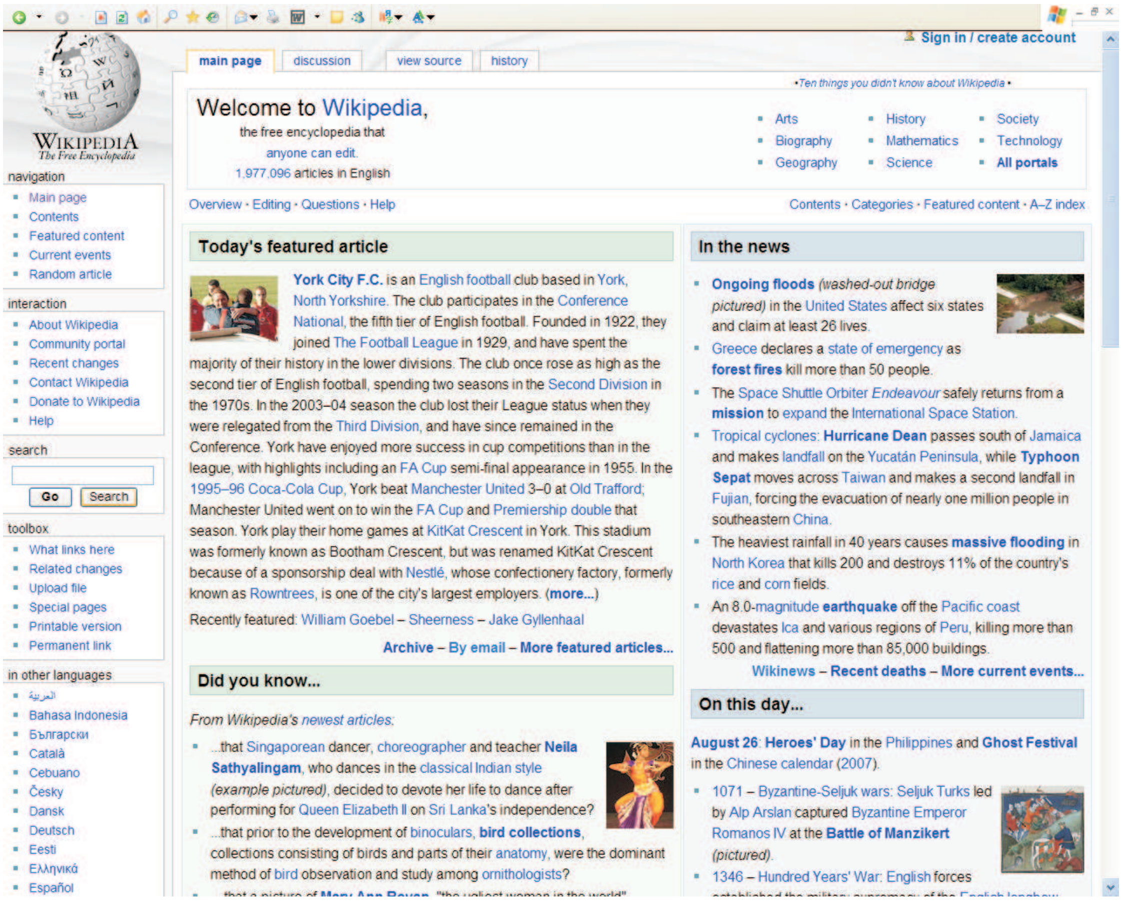


Рис. 2. Википедия — электронная энциклопедия (wikipedia.org)

Особенностью Википедии является то, что любой посетитель может написать или отредактировать любую статью и все изменения сразу же становятся видны другим посетителям. При этом даже не обязательно регистрироваться. Все изменения автоматически протоколируются и доступны для просмотра. Контроль за вносимыми изменениями осуществляют редакторы. С одной стороны, такой подход позволяет Википедии очень быстро развиваться, но с другой стороны не все представленные материалы можно считать достоверными. Иногда более старые статьи содержат более полную и надежную информацию, чем недавние.

В Википедии хорошо организована система поиска информации. Многие статьи имеют переводы на различные языки. Имеются форумы, состоящие из множества разделов. Существует русская версия энциклопедии (ru.wikipedia.org), в которой представлено уже более 200 000 статей. Приводятся ссылки на родственные электронные проекты, такие как Викисловарь (словарь и тезаурус), Викиучебник (учебники и руководства), Викиверситет (обучение) и др. Имеется специальный раздел, посвященный математике (en.wikipedia.org/wiki/Portal:Mathematics — на английском языке, ru.wikipedia.org/wiki/Портал:Математика — на русском языке).

Википедия появилась в январе 2001 г. как развитие проекта Nupedia и сначала содержала всего несколько статей на английском языке. Менее чем через месяц был пройден рубеж в 1 000 статей, а к концу года — 20 000 статей. Русская версия Википедии появилась в мае 2001 г.

В настоящее время Википедия является одним из самых популярных и посещаемых электронных ресурсов в мире и уступает только наиболее известным поисковым системам, таким как Google.

9.3. MathWorld. Веб-сайт MathWorld (mathworld.wolfram.com) — это наиболее полный энциклопедический ресурс по математике (рис. 3), созданный и поддерживаемый Эриком Вайсштейном (Eric W. Weisstein) в сотрудничестве с компанией Wolfram Research, разработавшей известную систему компьютерной алгебры Mathematica.

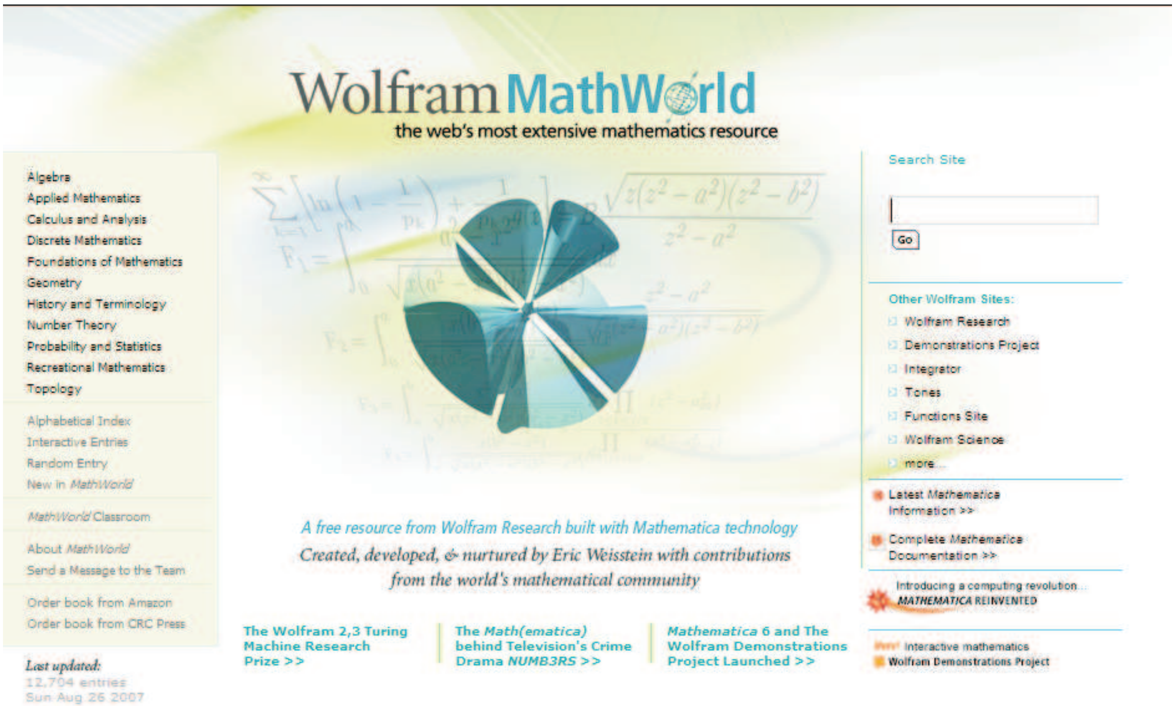


Рис. 3. Электронный энциклопедический ресурс по математике MathWorld (mathworld.wolfram.com)

MathWorld содержит около 13 000 статей по различным понятиям и разделам математики, включая теорию чисел, алгебру, геометрию, анализ, топологию, теорию вероятности, статистику и др. Имеется подробный предметный указатель и поисковая система. В разделе MathWorld Classroom приводятся определения более 300 основных математических терминов и даются соответствующие примеры.

MathWorld берет свое начало с 1995 г. и продолжает активно развиваться и поддерживаться. На его основе написана крупнейшая на сегодняшний день математическая энциклопедия на английском языке— CRC Concise Encyclopedia of Mathematics [8].

9.4. Некоторые другие полезные ресурсы. Существует большое количество других полезных физико-математических ресурсов. Кратко перечислим некоторые из них (более подробный список приводится в прил. 1).

- PlanetMath (planetmath.org) — быстроразвивающийся бесплатный математический ресурс. Содержит разделы «Энциклопедия» (около 7 000 веб-страниц), «Статьи» (несколько десятков), «Книги» (несколько десятков), «Лекции» (несколько десятков), «Форумы» и др. Организован по принципу: «сами пользователи пишут, проверяют и редактируют материалы».
- ScienceWorld (scienceworld.wolfram.com) — другой популярный ресурс от Эрика Вайсштейна, посвященный различным разделам физики (около 3 000 веб-страниц), химии (около 500 страниц) и астрономии (около 600 страниц). Содержит более 1 000 биографий известных ученых.
- Physics.org (physics.org) — сайт, поддерживаемый Институтом физики (Institute of Physics, UK). Имеет большую базу данных о физических сайтах, содержит полезную образовательную информацию по физике и др.
- The Math Forum (mathforum.org) — один из ведущих учебно-образовательных ресурсов по математике, предназначенный для преподавателей, студентов и школьников. Его библиотека (mathforum.org/library) содержит описание большого числа математических сайтов. Имеется возможность задавать вопросы.
- S.O.S. Mathematics (www.sosmath.com) — популярный образовательный веб-сайт для старшеклассников и студентов. Содержит материалы по основным разделам математики.
- Научная электронная библиотека e-LIBRARY (elibrary.ru) — русскоязычный ресурс, содержащий электронные версии большого числа научных журналов зарубежных и российских издательств по всем направлениям фундаментальной науки.
- NDLTD: Networked Digital Library of Theses and Dissertations (www.ndltd.org) — электронная библиотека, содержащая большое количество дипломных работ и диссертаций на английском языке по различным наукам.
- Theses Canada (www.collectionscanada.ca/thesescanada) — открытый портал электронных полнотекстовых дипломных работ и диссертаций, защищенных в университетах и колледжах Канады. Содержит около 300 000 работ по различным наукам.

10. МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ САЙТ «EQWORLD — МИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»

Международный научно-образовательный веб-сайт «EqWorld — Мир математических уравнений» (eqworld.ipmnet.ru) является крупнейшим в мире электронным ресурсом, посвященным математическим уравнениям. Сайт (рис. 4) содержит следующие разделы:

- Таблицы со справочной информацией по точным решениям различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений. Особое внимание уделено уравнениям математической физики и механики. Приводятся интересные статьи по указанным темам.
- Методы решения уравнений. Приводятся статьи, лекции, материалы из книг по методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, интегральных и функциональных уравнений.
- Вспомогательные таблицы и материалы, посвященные интегралам, интегральным преобразованиям и специальным функциям.
- Учебно-образовательные материалы по различным математическим уравнениям. Представлена информация для учителей и школьников о математических олимпиадах, физико-математических школах и полезных сайтах. Приводятся биографии знаменитых математиков, адреса сайтов российских университетов и др.
- Математический форум. В различных разделах по математике, механике и физике можно задавать вопросы, обсуждать интересующие темы или дать полезную информацию.

