

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Механика

- Айзикович С.М., Кренев Л.И., Трубчик И.С.** Контактные задачи для упругих оснований с функционально-градиентными покрытиями сложной структуры 3
- Бессонов Д.Е., Зезин Ю.П., Ломакин Е.В.** Разносопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров 9
- Буренин А.А., Рагозина В.Е., Иванова Ю.Е.** Эволюционное уравнение для волновых процессов формоизменения 14
- Ватульян А.О., Дударев В.В.** О некоторых проблемах реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в упругих телах 25
- Дудко О.В., Потянихин Д.А.** О косом ударе жестким телом, имеющим плоскую границу, по нелинейному упругому полупространству 32
- Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.** Математические модели и современные физические теории поля 41
- Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Семенов Д.А.** Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости 94
- Локощенко А.М.** Эквивалентные напряжения в расчетах длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) 128
- Манцыбора А.А., Семенов К.Т.** Одномерная автомодельная задача об ударе жестким телом по упругопластическому полупространству 136
- Недорезов П.Ф.** Численное исследование напряженно-деформированного состояния в задачах изгиба тонкой анизотропной прямоугольной пластинки 142

Приложения

Хроника

- Коссович Л.Ю.** Всероссийская конференция «III сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела» 149

Personalia

- Сергей Георгиевич Лехницкий 153

РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор
Коссович Леонид Юрьевич

Заместитель главного редактора
Усанов Дмитрий Александрович

Ответственный секретарь
Клоков Василий Тихонович

Члены редакционной коллегии
Аврус Анатолий Ильич
Белов Владимир Николаевич
Бучко Ирина Юрьевна
Вениг Сергей Борисович
Волкова Елена Николаевна
Голуб Юрий Григорьевич
Данилов Виктор Николаевич
Дыльнов Геннадий Васильевич
Захаров Андрей Михайлович
Зимняков Дмитрий Александрович
Кабанин Вячеслав Кузьмич
Комкова Галина Николаевна
Лебедева Ирина Владимировна
Левин Юрий Иванович
Монахов Сергей Юрьевич
Прозоров Валерий Владимирович
Прохоров Дмитрий Валентинович
Смирнов Анатолий Константинович
Федотова Ольга Васильевна
Федорова Антонина Гавриловна
Худяков Глеб Иванович
Чумаченко Алексей Николаевич
Шляхтин Геннадий Викторович

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
СЕРИИ

Главный редактор
Коссович Леонид Юрьевич

Заместители главного редактора
Прохоров Дмитрий Валентинович

Ответственный секретарь
Халова Виктория Анатольевна

Члены редакционной коллегии:
Индейцев Дмитрий Анатольевич
Ковалев Владимир Александрович
Ломакин Евгений Викторович
Матвеев Валерий Павлович
Манжиров Александр Владимирович
Морозов Никита Федорович
Насыров Семен Рафаилович
Новопашин Михаил Дмитриевич
Пархоменко Павел Павлович
Радаев Юрий Николаевич
Резчиков Александр Федорович
Сперанский Дмитрий Васильевич
Суботин Юрий Николаевич
Хромов Август Петрович
Юрко Вячеслав Анатольевич

Зарегистрировано
в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации СМИ
ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года

**ПРАВИЛА
ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ**

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 10 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному на странице журнала по адресу www.sgu.ru/journal, или 16 страниц машинописи (формат А4, шрифт 14, поля не менее 2 см со всех сторон), включая библиографию. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редакцией журнала.

Последовательность предоставления материала: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилия автора, место работы (вуз, кафедра), e-mail, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список. Не допускается нумерация формул, на которые в статье нет ссылок. В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. На отдельной странице приводятся сведения об авторах на русском и английском языках: фамилия, имя и отчество (полностью), научное звание, место работы (вуз, кафедра), должность, адрес для переписки, e-mail. Следует указать также автора, ответственного за переписку с редакцией.

Более подробную информацию о правилах оформления статей можно найти по адресу www.sgu.ru/journal.

Адрес для переписки с редколлегией серии mti@sgu.ru.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 6 месяцев. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Ведущий редактор

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Митенёва Елена Анатольевна

Художник

Соколов Дмитрий Валерьевич

Верстка

Багаева Ольга Львовна

Технический редактор

Агальцова Людмила Владимировна

Корректор

Крылова Елена Борисовна

Адрес редакции410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Издательство Саратовского университета**Тел.:** (845-2) 52-26-89, 52-26-85**E-mail:** izdat@sgu.ru

Подписано в печать 23.12.09.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 18,13 (19,5).

Уч.-изд. л. 18,6.

Тираж 500 экз. Заказ 120.

Отпечатано в типографии
Издательства Саратовского университета© Саратовский государственный
университет, 2009**CONTENTS****Scientific Part****Mechanics**

- Aizikovich S.M., Krenev L.I., Trubchik I.S.** The Contact Problems for the Elastic Foundation with the Functionally Graded Coatings of the Complicated Structure 3
- Bessonov D.E., Zezin Yu.P., Lomakin E.V.** Multimodulus Behavior of the Grained Composites on the Base of Unsaturated Polyethers 9
- Burenin A.A., Ragozina V.E., Ivanova Yu.E.** The Evolutionary Equation for Wave Processes of the Shift Deformation 14
- Vatulyan A.O., Dudarev V.V.** On Some Problems of Reconstruction of Inhomogeneous Pre-Stressed State in Elastic Solids 25
- Dudko O.V., Potyanikhin D.A.** About Oblique Impact by Perfectly Rigid Body with Plane Boundary on the Nonlinear Elastic Half-Space 32
- Kovalev V.A., Radayev Yu.N.** Mathematical Models and Contemporary Theories of Physical Fields 41
- Kovalev V.A., Radayev Yu.N., Semenov D.A.** Coupled Dynamic Problems of Hyperbolic Thermoelasticity 94
- Lokoshchenko A.M.** The Equivalent Stresses at Calculation of Creep Rupture of Metals Under Complex Stress State (Review) 128
- Mantsybora A.A., Semenov K.T.** One-Demential Automodel Problem about Impact of Rigid Body with Elastoplastic Half-Space 136
- Nedorezov P.F.** Numerical Study of Stress-Strain State of a Thin Anisotropic Rectangular Plate 142

Appendices**Chronicle**

- Kossovich L.Yu.** All-Russian Conference «III Session of Scientific Council of Russian Academy of Sciences on Solid Mechanics» 149

Personalia

- Sergey Georgievich Lekhnitskii 153



МЕХАНИКА

УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГИХ ОСНОВАНИЙ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

С.М. Айзикович, Л.И. Кренив, И.С. Трубочик

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону,
кафедра информатики
E-mail: aizsm@rambler.ru, krd91adv@aaanet.ru, trira@rambler.ru

В работе рассматривается задача о внедрении в функционально-градиентное упругое полупространство осесимметричного штампа. Предполагается, что штамп является телом вращения, подошва которого имеет параболическую форму, а контакт между штампом и неоднородным слоем гладкий. При решении контактной задачи используется двухсторонний асимптотический метод. В численном эксперименте анализируется напряженно-деформированное состояние покрытия, модуль Юнга которого является непрерывной гладкой немонотонной функцией, первая производная которой изменяет свой знак конечное число раз по глубине покрытия.

Ключевые слова: функционально-градиентное покрытие, контактная задача.

The Contact Problems for the Elastic Foundation with the Functionally Graded Coatings of the Complicated Structure

S.M. Aizikovich, L.I. Krenev, I.S. Trubchik

Don State Technical University, Rostov-on-Don,
Chair of Information Sciences
E-mail: aizsm@rambler.ru, krd91adv@aaanet.ru, trira@rambler.ru

The contact problem for the impression of axisymmetrical indenter into a functional graded elastic half-space is considered. Analytical methods for solving this problem have been developed. It is assumed that the indenter has a parabolic shape and contact between the indenter and the coating is smooth. The used method make it possible to find the analytical asymptotically exact problem solution. The stress-strain state of the coating is analyzed due to numerical experiment with the coatings which elastic modula are described with continuously smooth non-monotonic function with the changing of derivation sight is finite into the coating.

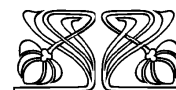
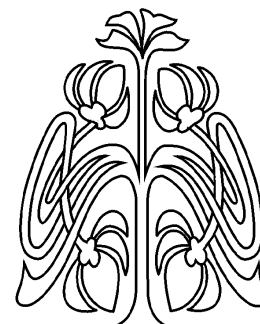
Key words: FGC, contact problem.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

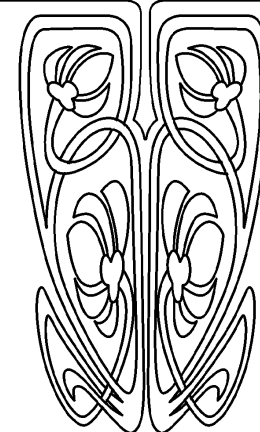
Сферический индентор вдавливаются в поверхность неоднородного упругого полупространства силой P . С полупространством связана цилиндрическая система координат (r, φ, z) .

Предполагается, что все деформации упруги и размер зоны контакта a мал по сравнению с радиусом R сферы, описывающей форму индентора. Силы трения между индентором и поверхностью полупространства отсутствуют. Считаем, что в окрестности начальной точки контакта сферический индентор аппроксимируется жестким параболическим индентором:

$$z = \varphi(r) = \beta r^2.$$



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Вне индентора поверхность полупространства не нагружена. Под действием силы P индентор перемещается на расстояние χ вдоль оси z .

Считаем, что модуль Юнга $E(z)$ непрерывно и немонотонно изменяется по глубине в пределах неоднородного слоя, а коэффициент Пуассона $\nu(z)$ остается постоянным:

1. $E = E(z), \quad \nu = \nu(-H), \quad -H \leq z \leq 0,$
2. $E = E(-H), \quad \nu = \nu(-H), \quad -\infty \leq z \leq -H.$

При вышеуказанных предположениях граничные условия имеют вид

$$z = 0, \quad \tau_{zr} = \tau_{z\varphi} = 0, \quad \begin{cases} \sigma_z = 0, & r > a, \\ w = \chi(r) = \chi - \varphi(r), & r \leq a. \end{cases}$$

Здесь w — смещение вдоль оси z , τ_{zr} , $\tau_{z\varphi}$, σ_z — радиальные, тангенциальные и нормальные напряжения.

При $z = -H$ должно выполняться условие сопряжения по напряжениям и перемещениям:

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(2)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}.$$

Напряжения и деформации стремятся к нулю при $(r, -z) \rightarrow \infty$.

Требуется определить распределение контактных нормальных напряжений под штампом $\sigma_z(r, 0) = -q(r)$, $0 < r \leq a$, размер зоны контакта a , а также связь между вдавливающей силой P и осадкой штампа χ .

Так как края индентора не врезаются в поверхность полупространства, то должно выполняться соотношение $q(a) = 0$, которое используется для определения полуширины зоны контакта и накладывает некоторые ограничения на функцию $q(r)$.

Заметим также, что в связи с отсутствием сцепления индентора с поверхностью полупространства для корректной постановки задачи должно быть выполнено соотношение $q(r) \geq 0$ для всех $r \leq a$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНЕДРЕНИИ ШТАМПА В НЕОДНОРОДНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Посредством преобразования Ханкеля и метода модулирующих функций задача сводится к решению парного интегрального уравнения следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta(0)} \int_0^\infty Q(\alpha) L(\lambda\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = f(r), & 0 \leq r \leq 1, \\ \int_0^\infty Q(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha = 0, & r > 1, \end{cases} \quad (1)$$

$$Q(\alpha) = \int_0^1 q(\rho) J_0(\alpha\rho) \rho d\rho, \quad f(r) = \delta - \varphi(ra)/a, \quad \delta = \chi/a, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Здесь J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $\varphi(ar) = \beta a^2 r^2$, $\beta = (2R)^{-1}$, R — радиус сферы, внедряемой в полупространство, $\lambda = H/a$ — характерный геометрический параметр задачи, $L(\lambda\alpha)$ — трансформанта ядра парного интегрального уравнения. При выполнении условий

$$\begin{aligned} \min_{z \in (-\infty; 0]} \Delta(z) &\geq c > 0, \\ \max_{z \in (-\infty; 0]} \Delta(z) &\leq c < \infty, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta(z) &= \text{const}, \\ \Delta(z) &= E(z)(1 - \nu^2(z))^{-1} \end{aligned}$$



и с помощью полиэкспоненциального представления в [1] показано, что трансформанта ядра $L(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= A + B|\alpha| + o(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0, \\ L(\alpha) &= 1 + D|\alpha|^{-1} + o(\alpha^{-2}), \quad \alpha \rightarrow \infty, \\ A &= \lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta(0)\Delta^{-1}(z). \end{aligned}$$

Здесь A, B, D — постоянные.

Аппроксимируем трансформанту ядра выражением

$$\begin{aligned} L(\lambda\alpha) &\approx L_N(\lambda\alpha), \\ L_N(\lambda\alpha) &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{a^2 + A_i^2 \lambda^{-2}}{a^2 + B_i^2 \lambda^{-2}}. \end{aligned}$$

Парное интегральное уравнение (1), в котором ядро $L(\lambda\alpha)$ заменено на $L_N(\lambda\alpha)$, имеет замкнутое решение [2]:

$$q_N^{\text{II}}(r) = \frac{2}{\pi} \left\{ -2A^0 L_N^{-1}(0) \sqrt{1-r^2} - \sum_{i=1}^N C_i a_i \int_r^1 \frac{\text{sh}(a_i t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt \right\}.$$

Коэффициенты C_i определяются из решения следующей линейной алгебраической системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^N C_i \frac{a_i \text{sh } a_i + b_i \text{ch } a_i}{b_i^2 - a_i^2} + L_N^{-1}(0) b_k^{-1} [B^0 + A^0 [1 + 2(b_k + 1) b_k^{-2} + 2 \sum_{i=1}^N (a_i^{-2} + b_i^{-2})]] = 0.$$

Постоянная B^0 определяется из условия $q(1) = 0$, оно имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^N C_i \text{ch}(a_i) + L_N^{-1}(0) \left[B^0 + A^0 \left[1 + 2 \sum_{i=1}^N (a_i^{-2} - b_i^{-2}) \right] \right] = 0.$$

Здесь $a_i = A_i \lambda^{-1}$, $b_i = B_i \lambda^{-1}$, $B^0 = \delta \Delta(0)$, $A^0 = 2a\beta \Delta(0)$.

Связь между вдавливающей силой и осадкой штампа определяется из условия равновесия штампа:

$$P = 2\pi a^2 \int_0^1 q(r) r dr.$$

Имеем

$$P_N^{\text{II}} = 4a^2 \left[-\frac{4}{3} \alpha \beta L_N^{-1}(0) \Delta(0) + \sum_{i=1}^N C_i (-\text{ch } a_i + a_i^{-1} \text{sh } a_i) \right].$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В численном эксперименте анализируется влияние немонотонного изменения по глубине модуля Юнга на напряженно-деформированное состояние покрытия и подложки при внедрении сферического индентора. Предполагается, что модуль Юнга изменяется по закону

$$E(z) = E_0 (1 + (m-1) \sin^2(kz\pi/2))^n, \quad z' = z/H, \quad k = 1, 2, 3; \quad n = \pm 1, \quad (2)$$

при этом рассмотрены случаи более жесткого $n = 1$ и менее жесткого $n = -1$ покрытия. Значение модуля Юнга может изменяться в m раз по сравнению с подложкой (в данном примере $m = 3.5$). На рис. 1 представлены шесть вышеописанных случаев изменения модуля Юнга по глубине в пределах неоднородного покрытия.

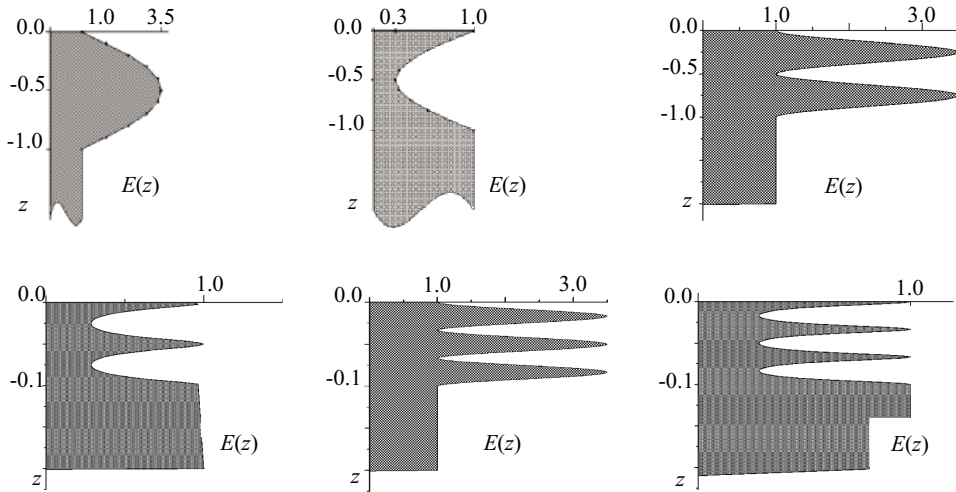
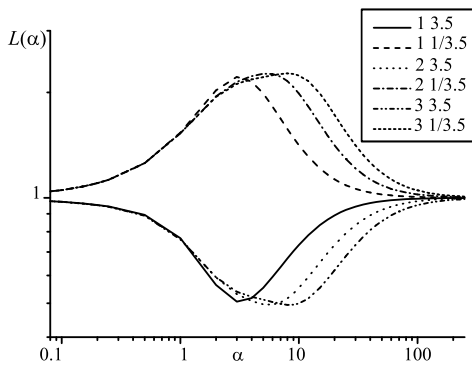


Рис. 1. Графики функций, описывающих изменение модуля Юнга по глубине

На рис. 2 представлены трансформанты ядер парного интегрального уравнения для этих случаев изменения механических свойств по глубине. Первая цифра в легенде графика указывает на параметр k закона неоднородности (2), а вторая — на отношение экстремального значения модуля Юнга в покрытии к его значению в подложке. Интересно отметить, что параметр k , отражающий степень изменчивости функции по глубине покрытия, не влияет на число вершин кривой, а приводит к сдвигу экстремума в область больших α .



Следует отметить, что графики трансформант ядер для законов $E(z)$ при $n = 1$, соответствующих более жестким покрытиям, расположены ниже прямой $L = 1$, а при $n = -1$ — выше. Графики приведены в логарифмической шкале, которая помогает отчетливо показать симметрию кривых, описывающих трансформанты ядер.

Рис. 2. Трансформанты ядер парного интегрального уравнения

Результаты численного эксперимента показывают, что для $k = 1$ ошибка лежит в пределах 4–5%, а для k большего единицы в пределах 10–11%. На рис. 3–5 приводятся графики трансформант ядер $L(\alpha)$, их аппроксимации $L_N(\alpha)$ и абсолютная погрешность аппроксимации для всех рассматриваемых в работе законов изменения модуля Юнга в покрытии. Кроме того, приводятся лейблы законов.

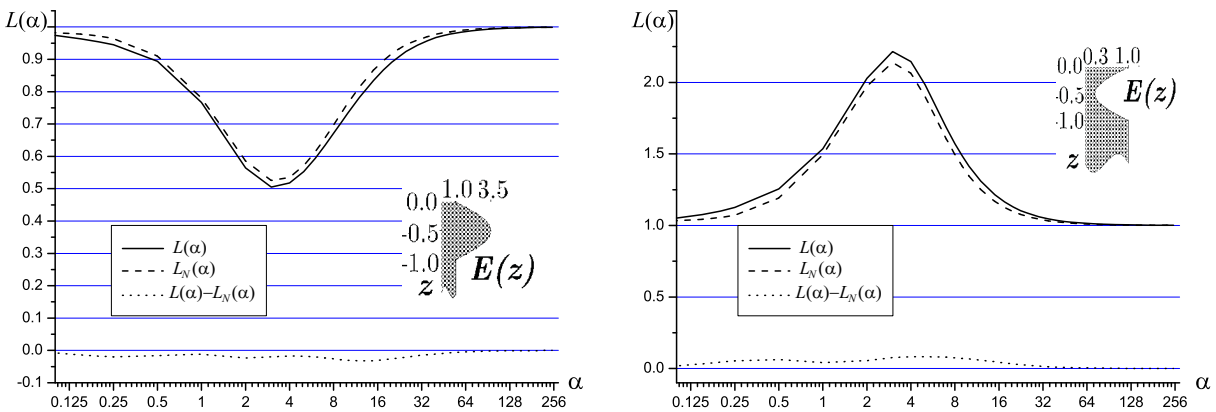


Рис. 3. Трансформанта ядра парного интегрального уравнения и ее аппроксимация ($k = 1$)

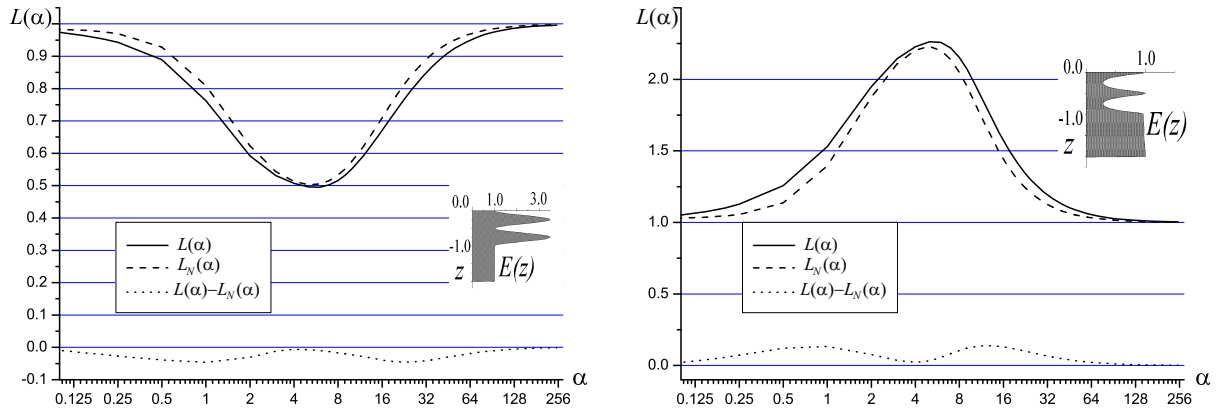


Рис. 4. Трансформанта ядра парного интегрального уравнения и ее аппроксимация ($k = 2$)

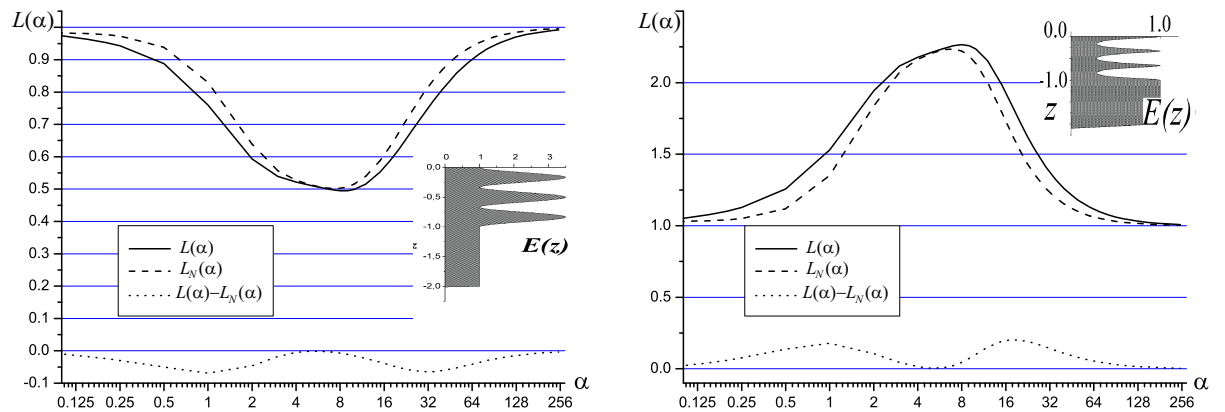


Рис. 5. Трансформанта ядра парного интегрального уравнения и ее аппроксимация ($k = 3$)

На рис. 6 представлены результаты расчета контактных напряжений для вышеперечисленных законов неоднородности свойств покрытий при изменении отношения зоны контакта к толщине неоднородного слоя от 0.1 до 5.1. Контактные напряжения для жестких и мягких покрытий различаются в разы, поэтому для сопоставления они приведены в нормированный вид, а именно отнесены к величине среднего давления на площадке контакта. Анализ графиков показывает, что наибольшие отклонения от распределения контактных напряжений, соответствующего однородному полупространству, наблюдаются для значений, близких к единице, то есть тогда, когда зона контакта сопоставима с толщиной неоднородного покрытия. Для малых и больших значений распределение контактных давлений мало отличается от однородного случая.

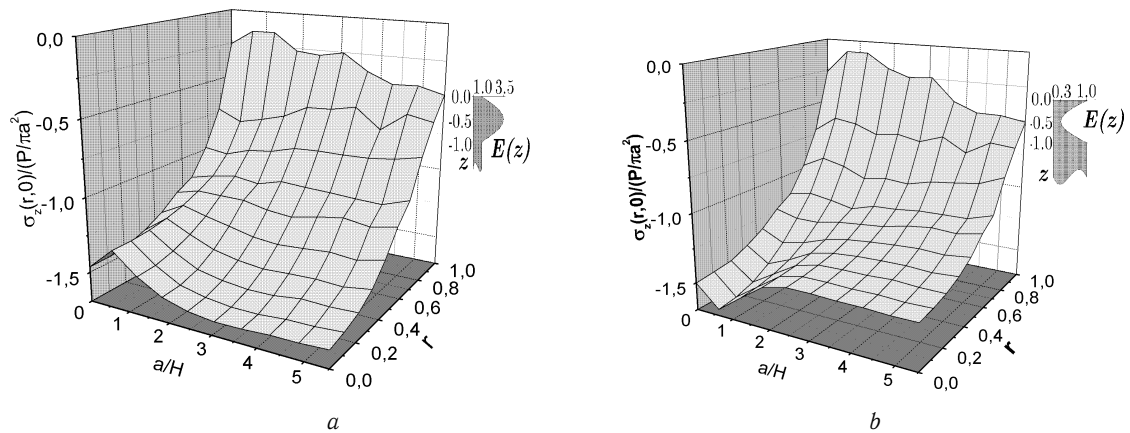


Рис. 6. Контактные напряжения

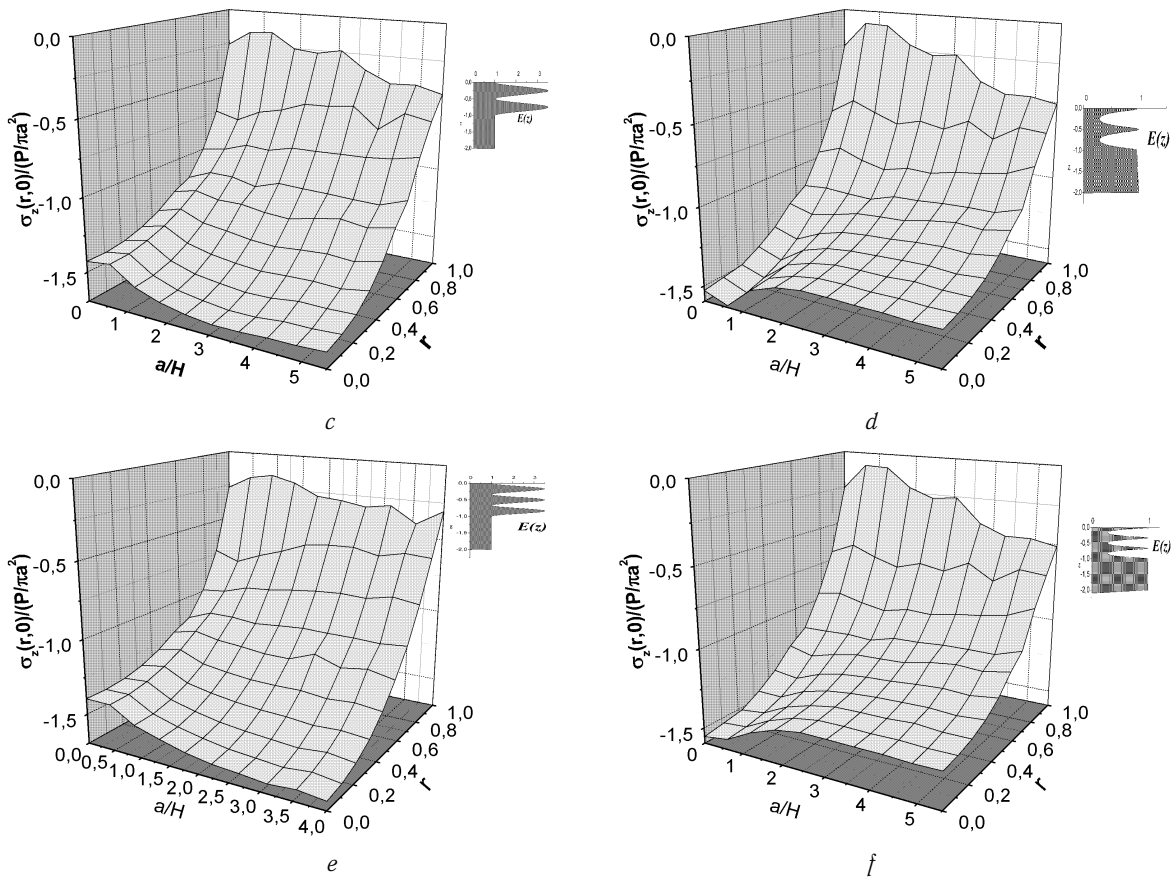


Рис. 6. Окончание

Для материалов с покрытием, используя метод индентирования, можно определить модуль упругости, актуальный для некоторой зоны контакта. Эту характеристику будем называть эффективным модулем или функцией жесткости неоднородного основания. При внедрении параболического штампа вид функции жесткости следующий: $E_W(a) = S(a) = \frac{3P}{4a\delta} \frac{1}{1-\nu^2}$ где a — радиус зоны контакта, δ — перемещение индентора. Для неоднородного материала функция жесткости, или эффективный модуль, является функцией безразмерного геометрического параметра $a/H = \lambda^{-1}$.

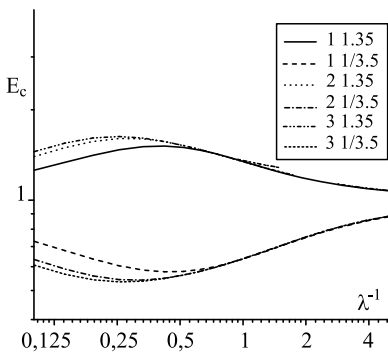


Рис. 7. Функции жесткости

На рис. 7 приведены значения функции жесткости для вышеописанных сочетаний законов изменения упругих параметров. Поведение кривых жесткости на графике подобно поведению трансформант, но изменяется направление выпуклости кривой, и с увеличением параметра закона неоднородности k точка экстремума кривой стремится к началу координат. При значениях больше единицы, то есть при зонах контакта больших толщины функционально-градиентного слоя, кривые практически неразличимы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-08-00730-а, 08-01-00003-а, 08-08-90033-Бел-а, 09-08-011410-а).

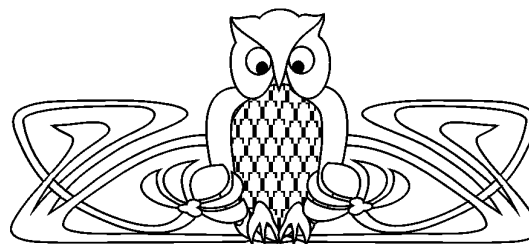
Библиографический список

1. Айзикович С.М. Сдвиг штампом упругого неоднородного полупространства специального вида // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 5. С. 74–80.
2. Айзикович С.М., Кренев Л.И., Трубочик И.С. Асимптотическое решение задачи о внедрении сферического индентора в неоднородное по глубине полупространство // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 107–117.



УДК 541.8

РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТЬ ЗЕРНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ НЕНАСЫЩЕННЫХ ПОЛИЭФИРОВ



Д.Е. Бессонов, Ю.П. Зезин*, Е.В. Ломакин

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет,
кафедра теории пластичности

*Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова
E-mail: denlandmex@yandex.ru, yuzezin@gmail.com,
lomakin@mech.math.msu.su

**Multimodulus Behavior of the Grained Composites on the Base
of Unsaturated Polyetheres**

D.E. Bessonov, Yu.P. Zezin, E.V. Lomakin

Lomonosov Moscow State University,
Chair of Theory of Plasticity;

*Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University
E-mail: denlandmex@yandex.ru, yuzezin@gmail.com,
lomakin@mech.math.msu.su

Представлены результаты исследования упругих свойств зернистого композита на основе ненасыщенных полиэфиров, предназначенного для замены природного камня в строительстве и машиностроении. Получены экспериментальные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона при растяжении и сжатии. Показано, что исследуемый композит проявляет существенную зависимость упругих характеристик от вида напряженного состояния. Для описания свойств материала предложено использовать простейший вариант теории упругости разномодульных изотропных материалов, основанной на обобщении классического упругого потенциала на случай зависимости упругих характеристик от вида напряженного состояния. Для исследуемого композита определены постоянные величины, входящие в определяющие соотношения теории. Показано, что принятые соотношения позволяют получить расчетные значения упругих характеристик материала при растяжении и сжатии, близкие к экспериментальным.

The results of the investigation of elastic properties of grained composite based on the unsaturated polyetheres were presented. This material was designed to substitute natural rocks in civil and mechanical engineering. The experimental values of elastic modulus and the Poisson's ratio under the tension and compression were obtained. It was shown that the investigated composite exhibits the dependence of elastic properties on the type of the stress state. It was suggested to use the simplest version of the theory of multimodulus isotropic materials in order to describe of the properties of these materials. This theory is based on the generalization of the classic isotropic potential for the case of the dependence of elastic properties on the type of the stress state. The parameters of the constitutive equations for the investigated composite were determined. The satisfactory correspondence between the values of the elastic deformation properties of the material calculated on the base of the considered constitutive equations and the experimental data was demonstrated.

Ключевые слова: композиционные материалы, композиты полимерные, механические свойства, растяжение, сжатие, упругость, разносопротивляемость, определяющие соотношения.

Key words: composite materials, polymeric composites, mechanical properties, tension, compression, elasticity, multimodulus behavior, constitutive equation.

ВВЕДЕНИЕ

Зернистые композиты на основе полимеров широко применяются в различных отраслях современной техники. По сравнению с традиционными металлами, бетоном, природным камнем полимерные композиты обладают рядом существенных преимуществ. Основным достоинством композитов является высокий уровень их удельных характеристик, высокая технологичность, значительно меньшая энергоёмкость производства элементов конструкций из этих материалов. Указанные преимущества в полной мере относятся и к относительно новому классу зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров, предназначенных для замены природного камня в строительстве и машиностроении [1]. Одна из перспективных областей применения подобных материалов — изготовление элементов оснований для оборудования нанотехнологий. В этом случае практически полное отсутствие радиационного фона, существенно влияющего на ряд процессов нанотехнологий, является решающим преимуществом композитов по сравнению с натуральным камнем.

Замена традиционных материалов на композиты всегда сопровождается значительным объемом исследований особенностей их механического поведения. До недавнего времени в научной литературе можно было найти лишь отрывочные сведения о механических характеристиках подобных компози-



тов. В работе [2] представлены результаты экспериментального исследования деформационных и предельных свойств зернистого композита на основе ненасыщенных полиэфиров, моделирующего фактуру и свойства натурального гранита. Определены упругие свойства, прочность и характеристики вязкости разрушения композита. Показано, что для нового материала характерна существенная зависимость свойств от вида напряженного состояния: модули упругости при растяжении и сжатии различаются на 30%, коэффициенты Пуассона при растяжении и сжатии также существенно различны. Другой особенностью механических свойств материала является низкая деформируемость: предельная деформация при сжатии достигает уровня 0,04%, а при растяжении — 0,5%. Эта особенность привела в работе [2] к значительным погрешностям при оценке коэффициента Пуассона. Для определения этой характеристики при растяжении и сжатии был использован тензометрический метод измерения продольной и поперечной деформаций с применением тензометрической станции СИИТ-2. Нагружение образца в процессе испытаний осуществлялось по ступенчатой программе, и показания прибора (значения деформаций) регистрировались последовательно. При такой методике в оценку коэффициента Пуассона вносилась дополнительная погрешность, связанная с заметным дрейфом нуля регистрирующего прибора, сопоставимым с малыми значениями измеряемых деформаций.

В связи с изложенным целью предлагаемой работы является уточнение значений коэффициента Пуассона композита путем применения современных цифровых средств измерения, позволяющих синхронно регистрировать значения продольной и поперечной деформаций в процессе испытаний, а также идентификация параметров модели для описания зависимости упругих свойств исследуемого материала от вида напряженного состояния.

1. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Исследуемый материал является зернистым композитом на основе полиэфирной смолы ARAPOL S280E, упрочненной гранулированным наполнителем в виде смеси карбоната кальция и карбоната магния. Плотность материала составляет 2000 кг/м^3 , прочность при растяжении 4,85 МПа, прочность при сжатии 74,5 МПа, значения модуля упругости при растяжении и сжатии 14000 и 18900 МПа соответственно [2].

Испытания материала на растяжение и сжатие проведены на установке Zwick Z-100 с постоянной скоростью относительного перемещения захватов $0,0008 \text{ мм/с}$. Для определения коэффициента Пуассона композита при растяжении и сжатии использован тензометрический метод измерения продольной и поперечной деформаций в процессе испытаний. В этом случае на поверхность образца в соответствующих направлениях наклеивались тензодатчики марки НВМ с сопротивлением 120 Ом. Датчики по полумостовой схеме подключались к цифровому тензоусилителю типа Spider-8. Выходной сигнал с усилителя подавался на персональный компьютер для регистрации и обработки экспериментальных данных. Таким образом, осуществлялось синхронное измерение продольной и поперечной деформации в процессе испытаний, что позволило значительно повысить точность определения коэффициента Пуассона.

Испытания на растяжение проведены на образцах в виде двойной лопатки. Общая длина образца составляла 200 мм, длина рабочей части 100 мм, ширина рабочей части 10 мм. Ширина концевой части образца, предназначенной для крепления в захватах испытательной машины, составляла 40 мм.

Испытания на сжатие проведены на призматических образцах с размерами поперечного сечения $17 \times 19 \text{ мм}$, высотой 60 мм. Образцы вырезались из пластин, полученных методом свободного литья [2].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

В процессе испытания осевая нагрузка, продольная и поперечная деформации синхронно регистрировались при помощи описанной тензометрической системы измерений с частотой 1 с^{-1} . Экспериментальные данные получали в виде таблицы значений измеряемых величин в зависимости от



времени. Для полного цикла испытания, включающего активное нагружение и разгрузку, исходная таблица представляла более двухсот значений зарегистрированных одновременно осевой силы и деформаций. В качестве примера в табл. 1 приведен фрагмент исходных экспериментальных данных для режима активного нагружения при сжатии.

Эти данные использовались для построения экспериментальной зависимости поперечной деформации от продольной, которая аппроксимировалась линейной зависимостью. Коэффициент пропорциональности между поперечной и продольной деформацией определяет значение коэффициента Пуассона материала. Примеры экспериментальных зависимостей поперечной деформации от продольной для растяжения и сжатия представлены на рис. 1 и рис. 2.

Таблица 1

Экспериментальные значения силы, продольной и поперечной деформаций

t, с	F, кг	$\varepsilon_{11}, \%$	$\varepsilon_{22}, \%$
25	-27	-0,00641	0,00216
35	-99	-0,02304	0,00826
45	-122,4	-0,02844	0,01032
55	-140,4	-0,03223	0,01186
65	-176,4	-0,03948	0,01459
75	-237	-0,05141	0,01922
85	-343,8	-0,0701	0,02663
95	-509,4	-0,09518	0,03811
105	-748,5	-0,12751	0,05388

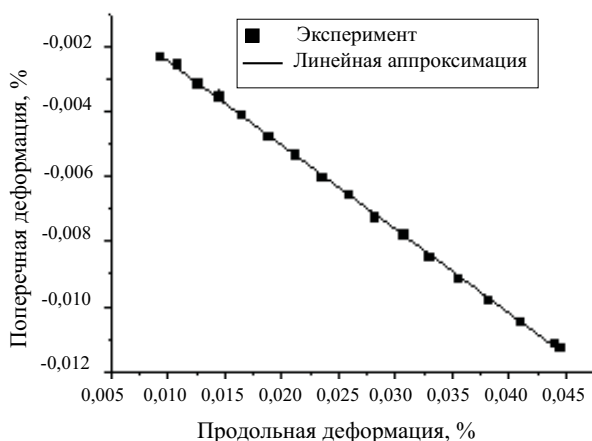


Рис. 1. Экспериментальная зависимость поперечной деформации от продольной при растяжении

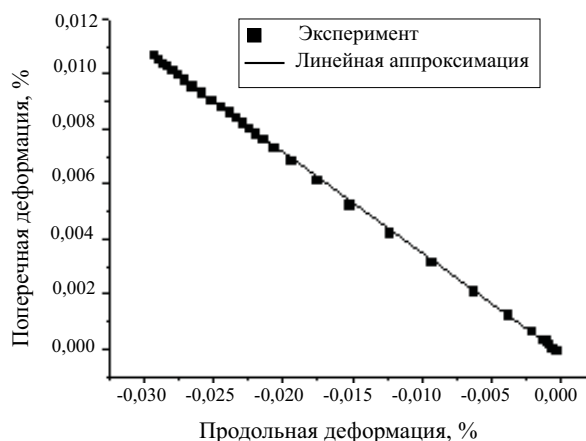


Рис. 2. Зависимость поперечной деформации от продольной в испытании на сжатие

Всего проведено 5 испытаний при сжатии и 5 испытаний при растяжении. Значения коэффициентов Пуассона представлены в табл. 2.

Средние значения коэффициента Пуассона при растяжении и сжатии составляют 0,276 и 0,398 соответственно. Статистические характеристики погрешностей измерений получены в соответствии с известными рекомендациями [3]. Для серии экспериментальных данных, представленных в табл. 2, получены следующие значения среднего квадратического отклонения: 0,06 для растяжения и 0,0225 для сжатия. Доверительные интервалы составляют 0,074 и 0,0278 для растяжения и сжатия соответственно. Существенное различие в значениях коэффициента Пуассона при растяжении и сжатии характерно для материалов с зависимостью свойств от вида напряженного состояния. Примером могут служить данные по графиту АРВ, для которого значения этой характеристики при растяжении и сжатии составляют 0,2 и 0,35 [4]. Обзор экспериментальных данных по механическим характеристикам разносопротивляющихся материалов различной природы представлен в работе [5].

Таблица 2

Экспериментальные значения коэффициента Пуассона, полученные по результатам испытаний на растяжение и сжатие

№	Растяжение	Сжатие
1	0,258	0,421
2	0,249	0,419
3	0,324	0,392
4	0,287	0,389
5	0,263	0,367
Среднее	0,276	0,398



3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Для описания упругого поведения исследуемого композита при различных видах напряженного состояния приняты соотношения теории упругости для изотропных разномодульных материалов [6–8], основанные на введении потенциала вида

$$\Phi = \frac{1}{2} [1 + \zeta(\xi)] (A + B\xi^2) \sigma_0^2, \quad (1)$$

где $\xi = \sigma/\sigma_0$; $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$; σ_{ij} — тензор напряжений; δ_{ij} — символ Кронекера; A и B — постоянные материала; $\sigma_0 = (\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij})^{1/2}$ — интенсивность напряжений; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ — девиатор напряжений. Отметим, что при $\zeta(\xi) = 0$ потенциал (1) совпадает с потенциалом для классического упругого тела.

С учетом (1) зависимость между деформациями ε_{ij} и напряжениями можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \omega(\xi) S_{ij} + \frac{1}{3} \Omega(\xi) \sigma \delta_{ij}, \quad (2)$$

где функции $\omega(\xi)$ и $\Omega(\xi)$ определяются соотношениями:

$$\omega(\xi) = -\frac{1}{2} \xi (A + B\xi^2) \zeta'(\xi) + A(1 + \zeta(\xi)),$$

$$\Omega(\xi) = \frac{1}{2\xi} \zeta'(\xi) (A + B\xi^2) + B(1 + \zeta(\xi)).$$

Примем $\zeta(\xi) = C\xi$. В работе [7] показано, что подобное упрощение приемлемо для многих практических задач по оценке напряженно-деформированного состояния элементов конструкций из разномодульных материалов. Для функций $\omega(\xi)$ и $\Omega(\xi)$ в этом случае получим:

$$\omega(\xi) = -\frac{1}{2} \xi (A + B\xi^2) C + A(1 + C\xi), \quad (3)$$

$$\Omega(\xi) = \frac{1}{2\xi} (A + B\xi^2) C + B(1 + C\xi). \quad (4)$$

Для идентификации постоянных материала, входящих в определяющие соотношения (1)–(4) используем результаты измерений продольной и поперечной деформации в испытаниях на растяжение и сжатие. Для одноосного растяжения можно записать: $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_1$, $\sigma_0 = \sigma_1$, $\xi = \frac{1}{3}$, $S_{11} = \frac{2}{3} \sigma_1$, $S_{22} = S_{33} = -\frac{1}{3} \sigma_1$, σ_1 — растягивающее напряжение, задаваемое в эксперименте. Далее после подстановки этих величин в соотношения (2)–(4) получим два уравнения для определения постоянных материала:

$$\frac{1}{E^+} = A \left(1 + \frac{1}{3} C \right) + \frac{1}{9} \left(1 + \frac{1}{3} C \right), \quad (5)$$

$$\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{1}{4} \left(A + \frac{1}{9} B \right) C + \frac{1}{2} A \left(1 + \frac{1}{3} C \right) + \frac{1}{9} B \left(1 + \frac{1}{3} C \right), \quad (6)$$

где E^+ и ν^+ — экспериментальные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона, полученные в испытаниях на растяжение.

Для случая одноосного сжатия параметры нагружения определяются следующими соотношениями: $\sigma = -\frac{1}{3} \sigma_1$, $\xi = -\frac{1}{3}$, $S_{11} = -\frac{2}{3} \sigma_1$, $S_{22} = S_{33} = \frac{1}{3} \sigma_1$, σ_1 — абсолютное значение сжимающего напряжения. Подстановка параметров нагружения в (2)–(4) и анализ соотношений для продольной и поперечной деформации приводит ко второй системе уравнений для определения постоянных материала:

$$\frac{1}{E^-} = A \left(1 - \frac{1}{3} C \right) + \frac{1}{9} B \left(1 - \frac{1}{3} C \right), \quad (7)$$

$$\frac{\nu^-}{E^-} = \frac{1}{4} \left(A + \frac{1}{9} B \right) + \frac{1}{2} A \left(1 - \frac{1}{3} C \right) - \frac{1}{9} B \left(1 - \frac{1}{3} C \right), \quad (8)$$



где E^- и ν^- — экспериментальные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона, полученные в испытаниях на сжатие.

Уравнения (5)–(8) позволяют получить выражения постоянных A и B через значения модулей упругости и коэффициентов Пуассона:

$$A = \frac{1}{3} \left(\frac{1 + \nu^+}{E^+} + \frac{1 + \nu^-}{E^-} \right), \quad B = \frac{3}{2} \left(\frac{1 - 2\nu^+}{E^+} + \frac{1 - 2\nu^-}{E^-} \right). \quad (9)$$

Подстановка экспериментальных величин модулей упругости и коэффициентов Пуассона в соотношения (9) дает следующие значения параметров A и B : $5,504 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$ и $6,419 \cdot 10^{-5}$ МПа $^{-1}$ соответственно. Постоянную C определим из уравнений (5) или (7). Оба уравнения дают одинаковое значение этой постоянной — 0,447. Из уравнений (6) и (8) получены расчетные значения коэффициента Пуассона при растяжении и сжатии, которые составляют 0,23 и 0,459 соответственно. Следует отметить, что расчетные значения вполне удовлетворительно согласуются с экспериментальными — 0,276 и 0,398.

ВЫВОДЫ

Получены экспериментальные оценки значений коэффициентов Пуассона при растяжении и сжатии для зернистого композита на основе ненасыщенных полиэфиров. Показано, что исследуемый композит проявляет существенную зависимость упругих характеристик от вида нагружения. Для описания свойств материала предложено использовать простейший вариант теории упругости разномодульных изотропных материалов, основанный на обобщении классического упругого потенциала на случай зависимости упругих характеристик от вида напряженного состояния. Дано описание метода определения характеристик зависимости свойств материала от условий нагружения. Для исследуемого композита получены значения параметров, входящих в определяющие соотношения теории. Показано, что принятые соотношения позволяют получить расчетные значения коэффициентов Пуассона материала при растяжении и сжатии, близкие к экспериментальным и лежат в полосе разброса экспериментальных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-08-00502).

Библиографический список

1. Мэтьюз Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. М.: Техносфера, 2004. 408 с.
2. Бессонов Д.Е., Ершова А.Ю., Зезин Ю.П., Мартиросов М.И., Рыбинский Л.Н. Экспериментальное исследование деформирования и разрушения зернистых композитов на основе полиэфирных смол // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14, № 1. С. 111–125.
3. Румицкий Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента: Справочное пособие. М.: Наука, 1971. 192 с.
4. Березин А.В., Ломакин Е.В., Строков В.И., Барбанов В.Н. Сопротивление деформированию и разрушение изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния // Проблемы прочности. 1979. № 2. С. 60–65.
5. Мясников В.П., Олейников А.И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. Владивосток: Дальнаука, 2007. 172 с.
6. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 6. С. 29–34.
7. Ломакин Е.В. Разномодульность композитных материалов // Механика композитных материалов. 1981. № 1. С. 23–29.
8. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения механики разномодульных материалов. Препринт № 159. М.: ИПМ АН СССР, 1980. 64 с.



УДК 539.3

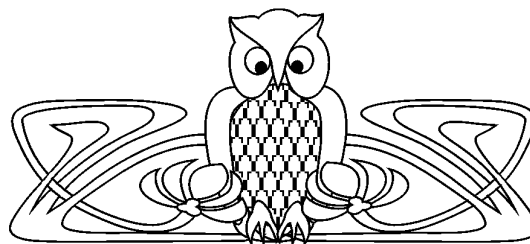
ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ

А.А. Буренин, В.Е. Рагозина, Ю.Е. Иванова

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН,
лаборатория механики деформируемого твердого тела
E-mail: burenin@iacp.dvo.ru, ragozina@vlc.ru, ivanova@iacp.dvo.ru

Одномерный процесс образования и последующего движения плоской поперечной ударной волны изучается на основе решений соответствующего нелинейного эволюционного уравнения. Данное уравнение определяет поведение решения в прифронтной области волнового процесса и следует из внутреннего ряда метода сращиваемых асимптотических разложений. Проводится сравнительный анализ переходных процессов деформаций изменения формы и объема и указываются их принципиальные отличия. В качестве модельных примеров рассматриваются решения ряда конкретных краевых задач динамического сдвигового деформирования.

Ключевые слова: нелинейная упругость, несжимаемость, ударная волна, метод возмущений, эволюционное уравнение.



The Evolutionary Equation for Wave Processes of the Shift Deformation

A.A. Burenin, V.E. Ragozina, Yu.E. Ivanova

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS,
Laboratory of a Deformable Solid Mechanics
E-mail: burenin@iacp.dvo.ru, ragozina@vlc.ru, ivanova@iacp.dvo.ru

One-dimensional process of formation and the subsequent motion of a flat cross shock wave is studied on the basis of solutions of the corresponding nonlinear evolutionary equation. This equation defines behaviour of the solution in front area of wave process and follows from interior lines of a method of matched asymptotic expansions. Comparative transient analysis of strains of a deformation and volume will be carried out and their basic differences are specified. In the capacity of model examples solutions of some concrete boundary value problems of a dynamic shift straining are observed.

Key words: nonlinear elasticity, incompressibility, shock wave, method of perturbations, the evolutionary equation.

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1–4], что нелинейные переходные процессы объемного деформирования при исключении факторов диссипации и дисперсии могут быть описаны на основе решений нелинейного эволюционного уравнения, называемого уравнением Хопфа, или уравнением квазипростых волн. Учет диссипации приводит к уравнению Бюргерса [3], включение дисперсии описывается уравнением Кортвега-де Вриза [3]. Прифронтная область плоской одномерной продольной ударной волны, движущейся в нелинейно упругой изотропной среде, определяется решением уравнения Хопфа [5]. Динамика сдвигового деформирования в отличие от объемного не имеет аналогий с газовой динамикой и является значительно менее изученным процессом. В общем случае в твердом теле нелинейные волновые процессы изменения объема и формы взаимосвязаны. Предположение о несжимаемости упругой среды позволяет выделить формоизменение как самостоятельное явление и рассматривать его независимо от предварительных объемных деформаций. В этом случае применение метода малого параметра приводит к эволюционному уравнению, отличному от уравнения Хопфа. Эти отличия на математическом уровне характеризуют различия механических процессов динамического объемного и сдвигового деформирования. С целью изучения таких отличий в статье рассматривается ряд краевых задач для наиболее простого примера плоской сдвиговой волны. Следует ожидать, что найденные при этом свойства решений будут проявляться и в задачах деформирования сжимаемых сред. Представляется полезным объединение метода малого параметра и варианта лучевого метода [6] для ударного деформирования с целью построения решений многомерных краевых задач.

1. ОБЩИЕ МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И РАССМАТРИВАЕМАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Замкнутая система уравнений, определяющих поведение нелинейно упругой изотропной несжимаемой среды в пространственной декартовой системе координат Эйлера x_1, x_2, x_3 , имеет вид

$$v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j},$$



$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), & \sigma_{ij} &= -p_0\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\ W &= (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \dots \\ I_1 &= \alpha_{ii}, & I_2 &= \alpha_{ij}\alpha_{ji}, & \dot{u}_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t}, & u_{i,j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u_i и v_i — компоненты вектора перемещений и вектора скорости, α_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера – Коши, $\rho = \text{const}$ — плотность среды, p_0 — добавочное гидростатическое давление, W — функция упругого потенциала, $\mu, a, b, \kappa, \theta, c, d, k$ — упругие модули среды, δ_{ij} — символ Кронекера. В формуле для потенциала W перед некоторыми слагаемыми выбран знак минус, исходя из знаков перед инвариантами I_1, I_2 , с тем, чтобы упругие модули были положительными. По повторяющемуся индексу в формулах (1) и далее проводится суммирование, многоточием обозначаем невыписанные слагаемые с более высоким порядком малости.

Система (1) как следствие интегральных законов сохранения имеет место всюду за исключением поверхностей сильных разрывов. При возникновении таких поверхностей на них необходимо учитывать дополнительные краевые условия — геометрические, кинематические и динамические условия совместности [7–8]:

$$\begin{aligned} [f_{,i}] &= \left[\frac{df}{dn} \right] n_i + a^{\alpha\beta} [f]_{, \alpha} x_{i,\beta}, & [f] &= -G \left[\frac{df}{dn} \right] + \frac{\delta[f]}{\delta t}, \\ [\rho(v_i n_i - G)] &= 0, & [\sigma_{ij}] n_j &= \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i], \\ \sigma_{ij}^+ [v_i] n_j &= \rho^+(v_j^+ n_j - G) \left\{ \frac{[v_i][v_i]}{2} + [e] \right\} - [q_j] n_j, \\ \frac{df}{dn} &= f_{,i} n_i, & x_{i,\alpha} &= \frac{\partial x_i}{\partial y^\alpha}, & a_{\alpha\beta} &= x_{i,\alpha} x_{i,\beta}, & a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} &= \delta_\gamma^\alpha, \\ [f] &= f^+ - f^-, & \frac{\delta f}{\delta t} &= \dot{f} + f_{,i} G n_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где n_i — компоненты единичной внешней нормали к ударной волне Σ , направленной в сторону ее распространения, G — скорость движения волны в направлении нормали, y^α ($\alpha = 1, 2$) — поверхностные координаты, e — плотность внутренней энергии, q_j — компоненты вектора теплового потока. Индексами «+» и «-» в системе (2) обозначены предельные значения разрывной величины, вычисленные перед и сразу за волной Σ . Под обозначением « f » понимаются компоненты любого тензорного поля в пространстве.

Далее рассматриваем полупространство $x_1 \geq 0$. В момент $t = 0$ на его граничной плоскости L ($x_1 = 0$) проводится динамическое сдвиговое нагружение, результатом которого считаем поле перемещений $u = u_2(x_1, t)$, $u_1 = u_3 = 0$. Считаем, что нагружение сразу либо впоследствии приводит к возникновению ударной волны. До момента $t = 0$ деформации в среде отсутствуют. Перемещения на границе — известные функции, так что

$$u|_{x_1=0} = g(t). \quad (3)$$

Если в формуле (3) $g'(0) \neq 0$, то ударная волна образуется сразу. В остальных случаях необходим дополнительный анализ. Как следует из систем (1), (2), скорость ударной волны зависит от ее интенсивности и предварительных деформаций [9]:

$$\begin{aligned} G &= C(1 + \beta(\gamma^2 - 3u_1^+ \gamma + 3(u_1^+)^2) + \dots)^{1/2}, & \gamma &= [u_{,1}], \\ \beta &= \frac{a + b + \kappa + d}{\mu}, & C^2 &= \mu \rho^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$



причем на этой волне должны быть выполнены краевые условия:

$$[u]_{\Sigma} = 0, \quad [\sigma_{11}]_{\Sigma} = 0. \quad (5)$$

Для рассматриваемой задачи из общей системы уравнений (1) получим следующую систему уравнений движения:

$$u_{,11}(1 + 3\beta u_{,1}^2) + \dots = \ddot{u}C^{-2} + \dots, \quad (6)$$

$$\mu^{-1}p_{,1} = 2\alpha u_{,1}u_{,11} + \dots, \quad \alpha = \frac{a - b - \kappa/4}{\mu} - 1.$$

Отметим, что основной интерес при решении связан с определением поля перемещений, так как определить по найденным перемещениям функцию p не представляет труда. Интегрирование нелинейного дифференциального уравнения второго порядка проведем на основе метода сращиваемых асимптотических разложений.

2. МЕТОД СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО СДВИГОВОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

С целью применения метода возмущений определим новые безразмерные переменные:

$$s = \frac{x_1}{CT}, \quad m = \frac{t}{T}, \quad w(s, m) = \frac{u(x_1, t)}{CT} \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (7)$$

где T — характерное время задачи. Считаем, что за такое время возникающие на границе перемещения много меньше, чем проходимое волной в линейном приближении расстояние, что и определяет появление малого параметра задачи. Если $g'(0) \neq 0$, то таким параметром может быть величина $\varepsilon = g'(0)C^{-1}$. В новых переменных из системы (6) для поля перемещений получим

$$w_{,ss}(1 + 3\beta\varepsilon^2 w_{,s}^2) + \dots = w_{,mm} + \dots$$

От условия (3) перейдем к условию $w|_{s=0} = f(m)$. Искомую функцию $w(s, m)$ представим асимптотическим рядом по четным степеням малого параметра:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k}(s, m)\varepsilon^{2k} \approx w_0(s, m) + \varepsilon^2 w_2(s, m) + \varepsilon^4 w_4(s, m) + \dots$$

Относительно неизвестных функций $w_0, w_2, w_4 \dots$ получаем краевую задачу, не учитывающую условия (5) и (4). Ее решение назовем внешним разложением [10], оно определяется методом последовательных линейных приближений:

$$w(s, m) = f(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\beta}{2} (f'(\xi))^3 s + \varepsilon^4 \beta^2 \left\{ \frac{9}{8} (f'(\xi))^4 f''(\xi) (s^2 + s\xi - s) - \frac{39}{40} (f'(\xi))^5 s \right\} + \dots, \quad (8)$$

$$\xi = m - s.$$

Отметим, что при определении ряда (8) можно формально учесть условия (4), (5), записанные в переменных s, m , что приведет к такому же результату. В любом случае, если есть ударная волна, то ее скорость G больше C , поэтому в прифронтной области, где $m - s < 0$, решение (8) неприменимо, так как f определена для неотрицательного аргумента.

Построение дополнительного, внутреннего [10] решения в прифронтной области необходимо провести для переменной $s \sim \varepsilon^{-2}$, тогда ряд (8) теряет равномерность. Это приводит к внутренним переменным $n = \varepsilon^2 s, p = s - m, w = w(n, p)$. В таких переменных от уравнения (6) переходим к уравнению

$$(w_{,pp} + 2\varepsilon^2 w_{,pn} + \varepsilon^4 w_{,nn}) \{1 + 3\beta\varepsilon^2 (w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n})^2\} + \dots = w_{,pp}, \quad (9)$$



а из формулы (4) и уравнения эйконала $t = \int_{x_1^0}^{x_1} G(\zeta) d\zeta$ (x_1^0 — начальная координата образования ударной волны) следует

$$(1 - \varepsilon^2 p'(n))^2 \{1 + \beta \varepsilon^2 (w_{,p}^+ + \varepsilon^2 w_{,n}^+)^2 + (w_{,p}^+ + \varepsilon^2 w_{,n}^+)(w_{,p}^- + \varepsilon^2 w_{,n}^-) + (w_{,p}^- + \varepsilon^2 w_{,n}^-)^2 + \dots\} = 1, \quad (10)$$

где $p(n)$ — неизвестная функция, определяющая положение переднего фронта ударной волны. Предварительные деформации считаем величинами одного порядка малости с решением за волной. Новую неизвестную функцию $w(n, p)$, как и функцию $p(n)$, представим асимптотическими рядами вида

$$w(n, p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k} \varepsilon^{2k} \approx w_0(n, p) + \dots, \quad p(n) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k} \varepsilon^{2k} \approx p_0(n) + \dots \quad (11)$$

В результате подстановки ряда для $w(n, p)$ в уравнение (9) в нулевом шаге метода получим

$$v_{0,n} + \frac{3\beta}{2} v_0^2 v_{0,p} = 0, \quad v_0 = w_{0,p}. \quad (12)$$

Это уравнение определяет основное поведение решения в прифронтной области волнового процесса. По своему типу оно должно быть отнесено к эволюционным уравнениям, поскольку отражает нелинейную зависимость характеристик от строящегося решения, тем самым давая возможность описания процесса опрокидывания исходного непрерывного решения с формированием ударной волны. Отличие этого уравнения от уравнения Хопфа является зависимость угла наклона характеристик от квадрата функции v_0 , а не от ее первой степени. Такое простое математическое обстоятельство указывает на различия в появлении и движении объемных и сдвиговых ударных волн. Как будет следовать из дальнейшего, на основе уравнения (12) и его решений можно рассматривать различные вопросы, от кинематики ударной волны до определения поля перемещений в области деформирования.

3. ФОРМИРОВАНИЕ И КИНЕМАТИКА СДВИГОВОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Непрерывное решение уравнения (12) будет удобным представить в параметрическом виде вдоль характеристик:

$$v_0 = h(y), \quad y = p - \frac{3\beta}{2} n h^2(y), \quad y \leq 0, \quad (13)$$

где $h(y)$ — функция, конкретный вид которой определяется краевыми условиями. Здесь такие условия задаются в пограничной для внешнего и внутреннего решений области, где $l = \varepsilon^k s$, $0 < k < 2$. На структуре краевого условия для нулевого шага при этом отразится только вид функции $f(m)$, поэтому можно считать $h(y) = -f'(-y)$. Из уравнения (13) следует, что росту функции $h(y)$ должно отвечать пересечение характеристик. В пределах выбранной модели твердого тела однозначность решения сохраняется за счет определения поверхности разрывов функции $v_0(n, p)$. Появление такой поверхности определяется наименьшим из возможных значений переменной n , для которых обращаются в бесконечность производные $v_{0,p}$ и $v_{0,n}$ гладкого решения. Для этих производных имеем:

$$v_{0,n} = -\frac{3\beta}{2} \frac{h^2 h'}{1 + 3\beta h h' n}, \quad v_{0,p} = \frac{h'}{1 + 3\beta h h' n}, \quad h' = \frac{dh(y)}{dy}, \quad (14)$$

поэтому наименьшее значение и должно отвечать максимуму $|hh'|$, причем необходимо выполнение условия $hh' < 0$. Здесь также сразу отметим, что координата образования разрыва не уточняется последующими шагами метода, поскольку их уравнения имеют такие же характеристики, как и уравнение (12).

Для определения кинематики ударной волны в нулевом приближении из уравнений (10) и (11) получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dp_0(n)}{dn} = \frac{\beta}{2} ((v_0^+)^2 + v_0^+ v_0^- + (v_0^-)^2) + \dots, \quad v_0^\pm = w_{0,p}^\pm(n, p_0(n)). \quad (15)$$



Его решение представим на основе подхода, изложенного в [4] для уравнения Хопфа. Суть его состоит в том, что при условии существования обратной к h функции $H = h^{-1}$, выбрать на ударной волне в качестве основной независимой переменной величину v_0^- . Для ударной волны известно, что в каждый момент ее существования наряду с уравнением (15) к ней с двух сторон подходят характеристики, вдоль которых

$$p = \frac{3\beta}{2}(v_0^+)^2 n + H(v_0^+), \quad p = \frac{3\beta}{2}(v_0^-)^2 n + H(v_0^-). \quad (16)$$

Из уравнений (15), (16) легко получить систему

$$\frac{dn}{dv_0^-} \left\{ \frac{(v_0^+)^2}{2} + \frac{v_0^+ v_0^-}{2} - (v_0^-)^2 \right\} = 3v_0^- n + \frac{1}{\beta} \frac{dH(v_0^-)}{dv_0^-},$$

$$H(v_0^+) - H(v_0^-) = \frac{3\beta}{2} n ((v_0^-)^2 - (v_0^+)^2),$$

которая будет замкнутой относительно функций $v_0^+(v_0^-)$ и $n(v_0^-)$. Она допускает точные аналитические решения в ряде случаев. К примеру, если ударная волна формируется в передней части исходного возмущения и $v_0^+ \equiv 0$, то общее решение можно представить в виде

$$n(v_0^-) = \frac{1}{(v_0^-)^3} \left\{ -\frac{1}{\beta} \int_{v^*}^{v_0^-} \zeta \frac{dH(\zeta)}{d\zeta} d\zeta + n^*(v^*)^3 \right\}, \quad (17)$$

где n^* и $v^* = v_0^-(n^*)$ — значения переменных, от которых идет развитие разрыва, либо начальная точка для повторно ставящейся задачи Коши при условии, что $H(v_0^-)$ представима несколькими ветвями функции. Подстановка найденной функции (17) во второе из уравнений (16) позволяет определить положение фронта ударной волны в параметрическом виде. Такие решения интересны в случае, когда необходимо проследить за состоянием на ударной волне, не обращаясь к решению в остальной области. Получаемая при этом информация может быть полезной при разработке численных схем с выделением поверхностей разрывов. Также данные, получаемые из формулы (17), можно использовать как информацию о разрывах производных первого порядка и включать в схемы лучевых рядов [11–13] для определения последующих разрывов.

Рассмотрим ряд примеров краевых условий для общего решения (17). Во-первых, остановимся на случае, когда $[v_0]_{t=0} \neq 0$. Наиболее простой вид имеет условие $h(y) = A + By$, для которого $A \neq 0$, а знак B определяет рост либо спад нагрузки на границе. В этом случае $v_0^+ \equiv 0$, $v_0 = v_0^-$ и из формулы (17) получаем

$$n = -\frac{1}{2\beta B v_0} + \frac{A^2}{2\beta B v_0^3}.$$

Для экспоненциального затухания нагрузки, при котором $h(y) = Ae^y$, также получим

$$n = \frac{1}{\beta v_0^2} \left(-1 + \frac{A}{v_0} \right).$$

В этих случаях отличия от распространения объемного деформирования носят не столько качественный, сколько количественный характер. В обоих случаях с ростом переменной n величина v_0 асимптотически приближается к нулю. Далее рассмотрим случай краевого условия в виде полуокружности, рассмотренного в [4] для уравнения квазипростых волн: $h^2 + (y + A)^2 = A^2$, $h \leq 0$. Для объемной волны такое условие за счет вертикальной касательной при $y = 0$ приводит к мгновенному возникновению ударной волны, но с нулевым скачком в начале. Для сдвигового деформирования ударная волна также возникает при значении параметра $y = 0$, но от расстояния $n = (3\beta A)^{-1}$, которое определяется как свойствами среды, так и максимумом нагрузки на границе. В этом случае решение состоит из двух ветвей. При росте модуля интенсивности от 0 до A из формулы (17) получим решение

$$n(v_0) = -\frac{\sqrt{A^2 - v_0^2}}{2\beta v_0^2} + \frac{A^2}{2\beta v_0^3} \arcsin \frac{v_0}{A},$$



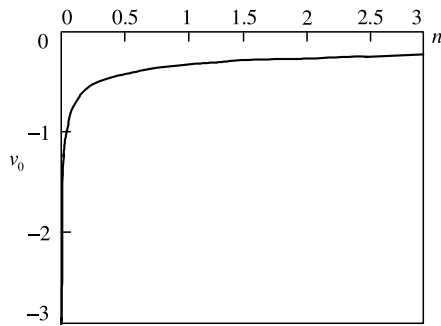
справедливое в области $(3\beta A)^{-1} \leq n \leq \pi(4\beta A)^{-1}$ и $-\pi/2 \leq y \leq 0$. Дальнейшее поведение определяется функцией

$$n(v_0) = \frac{A^2}{2\beta v_0^2} \left\{ \frac{-\pi}{v_0} + \frac{\sqrt{A^2 - v_0^2}}{A^2} - \frac{1}{v_0} \arcsin \frac{v_0}{A} \right\}, \quad n \geq \frac{\pi}{4\beta A}.$$

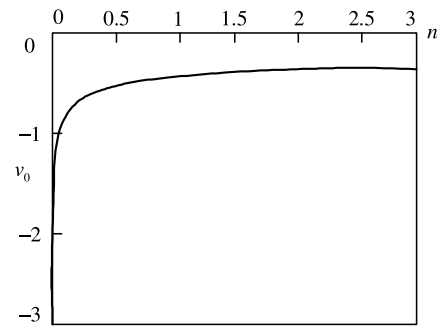
Для синусоидального затухания функции $h(y) = A \sin y$, $A > 0$ в случае процесса объемного деформирования наибольший из углов наклона касательной к функции $h(y)$ для значения $y = 0$ обеспечивает формирование ударной волны в передней части возмущения, так что $v_0^+ = 0$. Для сдвигового деформирования самое раннее обращение в бесконечность производных $v_{0,n}$ и $v_{0,p}$ в формулах (14) происходит при $y = -\pi/4$. Это означает, что ударная волна возникает внутри возмущенной области и для построения решения на волне необходимо рассматривать систему уравнений (15) и (16). Из нее после несложных преобразований следует система

$$\frac{dv^\pm}{dn} = \frac{\beta}{2} \left\{ (v^\pm)^2 + v^+v^- - 2(v^\pm)^2 \right\} \frac{1}{3\beta v^\pm n + \frac{dH(v^\pm)}{dv^\pm}}.$$

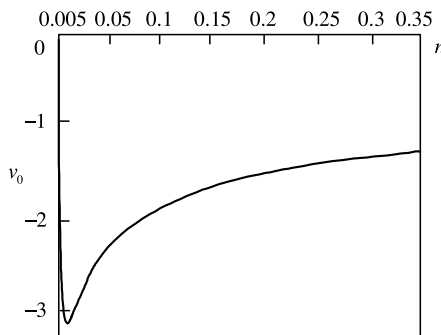
В нашем случае здесь $H(v^\pm) = \arcsin \frac{v^\pm}{A}$, для $v^- > -A$, т.е. до характеристики, где $y = -\frac{\pi}{2}$. При $-\frac{\pi}{2} \leq y < -\pi$ считаем $H(v^-) = -\pi + \arcsin(-\frac{v^-}{A})$. Разрыв начинается существование от значения $v^- = v^+ = -\frac{A}{\sqrt{2}}$, $[v] = 0$ в точке $n^* = \frac{2}{3\beta A^2}$. Ударная волна идет по области предварительных деформаций и затем выходит в недеформированную область. Отметим, что если не ограничиваться значениями $-\pi \leq y \leq 0$ (одиночным импульсом), то образование повторной ударной волны произойдет для $y = -\frac{5\pi}{4}$ и $n^* = \frac{2}{3\beta A^2}$, т.е. эта волна образуется раньше, чем для объемного деформирования, а координата образования повторного разрыва не зависит от предварительных деформаций. На рисунке приведены данные численных расчетов для перечисленных краевых условий.



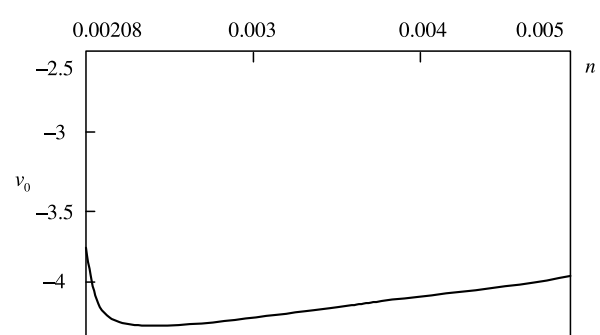
а



б



в



г

Зависимость интенсивности ударной волны v_0 от пространственной координаты n : а – линейно затухающий импульс на границе $h(y) = A_1 + B_1 y$; б – экспоненциальное затухание нагрузки на границе $h(y) = A_2 e^y$; в – нагружение по дуге окружности от 0 до $L = -\sqrt{-y^2 - 2A_3 y}$; г – синусоидальная нагрузка $h(y) = A_4 \sin y$. Значения констант при счете: $A_1 = -3$, $B_1 = -4$, $A_2 = -3$, $A_3 = 3$, $A_4 = 4$, $\beta = 20$



Рассмотренные варианты поведения исходных импульсов на ударной сдвиговой волне показывают как количественные, так и качественные отличия этого процесса от распространения объемных волн.

4. ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО РЕШЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ

Ранее [14] решения эволюционных уравнений для задач ударного деформирования в твердом теле рассматривались в пределах квадратичных либо линейных функций времени для перемещений на нагружаемой поверхности. Рассмотрим подход, позволяющий применить метод сращиваемых асимптотических разложений с решением уравнения (12) для произвольных функций времени, задающих краевые условия. С этой целью заметим, что уравнение (12) имеет общее решение вдоль характеристик вида

$$v_0 = F \left(p - \frac{3\beta}{2} n v_0^2 \right), \quad (18)$$

где F — произвольная функция, определяемая краевыми условиями. На уравнение (18) также можно смотреть как на соотношение

$$w_{0,p} = F \left(p - \frac{3\beta}{2} n w_{0,p}^2 \right), \quad (19)$$

которое по типу может быть отнесено к обыкновенным дифференциальным уравнениям, не содержащим искомой функции $w_0(n, p)$ (так как переменная n играет здесь роль параметра). Для таких уравнений задача интегрирования распадается на два варианта. В первом необходимо, чтобы функция F допускала явное представление производной $w_{0,p}(n, p)$ с последующим интегрированием полученного уравнения. Это возможно, если функция F имеет вид некоторых алгебраических либо рациональных уравнений. Второй способ более универсален и связан с параметрическим представлением решения. Остановимся на нем более подробно. Предположим, что $w_{0,p} = \psi(\delta)$, $p = \varphi(\delta, n)$, где δ — новый параметр, выбор которого достаточно произволен и связан с удобством представления краевых условий. Функции $\psi(\delta)$ и $\varphi(\delta, n)$ связаны между собой, как следует из уравнения (19). Тогда для определения функции $w_0(n, p)$ получим уравнение

$$dw_0 = \psi(\delta, n) \frac{\partial \varphi(\delta, n)}{\partial \delta} d\delta,$$

интегрирование которого дает параметрическое решение:

$$\begin{cases} w_0(n, p) = w_0(n, p(\delta, n)) = W_0(\delta, n), \\ p = p(\delta, n), \end{cases}$$

В качестве примера для такого способа рассмотрим краевое условие

$$u(t)|_{x_1=0} = -\frac{A}{\beta_0} (1 - e^{\beta_0 t}), \quad A > 0, \quad \beta_0 < 0,$$

ему соответствует экспоненциальное затухание начального импульса A до 0. В переменных (7) внешней области переходим к краевому условию

$$w(s, m)|_{s=0} = B^{-1} (1 - e^{-Bm}), \quad B = -\beta_0 T, \quad \varepsilon = \frac{A}{C}.$$

Предположим, что $v_0 = \psi(\delta)$, $-\infty < \delta \leq 0$. Тогда $p = \varphi(\delta) = \frac{\delta}{B} + \frac{3\beta}{2} n e^{2\delta}$, поэтому

$$\begin{cases} W_0(n, \delta) = -\frac{e^\delta}{B} - \beta n e^{3\delta} + K_0(n), \\ p = p(\delta, n) = \frac{\delta}{B} + \frac{3\beta}{2} n e^{2\delta}, \end{cases} \quad (20)$$



где $K_0(n)$ — неопределенная функция, которую можно определить из условия на переднем фронте ударной волны:

$$w(n, p)|_{\Sigma} = 0. \quad (21)$$

Для определения положения ударной волны на нулевом шаге метода необходимо решить уравнение

$$\frac{dp}{dn} = \frac{\beta}{2} v_0^2(n, p(n)), \quad (22)$$

но

$$\frac{dp}{dn} = \frac{\partial \varphi(n, \delta)}{\partial n} + \frac{\partial \varphi(n, \delta)}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dn},$$

поэтому теперь ищем не функцию $p(n)$, а функцию $\delta(n)$ или обратную к ней. При этом получаем уравнение

$$\frac{dn(\delta)}{d\delta} = -3n - \frac{1}{\beta B} e^{-2\delta}$$

и на основе его решения с учетом начальных условий $n(0) = 0$ записываем для ударной волны:

$$\begin{cases} n(\delta) = \frac{1}{\beta B} \{e^{-3\delta} - e^{-2\delta}\}, \\ p(\delta) = \frac{\delta}{B} + \frac{3}{2B} \{e^{-\delta} - 1\}. \end{cases}$$

Полученные формулы позволяют определить неизвестную функцию $K_0(n) \equiv 0$. При сращивании с внешним рядом (8) в пограничной области получаем, что построенное решение (20) отвечает двум шагам внешнего ряда. Этим и заканчивается решение для нулевого шага. Не представляют дополнительных трудностей другие краевые условия типа логарифмических или тригонометрических функций.

Возвращаясь к эволюционному уравнению (12) и его решениям (19), рассмотрим еще несколько примеров, позволяющих оценить влияние нелинейности (даже слабой) на искомое решение. Остановимся на краевых условиях, позволяющих строить решение в координатах n, p . Для начала рассмотрим функцию $g(t) = v_0 t + at^2/2$, $v_0 \neq 0$. Для нее краевое условие в переменных m, s принимает вид

$$w|_{s=0} = m + \frac{Am^2}{2}, \quad A = \frac{a\Gamma}{v_0}, \quad \varepsilon = \frac{v_0}{C}. \quad (23)$$

Внешнее решение определяется подстановкой условия (23) в ряд (8) и поэтому подробно не рассматривается. Для внутреннего решения примем

$$v_0(n, p) = B_1 + B_2 \left(p - \frac{3\beta}{2} v_0^2 n \right), \quad (24)$$

где B_1, B_2 — неопределенные константы, которые определяются при сопоставлении внутреннего и внешнего решений. Из формулы (24) получаем

$$\begin{aligned} v_0(n, p) &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(B_1 + B_2 p)B_2 \gamma_0 n}}{2\gamma_0 B_2 n}, \quad \gamma_0 = \frac{3\beta}{2}, \\ w_0(n, p) &= \frac{-6B_2^2 \gamma_0 n p + (1 + 4(B_1 + B_2 p)B_2 \gamma_0 n)^{3/2}}{12\gamma_0^2 B_2^3 n^2} + \varphi_0(n), \end{aligned} \quad (25)$$

где $\varphi_0(n)$ — неизвестная функция, определяемая из условия (21). Из формул (25) следует, что нелинейность задачи приводит к искажению исходного воздействия, так что зависимость от времени изменяется от квадратичной до содержащей степени $3/2$ и 1 . Отметим, что сходное краевое условие для задачи объемного деформирования приводит к прифронтному решению, практически повторяющему краевое условие с учетом слабого затухания по переменной n . Этот эффект указывает как на



влияние нелинейности, так и на отличие сдвиговой волны от объемной. Отметим, что применение правила Лопиталья к формулам (25) приводит к предельным результатам:

$$\lim_{n \rightarrow 0} v_0(n, p) = B_1 + B_2 p, \quad \lim_{n \rightarrow 0} w_0(n, p) = B_1 p + \frac{B_2 p^2}{2}, \quad (26)$$

которыми можно по непрерывности доопределить решение в нуле. Тем самым видно, что исходное воздействие передается по среде неискаженным только при $n \sim 0$. Из сравнения формул (26) с внешним решением следует $B_1 = -1$, $B_2 = A$. Положение волнового фронта определяется на основе уравнения (22) и может быть представлено неявной зависимостью

$$\left(\sqrt{1 + 4A\gamma_0 n(-1 + Ap)} - 1 \right) \sqrt{2\sqrt{1 + 4A\gamma_0 n(-1 + Ap)} + 1} = -2\sqrt{3}\gamma_0 A n,$$

которая после ряда алгебраических преобразований дает кубическое уравнение для функции $p(n)$. Корень этого уравнения, отвечающий поставленной задаче:

$$p(n) = \begin{cases} \frac{\left(\cos^2 \frac{\varphi}{3} - \frac{3}{4} \right) \left(\cos^2 \frac{\varphi}{3} + \frac{1}{4} \right) + A\gamma_0 n}{A^2 \gamma_0 n}, & \cos \varphi = -2\sqrt{3}\gamma_0 A n, \quad \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (n = 0). \end{cases}$$

Отсюда легко определяется функция $\varphi_0(n)$, что и заканчивает решение данного шага.

Теперь рассмотрим краевое условие

$$u(x_1, t)|_{x_1=0} = \sqrt{at + b} - \sqrt{b}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

От него в переменных s, m , $w(s, m)$ переходим к условию

$$w|_{s=0} = \frac{m}{\sqrt{Am + 1} + 1}, \quad A = \frac{aT}{b}, \quad \varepsilon = \frac{a}{C\sqrt{b}}.$$

Для такого условия и внешнего решения в уравнении (18) достаточно выбрать

$$v_0(n, p) = -\frac{1}{2\sqrt{1 - D(p - \gamma_0 v_0^2(n, p)n)}},$$

где D — неопределенная константа. Отсюда следует явное решение

$$v_0(n, p) = -\sqrt{\frac{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}}{2D\gamma_0 n}},$$

$$w_0(n, p) = -\frac{1}{3D\sqrt{2D\gamma_0 n}} \left(\sqrt{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}} \right)^3 +$$

$$+ \sqrt{\frac{\gamma_0 n}{2D}} \frac{1}{\sqrt{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}}} + \varphi_0(n),$$

которое также показывает искажение исходного воздействия (меняется тип зависимости от времени).

Для определения положения ударной волны необходимо проинтегрировать уравнение Дарбу:

$$\frac{dg}{dn} = \frac{g}{3n} \left(1 + \frac{2D\gamma_0 n}{g^2 + D\gamma_0 n} \right), \quad g = -1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}.$$

Его решение с учетом краевого условия $\lim_{n \rightarrow 0} p(n) = 0$ имеет вид неявной зависимости

$$-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n} = \ln \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}}} \right\} +$$



$$+ \frac{3D\gamma_0}{2} \frac{n}{-1 + Dp + \sqrt{(1 - Dp)^2 + D\gamma_0 n}} - 3 - \ln \sqrt{\frac{2}{D\gamma_0}}.$$

На основании этого уравнения функция $\varphi_0(n)$ может быть определена каким-либо численным методом. Эта задача показывает, что решения в явном виде имеют наряду с достоинствами и ряд отрицательных свойств. В частности, нет гарантии, что на каждом этапе вычислений будем получать результаты в необходимой, удобной для нас форме.

Рассмотрим также еще один вариант краевого условия

$$u|_{x_1=0} = \frac{4A}{5} t^{5/4}, \quad (27)$$

интересный тем, что функция $(g'(t))^2$ имеет вертикальную касательную в нуле, что приводит к возникновению ударной волны мгновенно, но при этом ее интенсивность изменяется от нуля. Условие (27) в безразмерных переменных имеет вид

$$w(s, m)|_{s=0} = \frac{4}{5} m^{5/4}, \quad \varepsilon = \frac{AT^{1/4}}{C},$$

поэтому во внутреннем решении выберем $v_0 = -(-p + \gamma_0 n v_0^2)^{1/4}$, откуда получаем

$$v_0(n, p) = -\sqrt{\frac{\gamma_0 n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}}}, \quad (28)$$

$$w_0(n, p) = \frac{4}{5} \left(\frac{\gamma_0 n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}} \right)^{5/2} - \frac{2\gamma_0 n}{3} \left(\sqrt{\frac{\gamma_0 n}{2} + \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}}} \right)^3 + \varphi_0(n),$$

где $\varphi_0(n)$ — как обычно, неопределенная функция. Это решение для поля перемещений показывает как исходную зависимость от t в степени $5/4$, так и дополнительную зависимость от степени $3/4$, которая начинает влиять на решение на больших расстояниях (при $n \sim 1$). Для определения положения переднего фронта ударной волны решаем уравнение

$$\frac{dg}{dn} = \frac{\gamma_0^2 n}{6g} - \frac{\gamma_0}{6}, \quad g = \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}},$$

которое также является вариантом уравнения Дарбу. Интересно, что в этом случае решение задачи Коши $g(0) = 0$ совпадает с одним из особых решений. При этом получаем параболическую зависимость $p = \frac{5}{36} \gamma_0^2 n^2$, ее подстановка в решение (28) приводит к простому результату $\varphi_0(n) = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в статье примеры решения ряда краевых одномерных задач об ударном нагружении несжимаемого полупространства показывают высокую эффективность описания волновых процессов в твердом теле на основе решений соответствующего эволюционного уравнения. Методика, описанная в статье, без труда переносится на одномерные задачи объемного ударного деформирования, которые в прифронтной области ударной волны решаются на основе эволюционного уравнения Хопфа.

Рассмотренные подходы к интегрированию эволюционных уравнений не ограничиваются нулевым шагом метода и легко распространяются на приближения высших порядков. Отметим здесь, что эти приближения являются решениями уравнения вида

$$w_{i,np} + \frac{3\beta}{2} w_{0,p}^2 w_{2,pp} + 3\beta w_{0,pp} w_{0,p} w_{i,p} + \Phi_i(w_0, w_{0,p}, \dots) = 0,$$

где Φ_i — функция, определяемая предыдущими шагами. Очевидно, что это уравнение имеет такие же характеристические направления, как и исходное. Это позволяет строить решение в параметрическом



виде с сохранением того же параметра δ , что и в нулевом шаге. Явное решение также может строиться, единственной проблемой здесь можно считать большой объем вычислений, хотя в практических целях обычно достаточно ограничиться одним или двумя слагаемыми ряда. Обобщение работы на случай одномерных процессов деформирования с ненулевой кривизной волнового фронта также не представляет проблем и приводит к уточненному эволюционному уравнению [14]. Необходимо отметить важность рассмотренного здесь метода для понимания сути решений для многомерных задач ударного деформирования. В прифронтной области ударной волны основные изменения решения происходят в направлении лучевой координаты, поэтому следует ожидать, что в лучевых координатах окрестность волнового фронта определяется эволюционным уравнением, для которого координата эйконала играет роль параметра. Оценивая практическую значимость проведенных решений, необходимо указать на методику численного счета для ударных волн в твердом теле [15–16], построенную на конечно-разностных расчетах в основной области деформирования и на применении приближенных аналитических решений в прифронтной области ударной волны. В таких численных схемах решения, получаемые на основе метода возмущений, можно считать более точными, чем решения в виде лучевых рядов [11–13]. Все перечисленные обстоятельства определяют большое теоретическое и практическое значение применяемого к задачам ударного деформирования анализа на основе эволюционных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00001-а) и ДВО РАН (проект 09-III-B-03-077).

Библиографический список

1. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 9. С. 87–158.
2. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
4. Пелиновский Ю.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К. Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус, 1984. 164 с.
5. Буренин А.А., Россихин Ю.А. К решению одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости со структурной ударной волной // Прикл. механика. 1990. Т. 26, № 1. С. 103–108.
6. Буренин А.А., Россихин Ю.А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. С. 129–137.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2: 2-е изд. испр. и доп. М.: Наука, 1973.
8. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
9. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
10. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 275 с.
11. Бабичева Л.А., Быковцев Г.И., Вerveйко Н.Д. Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах // ПММ. 1973. Т. 37, вып. 1. С. 145–155.
12. Быковцев Г.И., Власова И.А. Лучевой метод пространственных задач теории идеальной пластичности // Механика деформируемого твердого тела. Новосибирск: Наука, 1979. С. 31–36.
13. Буренин А.А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневост. мат. сб. 1999. Вып. 8. С. 49–72.
14. Иванова Ю.Е., Рагозина В.Е. Об ударных осесимметрических движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 144–151.
15. Рагозина В.Е., Воронин И.И., Вековшинин Е.Л. Об использовании прифронтной асимптотики в численных решениях динамических задач теории упругости с ударными волнами // Проблемы естествознания и производства. 1995. Вып. 115. С. 25–27.
16. Буренин А.А., Зиновьев П.В. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики: Сб. статей к 90-летию А.Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 146–155.



УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ РЕКОНСТРУКЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

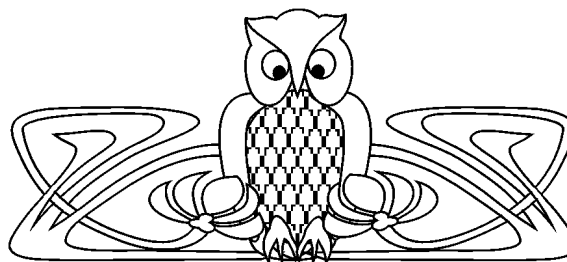
А.О. Ватульян, В.В. Дударев

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону,
кафедра теории упругости

E-mail: vatulyan@math.rsu.ru, dudarev_vv@mail.ru

Представлен общий подход к проблеме реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в упругом теле по амплитудно-частотным характеристикам, измеренным на части его границы. На основе сформулированного ранее обобщенного соотношения взаимности построена последовательность линейных некорректных задач, позволяющих осуществлять процедуру уточнения компонент тензора предварительных напряжений. В качестве примера представлены операторные уравнения и серия вычислительных экспериментов по восстановлению монотонных функций распределения предварительно напряженного состояния в задаче об изгибных колебаниях стержня.

Ключевые слова: неоднородное предварительно напряженное состояние, обобщенное соотношение взаимности, операторные уравнения, изгибные колебания, стержень, некорректная обратная задача.



On Some Problems of Reconstruction of Inhomogeneous Pre-Stressed State in Elastic Solids

A.O. Vatulyan, V.V. Dudarev

South Federal University, Rostov-on-Don,
Chair of Elasticity Theory

E-mail: vatulyan@math.rsu.ru, dudarev_vv@mail.ru

Presents a general approach to the problem of reconstruction of the inhomogeneous pre-stressed state in an elastic body on its amplitude-frequency response, measured in part of its border. Based on the previously defined generalized reciprocity is the ratio of the sequence of linear ill-posed problems, allowing for refinement of the procedure for pre-stress tensor component. As an example, presented a series of computational experiments on the restoration of monotone functions of the distribution of pre-stressed state the problem of bending vibrations of a rod.

Key words: heterogeneous pre-stressed state, generalized reciprocity correlation, bending vibrations, rod, incorrect problem

ВВЕДЕНИЕ

Предварительно напряженное состояние представляет один из важнейших факторов, который необходимо учитывать в расчетах на прочность, устойчивость и колебания элементов конструкций. Обычно оно возникает в результате различных технологических процессов, таких как литье,ковка, сварка, термообработка, а также при жестком соединении материалов с различными физико-механическими свойствами. Отметим также, что в различных искусственных и природных конструкциях существуют остаточные напряжения; без них невозможна работа многих конструкций в природе. Учет этих напряжений играет важную роль в задачах изучения деформирования и при идентификации биологических тканей и органов. Определение уровня предварительных напряжений является основополагающим фактором в задачах оценки прочности сооружений на различных стадиях эксплуатации и имеет приложения в совершенствовании методик неразрушающего контроля в геофизике и горной механике, идентификации сложных композиционных материалов и медицинской диагностике мягких тканей [1–3]. При этом отметим, что простейшие модели учета предварительно напряженного состояния приводят к решению краевых задач с измененными, но постоянными коэффициентами. Учет этого фактора в рамках такого подхода весьма распространен в литературе; на основе изменения скоростей в упругом теле развиты методы акустоупругости [4–5], позволяющие определять уровень однородного предварительно напряженного состояния. В то же время отметим, что предварительно напряженное состояние часто является неоднородным, например при наличии дефектов типа трещин, полостей, включений. Также существенно неоднородным является поле остаточных напряжений после выполнения технологических процессов. В этих случаях влияние предварительно напряженного состояния выражается в зависимости коэффициентов дифференциальных операторов, описывающих колебания, от компонент тензора предварительно напряженного состояния и, в конечном счете, от



координат. Определение этих зависимостей, по некоторым косвенным данным (обычно граничным полям смещений или ускорений), приводит к необходимости решения коэффициентных обратных задач для дифференциальных операторов [6–7], для исследования которых используются современные вычислительные технологии (метод конечного элемента, метод конечных разностей, методы регуляризации и итерационные схемы). К коэффициентным обратным задачам теории упругости, в которых требуется определить коэффициенты дифференциальных операторов по информации о граничных полях смещений, обычно относят три типа задач [2]. Один из них — об определении структуры существенно неоднородного предварительно напряженного состояния — исследован весьма мало, однако в последние годы развиты некоторые общие подходы к решению задач такого типа.

Отметим, что основной проблемой в решении коэффициентных обратных задач, которые являются нелинейными и некорректными, является нахождение общего способа построения операторных соотношений, связывающих искомые функции, характеризующие законы изменения неоднородности для компонент тензора предварительного напряжения, и измеряемые функции — амплитудно-частотные зависимости граничных точек тела. Переменность коэффициентов дифференциальных операторов не дает возможности построения в явном виде общих представлений решений в таких ситуациях. В этом случае решения прямых задач опираются либо на аппарат интегральных уравнений Фредгольма второго рода (для стержневых и пластиночных конструкций), либо на конечно-элементные или конечно-разностные технологии в более общих ситуациях. При этом для построения решений в обратных задачах формулируются итерационные процессы, основанные на методе линеаризации в окрестности некоторого напряженного состояния. Можно в значительной степени формализовать процедуру построения линейных операторных соотношений, если опираться на некоторые обобщения теоремы взаимности [2, 6].

В настоящей работе представлены общий способ построения операторных соотношений в обратных задачах и его реализация при анализе колебаний простейшей балочной конструкции. При этом рассмотрена как прямая задача о поперечных колебаниях предварительно напряженного консольного стержня (на основе анализа интегрального уравнения Фредгольма второго рода), так и обратная — о восстановлении закона распределения предварительно напряженного состояния по данным об амплитудно-частотной характеристике его торца.

1. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ И ЕЕ ВАРИАЦИОННАЯ ТРАКТОВКА

Рассмотрим установившиеся с частотой ω колебания упругого тела объема V ограниченной поверхностью $S = S_u \cup S_\sigma$, характеризующееся тензором упругих модулей C_{ijkl} и плотностью ρ . Будем считать, что в нем имеется неоднородное предварительно напряженное состояние, характеризующееся компонентами тензора напряжений σ_{ij}^0 . Колебания вызываются нагрузкой с компонентами p_i , приложенной на части S_σ ; часть S_u закреплена.

Линеаризованные уравнения колебаний после отделения временного множителя имеют следующий вид [2–3]:

$$T_{ij} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad (1)$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,m} \sigma_{mj}^0, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}, \quad (3)$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad T_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i, \quad (4)$$

где T_{ij} — компоненты несимметричного тензора, определяемого согласно (2).

Изменение амплитудно-частотных характеристик точек тела V может быть положено в основу процедуры идентификации предварительных напряжений. В обратной задаче формулируется дополнительное условие на части границы S_σ : $u_i|_{S_\sigma} = f_i$, $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$. Требуется определить компоненты



предварительно напряженного состояния σ_{ij}^0 . Сформулированная задача относится к классу нелинейных некорректных задач [6–8], которые требуют специальной процедуры построения решения, основанной на теории регуляризованных итерационных процессов. Заметим, что помимо постановки краевой задачи (1)–(4) более удобна вариационная трактовка, позволяющая более просто формулировать операторные соотношения в обратных задачах.

Для вывода вариационной постановки задачи о колебаниях предварительно напряженного тела используем слабые постановки, характерные для вариационных подходов [9].

Осуществим следующие преобразования над уравнениями движения и граничными условиями:

- выберем некоторые гладкие функции δu_i (кинематически возможное поле смещений) таким образом, чтобы они удовлетворяли граничному условию на части поверхности S_u : $\delta u_i = 0$;
- умножим уравнения движения и граничные условия на выбранные функции δu_i и проинтегрируем соответственно по объему V и поверхности S_σ ;
- вычтем из первого равенства второе, тогда получим

$$\int_{S_\sigma} T_{ij} n_j \delta u_i dS - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS - \int_V T_{ij,j} \delta u_i dV - \int_V \rho \omega^2 u_i \delta u_i dV = 0. \quad (5)$$

Упростим уравнение (5), используя формулу Гаусса – Остроградского, приводя подобные и подставляя выражения для компонент тензоров T_{ij} , σ_{ij} согласно (2)–(3):

$$\int_V (C_{ijkl} u_{k,l} + u_{i,m} \sigma_{mj}^0) \delta u_{i,j} dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS - \int_V \rho \omega^2 u_i \delta u_i dV = 0.$$

Последнему равенству, учитывая симметрию тензоров C_{ijkl} и σ_{ij}^0 , можно дать вариационную трактовку и сформулировать постановку задачи о колебаниях предварительно напряженного тела в виде условия стационарности некоторого функционала:

$$\delta(\Pi - K + \Pi_\sigma) = 0, \quad (6)$$

где введены следующие стандартные обозначения функционалов:

$\Pi = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} dV - \int_{S_\sigma} p_i u_i dS$ – потенциальная энергия тела, $\Pi_\sigma = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{mj}^0 u_{i,m} u_{i,j} dV$ – функционал, характеризующий предварительно напряженное состояние в теле, $K = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V \rho u_i^2 dV$ – кинетическая энергия тела.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМА ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Представленная ранее обратная задача по определению структуры и уровня предварительно напряженного состояния является нелинейной проблемой. Сформулировать операторные уравнения, связывающие заданные и искомые функции, невозможно в явном виде. Обычно для исследования таких задач используют процедуру линеаризации, причем для формулировки операторного соотношения в обратной задаче на каждом шаге требуется решать некоторую линейную некорректную задачу. На нулевом этапе решается задача без учета предварительно напряженного состояния под действием заданных нагрузок. Задача первого приближения является неоднородной, и построить обратный оператор для нее и сформулировать операторное уравнение для поправки, характеризующей предварительно напряженное состояние, совсем непросто. Для того чтобы избежать утомительной и непростой процедуры решения задачи первого приближения, можно использовать обобщенное соотношение взаимности, построенное в работах [2, 6]. Приведем кратко основные результаты. Пусть имеется два решения обратной задачи (1)–(4), отвечающие различным предварительно напряженным состояниям. Основные характеристики задачи снабдим соответственно индексами 1 и 2: $u_i^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(01)}$, $T_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(02)}$, $T_{ij}^{(2)}$. В соответствии с работой [2] имеем следующее соотношение:



$$0 = \int_{S_\sigma} p_i(u_i^{(2)} - u_i^{(1)})dS - \int_V (\sigma_{mj}^{(01)} u_{i,m}^{(1)} u_{i,j}^{(2)} - \sigma_{mj}^{(02)} u_{i,m}^{(2)} u_{i,j}^{(1)})dV, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (7)$$

Соотношение (7) позволяет построить итерационный процесс [10], и сформулировать последовательность линейных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с суммируемым ядром, если положить $\sigma_{mj}^{(01)} = t_{mj}^{(n-1)}$, $\sigma_{mj}^{(02)} = t_{mj}^{(n-1)} + t_{mj}^{(n)}$, $u_i^{(1)} = u_i^{(n-1)}$, $u_i^{(2)} = u_i^{(n-1)} + u_i^{(n)}$. Тогда, сохраняя в (7) линейные относительно возмущений слагаемые, получим операторное соотношение [2]:

$$\int_{S_\sigma} p_i(f_i - u_i^{(n-1)})dS + \int_V (t_{mj}^{(n)} u_{i,m}^{(n-1)} u_{i,j}^{(n-1)})dV = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (8)$$

Заметим, что уравнение (8) есть интегральное уравнение Фредгольма первого рода с суммируемыми ядрами; для его решения необходимо использовать регуляризующие алгоритмы [10–12]. На основе уравнения (8) можно организовать итерационный процесс для определения поправок компонент тензора предварительных напряжений $t_{mj}^{(n)}$ по отношению к некоторому выбранному начальному состоянию, которое обычно выбирается в классе простейших тензорных функций, например постоянных или линейных. Также отметим, что из одного операторного уравнения (8) невозможно однозначно определить сразу все компоненты тензора предварительных напряжений; обычно составляется несколько таких соотношений, соответствующих различным видам приложенной нагрузки и области ее приложения; при этом изменяются ядра интегральных операторов и правые части.

3. ПРИМЕР. ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО СТЕРЖНЯ

Одним из важных примеров поставленной проблемы является задача об установившихся изгибных колебаниях прямолинейного упругого изотропного стержня длины l под действием периодической во времени силы $Pe^{i\omega t}$ с одноосным предварительно напряженным состоянием, которая приводит к одномерной обратной задаче.

Рассмотрим задачу (1)–(4) считая, что из компонент тензора предварительных напряжений отлична от нуля лишь компонента $\sigma_{11}^0 \neq 0$, причем ось Ox_1 направлена вдоль оси стержня. Введем следующие обозначения в соответствии с гипотезами стержней Бернулли и положим $u_1 = -x_3 w'(x_1)$, $u_2 = 0$, $u_3 = w(x_1)$ — компоненты вектора смещений в стержне, F — площадь поперечного сечения, $V = [0; l] \times F$ — объем стержня, $J = \int_F x_3^2 dS$ — осевой момент инерции, E — модуль Юнга. Тогда ненулевые компоненты несимметричного тензора T_{ij} представимы в виде

$$T_{11} = \sigma_{11} + u_{1,1} \sigma_{11}^0, \quad T_{13} = \sigma_{13}, \quad (9)$$

$$T_{31} = \sigma_{31} + u_{3,1} \sigma_{11}^0, \quad T_{33} = \sigma_{33}, \quad (10)$$

где $\sigma_{11} = E u_{1,1} = -E x_3 w''(x_1)$, а функция $w(x_1)$, характеризующая смещение нейтральной оси, удовлетворяет условию консольного закрепления на левом конце: $w'(0) = 0$, $w(0) = 0$.

Подставляя выражения (9)–(10) в каждое из представлений Π , Π_σ , K и производя интегрирование по площади поперечного сечения, получим следующее вариационное уравнение:

$$\delta(\Pi - K + \Pi_\sigma) = \int_0^l \{ (J(E + \sigma_{11}^0)w'')'' - (F\sigma_{11}^0 w')' - \rho F \omega^2 w + \omega^2 (J\rho w')' \} \delta w dx_1 + \\ + \{ (F\sigma_{11}^0 w')(l) - (J(E + \sigma_{11}^0)w'')'(l) + P - \omega^2 (J\rho w')(l) \} \delta w(l) + (J(E + \sigma_{11}^0)w'')(l) \delta w'(l) = 0.$$

откуда, приравняв к нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим уравнение движения и граничные условия в следующем виде [13]:

$$J(E + \sigma_{11}^0)w'')'' - (F\sigma_{11}^0 w')' - \rho F \omega^2 w = 0, \quad (11)$$



$$w(0) = 0, w'(0) = 0, (J(E + \sigma_{11}^0)w'')(l) = 0, (J(E + \sigma_{11}^0)w'')' - F\sigma_{11}^0 w'(l) = P. \quad (12)$$

В предлагаемой постановке осуществлено пренебрежение составляющей инерции вращения $\omega^2 J\rho w'$, часто используемое в прикладных теориях [14].

Полученные уточненные граничные условия соответствуют действию сосредоточенной поперечной силы на конце консольно закрепленного стержня. Обычно в литературе при формулировке граничных условий и уравнения движения предварительно напряженных стержней пренебрегают величиной $\sigma_{11}^0 \neq 0$ по сравнению с величиной модуля Юнга, однако получающееся при этом интегральное уравнение первого рода имеет ядро, обращающееся в ноль в начале координат; при этом оказывается невозможно однозначное восстановление искомой функции в окрестности начала координат. Сохранение упомянутых слагаемых позволяет избежать этой неприятности.

Попутно заметим, что в приведенных соотношениях параметры системы $J, E, \sigma_{11}^0, F, \rho$ могут быть заданы как функции по переменной $x = x_1$. Краевая задача (11)–(12) есть задача для уравнения 4 порядка с переменными коэффициентами; ее решение получим, используя предварительное сведение к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

4. ФОРМУЛИРОВКА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим один из наиболее точных и эффективных способов решения прямой задачи о расчете амплитудно-частотных характеристик стержня переменного сечения с неоднородным одноосным начальным напряженным состоянием. Осуществим предварительное обезразмеривание задачи. Введем в рассмотрение безразмерные параметры и функции следующим образом: $\tau = \frac{\max \sigma_{11}^0}{E_0}, \kappa_1^2 = \frac{F_0 l^2}{J_0}, \kappa_2^4 = \frac{\rho_0 F_0 l^4}{J_0 E_0} \omega^2, P_0 = \frac{Pl^2}{J_0 E_0}, \varphi(\xi) = \frac{\sigma_{11}^0}{\max \sigma_{11}^0}, J = J_0 f_1(\xi), E = E_0 f_2(\xi), F = F_0 f_3(\xi), \rho = \rho_0 f_4(\xi), g_1(\xi) = f_1(\xi) f_2(\xi), g_2(\xi) = f_3(\xi) f_4(\xi)$, где $\xi = \frac{x}{l} \in [0; 1]$. Отметим, что безразмерный параметр κ_1 характеризует величину максимального значения компоненты предварительного напряжения σ_{11}^0 , а κ_2 — частоту колебаний ω .

Решение обезразмеренной задачи сведено к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода относительно функции $y(\zeta)$ [13]:

$$y(\zeta) = - \int_0^1 K(\zeta, s) y(s) ds + f(\zeta), \quad (13)$$

где $K(\xi, s) = \frac{1}{a(s)} \int_{\max(\xi, s)}^1 (\kappa_1^2 f_3(\eta) \varphi(\eta) + \kappa_2^4 (\xi - \eta)(\eta - s) g_2(\eta)) d\eta, a(s) = g_1(s) \left(1 + \tau \frac{\varphi(s)}{f_2(s)}\right), f(\xi) = (\xi - 1) P_0$.

Численная реализация определения функции $w(\xi)$ (прямая задача) при заданном виде функции, характеризующей предварительно напряженное состояние, осуществлена на основе простейшего варианта метода коллокаций следующим образом:

1) для аппроксимации интегрального оператора в уравнении (13) использована составная квадратурная формула Симпсона с соответствующими коэффициентами B_j и шагом $h = l/(N - 1)$, где N — нечетное количество узлов. Значения функции $y(\xi)$ в выбранных узлах $s_i = (i - 1)h$ находим из решения следующей линейной алгебраической системы: $y(s_i) + \sum_{j=1}^N B_j K(s_i, s_j) y(s_j) = f(s_i), i = 1, \dots, N$;

2) вычисление значений искомой функции $w(\xi)$ в тех же узлах $s_i, i = 1, \dots, N - 1$ осуществлено с помощью квадратурной формулы трапеций, а для повышения точности на нагруженном конце стержня — по составной квадратурной формуле Симпсона. Тестирование программы, реализующей представленный подход нахождения амплитудно-частотных характеристик балки на основе решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, осуществлено путем сравнения с частным случаем постоянных параметров, где имеется точное решение. Серия тестовых экспериментов показала,



что при постоянных параметрах системы для частот колебаний, находящихся ниже второго резонанса, относительная погрешность приближенного, найденного согласно построенного ранее численного решения и аналитического решения, приведенного в [14], в концевой точке $\xi = 1$ для $N = 41$ не превосходит 0.002%. Были проведены также вычислительные эксперименты, связанные с увеличением размерности конечномерного оператора N , показавшие устойчивость и сходимость к точному решению. Отметим, что анализ влияния величины однородного предварительного напряжения на частотные характеристики [13] показал, что это влияние заметно для значений $\tau \geq 10^{-4}$. Исходя из этого анализа был сделан вывод о том, что процедуру реконструкции следует проводить в частотном диапазоне, расположенном ниже первой резонансной частоты стержня. При таком выборе это влияние оказывается наиболее значительным и соответственно процедура реконструкции наиболее эффективна.

5. ОДНОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО СТЕРЖНЯ

В качестве конкретной реализации сформулированного ранее общего подхода к решению поставленной обратной задачи представлено решение задачи об отыскании предварительного одноосного напряженного состояния ($\sigma_{11}^0 \neq 0$). Тогда интегральное уравнение, соответствующее (8), примет вид

$$\int_0^1 t_{11}^{(n)} (J(w^{(n-1)})^2 + F(w^{(n-1)'})^2) dx - P(f - w^{(n-1)}) = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (14)$$

или, переходя к безразмерным параметрам и вводя обозначение $f_0 = f/l$, имеем

$$\int_0^1 \varphi^{(n)}(\xi) (\tau f_2(\xi) (w^{(n-1)''})^2 + \kappa_1^2 f_3(\xi) (w^{(n-1)'})^2) d\xi - P_0(f_0 - w^{(n-1)}(1)) = 0, \quad \kappa_2 \in [\kappa_2^{(1)}, \kappa_2^{(2)}]. \quad (15)$$

Уравнение (15) есть интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с вполне непрерывным оператором относительно функции $\varphi^{(n)}$. Особенностью ядра этого оператора является его положительность, что для монотонных искомым функций может гарантировать единственность реконструкции. При обращении этого оператора необходимо использовать регуляризующую процедуру [10–11]; при численной реализации использован метод регуляризации А.Н. Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации. Отметим также, что вопрос о выборе отрезка изменения частоты колебаний (или набора частот, в которых осуществляется зондирование) является весьма важным с точки зрения практической реализации процедуры реконструкции. Как правило, этот отрезок (или частоты) необходимо выбирать в нерезонансном диапазоне. Обычно частотный диапазон выбирался до первой резонансной частоты, как это было рекомендовано ранее. Начальное приближение определялось из

условия минимума функционала невязки $J_1 = \int_{\kappa_2^{(1)}}^{\kappa_2^{(2)}} (w(1, \kappa_2) - f_0(\kappa_2))^2 d\kappa_2$ в классе линейных функций

на некотором компакте, построенном исходя из априорной информации об ограниченности восстанавливаемой функции. Заметим также, что для этого класса обратных задач отсутствуют ограничения типа положительности искомым функций, как это имеет место для других классов коэффициентных обратных задач [2]. Результаты вычислительных экспериментов показали, что наиболее точно восстанавливаются монотонные функции, немонотонные зависимости восстанавливаются значительно хуже. На рис. 1–2 в качестве иллюстрации представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению безразмерных функций (как положительных, так и отрицательных) $\varphi(\xi)$, характеризующих изменение величины σ_{11}^0 для степенных законов. В вычислительных экспериментах рассматривался отрезок измерения амплитудно-частотной характеристики $w(1, \kappa_2)$, расположенный в нерезонансной области. В серии расчетов было принято $\kappa_1 = 0.2$, $\kappa_2 \in [0.9; 1.8]$, что соответствует частотному диапазону, расположенному до 1-й резонансной частоты, измерения (задание входной



информации) производились для пяти – семи частот внутри выбранного диапазона. Здесь сплошной линией показан график исходной функции, прерывистой — начального приближения, точками — восстановленной функции. Результаты вычислительных экспериментов показали достаточную эффективность при реконструкции монотонных законов неоднородности (погрешность восстановления не превышает 3–5 %).

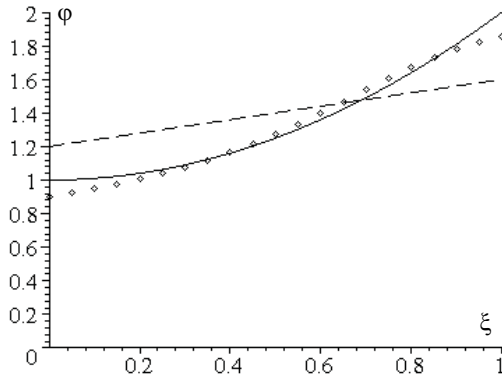


Рис. 1. Семь итераций, степенной закон, положительная функция

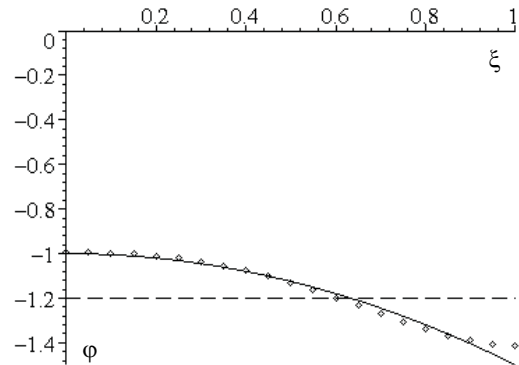


Рис. 2. Четыре итерации, степенной закон, отрицательная функция

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен способ реконструкции неоднородного напряженного состояния в упругих телах на основе частотного зондирования, основанный на анализе коэффициентной обратной задачи для дифференциального оператора теории упругости, построен итерационный процесс, приводящий к уточнению начального приближения. В качестве примера приведены операторные уравнения и результаты вычислительных экспериментов в задаче для изгибных колебаний предварительно напряженного стержня; представлены результаты вычислительных экспериментов реконструкции одноосного напряженного состояния по амплитудно-частотной зависимости; даны рекомендации по выбору частотного диапазона.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ЮМИ (ВНЦ РАН, г. Владикавказ).

Библиографический список

1. Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Пономарев И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. М.: Наука, 1996. 240 с.
2. Ватульян А.О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестн. Самар. ун-та. 2007. Вып. 54, № 4. С. 93–103.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухслойных остаточных напряжений // Прикладная механика. 1994. Т. 30, № 1. С. 3–17.
4. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. Киев: Наук. думка, 1977. 152 с.
5. Никитина Н.Е. Акустоупругость. Опыт практического применения. Н. Новгород.: ТАЛАН, 2005. 208 с.
6. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
7. Isakov V. Inverse problems for PDE. N.Y.: Springer-Verlag, 2005. 284 p.
8. Ватульян А.О. К формулировке интегральных уравнений в проблеме идентификации предварительно напряженного состояния // Экологический вестн. научных центров ЧЭС. 2006. № 2. С. 23–25.
9. Ватульян А.О. О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 2. С. 182–184.
10. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
11. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
12. Самарский А.А., Вабичевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 480 с.



13. Дударев В.В. Об уточненной модели изгибных колебаний предварительно напряженной балки // Современные проблемы механики сплошной среды:

Тр. XII Междунар. конф. 2008. Т. 2. С. 56–59.
14. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.

УДК 539.3

О КОСОМ УДАРЕ ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ, ИМЕЮЩИМ ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ, ПО НЕЛИНЕЙНОМУ УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

О.В. Дудко, Д.А. Потянихин

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, лаборатория механики деформируемого твердого тела
E-mail: dudko@iacp.dvo.ru, potyanikhin@mail.ru

Исследуется процесс ударного взаимодействия абсолютно твердого тела с нелинейно-упругим, имеющим плоскую границу. Полагаем, что твердое тело движется с постоянной скоростью, что приводит к автомоделной задаче соударения. Обсуждаются возможные совокупности волновых фронтов, которые могут возникать при таком взаимодействии. В качестве критериев выбора возникающей волновой картины приняты условие существования эволюционных ударных волн и термодинамическое условие совместности сильных разрывов. Схема решения автомоделной краевой задачи включает проверку существования эволюционной ударной волны непосредственно во время численного счета.

Ключевые слова: теория упругости, ударные волны, контактное взаимодействие.

ВВЕДЕНИЕ

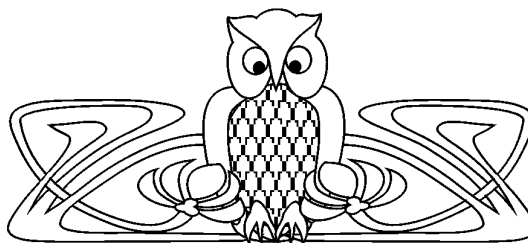
Плоские автомоделные задачи нелинейной динамической теории упругости были рассмотрены в работах [1–5]. Автомоделное динамическое деформирование упругопластических твердых тел достаточно подробно изучено в [6–8]. Постановка задачи, представленной в настоящей работе, близка к [1]. Но в отличие от статьи [1], где рассматривается ударное взаимодействие двух нелинейно-упругих тел, здесь одно из тел полагается абсолютно твердым.

Допущения, положенные в основу модели адиабатического деформирования нелинейной упругой среды, приводят к тому, что с математической точки зрения можно построить несколько решений краевой задачи. В представленном исследовании свяжем выбор единственного реализуемого варианта распространения деформаций из множества допустимых с законами термодинамики и с условием эволюционности сильных разрывов. Проверка критериев производилась в процессе численных расчетов на примере серии вычислительных экспериментов.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Система модельных уравнений динамического деформирования нелинейной упругой среды в прямоугольной декартовой системе координат в переменных Эйлера представляется соотношениями:

$$\begin{aligned} v_i &= \dot{u}_i + v_j u_{i,j}, & w_i &= \dot{v}_i + v_j v_{i,j}, & 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}, \\ \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{kj}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), & \sigma_{ij,j} &= \rho w_i, \end{aligned} \quad (1.1)$$



About Oblique Impact by Perfectly Rigid Body with Plane Boundary on the Nonlinear Elastic Half-Space

O.V. Dudko, D.A. Potyanikhin

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Laboratory of a Deformable Solid Mechanics
E-mail: dudko@iacp.dvo.ru, potyanikhin@mail.ru

In this paper the impact interaction of perfectly rigid body and nonlinear elastic solid, which have plane boundaries, are investigated. Suppose that the moving rigid body has constant velocity, resulting in self-similar formulation of the problem. Possible variants of wave combinations, arising from such interaction, are discussed. The existence condition for evolutionary shock waves and the thermodynamic discontinuities compatibility condition serve as criteria for choosing the wave pattern. The scheme for the solution of a self-similar boundary-value problem includes checking for the mentioned criterion during computations.

Key words: theory of elasticity, shock wave, shock interaction.



$$\frac{\rho}{\rho_0} = \sqrt{1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1I_2 - \frac{8}{3}I_3}, \quad (1.2)$$

$$I_1 = \alpha_{kk}, \quad I_2 = \alpha_{ik}\alpha_{ki}, \quad I_3 = \alpha_{ik}\alpha_{kj}\alpha_{ji}.$$

В соотношениях (1.1), (1.2) u_i, v_i, w_i — компоненты векторов перемещений, скоростей и ускорений точек среды; α_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси и тензора напряжений Эйлера – Коши; ρ_0, ρ — плотность материала в начальном и текущем состоянии соответственно; δ_{ij} — символ Кронекера. Латинский индекс после запятой обозначает частное дифференцирование по пространственной координате ($f_{,j} = \partial f / \partial x_j$), точкой обозначена частная производная по времени ($\dot{f} = \partial f / \partial t$). Здесь и далее принято правило суммирования по повторяющимся индексам; латинские индексы принимают значения 1, 2, 3.

Система уравнений (1.1)–(1.2) становится замкнутой, если задан упругий потенциал W . В адиабатическом приближении функция W для нелинейной упругой среды зависит только от деформаций α_{ij} и принята в виде

$$W = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 + \varkappa I_1 I_2 + \chi I_1^3 + \eta I_3 + \dots, \quad (1.3)$$

где λ, μ — параметры Ламе; \varkappa, χ, η — упругие модули третьего порядка.

Решение системы (1.1)–(1.3) может не являться непрерывным на некоторой движущейся поверхности $\Sigma(t)$. В этом случае на $\Sigma(t)$ необходимо потребовать выполнения условий совместности разрывов. Если при непрерывных перемещениях u_i на $\Sigma(t)$ терпят разрыв их первые производные, то в среде распространяется со скоростью G поверхность сильных разрывов — ударная волна, на которой параметры напряженно-деформированного состояния и движения точек среды связаны динамическими и кинематическими условиями совместности первого порядка [9]:

$$[\sigma_{ij}]n_j = \rho^+ (v_j^+ n_j - G) [v_i], \quad [\dot{u}_i]n_j = -G [u_{i,j}]n_j \quad \text{при } [u_i] = 0. \quad (1.4)$$

Если же на $\Sigma(t)$ непрерывны не только перемещения, но и их первые производные, а скачком изменяются вторые производные, то на такой поверхности необходимо потребовать выполнения условий совместности второго порядка [9]:

$$[\sigma_{ij,j}] = \rho^+ [\dot{v}_i], \quad [\ddot{u}_i]n_j = G^2 [u_{i,jk}]n_j n_k \quad \text{при } [u_i] = 0, [u_{i,j}] = 0. \quad (1.5)$$

В этом случае G — скорость распространения поверхности слабых разрывов.

В условиях (1.4), (1.5) квадратными скобками обозначен скачок функции на поверхности $\Sigma(t)$: $[m] = m^+ - m^-$, m^+ — значение функции перед поверхностью, m^- — сразу за ней; n_j — компоненты единичной нормали к поверхности волны ($n_j n_j = 1$).

Анализ условий совместности (1.4) показывает, что в нелинейной упругой среде с потенциалом (1.3) в условиях плоского деформированного состояния возможно существование двух типов плоских ударных волн — квазипродольных, на которых преобладает изменение объемных деформаций, и квазипоперечных, вызывающих преимущественно сдвиговые деформации [10].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим косой удар абсолютно твердым телом, движущимся с постоянной скоростью, по покоящемуся нелинейно-упругому телу (рис. 1). Пусть упругое тело занимает полупространство $x_1 > 0$. Его границу обозначим через L_1 . Второе тело с плоской границей L_2 , двигаясь как жесткое тело, сталкивается с первым так, что появляется общая граница двух тел OL . Движение второго тела определяется постоянной скоростью его точек $\mathbf{v}_0 = \{v_{10}, v_{20}\}$. На участке OL выполняется закон сухого трения.

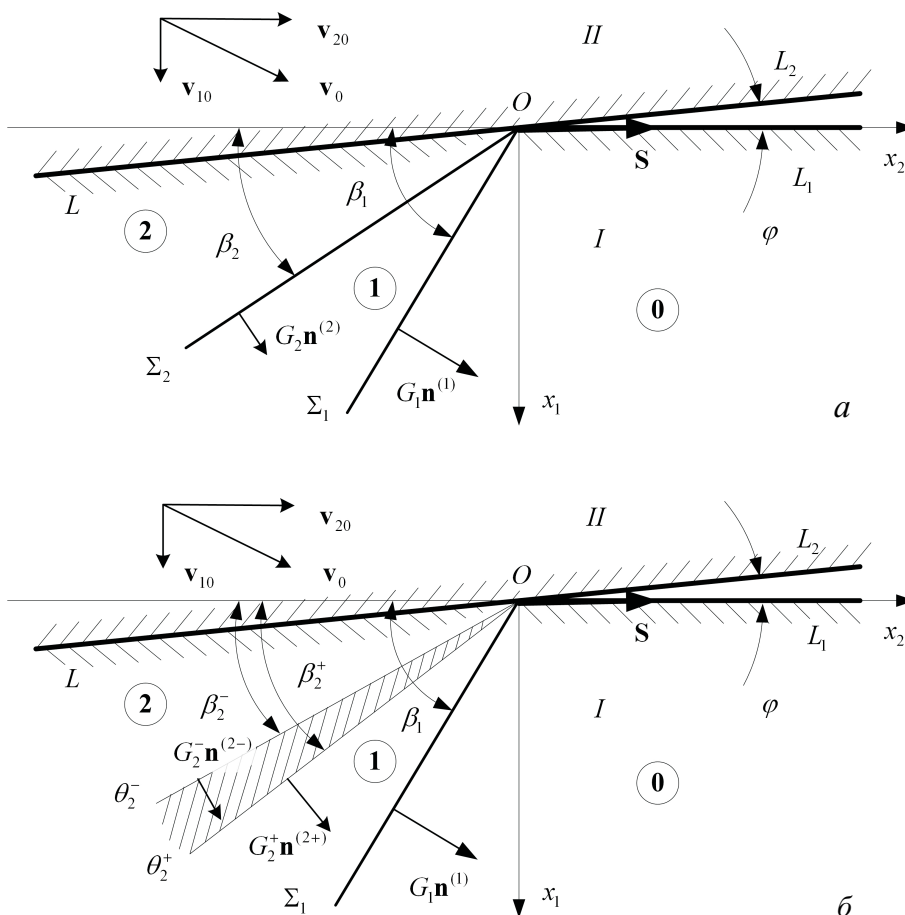


Рис. 1. Волновая картина: а – с двумя ударными волнами; б – с ударной и простой волнами

Пусть S – скорость движения точки O – начала подвижной системы координат – вдоль оси Ox_2 . Величина S выражается через заданные параметры задачи v_{10} , v_{20} и угол столкновения φ соотношением $S = v_{20} + v_{10} \cdot \text{ctg } \varphi$. Будем считать эту скорость настолько большой, чтобы возникающие вследствие ударного столкновения волновые фронты не могли отделиться от точки O .

Ввод автомодельной переменной $\theta = x_1 / (St - x_2)$ и представление компонент вектора перемещений в виде $u_1 = (St - x_2)F(\theta)$, $u_2 = (St - x_2)\Phi(\theta)$, $u_3 = 0$, где $F(\theta)$, $\Phi(\theta)$ – первая и вторая компоненты безразмерного вектора перемещений в координатном пространстве θ , позволяют перейти в системе определяющих соотношений (1.1)–(1.3) от дифференциальных уравнений в частных производных к однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $F(\theta)$ и $\Phi(\theta)$:

$$\begin{cases} A \cdot F''(\theta) + B \cdot \Phi''(\theta) = 0, \\ C \cdot F''(\theta) + D \cdot \Phi''(\theta) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где A, B, C, D – функции от θ , F, Φ, F', Φ' и упругих модулей среды.

Условие существования нетривиального решения системы (2.1)

$$AD - BC = 0 \quad (2.2)$$

может выполняться либо при некотором значении $\theta = \theta^*$ (что соответствует ударной волне), либо в целом интервале $\theta \in [\theta^+, \theta^-]$ (θ^+ и θ^- определяют положение двух слабых волн разрывов ускорений, которые являются передним и задним фронтами простой волны Римана). В областях тривиального



решения между волновыми фронтами ненулевые параметры движения точек среды и напряженно-деформированного состояния остаются постоянными и могут быть выражены через произвольные константы интегрирования a, b, e, f системы (2.1):

$$\begin{aligned} F(\theta) &= a\theta - b, & \Phi(\theta) &= e\theta - f, & u_{1,1} &= a, & u_{1,2} &= b, & u_{2,1} &= e, & u_{2,2} &= f, \\ v_1 &= \frac{-Sb}{(1-a)(1-f) - eb}, & v_2 &= \frac{-S(f - af + be)}{(1-a)(1-f) - eb}, & w_1 &= 0, & w_2 &= 0, \\ \alpha_{11} &= a - \frac{1}{2}(a^2 + e^2), & \alpha_{12} &= \frac{1}{2}(b + e - ab - ef), & \alpha_{22} &= f - \frac{1}{2}(b^2 + f^2), \\ \frac{\rho}{\rho_0} &= (1-a)(1-f) - eb. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Компоненты тензора $\sigma_{ij}(a, b, e, f)$ здесь не приводим из-за их очевидной громоздкости.

Условия совместности разрывов (1.4), (1.5), записанные с использованием введенных автомодельных параметров процесса ударного деформирования, допускают существование в рамках поставленной задачи плоских ударных волн (квазипродольных и квазипоперечных) и простых волн (передними и задними фронтами которых являются плоские волны разрывов ускорений), а также областей постоянства параметров напряженно-деформированного состояния, каждой из которых соответствуют свои значения констант интегрирования a, b, e, f .

Таким образом, волновая картина, возникающая в области упругого тела, с математической точки зрения может состоять из различных комбинаций плоских ударных волн и простых волн Римана. Их характер определяется параметрами задачи v_{10}, v_{20}, φ и коэффициентом трения k на границе OL и может быть конкретизирован проверкой термодинамического условия совместности разрывов и условия эволюционности ударных волн.

Анализируя соотношения модели (1.1)–(1.3) совместно с условиями (1.4), (1.5), можно показать, что для нелинейной среды (1.3) скорость распространения объемных деформаций всегда оказывается больше, чем скорость распространения дополнительного сдвига. Значит, передним фронтом всегда оказывается продольная ударная волна Σ_1 , положение которой определяется значением $\theta_1 = \operatorname{tg} \beta_1$ (см. рис. 1). Следом за ней может распространяться либо квазипоперечная ударная волна Σ_2 , соответствующая значению $\theta_2 = \operatorname{tg} \beta_2$ (см. рис. 1, а), либо центрированная простая волна $\theta \in [\theta_2^+, \theta_2^-]$ (см. рис. 1, б).

Решение краевой задачи в случае возникновения двух ударных волновых фронтов Σ_1 и Σ_2 заключается в определении соответствующих значений θ_1, θ_2 и констант интегрирования a, b, e, f в областях 1 и 2 (см. рис. 1, а) из системы алгебраических уравнений, составленных из условий совместности разрывов и непрерывности перемещений (1.4):

$$\begin{cases} a_1\theta_1 - b_1 = 0, \\ e_1\theta_1 - f_1 = 0, \\ a_1\theta_2 - b_1 = a_2\theta_2 - b_2, \\ e_1\theta_2 - f_1 = e_2\theta_2 - f_2, \\ \tilde{\sigma}_{11}^{(1)} + \tilde{\sigma}_{12}^{(1)}\theta_1 + M^2\theta_1\tilde{v}_1^{(1)} = 0, \\ \tilde{\sigma}_{21}^{(1)} + \tilde{\sigma}_{22}^{(1)}\theta_1 + M^2\theta_1\tilde{v}_2^{(1)} = 0, \\ \left(\tilde{\sigma}_{11}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{11}^{(2)}\right) + \left(\tilde{\sigma}_{12}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{12}^{(2)}\right)\theta_2 = M^2d^{(1)}\left(\tilde{v}_1^{(1)} + \tilde{v}_2^{(1)}\theta_2 - \theta_2\right)\left(\tilde{v}_1^{(1)} - \tilde{v}_1^{(2)}\right), \\ \left(\tilde{\sigma}_{21}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{21}^{(2)}\right) + \left(\tilde{\sigma}_{22}^{(1)} - \tilde{\sigma}_{22}^{(2)}\right)\theta_2 = M^2d^{(1)}\left(\tilde{v}_1^{(1)} + \tilde{v}_2^{(1)}\theta_2 - \theta_2\right)\left(\tilde{v}_2^{(1)} - \tilde{v}_2^{(2)}\right), \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{\rho S^2}{\lambda + 2\mu} = \frac{S^2}{c_1^2}, & \tilde{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu}, & \tilde{v}_i^{(k)} &= \frac{v_i^{(k)}}{S}, \\ d^{(k)} &= \frac{\rho^{(k)}}{\rho_0} = (1 - a_k)(1 - f_k) - b_k e_k, & c_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}. \end{aligned}$$



В соотношениях (2.4) и далее верхним индексом в скобках при σ_{ij} и v_i обозначена соответствующая область постоянства параметров напряженно-деформированного состояния.

Для замыкания системы (2.4) необходимо учесть отсутствие разрыва нормальной к полуплоскости контакта OL составляющей скоростей точек ударяемого и ударяющего тел:

$$(v_1^{(2)} - v_{10}) n_1^{(OL)} + (v_2^{(2)} - v_{20}) n_2^{(OL)} = 0. \quad (2.5)$$

Разрыв касательной составляющей этих же скоростей запрещаем лишь в случае выполнения неравенства $|\sigma_{ij}^{(2)}| n_i^{(OL)} \tau_j^{(OL)} \leq k |\sigma_{ij}^{(2)}| n_i^{(OL)} n_j^{(OL)}$:

$$(v_1^{(2)} - v_{10}) \tau_1^{(OL)} + (v_2^{(2)} - v_{20}) \tau_2^{(OL)} = 0. \quad (2.6)$$

В противном случае условие (2.6) должно быть заменено выражением, следующим из закона трения Кулона:

$$|\sigma_{ij}^{(2)}| n_i^{(OL)} \tau_j^{(OL)} = k |\sigma_{ij}^{(2)}| n_i^{(OL)} n_j^{(OL)}. \quad (2.7)$$

Заметим, что с математической точки зрения решение с двумя сильными разрывами можно получить всегда. В качестве дополнительных условий на существование такого решения, как уже было отмечено, принимаем условие эволюционности ударной волны и термодинамическое условие совместности разрывов [10]:

$$\sigma_{ij}^+ [v_i] n_j - \rho^+ (v_j^+ n_j - G) \left(\frac{[v_i][v_i]}{2} + \frac{W}{\rho_0} \right) \geq 0, \quad (2.8)$$

аналогом которого в газовой динамике является теорема Цемплена о термодинамической невозможности существования ударных волн расширения.

Проверку эволюционности ударной волны θ_2 проводим, определяя положение переднего фронта θ_2^+ простой волны из условия (2.2) с подстановкой в него предварительных (предшествующих ударному фронту θ_2) постоянных параметров напряженно-деформированного состояния a_1, b_1, e_1, f_1 , вычисленных из системы (2.4). Нарушение эволюционности ударной волны означает, что ее фронт θ_2 оказывается внутри веера простой волны: $\theta_2 \leq \theta_2^+$. Такая ударная волна должна быть заменена на простую волну Римана $\theta \in [\theta_2^+, \theta_2^-]$ (см. рис. 1, б).

Решение в области простой волны строится путем интегрирования по автомодельному параметру θ системы обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящей из условия (2.2) и одного из равенств (2.1):

$$\begin{cases} A \cdot F''(\theta) + B \cdot \Phi''(\theta) = 0, \\ AD - BC = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Положение заднего фронта θ^- простой волны заранее неизвестно, его приходится уточнять непосредственно во время счета, согласовывая получаемые значения с граничными условиями задачи.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В процессе расчетов изменялись параметры задачи $v_{10}, v_{20}, \varphi, k$, а также значения упругих постоянных $\lambda, \mu, \varkappa, \chi, \eta$. Там, где это специально не оговаривается, механические свойства среды задаются безразмерными константами: $\bar{\lambda} = 0.4, \bar{\mu} = 0.3, \bar{\varkappa} = -10.0, \bar{\chi} = -10.0, \bar{\eta} = -10.0$ (все упругие модули нормированы по $(\lambda + 2\mu)$).

В каждом случае решение проводилось сначала в постановке с двумя ударными волнами (см. рис. 1, а), а затем уточнялось путем проверки условия (2.8) и эволюционности ударного фронта Σ_2 .

Серия вычислительных экспериментов показала, что и при проскальзывании, и при сцепке возможно появление как ударной, так и простой волны.

На рис. 2, а представлены диаграммы распределения параметров напряженно-деформированного состояния, полученные при $\varphi = 1^\circ, v_{10} = 0.3 c_1, v_{20} = 0.2 c_1, k = 0.3$ и соответствующие скольжению



тел. При этом возмущения в среду распространяются посредством продольной ударной волны Σ_1 и волны Римана $\theta \in [\theta_2^+, \theta_2^-]$.

Изменение коэффициента сухого трения приводит к изменению характера контакта тел на границе OL . Так, например, при $\varphi = 1^\circ$, $v_{10} = 0.3 c_1$, $v_{20} = 0.2 c_1$, $k = 0.5$ происходит жесткая сцепка взаимодействующих тел. Волновая картина при этом остается прежней. В обоих случаях продольная ударная волна вызывает сжатие среды, поперечная волна — расширение.

Выбирая другие параметры задачи, можно получить волновую картину с двумя ударными волнами. При $\varphi = 2^\circ$, $v_{10} = 0.2 c_1$, $v_{20} = 0.1 c_1$, $k = 0.2$ на границе соударяющихся тел происходит проскальзывание, а при $\varphi = 3^\circ$, $v_{10} = 0.2 c_1$, $v_{20} = 0.1 c_1$, $k = 0.2$ — жесткая сцепка (рис. 2, б). Ударные волны Σ_1 и Σ_2 вызывают сжатие среды.

Изменение напряжений, плотности и компонент вектора скорости в зависимости от коэффициента трения k показано на рис. 3, 4. Для иллюстрации влияния физической нелинейности для каждого параметра приведено по три графика. Графики с индексом 1 построены при оговоренных значениях упругих модулей третьего порядка $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\chi}$, $\tilde{\eta}$; с индексом 2 — когда $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\chi}$, $\tilde{\eta}$ уменьшены на порядок, и с индексом 3 — для случая геометрической нелинейности, когда $\tilde{\kappa} = \tilde{\chi} = \tilde{\eta} = 0$. Исходными параметрами экспериментов выбраны $\varphi = 1^\circ$, $v_{10} = 0.1 c_1$, $v_{20} = 0.1 c_1$. Для каждого фиксированного набора параметров v_{10} , v_{20} , φ и упругих модулей существует критическое значение коэффициента трения k^* , в котором графики функций имеют излом. При $k < k^*$ происходит скольжение граничных плоскостей соударяющихся тел. Значение $k = k^*$ соответствует наступлению жесткого контакта. Для остальных параметров задачи v_{10} , v_{20} , φ можно аналогично указать критические значения, при которых меняется характер взаимодействия тел.

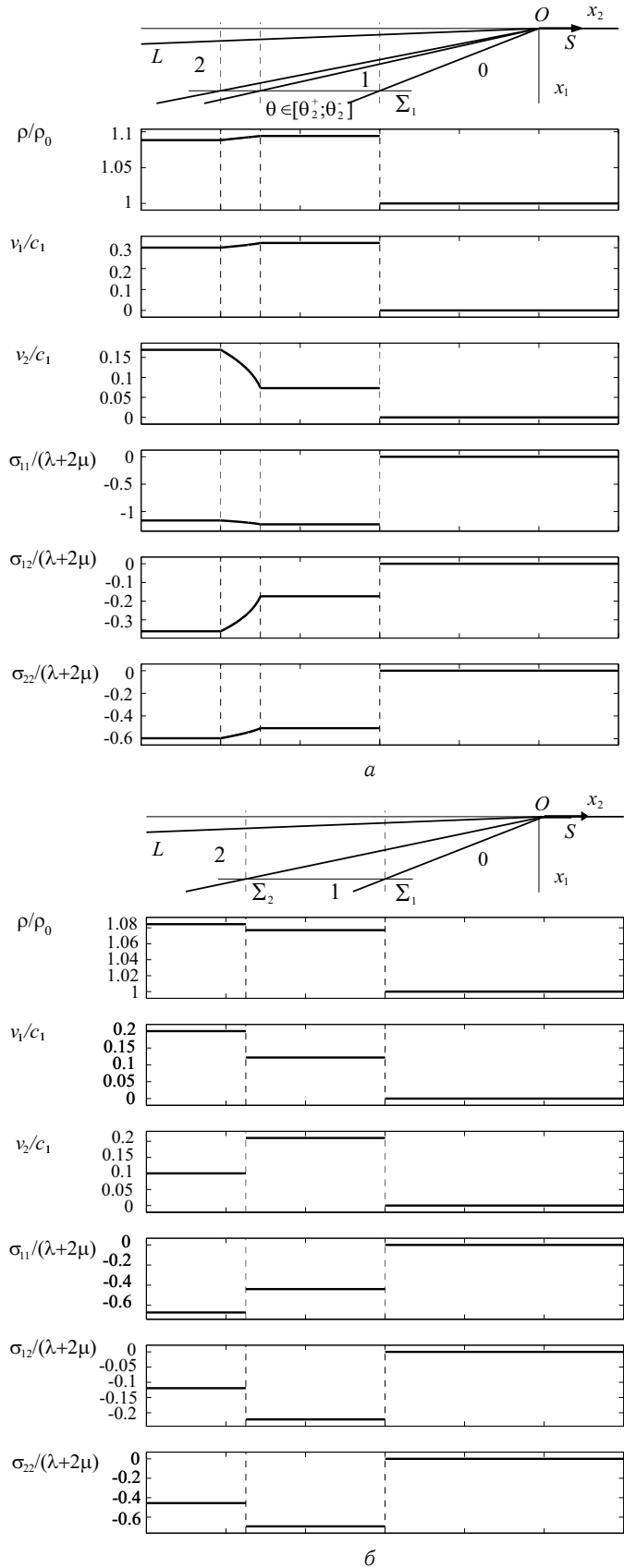


Рис. 2. Диаграмма распределения параметров напряженно-деформированного состояния и движения: а — постановка с ударной волной и волной Римана; б — постановка с двумя ударными волнами

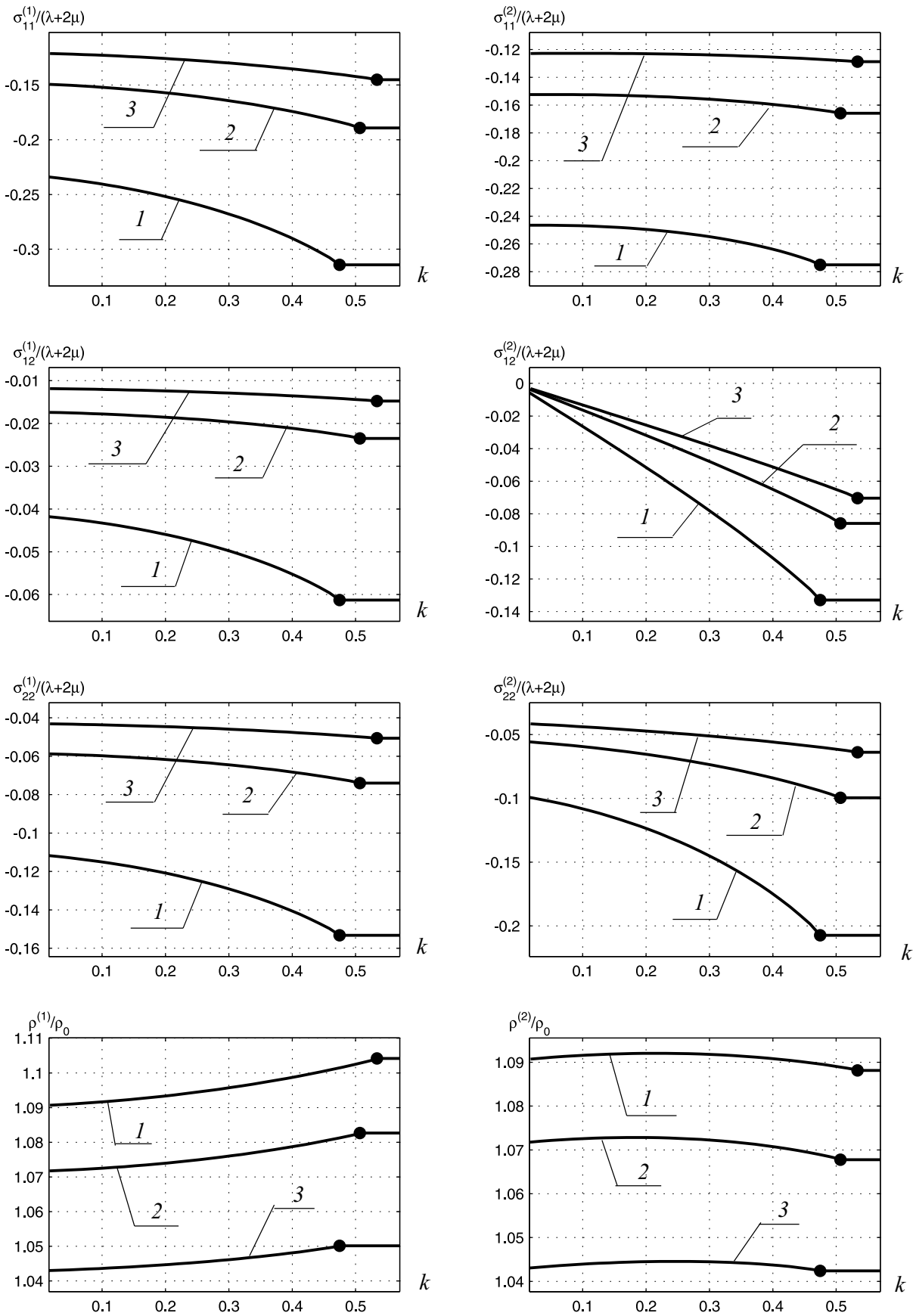


Рис. 3. Зависимость компонент тензора напряжений и относительного изменения плотности от коэффициента трения при различных упругих модулях

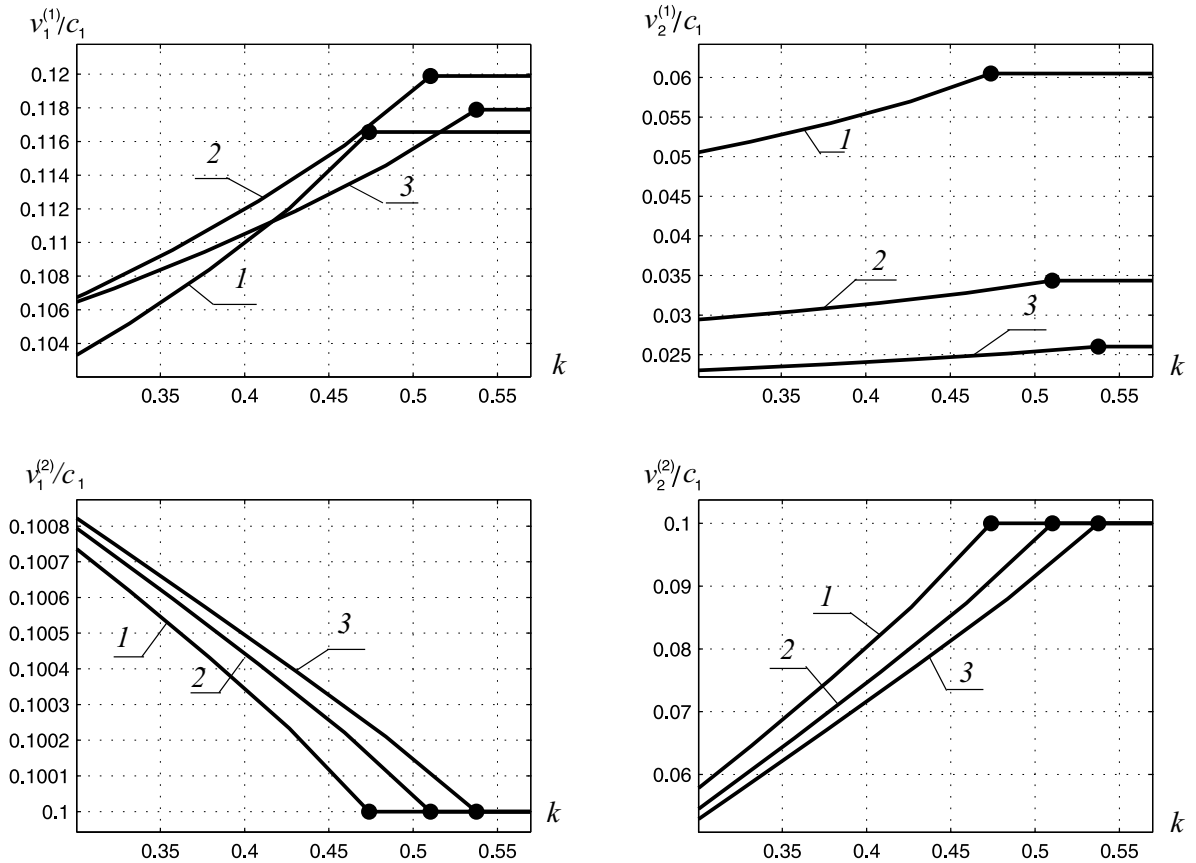


Рис. 4. Зависимость компонент вектора скорости от коэффициента трения k при различных упругих модулях

Выясним влияние параметров задачи на скорости возникающих волновых фронтов. Зафиксируем $\varphi = 1^\circ$, $v_{10} = 0.3 c_1$, $v_{20} = 0.2 c_1$ и начнем изменять коэффициент трения k . При малых значениях k возникают две ударные волны, тела проскальзывают (рис. 5, а). При увеличении k , на отрезке $[k^{**}, k^*]$, вторым отраженным фронтом становится волна Римана, тела по-прежнему проскальзывают. Дальнейшее увеличение k приводит к жесткой сцепке с ударной и простой волнами.