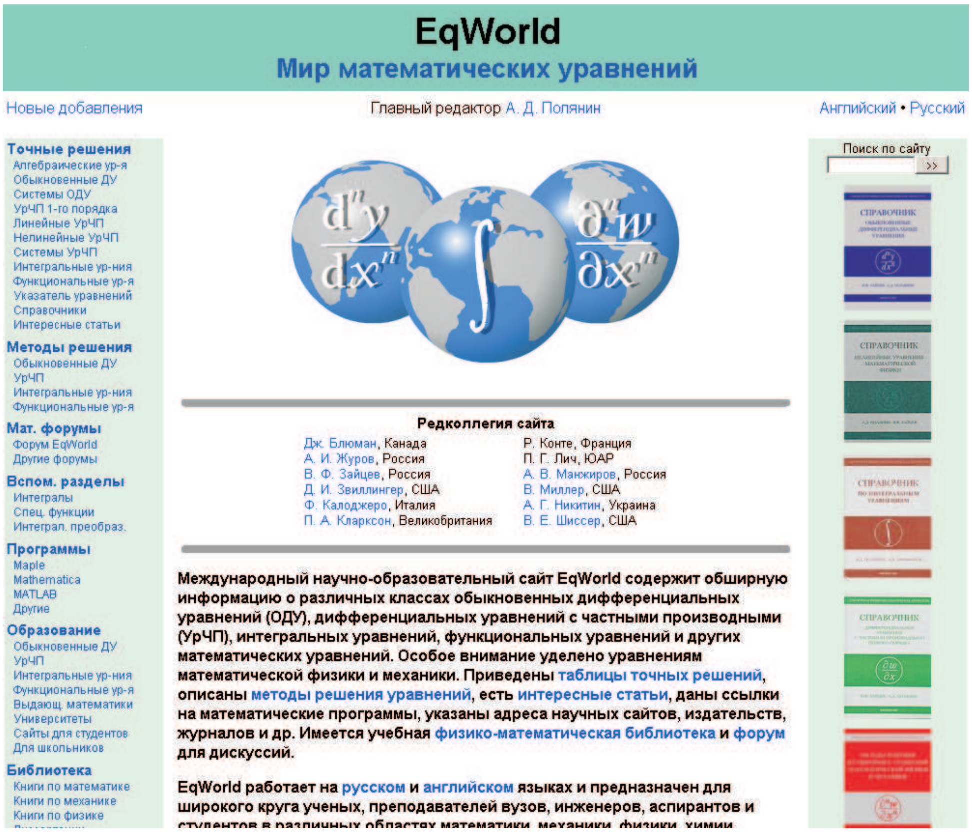


Рис. 4. Научно-образовательный ресурс «EqWorld – Мир математических уравнений» (eqworld.ipmnet.ru/ru)

- Физико-математическая библиотека (eqworld.ipmnet.ru/ru/library). Представлено более 1 500 учебников, учебных пособий, сборников задач и упражнений, конспектов лекций, монографий, справочников и диссертаций по математике, механике и физике. Ресурсы библиотеки предназначены исключительно для некоммерческого использования в учебно-образовательных целях. Все материалы присланы авторами и читателями или взяты из интернет-архивов открытого доступа. Основной фонд библиотеки составляют книги, издававшиеся тридцать и более лет назад. Авторы могут разместить в библиотеке электронные версии своих книг и диссертаций.
- Архив уравнений и решений. После регистрации любой пользователь может опубликовать новое уравнение и решение. Все материалы доступны для просмотра и упорядочены в соответствии с подробной классификацией.
- Справочная информация по математическим ресурсам Интернета. Представлена обширная информация по различным математическим программам, математическим веб-сайтам, научным журналам и издательствам, имеется подборка материалов по науке и образованию в России, авторскому праву и др.

EqWorld состоит из 1 700 веб-страниц (книги библиотеки не учитываются), его посещают люди из 200 стран мира, средняя посещаемость сайта превышает 2 000 человек в сутки. Сайт работает на русском и английском языках и предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики, химии, биологии и инженерных наук. EqWorld имеет международную редколлегию, в которую входят известные ученые из разных стран мира. Все ресурсы сайта являются бесплатными для его пользователей.

11. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРУМЫ В ИНТЕРНЕТЕ

Физико-математические и другие научные форумы в Интернете — особая форма виртуального общения ученых, преподавателей, инженеров и студентов, которая позволяет по определенному правилу (обычно требуется регистрация пользователя с указанием адреса его электронной почты) задавать вопросы и получать на них ответы. В качестве примера отметим большой научный форум механико-математического факультета МГУ (lib.mexmat.ru/forum/index.php), в котором имеются тематические направления: математика, физика, механика, химия и др.

Укажем также несколько крупных иностранных научных форумов:

- Physics Forums — форумы по разным разделам физики и математики (www.physicsforums.com).
- Physics, Astronomy, Math & Philosophy Forums — форумы по физике, астрономии, математике и др. (physicsmathforums.com).
- Science Forums — форумы по физике, математике, химии и биологии (www.scienceforums.net/forum).

12. ЭЛЕКТРОННЫЕ БИБЛИОТЕКИ И РАЗМЕЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ КНИГ В ИНТЕРНЕТЕ

За рубежом существует ряд электронных библиотек, размещающих электронные версии книг в свободном доступе. Ниже перечислены некоторые электронные библиотеки, содержащие книги по математике на английском языке.

- Geocities — учебная литература (www.geocities.com/alex_stef/mylist.html).
- Книги и ссылки на сайте Американского математического общества (www.ams.org/online_bks/online-books-web.html).
- Директория Google — электронные учебники и монографии по математике (directory.google.com/Top/Computers/E-Books).
- Библиотека Корнельского университета — коллекция электронных монографий (historical.library.cornell.edu/math).
- PlanetMath.Org — электронные книги (planetmath.org/?op=browse&from=books).
- FreeScience — книги по математике (www.freescience.info/mathematics.php).
- Коллекция учебников по математике, которую собрал George Cain (www.math.gatech.edu/cain/textbooks/onlinebooks.html).

До 2004 г. нехватка научной литературы в России в некоторой степени компенсировалась наличием значительного количества электронных библиотек, работающих в режиме свободного доступа. Принятие Федерального закона Российской Федерации от 20 июля 2004 г. № 72 ФЗ «О внесении изменений в закон Российской Федерации «Об авторском праве и смежных правах» (полный текст закона можно найти на стр. www.rg.ru/2004/07/28/piraty-doc.html) существенно осложнило работу научных электронных библиотек и привело к резкому сокращению их числа. Некоторые крупные открытые электронные библиотеки, в том числе и библиотека механико-математического факультета МГУ (lib.mexmat.ru), стали закрытыми. Указанные обстоятельства негативным образом сказываются на развитии науки и образования в нашей стране.

Следует отметить, что научная литература резко отличается от любой другой литературы [1], поскольку ее издание убыточно и осуществляется за счет грантов или авторов, причем в самом лучшем случае авторы получают мизерный гонорар, который обычно не окупает их затрат на подготовку книги. При этом основная цель, которую ставит автор, — ознакомить научную общественность с результатами своей работы. Странно говорить о нарушении авторских прав, когда электронную версию монографии автора выставляют в Интернете через несколько лет после ее выхода в свет (наоборот, автор в этом кровно заинтересован, см. разд. 13). Совсем другое дело издания детективов, фантастики, приключенческой и эротической литературы, приносящие огромные доходы издателям и авторам. Упомянутый выше Федеральный закон Российской Федерации от 20 июля 2004 г., с одной стороны, учел и защитил права коммерческих издательств и высокооплачиваемых авторов (типа А. Марининой), а также права иностранных издательств и авторов (что, безусловно, правильно), но, с другой стороны, совершенно не учел потребность ученых, преподавателей вузов, инженеров и студентов своевременно и в полном объеме получать информацию, необходимую им для работы и обучения.

13. ПОЧЕМУ АВТОРАМ ПОЛЕЗНО РАЗМЕЩАТЬ СВОИ КНИГИ В ИНТЕРНЕТЕ

Сейчас в подавляющем большинстве случаев издание научной литературы в России осуществляется по грантам РФФИ (и образовательным грантам) или за счет автора, что либо не приносит никакого дохода авторам, либо приносит чисто символический доход (хорошо, если в итоге удается избежать значительных материальных затрат). Ниже перечислены основные причины, почему авторам полезно размещать свои книги в Интернете.

1. Книга пишется для того, чтобы ее читали (и чем больше людей ее читает, тем для автора лучше). На сайте книга будет доступна для жителей не только больших городов, где ее можно купить, но и для жителей малых городов, где ее просто нет (а также для граждан России, находящихся за рубежом, и иностранных коллег, знающих русский язык).

2. Тиражи научных книг сейчас минимальны (около 300 экземпляров), при этом книги часто дорого стоят и плохо покупаются. Поэтому научную литературу весьма неохотно распространяют книжные магазины (многие магазины ее просто не принимают) и недостаточно о ней информируют. Интернет позволяет максимально широко дать информацию о книге.

3. Размещение книг в Интернете способствует увеличению их цитируемости.

4. Посещаемость электронных библиотек обычно существенно выше посещаемости обычных (публичных) библиотек.

5. Лучшая забота о памяти наших родственников, друзей и учителей, которые писали книги (но которые уже ушли из этой жизни), состоит в том, чтобы продлить жизнь их произведениям. Ведь авторы «живут», пока их книги читают... Размещение книг в Интернете поможет сохранить память об их авторах.

6. Авторам не следует рассчитывать на переиздание научных монографий (сейчас в России, как правило, это можно сделать только за собственный счет). Размещая свою монографию в Интернете, автор тем самым продлевает ее «жизнь».

7. В настоящее время в России наблюдается острая нехватка научной литературы. Разместив свои книги в Интернете, автор вносит свой посильный вклад в борьбу с этим бедствием.

Замечание. Авторы могут разместить электронные версии своих книг и диссертаций в библиотеке сайта EqWorld (eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm). Для этого надо написать соответствующее письмо (адрес и образец письма приведены на стр. eqworld.ipmnet.ru/ru/author/addbook.htm).

Отметим, что до 1996 г. включительно российские издательства не вносили в авторские договоры пункт, запрещающий авторам размещать электронные версии своих книг в Интернете. В настоящее время издательства, выпускающие научную литературу, иногда запрещают авторам размещать электронные версии книг в открытом доступе (на срок действия авторского договора, который обычно не превышает 3–5 лет). Книги, издаваемые за свой счет (как правило, и по грантам РФФИ), не имеют указанных ограничений.

В отличие от российских издательств многие иностранные издательства (часто они являются международными) выпускают широкий ассортимент научной литературы, в основном издаваемой на английском языке. Научные книги за рубежом стоят дорого (см. разд. 2) и постоянно допечатываются малыми партиями по мере их продажи (в итоге общее количество проданных монографий обычно составляет 200–400 экземпляров). Издательства получают некоторую прибыль от этой деятельности и не заинтересованы, чтобы эта прибыль уменьшалась. Поэтому в авторских договорах обычно специально оговаривается исключительные (эксклюзивные) условия для издательства, по которым, в частности, автор не имеет право размещать электронную версию своей книги в Интернете. Авторский договор действует пока книга продается, а автор получает от издательства гонорар, который определяется его долей в процентах (она обычно колеблется в пределах от 6 до 12%) от стоимости проданных книг.

За рубежом из-за высокой цены научные книги и журналы уже давно практически не покупаются индивидуально (это могут позволить себе только библиотеки). Сказанное в настоящее время характерно и для России (правда, книги все-таки покупают, но значительно меньше, чем это было до 1991 г.).

14. ЧТО НАДО ДЕЛАТЬ ДЛЯ РАЗВИТИЯ НАУЧНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ РЕСУРСОВ РОССИИ

Для развития научных электронных ресурсов России и расширения доступа к научным материалам авторы статьи считают целесообразным сделать следующее:

1. Настоятельно рекомендовать (а лучше обязать) научным журналам размещать электронные версии статей на русском языке на сайтах своих издательств через полгода (максимум через год) после их выхода.

2. Размещать в Интернете электронные версии всех книг, издание которых финансируются РФФИ через год после их выхода. С одной стороны, это позволит охватить существенно более широкий круг потенциальных читателей, а с другой — даст возможность немного сэкономить финансовые ресурсы за счет некоторого уменьшения тиража. Вполне допустимо начать практиковать издание узкоспециализированных книг только в электронном виде.

3. Размещать за месяц до защиты докторские диссертации на сайте ВАК, а кандидатские диссертации — на сайтах институтов, где находятся диссертационные советы. Это позволит, с одной стороны, знакомить научную общественность с новыми достижениями (что особенно важно для России, поскольку сейчас издательствами выпускается научной литературы явно недостаточно), а с другой стороны, существенно повысит ответственность диссертантов и их руководителей (сейчас диссертацию читают всего несколько человек, которые обычно живут в одном городе, а при наличии электронной версии диссертации — любой заинтересованный человек в России и за ее пределами).

4. Создать российскую открытую научную электронную библиотеку, в которую желающие могли бы добавить свои книги и диссертации. Разместить в этой библиотеке в электронном виде все монографии, вышедшие на русском языке до 2002 г. (в дальнейшем размещать книги через пять лет после их опубликования). Чтобы избежать маловероятных конфликтов с авторами[9] создать и постоянно поддерживать электронный список научных книг, авторы которых против их размещения в Интернете. Реализация этого проекта не потребует больших усилий и материальных затрат, поскольку в настоящее время имеется большое количество научных книг в оцифрованном виде.

Замечание. Возможно и более простое решение данного вопроса — разрешить размещать научную литературу при указанных ограничениях в электронных библиотеках (найдется немало энтузиастов, которые будут это делать бесплатно с пользой для общества).

5. Рекомендовать участникам исследований, выполненных за счет государственного финансирования, публиковать свои основные результаты (или краткие обзоры результатов со списком публикаций) в свободном доступе в Интернете.

Авторы благодарят Н.Н. Литвинову за предоставленные материалы и полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ

Ниже приведен список полезных математических интернет-ресурсов с кратким описанием. Префикс «http://» в веб-адресах не указан.

arXiv.org (arxiv.org). Крупнейший архив статей по математике, физике, информатике и др. Позволяет авторам быстро опубликовать статью в электронном виде.

CFD codes list (www.fges.demon.co.uk/cfd/CFD_codes_p.html). Список бесплатных компьютерных программ по вычислительной гидродинамике.

CFD Online (www.cfd-online.com/Links). Интернет-ресурсы по вычислительной гидродинамике. Программы, модели, методы и др.

Computer Handbook of ODEs (www.scg.uwaterloo.ca/ecterrab/handbook_odes.html). Компьютерный интернет-справочник по методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение конкретных уравнений с помощью системы Maple.

deal.II (www.dealii.org). Библиотека программ на C++ для решения уравнений в частных производных с помощью адаптивных конечных элементов.

Dictionary of Algorithms and Data Structures — NIST (www.nist.gov/dads). Словарь по алгоритмам, структурам данных, определениям и основным задачам программирования.

[9]Вопрос о нарушении авторских прав в отношении научных монографий в данном случае выглядит нелепо поскольку сейчас авторы и так обычно не получают гонорар от издательств (подробности см. в разд. 13).

DOE ACTS Collection (acts.nersc.gov). Коллекция программных инструментов, разработанных в Департаменте энергетики США.

Intute: Science, Engineering and Technology (www.intute.ac.uk/sciences). Поиск тщательно отобранных интернет-ресурсов в области науки и образования. В базе данных более 30 000 источников.

e-LIBRARY (elibrary.ru). Русскоязычный ресурс, содержащий электронные версии большого числа научных журналов зарубежных и российских издательств по всем направлениям фундаментальной науки.

EqWorld: The World of Mathematical Equations (eqworld.ipmnet.ru). Крупнейший ресурс по математическим уравнениям, включая алгебраические уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, интегральные уравнения, функциональные уравнения и др.

FOLDOC (foldoc.org). Большой словарь терминов по компьютерной тематике и смежным областям. Содержит более 14 000 определений.

Free Software — WSEAS (www.wseas.com/software). Бесплатные пакеты программ для выполнения научно-технических задач.

FSF/UNESCO Free Software Directory (directory.fsf.org). Каталог бесплатных программ для бесплатных операционных систем.

GSCi — Software: Differential Equations (www.scicomp.uni-erlangen.de/archives/SW/diffequ.html). Каталог ресурсов по численному решению дифференциальных уравнений и численным методам.

GAMS: Guide to Available Mathematical Software (gams.nist.gov). Тематический поисковый каталог программного обеспечения в области вычислительной математики и статистики.

Google Directory — Math (directory.google.com/Top/Science/Math). Каталог математических ресурсов, упорядоченных по типу и тематике. Содержит ссылки на более чем 12 000 веб-сайтов.

Google Directory — Math Software (directory.google.com/Top/Science/Math/Software). Каталог математического программного обеспечения.

Math Archives (archives.math.utk.edu). Архив и каталог математических ресурсов, тематических списков рассылки и образовательных материалов.

Math Forum @ Drexel (mathforum.org). Один из ведущих центров математики и математического образования в Интернете.

Mathcom — Scientific Computing and Numerical Analysis (www.mathcom.com/corpdir/techinfo.mdir/index.html). Обзор интернет-ресурсов по научным расчетам и числовому анализу.

Mathematical Atlas (www.math-atlas.org). Коллекция небольших статей по различным областям современной математики.

Mathematical Constants and Numbers (numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html). Сайт, посвященный математическим и историческим аспектам классических констант, встречающимся в математике. Содержит статьи, алгоритмы и ссылки на программы.

Mathematical WWW Virtual Library (www.math.fsu.edu/Virtual/index.php). Каталог математических ресурсов, упорядоченных по типу и тематике.

Mathematics Genealogy Project (www.genealogy.ams.org). Большая генеалогическая база данных математиков. Дает информацию о годе получения ученой степени, названии диссертации, научном руководителе, месте защиты и др.

Mathematics Websites — PSU (www.math.psu.edu/MathLists/Contents.html). Каталог математических ресурсов, упорядоченных по типу и тематике.

MathGuide, SUB Göttingen (www.mathguide.de). Каталог математических ресурсов, упорядоченных по типу и тематике.

MGNet (www.mgnet.org/mgnet-codes.html). Коллекция бесплатных математических программ.

M. Maheswaran's Catalog of Mathematics Resources (mthwww.uwc.edu/wwwmahes/files/math01.htm). Каталог математических ресурсов в сети Интернет.

NDLTD: Networked Digital Library of Theses and Dissertations (www.ndltd.org). Электронная библиотека, содержащая большое количество дипломных работ и диссертаций на английском языке по различным наукам.

Netlib (www.netlib.org). Коллекция математических программ, статей и баз данных.

Numerical Solutions (www.numericalmathematics.com/numerical_solutions.htm). Библиотека математических программ.

PlanetMath (planetmath.org). Математическая энциклопедия, коллекция бесплатных книг и статей.

Probability Web (www.mathcs.carleton.edu/probweb/probweb.html). Коллекция интернет-ресурсов по теории вероятностей и статистике, предназначенная для научных работников и преподавателей.

Science Oxygen — Mathematics (www.scienceoxygen.com/math.html). Каталог интернет-ресурсов по различным разделам математики, от школьных до университетских.

ScienceWorld (scienceworld.wolfram.com). Энциклопедический ресурс, посвященный различным разделам физики (около 3000 веб-страниц), химии (около 500 страниц) и астрономии (около 600 страниц). Содержит более 1000 биографий известных ученых.

Scilab (scilabsoft.inria.fr). Бесплатный многофункциональный научный программный пакет.

SOCR — Statistics Online Computational Resources (socr.stat.ucla.edu). Образовательный веб-сайт по теории вероятностей и статистике. Содержит интерактивные программы и образовательные игры.

S.O.S. Mathematics (www.sosmath.com). Образовательный веб-сайт для старшеклассников и студентов. Содержит материалы по основным разделам математики.

Stat/Math Center: Numerical Computing (www.indiana.edu/ statmath/bysubject/numerics.html). Каталог ресурсов по численным расчетам.

Theses Canada (www.collectionscanada.ca/thesescanada). Открытый портал электронных полнотекстовых диссертаций, защищенных в университетах и колледжах Канады. Содержит около 300 000 диссертаций по различным наукам.

UW-L Math Calculator (www.compute.uwlax.edu). Математический интернет-калькулятор. Позволяет численно и графически решать задачи из различных областей математики: алгебра, анализ, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, статистика и др.

Wikipedia: The Free Encyclopedia — List of Open Source Software Packages (en.wikipedia.org/wiki/
List_of_open_source_software_packages). Список бесплатных открытых программных пакетов.

Wikipedia: The Free Encyclopedia — Mathematics (en.wikipedia.org/wiki/Mathematics). Собрание коротких статей по различным разделам математики.

Wolfram Functions Site (functions.wolfram.com). Веб-сайт, посвященный различным математическим функциям. Содержит более 87 000 математических формул и более 10 000 графиков и анимаций.

Wolfram MathWorld (mathworld.wolfram.com). Крупнейшая интернет-энциклопедия по всем классическим разделам математики. Содержит более 12 000 веб-страниц.

Yahoo — Mathematics (dir.yahoo.com/science/mathematics). Каталог математических веб-сайтов, упорядоченный по типу и тематике.

Yahoo — Mathematics Software (dir.yahoo.com/Science/Mathematics/Software). Каталог веб-сайтов, посвященных математическим программам.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ЭЛЕКТРОННЫЕ ЖУРНАЛЫ ОТКРЫТОГО ДОСТУПА

Адреса некоторых журналов открытого доступа (как электронных журналов, так и традиционных журналов, имеющих электронные версии) по физико-математической тематике перечислены ниже.

- **Вестник молодых ученых. Прикладная математика и механика** (www.informika.ru/text/magaz/science/vys/PMM/main.html).
- **Вестник Самарского государственного университета** (www.ssu.samara.ru/vestnik/est/vestnikest.html).
- **Вычислительные методы и программирование** (srcc.msu.su/num-meth).
- **Журнал радиоэлектроники** (jre.cplire.ru/jre/contents.html).
- **Журнал технической физики** (www.ioffe.rssi.ru/cp1251/journals/jtf).

- **Исследовано в России** (zhurnal.ape.relarn.ru).
- **Популярная механика** (www.popmech.ru/archive).
- **Сибирские электронные математические известия** (semr.math.nsc.ru).
- **Успехи физических наук** (www.ufn.ru/archive).
- **Физико-химическая кинетика в газовой динамике** (www.chemphys.edu.ru).
- **Фундаментальная и прикладная математика** (mech.math.msu.su/ fpm/rus/contents.htm).
- **Электронный журнал: Дифференциальные уравнения и процессы управления**, Санкт-Петербургский технический университет (www.neva.ru/journal/eng/e_main.htm).
- **Advances in Difference Equations** (www.hindawi.com/journals/ade).
- **Annals of Mathematics** (www.math.princeton.edu/ annals/issues/issues.html).
- **Applied Mathematics E-Notes** (www.math.nthu.edu.tw/ amen).
- **Differential Equations and Nonlinear Mechanics** (www.hindawi.com/journals/denm).
- **Dynamics of Partial Differential Equations** (www.intlpress.com/DPDE/journal).
- **Electronic Journal of Differential Equations** (ejde.math.txstate.edu).
- **Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations** (www.math.u-szeged.hu/ejqtde).
- **International Journal of Applied Mathematics and Computer Science** (www.amcs.uz.zgora.pl).
- **Journal of Applied Mathematics** (www.hindawi.com/journals/jam).
- **Lobachevskii Journal of Mathematics** (ljm.senet.ru/contents.html).
- **Mathematical Problems in Engineering** (www.hindawi.com/journals/mpe).
- **Mathematical Physics Electronic Journal**, Universitat de Barcelona, Spain (www.ma.utexas.edu/mpej).
- **Siberian Advances in Mathematics** (www.springerlink.com/content/1934-8126).
- **The Open Applied Mathematics Journal** (www.bentham.org/open/toamj).
- **The Open Mathematics Journal** (www.bentham.org/open/tomatj).
- **The Open Mechanics Journal** (www.bentham.org/open/tomechj).
- **The Open Thermodynamics Journal** (www.bentham.org/open/totherj).