Если теперь при неизменных скоростях $v_{10} = 0.3 c_1$, $v_{20} = 0.2 c_1$ увеличить угол соударения φ до значения 3° , то и проскальзывание, и сцепка происходят с двумя ударными волнами (рис. 5, б).

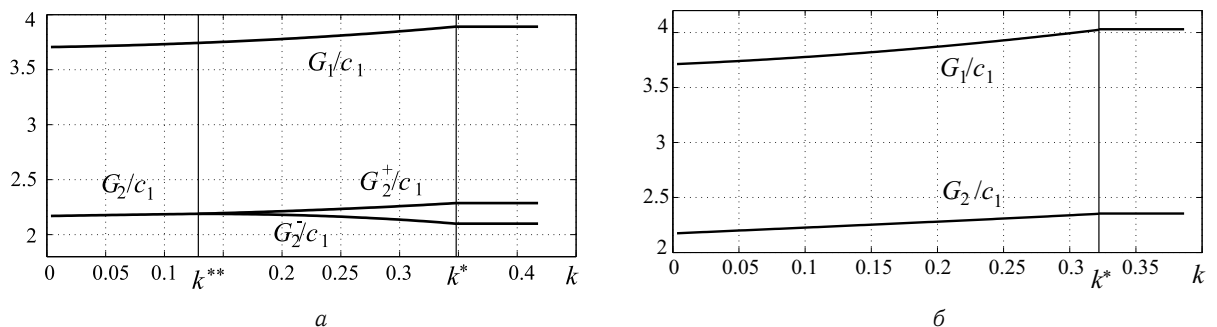


Рис. 5. Зависимости скоростей волн от коэффициента трения k

Отметим, что значения k^{**} , при которых изменяется волновая картина, соответствуют точкам максимума графиков зависимости относительного изменения плотности $\rho^{(2)}/\rho_0$ от коэффициента трения (см. рис. 3).

Решение задачи удается получить только при небольших углах соударения. Углы β_1 и β_2 (или β_2^+ и β_2^-) быстро увеличиваются с увеличением φ , и задача перестает быть автомодельной. Так, например, уже при $\varphi = 4^\circ$, $v_{10} = 0.3 c_1$, $v_{20} = 0.2 c_1$ угол β_1 близок к $\pi/2$.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной постановочной проблемой в автомодельных задачах ударного деформирования остается неоднозначность в определении возникающей волновой картины. Иногда удается удовлетворить начальным и граничным условиям задачи, предполагая появление в среде различных комбинаций ударных и простых волн [1–4], то есть построить более одного решения задачи. Выбор реализуемого варианта распространения деформаций связан с законами термодинамики и с условием эволюционности сильных разрывов. Согласно принятому адиабатическому приближению для нелинейной упругой среды, энтропия оказывается кусочно-постоянной функцией пространственных координат и времени. Пренебрегая теплопроводностью среды при формировании модельных соотношений, считаем единственным необратимым процессом распространение ударной волны. Именно на поверхности разрывов деформаций энтропия может изменяться скачкообразно. Термодинамическое условие совместности разрывов (2.8) связывает производство энтропии с параметрами среды. Его следствием является аналог [10] теоремы Цемплена о термодинамической невозможности скачков разрежения. Более жесткие ограничения на существование поверхностей сильных разрывов накладывают условия эволюционности разрывов [5]. В работе проверка критериев производилась в процессе численных расчетов на примере серии вычислительных экспериментов в задаче о косом ударе абсолютно твердым телом по упругому полупространству. Проведенные вычисления также, как и в [11], не выявили различия между двумя критериями. Два ограничения на существование поверхностей разрывов деформаций оказались равноправными.

Как показали расчеты, передним фронтом распространения деформаций будет продольная волна, на которой терпит разрыв лишь нормальная составляющая скорости частиц среды. Интересно отметить, что в зависимости от параметров задачи и при проскальзывании граничных плоскостей, и при их жесткой сцепке следом за продольной может распространяться как квазипоперечная ударная волна, так и простая волна Римана. При этом ударная волна вызывает дополнительное сжатие среды, а простая волна несколько снижает уплотнение, вызванное продольной волной.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00001-а).

Библиографический список

1. Агапов И.Е., Буренин А.А., Резунов А.В. О соударении двух нелинейно-упругих тел с плоскими границами // Прикладные задачи механики деформируемых сред: Сб. науч. тр. Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. С. 206–215.
2. Буренин А.А., Лапыгин В.В., Чернышов А.Д. К решению плоских автомодельных задач нелинейной динамической теории упругости // Нелинейные волны деформаций: Материалы междунар. симпозиума. Таллин, 1978. Т. 2. С. 25–28.
3. Буренин А.А., Лапыгин В.В. Об отражении плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности от плоской жесткой границы нелинейной упругой среды // ПМТФ. 1985. №5. С. 125–129.
4. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
5. Чугайнова А.П. Автомодельная задача о действии бегущей нагрузки на границу нелинейно-упругого слабоанизотропного полупространства // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 3. С. 102–109.
6. Баскаков В.А., Быковцев Г.И. Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде // ПММ. 1971. Т. 35, вып. 3, № 1. С. 71–72.
7. Быковцев Г.И., Колокольчиков А.В., Сыгуров А.В. Автомодельные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска // ПМТФ. 1984. №6. С. 148–156.
8. Быковцев А.Г. О преломлении ударных волн чистого сдвига в упругопластическое полупространство // ПММ. 1989. Т. 53, вып. 2. С. 309–318.
9. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 523 с.
10. Буренин А.А., Чернышов А.Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ. 1978. Т. 42, вып. 4. С. 711–717.
11. Дудко О.В., Потянихин Д.А. Автомодельная задача нелинейной динамической теории упругости о взаимодействии продольной ударной волны с жесткой преградой // Вычисл. мех. сплош. сред. 2008. Т. 1, № 2. С. 27–37.



УДК 514.774.2:517.972/.974:539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СОВРЕМЕННЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев*

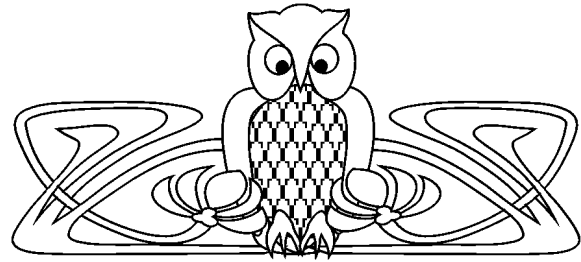
Московский городской университет управления
Правительства Москвы,
кафедра прикладной математики;
*Самарский государственный университет,
кафедра механики сплошных сред
E-mail: vlad_koval@mail.ru, radayev@ssu.samara.ru

Работа посвящена основам современной теории поля. Вводятся базовые понятия и определения теории поля в 4-мерном пространстве – времени и развивается лагранжев формализм в самом его сложном варианте, связанный с принципом наименьшего действия Гамильтона и возможностью вариационного описания поля с помощью указанного принципа. Развивается теория геометрических и обобщенных вариационных симметрий и приводится вывод законов сохранения (включая ряд их новых форм) на основе геометрических вариационных симметрий действия. На основе канонических тензорных характеристик поля, определяемых с помощью групп геометрических симметрий действия, найден ряд новых форм первой вариации интеграла действия. Приводится полная теория лагранжиана пустого пространства (нулевого лагранжиана) для пространственно-временного многообразия произвольной размерности. С помощью дивергентного представления лагранжиана пустого пространства для звездообразной области получено его общее выражение, содержащее градиенты поля порядка не выше первого. Показано, что в случае трехкомпонентного поля в трехмерном пространстве нулевой лагранжиан может содержать в общей сложности 15 независимых элементов. Исследован также случай, когда лагранжиан пустого пространства не зависит от сдвигов физических полевых величин. Заключительная часть работы содержит полное изложение теоретико-группового формализма, связанного с современной теорией поля.

Ключевые слова: теория поля, лагранжев формализм, вариационный принцип, законы сохранения, нулевой лагранжиан, теоретико-групповой формализм.

ВВЕДЕНИЕ

Вариационная формулировка как средство математического представления физической теории часто рассматривается в качестве самого элегантного и экономичного (в духе принципа «экономии мышления» Маха (E. Mach)) такого представления, по крайней мере для физических теорий, не претендующих на описание диссипативных процессов. Компактность, с которой в вариационных принципах выражаются физические законы, рассматривалась Махом лишь как один из способов «экономии мышления» в познавательной деятельности и никогда не связывалась им с возможностью проявления действующих в природе физических законов в подобной математической форме. Следуя концепции Лейбница (G.W. Leibniz), наш мир является наилучшим из всех возможных миров и, следовательно, его законы выражаются экстремальными принципами.



Mathematical Models and Contemporary Theories of Physical Fields

V.A. Kovalev, Yu.N. Radayev*

Moscow City Government University of Management,
Chair of Applied Mathematics;
*Samara State University,
Chair of Continuum Mechanics
E-mail: vlad_koval@mail.ru, radayev@ssu.samara.ru

Elements of the classical field theory based on a variational formulation of the Hamilton type are discussed and corresponding 4-dimensional Lagrange formalism is presented both as the variational and the group theoretical script. Variational symmetries (geometric and generalized) of field equations and the Noether theorem providing a regular way of obtaining a conservation law for every given variational symmetry are revisited in the study in order to give a complete version of the contemporary field theory. All developments are presented in the non-linear frame (i.e. of finite strains as to continuum mechanics). Natural derivations of all tensor attributes of a physical field are given by the variational symmetry technique. The null Lagrangian theory for n -dimensional manifold (including 4-dimensional Minkowski space-time) is developed in an attempt to extend the canonical formalism of non-linear field theory. By the aid of divergence formula for the null Lagrangians regular in n -dimensional star-shaped domains, a general representation of the null Lagrangian depending as maximum on the first order field gradients is obtained. A method of systematic derivation of the null Lagrangians for n -dimensional manifold is proposed. It is shown that in the case of non-linear 3-component field in 3-dimensional space the null Lagrangian is represented, in general, via 15 arbitrary independent field functions.

Key words: field theory, Lagrange formalism, variational principle, conservation law, null Lagrangian, group theoretical formalism.



Классическая аналитическая механика Лагранжа (J.L. Lagrange) и Гамильтона (W.R. Hamilton) является великолепным образцом теории, реализованной с помощью вариационного описания. Базисом вариационного описания здесь служит принцип Гамильтона – Остроградского, или принцип наименьшего действия¹. Принцип наименьшего действия часто служит отправной точкой при построении аналитической механики (см., например, [1]). Наконец, следует отметить, что вариационные принципы были положены в основу теории электромагнитного и гравитационного поля в курсе теоретической физики [2]. Механика континуума, являясь классической теорией поля, не должна быть исключением: исследование геометрических и обобщенных (высших) симметрий функционала действия, а также соответствующих им законов сохранения, есть, по-видимому, не только самое мощное средство проникновения в сущность самой механики континуума, но и регулярный метод вывода законов сохранения и соответствующих им инвариантных интегралов, которые часто могут иметь и важное прикладное значение². Следует к тому же отметить, что теория поля исторически строилась как логическое продолжение механики сплошных материальных сред. Современная термомеханика сплошных сред уже давно выросла в классическую физическую теорию поля. Ярким примером здесь может служить теория связанной гиперболической термоупругости (GN II), которая допускает вариационную формулировку, а следовательно, и полевой Лагранжев вариант представления всех тензорных характеристик и уравнений, относящихся к динамическому связанному термоупругому полю.

Представленный здесь материал³ будет излагаться в следующей последовательности: сначала (разд. 1) рассматриваются вводные понятия классической теории поля в 4-мерном пространстве – времени⁴, сформулирован принцип Гамильтона – Остроградского (принцип наименьшего действия), критерии абсолютной и инфинитезимальной инвариантности интеграла действия, изложен ограниченный вариант теории геометрических вариационных симметрий действия; теорема Нетер [3] и вывод законов сохранения на основе геометрических вариационных симметрий действия (также пока еще в ограниченном варианте) рассматриваются в разд. 2; следующий раздел работы (разд. 3) посвящен классическим законам сохранения, соответствующим преобразованиям сдвига и поворота пространства – времени, а также повороту трехкомпонентного динамического поля, в этом же разделе приводятся определения и «естественные» канонические представления всех важнейших векторных и тензорных полей нелинейной механики сплошных сред, необходимые для записи законов сохранения в самом общем нелинейном случае (в том числе с учетом динамического вклада в функционал действия); обобщенные геометрические вариационные симметрии действия и соответствующий более общий вариант теоремы Нетер рассматриваются в разд. 4, здесь же выводится одна новая форма вариации действия, которая с помощью трех способов варьирования пространственно-временных координат и полевых переменных позволяет получить (см. разд. 5) ряд новых форм законов сохранения; далее, в разд. 6, получена общая форма закона сохранения, соответствующая *полному* варьированию координат и полей, представленная через два канонических тензора (первого тензора напряжений

¹Принцип наименьшего действия был сформулирован Гамильтоном в работах 1834, 1835 гг. (*Hamilton W.R.* On a general method in dynamics, by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function // *Philos. Trans. Roy. Soc. L.*, 1834. Pt. II. P. 247–308; *Hamilton W.R.* Second assay on a general method in dynamics // *Philos. Trans. Roy. Soc. L.*, 1835. Pt. I. P. 95–144) и независимо от него М.В. Остроградским в 1848 г.

²См., например: *Knowles J.K., Sternberg E.* On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1972. V. 44. P. 187–211; *Olver P.J.* Conservation laws in elasticity I. General results // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1984. V. 85. P. 119–129; *Olver P.J.* Conservation laws in elasticity II. Linear homogeneous isotropic elastostatics // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1984. V. 85. P. 131–160; *Olver P.J.* Symmetry Groups and Path-Independent Integrals // *Fundamentals of Deformation and Fracture* / Eds. B.A. Bilby et al. Eshelby Memorial Symposium, Sheffield 2–5 April, 1984. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. P. 57–71.

³См. также: *Радаев Ю.Н.* Нелинейная теория упругости как физическая теория поля // *Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского* / Под ред. акад. Д.М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 658–684.

⁴Следует заметить, что число «пространственных» координат в пространстве – времени чаще всего не играет никакой роли. При исследовании некоторых вопросов (таких как, например, повороты трехкомпонентного поля) указанное число существенно.



Пиола – Кирхгофа и тензора напряжений Эшелби); в разд. 7 рассматриваются не геометрические обобщенные группы преобразований (преобразования Ли – Бэклунда) и обобщенные негеометрические вариационные симметрии действия, т.е. самый общий вариант теории вариационных симметрий поля; в качестве важного элемента теории поля следует рассматривать разд. 8, посвященный лагранжиану «пустого пространства» (нулевому лагранжиану)⁵; теория геометрических и негеометрических обобщенных вариационных симметрий поля во всей своей полноте излагается в разд. 9 в терминах и с помощью алгоритмов группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных⁶.

Теория поля является весьма важной частью современной физики, но систематические изложения ее классических основ недостаточно доступны. Последовательное изложение затрагиваемого круга проблем заинтересованный читатель может найти также в известной монографии [5]. К сожалению, на русском языке имеется весьма ограниченный набор литературных источников по проблеме применения геометрических и обобщенных вариационных симметрий в таких разделах механики сплошных сред, как нелинейная упругость или связанная термоупругость. Так, в известной монографии [6] вообще нет никаких указаний на это.

Вариационное исчисление является на редкость всеобъемлющим математическим методом. Именно в рамках этой науки выкристаллизовались многие понятия математики, механики и физики. Поэтому вариационное исчисление выступает не только как самостоятельная математическая дисциплина, но и как в определенном смысле летопись этих трех наук. По поводу формализма исчисления вариаций для функционалов с переменной областью интегрирования и доказательства теоремы Нетер см. работы [7–12].

Систематическое изложение теории геометрических вариационных симметрий и законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, следующих из вариационного принципа, дано в 4-й главе монографии [13] (перевод на русский язык см. [14]). В 5-й главе указанной книги приводится теория обобщенных симметрий. Новый вариант изложения этого круга вопросов читатель может найти в монографии [15].

1. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Ниже будут даны необходимые сведения (преимущественно формального плана) из современной теории поля, с помощью которых на единой основе могут быть получены уравнения поля, динамические инварианты поля (энергия, импульс, момент импульса) и инвариантные интегралы. Для по-

⁵ Действие, лагранжиан которого является нулевым, называется нейтральным. Оно стационарно на произвольных физических полях, и поэтому никак не связано со свойствами каких бы то ни было физических полей, что, собственно, и позволяет ассоциировать такое действие не с физическими полями, а с пространством, их «вмещающим». Изложение теории лагранжиана пустого пространства в основном следует по статье [4]. Добавление лагранжиана пустого пространства в силу его дивергентной структуры к лагранжиану физического поля не изменяет условий стационарности действия, хотя и может изменить условие инфинитезимальной инвариантности интеграла действия и выражения для канонических тензоров. Понятие о лагранжиане пустого пространства совершенно необходимо для установления степени определенности канонических тензорных полей, входящих в формулировку законов сохранения. В п. 8.4 приводится полная теория лагранжиана пустого пространства для n -мерного пространственно-временного многообразия (включая 4-мерное пространство – время Минковского). С помощью дивергентного представления лагранжиана пустого пространства для звездообразной области (см. п. 8.1) получено его общее выражение, содержащее градиенты поля порядка не выше первого, в случае произвольного числа измерений пространства – времени. Показано (п. 8.2), что в случае статического трехкомпонентного физического поля в трехмерном пространстве нулевой лагранжиан может содержать в общей сложности 15 независимых элементов. Исследован также случай, когда лагранжиан пустого пространства не зависит от сдвигов физических полевых величин (см. п. 8.5). Лагранжианы пустого пространства выступают в качестве основы решения одной важной задачи вариационного исчисления об «интегрирующем множителе». Эта проблема, которой посвящен п. 8.6, состоит в поиске таких функций, зависящих от пространственно-временных переменных, полевых переменных и их градиентов, которые позволяли бы для данной системы дифференциальных уравнений в частных производных которая не вытекает из вариационного принципа, гарантировать выполнение равенства между скалярным произведением вектор-множителя и вектор-системы и некоторым дивергентным выражением для произвольных полевых переменных, и тем самым сформулировать на решениях системы дивергентный закон сохранения.

⁶ В этом разделе работы формализм теории геометрических и обобщенных вариационных симметрий распространяется на лагранжианы, зависящие от градиентов полевых переменных, сколь угодно высокого порядка.



нимания излагаемой далее теории необходимо достаточно свободное владение исчислением вариаций (например, в рамках замечательного курса вариационного исчисления [10]). Компактное изложение имеется в работе [8, р. 260–264]. Можно рекомендовать также монографию [5, р. 96–115].

Рассмотрим функционал типа Гамильтонова действия

$$\mathfrak{S} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X, \quad (1.1)$$

где φ^k — упорядоченный массив физических полевых величин (или динамических переменных), число которых предполагается конечным; X^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) — пространственно-временные координаты⁷; $X^4 = ct$ (константа c имеет смысл характерной скорости и ее можно положить равной единице); $d^4 X$ — элемент объема; \mathcal{D} — область 4-пространства⁸, в пределах которой изменяются пространственно-временные координаты X^1, X^2, X^3, X^4 . При этом речь может идти о лагранжиане и действии как всего тела, так и любой его части. Именно поэтому мы чаще всего не будем в дальнейшем явно указывать область интегрирования в (1.1) и вообще не будем ее специфицировать⁹.

Пространство – время релятивистских теорий является четырехмерным псевдоевклидовым пространством¹⁰, метрика которого в *галилеевой координатной системе* задается знаконеопределенной квадратичной формой

$$ds^2 = \varepsilon_\beta (dX^\beta)^2 \quad (\beta = 1, 2, 3, 4),$$

где $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_4 = -1$.

Определенное подобным образом 4-пространство обычно называют пространством Минковского (H. Minkowski), или пространством событий.

В пространстве Минковского может быть введена криволинейная координатная система X^β ; метрика в этом случае задается квадратичной формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta. \quad (1.2)$$

Такое задание линейного метрического элемента характерно для пространств Римана¹¹. В принципе, n -мерное риманово пространство, квадрат метрического элемента которого знаконеопределен, — это вполне достаточный для развития теории поля образец пространственно-временного многообразия. Гиперболическое риманово пространство размерности 4 служит в качестве пространственно-временного многообразия в общей теории относительности. Физическое содержание этой типично полевой теории состоит в объяснении всего лишь одного явления — всемирного тяготения.

Под $d^4 X$ мы понимаем «естественный» пространственно-временной элемент объема

$$d^4 X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4. \quad (1.3)$$

⁷Аналогия между пространством и временем была известна еще древним грекам. Аристотель включал время в число непрерывных величин наряду с линиями, поверхностями и телами. В современной физике равноправие пространственных координат и времени утверждалось в процессе становления теории относительности. Пространственно-временное многообразие — неотъемлемый элемент теории относительности. Геометрия пространства – времени как объект физической теории рассматривается, например, в [16, с. 457–472]. С точки зрения классической механики сплошных сред переменные X^1, X^2, X^3 вполне аналогичны координатам Лагранжа, а оперирование с четырехмерным пространственно-временным многообразием исключительно удобно при описании динамических процессов в деформируемых средах. Большинство положений теории поля обобщается на случай пространства – времени с произвольным числом пространственных измерений.

⁸В рамках классической нелинейной механики сплошных сред и действия для трехмерного деформируемого тела следует считать, что \mathcal{D} — декартово произведение отсчетной конфигурации тела, деформацию которого обычно описывают, сравнивая отсчетную конфигурацию с актуальной деформированной, и интервала времени с границами t_1, t_2 .

⁹Граница неспецифицированной 4-области интегрирования (в данном случае — замкнутая трехмерная гиперповерхность в четырехмерном пространстве – времени) обозначается далее через ∂ .

¹⁰Геометрия псевдоевклидовых пространств и пространственно-временного многообразия в деталях изложена в кн.: Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

¹¹Теория пространств Римана изложена в ряде известных монографий: Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 316 с.; Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.; Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 548 с.



Поэтому \mathcal{L} — «естественная» плотность лагранжиана. Лагранжиан предполагается локальным, т.е. его значение в точке X^β определяется значениями динамических переменных φ^k и конечного числа их частных производных по пространственно-временным координатам, вычисленных в той же самой точке.

Инвариантный элемент объема $d^4\tau$ пространственно-временного многообразия, параметризованного криволинейными координатами X^β , определяется на основании

$$d^4\tau = \sqrt{g} dX^1 dX^2 dX^3 dX^4, \quad (1.4)$$

где g — определитель (точнее, его абсолютная величина), составленный из метрических коэффициентов пространственно-временного многообразия $g_{\alpha\beta}$. В том случае, когда метрика пространства – времени гиперболична, то обычно вместо \sqrt{g} пишут $\sqrt{-g}$ ¹², ибо в последнем случае величина под корнем будет положительной. Тогда инвариант $\sqrt{-g} dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$ — величина четырехмерного объема, измеренного в локальной координатной системе посредством твердых масштабов и часов по принципам специальной теории относительности.

Инвариантный элемент объема следует отличать от «естественного» элемента объема $d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$, поскольку координатная система пространственно-временного многообразия может быть криволинейной, и в этом случае величина $\sqrt{-g}$ отлична от единицы. Использование «естественного» элемента объема вместо инвариантного предпочтительнее с точки зрения формализма исчисления вариаций.

При использовании криволинейной координатной системы в пространственно-временном многообразии функционал действия следует записывать в форме

$$\mathfrak{S} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) \sqrt{-g} d^4X. \quad (1.5)$$

Ясно поэтому, что характер координатной системы можно вообще не специфицировать, но тогда в уравнениях поля под функцией Лагранжа следует понимать не \mathcal{L} , а $\sqrt{-g} \mathcal{L}$. Следует поэтому помнить, что символ \mathcal{L} тогда не будет указывать на плотность по отношению к инвариантному элементу объема пространственно-временного многообразия. Величина \mathcal{L} будет являться скалярной плотностью по отношению к «естественному» элементу объема. Как уже отмечалось, величину \mathcal{L} можно поэтому называть «естественной» плотностью лагранжиана.

В дальнейшем изложении будет предполагаться, что при использовании криволинейной координатной системы в пространстве – времени в интеграле действия с самого начала следует выполнить замену

$$\sqrt{-g} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}, \quad (1.6)$$

а в уравнениях поля — замену

$$\mathcal{L} \rightarrow \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (1.7)$$

и мы, таким образом, возвращаемся к выражению действия в первоначально данной форме (1.1).

Сделаем еще одно важное замечание относительно расстановки и индексов у пространственно-временных координат и полевых переменных. В первом случае греческий индекс пишется в верхней позиции, поскольку координаты X^β преобразуются как 1-контравариантный «отсчетный» вектор. Во втором случае «пространственный» индекс k пишется в верхней позиции чисто условно: полевая переменная может быть скаляром или тензором произвольного ранга. Принятое нами обозначение однако подразумевает, что φ^k есть эйлеровы переменные в том самом смысле, который приписывается им в классических теориях поля механики сплошных деформируемых сред.

¹²Часто для краткости применяется также сокращенное обозначение $\sqrt{}$ (см., например, [17, с. 39]).



Как это принято в вариационном исчислении, через ∂_β в (1.1) и в дальнейшем обозначается оператор *полного* частного дифференцирования по пространственно-временной координате X^β . Оператор полного дифференцирования действует на функцию $F(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\nu)$ по формуле

$$\partial_\beta F = \partial_\beta^{\text{expl}} F + \sum_{s \geq 0} (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial F}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)}. \quad (1.8)$$

В сумме справа верхний предел суммирования можно не указывать, поскольку функция $F(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\nu)$ зависит лишь от *конечного* числа аргументов, и поэтому суммирование в (1.8) рано или поздно обрывается.

Мы будем систематически использовать именно этот дифференциальный оператор с тем, чтобы изложение было выдержано в духе классического вариационного исчисления, тем более, что уравнения поля (которые мы будем систематически записывать исключительно с помощью операторов полного дифференцирования ∂_β и частного дифференцирования $\partial_\beta^{\text{expl}}$ по *явному* вхождению переменной X^β), как известно, *ковариантны*, т.е. *правило составления* уравнений поля при использовании «естественной» плотности лагранжиана остается неизменным и не зависящим от выбора координатной системы в пространственно-временном многообразии. Впрочем, все уравнения исчисления вариаций без труда представляются в прямой тензорной записи, общепринятой в рамках рациональной механики. «Прямая» тензорная запись уравнений поля, несмотря на известные преимущества, которые в полной мере были использованы направлением «рациональной механики сплошных сред»¹³, часто оказывается неудобной, так как она скрывает истинную природу тензорных характеристик поля: при построении канонических тензоров теории поля заимствуются элементы как пространства – времени (греческий индекс), так и самих физических полей (латинский индекс), которые «скрываются» за «прямой» тензорной записью уравнений поля.

Заметим, что в рамках формализма группового анализа дифференциальных уравнений оператор полного дифференцирования обозначается как D_β .

Большинство современных физических теорий поля ограничивается градиентами первого порядка от динамических переменных φ^k и соответствующим лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, X^\beta). \quad (1.9)$$

Это согласуется с тем обстоятельством, что в обычной практике уравнения поля являются дифференциальными уравнениями самое большее второго порядка.

Для классической механики сплошных сред физические поля φ^k — это закон движения (или деформирования) тела, представленный как зависимости координат Эйлера (т.е. координат в пространстве, которые выбираются наблюдателем для представления положений точек сплошной среды в процессе ее деформации) от координат Лагранжа (координаты Лагранжа, согласно традиционным представлениям механики сплошных сред, индивидуализируют точки континуума, являясь для каждой из них уникальной меткой¹⁴):

$$x^k = x^k(X^1, X^2, X^3, X^4).$$

Таким образом, в дальнейшем, интерпретируя развиваемую теорию в аспекте механики деформируемых сред, можно считать, что полевые переменные φ^k есть эйлеровы координаты: $\varphi^k = x^k$.

В принципе деформацию сплошного тела можно описывать обратным отображением (так называемое обратное лагранжево описание):

$$X^\beta = X^\beta(x^1, x^2, x^3, t).$$

¹³См., например: Truesdell C., Toupin R.A. The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, V. III/1 (ed. S. Flugge). Berlin: Springer, 1960. P. 226–793.

¹⁴Различные представления деформации сплошного тела и теория тензоров конечных деформаций приводятся в известных монографиях [18–20].



Тогда роль физических полевых величин будут играть переменные Лагранжа. Ни одно из описаний — прямое лагранжево и обратное лагранжево — не имеет никаких преимуществ по сравнению с другим. Исторически сложилось так, что широкое распространение получило лишь прямое описание. И только в последнее время обратное описание стало проникать в работы по нелинейной механике деформируемого твердого тела (см., например, [5]).

Нелинейная теория упругости в варианте прямого лагранжево описания — великолепный пример теории, реализуемой с помощью принципа наименьшего действия. Пространство – время при этом распадается на трехмерное евклидово пространство и абсолютное время, а лагранжиан равен разности кинетической и потенциальной энергий. Полевые переменные в этом случае суть компоненты вектора перемещения.

Отправным пунктом для математического описания физических полей служит принцип Гамильтона – Остроградского (или принцип наименьшего действия), который гласит, что действительное поле реализуется таким образом, что действие оказывается экстремальным, т.е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k :

$$\delta\mathfrak{S} = 0. \quad (1.10)$$

Здесь не подвергаются варьированию пространственно-временные координаты X^β и 4-область интегрирования. В аналитической механике такому способу варьирования отвечают так называемые изохронные вариации.

Принцип наименьшего действия позволяет сформулировать задачу о вычислении поля внутри 4-области \mathcal{D} как вариационную задачу об отыскании экстремумов интегрального функционала (1.1).

Осознанное оперирование с вариацией интеграла действия \mathfrak{S} подразумевает ясное и строгое определение различных видов варьирования как самих полевых переменных φ^k , так и пространственно-временных координат X^β . Поэтому мы начнем с базовых понятий и определений.

Основным исходным элементом, необходимым для определения понятия вариации, является однопараметрическое семейство (группа) геометрических (точечных) преобразований пространственно-временных координат и физических полей

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k), \quad (1.11)$$

где

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad (1.12)$$

причем

$$\mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \quad \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi^k. \quad (1.13)$$

Величина ε — параметр группы преобразований (1.12), который может быть скалярным, векторным или тензорным. В дальнейшем изложении параметр группы обычно будет считаться скалярным.

Следует обратить внимание на тот факт, что пространственно-временные координаты X^β и физические поля φ^k входят в группу преобразований (1.12) явно несимметрично, ибо закон преобразования (1.12) не допускает трансформацию переменных X^β , зависящую от полевых переменных φ^k . Подобного рода ограничение не является непреодолимым препятствием для построения теории поля. Впоследствии мы рассмотрим более широкий спектр однопараметрических геометрических преобразований

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad (1.14)$$

и соответствующие обобщенные геометрические симметрии действия с целью устранения указанной несимметричности.

Итак, мы пока ограничиваемся случаем, когда трансформация (1.12) пространственно-временных координат X^β не зависит от динамических переменных φ^k . В большинстве практически важных



случаев однопараметрические группы будут принадлежать именно такому типу преобразований (fiber-preserving transformations). В частности, можно вести речь только о преобразованиях пространственно-временных координат (base transformations)

$$\tilde{X}^\beta = X^\beta(X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \varphi^k$$

или только полевых переменных (standard transformations)

$$\tilde{X}^\beta = X^\beta, \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon).$$

Исключительный интерес представляют однопараметрические геометрические группы преобразований, которые не изменяют форму функционала действия и его величину (или при неизменной форме функционала изменение величины функционала действия является бесконечно малым, порядка более высокого, чем ε) любой 4-области пространственно-временного многообразия, т.е.

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X} \quad (1.15)$$

при преобразовании координат и полей, согласно (1.12), и соответствии пространственно-временных 4-областей интегрирования в переменных X^β и \tilde{X}^β .

Указанные группы обычно называют геометрическими группами абсолютной инвариантности функционала действия, а также абсолютными геометрическими симметриями действия по Гамильтону (или просто — вариационными симметриями действия).

Если при неизменной форме функционала действия изменение его значения, отвечающее преобразованию (1.12), является бесконечно малой величиной, порядка более высокого, чем ε , то говорят об инфинитезимальной инвариантности функционала действия под действием геометрической группы преобразований (1.12). В этом случае равенство (1.15) выполняется с погрешностью $o(\varepsilon)$. Группа преобразований (1.12) при этом называется *инфинитезимальной геометрической вариационной симметрией действия*. Ясно, что абсолютная инвариантность функционала действия влечет его инфинитезимальную инвариантность.

Прежде чем дать дополнительный комментарий понятию абсолютной (или инфинитезимальной) инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (1.12), введем представление об эквивалентности функционалов ([15, р. 230]) \mathfrak{S} и $\tilde{\mathfrak{S}}$. Функционалы

$$\mathfrak{S} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X, \quad (1.16)$$

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X} \quad (1.17)$$

называются эквивалентными при их преобразовании группой (1.12) тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$.

Заметим, что абсолютная инвариантность функционала действия относительно однопараметрической группы преобразований (1.12) означает не только сохранение величины действия, т.е. не только эквивалентность функционалов в смысле выполнения равенства¹⁵

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S} \quad (1.18)$$

или

$$\tilde{\mathcal{L}} d^4 \tilde{X} = \mathcal{L} d^4 X, \quad (1.19)$$

¹⁵Или в случае, когда речь идет об инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (1.12), приводимое далее равенство должно удовлетворяться с точностью до бесконечно малой величины порядка выше, чем ε .



где $\tilde{\mathcal{L}}$ — «естественная» плотность лагранжиана, выраженная с помощью новых пространственно-временных координат \tilde{X}^β и физических полей $\tilde{\varphi}^k$ в результате замены переменных согласно (1.12)

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta),$$

но и подразумевает, что в условии (1.19) также выполнена замена

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) \rightarrow \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta), \quad (1.20)$$

гарантирующая неизменность формы функционала действия.

Итак, в результате преобразования однопараметрической геометрической группой (1.12), если только при этом величина действия не изменяется, «естественная» плотность лагранжиана преобразуется (возможно, в случае, когда речь идет об инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (1.12), с точностью до бесконечно малой величины, порядка выше, чем ε) в соответствии с формулой (1.19), которую можно также представить в виде

$$\det \left(\frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha} \right) \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta). \quad (1.21)$$

Абсолютная инвариантность функционала действия относительно группы геометрических преобразований (1.12) означает, что (1.21) выполняется после замены (1.20), т.е.

$$\det \left(\frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha} \right) \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta). \quad (1.22)$$

Это необходимое и достаточное условие абсолютной инвариантности функционала действия относительно группы геометрических преобразований (1.12).

Равенство (1.21) выступает в качестве критерия эквивалентности функционалов (1.16), (1.17) относительно группы геометрических преобразований (1.12).

Инфинитезимальная инвариантность функционала действия (в отличие от абсолютной инвариантности, выражаемой критерием (1.22)) относительно группы преобразований (1.12) означает, что равенство (1.22) выполняется с точностью до бесконечно малой величины порядка выше, чем ε . Условие инфинитезимальной инвариантности функционала действия, к сожалению, не может быть выражено чисто как условие на «естественную» плотность лагранжиана. Далее условие инфинитезимальной инвариантности действия будет сформулировано как условие на вариации «естественной» плотности лагранжиана и вариации пространственно-временных координат.