Подробные списки электронных журналов можно найти, например, по адресам www.openj-gate.org (более 4000 журналов различных издательств), www.doaj.org (около 3000 журналов различных издательств), www.bentham.org/open/JrnlsBySub.htm (более 200 журналов издательства Bentham), www.hindawi.com/journals (более 50 журналов издательства Hindawi), а также www.kirensky.ru/link/journ.htm (около 500 журналов по физике, химии и биологии), e-Library.ru (около 200 российских журналов).

Содержание отдельных выпусков многих журналов доступно бесплатно для научных организаций, например, на сайте издательства Springer (www.springerlink.com/journals).

Библиографический список

1. *Полянин А.Д.* Научная литература в России и за рубежом // Природа. 2001. № 2 (http://eqworld.ipmnet.ru/ru/info/sci-edu/priroda-polyanin.htm).

2. Электронные периодические издания в электронный век, http://skorina-lib.iatp.by/docs/elV.doc.

3. *Литвинова Н.Н.* Научные публикации в Интернете: соотношение ограниченного (платного) и свободного доступов. 2005. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/info/sci-edu/2.htm.

4. *Литвинова Н.Н.* Открытые научные и образовательные ресурсы Интернета: модель OPEN ACCESS и другие возможности (материалы лекций), 2007.

5. *Кучма И.* Право первой ночи? Открытый доступ! // Зеркало недели. 2004. № 11 (http://nbuv.gov.ua/Articles/ 2004/ 04ki-od.html).

6. *Lawrence W.* On line or invisible // Nature. 2001. V. 411, № 6837. P. 521. (http://citeseer.ist.psu.edu/online-nature01/).

7. *Эпштейн В.Л.* Как увеличить индекс цитирования научной публикации // Проблемы управления. 2006. № 6 (http://citation.extratext.ru/).

8. *Weisstein E.W.* CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, 2nd Edition. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2003.

9. *Zwillinger D.* CRC Standard Mathematical Tables and Formulae, 31st Edition. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2003.

10. *Polyanin A.D., Manzhirov A.V.* Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2007.

11. *Holoviak J., Seitter K.* Transcending the Limitations of the Printed Page // J. of Electronic Publishing. 1998. V. 3, iss. 1 (http://www.press.umich.edu/jep/03-01/EI.html).

12. *Дженчураев Н.* Научные электронные журналы — новые возможности, 2004 (http:// emag.host.net.kg/opps.html).

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.95

МОРФИЗМЫ ПО СТАБИЛЬНЫМ ТОЛЕРАНТНОСТЯМ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

И.П. Мангушева

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ информатики и информационных технологий
E-mail: MangushevaIP@info.sgu.ru

В работе предлагается метод построения по некоторой тройке толерантностей на множествах состояний, входных и выходных символов конечного детерминированного автомата другого автомата, связанного определенным морфизмом с исходным.
Рассматриваемые построения обобщают известный метод нахождения гомоморфных образов автомата по тройке эквивалентностей, удовлетворяющей определенным условиям.

Ключевые слова: конечный детерминированный автомат, гомоморфный образ, конгруэнция, стабильная толерантность, толерантный образ, разбиение, покрытие.

Morphismes Based on Compatible Tolerances of Finite Automata

I.P. Mangusheva

It is suggested a method of a construction with the help of some triple of tolerances defined on the sets of states, input and output symbols of an finite definite automaton an another automaton which is connected with the original automaton by a certain morphism.
Considered construction generalizes the known method of finding of the homomorphic images of an automaton with the help of a triple of equivalences, which satisfies to the certain conditions.

Key words: finite determined automaton, homomorphic image, congruence, compatible tolerances, tolerant image, partition, covering.

1. СТАБИЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ В АВТОМАТАХ

Пусть S — непустое множество. Любое подмножество $\rho \subseteq S \times S$, где $S \times S$ — декартов квадрат множества S, называется *бинарным отношением* на множестве S. Бинарное отношение ρ на множестве S называется:
рефлексивным, если

$$(\forall s \in S)((s,s) \in \rho), \tag{1}$$

симметричным, если

$$(\forall s_1, s_2 \in S)((s_1,s_2) \in \rho \to (s_2,s_1) \in \rho), \tag{2}$$

транзитивным, если

$$(\forall s_1, s_2, s_3 \in S)((s_1,s_2) \in \rho \ \& \ (s_2,s_3) \in \rho \to (s_1,s_3) \in \rho). \tag{3}$$

Бинарное отношение, обладающее свойствами (1),(2) и (3) одновременно, называется *отношением эквивалентности* и обычно обозначается через ε. Если отношение обладает свойствами (1) и (2), то оно называется *отношением толерантности* и обычно обозначается через τ.

Бинарное отношение $\rho \subseteq S \times S$ называется *антисимметричным*, если

$$(\forall s_1, s_2 \in S)((s_1,s_2) \in \rho \ \& \ (s_2,s_1) \in \rho \to s_1 = s_2).$$

Отношение ρ на множестве S называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Отношение порядка на произвольном множестве S обычно обозначается знаком $\leq$.

Если S — непустое множество, а $\leq$ — отношение порядка на нем, то пара $(S, \leq)$ называется *упорядоченным* (или частично упорядоченным) множеством. Упорядоченное множество $(S, \leq)$ называется *решеткой*, если каждое его конечное подмножество имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани [1].

Дальнейшие исследования связаны с отношением толерантности, поэтому приведем некоторые определения и результаты из [1, 2], касающиеся этого отношения.

Множество S с заданным на нем отношением толерантности τ называется *пространством толерантности* и обозначается $\langle S, \tau\rangle$.

Покрытием множества S называется совокупность непустых подмножеств этого множества, объединение которых совпадает с S.

Разбиением множества S называется совокупность непустых, попарно непересекающихся подмножеств множества S, объединение которых совпадает с S.

Известно [1, 2], что с каждым отношением эквивалентности ε на произвольном множестве S взаимно однозначным образом связано некоторое разбиение множества S, причем классы эквивалентности совпадают с классами разбиения. Поэтому часто понятия эквивалентности и разбиения отождествляют, если это не приводит к недоразумениям. *Фактор-множеством* множества S по эквивалентности (разбиению) ε называется множество S/ε, элементами которого являются классы эквивалентности (разбиения) ε. Класс, содержащий элемент s из множества S, обозначают s_ε или $(s)_\varepsilon$.

Множество $L \subseteq S$ называется *предклассом* в $\langle S, \tau\rangle$ (или τ-предклассом), если любые два его элемента s и t толерантны (т.е. находятся в отношении τ).

Множество $B \subseteq S$ называется *классом толерантности* в $\langle S, \tau\rangle$ (или τ-классом), если B есть максимальный предкласс. Множество всех классов толерантности образуют покрытие базового множества. Далее покрытие множества S всеми классами толерантности τ будем обозначать B_τ.

Совокупность $H_\tau = \{B_1, B_2, \ldots\}$ классов в пространстве толерантности $\langle S, \tau\rangle$ называется *базисом*, если 1) для всякой толерантной пары (s, t) существует класс B_k, содержащий оба этих элемента; 2) удаление из H_τ хотя бы одного класса приводит к потере свойства 1).

В общем случае базис H_τ определяется неоднозначно. Но если отношение τ на S помимо рефлексивности и симметричности обладает свойством транзитивности, то толерантность τ переходит в эквивалентность. При этом базис в $\langle S, \tau\rangle$ является разбиением и, следовательно, определяется единственным образом.

В дальнейших рассуждениях предполагаем, что множество S не пусто и конечно.

Утверждение 1 [1]. *Пусть τ — отношение толерантности на множестве S. Тогда для любых двух элементов, находящихся в отношении τ, существует по крайней мере один содержащий их τ-класс.*

Следствие. *Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — всевозможные классы толерантности τ. Тогда* $\tau = \bigcup\limits_{i=1}^{m}(B_i, \times B_i)$.

На основе утверждения 1 легко доказать

Утверждение 2. *Если B_τ — покрытие множества S всеми классами отношения толерантности τ на S, то $(s, t) \in \tau$ тогда и только тогда, когда существует класс покрытия B_τ, содержащий s и t.*

Доказательство. Необходимость следует из утверждения 1, достаточность — из определения класса толерантности.

Утверждение 3 (о пополнении предкласса) [2]. *Всякий предкласс содержится хотя бы в одном классе.*

Утверждение 4. *Если τ_1 и τ_2 — отношения толерантности на множестве S, то $\tau_1 \subseteq \tau_2$ тогда и только тогда, когда каждый класс толерантности τ_1 включается в некоторый класс толерантности τ_2.*

Доказательство. Необходимость. Если $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то каждый τ_1-класс B_i является одновременно τ_2-предклассом. Тогда в силу утверждения 3 существует класс C_j в $\langle S, \tau_2\rangle$, содержащий B_i.

Достаточность. Если $B_i - \tau_1$-класс, а $C_j - \tau_2$-класс, то из условия $B_i \subseteq C_j$ следует $B_i \times B_i \subseteq C_j \times C_j$. Отсюда, по определению операции $\subseteq$, следует $\bigcup\limits_i (B_i \times B_i) \subseteq \bigcup\limits_j (C_j \times C_j)$, а тогда включение $\tau_1 \subseteq \tau_2$ выполняется на основе следствия из утверждения 1.

Через $E(S)$ обозначается множество всех эквивалентностей на произвольном множестве S.

Через $T(S)$ будем обозначать множество всех толерантностей произвольного множества S. В [3] показано, что $T(S)$ есть решетка по включению относительно операций объединения и пересечения. Отношение включения в решетке $T(S)$ будем обозначать $\subseteq$.

Рассмотрим конечный детерминированный автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y — конечные алфавиты состояний, входных и выходных символов соответственно, $\delta : S \times X \to S$ — функция переходов, $\lambda : S \times X \to Y$ — функция выходов [1, 4].

Отношение μ на множестве S автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ назовем *стабильным* [3], если

$$(\forall s_1, s_2 \in S)(\forall x \in X)((s_1, s_2) \in \mu \to (\delta(s_1, x), \delta(s_2, x)) \in \mu). \tag{4}$$

Особый интерес представляют отношения эквивалентности ε и толерантности τ, обладающие свойством стабильности. Они называются соответственно конгруэнциями и стабильными толерантностями. Такие отношения имеют простую интерпретацию и могут быть использованы для построения контролирующих автоматов. С эквивалентностью ε однозначно связано разбиение множества $B_\varepsilon = \{B_i\}$, где B_i — классы разбиения B_ε. Если ε является конгруэнцией, то

$$(\forall B_i \in B_\varepsilon)(\forall x \in X)(\exists B_j \in B_\varepsilon)(\forall s \in B_i)(\delta(s, x) \in B_j),$$

или

$$(\forall B_i)(\forall x \in X)(\exists B_j)(\{\delta(s, x)\}_{s \in B_i} \subseteq B_j). \tag{5}$$

Это означает, что функция переходов под действием любого входного сигнала переводит все элементы класса разбиения целиком в другой класс. В [5] разбиения, обладающие таким свойством, называются СП-разбиениями или разбиениями со свойством подстановки.

Аналогичным образом с толерантностью τ на множестве связывается покрытие, также обладающее свойством (5).

Утверждение 5. *Толерантность τ является стабильной толерантностью на множестве S автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ тогда и только тогда, когда для ее покрытия классами $B_\tau = \{B_i\}$ выполняется условие* (5).

Доказательство. Необходимость. Пусть для толерантности τ выполняется (4). Рассмотрим класс толерантности B_i. По определению, все элементы s в нем попарно толерантны. В силу (4) для любого $x \in X$ попарно толерантными являются тогда все элементы $\delta(s, x)$ для $s \in B_i$. Это означает, что множество $\{\delta(s, x)\}_{s \in B_i}$ является предклассом толерантности τ. Но тогда в силу утверждения 3 существует некоторый класс B_j, содержащий это множество. Это означает, что выполняется (5).

Достаточность. Пусть для покрытия классами $B_\tau = \{B_i\}$ некоторой толерантности τ на множестве S автомата A выполняется (5). Рассмотрим произвольную пару $(s_1, s_2) \in \tau$. В силу утверждения 1, существует класс B_i, содержащий s_1 и s_2. Тогда из (5) следует, что для любого x существует класс B_j, содержащий $\delta(s_1, x)$ и $\delta(s_2, x)$. Отсюда в силу утверждения 2 следует, что $(\delta(s_1, x), \delta(s_2, x)) \in \tau$. Тем самым показано, что выполняется (4).

Толерантность τ на множестве S называется *2-порожденной* и обозначается τ_{s_1, s_2}, если она является наименьшей стабильной толерантностью, содержащей некоторую наперед выбранную неупорядоченную пару s_1, s_2, $s_1 \neq s_2$, $s_1, s_2 \in S$. Пара (s_1, s_2) при этом называется характеристической парой толерантности τ.

В [6] показано, что множество $ST(A)$ стабильных толерантностей автомата A образует решетку относительно операций пересечения и объединения. Эта решетка является порешеткой решетки всех толерантностей на множестве S. Там же описана процедура нахождения стабильных толерантностей автомата A. Она основана на нахождении некоторого базисного множества стабильных толерантностей — 2-порожденных толерантностей, а затем комбинации элементов этого множества с помощью операции объединения.

В [7] изучались свойства разбиений и покрытий, связанных с конгруэнциями и стабильными толерантностями.

2. КВАЗИФАКТОРИЗАЦИЯ И МОРФИЗМЫ ПО ТОЛЕРАНТНОСТЯМ

Пусть задан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$. *Гомоморфизмом* автомата A на автомат $A^* = (S^*, X^*, Y^*, \delta^*, \lambda^*)$ называется тройка сюръективных отображений (φ, ψ, θ), где $\varphi : S \to S^*$, $\psi : X \to X^*$, $\theta : Y \to Y^*$, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi(\delta(s, x)) = \delta^*(\varphi(s), \psi(x)), \tag{6}$$

$$\theta(\lambda(s, x)) = \lambda^*(\varphi(s), \psi(x)), \tag{7}$$

для всех $s \in S$, $x \in X$.

Автомат A^* при этом называется *гомоморфным образом* A.

Если отображения φ, ψ, θ взаимно однозначны, то гомоморфизм называется изоморфизмом.

Для произвольного автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ тройка эквивалентностей $\Theta = (\varepsilon, \rho, \varkappa)$, где $\varepsilon \in E(S)$, $\rho \in E(X)$, $\varkappa \in E(Y)$, называется *согласованной* с функциями δ и λ переходов и выходов автомата A [1], если для любых $s_i \in S$ и $x_i \in X$ истинна импликация:

$$(s_1, s_2) \in \varepsilon \ \&\ (x_1, x_2) \in \rho \to (\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \varepsilon \ \&\ (\lambda(s_1, x_1), \lambda(s_2, x_2)) \in \varkappa.$$

В согласованной тройке $\Theta = (\varepsilon, \rho, \varkappa)$ отношение ε есть конгруэнция на множестве S автомата A.

Фактор-автоматом автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ по согласованной тройке эквивалентностей $\Theta = (\varepsilon, \rho, \varkappa)$ называется автомат $A/_\Theta = (S/_\varepsilon, X/_\rho, Y/_\varkappa, \delta, \lambda)$, где $\delta(s_\varepsilon, x_\rho) = (\delta(s, x))_\varepsilon$, $\lambda(s_\varepsilon, x_\rho) = (\lambda(s, x))_\varkappa$ для любых s, x.

В работах [1, 8, 9] рассматривался вопрос построения всех гомоморфных образов абстрактного автомата, используя конгруэнции на множестве состояний. Процедура построения состояла в переборе всевозможных согласованных троек эквивалентностей (разбиений) автомата по определенным формулам. Фактор-автомат, построенный по согласованной тройке $(\varepsilon, \rho, \varkappa)$, есть гомоморфный образ автомата. Верно и обратное, всякий гомоморфный образ изоморфен фактор-автомату по некоторой тройке $(\varepsilon, \rho, \varkappa)$. Далее предлагается метод, обобщающий результаты, полученные для конгруэнций и гомоморфизмов. Вместо конгруэнции рассматривается более общее отношение стабильной толерантности. Понятие факторизации распространяется на покрытие.

Пусть τ — стабильная толерантность на множестве S автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, $\tau \in ST(A)$.

Построим отношение $\rho(\tau)$ на X по заданной стабильной толерантности τ и отношение $\xi(\tau, \rho)$ на Y по τ и заданному отношению толерантности ρ на X согласно (8) и (9):

$$(x_1, x_2) \in \rho(\tau) \leftrightarrow (\forall s_1, s_2 \in S)((s_1, s_2) \in \tau \to (\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \tau), \tag{8}$$

$$(y_1, y_2) \in \xi(\tau, \rho) \leftrightarrow (\exists (s_1, s_2) \in \tau)(\exists (x_1, x_2) \in \rho)(y_1 = \lambda(s_1, x_1) \& y_2 = \lambda(s_2, x_2)). \tag{9}$$

Легко проверить, что поскольку τ, ρ — толерантности, то $\rho(\tau)$ и $\xi(\tau, \rho)$ — рефлексивные и симметричные отношения, однако транзитивность выполняется не всегда.

Таким образом, $\rho(\tau)$ и $\xi(\tau, \rho)$ — толерантности.

Утверждение 6. *Пусть для автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ $\rho(\tau)$ определяется* (8), *где $\tau \in ST(A)$, $B_\tau = \{B_i\}$ — покрытие S классами толерантности τ, тогда для него истинны следующие утверждения.*

1. *Если $C_{\rho(\tau)} = \{C_j\}$ — покрытие X классами толерантности $\rho(\tau)$, то справедливо*

$$(\forall B_i)(\forall C_j)(\exists B_{i'}) \left(\{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in B_i \\ x \in C_j}} \subseteq B_{i'} \right). \tag{10}$$

2. *Обратно, если толерантность $\rho \in T(X)$ такова, что для ее покрытия классами $C_\rho = \{C_j\}$ выполняется* (10), *то $\rho \subseteq \rho(\tau)$.*

Доказательство. 1. Пусть для автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ $\tau \in ST(A)$ и выполняется (8). Рассмотрим класс B_i покрытия B_τ и класс C_j покрытия $C_{\rho(\tau)}$. Пусть $x^\circ \in C_j$. Поскольку τ — стабильная толерантность, то множество $B = \{\delta(s, x^\circ)\}_{s \in B_i}$ образуют предкласс. Пусть теперь x — произвольный элемент из C_j, а $s^\circ \in B_i$. В силу (8) элемент $\delta(s^\circ, x)$ находится в отношении τ с любым элементом

$\delta(s, x^\circ)$ предкласса B, так как $s, s^\circ \in B_i$, а $x, x^\circ \in C_j$, что в силу утверждения 2 означает, что $(s, s^\circ) \in \tau$, а $(x, x^\circ) \in \rho(\tau)$. Отсюда следует, что множество $B \cup \{\delta(s^\circ, x)\}$ также является предклассом. Поскольку s° — произвольный элемент из B_i, а x — произвольный элемент из C_j, то тем самым показано, что $\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in B_i\\ x\in C_j}}$ является предклассом. Тогда в силу утверждения 3 существует класс $B_{i'}$, содержащий это множество.

2. Пусть для толерантности $\rho \in T(X)$ автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ выполняется (10). Возьмем $(x_1, x_2) \in \rho$ и покажем, что $(x_1, x_2) \in \rho(\tau)$. Тем самым включение $\rho \subseteq \rho(\tau)$ будет показано. Если $(x_1, x_2) \in \rho$, то существует класс $C_j \in C_\rho$, содержащий x_1 и x_2. Пусть $(s_1, s_2) \in \tau$, тогда существует класс B_i, содержащий s_1 и s_2. Но тогда в силу (10) существует класс $B_{i'}$, такой, что $\delta(s_1, x_1)$,$\delta(s_2, x_2) \in B_{i'}$. В силу утверждения 2 это означает, что $(\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \tau$. Согласно (8), отсюда следует, что $(x_1, x_2) \in \rho(\tau)$.

Замечание. Утверждение 6 показывает, что отношение $\rho(\tau)$ является максимальным отношением толерантности на X, для которого выполняется (10).

Таким образом, (8) означает, что если $B_\tau = \{B_i\}$ — покрытие на S по толерантности τ, то отношению $\rho(\tau)$ принадлежат все те пары из X, элементы которых реализуют одинаковые переходы из класса в класс B_τ, то есть

$$(x_1, x_2) \in \rho(\tau) \leftrightarrow (\forall B_i \in B_\tau)(\exists B_j \in B_\tau)(\{\delta(s, x_1)\}_{s\in B_i} \subseteq B_j \ \&\ \{\delta(s, x_2)\}_{s\in B_i} \subseteq B_j).$$

Утверждение 7. *Для автомата* $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ *и его толерантностей* $\tau \in ST(A)$ *и* $\rho \in T(X)$ *справедливы следующие предложения.*

1. *Если* $\xi(\tau, \rho) \in T(Y)$ *определяется* (9), *а* $B_\tau = \{B_i\}$, $C_\rho = \{C_j\}$, $D_{\xi(\tau,\rho)} = \{D_k\}$ *– покрытия классами толерантностей* $\tau, \rho, \xi(\tau, \rho)$ *соответственно, то истинны следующие утверждения:*

$$\text{а)}\quad (\forall B_i)(\forall C_j)(\exists D_k)\left(\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_i\\ x\in C_j}} \subseteq D_k\right), \tag{11}$$

$$\text{б)}\quad (\forall D_k)(\exists B_i)(\exists C_j)\left(D_k = \{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_i\\ x\in C_j}}\right). \tag{12}$$

2. *Обратно, если толерантности* τ, ρ, ξ, *где* $\tau \in ST(A)$, $\rho \in T(X)$, $\xi \in T(Y)$, *таковы, что для их покрытий классами* $B_\tau = \{B_i\}$, $C_\rho = \{C_j\}$ *и* $D_\xi = \{D_k\}$ *соответственно выполняется* (11), *то* $\xi \supseteq \xi(\tau, \rho)$, *где* $\xi(\tau, \rho)$ *определяется формулой* (9) *для выбранных* τ *и* ρ. *Если, кроме* (11), *выполняется* (12), *то* $\xi = \xi(\tau, \rho)$.

Доказательство. Докажем 1. Пусть $\xi(\tau, \rho)$ определяется (9) для $\tau \in ST(A)$, $\rho \in T(X)$. Рассмотрим произвольные классы $B_i \in B_\tau$ и $C_j \in C_\rho$. Пусть в (9) часть формулы справа от знака $\leftrightarrow$ обозначается через F. Поскольку выполнение (9) предполагает, что выполняется импликация $F \to (y_1, y_2) \in \xi(\tau, \rho)$, а в классах B_i и C_j элементы попарно толерантны, то это означает, что множество $D = \{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_i\\ x\in C_j}}$ является предклассом в $\langle Y, \xi(\tau, \rho)\rangle$. Но тогда существует класс D_k, такой, что $D_k \supseteq D$. Тем самым (11) доказано.

Докажем (12). Рассмотрим произвольный класс D_k покрытия D_ξ. Сохраним обозначения предыдущей части доказательства.