Рассмотрим сначала однопараметрические преобразования (1), т.е. полагаем, что пространственно-временные координаты X^β не варьируются. Полная вариация полевой переменной φ^k в этом случае определяется как

$$\delta \varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \quad (1.23)$$

Поскольку дифференцирование по пространственно-временным координатам и параметру ε перестановочны, операторы ∂_β и δ также перестановочны

$$\delta \partial_\beta = \partial_\beta \delta. \quad (1.24)$$

В случае, когда лагранжиан \mathcal{L} зависит от градиентов переменных поля порядка не выше первого, вариациям физических полей φ^k при неварьируемых пространственно-временных координатах отвечает вариация действия ([9, с. 152; 15, р. 223, 224]):

$$\delta \mathfrak{S} = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \delta \varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \partial_\beta (\delta \varphi^k) \right\} d^4 X,$$



или, выделяя дивергентное слагаемое, —

$$\delta\mathfrak{S} = \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right\} \delta\varphi^k d^4X + \int \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \delta\varphi^k \right) d^4X. \quad (1.25)$$

Исчезающим как на границе пространственной области интегрирования, так и на границах временного интервала вариациям физических полей φ^k будет отвечать вариация действия

$$\delta\mathfrak{S} = \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right\} \delta\varphi^k d^4X. \quad (1.26)$$

Стационарность действия (при произвольных допустимых вариациях поля) необходимо влечет уравнения Эйлера – Лагранжа (уравнения поля):

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} = 0. \quad (1.27)$$

Действительное физическое поле (при условии его гладкости) должно удовлетворять системе уравнений Эйлера – Лагранжа.

Обобщение уравнений Эйлера – Лагранжа на тот случай, когда плотность лагранжиана зависит от частных производных порядка выше первого, есть¹⁶

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)} - \dots = 0. \quad (1.28)$$

Оператор \mathcal{E}_k , определенный согласно (1.28), называется оператором Эйлера (его применение к лагранжиану дает так называемую вариационную производную лагранжиана). Вариационная производная лагранжиана есть 1-ковариантный пространственный вектор.

Структура дифференцирований в операторе Эйлера становится более понятной и обзримой, если ввести обозначения

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^l} = \partial_l, \quad \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_s}\varphi^l)} = \partial_s^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s} \quad (1.29)$$

и записать его символически в форме (см. также [15, р. 223])

$$\mathcal{E}_l = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_s} \partial_s^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s}. \quad (1.30)$$

Здесь и в дальнейшем в такого рода суммах при $s = 0$ подразумевается слагаемое ∂_l .

Уравнения Эйлера – Лагранжа (1.28) *ковариантны* относительно группы преобразований (1), т.е. при заменах пространственно-временных координат X^β . Действительно, прямой расчет показывает, что¹⁷

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = \det \left(\frac{\partial\tilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha} \right) \tilde{\mathcal{E}}_k(\tilde{\mathcal{L}}), \quad (1.31)$$

где

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(\tilde{\mathcal{L}}) \equiv \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\tilde{\varphi}^k} - \tilde{\partial}_\beta \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\tilde{\partial}_\beta\tilde{\varphi}^k)} + \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\beta \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\tilde{\partial}_\gamma\tilde{\partial}_\beta\tilde{\varphi}^k)} - \dots, \quad (1.32)$$

$$\det \left(\frac{\partial\tilde{X}^\lambda}{\partial X^\mu} \right) \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma\tilde{\partial}_\alpha\tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\beta)$$

при условии, что переменные φ^k , X^β и $\tilde{\varphi}^k$, \tilde{X}^β связаны формулами преобразования (1). На основании (1.31) можно заключить, что выполнение уравнения $\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0$ влечет выполнение уравнения $\tilde{\mathcal{E}}_k(\tilde{\mathcal{L}}) = 0$

¹⁶Мы не будем в деталях развивать далее теорию поля для лагранжиана, зависящего от градиентов полевых переменных φ^k , порядка выше первого, а ограничимся лишь минимумом необходимых в прикладном аспекте формул. По поводу соответствующего обобщения см., например, [5, р. 116, 117].

¹⁷См., например, [7, с. 213–221]. Инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (1) при этом не требуется. Более того сама замена переменных (1) может и не быть однопараметрической группой.



и обратно. Следовательно, в новых переменных *правило* составления уравнений Эйлера – Лагранжа не изменяется: они составляются по той же самой схеме, что и в исходных переменных, но для преобразованной согласно (1.32) «естественной» плотности лагранжиана.

Ковариантность уравнений Эйлера – Лагранжа относительно более широкой группы преобразований (1.14) рассмотрена, например, в [14, с. 323–327; 15, р. 230–235]. Заметим, что в литературе чаще всего говорят (что противоречит действительному положению дел) об инвариантности уравнений Эйлера – Лагранжа. Строгое определение инвариантности системы уравнений относительно группы преобразований известно из группового анализа и означает сохранение формы уравнений при их преобразовании к новым переменным согласно (1.14). Относительно произвольной однопараметрической геометрической группы преобразований (1.14) уравнения Эйлера – Лагранжа, вообще говоря, не инвариантны, но они ковариантны, поскольку в новых переменных не изменяется правило их составления.

Полные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k при их преобразовании согласно (1.12) определены:

$$\delta X^\beta = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta \varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \quad (1.33)$$

Полная вариация полевой переменной φ^k в данной точке пространства – времени складывается из изменения поля вследствие изменения его функциональной зависимости и изменения, вызванного перемещением δX^β в близлежащую точку пространства – времени. Поэтому мы определяем частичную вариацию $\bar{\delta}\varphi^k$ полевой переменной φ^k с помощью соотношения

$$\delta \varphi^k = \bar{\delta} \varphi^k + \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha. \quad (1.34)$$

В современной теории поля частичную вариацию полевой переменной часто называют локальной (а также функциональной) вариацией, а полную вариацию – субстанциональной. Второе слагаемое в правой части соотношения (1.34) можно назвать конвективной вариацией. В разд. 9 будет показано, что частичная вариация поля под действием однопараметрической геометрической группы преобразований соответствует характеристике инфинитезимального оператора группы.

Как уже отмечалось, инфинитезимальная инвариантность функционала действия относительно группы преобразований (1.12) означает, что равенство (1.22) выполняется с точностью до бесконечно малой величины, порядка выше, чем ε . Так как

$$\det \left(\frac{\partial \tilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha} \right) = 1 + \frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} + o(\varepsilon),$$

то критерий инфинитезимальной инвариантности функционала действия имеет вид

$$\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \quad (1.35)$$

где вариация лагранжиана $\delta \mathcal{L}$ – линейная по ε часть приращения

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta). \quad (1.36)$$

Если лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, то вариация лагранжиана, очевидно, равна

$$\delta \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \delta X^\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \delta \varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \delta (\partial_\beta \varphi^k).$$

Учитывая затем формулу для полной вариации первых градиентов поля $\delta(\partial_\beta \varphi^k) = \partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) \delta X^\gamma$, а также $\delta \varphi^k = \bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma \varphi^k) \delta X^\gamma$, получаем

$$\delta \mathcal{L} = (\partial_\gamma \mathcal{L}) \delta X^\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k), \quad (1.37)$$



или

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right) \bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \partial_\beta \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k \right). \quad (1.38)$$

Оценка приращения (1.36) в случае, когда лагранжиан зависит от градиентов поля более высокого порядка, будет дана в разд. 9.

Полное варьирование действия (при условии, что «естественная» плотность лагранжиана зависит от градиентов поля порядка не выше первого) по пространственно-временным координатам X^β и физическим полям φ^k приводит к следующему результату [7, с. 246–248; 10, р. 168–176]:

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{S} &= \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} \bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \frac{\partial}{\partial X^\beta}(\mathcal{L}\delta X^\beta) \right\} d^4X = \\ &= \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right\} \bar{\delta}\varphi^k d^4X + \int \partial_\beta \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k + \mathcal{L}\delta X^\beta \right\} d^4X. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Если функционал \mathfrak{S} инвариантен¹⁸ относительно группы преобразований (1.12), то его первая вариация (1.39), соответствующая варьированию координат и полей по закону (1.12), очевидно, будет равна нулю.

Сделаем одно важное замечание по поводу вариации действия в (1.10) и (1.39). В (1.39) варьирование действия отвечает одной вполне конкретной группе преобразований координат и полей согласно (1.12). Вариационное уравнение (1.10) должно выполняться при произвольных допустимых однопараметрических преобразованиях полей, не обязательно являющихся однопараметрическими группами. Пространственно-временные координаты при этом считаются не подлежащими никаким преобразованиям.

Инфинитезимальный критерий инвариантности функционала действия (1.35) относительно геометрической группы преобразований (1.12) может быть заменен более слабым условием, следуя [21],

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta X^\alpha)}{\partial X^\alpha} = \varepsilon \frac{\partial B^\gamma}{\partial X^\gamma} \quad (1.40)$$

так, что первая вариация действия будет вычисляться в виде $\delta\mathfrak{S} = \varepsilon \int (\partial_\gamma B^\gamma) d^4X$, где в правой части подынтегральное выражение представляет собой дивергенцию векторного поля B^γ .

Здесь 1-контравариантный отсчетный вектор B^γ может зависеть от пространственно-временных координат и полей (включая и градиенты поля порядка равного, большего или меньшего, чем входящие в лагранжиан) $B^\gamma = B^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\beta\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\nu)$.

Группа преобразований (1.12) в случае, когда выполняется (1.40) с некоторым вектором B^γ , называется инфинитезимальной дивергентной симметрией функционала действия (см. [14, с. 358]).

Формула (1.39) остается справедливой и для более широкого класса преобразований, в которые пространственно-временные координаты X^β и физические поля φ^k входят уже совершенно симметрично

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad (1.41)$$

где, по-прежнему, $\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = X^\beta$, $\Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi^k$.

Инвариантность функционала действия относительно обобщенных геометрических преобразований (1.41) исследуется в разд. 6.

2. ТЕОРЕМА НЕТЕР ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Теорема Нетер (по поводу доказательства см. [7, с. 248–250; 10, р. 176–178; 11, с. 377–386]) является классическим результатом теории поля и устанавливает закон сохранения, соответствующий однопараметрической группе геометрических преобразований, не изменяющих функционала

¹⁸Или, делая тем самым более общее предположение, — инфинитезимально инвариантен.



действия (или изменяющих его, но на бесконечно малую величину порядка выше, чем ε) любой 4-области пространственно-временного многообразия. Другими словами, инвариантность функционала действия (вариационная симметрия действия) относительно однопараметрической геометрической группы преобразований (1.12)

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k)$$

порождает некоторый дивергентный закон сохранения¹⁹.

Пока мы рассмотрим ограниченный вариант теоремы Нетер для геометрических преобразований (1.12) и случая, когда лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого.

Требование инвариантности действия прежде всего выражает основные свойства пространства – времени, хотя отнюдь и не ограничивается лишь этими последними свойствами.

Априорно можно указать следующие преобразования 4-пространства Минковского, относительно которых действие инвариантно (и, следовательно, инвариантны уравнения поля):

- 1) трансляции начала координат (однородность 4-пространства – времени);
- 2) вращения 4-пространства – времени, содержащие как обычные повороты в 3-пространстве, так и преобразования Лоренца (Н.А. Lorentz) в собственном смысле этого слова (изотропия пространства и специальный принцип относительности);
- 3) зеркальные отражения (инверсии) и обращение времени.

Произвольные точечные преобразования координат в пространстве Минковского, т.е. переход к криволинейным координатам (общий принцип относительности – отсутствие преимущественных систем отсчета), не являются, вообще говоря, симметриями действия и уравнений поля. Но можно вести речь о ковариантности уравнений поля по отношению к указанным преобразованиям.

Перечисленным преобразованиям, относительно которых уравнения поля ковариантны, соответствуют фундаментальные законы сохранения, имеющие смысл сохранения импульса, момента импульса и энергии (всего десять законов сохранения). Если удастся разыскать иные группы инвариантности функционала действия и получить дополнительный нетривиальный закон сохранения, то его принято называть существенным²⁰.

Исходным пунктом рассуждений является полученная ранее формула для полной вариации действия, отвечающей заданной однопараметрической группе преобразований (1.12).

Поскольку физические полевые величины φ^k в любом случае обеспечивают стационарность действия, то уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} = 0$$

должны удовлетворяться и, следовательно, вариацию действия (1.39) можно вычислить в виде

$$\delta \mathfrak{S} = \int \partial_\beta \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \bar{\delta} \varphi^k + \mathcal{L} \delta X^\beta \right\} d^4 X, \quad (2.1)$$

¹⁹Общая теория законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, следующих из существования геометрических вариационных симметрий действия, излагается, например, в [11, с. 377–386; 13, с. 337–362]. Дивергентный закон сохранения является обобщением известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия первого интеграла и всегда имеет форму дивергентного дифференциального уравнения $\partial_\beta J^\beta = 0$, где $J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\mu)$ – 1-ковариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений поля. Тривиальность закона сохранения означает, что уравнение $\partial_\beta J^\beta = 0$ удовлетворяется тождественно для любых физических полей φ^k ; вектор J^β в этом случае называется нулевой дивергенцией. Тривиальный закон сохранения никак не связан с той или иной системой уравнений поля, поскольку выполняется на любом решении произвольно выбранной системы дифференциальных уравнений в частных производных и поэтому не несет никакой информации о решениях уравнений поля. Общая форма тривиального закона сохранения известна (см., например, [13, с. 341–343]) в силу известной дифференциальной структуры нулевой дивергенции в пределах звездообразных областей: $J^\beta = \partial_\alpha L^{\sigma\beta}$, где $L^{\sigma\beta} = L^{\sigma\beta}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\mu)$ – антисимметричный тензор второго ранга ($L^{\sigma\beta} = -L^{\beta\sigma}$).

²⁰Часто оказывается невозможным установить физический смысл дополнительных существенных законов сохранения. Что касается теории упругости, то уже не поддаются физической интерпретации законы сохранения, следующие из изотропии пространства и возможности преобразования масштаба координатных осей.



или, учитывая связь между частичной и полной вариацией поля φ^k , —

$$\delta\mathfrak{S} = \int \partial_\beta \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \left(\delta\varphi^k - \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha \right) + \mathcal{L} \delta X^\beta \right\} d^4 X. \quad (2.2)$$

Вводя 1-контравариантный отсчетный четырехмерный вектор

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \left(\delta\varphi^k - \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha \right) + \mathcal{L} \delta X^\beta \right\}, \quad (2.3)$$

вариацию действия, отвечающую однопараметрической группе преобразований (1.12), можно также представить в форме

$$\delta\mathfrak{S} = \varepsilon \int \partial_\beta J^\beta d^4 X. \quad (2.4)$$

Не составляет труда получить для вектора J^β вместо (2.3) следующее выражение:

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \delta\varphi^k + \left(\mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right) \delta X^\alpha \right\}. \quad (2.5)$$

Воспользуемся теперь предположением об инвариантности функционала действия относительно однопараметрической группы преобразований (1.12) (достаточно, однако, предположить, что функционал действия не изменяет своей величины с точностью до малых порядка выше, чем ε):

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k).$$

Ясно, что тогда в (2.4) следует полагать $\delta\mathfrak{S} = 0$ и соответствующий закон сохранения имеет следующую четырехмерную дивергентную форму:

$$\partial_\beta J^\beta = 0. \quad (2.6)$$

Таким образом, поток 4-вектора J^β через любую поверхность, замкнутую в пространстве – времени, равен нулю:

$$\oint_{\partial} J^\beta N_\beta dA = 0. \quad (2.7)$$

Теорема Нетер в принципе не может дать более общего закона сохранения, чем (2.6), где четырехмерный вектор J^β удобно представить в форме

$$-J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ S_{.k}^{\beta.} \delta\varphi^k + P_{.\alpha}^{\beta.} \delta X^\alpha \right\}, \quad (2.8)$$

обозначив через $S_{.k}^{\beta.}$ и $P_{.\alpha}^{\beta.}$ противоположные величины коэффициентов при полных вариациях $\delta\varphi^k$ и δX^α соответственно в (2.5).

Из каждого соотношения (2.7) может быть получен инвариант поля, существующего в неограниченной среде, не изменяющий своего значения с течением времени. Действительно, рассмотрим четырехмерную область в форме цилиндра, основания которого $X^4 = C_1$, $X^4 = C_2$ есть гиперплоскости, перпендикулярные оси времени. Поток 4-вектора J^β через границу этой области равен нулю. Если физические поля достаточно быстро затухают на бесконечности, то, удаляя боковую поверхность цилиндра в бесконечность, находим, что

$$\int_{X^4=C_1} J^\beta N_\beta d^3 X + \int_{X^4=C_2} J^\beta N_\beta d^3 X = 0.$$

Поскольку на гиперплоскостях $X^4 = C_1$, $X^4 = C_2$ компоненты нормали $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N_3 = 0$ и соответственно $N_4 = -1$, $N_4 = 1$, то

$$\int_{X^4=C_1} J^4 d^3 X = \int_{X^4=C_2} J^4 d^3 X,$$



т.е. интеграл по неограниченному 3-пространству

$$\int J^4 d^3 X \quad (2.9)$$

не зависит от времени.

Ясно, что полученный только что результат обобщается на случай произвольной гиперповерхности в пространстве Минковского $X^4 = X^4(X^1, X^2, X^3)$, края которой уходят в бесконечно удаленную точку: интеграл

$$\int_{X^4=X^4(X^1, X^2, X^3)} J^\beta N_\beta dA \quad (2.10)$$

не зависит от формы указанной гиперповерхности.

Компоненты вектора J^β (вектор тока), очевидно, без проблем вычисляются по формуле (2.3), если известна однопараметрическая группа инвариантности функционала действия²¹:

$$J^\beta = \mathcal{L} \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \left[\left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} - \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\alpha(X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \right]. \quad (2.11)$$

Заметим, что каждой инфинитезимальной дивергентной симметрии действия, которая определяется обобщенным условием (1.40), соответствует закон сохранения

$$\partial_\beta (J^\beta - B^\beta) = 0. \quad (2.12)$$

3. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ИНВАРИАНТНОСТИ ФУНКЦИОНАЛА ДЕЙСТВИЯ

Мы рассмотрим основные группы инвариантности гамильтонова действия и формулировку соответствующих законов сохранения. Изложение в формальном плане будет в основном опираться на материал, представленный в [2, 10]. Законы сохранения для статического упругого поля, следующие из теоремы Нетер, обсуждаются также в [14, с. 355–358].

3.1. Преобразования сдвига в пространстве – времени

Зафиксируем отсчетный 4-индекс α и рассмотрим однопараметрическую группу трансляций пространства – времени вдоль прямолинейной α -оси:

$$X^\beta \rightarrow \tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon) = X^\beta + \varepsilon \delta_\alpha^\beta. \quad (3.1)$$

Такого рода преобразования включают сдвиги временной координаты.

Функционал действия любой 4-области пространственно-временного многообразия должен быть абсолютно инвариантен относительно группы трансляций пространства – времени, если плотность лагранжиана явно не зависит от координат X^β (т.е. $\partial_\alpha^{\text{expl}} \mathcal{L} = 0$), следовательно, для координатного направления α 4-вектор $J_{(\alpha)}^\beta = T_{\alpha}^{\beta \cdot}$, где

$$T_{\alpha}^{\beta \cdot} = \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}, \quad (3.2)$$

и канонический закон сохранения, соответствующий группе трансляций пространства – времени, есть

$$\partial_\beta T_{\alpha}^{\beta \cdot} = 0. \quad (3.3)$$

Полученный канонический закон сохранения может быть найден также с помощью следующего рассуждения. Если лагранжиан явно не зависит от пространственно-временных координат X^β , то, вычисляя полную производную, находим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial X^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^s)} \frac{\partial}{\partial X^\beta} \frac{\partial \varphi^s}{\partial X^\gamma}$$

²¹Известны функциональные зависимости $\mathcal{X}^\beta(\cdot, \cdot)$, $\Phi^k(\cdot, \cdot, \cdot)$.



и, заменяя в этом уравнении производную лагранжиана по полевой переменной согласно уравнениям Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^j} = \frac{\partial}{\partial X^\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^j)},$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} = \frac{\partial}{\partial X^\gamma} \left(\left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial X^\beta} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^j)} \right),$$

откуда немедленно получаем

$$\frac{\partial}{\partial X^\gamma} \left(\mathcal{L} \delta_\beta^\gamma - (\partial_\beta \varphi^j) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^j)} \right) = 0.$$

Заметим, что тензор $T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ не симметричен, однако само его выражение (3.2), обеспечивающее выполнение закона сохранения (3.3), не уникально: трансформируя тензор $T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ по формуле $T_{\alpha}^{\beta\cdot} + \partial_\gamma B_{\alpha}^{\gamma\beta\cdot}$, где тензор $B_{\alpha}^{\gamma\beta\cdot} = B_{\alpha}^{\gamma\beta\cdot}(\varphi^k, \partial_\lambda \varphi^k, \partial_\lambda \partial_\mu \varphi^k, \dots, X^\nu)$ антисимметричен при перестановке контравариантных индексов $B_{\alpha}^{\gamma\beta\cdot} = -B_{\alpha}^{\beta\gamma\cdot}$, также получаем закон сохранения:

$$\partial_\beta (T_{\alpha}^{\beta\cdot} + \partial_\gamma B_{\alpha}^{\gamma\beta\cdot}) = 0.$$

Указанную трансформацию тензора $T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ можно использовать для построения симметричного тензора, для которого будет по-прежнему справедлив закон сохранения вида (3.3).

Если плотность лагранжиана зависит явно от пространственно-временных координат X^β , то дивергентный закон сохранения нарушается, и для 4-вектора $J_{(\alpha)}^{\beta}$ имеем закон «сохранения»:

$$\partial_\beta T_{\alpha}^{\beta\cdot} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}}. \quad (3.4)$$

Для доказательства достаточно заметить, что, с одной стороны,

$$\delta \mathfrak{S} = \varepsilon \int \partial_\beta J_{(\alpha)}^{\beta} d^4 X, \quad (3.5)$$

а с другой — непосредственное вычисление вариации действия приводит к

$$\delta \mathfrak{S} = \varepsilon \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} d^4 X. \quad (3.6)$$

Сравнивая (3.5) и (3.6), приходим к (3.4).

Компоненты канонического 4-тензора $T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ имеют размерность плотности энергии²². Тензор $T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ часто называют также тензором энергии – импульса (см., например, [2, с. 105–109, 345–349]), поскольку канонические уравнения баланса энергии ($\alpha = 4$) и импульса являются непосредственным следствием канонического закона «сохранения» (3.4), точнее не сохранения (применительно к уравнению (3.4) лучше говорить об уравнении баланса).

Действительно, чтобы, например, вывести канонические уравнения баланса импульса, заметим сначала, что три первых уравнения (3.4) можно представить следующим образом:

$$\partial_4 T_{\alpha}^{4\cdot} - \partial_\beta P_{\alpha}^{\beta\cdot} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \quad (3.7)$$

где $P_{\alpha}^{\beta\cdot} = -T_{\alpha}^{\beta\cdot}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) — тензор напряжений Эшелби. Затем, учитывая $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 x^k)} = \rho_R v_k$, преобразуем уравнение (3.7) к виду

$$-\rho_R \partial_4 (v_k \partial_\alpha x^k) - \partial_\beta P_{\alpha}^{\beta\cdot} = f_{\alpha}^{\text{inh}} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

²²Этот тензор называется каноническим тензором энергии [22, с. 143, 144]. Обратим внимание читателя на тот факт, что, согласно определению канонического тензора энергии, его естественное координатное представление — 1-контравариантное и 1-ковариантное.



обозначая при этом $v^k = \partial_4 \varphi^k$, что означает, что скорость есть 1-контравариантный пространственный вектор, и

$$f_\alpha^{\text{inh}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Принимая во внимание далее, что

$$-\mathcal{P}_\alpha = \rho_R v_k \partial_\alpha \varphi^k, \quad (3.8)$$

приходим к уравнению баланса канонического импульса

$$\partial_4 \mathcal{P}_\alpha - \partial_\beta P_\alpha^{\beta \cdot} = f_\alpha^{\text{inh}} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (3.9)$$

Здесь производные по времени вычисляются при фиксированных лагранжевых координатах.

Уравнение (3.8) ясно указывает на то, что канонический импульс — 1-ковариантный отсчетный вектор. Это уравнение можно также представить в виде $\mathcal{P}_\alpha = \rho_R v_\alpha$, где $v_\alpha = -v_k \partial_\alpha \varphi^k$ есть отсчетный вектор скорости, который в силу определения представляет собой 1-ковариантный отсчетный вектор²³.

Опираясь на результаты, изложенные в предыдущем разделе, заключаем, что 1-ковариантный отсчетный вектор

$$P_\beta = - \int_{X^4 = X^4(X^1, X^2, X^3)} T_{\beta \cdot}^{\gamma \cdot} N_\gamma dA$$

не зависит от координаты X^4 . Этот вектор обычно называют полным 4-импульсом поля (или волновым импульсом поля).

Определяя «естественную» плотность функции Гамильтона,

$$\mathcal{H} = (\partial_4 \varphi^j) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \varphi^j)} - \mathcal{L}, \quad (3.10)$$

для компоненты P_4 полного 4-импульса поля находим

$$P_4 = \int_{X^4 = \text{const}} \mathcal{H} d^3 X, \quad (3.11)$$

т.е. эта компонента представляет собой полную энергию поля и, поскольку значение интеграла не зависит от положения гиперповерхности $X^4 = \text{const}$, полная энергия поля сохраняется. Здесь $d^3 X$ — «естественный» элемент объема трехмерного пространства.

На основании (3.10) можно заключить, что выполняется равенство $T_{\cdot 4}^4 = -\mathcal{H}$.

Закон «сохранения» (3.4) при $\alpha = 4$ приводит к уравнению

$$\partial_4 T_{\cdot 4}^4 + \partial_\beta T_{\cdot 4}^{\beta \cdot} = \partial_4^{\text{expl}} \mathcal{L} \quad (\beta = 1, 2, 3)$$

или, поскольку $T_{\cdot 4}^{\beta \cdot} = -v^k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} = v^k S_{\cdot k}^{\beta \cdot}$, $S_{\cdot k}^{\beta \cdot} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}$, получаем уравнение баланса энергии

$$\partial_4 \mathcal{H} - \partial_\beta (S_{\cdot k}^{\beta \cdot} v^k) = -\partial_4^{\text{expl}} \mathcal{L} \quad (k = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3).$$

Здесь $Q^\beta = S_{\cdot k}^{\beta \cdot} v^k$ есть вектор Умова – Пойнтинга. Его естественные компоненты 1-контравариантные отсчетные.

²³ Не следует путать компоненты v^k и v_α , представляющие различные векторы, — пространственную и отсчетную скорости соответственно.



3.2. Преобразования поворота трехкомпонентного поля

Функционал действия \mathfrak{S} , если отождествить полевые переменные φ^k ($k = 1, 2, 3$) с декартовыми эйлеровыми координатами x_k , в силу принципа объективности (галилеевой инвариантности, принципа относительности Галилея) должен быть абсолютно инвариантен относительно преобразований поворота:

$$\tilde{x}_k = Q_{kj}x_j, \quad (3.12)$$

где Q_{kj} — компоненты ортогонального тензора второго ранга. Пространственно-временные координаты при этом не подвергаются никакому преобразованию, т.е. $\tilde{X}^\gamma = X^\gamma$ ($\gamma = 1, 2, 3, 4$).

Инвариантность действия относительно поворотов эйлерова координатного репера является проявлением изотропии эйлерова координатного пространства, т.е. отсутствия предпочтительных направлений в этом пространстве.

Выясним прежде всего условия, при которых действие будет абсолютно инвариантно относительно преобразований поворота трехкомпонентного поля x_k .

Предполагая, что в силу галилеевой инвариантности относительно сдвигов эйлеровых координат лагранжиан не зависит явно от x_k , можно считать, что абсолютная инвариантность действия относительно преобразований поворота (3.12) означает выполнение равенства

$$\mathcal{L}(\partial_\alpha \tilde{x}_k, \partial_t \tilde{x}_k, X^\beta, t) = \mathcal{L}(\partial_\alpha x_k, \partial_t x_k, X^\beta, t) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

для произвольного ортогонального тензора второго ранга Q_{kj} , т.е.

$$\mathcal{L}(Q_{kj}\partial_\alpha x_j, Q_{kj}\partial_t x_j, X^\beta, t) = \mathcal{L}(\partial_\alpha x_k, \partial_t x_k, X^\beta, t) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (3.14)$$

Последнее обстоятельство позволяет заключить, что выражение $\mathcal{L}(Q_{kj}\partial_\alpha x_j, Q_{kj}\partial_t x_j, X^\beta, t)$ на самом деле не зависит от Q_{kj} , если только $\Phi_{sl} = Q_{sm}Q_{lm} - \delta_{sl} = 0$. Поэтому можно сформулировать экстремальную задачу $\mathcal{L}(Q_{kj}\partial_\alpha x_j, Q_{kj}\partial_t x_j, X^\beta, t) \rightarrow \text{extremum}$, т.е.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(Q_{kj}\partial_\alpha x_j, Q_{kj}\partial_t x_j, X^\beta, t)}{\partial Q_{kj}} = 0$$

при ограничении $\Phi_{sl} = Q_{sm}Q_{lm} - \delta_{sl} = 0$. Вводя множители Лагранжа λ_{sl} , сформулируем условие экстремальности функции Лагранжа $\mathcal{L} - \lambda_{sl}\Phi_{sl}$ в форме

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{kj}} - \lambda_{sl} \frac{\partial \Phi_{sl}}{\partial Q_{kj}} = 0,$$

откуда, сворачивая с Q_{ij} , находим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{kj}} Q_{ij} - \lambda_{sl} (\delta_{sk} \delta_{jm} Q_{lm} + \delta_{lk} \delta_{mj} Q_{sm}) Q_{ij} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{kj}} Q_{ij} = \lambda_{ki} + \lambda_{ik}.$$

Следовательно, тензор второго ранга $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{kj}} Q_{ij}$ симметричен. Поскольку для произвольного ортогонального тензора второго ранга Q_{ij}

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{kj}} Q_{ij} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \tilde{x}_k)} (\partial_\alpha \tilde{x}_j) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \tilde{x}_k)} (\partial_t \tilde{x}_j) \right) Q_{ij},$$

то симметричной будет правая часть этого равенства, которая при $Q_{ij} = \delta_{ij}$ будет равна

$$M_{ik} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x_k)} (\partial_\alpha x_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t x_k)} (\partial_t x_i) \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (3.15)$$

Таким образом, тензор второго ранга M_{ik} симметричен.

Замечая, что тензор второго ранга $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t x_k)} (\partial_t x_i) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k} v_i = \rho_R v_i v_k$ ($v_k = \partial_t x_k$) симметричен,



приходим к выводу, что тензор $(\partial_\alpha x_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x_k)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) также симметричен. Он лишь скалярным множителем отличается от тензора напряжений Коши, определяемого согласно

$$T_{\cdot k}^l = -J^{-1}(\partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \quad (\beta = 1, 2, 3). \quad (3.16)$$

Итак, действие абсолютно инвариантно относительно поворотов полевых переменных при выполнении следующего условия симметрии:

$$(\partial_\alpha x_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x_k)} = (\partial_\alpha x_k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x_i)} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (3.17)$$

Найдем законы сохранения, соответствующие инвариантности действия относительно поворотов трехкомпонентного поля x_k .

Бесконечно малый поворот полевых переменных φ^k можно задать линейными преобразованиями:

$$\tilde{X}^\beta = X^\beta \quad (\beta = 1, 2, 3, 4), \quad \tilde{x}_k = x_k + \omega_{kj} x_j \quad (k, j = 1, 2, 3),$$

где $\omega_{kj} = -\omega_{jk}$ ($k, j = 1, 2, 3$) есть антисимметричный второго ранга, компоненты которого выступают как тензорные параметры группы малых поворотов. Естественные компоненты этого тензора — 3-пространственные.

Шесть величин ω_{kj} ($k \neq j$) связаны соотношениями $\omega_{kj} = -\omega_{jk}$, следовательно, среди них имеется лишь три независимых. В качестве независимых тензорных параметров в (3.18) возьмем те ω_{kj} , для которых $k < j$.

Ясно, что вариации эйлеровых координат вычисляются как $\delta x_k = \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \omega_{js}} \omega_{js} = \omega_{ks} x_s$ или

$$\delta x_k = \sum_{l < s} \omega_{ls} (\delta_{kl} x_s - \delta_{ks} x_l).$$

Здесь суммирование производится по всем парам индексов l, s : $l < s, l, s = 1, 2, 3$.

Ясно, что $\delta X^\beta = 0$ ($\beta = 1, 2, 3, 4$).

Производя необходимые вычисления, находим компоненты 4-вектора J^β в виде

$$J_{(ls)}^\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta x_k)} (\delta_{kl} x_s - \delta_{ks} x_l) \quad (k, l, s = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3, 4). \quad (3.18)$$

Полагая

$$-S_{\cdot k}^{\beta \cdot} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta x_k)} \quad (k = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3, 4), \quad (3.19)$$

имеем

$$J_{(ls)}^\beta = -(S_{\cdot l}^{\beta \cdot} x_s - S_{\cdot s}^{\beta \cdot} x_l) \quad (l, s = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3, 4).$$

Поскольку для $J_{(ls)}^\beta$ ($l, s = 1, 2, 3$) выполняется свойство антисимметрии по нижним индексам, то можно ввести эквивалентный пространственный 3-вектор

$$J_{(k)}^\beta = e_{ksl} S_{\cdot s}^{\beta \cdot} x_l. \quad (3.20)$$

Соответствующий группе вращений полевых переменных закон сохранения есть

$$\partial_\beta J_{(k)}^\beta = 0 \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3, 4). \quad (3.21)$$

Преобразуем его сначала к виду

$$\partial_\alpha J_{(k)}^\alpha + \partial_4 J_{(k)}^4 = 0 \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3),$$



затем, принимая во внимание, что $S_s^4 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 x_s)} = -\rho_R v_s$, $J_{(k)}^4 = -e_{ksl} \rho_R v_s x_l$, получаем

$$\partial_\alpha (e_{ksl} x_l S_s^\alpha) - \partial_4 (e_{ksl} \rho_R v_s x_l) = 0 \quad (k, s, l = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3).$$

Это закон сохранения момента количества движения. Вектор $e_{ksl} \rho_R v_s x_l$ представляет собой момент количества движения поля (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии). Его часто называют также вращательным моментом, или угловым моментом (angular momentum) поля.

3.3. Преобразования поворота 4-пространства – времени

Рассмотрим далее группу вращений пространственно-временного многообразия X^β . Функционал действия \mathfrak{Z} должен быть абсолютно инвариантен относительно этой группы преобразований, если в качестве модели пространственно-временного многообразия выступает пространство Минковского.

Линейные преобразования пространства Минковского, сохраняющие неизменными его метрику, называются преобразованиями Лоренца. Преобразования Лоренца включают повороты прямоугольных реперов в этом пространстве. Введем в пространстве Минковского прямоугольную координатную систему X_β . Поворот прямоугольной системы координат X_β в 4-пространстве Минковского порождает некоторый псевдоортогональный тензор второго ранга Λ , представляемый в выбранной системе координат псевдоортогональной матрицей. Признак псевдоортогональности тензора второго ранга выражается соотношением $\Lambda^T \cdot \mathbf{E} \cdot \Lambda = \mathbf{E}$, или $\Lambda_{\alpha\nu} E_{\alpha\lambda} \Lambda_{\lambda\mu} = g_{\nu\mu}$.

Псевдоединичный тензор \mathbf{E} в прямоугольной системе координат пространства Минковского имеет компоненты (по α не суммировать) $E_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}$.

Итак, конечный поворот пространственно-временного многообразия может быть задан псевдоортогональным тензором второго ранга²⁴ $X_\gamma \rightarrow \tilde{X}_\gamma = \Lambda_{\gamma\nu} X_\nu$. Естественные компоненты псевдоортогонального тензора второго ранга в пространстве Минковского — отсчетные.

Повороты 4-пространства Минковского образуют группу по умножению²⁵, зависящую от шести независимых вещественных параметров.

Бесконечно малое вращение пространства Минковского можно задать линейными преобразованиями

$$\tilde{X}_\beta = X_\beta + \Omega_{\beta\sigma} X_\sigma, \tag{3.22}$$

где $\Omega_{\beta\sigma} = -\Omega_{\sigma\beta}$ есть антисимметричный 4-тензор второго ранга, компоненты которого выступают как тензорные параметры группы малых вращений. Естественные компоненты этого тензора — отсчетные.

Двенадцать величин $\Omega_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) связаны соотношениями $\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}$, следовательно, среди них имеется лишь шесть независимых. В качестве независимых возьмем те $\Omega_{\beta\alpha}$, для которых $\beta < \alpha$.

Ясно, что вариации пространственно-временных координат вычисляются следующим образом:

$$\delta X_\beta = \frac{\partial \tilde{X}_\beta}{\partial \Omega_{\gamma\sigma}} \Omega_{\gamma\sigma} = \Omega_{\beta\sigma} X_\sigma$$

или, поскольку $\delta X_\beta = \sum_{\gamma < \sigma} \delta_{\beta\gamma} X_\sigma \Omega_{\gamma\sigma} + \sum_{\gamma > \sigma} \delta_{\beta\gamma} X_\sigma \Omega_{\gamma\sigma}$,

$$\delta X_\beta = \sum_{\gamma < \alpha} \Omega_{\gamma\alpha} (\delta_{\beta\gamma} X_\alpha - \delta_{\beta\alpha} X_\gamma).$$

Здесь суммирование производится по всем парам индексов γ, α : $\gamma < \alpha$.

Будем считать, что группа Лоренца действует лишь на пространственно-временные координаты (которые мы трактуем как переменные, связанные с отсчетной конфигурацией) и не действует на

²⁴Теория псевдоортогональных тензоров второго ранга в многомерном псевдоевклидовом пространстве изложена, например, в уже цитированной кн.: Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

²⁵Эта группа называется группой Лоренца.



физические поля φ^k (координатное представление которых осуществляется в эйлеровой системе координат). Поэтому можно заключить, что $\delta\varphi^k = 0$.

Производя необходимые вычисления, находим компоненты 4-вектора J^β в виде

$$J^{\beta(\gamma\alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^s)} [(\partial_\alpha \varphi^s) X_\gamma - (\partial_\gamma \varphi^s) X_\alpha] + \mathcal{L}(X_\alpha \delta_{\gamma\beta} - X_\gamma \delta_{\alpha\beta}).$$

Определим далее тензор третьего ранга $M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot}$ следующим образом:

$$M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot} = J^{\beta(\gamma\alpha)}. \quad (3.23)$$

Тензор $M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot}$ называется тензором момента количества движения. Он антисимметричен по индексам γ, α . Заметим, что каноническое определение тензора момента количества движения указывает также и на его естественное координатное представление — 1-контравариантное и 2-ковариантное.

Следует отметить, что тензор момента количества движения поля (3.23) выражается через тензор энергии – импульса (3.2) поля по формуле

$$M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot} = T_{\gamma}^{\beta\cdot} X_\alpha - T_{\alpha}^{\beta\cdot} X_\gamma. \quad (3.24)$$

Соответствующий группе вращений пространства – времени закон сохранения имеет вид

$$\partial_\beta M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot} = 0. \quad (3.25)$$

Интеграл (2.9), величина которого не зависит от времени, в рассматриваемом случае будет иметь вид $\int M_{\gamma\alpha}^{\beta\cdot\cdot} d^3 X$. Поскольку $T_{\alpha}^{\beta\cdot} = \mathcal{P}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$), где \mathcal{P}_α ($\alpha = 1, 2, 3$) — канонический импульс (псевдоимпульс), то полный момент канонического импульса поля $\int (X_\alpha \mathcal{P}_\gamma - X_\gamma \mathcal{P}_\alpha) d^3 X$ ($\alpha, \gamma = 1, 2, 3$) будет сохраняющейся величиной.

4. ОБОБЩЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Как было отмечено, пространственно-временные координаты и физические поля входят в группу преобразований (1.12), определяющую трансформацию переменных $(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k)$, несимметрично. С целью восстановления симметрии расширим определение однопараметрической группы (1.12), допуская более общие геометрические преобразования пространственно-временных координат и полевых переменных

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad (4.1)$$

где, по-прежнему, мы считаем выполненными «начальные условия»

$$\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \quad \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi^k.$$

Геометрические преобразования (4.1) трансформируют физические поля $\varphi^j(X^\alpha)$ в новые поля $\tilde{\varphi}^j(\tilde{X}^\alpha)$. В самом деле, подставляя в первую группу соотношений (4.1) зависимости поля от пространственно-временных координат $\varphi^s = \varphi^s(X^\alpha)$, выразим из указанных соотношений пространственно-временные координаты X^α через «новые» координаты \tilde{X}^α ; далее с помощью второй группы соотношений (4.1) выразим «новые» полевые переменные $\tilde{\varphi}^k$ как функции «новых» координат \tilde{X}^α . Ясно, что затем можно пересчитать по обычным правилам дифференциального исчисления частные производные $\tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\sigma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots$ и вести речь о преобразовании пространственно-временных переменных $X^\gamma \rightarrow \tilde{X}^\gamma$ и всего дифференциального комплекса

$$\begin{array}{c} \varphi^s, \partial_\alpha \varphi^s, \partial_\sigma \partial_\alpha \varphi^s, \dots \\ \downarrow \\ \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_\sigma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^s, \dots \end{array} \quad (4.2)$$

в результате замены переменных (4.1).



Пространственно-временные координаты X^β и полевые переменные φ^s совершенно симметрично входят в закон преобразования (4.1). Это позволяет в некоторых случаях менять ролями зависимые и независимые переменные (или в физической терминологии — пространственно-временные координаты и полевые переменные), не меняя вариационной природы всей полевой теории. Так, можно построить математическое представление нелинейно упругого поля с помощью так называемого обратного описания деформации тела, развитого в работах Маженна (G.A. Maugin), которые подытожены в монографии [5] (см. также обзорную статью [23]). Обратное описание деформации сплошной среды и соответствующая вариационная формулировка нелинейной теории упругости (когда действие для упругого тела представлено на основе эйлерова описания и варьированию подвергается обратное отображение $X^\beta = X^\beta(x^k, t)$) неожиданно оказываются удобными для исследования сингулярного упругого поля и позволяют, в частности, с иных позиций взглянуть на энергетические соотношения нелинейной механики разрушения. Сам автор этого подхода называет обратное описание деформации описанием Пиола (G. Piola) и отмечает, что обратная вариационная формулировка в сущности совпадает с использованной Пиола еще в XIX в. [24, 25] (затем забытой и никогда на деле не применявшейся). Ясно, что и два традиционных способа описания деформации сплошного тела (в духе Лагранжа и Эйлера), и возможность расширения понятия группы инвариантности функционала действия и обобщенного варьирования — следствия универсального принципа двойственности и полной равноправности отсчетной и актуальной конфигураций тела в состоянии его деформации, пронизывающих механику деформируемых тел как единую теорию.

Действие

$$\mathfrak{S} = \int_D \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X \quad (4.3)$$

в результате обобщенного геометрического преобразования (4.1), определяющего замену переменных

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k),$$

трансформируется в «эквивалентное» действие

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \int_{\tilde{D}} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X},$$

где $\mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta)$ есть преобразование «естественной» плотности лагранжиана в соответствии с заменой переменных (4.1).

Интеграл действия как объект физического измерения должен сохранять свою величину при преобразовании (4.1), т.е. функционалы \mathfrak{S} и $\tilde{\mathfrak{S}}$ эквивалентны: $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$.

Эквивалентность функционалов \mathfrak{S} и $\tilde{\mathfrak{S}}$ означает, что это на самом деле один и тот же объект, только представленный с помощью разных наборов переменных.

Если данное ранее равенство выполняется²⁶ также и после замены в $\tilde{\mathfrak{S}}$

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) \rightarrow \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta),$$

обеспечивающей неизменность *формы* функционала действия, то говорят, что функционал действия абсолютно инвариантен относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1).

Ясно, что первая вариация функционала действия, абсолютно или инфинитезимально инвариантного относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1), отвечающая преобразованиям (4.1), равна нулю.

Принцип наименьшего действия сводится к условию равенства нулю первой вариации функционала действия на реальном физическом поле при всех допустимых вариациях переменных поля и

²⁶Указанное равенство может выполняться не точно, а с невязкой порядка $o(\varepsilon)$. В этом случае речь должна идти об инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1).



неварьировемых пространственно-временных координатах. Из этого условия получаются уравнения поля в форме уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0. \quad (4.4)$$

Заметим, что всякая группа обобщенных геометрических вариационных симметрий функционала (4.3) будет также группой симметрий уравнений Эйлера – Лагранжа (4.4) (см., например, [14, с. 330, 331]; обратное утверждение неверно), т.е. система уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots = 0,$$

где вместо символа \mathcal{L} следует подставить $\mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta)$, будет эквивалентна системе, имеющей в новых переменных (т.е. после ее пересчета к новым переменным, переход к которым определяется обобщенной геометрической симметрией действия (4.1)) в точности такую же форму

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{\varphi}^k} - \tilde{\partial}_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k)} + \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k)} - \dots = 0,$$

где вместо символа \mathcal{L} следует выполнить подстановку $\mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta)$.

Уравнения Эйлера – Лагранжа ковариантны относительно обобщенной геометрической замены переменных (4.1) и в случае наиболее общей формы «естественной» плотности лагранжиана (т.е. когда он зависит от градиентов поля сколь угодно высокого порядка). Действительно, можно показать [14, с. 323–327], что справедливо соотношение

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = A_{jk} \tilde{\mathcal{E}}_k(\tilde{\mathcal{L}}), \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k(\mathcal{L}) &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots, \\ \tilde{\mathcal{E}}_k(\tilde{\mathcal{L}}) &\equiv \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \tilde{\varphi}^k} - \tilde{\partial}_\beta \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k)} + \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\beta \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k)} - \dots, \\ A_{jk} &= \det \begin{pmatrix} \partial_1 \mathcal{X}^1 & \dots & \partial_{\beta^*} \mathcal{X}^1 & \frac{\partial \mathcal{X}^1}{\partial \varphi^j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial_1 \mathcal{X}^{\beta^*} & \dots & \partial_{\beta^*} \mathcal{X}^{\beta^*} & \frac{\partial \mathcal{X}^{\beta^*}}{\partial \varphi^j} \\ \partial_1 \Phi^k & \dots & \partial_{\beta^*} \Phi^k & \frac{\partial \Phi^k}{\partial \varphi^j} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

∂_β — оператор полного дифференцирования по пространственно-временной координате X^β , β^* — число пространственно-временных координат,

$$\det \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta}{\partial X^\alpha} \right) \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta)$$

при условии, что переменные φ^k , X^β и $\tilde{\varphi}^k$, \tilde{X}^β связаны формулами преобразования (4.1) или даже более общего геометрического преобразования, не являющегося, например, однопараметрической группой. Поэтому системы уравнений Эйлера – Лагранжа $\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0$ и $\tilde{\mathcal{E}}_k(\tilde{\mathcal{L}}) = 0$ обе выполняются, если выполняется хотя бы одна из них²⁷.

²⁷Формула преобразования оператора Эйлера в том случае, когда в замене переменных фигурируют частные производные полевых переменных, имеется в работе [14, с. 468, 469].



Полные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k при их преобразовании согласно (4.1) определяются равенствами

$$\delta X^\beta = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta \varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \quad (4.7)$$

Частичную вариацию $\bar{\delta}\varphi^k$ полевой переменной φ^k мы определяем с помощью соотношения

$$\delta \varphi^k = \bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha. \quad (4.8)$$

Условие инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1) имеет вид

$$\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \quad (4.9)$$

где вариация лагранжиана $\delta \mathcal{L}$ — линейная по ε часть приращения

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta).$$

Если лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, то вариация лагранжиана равна

$$\delta \mathcal{L} = (\partial_\gamma \mathcal{L}) \delta X^\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) \quad (4.10)$$

или в несколько преобразованной форме —

$$\delta \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right) \bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma \mathcal{L}) \delta X^\gamma + \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k \right). \quad (4.11)$$

Полная вариация действия (при условии, что «естественная» плотность лагранжиана зависит от градиентов поля порядка не выше первого), отвечающая полному его варьированию по пространственно-временным координатам X^β и полевым переменным φ^k в соответствии с (4.1), вычисляется в виде

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{S} &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \frac{\partial}{\partial X^\beta} (\mathcal{L} \delta X^\beta) \right\} d^4 X = \\ &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right\} \bar{\delta}\varphi^k d^4 X + \int \partial_\beta \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k + \mathcal{L} \delta X^\beta \right\} d^4 X. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Если функционал действия \mathfrak{S} абсолютно инвариантен²⁸ относительно группы преобразований (4.1), то его первая вариация (4.12), соответствующая варьированию координат и полей по закону (4.1), очевидно, будет равна нулю.

Инфинитезимальный критерий инвариантности функционала действия (4.9) относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1) может быть заменен более слабым условием ([21])

$$\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta X^\alpha)}{\partial X^\alpha} = \varepsilon \frac{\partial B^\gamma}{\partial X^\gamma} \quad (4.13)$$

так, что первая вариация действия будет вычисляться в виде $\delta \mathfrak{S} = \varepsilon \int (\partial_\gamma B^\gamma) d^4 X$, где в правой части подынтегральное выражение представляет собой дивергенцию векторного поля B^γ , которое может зависеть от пространственно-временных координат и полевых переменных (включая и градиенты поля порядка равного, большего или меньшего, чем входящие в лагранжиан) $B^\gamma = B^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta)$. Группа преобразований (4.1) в этом случае называется обобщенной инфинитезимальной дивергентной симметрией функционала действия.

²⁸Или, делая тем самым более общее предположение, — инфинитезимально инвариантен.



Вводя четырехмерный вектор

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \left(\delta \varphi^k - \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha \right) + \mathcal{L} \delta X^\beta \right\}, \quad (4.14)$$

вариацию действия, отвечающую обобщенной геометрической группе преобразований (4.1), представим в форме

$$\delta \mathfrak{S} = \varepsilon \int \partial_\beta J^\beta d^4 X. \quad (4.15)$$

Воспользуемся теперь предположением об абсолютной (инфинитезимальной) инвариантности функционала действия относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1). Ясно, что тогда в (4.15) следует полагать $\delta \mathfrak{S} = 0$ и соответствующий закон сохранения имеет следующую четырехмерную дивергентную форму:

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \quad (4.16)$$

где компоненты 4-вектора J^β вычисляются по формуле (4.14), если группа обобщенных геометрических симметрий (4.1) известна:

$$J^\beta = \mathcal{L} \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \left[\left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} - \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\alpha(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \right]. \quad (4.17)$$

Каждой обобщенной инфинитезимальной дивергентной симметрии действия, которая определяется условием (4.13), соответствует закон сохранения:

$$\partial_\beta (J^\beta - B^\beta) = 0. \quad (4.18)$$

Далее мы рассмотрим ряд различных форм первой вариации функционала действия, отвечающих полному его варьированию по пространственно-временным координатам X^β и полевым переменным φ^k в соответствии с (4.1), отличных от (4.12). Однако сначала необходимо получить ряд необходимых для дальнейшего изложения формул.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$-(\partial_\alpha \varphi^k) \mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} + \frac{\partial}{\partial X^\beta} \left((\partial_\alpha \varphi^s) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^s)} \right),$$

откуда сразу же следует

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} \delta X^\alpha + \left[\frac{\partial}{\partial X^\beta} \left((\partial_\alpha \varphi^s) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^s)} \right) \right] \delta X^\alpha + (\partial_\alpha \varphi^k) \mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \delta X^\alpha$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} \delta X^\alpha - (\partial_\alpha \varphi^s) (\partial_\beta (\delta X^\alpha)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^s)} + (\partial_\alpha \varphi^k) \mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \delta X^\alpha + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X^\beta} \left((\partial_\alpha \varphi^s) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^s)} \delta X^\alpha \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Вычисляя первую вариацию действия (считаем, что лагранжиан зависит от градиентов поля не выше первого порядка) согласно (4.12) и учитывая (4.19), находим

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{S} &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta} \varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^k) + (\partial_\beta \varphi^k) \mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \delta X^\beta + \frac{\partial}{\partial X^\gamma} \left((\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \delta X^\beta \right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} \delta X^\beta + \left(\mathcal{L} \delta_\beta^\alpha - (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^k)} \right) \partial_\alpha (\delta X^\beta) \right\} d^4 X, \end{aligned} \quad (4.20)$$



где $\delta X^\beta = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$, $\delta \varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$ — по-прежнему полные вариации²⁹ пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k , а частичные вариации полевых переменных определяются соотношением

$$\delta \varphi^k = \bar{\delta} \varphi^k + \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\gamma} \delta X^\gamma.$$

Если предположить, что полные вариации полей φ^k и полные вариации пространственно-временных координат X^β исчезают на границе рассматриваемой 4-области, то, очевидно, частичные вариации $\bar{\delta} \varphi^k$ также обращаются в нуль на границе ∂ и, следовательно, формулу для вариации действия (4.20) можно также представить в виде

$$\delta \mathfrak{S} = \int \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \right) \right) \delta \varphi^k + \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} - \partial_\alpha \left(\mathcal{L} \delta_\beta^\alpha - (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^k)} \right) \right) \delta X^\beta \right\} d^4 X$$

или в следующей замечательной симметричной форме:

$$\delta \mathfrak{S} = \int \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta \cdot k}) \right) \delta \varphi^k + \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P^{\alpha \cdot \beta}) \right) \delta X^\beta \right\} d^4 X, \quad (4.21)$$

где

$$-S^{\beta \cdot k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}, \quad (4.22)$$

$$-P^{\alpha \cdot \beta} = \mathcal{L} \delta_\beta^\alpha - (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^k)}. \quad (4.23)$$

Таким образом, можно ввести еще два канонических тензора с естественными 1-контравариантными и 1-ковариантными компонентами³⁰.

Следует еще раз подчеркнуть, что при выводе формулы (4.21) для вариации действия полные вариации пространственно-временных координат X^β и полей φ^k считались нулевыми на границе ∂ , откуда, в свою очередь, в силу соотношения (4.8) следует, что частичные вариации полей φ^k исчезают на границе ∂ . Если снять эти требования, то в правую часть формулы (4.21) необходимо добавить слагаемое

$$\int \left\{ -\partial_\alpha (P^{\alpha \cdot \beta} \delta X^\beta) + \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \bar{\delta} \varphi^k \right) + \partial_\gamma \left((\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \delta X^\beta \right) \right\} d^4 X.$$

Ясно также, что в применении к классической механике сплошных сред

$$S^4_{\cdot k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \varphi^k)} = -\rho_R v_k \quad (v^k = \partial_4 \varphi^k),$$

$$P^4_{\cdot \beta} = (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \varphi^k)} = \rho_R v_k \partial_\beta \varphi^k \quad (\beta = 1, 2, 3), \quad P^4_{\cdot 4} = \mathcal{H},$$

где v^k — контравариантные компоненты эйлеровой скорости, ρ_R — плотность среды в отсчетном состоянии, \mathcal{H} — «естественная» плотность гамильтониана, определенная согласно (3.10).

Заметим, что тензор $S^{\beta \cdot k}$ ($\beta = 1, 2, 3$) аналогичен³¹ отсчетному тензору напряжений (первому тензору напряжений Пиола – Кирхгофа) $\mathbf{S} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{F}}$, а тензор $P^{\alpha \cdot \beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) — тензору напряжений Эшелби³² $\mathbf{P} = -(\mathcal{L}\mathbf{I} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T)$.

²⁹ Иногда используется несколько другая терминология: например, в монографии [5] эти вариации называются соответственно лагранжевой и эйлеровой элементарными вариациями.

³⁰ Следует отметить, что канонический тензор $S^{\beta \cdot k}$ 1-контравариантен по «отсчетному» индексу и 1-ковариантен по «пространственному».

³¹ Под аналогией мы понимаем соответствие того или иного объекта традиционным определениям, известным из механики континуума.

³² Дополнительно заметим также, что $-P^{\beta \cdot \alpha} = T^{\beta \cdot \alpha}$, где $T^{\beta \cdot \alpha}$ — тензор энергии – импульса.



Для удобства приведем здесь известные из рациональной механики сплошных сред определения и соотношения: \mathbf{F} — градиент деформации,³³ $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{T}$ — первый тензор напряжений Пиола – Кирхгофа, $J = \det \mathbf{F}$, \mathbf{T} — тензор напряжений Коши.

5. СТАНДАРТНЫЕ, ВНУТРЕННИЕ И ВНЕШНИЕ ВАРИАЦИИ

Обобщенное геометрическое преобразование пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s

$$(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \tilde{\varphi}^k)$$

естественно порождает три различных класса преобразований и три класса вариаций, к обсуждению которых мы и переходим.

Класс так называемых стандартных однопараметрических преобразований $(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (X^\beta, \tilde{\varphi}^k)$, где $\tilde{\varphi}^k = \varphi^k + \varepsilon\psi^k(X^\gamma)$ и функции ψ^k исчезают на границе ∂ 4-области интегрирования \mathcal{D} , позволяет ввести стандартные вариации $\delta X^\beta = 0$, $\delta\varphi^k = \bar{\delta}\varphi^k = \varepsilon\psi^k$.

Опираясь на формулу вариации действия (4.21), нетрудно заметить, что

$$\delta\mathfrak{S} = \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot k}) \right) \delta\varphi^k d^4 X, \quad (5.1)$$

и на основании стационарности действия в силу произвольности стандартных вариаций — получить уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot k}) = 0,$$

которые, по-существу, выражают баланс импульса при отсечном (т.е. в пространственно-временных координатах X^β) описании физических полей.

Рассмотрим далее преобразования вида $(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (X^\beta, \tilde{\varphi}^k)$ ($k = 1, 2, 3$), где $\tilde{\varphi}^k = \varphi^k + \varepsilon\omega^k(\varphi^s, t)$.

Мы, по-прежнему, предполагаем, что функции $\omega^k(\varphi^s, t)$ исчезают на границе ∂ 4-области интегрирования \mathcal{D} .

Вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k принято в этом случае называть внешними вариациями $\delta X^\beta = 0$, $\delta\varphi^k = \bar{\delta}\varphi^k = \varepsilon\omega^k(\varphi^s, t)$ и рассматривать их как функции эйлеровых переменных и времени.

Введем обозначения $x^k = \varphi^k$, $x^4 = t$ и будем трактовать x^k по аналогии с переменными Эйлера (пространственно-временные координаты X^β — переменные Лагранжа).

Подсчитывая первую вариацию действия, находим³⁴

$$\delta\mathfrak{S} = \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot k}) - \partial_4 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} \right) \delta\varphi^k d^4 X \quad (k = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3),$$

или

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{S} &= \varepsilon \int \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot k}) - \partial_4 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} \right) \omega^k(\varphi^s, x^4) d^4 X = \\ &= \varepsilon \int \left(J^{-1} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k} + (\partial_l T^l \cdot k) - J^{-1} \partial_4 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} \right) \omega^k(x^s, x^4) d^4 x = \\ &= \int \left(J^{-1} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k} + (\partial_l T^l \cdot k) - J^{-1} \partial_4 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} \right) \delta\varphi^k d^4 x \quad (l, k, s = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (5.2)$$

³³Градиент деформации в рамках классической теории поля определяется каноническим соотношением: $F^{\beta\cdot k} = \partial_\beta\varphi^k$ и имеет 1-контравариантные пространственные и 1-ковариантные отсчетные естественные компоненты.

³⁴В приводимых далее формулах следует различать операторы ∂_β и ∂_l : первый обозначает дифференцирование по пространственно-временным координатам X^β ($\beta = 1, 2, 3$), второй — по эйлеровой координате x^l ($l = 1, 2, 3$). Греческий индекс всегда ассоциируется с пространственно-временными координатами и отсчетным представлением векторных и тензорных полей, латинский — с эйлеровыми координатами и актуальным (пространственным) представлением. В рамках формализма группового анализа дифференциальных уравнений (см. разд. 9) частное дифференцирование ∂_l будет обозначаться через ∂_l .



где J — якобиан преобразования от переменных Лагранжа к переменным Эйлера

$$J = \det(\partial_\beta x^s) \quad (\beta = 1, 2, 3; s = 1, 2, 3),$$

$$T_{.k}^{l.} = J^{-1}(\partial_\beta \varphi^l) S_{.k}^{\beta.} = -J^{-1}(\partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \quad (\beta = 1, 2, 3; k, l = 1, 2, 3). \quad (5.3)$$

При преобразованиях в (5.2) тензор $T_{.k}^{l.}$ вводится так, чтобы $J^{-1} \partial_\beta S_{.k}^{\beta.} = \partial_l T_{.k}^{l.}$ ($\beta = 1, 2, 3; k, l = 1, 2, 3$). Ясно, что $S_{.k}^{\beta.} = J(\partial_i X^\beta) T_{.k}^{i.}$, поэтому $J^{-1} \partial_\beta S_{.k}^{\beta.} = J^{-1} T_{.k}^{i.} \partial_\beta (J \partial_i X^\beta) + (\partial_i X^\beta) \partial_\beta T_{.k}^{i.} = \partial_l T_{.k}^{l.}$ в силу того, что $\partial_\beta (J \partial_i X^\beta) = 0$ ($\beta = 1, 2, 3; i = 1, 2, 3$). Последнее равенство является следствием равенств $2J \partial_k X^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \varepsilon_{klm} (\partial_\alpha \varphi^l) (\partial_\beta \varphi^m)$ и перестановочности дифференцирований $\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k = \partial_\beta \partial_\gamma \varphi^k$, которая влечет $\varepsilon^{\gamma\beta\lambda} (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) = 0$.

Таким образом, может быть получено каноническое определение еще одного тензора — $T_{.k}^{l.}$. Далее будет показано, что 1-контравариантный и 1-ковариантный пространственный канонический тензор $T_{.k}^{l.}$ есть тензор истинных напряжений (тензор напряжений Коши).

В силу произвольности выбора внешних вариаций $\delta \varphi^k$ внутри соответствующей 4-области интегрирования по эйлеровым переменным получим уравнение

$$-J^{-1} \partial_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \varphi^k)} + J^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} + \partial_l T_{.k}^{l.} = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad (5.4)$$

выражающее баланс импульса в форме Эйлера. Действительно, так как (или просто считая, что вводятся обозначения) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \varphi^k)} = \rho_R v_k$, $\rho_R = \rho J$, то уравнение (5.4) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\rho \partial_t v_k = \partial_l T_{.k}^{l.} + \det(\partial_s X^\beta) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k}, \quad (5.5)$$

где дифференцирование по времени ∂_t производится при фиксированных лагранжевых координатах X^β , т.е. эйлерово поле скоростей $v_k(x^1, x^2, x^3, t)$ в (5.5) дифференцируется по времени следующим образом:

$$\partial_t v_k = \partial_t|_{x^j} v_k + (\partial_s v_k) v^s.$$

Следует также отметить, что в уравнении баланса импульса в форме Эйлера (5.5) не следует пренебрегать слагаемым $\det(\partial_s X^\beta) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k}$, поскольку как только пространственное описание ведется в криволинейной координатной сетке x^k , то, в частности, кинетическая энергия будет явным образом зависеть от пространственных переменных x^k , так как метрический тензор g_{ks} явно от них зависит. Напомним также, что в выражение для «естественной» плотности лагранжиана может также входить потенциальная энергия внешнего силового поля, которая в явной форме зависит от пространственных переменных. Если исключить влияние внешнего потенциального силового поля и ввести в пространстве декартовы координаты, то лагранжиан не должен явно от них зависеть (галилеева инвариантность), следовательно, уравнение баланса импульса будет иметь вид

$$\rho (\partial_t|_{x^j} v_k + (\partial_s v_k) v^s) = \partial_l T_{.k}^{l.} \quad (k, s = 1, 2, 3).$$

Принимая во внимание уравнение неразрывности

$$\partial_t|_{x^j} \rho + \partial_s (\rho v^s) = 0 \quad (s = 1, 2, 3), \quad (5.6)$$

уравнение баланса импульса можно преобразовать к дивергентной (в эйлеровых переменных) форме

$$\partial_t|_{x^j} (\rho v_k) + \partial_s (\rho v^s v_k - T_{.k}^{s.}) = 0 \quad (k, s = 1, 2, 3). \quad (5.7)$$

Уравнения (5.6), (5.7) составляет единое 4-тензорное уравнение:

$$\partial_s J_{.k}^{s.} = 0 \quad (s, k = 1, 2, 3, 4), \quad (5.8)$$



где три первых координаты — пространственные эйлеровы, четвертая координата — время, тензор кинетических напряжений J_k^s ($s, k = 1, 2, 3, 4$) определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} \rho v^1 v_1 - T_{.1}^1 & \rho v^1 v_2 - T_{.2}^1 & \rho v^1 v_3 - T_{.3}^1 & \rho v^1 \\ \rho v^2 v_1 - T_{.1}^2 & \rho v^2 v_2 - T_{.2}^2 & \rho v^2 v_3 - T_{.3}^2 & \rho v^2 \\ \rho v^3 v_1 - T_{.1}^3 & \rho v^3 v_2 - T_{.2}^3 & \rho v^3 v_3 - T_{.3}^3 & \rho v^3 \\ \rho v_1 & \rho v_2 & \rho v_3 & \rho \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Пространственный 4-тензор J_k^s имеет 1-контравариантные и 1-ковариантные пространственные компоненты J_k^s ($s, k = 1, 2, 3, 4$) в качестве естественных.

Заметим, что 1-ковариантный пространственный вектор $p_k = \rho v_k$ ($k = 1, 2, 3$) представляет собой плотность классического импульса поля (в расчете на единицу объема в актуальной конфигурации).

Чисто «пространственная» часть тензора кинетических напряжений в прямой тензорной записи имеет вид

$$\mathbf{J} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{p} - \mathbf{T},$$

а уравнение баланса (5.7) —

$$\partial_t|_{\mathbf{x}} \mathbf{p} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{p} - \mathbf{T}) = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Здесь символом $\partial_t|_{\mathbf{x}}$ обозначается частное дифференцирование по времени при фиксированном эйлеровом положении \mathbf{x} .

Формулировка вариационного принципа стационарности действия для нелинейно упругого тела в переменных Эйлера и вывод уравнения баланса импульса из него на основе канонического определения тензора напряжений Коши приводятся в [6, с. 190–195].

На основании (5.5) нетрудно заключить, что тензор $T_{.k}^l$ вполне аналогичен тензору истинных напряжений Коши³⁵ $\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S}$.

Наконец, рассмотрим однопараметрическую группу преобразований $(X^\beta, \varphi^k) \rightarrow (\tilde{X}^\beta, \varphi^k)$, где $\tilde{X}^\beta = X^\beta + \psi^\beta(X^\gamma)$ и функции ψ^β исчезают на границе 4-области интегрирования \mathcal{D} .

Вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s принято в этом случае называть внутренними вариациями: $\delta X^\beta = \varepsilon \psi^\beta$, $\delta \varphi^k = 0$.

Заметим, что для внутренних вариаций будет справедливо соотношение

$$\bar{\delta} \varphi^k = - \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\gamma} \delta X^\gamma.$$

Варьируя действие согласно (4.21), находим

$$\delta \mathfrak{S} = \int \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P_{. \beta}^{\alpha \cdot}) \right) \delta X^\beta d^4 X.$$

Пользуясь произвольностью выбора внутренних вариаций внутри 4-области интегрирования, приходим к уравнениям Эйлера – Лагранжа:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P_{. \beta}^{\alpha \cdot}) = 0, \quad (5.11)$$

которые представляют собой по сути закон, найденный Эшелби [26].

³⁵ Не следует отождествлять тензоры $T_{.k}^l$ и $T_{. \alpha}^{\beta \cdot}$, поскольку это разные тензоры. Первый из них имеет естественное пространственное представление, а второй — отсчетное

$$T_{. \alpha}^{\beta \cdot} = T_\alpha^\beta = \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}, \quad T_{.k}^l = -J^{-1} (\partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)}.$$

В приведенных естественных выражениях «естественная» плотность лагранжиана \mathcal{L} включает множитель $\sqrt{\cdot}$.



6. ОБОБЩЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЕЙСТВИЯ

Расширение класса однопараметрических геометрических преобразований до (4.1) позволяет установить уравнения поля и законы сохранения сразу в канонических формах.

Мы, по-прежнему, будем рассматривать обобщенные геометрические группы преобразований:

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon).$$

Если функционал действия (для любой 4-области пространственно-временного многообразия) абсолютно инвариантен относительно обобщенной геометрической однопараметрической группы преобразований (4.1), т.е. при сохранении формы функционала действия не изменяется его величина $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$, то такая группа, как указывалось, называется обобщенной геометрической группой инвариантности действия (или обобщенной геометрической вариационной симметрией действия)³⁶.

Мы будем считать, что лагранжиан зависит от градиентов полевых переменных порядка не выше первого. В этом случае абсолютная инвариантность функционала действия означает, что

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta) d^4 X = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\beta \tilde{\varphi}^k, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X},$$

где преобразование пространственно-временных координат и полевых переменных осуществляется в соответствии с (4.1).

Покажем, что каждая обобщенная геометрическая группа инвариантности действия позволяет, при условии выполнения уравнений Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S_{\cdot k}^{\beta \cdot}) = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot}) = 0, \quad (6.1)$$

сформулировать дивергентный закон сохранения:

$$\partial_\beta I^\beta = 0, \quad (6.2)$$

где ток I^β определяется следующей формулой:

$$I^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left(S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \delta \varphi^k + P_{\cdot \gamma}^{\beta \cdot} \delta X^\gamma \right). \quad (6.3)$$

Действительно, варьируя действие, находим (см. (4.20))

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{S} &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta} \varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^k) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} \delta X^\beta + (\partial_\beta \varphi^k) \mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \delta X^\beta + \right. \\ &+ \left. \partial_\gamma \left((\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \delta X^\beta \right) + \left(\mathcal{L} \delta_\beta^\alpha - (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \varphi^k)} \right) \partial_\alpha (\delta X^\beta) \right\} d^4 X = \\ &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta} \varphi^k - S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^k) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} \delta X^\beta - P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot} \partial_\alpha (\delta X^\beta) + \right. \\ &+ \left. (\partial_\beta \varphi^k) \mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \delta X^\beta + \partial_\gamma \left((\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \delta X^\beta \right) \right\} d^4 X = 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности 4-области интегрирования необходимо

$$\begin{aligned} (\partial_\beta \varphi^k) \mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \delta X^\beta - \partial_\gamma \left((\partial_\beta \varphi^k) S_{\cdot k}^{\gamma \cdot} \delta X^\beta \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \bar{\delta} \varphi^k - S_{\cdot k}^{\beta \cdot} \partial_\beta (\bar{\delta} \varphi^k) + \\ + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} \delta X^\beta - P_{\cdot \beta}^{\alpha \cdot} \partial_\alpha (\delta X^\beta) = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

³⁶ Достаточно, как всегда, предположить, что при неизменной форме действия изменение величины действия имеет порядок более высокий, чем ε : $\tilde{\mathfrak{S}} - \mathfrak{S} = o(\varepsilon)$.



Учитывая, что $\delta\varphi^k = \bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\beta\varphi^k)\delta X^\beta$, $S_{.k}^{\beta.}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) = \partial_\beta(S_{.k}^{\beta.}\bar{\delta}\varphi^k) - (\bar{\delta}\varphi^k)(\partial_\beta S_{.k}^{\beta.})$, $P_{.\beta}^{\alpha.}\partial_\alpha(\delta X^\beta) = \partial_\alpha(P_{.\beta}^{\alpha.}\delta X^\beta) - (\delta X^\beta)(\partial_\alpha P_{.\beta}^{\alpha.})$, уравнение (6.4) представим в виде

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} + (\partial_\beta S_{.k}^{\beta.})\right)\delta\varphi^k + \left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P_{.\beta}^{\alpha.})\right)\delta X^\beta - \partial_\beta(S_{.k}^{\beta.}\bar{\delta}\varphi^k + P_{.\gamma}^{\beta.}\delta X^\gamma) - \partial_\beta((\partial_\gamma\varphi^k)S_{.k}^{\beta.}\delta X^\gamma) = 0.$$

Таким образом, если уравнения Эйлера – Лагранжа (6.1) удовлетворяются, то можно сформулировать дивергентный закон сохранения:

$$\partial_\beta(S_{.k}^{\beta.}\bar{\delta}\varphi^k + P_{.\gamma}^{\beta.}\delta X^\gamma) = 0. \quad (6.5)$$

Полученный результат³⁷, кроме всего прочего, ясно указывает на то, что тензор напряжений Пиола – Кирхгофа и тензор напряжений Эшелби — основные конструктивные элементы, необходимые для построения законов сохранения, соответствующих вариационным симметриям действия.

7. ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИ – БЭКЛУНДА). ОБОБЩЕННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ СИММЕТРИИ ДЕЙСТВИЯ

Можно еще более расширить класс однопараметрических геометрических преобразований (4.1), допуская их зависимость также и от градиентов первого порядка (или более высоких порядков) полевых переменных φ^k . Такие (уже не геометрические) однопараметрические преобразования пространственно-временных координат и полевых переменных называются обобщенными (или преобразованиями Ли – Бэклунда) и имеют вид

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^s, \dots, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^s, \dots, X^\gamma, \varepsilon). \quad (7.1)$$

По-прежнему считаются выполненными «начальные условия»:

$$\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^s, \dots, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \quad \Phi^k(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^s, \dots, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi^k.$$

Обобщенные однопараметрические группы преобразований (7.1) фигурировали уже в оригинальной работе Нетер [3] (имеется перевод этой статьи на русский язык: *Нетер Э.* Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 611–630.) и в настоящее время рассматриваются как наиболее перспективный инструмент изучения нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных и поэтому привлекают все более пристальное внимание математиков, механиков и физиков. В 5-й главе монографии [13] приводится теория обобщенных симметрий и законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Новый вариант изложения этого круга вопросов читатель может найти в монографии [15].