Выполнение (9) предполагает справедливость импликации $(y_1, y_2) \in \xi(\tau, \rho) \to F$. Отсюда следует, что поскольку все элементы y в классе D_k попарно толерантны, а $y = \lambda(s, x)$ для некоторых s и x, то попарно толерантны все элементы s в множестве S и x в множесве X соответственно, для которых $y = \lambda(s, x) \in D_k$. Обозначим множество всех прообразов элементов $y \in D_k$ в множестве S через B, а прообразов в множестве X — через C. Таким образом, B и C являются предклассами в $\langle S, \tau\rangle$ и $\langle X, \rho\rangle$ соответственно. Покажем, что B и C являются классами. Пусть B не является классом. Поскольку B — предкласс, то существует класс B_i, такой, что $B_i \supset B$. Рассмотрим элементы $s \in B_i \backslash B$ (дополнение B до класса B_i) и $x^\circ \in C$. Если $s^\circ \in B$, то из условия $B \subset B_i$ следует, что $(s, s^\circ) \in \tau$, но тогда в силу (9) $(\lambda(s, x^\circ), \lambda(s^\circ, x^\circ)) \in \xi(\tau, \rho)$. Заметим, что $\lambda(s^\circ, x^\circ) \in D_k$, так как $s^\circ \in B$, $x^\circ \in C$. Далее возможны 2 случая:

1) $y = \lambda(s, x^\circ) \in D_k$, но тогда $s \in B$ и мы получили противоречие, так как $s \in B_i \backslash B$.

2) $y = \lambda(s, x^\circ) \notin D_k$, но так как $s \in B_i$, то s находится в отношении τ с любым элементом из B. Тогда в силу (9) y должен быть связан отношением $\xi(\tau, \rho)$ с любым элементом из D_k. Так как D_k — класс, то отсюда $y \in D_k$. Мы опять получили противоречие, что и доказывает равенство $B = B_i$, т.е. B является классом.

Аналогичным образом можно доказать, что C — класс в $\langle X, \rho\rangle$. Тем самым показано (12).

Докажем 2, сохранив обозначения предыдущей части утверждения. Пусть для покрытий классами B_τ, C_ρ и D_ξ тройки толерантностей (τ, ρ, ξ), где $\tau \in ST(A)$, $\rho \in T(X)$, $\xi \in T(Y)$ выполняется (11). Покажем, что $\xi(\tau, \rho) \subseteq \xi$, где $\xi(\tau, \rho)$ определяется (9). Пусть $(y_1, y_2) \in \xi(\tau, \rho)$, тогда в силу (9) $y_1 = \lambda(s_1, x_1)$, $y_2 = \lambda(s_2, x_2)$, для некоторых $(s_1, s_2) \in \tau$, $(x_1, x_2) \in \rho$. В силу утверждения 2 тогда существуют классы $B_i \in B_\tau$ и $C_j \in C_\rho$, такие, что $s_1, s_2 \in B_i$, $x_1, x_2 \in C_j$. В силу (11) найдется класс $D_k \in D_\xi$, такой, что $y_1, y_2 \in D_k$, но тогда $(y_1, y_2) \in \xi$. Тем самым показано, что $\xi(\tau, \rho) \subseteq \xi$.

Покажем, что $\xi \subseteq \xi(\tau, \rho)$, если выполняется (12). Пусть $(y_1, y_2) \in \xi$. Тогда существует класс D_k содержащий y_1 и y_2. В силу (12) найдутся классы $B_i \in B_\tau$ и $C_j \in C_\rho$, такие, что $y_1 = \lambda(s_1, x_1)$, $y_2 = \lambda(s_2, x_2)$, причем $s_1, s_2 \in B_i$, $x_1, x_2 \in C_j$. Но последнее означает, что $(s_1, s_2) \in \tau$, $(x_1, x_2) \in \rho$, а значит, для (y_1, y_2) выполняется F. В силу задания $\xi(\tau, \rho)$ формулой (9) отсюда следует, что $(y_1, y_2) \in \xi(\tau, \rho)$.

Мы получили, что если выполняется (11), то $\xi \supseteq \xi(\tau, \rho)$, а если (12), то $\xi \subseteq \xi(\tau, \rho)$. Ясно, что если выполняются (11) и (12) одновременно, то $\xi = \xi(\tau, \rho)$.

Замечание. Утверждение 7 позволяет сразу строить классы толерантности $\xi(\tau, \rho)$ с помощью (12), используя только классы B_i и C_j, минуя этап нахождения массива пар для $\xi(\tau, \rho)$.

Таким образом, содержательно (9) означает, что отношению $\xi(\tau, \rho)$ принадлежат те пары из Y, которые являются реакциями автомата, находящегося в состояниях из одного класса покрытия B_τ, на входные символы из одного класса покрытия C_ρ толерантности ρ на X.

Пусть B_τ, C_ρ и D_ξ — покрытия классами в пространствах толерантностей $\langle S, \tau\rangle$,$\langle X, \rho\rangle$,$\langle Y, \xi\rangle$ соответственно.

Рассмотрим следующую процедуру построения автомата по заданной тройке толерантностей (τ, ρ, ξ) и покрытиям B_τ, C_ρ, D_ξ.

Пусть $B_\tau = \{B_i\}$,$C_\rho = \{C_j\}$,$D_\xi = \{D_k\}$. Введем обозначения: $s_\tau = \cap\{B_i | s \in B_i\}$ — пересечение всех классов покрытия B_τ, содержащих элемент s, $x_\rho = \cap\{C_j | x \in C_j\}$, $y_\xi = \cap\{D_k | y \in D_k\}$. Через S/τ или S' будем обозначать множество классов покрытия B_τ, построенного по толерантности τ, и их всевозможных непустых пересечений. Аналогично, X/ρ или X' – классы и их всевозможные непустые пересечения из C_ρ, Y/ξ или Y' — классы и их непустые пересечения из D_ξ.

Рассмотрим три отображения:

$$\varphi'_\tau : S \to S/\tau, \qquad \varphi'_\tau(s) = s_\tau; \tag{13}$$

$$\psi'_\rho : X \to X/\rho, \qquad \psi'_\rho(x) = x_\rho; \tag{14}$$

$$\Theta'_\xi : Y \to Y/\xi, \qquad \Theta'_\xi(y) = y_\xi. \tag{15}$$

Пусть Q и G обозначают элементы множеств $S/_\tau$ и $X/_\rho$ соответственно, то есть $Q = B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k}$, $G = C_{j_1} \cap \ldots \cap C_{j_l}$.

Определим функции δ' и λ' следующим образом:

$$\delta' : S/_\tau \times X/_\rho \to S/_\tau, \quad \delta'(Q, G) = \cap \left\{ B_i | B_i \supseteq \{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right\} = \left(\{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right)_\tau; \tag{16}$$

$$\lambda' : S/_\tau \times X/_\rho \to Y/_\xi, \quad \lambda'(Q, G) = \left(\{\lambda(s, x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right)_\xi. \tag{17}$$

Элементами множеств $S/_\tau, X/_\rho$ и $Y/_\xi$ являются подмножества множеств S, X и Y соответственно, поэтому на $S/_\tau, X/_\rho$ и $Y/_\xi$ существует частичный порядок по включению.

Рассмотрим автомат $A' = (S/_\tau, X/_\rho, Y/_\xi, \delta', \lambda')$. Процедура его построения напоминает процедуру факторизации по конгруэнциям, описанную в [8], и совпадает с ней, если толерантности являются эквивалентностями. Будем называть ее *квазифакторизацией*, а автомат A' — *квазифактор-автоматом*. Квазифактор-автомат, построенный по покрытиям всеми классами толерантностей τ, ρ, ξ будем также обозначать $A_{\tau,\rho,\xi}$.

Анализируя шаги процедуры квазифакторизации, следует выделить один момент, заслуживающий особого внимания. При определении функций δ' и λ' по формулам (16) и (17) может оказаться, что множество $\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in Q\\ x\in G}}$ или $\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in Q\\ x\in G}}$ не покрывается целиком ни одним классом соответствующих покрытий. В результате получается, что функции δ' и λ' не определены. Теорема 1 описывает условия корректности процедуры.

Лемма 1. *Для произвольного покрытия $B = \{B_i\}$ произвольного множества Z и произвольных непустых подмножеств $Z_1, Z_2 \subseteq Z$, где $Z_1 \subseteq Z_2$, справедливо*

$$\cap\{B_i | B_i \supseteq Z_1\} \subseteq \cap\{B_i | B_i \supseteq Z_2\}, \tag{18}$$

если Q_2 покрывается хотя бы одним классом покрытия B.

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что каждый класс покрытия B, покрывающий множество Z_2, покрывает также и Z_1.

Теорема 1. *Процедура квазифакторизации для автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ по заданным толерантностям τ, ρ и ξ на множествах S, X и Y соответственно корректна (функции переходов и выходов квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$ определены) тогда и только тогда, когда $\tau \in ST(A)$, $\rho \subseteq \rho(\tau)$, $\xi \supseteq \xi(\tau, \rho)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть по покрытиям B_τ, C_ρ и D_ξ тройки толерантностей (τ, ρ, ξ) построен автомат $A_{\tau,\rho,\xi}$.

1. Покажем, что $\tau \in ST(A)$. Предположим противное, тогда, по определению стабильной толерантности,

$$(\exists(s_1^\circ, s_2^\circ) \in \tau)(\exists x_0 \in X)((\delta(s_1^\circ, x_0), \delta(s_2^\circ, x_0)) \notin \tau).$$

Пусть B_{i_o} — класс покрытия B_τ, содержащий s_1° и s_2°.

Рассмотрим множество $G = \{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x=x_0}}$. Ясно, что $\delta(s_1^\circ, x_0)$, $\delta(s_2^\circ, x_0) \in G$. Так как $(\delta(s_1^\circ, x_0), \delta(s_2^\circ, x_0)) \notin \tau$, то из утверждения 2 следует, что в покрытии B_τ не существует класса, целиком покрывающего множество G. Тогда $\left(\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x=x_0}}\right)_\tau = \varnothing$. Если C_{k_0} — произвольный класс покрытия C_ρ, содержащий x_0, то множество $\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x\in C_{k_0}}}$, содержащее G, обладает тем же свойством. Отсюда $\left(\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x\in C_{k_0}}}\right)_\tau = \varnothing$. Это означает, что функция переходов квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$ на паре (B_{i_0}, C_{k_0}) не определена. Мы получили противоречие с условием существования автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$. Тем самым доказано, что $\tau \in ST(A)$.

2. Покажем, что $\rho \subseteq \rho(\tau)$, где $\tau \in ST(A)$. Предположим, что это не так, то есть существует пара (x_1°, x_2°), такая, что $(x_1^\circ, x_2^\circ) \in \rho$, но $(x_1^\circ, x_2^\circ) \notin \rho(\tau)$.

Тогда из (8) следует

$$(x_1^\circ, x_2^\circ) \notin \rho(\tau) \to ((\exists(s_1^\circ, s_2^\circ) \in \tau)((\delta(s_1^\circ, x_1^\circ), \delta(s_2^\circ, x_2^\circ)) \notin \tau)).$$

Последнее в силу утверждения 2 означает, что пара $(\delta(s_1^\circ, x_1^\circ), \delta(s_2^\circ, x_2^\circ))$ не покрывается ни одним классом покрытия B_τ. Но тогда, проводя рассуждения, аналогичные п.1), можно показать, что функция переходов квазифактор-автомата не определена.

3. Пусть для автомата A выбраны стабильная толерантность τ на S и $\rho \subseteq \rho(\tau)$ на X. Покажем, что для построения квазифактор-автомата необходимо, чтобы на Y выбиралось $\xi \supseteq \xi(\tau, \rho)$.

Предположим противное, тогда существует пара (y_1°, y_2°), такая, что $(y_1^\circ, y_2^\circ) \in \xi(\tau, \rho)$, но $(y_1^\circ, y_2^\circ) \notin \xi$. Тогда, согласно (9), справедливо

$$(\exists(s_1^\circ, s_2^\circ) \in \tau)(\exists(x_1^\circ, x_2^\circ) \in \rho)(y_1^\circ = \lambda(s_1^\circ, x_1^\circ) \& y_2^\circ = \lambda(s_2^\circ, x_2^\circ)). \tag{19}$$

Так как $(s_1^\circ, s_2^\circ) \in \tau$, то в B_τ существует класс B_{i_0}, покрывающий эту пару. Аналогично для пары (x_1°, x_2°) и покрытия C_ρ на X существует класс C_{j_0}, покрывающий x_1°, x_2°.

Рассмотрим значение функции выходов λ' квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$ на паре (B_{i_0}, C_{j_0}) : $\lambda'(B_{i_0}, C_{j_0}) = \left(\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x\in C_{j_0}}}\right)_\xi$.

Из (19) следует, что $y_1^\circ, y_2^\circ \in \{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x\in C_{j_0}}}$. Однако так как $(y_1^\circ, y_2^\circ) \notin \xi$, не существует класса покрытия D_ξ, содержащего указанную пару. Поэтому значение $\lambda'(B_{i_0}, C_{j_0})$ — не определено.

Покажем достаточность. Пусть выбрана тройка толерантностей (τ, ρ, ξ), такая, что $\tau \in ST(A)$, $\rho \subseteq \rho(\tau)$, $\xi \supseteq \xi(\tau,\rho)$. Надо показать, что для квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi} = (S/_\tau, X/_\rho, Y/_\xi, \delta', \lambda')$, построеннного по покрытиям $B_\tau = \{B_i\}$, $C_\rho = \{C_j\}$, $D_\xi = \{D_k\}$, определены функции δ' и λ', т.е. для любых $Q \in S/_\tau$, $G \in X/_\rho$ справедливо $\delta'(Q,G) \neq \varnothing$ и $\lambda'(Q,G) \neq \varnothing$.

Доказательство проведем методом от противного. Пусть для некоторых $Q^\circ = B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_k}$ и $G^\circ = C_{j_1} \cap C_{j_2} \cap \ldots \cap C_{j_l}$ справедливо $\delta'(Q^\circ, G^\circ) = \varnothing$. По определению, $\delta'(Q^\circ, G^\circ)$ — пересечение классов покрытия B_τ, содержащих множество $\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in Q^\circ\\ x\in G^\circ}}$. Тогда условие $\delta'(Q^\circ, G^\circ) = \varnothing$ означает, что для любого $B_i \in B_\tau$

$$(\exists s, s' \in Q^\circ)(\exists x, x' \in G^\circ)(\{\delta(s,x), \delta(s',x')\} \not\subseteq B_i). \tag{20}$$

Рассмотрим класс B_{i_0}, содержащий все элементы $\delta(s,x)$, где $s \in B_{i_1}$, $x \in C_{j_1}$. Такой класс обязательно найдется, так как для τ и $\rho(\tau)$ выполняются (5) и (10), а так как $\rho \subseteq \rho(\tau)$, то в силу утверждения 3 (10) выполняется и для ρ. Если для B_{i_0} выполняется (20), то существуют $s_1^\circ, s_2^\circ \in Q^\circ$, $x_1^\circ, x_2^\circ \in G^\circ$, такие, что $\{\delta(s_1^\circ, x_1^\circ), \delta(s_2^\circ, x_2^\circ)\} \not\subseteq B_{i_0}$. Однако из условия $s_1^\circ, s_2^\circ \in Q^\circ$ следует $s_1^\circ, s_2^\circ \in B_{i_1}$, а из условия $x_1^\circ, x_2^\circ \in G^\circ$ следует $x_1^\circ, x_2^\circ \in C_{j_1}$. Но тогда, согласно выбору B_{i_0}, $\{\delta(s_1^\circ, x_1^\circ), \delta(s_2^\circ, x_2^\circ)\} \subseteq B_{i_0}$. Получили противоречие, которое доказывает, что $\delta'(Q,G) \neq \varnothing$ для любых $Q \in S/_\tau$,$G \in X/_\rho$.

Покажем, что $\lambda'(Q,G) \neq \varnothing$ аналогичным образом. Пусть для некоторых $Q^\circ = B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k}$ и $G^\circ = C_{j_1} \cap \ldots \cap C_{j_l}$ справедливо $\lambda'(Q^\circ, G^\circ) = \varnothing$. По определению, $\lambda'(Q^\circ, G^\circ)$ — пересечение классов покрытия D_ξ, содержащих множество $\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in Q^\circ\\ x\in G^\circ}}$. Тогда условие $\lambda'(Q^\circ, G^\circ) = \varnothing$ означает, что для любого $D_k \in D_\xi$

$$(\exists s, s' \in Q^\circ)(\exists x, x' \in G^\circ)(\{\lambda(s,x), \lambda(s',x')\} \not\subseteq D_k). \tag{21}$$

Рассмотрим класс $D_{k_0} \in D_\xi$, содержащий все элементы $\lambda(s,x)$, где $s \in B_{i_1}$, $x \in C_{j_1}$. Такой класс обязательно найдется, так как в силу определения отношения $\xi(\tau,\rho)$ (9) и соотношения (11) существует класс покрытия толерантности $\xi(\tau,\rho)$, содержащий множество $\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_1}\\ x\in C_{j_1}}}$, а поскольку $\xi \supseteq \xi(\tau,\rho)$, то в силу утверждения 3 этим же свойством обладает и покрытие D_ξ.

Если для D_{k_0} выполняется (21), то существуют $s_1^\circ, s_2^\circ \in Q^\circ$, $x_1^\circ, x_2^\circ \in G^\circ$, такие, что $\{\lambda(s_1^\circ, x_1^\circ), \lambda(s_2^\circ, x_2^\circ)\} \not\subseteq D_{k_0}$. Но из условия $s_1^\circ, s_2^\circ \in Q^\circ$ следует $s_1^\circ, s_2^\circ \in B_{i_1}$, а из условия $x_1^\circ, x_2^\circ \in G^\circ$ следует $x_1^\circ, x_2^\circ \in C_{j_1}$. Но тогда, согласно выбору D_{k_0}, $\{\lambda(s_1^\circ, x_1^\circ), \lambda(s_2^\circ, x_2^\circ)\} \subseteq D_{k_0}$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Тем самым теорема доказана полностью.

3. СВОЙСТВА КВАЗИФАКТОР-АВТОМАТА. МОРФИЗМЫ ПО ТОЛЕРАНТНОСТЯМ. ТОЛЕРАНТНЫЕ ОБРАЗЫ

Отображение $\Theta : P \to Q$, где P, Q — частично упорядоченные множества, называется *изотонным* или сохраняющим порядок, если

$$(\forall x, y \in P)(x \leq y \to \Theta(x) \leq \Theta(y)).$$

Изотонное отображение, допускающее изотонное обратное отображение, называется изоморфизмом.

Теорема 2. *Пусть задан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$. Для квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$ автомата A, определяемого соотношениями* (13)–(17)*, в котором τ, ρ, ξ удовлетворяют теореме* 1*, для любых $s \in S$ и $x \in X$ справедливо*

$$\varphi'(\delta(s,x)) \subseteq \delta'(\varphi'(s), \psi'(x)), \tag{22}$$

$$\Theta'(\lambda(s,x)) \subseteq \lambda'(\varphi'(s), \psi'(x)). \tag{23}$$

Доказательство. По определению, слева в (22) $\varphi'(\delta(s,x)) = (\delta(s,x))_\tau$. Справа в (22) $\delta'(\varphi'(s), \psi'(x)) = \left(\{\delta(s',x')\}_{\substack{s'\in\varphi'(s)\\ x'\in\psi'(x)}}\right)_\tau$. По определению функций φ и ψ, $\delta(s,x) \in \{\delta(s',x')\}_{\substack{s'\in\varphi'(s)\\ x'\in\psi'(x)}}$.

Тогда, по лемме 1, $((\delta(s,x))_\tau \subseteq \left(\{\delta(s',x')\}_{\substack{s'\in\varphi'(s)\\ x'\in\psi'(x)}}\right)_\tau$. Тем самым (22) доказано. Включение (23) доказывается аналогично.

Теорема 3. *Для произвольного автомата $A=(S,X,Y,\delta,\lambda)$ функции переходов и выходов его квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}=(S/_\tau, X/_\rho, Y/_\xi, \delta', \lambda')$ изотонны, то есть*

$$(\forall Q_1,Q_2\in S/_\tau)(\forall G_1,G_2\in X/_\rho)(Q_1\subseteq Q_2 \ \&\ G_1\subseteq G_2\to$$

$$\to \delta'(Q_1,G_1)\subseteq\delta'(Q_2,G_2)\ \&\ \lambda'(Q_1,G_1)\subseteq\lambda'(Q_2,G_2)).$$

Доказательство. Пусть квазифактор-автомат построен по некоторым покрытиям B_τ, C_ρ и D_ξ на множествах S,X и Y соответственно автомата A, $Q_1,Q_2\subseteq S/_\tau$, $G_1,G_2\subseteq X/_\rho$. Обозначим $Z_1=\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in Q_1\\ x\in G_1}}$, $Z_2=\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in Q_2\\ x\in G_2}}$. Поскольку $Q_1\subseteq Q_2\ \&\ G_1\subseteq G_2$, то $Z_1\subseteq Z_2$, а тогда, по лемме 1, $(Z_1)_\tau\subseteq(Z_2)_\tau$. Но по определению квазифактор-автомата $(Z_1)_\tau=\delta'(Q_1,G_1)$, $(Z_2)_\tau=\delta'(Q_2,G_2)$. Тем самым включение для δ' доказано.

Если положить $Z_1'=\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in Q_1\\ x\in G_1}}$, $Z_2'=\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in Q_2\\ x\in G_2}}$, то по лемме 1 $(Z_1')_\xi\subseteq(Z_2')_\xi$. По определению $(Z_1')_\xi=\lambda'(Q_1,G_1)$, $(Z_2')_\xi=\lambda'(Q_2,G_2)$. Тем самым включение для λ' доказано.

Автомат $A=(S,X,Y,\delta,\lambda)$ будем называть *упорядоченным*, если каждое из множеств S,X,Y частично упорядочено.

Пусть дан упорядоченный автомат $A=(S_A,X_A,Y_A,\delta_A,\lambda_A)$. Упорядоченный автомат $B=(S_B, X_B,Y_B,\delta_B,\lambda_B)$ назовем изоморфным автомату A, если существует тройка взаимно однозначных сюръективных отображений (φ,ψ,θ), где $\varphi: S_A\to S_B$, $\psi: X_A\to X_B$, $\theta: Y_A\to Y_B$, такая, что для любых $s\in S$, $x\in X$

$$\varphi(\delta_A(s,x))=\delta_B(\varphi(s),\psi(x)),\qquad \theta(\lambda_A(s,x))=\lambda_B(\varphi(s),\psi(x)),$$

причем каждое из отображений φ,ψ,θ есть изоморфизм соответствующих частично упорядоченных множеств.

Пусть задан автомат $A=(S,X,Y,\delta,\lambda)$. Упорядоченный автомат $\tilde A=(\tilde S,\tilde X,\tilde Y,\tilde\delta,\tilde\lambda)$ назовем *толерантным образом* A, если он изоморфен некоторому квазифактор-автомату автомата A.

Пусть (φ',ψ',θ') — отображения, определяемые (13)–(15) в процедуре квазифакторизации, автомата A в квазифактор-автомат A', $(\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde\theta)$ — изоморфизм A' на некоторый толерантный образ $\tilde A$. Тогда тройку отображений $(\varphi,\psi,\theta)=(\tilde\varphi\cdot\varphi',\tilde\psi\cdot\psi',\tilde\theta\cdot\theta')$, где $(\tilde\varphi\cdot\varphi')(s)=\tilde\varphi(\varphi'(s))$, $\psi(x)=\tilde\psi(\psi'(x))$, $\theta(y)=\tilde\theta(\theta'(y))$ назовем *морфизмом по стабильной толерантности* автомата A в автомат $\tilde A$.

Следующие теоремы распространяют свойства квазифактор-автоматов на толерантные образы.

Теорема 4. *Пусть (φ,ψ,θ) — морфизм по стабильной толерантности автомата A в автомат $\tilde A$, тогда для любых $s\in S$, $x\in X$*

$$\varphi(\delta(s,x))\le\tilde\delta(\varphi(s),\psi(x)),\qquad \theta(\lambda(s,x))\le\tilde\lambda(\varphi(s),\psi(x)).$$

Доказательство. Теорема следует из теоремы 2 и изоморфности толерантного образа некоторому квазифактор-автомату.

Теорема 5. *Для произвольного автомата A функции переходов и выходов его толерантного образа $\tilde A=(\tilde S,\tilde X,\tilde Y,\tilde\delta,\tilde\lambda)$ изотонны, то есть*

$$(\forall x,x'\in\tilde X)(\forall s,s'\in\tilde S)(s\le s'\ \&\ x\le x'\to\tilde\delta(s,x)\le\tilde\delta(s',x')\ \&\tilde\lambda(s,x)\le\tilde\lambda(s',x')).$$

Доказательство. Теорема следует из теоремы 3 и определения толерантного образа.

4. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ТОЛЕРАНТНОГО ОБРАЗА

Пусть автомат A задается таблицами переходов (табл. 1) и выходов (табл. 2). Автомат A — простой, т.е. он не имеет нетривиальных конгруэнций. Рассмотрим $\tau_{1,2}$ — наименьшую стабильную толерантность, порожденную парой $(1,2)$.

В силу определения стабильной толерантности принадлежность пары состояний $(1,2)$ толерантности $\tau_{1,2}$ влечет принадлежность пары $(2,3) = (\delta(1,x_2), \delta(2,x_2))$, а значит, и пар $(1,5) = (\delta(2,x_1), \delta(3,x_1))$ и $(3,1) = (\delta(2,x_2), \delta(3,x_2))$ и т.д.

Таблица 1

$s \setminus x$	x_1	x_2	x_3
1	2	2	1
2	1	3	2
3	5	1	2
4	8	7	1
5	9	2	1
6	1	5	2
7	3	6	2
8	7	1	1
9	5	4	1

Таблица 2

$s \setminus x$	x_1	x_2	x_3
1	y_1	y_3	y_1
2	y_5	y_1	y_5
3	y_1	y_6	y_1
4	y_2	y_8	y_1
5	y_3	y_5	y_5
6	y_7	y_5	y_5
7	y_6	y_1	y_1
8	y_7	y_7	y_1
9	y_8	y_8	y_5

Процесс порождения пар толерантности $\tau_{1,2}$ удобно представить деревом с корнем, соответствующим паре $(1,2)$. Начальный фрагмент дерева представлен на рис. 1. Процесс ветвления в очередной вершине $\sigma = (s,t)$ заканчивается, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) пара (s,t) или (t,s) уже встречалась выше;
2) $s = t$.

Эти вершины на рис. 1 подчеркнуты.

Выполнение этих условий означает, что далее из этой вершины могут лишь получаться пары, уже полученные, либо симметричные к ним, либо пары с одинаковыми компонентами, т.е. пары вида (s,s). Обозначим через τ множество всех пар вида (s,t), где $s \neq t$, из дерева, порожденных парой $(1,2)$. Будем считать, что $(s,t) = (t,s)$ и поэтому для удобства в τ включаются пары (s,t), в которых $s < t$. Легко проверить, что для рассматриваемого примера будет получено следующее множество пар: $\tau = \{$(1,2); (2,3); (1,5); (1,3); (2,9); (2,5); (3,4); (1,9); (5,8); (1,7); (2,4); (7,9); (2,6); (1,8); (3,7); (3,5); (4,6); (2,7); (1,6); (5,9); (5,7); (3,6); (3,9); (1,4); (2,8)$\}$.

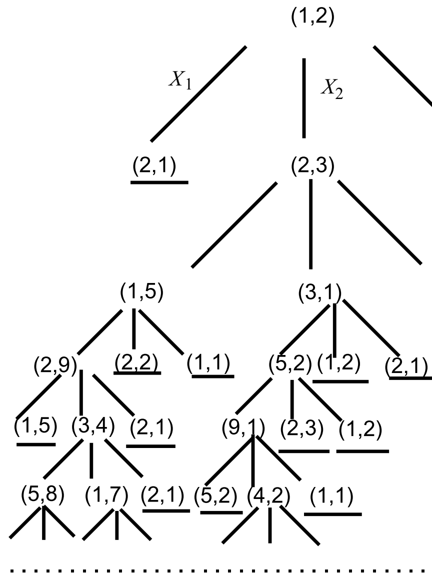


Рис. 1

В силу свойств рефлексивности и симметричности $\tau_{1,2}$ должна содержать все пары из τ, все пары, симметричные к ним (обозначим множество таких пар через τ^{-1}), а также множество Δ_S, состоящее из всех пар вида (s,s), т.е. $\Delta_S = \{(1,1); (2,2); \ldots; (9,9)\}$. Таким образом, $\tau_{1,2} = \tau \cup \tau^{-1} \cup \Delta_S$.

Толерантность $\tau_{1,2}$ имеет классы: $B_1 = \{1,2,3,5,7,9\}$, $B_2 = \{1,2,5,8\}$, $B_3 = \{1,2,3,4,6\}$.

Обозначим $B_4 = B_1 \cap B_2 = \{1,2,5\}$, $B_5 = B_1 \cap B_3 = \{1,2,3\}$, $B_6 = B_2 \cap B_3 = B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \{1,2\}$.

В табл. 3 представлены значения функции переходов на рассматриваемых классах.

Для $\tau_{1,2}$ отношение $\rho(\tau_{1,2})$, определяемое (8) и утверждением 6, содержит пары (x_1,x_3) и (x_2,x_3). Компоненты этих пар реализуют одинаковые переходы из класса в класс B. Таким образом, $\rho(\tau)$ имеет классы: $\{x_1,x_3\}$ и $\{x_2,x_3\}$.

Таблица 3

δ'	x_1	x_2	x_3
B_1	B_1	B_3	B_6
B_2	B_1	B_5	B_6
B_3	B_2	B_1	B_6
B_4	B_1	B_5	B_6
B_5	B_4	B_5	B_6
B_6	B_6	B_5	B_6

Утверждение 6 и теорема 1 позволяют для построения квазифактор-автомата рассмотреть отношение $\rho \subset \rho(\tau)$. В качестве такого отношения рассмотрим ρ, определяемое классами $C_1 = \{x_1\}$ и $C_2 = \{x_2,x_3\}$.

Формула (9) и утверждение 7 позволяют определить отношение $\xi(\tau_{1,2},\rho)$ с классами: $D_1 = \{y_1,y_3,y_6,y_5,y_8\}$, $D_2 = \{y_1,y_3,y_5,y_7\}$, $D_3 = \{y_1,y_2,y_5,y_7\}$.

Класс D_1 порождается реакциями автомата на состояния из класса B_1 и входной символ из класса C_1, D_2 порождается соответственно классами B_2 и C_1, D_3 — классами B_3 и C_1.

Обозначим $D_4 = D_1 \cap D_2 = \{y_1,y_3,y_5\}$, $D_5 = D_1 \cap D_3 = \{y_1,y_5\}$, $D_6 = D_2 \cap D_3 = \{y_1,y_5,y_7\}$.

Справедливо $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = D_1 \cap D_3 = D_5$.

Определяя функции δ' и λ' согласно формулам (16) и (17), получаем квазифактор-автомат

$A' = (S', X', Y', \delta', \lambda')$ автомата A с табл. 4 и 5 переходов и выходов соответственно, $S' = \{B_i\}$, $Y' = \{D_k\}$, $X' = \{C_j\}$.

Всякий автомат $\tilde{A}$, изоморфный A' будет толерантным образом A. На рис. 2 изображен частичный порядок на множестве состояний S', на рис. 3 — соответственно выходов Y'.

Порядок на множестве X — тривиальный.

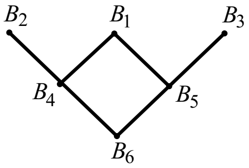


Рис. 2

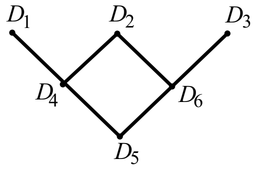


Рис. 3

Таблица 4

δ'	C_1	C_2
B_1	B_1	B_3
B_2	B_1	B_5
B_3	B_2	B_1
B_4	B_1	B_5
B_5	B_4	B_5
B_6	B_6	B_5

Таблица 5

δ'	C_1	C_2
B_1	D_1	D_1
B_2	D_2	D_2
B_3	D_3	D_1
B_4	D_4	D_4
B_5	D_5	D_1
B_6	D_5	D_4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Толерантный образ автомата представляет собой автомат, поведение которого существенным образом связано с поведением исходного автомата. Теорема 4 показывает эту связь.

Определения толерантного образа и морфизма по толерантности введены по аналогии с гомоморфным образом и гомоморфизмом соответственно. Подобно тому как всякий гомоморфный образ изоморфен некоторому фактор-автомату исходного автомата, построенному по некоторой конгруэнции на множестве состояний, толерантный образ изоморфен квазифактор-автомату, построенному по стабильной толерантности. С этой точки зрения морфизм по толерантности можно рассматривать как обобщение гомоморфизма, поскольку в том случае, когда стабильная толерантность является конгруэнцией, толерантный образ есть гомоморфный образ, а морфизм по толерантности совпадает с гомоморфизмом.

Отметим, однако, методологическую особенность в определении толерантного образа. Если гомоморфный образ определяется через тройку отображений (φ, ψ, θ), а затем устанавливается его изоморфность некоторому фактор-автомату, то толерантный образ изначально определяется через квазифактор-автомат, а затем устанавливаются свойства соответствующей тройки отображений.

Теорема 1 позволяет предложить процедуру построения всех толерантных образов автомата, аналогичную построению гомоморфных образов [8]. Она заключается в переборе стабильных толерантностей автомата и толерантностей на X и Y, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Особенность состоит в том, что вместо покрытия множества всеми классами толерантности можно рассматривать базисы покрытий, удаляя «лишние» классы, если это не приводит к ситуации неопределенности функций переходов и выходов квазифактор-автомата. Однако, как правило, покрытие всеми классами в конечном детерминированном автомате одновременно является единственным базисом.

Отметим, что в процессе построения всех толерантных образов будут построены все гомоморфные образы.

Библиографический список

1. *Богомолов А.М., Салий В.И.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, физмат. лит., 1997. 368 с.

2. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971.

3. *Chajda I.* Characterization of Relational Blocks // Algebra universalis. 1980. V. 10. P. 65-69.

4. *Карпов Ю. Г.* Теория автоматов. СПб.: Питер, 2003. 208 с.

5. *Hartmanis J., Stearns R.* Algebraic Structure Theory of Sequential Machines. N.Y.: Prentice-Hall Inc., 1966. 213 p.

6. *Мангушева И.П.* Построение решетки стабильных толерантностей конечного автомата // Методы и системы технической диагностики. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. Вып. 2. С. 106–112.

7. *Хрусталев П.М.* Покрытия и разбиения со свойством подстановки в конечных автоматах // Методы и системы технической диагностики. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. Вып. 2. С. 96–106.

8. *Дидидзе Ц.Е.* О гомоморфизмах автоматов // Тр. ВЦ АН Груз. ССР, 1973. Т. 12, № 1. С. 118–131.

9. *Ильичева И.П., Печенкин В.В.* Контроль структурных автоматов по стабильным отношениям // Методы и системы технической диагностики. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. Вып. 5. С. 35–43.