Обобщенные преобразования, допускающие зависимости от градиентов полевых переменных порядка не выше первого, являются простейшими представителями (7.1). Их общая форма есть

$$\tilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon). \quad (7.2)$$

Обобщенные преобразования, так же как и геометрические, можно продолжить, следуя стандартной процедуре, многократно описанной ранее, на частные производные от полевых переменных.

³⁷Приведем также квазистатический аналог $\nabla_{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{x} + \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{X}) = 0$, где, по-прежнему, \mathbf{S} — первый тензор напряжений Пиола – Кирхгофа, \mathbf{P} — тензор напряжений Эшелби и соответствующий инвариантный интеграл $\oint_S (\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{x} + \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ для любой замкнутой в отсчетной конфигурации поверхности S , внутри которой поле регулярно.



Нетрудно заметить, что, задавшись полевыми функциями $\varphi^j(X^\alpha)$, можно на основании формул обобщенного преобразования (7.1) получить «новые» функциональные представления поля $\tilde{\varphi}^j(\tilde{X}^\alpha)$. Действительно, подставляя в первую группу соотношений (7.1) поля $\varphi^s = \varphi^s(X^\alpha)$, выразим из указанных соотношений пространственно-временные координаты X^α через «новые» координаты \tilde{X}^α , а затем с помощью второй группы соотношений (7.1) выразим «новые» полевые переменные $\tilde{\varphi}^k$ через «новые» координаты \tilde{X}^α . Ясно, что затем можно вычислить частные производные $\tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\sigma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots$, и вести речь о преобразовании пространственно-временных переменных $X^\gamma \rightarrow \tilde{X}^\gamma$ и всего дифференциального комплекса полей и их градиентов

$$\begin{array}{c} \varphi^s, \partial_\alpha \varphi^s, \partial_\sigma \partial_\alpha \varphi^s, \dots \\ \downarrow \\ \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_\sigma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^s, \dots \end{array} \quad (7.3)$$

в результате действия обобщенной замены переменных (7.1).

Уравнения поля в результате обобщенного преобразования (7.1) также трансформируются. Формула преобразования оператора Эйлера при замене переменных (7.1), в которой фигурируют частные производные сколь угодно высокого порядка от полевых переменных, имеется в [14, с. 468, 469].

Действие по Гамильтону

$$\mathfrak{S} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X \quad (7.4)$$

в результате обобщенного преобразования (7.1), определяющего также замену $X^\gamma \rightarrow \tilde{X}^\gamma$, полей и их градиентов согласно (7.3), трансформируется в «эквивалентное» (т.е. представленное в новых переменных) действие

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X},$$

где $\mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta)$ есть преобразование «естественной» плотности лагранжиана в соответствии с заменой переменных (7.3). «Эквивалентность» действий \mathfrak{S} и $\tilde{\mathfrak{S}}$ означает $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$ и, как следствие, то что «естественная» плотность лагранжиана преобразуется в результате замены переменных (7.3) как обычная скалярная плотность.

Если в условии «эквивалентности» (приводимое далее равенство может выполняться не точно, а с невязкой порядка $o(\varepsilon)$); в этом случае следует говорить об инфинитезимальной инвариантности функционала действия) $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$, положить $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta)$, то говорят, что функционал действия абсолютно инвариантен относительно обобщенной группы преобразований (7.1).

Теория обобщенных симметрий для интегральных функционалов дается в книге [13, с. 368–470].

Теория вариационных симметрий типа (7.2) довольно детально изложена в монографии [9, с. 167–188]. Она, в целом, повторяет (с небольшими отклонениями) то, что уже было изложено в предыдущих разделах работы, поэтому далее приводятся только основные формулы, относящиеся к вариационным симметриям действия указанного типа. Лагранжиан при этом предполагается зависящим от градиентов поля порядка не выше первого.

Функционал действия будет инвариантен относительно обобщенных преобразований (7.2), если

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, X^\beta) d^4 X = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha \tilde{\varphi}^k, \tilde{X}^\beta) d^4 \tilde{X}.$$

Полные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k при их преобразовании согласно (7.2) определяются равенствами

$$\delta X^\beta = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\alpha \varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \delta \varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, \partial_\alpha \varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \quad (7.5)$$



Частичную вариацию $\bar{\delta}\varphi^k$ полевой переменной φ^k мы определяем с помощью соотношения

$$\delta\varphi^k = \bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha. \quad (7.6)$$

Критерий инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно обобщенной группы преобразований (7.2) имеет вид

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \quad (7.7)$$

где вариация лагранжиана $\delta\mathcal{L}$ — линейная по ε часть приращения

$$\mathcal{L}(\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\alpha\tilde{\varphi}^k, \tilde{\partial}_\gamma\tilde{\partial}_\alpha\tilde{\varphi}^k, \dots, \tilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\beta).$$

Этот критерий, как известно, обобщается до

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = \varepsilon\frac{\partial B^\gamma}{\partial X^\gamma}, \quad (7.8)$$

где $B^\gamma = B^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\beta)$.

Если лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, то вариация лагранжиана равна:

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) \quad (7.9)$$

или

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right)\bar{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\bar{\delta}\varphi^k\right), \quad (7.10)$$

следовательно,

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = \varepsilon_j(\mathcal{L})\bar{\delta}\varphi^j + \partial_\beta\left(\mathcal{L}\delta X^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\bar{\delta}\varphi^k\right). \quad (7.11)$$

Полная вариация действия (при условии, что «естественная» плотность лагранжиана зависит от градиентов поля порядка не выше первого), отвечающая полному его варьированию по пространственно-временным координатам X^β и полевым переменным φ^k в соответствии с формулами преобразования (7.2), вычисляется в виде

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{S} &= \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \frac{\partial}{\partial X^\beta}(\mathcal{L}\delta X^\beta) \right\} d^4X = \\ &= \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right\} \bar{\delta}\varphi^k d^4X + \int \partial_\beta \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\bar{\delta}\varphi^k + \mathcal{L}\delta X^\beta \right\} d^4X. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Вводя 4-вектор тока

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \left(\delta\varphi^k - \frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha \right) + \mathcal{L}\delta X^\beta \right\}, \quad (7.13)$$

вариацию действия, отвечающую группе преобразований (7.2), представить в форме

$$\delta\mathfrak{S} = \varepsilon \int (\partial_\beta J^\beta) d^4X. \quad (7.14)$$

Если действие абсолютно (инфинитезимально) инвариантно относительно группы преобразований (7.2), тогда в (7.14) следует полагать $\delta\mathfrak{S} = 0$ и соответствующий закон сохранения имеет обычную четырехмерную дивергентную форму:

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \quad (7.15)$$

где компоненты 4-вектора тока J^β вычисляются по формуле (7.13), если обобщенная симметрия (7.2) известна

$$\begin{aligned} J^\beta &= \mathcal{L} \left(\frac{\partial\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\sigma\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \left[\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s, \partial_\sigma\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} - \left(\frac{\partial\mathcal{X}^\alpha(\varphi^s, \partial_\sigma\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (7.16)$$



8. ЛАГРАНЖИАН ПУСТОГО ПРОСТРАНСТВА

Еще одно обобщение теории вариационных симметрий достигается путем аддитивной трансформации «естественной» плотности лагранжиана $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mathcal{L}'$ так, чтобы добавочное слагаемое $\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta)$ не нарушал выполнения уравнений Эйлера – Лагранжа. Другими словами, добавление \mathcal{L}' к лагранжиану \mathcal{L} не оказывает влияния на условия стационарности действия, хотя, возможно, и приводит к изменению граничных условий для поля и, самое главное, — к изменению условия инфинитезимальной инвариантности действия. Эта процедура часто называется калибровкой лагранжиана. Лагранжианы \mathcal{L} и $\mathcal{L} + \mathcal{L}'$ оказываются физически эквивалентными.

Вообще всякая функция

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta), \quad (8.1)$$

для которой уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}') \equiv \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots = 0 \quad (8.2)$$

тождественно удовлетворяются для любого набора физических полевых величин φ^k , называется лагранжианом «пустого пространства»³⁸, поскольку любой подобный аддитивный добавок формально не изменяет вариационного представления физических полей и поэтому может быть ассоциирован с пространством, «вмещающим» поля.

В качестве примера (см. [7, с. 241–243]) рассмотрим скалярное двумерное поле с лагранжианом, представляющим собой Гессиян поля, т.е.

$$\mathcal{L} = (\partial_1 \partial_1 \varphi)(\partial_2 \partial_2 \varphi) - (\partial_1 \partial_2 \varphi)^2. \quad (8.3)$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что для любого поля φ уравнения поля $\mathcal{E}(\mathcal{L}) = 0$ удовлетворяются тождественно, следовательно, лагранжиан (8.3) нулевой. Нетрудно заметить, что он представляет собой дивергенцию $\mathcal{L} = \partial_1 P^1 + \partial_2 P^2$, вектора $P^1 = (\partial_1 \varphi)(\partial_2 \partial_2 \varphi)$, $P^2 = -(\partial_1 \varphi)(\partial_1 \partial_2 \varphi)$.

Если \mathcal{L}' — нулевой лагранжиан, то действие с нулевым лагранжианом

$$\mathcal{S}' = \int \mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda) d^4 X \quad (8.4)$$

называется нейтральным действием. Принцип наименьшего действия в случае нейтрального действия заведомо выполнен, поскольку оно стационарно на произвольных физических полях, и поэтому вообще никак не связано со свойствами каких бы то ни было физических полей, что, собственно, и позволяет ассоциировать такое действие не с физическими полями, а с пространством их «вмещающим».

Понятие о лагранжиане пустого пространства совершенно необходимо для установления степени определенности канонических тензорных полей, входящих в формулировку как классических, так и дополнительных существенных законов сохранения. Теория лагранжиана пустого пространства излагается, например, в монографии [20, р. 224–226]. Наше изложение следует статье [4].

Лагранжианы пустого пространства выступают в качестве основы решения задачи вариационного исчисления об «интегрирующем множителе». Суть проблемы состоит в поиске таких функций $Q^j(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\alpha)$, которые позволяли бы для данной системы дифференциальных уравнений в частных производных $F_j(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\alpha) = 0$, которая не вытекает из принципа наименьшего действия, гарантировать выполнение равенства $\partial_\beta J^\beta = Q^j F_j$ с некоторым вектором J^β для произвольных полей φ^k и тем самым сформулировать на решениях указанной системы дивергентный закон сохранения

$$\partial_\beta J^\beta = 0.$$

³⁸Или нулевым лагранжианом (null Lagrangian). Часто употребляется также термин «калибровочный лагранжиан».



8.1. Дивергентное представление нулевого лагранжиана, регулярного в звездообразной области

Основной результат развиваемой теории состоит в том, что лагранжиан пустого пространства (8.1) всегда представляется (при предположении о «звездообразности» области³⁹ изменения его аргументов) в форме полной дивергенции

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda) = \frac{\partial \Phi^\alpha(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda)}{\partial X^\alpha}. \quad (8.5)$$

Представимость лагранжиана в форме полной дивергенции (8.5) является необходимым и достаточным условием того, чтобы он был нулевым. Достаточность проверяется прямым вычислением оператора Эйлера в применении к (8.5): $\mathcal{E}_k(\partial_\alpha \Phi^\alpha) = 0$. Необходимость также без труда обосновывается. Мы приведем доказательство, существенно использующее звездообразную геометрию области определения лагранжиана в продолженном пространстве, следуя [14, с. 322, 323; 15, р. 225, 226].

Предположим, что лагранжиан $\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda)$ есть лагранжиан пустого пространства, определенный и регулярный в некоторой области изменения аргументов $\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots$, звездообразной относительно нулевой точки.

Рассмотрим значения лагранжиана на лучах, исходящих из нулевой точки. Для этого введем параметр ε , изменяющийся на отрезке $[0, 1]$. Пользуясь звездообразной геометрией области, можно заключить, что функция от ε

$$\mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda)$$

корректно определена и регулярна на отрезке $[0, 1]$.

Дифференцирование по параметру ε приводит к

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda) &= \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} \varphi^k + \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right) (\partial_\gamma \varphi^k) + \\ &+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) + \dots \end{aligned} \quad (8.6)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} (\partial_\gamma \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right) &= \partial_\gamma \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right) - \varphi^k \partial_\gamma \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \varphi^k)} \right), \\ (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) &= \partial_\gamma \partial_\beta \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - \varphi^k \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - \\ &- 2(\partial_\beta \varphi^k) \partial_\gamma \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right), \end{aligned}$$

а также

$$(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k) \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) = \partial_\beta \partial_\gamma \left(\varphi^k \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\beta \partial_\gamma \varphi^k)} \right) - \partial_\beta \left(2\varphi^k \partial_\gamma \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) + \varphi^k \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right),$$

находим формулу (см. символические обозначения (1.29))

$$\sum_l \sum_{s \geq 0} (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l) \left(\partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L}' \right) = \sum_l \varphi^l \sum_{s \geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \left(\partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L}' \right) + \partial_\beta \Psi^\beta =$$

³⁹Область многомерного пространства называется звездообразной (или звездной [27, с. 271; 28, с. 222]) относительно некоторой своей точки, если любую точку области можно соединить с этой точкой отрезком прямой, целиком расположенным внутри области. Выпуклая область звездообразна относительно любой своей точки. Понятие звездообразности области — обобщение на многомерный случай требования односвязности плоской области так, чтобы по-прежнему для поля P_γ , удовлетворяющего условиям совместности $\partial_\beta P_\gamma = \partial_\gamma P_\beta$, было справедливо заключение о том, что его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю: $\oint P_\gamma dX^\gamma = 0$. Требование о звездообразной форме области может быть несколько ослаблено (см., например, [27, с. 144–150]). В частности, речь может идти об областях, каждая точка которой достижима из некоторой фиксированной точки области по двузвенной ломаной, целиком расположенной внутри области: одно из звеньев ломаной всегда располагается в некоторой фиксированной гиперплоскости, а второе — перпендикулярно этой гиперплоскости. Вопрос о форме нулевого лагранжиана в областях, отличающихся от звездообразной, нуждается в дополнительном исследовании.



$$= \varphi^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}') + \partial_\beta \Psi^\beta,$$

где Ψ^β — некоторое векторное поле, также зависящее от полевых переменных φ^k , их градиентов и пространственно-временных координат X^β , явное выражение которого нам в дальнейшем не требуется.

Для производной (8.6), следовательно, находим формулу

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}'(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\lambda) = \varphi^k \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \right) + \partial_\gamma \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} \right) - \dots \right\} + \partial_\beta \Psi^\beta.$$

Принимая во внимание, что \mathcal{L}' есть лагранжиан пустого пространства, т.е. для любого поля φ^k выполняются уравнения поля $\mathcal{E}_k(\mathcal{L}') = 0$, получим, интегрируя по ε на отрезке $[0, 1]$,

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda) - \mathcal{L}'(0, 0, 0, \dots, X^\lambda) = \partial_\beta \bar{\Psi}^\beta,$$

где $\bar{\Psi}^\beta = \int_0^1 \Psi^\beta(\varepsilon \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \varphi^k, \varepsilon \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda) d\varepsilon$.

Выбирая далее поле $\hat{\Psi}^\beta$ так, чтобы $\mathcal{L}'(0, 0, 0, \dots, X^\alpha) = \partial_\beta \hat{\Psi}^\beta$, что заведомо возможно и многими способами⁴⁰, и обозначая $\Phi^\beta = \hat{\Psi}^\beta + \bar{\Psi}^\beta$, приходим к дивергентному представлению лагранжиана пустого пространства: $\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda) = \partial_\beta \Phi^\beta(\varphi^k, \partial_\gamma \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\lambda)$.

Плотность лагранжиана в 4-пространстве – времени, таким образом, всегда определяется с точностью до аддитивной полной дивергенции 4-вектора, зависящего от переменных поля, включая и градиенты поля⁴¹. Поэтому приходится также учитывать то обстоятельство, что в результате подсчета указанная дивергенция на самом деле может зависеть от градиентов поля порядка более высокого, чем сам 4-вектор Φ^γ .

8.2. Вычисление нулевого лагранжиана статического трехкомпонентного поля в трехмерном пространстве

Вычисление нулевого лагранжиана, зависящего лишь от градиентов первого порядка статического трехкомпонентного поля в трехмерном пространстве, представляет интерес в связи с исследованием нелинейно упругого поля в деформируемом твердом теле.

Если размерность пространства X^β равна трем и $k = 1, 2, 3$, то лагранжиан пустого пространства, зависящий от градиентов поля порядка не выше первого, всегда можно разложить в сумму

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, X^\lambda) = A(\varphi^k, X^\beta) + B_{k\cdot}^\beta(\varphi^k, X^\beta) \partial_\beta \varphi^k + C_{\cdot\beta}^{k\cdot}(\varphi^k, X^\beta) J \partial_k X^\beta + D(\varphi^k, X^\beta) J, \quad (8.7)$$

где $A(\varphi^k, X^\beta)$, $B_{k\cdot}^\beta(\varphi^k, X^\beta)$, $C_{\cdot\beta}^{k\cdot}(\varphi^k, X^\beta)$, $D(\varphi^k, X^\beta)$ — некоторые поля, зависящие от пространственно-временных координат X^α и физических полей φ^k ⁴², J — якобиан отображения $X^\beta \rightarrow x^k = \varphi^k$:

$$J = \det(\partial_\beta \varphi^k).$$

Приведенное только что соотношение может быть переписано в прямую тензорную запись

$$\mathcal{L}' = A + \text{tr}(\mathbf{B} \cdot (\nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x})) + J \text{tr}(\mathbf{C} \cdot (\nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x})^{-1}) + JD, \quad (8.8)$$

где $(\nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x})_{\beta\cdot}^k = \partial_\beta \varphi^k$.

Непосредственный расчет показывает, что полная дивергенция трехмерного векторного поля Φ^γ , зависящего от трех координат X^β , трех компонент поля φ^k и их градиентов порядка не выше первого, также будет зависеть от градиентов поля порядка не выше первого, только если

$$\Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, X^\lambda) = L^\gamma(\varphi^s, X^\beta) + \varepsilon^{\gamma\beta\lambda} (\partial_\beta \varphi^k) K_{k\lambda}(\varphi^s, X^\beta) + J (\partial_k X^\gamma) M^k(\varphi^s, X^\beta), \quad (8.9)$$

⁴⁰ Действительно, поле $\hat{\Psi}^\alpha$ по заданной дивергенции можно разыскивать в безвихревом виде $\hat{\Psi}^\beta = \partial_\beta \psi$. Для определения потенциала ψ (ψ есть функция только пространственно-временных координат) тогда имеется уравнение Пуассона, разрешимость которого гарантирована, если правая часть этого уравнения — непрерывная функция пространственно-временных координат X^β .

⁴¹ Как следует из (8.5), естественное представление вектора Φ^γ — 1-контравариантное отсчетное.

⁴² Выражения для A , $B_{k\cdot}^\beta$, $C_{\cdot\beta}^{k\cdot}$, D , как будет показано далее, не могут быть выбраны произвольно.



где $L^\gamma = L^\gamma(\varphi^k, X^\beta)$, $K_{k\beta} = K_{k\beta}(\varphi^k, X^\alpha)$, $M^s = M^s(\varphi^k, X^\beta)$ — произвольные поля.

Прямая запись уравнения (8.9) есть:

$$\Phi = \mathbf{L} + ((\nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x}) \cdot \mathbf{K})^\times + J(\nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x})^{-\mathbf{T}} \cdot \mathbf{M},$$

где крестом (крест Гиббса (Gibbsian cross)) обозначается векторный инвариант тензора второго ранга: $(\mathbf{A}^\times)^\gamma = \varepsilon^{\gamma\beta\lambda} A_{\beta\lambda}$ ⁴³.

С целью обоснования (8.9) вычислим полную дивергенцию поля $\Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, X^\beta)$ как

$$\frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = \left(\frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial \varphi^k} \right) (\partial_\gamma \varphi^k) + \left(\frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \right) \partial_\gamma (\partial_\beta \varphi^k). \quad (8.10)$$

Полная дивергенция не зависит от частных производных $\frac{\partial^2 \varphi^k}{(\partial X^1)^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi^k}{(\partial X^2)^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi^k}{(\partial X^3)^2}$, только если

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial (\partial_1 \varphi^k)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^2}{\partial (\partial_2 \varphi^k)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^3}{\partial (\partial_3 \varphi^k)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (8.11)$$

Но это означает, что компонента Φ^β не зависит от $\partial_\beta \varphi^k$ ($k = 1, 2, 3$).

Аналогично должны выполняться условия

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial (\partial_2 \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial (\partial_1 \varphi^k)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^1}{\partial (\partial_3 \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^3}{\partial (\partial_1 \varphi^k)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^2}{\partial (\partial_3 \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^3}{\partial (\partial_2 \varphi^k)} = 0, \quad (8.12)$$

чтобы была исключена зависимость от смешанных частных производных $\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial X^1 \partial X^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial X^1 \partial X^3}$, $\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial X^2 \partial X^3}$.

На основании (8.11), (8.12) можно заключить, что компоненты Φ^β выражаются через первые градиенты поля как

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= a_{k'k''}(\partial_2 \varphi^{k'}) (\partial_3 \varphi^{k''}) + b_k(\partial_2 \varphi^k) + c_k(\partial_3 \varphi^k) + h^1, \\ \Phi^2 &= e_{k'k''}(\partial_1 \varphi^{k'}) (\partial_3 \varphi^{k''}) + f_k(\partial_1 \varphi^k) + g_k(\partial_3 \varphi^k) + h^2, \\ \Phi^3 &= p_{k'k''}(\partial_1 \varphi^{k'}) (\partial_2 \varphi^{k''}) + q_k(\partial_1 \varphi^k) + s_k(\partial_2 \varphi^k) + h^3, \end{aligned} \quad (8.13)$$

где $a_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta)$, $e_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta)$, $p_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta)$, $b_k(\varphi^k, X^\beta)$, $f_k(\varphi^k, X^\beta)$, $q_k(\varphi^k, X^\beta)$, $c_k(\varphi^k, X^\beta)$, $g_k(\varphi^k, X^\beta)$, $s_k(\varphi^k, X^\beta)$, $h^k(\varphi^k, X^\beta)$.

Действительно, поскольку, например, компонента Φ^2 не зависит от частных производных $\partial_2 \varphi^k$, а Φ^3 — от $\partial_3 \varphi^k$, то два первых уравнения в (8.12) устанавливают, что Φ^1 может зависеть от градиента $\partial_2 \varphi^k$ только линейно с коэффициентом, линейно зависящим от $\partial_3 \varphi^k$, и, наоборот, Φ^1 может зависеть от градиента $\partial_3 \varphi^k$ только линейно с коэффициентом, линейно зависящим от $\partial_2 \varphi^k$. Учитывая еще, что компонента Φ^1 не зависит от градиентов $\partial_1 \varphi^k$, сразу же приходим к представлению (8.13) для Φ^1 .

Подставляя (8.13) в (8.12), находим, что для любых градиентов поля должны удовлетворяться соотношения

$$\begin{aligned} (e_{kk''} + a_{kk''})(\partial_3 \varphi^{k''}) + f_k + b_k &= 0, \\ (a_{k''k} + p_{kk''})(\partial_2 \varphi^{k''}) + c_k + q_k &= 0, \\ (e_{k'k} + p_{k'k})(\partial_1 \varphi^{k'}) + g_k + s_k &= 0, \end{aligned} \quad (8.14)$$

откуда следуют равенства $e_{kk'} = -a_{kk'}$, $p_{kk'} = -a_{k'k}$, $a_{kk'} = -a_{k'k}$; $f_k = -b_k$, $q_k = -c_k$, $s_k = -g_k$, пользуясь которыми формулы (8.13) представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= a_{k'k''}(\partial_2 \varphi^{k'}) (\partial_3 \varphi^{k''}) + b_k(\partial_2 \varphi^k) + c_k(\partial_3 \varphi^k) + h^1, \\ \Phi^2 &= -a_{k'k''}(\partial_1 \varphi^{k'}) (\partial_3 \varphi^{k''}) - b_k(\partial_1 \varphi^k) + g_k(\partial_3 \varphi^k) + h^2, \\ \Phi^3 &= a_{k'k''}(\partial_1 \varphi^{k'}) (\partial_2 \varphi^{k''}) - c_k(\partial_1 \varphi^k) - g_k(\partial_2 \varphi^k) + h^3. \end{aligned} \quad (8.15)$$

⁴³Заметим, что векторный инвариант диадного произведения двух векторов трехмерного пространства есть векторное произведение векторов, составляющих диаду: $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^\times = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.



Вводя затем аксиальный вектор a^s , соответствующий антисимметричному тензору второго ранга a_{kj} согласно $2a^s = \varepsilon^{skj} a_{kj}$, получим

$$\begin{aligned}\Phi^1 &= a^3((\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^1)) - a^2((\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^1)) + \\ &\quad + a^1((\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^2)) + b_k(\partial_2\varphi^k) + c_k(\partial_3\varphi^k) + h^1, \\ \Phi^2 &= -a^3((\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^1)) + a^2((\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^1)) - \\ &\quad - a^1((\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^2)) - b_k(\partial_1\varphi^k) + g_k(\partial_3\varphi^k) + h^2, \\ \Phi^3 &= a^3((\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^1)) - a^2((\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^1)) + \\ &\quad + a^1((\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^2)) - c_k(\partial_1\varphi^k) - g_k(\partial_2\varphi^k) + h^3.\end{aligned}\tag{8.16}$$

Наконец, учитывая, что

$$\begin{vmatrix} \partial_1\varphi^1 & \partial_2\varphi^1 & \partial_3\varphi^1 \\ \partial_1\varphi^2 & \partial_2\varphi^2 & \partial_3\varphi^2 \\ \partial_1\varphi^3 & \partial_2\varphi^3 & \partial_3\varphi^3 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \partial_1X^1 & \partial_2X^1 & \partial_3X^1 \\ \partial_1X^2 & \partial_2X^2 & \partial_3X^2 \\ \partial_1X^3 & \partial_2X^3 & \partial_3X^3 \end{vmatrix},$$

т.е. $2J\partial_kX^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m)$, или в развернутой записи

$$\begin{aligned}J\partial_1X^1 &= (\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^2), \\ -J\partial_2X^1 &= (\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^1), \\ J\partial_3X^1 &= (\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^1); \\ -J\partial_1X^2 &= (\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^2), \\ J\partial_2X^2 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^1), \\ -J\partial_3X^2 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^1); \\ J\partial_1X^3 &= (\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^2), \\ -J\partial_2X^3 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^1), \\ J\partial_3X^3 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^1),\end{aligned}$$

и обозначая $h^\gamma = L^\gamma$, $a^s = M^s$, $b_k = K_{k3}$, $c_k = -K_{k2}$, $g_k = K_{k1}$, формулы (8.16) сразу же приводятся к (8.9).

Как следует из проведенных рассуждений, L^γ — контравариантный отсчетный вектор, M^s — аксиальный пространственный вектор, $K_{k\alpha}$ — 1-ковариантный пространственный и 1-ковариантный отсчетный тензор второго ранга.

Вычислим далее полную дивергенцию поля Φ^γ , определенного согласно (8.9). Прежде всего находим

$$\begin{aligned}\partial_\gamma\Phi^\gamma &= (\partial_\gamma L^\gamma)_{\text{expl}} + (\partial_k L^\gamma)(\partial_\gamma\varphi^k) + \varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma K_{k\lambda})_{\text{expl}} + \varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma\varphi^l)(\partial_l K_{k\lambda}) + \\ &\quad + J(\partial_k X^\gamma)(\partial_\gamma M^k)_{\text{expl}} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_n M^k)(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m)(\partial_\gamma\varphi^n).\end{aligned}$$

Здесь уже учтено, что $\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k) = 0$, и в силу $2J\partial_k X^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m)$ также равенство $\partial_\gamma(J\partial_k X^\gamma) = 0$.

Замечая далее, что $\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}(\partial_\gamma\varphi^n)(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m) = J\varepsilon^{nlm}$, $\varepsilon^{nlm}\varepsilon_{klm} = 2\delta_k^n$, получим⁴⁴

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_n M^k)(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m)(\partial_\gamma\varphi^n) = \frac{1}{2}\varepsilon^{nlm}\varepsilon_{klm}J(\partial_n M^k) = J(\partial_k M^k).$$

⁴⁴Приводимые формулы читатель может найти, например, в [29, с. 23, 24].



На основании (см., например, [29, с. 28]) $\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma\varphi^l) = \varepsilon^{r lk}\Delta_r^\lambda$, где Δ_r^λ — алгебраическое дополнение элемента $\partial_\lambda\varphi^r$ в определителе

$$\begin{vmatrix} \partial_1\varphi^1 & \partial_2\varphi^1 & \partial_3\varphi^1 \\ \partial_1\varphi^2 & \partial_2\varphi^2 & \partial_3\varphi^2 \\ \partial_1\varphi^3 & \partial_2\varphi^3 & \partial_3\varphi^3 \end{vmatrix},$$

и учитывая $\Delta_r^\lambda = J(\partial_r X^\lambda)$, имеем $\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma\varphi^l) = \varepsilon^{r lk}J(\partial_r X^\lambda)$, следовательно,

$$\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma\varphi^l)(\partial_l K_{k\lambda}) = \varepsilon^{klp}(\partial_l K_{p\beta})(\partial_k X^\beta) = -\varepsilon^{kpl}(\partial_l K_{p\beta})(\partial_k X^\beta),$$

что сразу же позволяет найти выражение (8.7) для лагранжиана пустого пространства, причем поля A , $B_{k\cdot}^\beta$, $C_{\cdot\beta}^k$, D , фигурирующие в этом представлении, определяются в следующем виде:

$$A(x^k, X^\beta) = \left(\frac{\partial L^\gamma(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \quad (8.17)$$

$$D(x^k, X^\beta) = \left(\frac{\partial M^s(x^k, X^\beta)}{\partial x^s} \right)_{\text{expl}}, \quad (8.18)$$

$$B_{k\cdot}^\beta(x^s, X^\beta) = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \left(\frac{\partial K_{k\alpha}(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + (\partial_k L^\beta(x^s, X^\beta))_{\text{expl}}, \quad (8.19)$$

$$C_{\cdot\beta}^k(x^s, X^\beta) = (\partial_\beta M^k(x^s, X^\gamma))_{\text{expl}} - \varepsilon^{kpl} \left(\frac{\partial K_{p\beta}(x^s, X^\gamma)}{\partial x^l} \right)_{\text{expl}}. \quad (8.20)$$

Приведем также прямую запись соотношений (8.17)–(8.20):

$$A = \text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{L}, \quad D = \text{div}_{\text{expl}}\mathbf{M}, \quad \mathbf{B} = \text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{K} + (\text{grad}_{\text{expl}}\mathbf{L})^T, \quad \mathbf{C} = \text{Grad}_{\text{expl}}\mathbf{M} - (\text{rot}_{\text{expl}}\mathbf{K}^T)^T$$

и необходимые для понимания формул определения дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} \text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{L} &= (\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{L})_{\text{expl}}, & \text{div}_{\text{expl}}\mathbf{M} &= (\nabla \cdot \mathbf{M})_{\text{expl}}, \\ \text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{K} &= (\mathbf{K} \times \nabla_{\mathbf{R}})_{\text{expl}}, & (\text{rot}_{\text{expl}}\mathbf{K}^T)^T &= (\mathbf{K}^T \times \nabla)_{\text{expl}}^T, \\ \text{grad}_{\text{expl}}\mathbf{L} &= (\mathbf{L} \otimes \nabla)_{\text{expl}}, & \text{Grad}_{\text{expl}}\mathbf{M} &= (\mathbf{M} \otimes \nabla_{\mathbf{R}})_{\text{expl}}, \end{aligned}$$

или в координатной записи:

$$\begin{aligned} \text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{L} &= (\partial_\gamma L^\gamma)_{\text{expl}}, & \text{div}_{\text{expl}}\mathbf{M} &= (\partial_k M^k)_{\text{expl}}, \\ (\text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{K})_{k\cdot}^\beta &= \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \left(\frac{\partial K_{k\alpha}(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, & ((\text{rot}_{\text{expl}}\mathbf{K}^T)^T)_{\cdot\beta}^k &= \varepsilon^{kpl} \left(\frac{\partial K_{p\beta}(x^s, X^\gamma)}{\partial x^l} \right)_{\text{expl}}, \\ ((\text{grad}_{\text{expl}}\mathbf{L})^T)_{k\cdot}^\gamma &= (\partial_k L^\gamma)_{\text{expl}}, & (\text{Grad}_{\text{expl}}\mathbf{M})_{\cdot\gamma}^s &= (\partial_\gamma M^s)_{\text{expl}}. \end{aligned}$$

В силу тождеств $\partial_k \partial_\gamma L^\gamma = \partial_\gamma \partial_k L^\gamma$, $\varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \varepsilon^{jks} \partial_s \partial_\gamma K_{k\alpha} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \varepsilon^{jks} \partial_\gamma \partial_s K_{k\alpha}$, $\partial_\gamma \partial_k M^k = \partial_s \partial_\gamma M^s$ находим

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\text{expl}}\text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{L} &= \text{Div}_{\text{expl}}(\text{grad}_{\text{expl}}\mathbf{L})^T, \\ \text{rot}_{\text{expl}}(\text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{K})^T &= (\text{Rot}_{\text{expl}}(\text{rot}_{\text{expl}}\mathbf{K}^T)^T)^T, \\ \text{Grad}_{\text{expl}}\text{div}_{\text{expl}}\mathbf{M} &= \text{div}_{\text{expl}}(\text{Grad}_{\text{expl}}\mathbf{M})^T, \end{aligned}$$

что приводит к соотношениям совместности⁴⁵

$$\text{grad}_{\text{expl}}A = \text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{B}, \quad (\text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{C})^T = -\text{rot}_{\text{expl}}\mathbf{B}^T, \quad \text{Grad}_{\text{expl}}D = \text{div}_{\text{expl}}\mathbf{C}^T, \quad (8.21)$$

⁴⁵Соотношения совместности необходимо должны удовлетворять поля A , \mathbf{B} , \mathbf{C} , D в выражении (8.7) для лагранжиана пустого трехмерного пространства.



где $\text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B} = (\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{B}^{\mathbf{T}})_{\text{expl}}$, $\text{div}_{\text{expl}} \mathbf{C}^{\mathbf{T}} = (\nabla \cdot \mathbf{C})_{\text{expl}}$, или для компонент $(\text{Div}_{\text{expl}} \mathbf{B})_k = (\partial_{\alpha} B_{k \cdot}^{\alpha})_{\text{expl}}$, $(\text{div}_{\text{expl}} \mathbf{C}^{\mathbf{T}})_{\beta} = (\partial_k C_{\cdot \beta}^{k \cdot})_{\text{expl}}$.

Условия совместности (8.21) могут быть получены прямой подстановкой (8.7) в уравнения Эйлера – Лагранжа (8.2) и приравниванием к нулю сумм коэффициентов при одинаковых степенях градиентов $\partial_{\beta} \varphi^k$.

8.3. Вычисление нулевого лагранжиана 4-мерного пространства – времени

Найдем выражение для лагранжиана пустого пространства для случая, когда пространство – время четырехмерно, а число m физических полевых величин φ^k может быть произвольным. При этом будем считать, что лагранжиан \mathcal{L}' и векторное поле Φ^{γ} в самом общем представлении лагранжиана пустого пространства (8.5) зависят от градиентов полей φ^k порядка не выше первого.

Поскольку

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_{\alpha} \varphi^k, X^{\beta}) = \frac{\partial \Phi^{\gamma}(\varphi^k, \partial_{\alpha} \varphi^k, X^{\beta})}{\partial X^{\gamma}}, \quad (8.22)$$

то, как и в трехмерном случае, необходимо исследовать условия, когда дивергенция в правой части не будет зависеть от вторых производных $(\partial_{\alpha} \partial_{\beta} \varphi^k)$.

Учитывая, во-первых, что в выражении для лагранжиана пустого пространства \mathcal{L}' коэффициент при второй частной производной $(\partial_{\beta} \partial_{\beta} \varphi^k)$ (по β не суммировать) должен быть нулевым, можно заключить, что должны выполняться условия:

$$\frac{\partial \Phi^{\beta}}{\partial (\partial_{\beta} \varphi^k)} = 0 \quad (\text{по } \beta \text{ не суммировать}),$$

т.е. компонента Φ^{γ} не зависит от $(\partial_{\gamma} \varphi^k)$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Во-вторых, лагранжиан пустого пространства \mathcal{L}' не зависит от смешанных частных производных $(\partial_{\alpha} \partial_{\beta} \varphi^k)$ ($\alpha \neq \beta$) только при условии

$$\frac{\partial \Phi^{\lambda}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi^k)} + \frac{\partial \Phi^{\mu}}{\partial (\partial_{\lambda} \varphi^k)} = 0 \quad (\mu \neq \lambda). \quad (8.23)$$

Положим $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \alpha_2$ и, используя то обстоятельство, что Φ^{α_2} от производной $(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})$ не зависит, получим, что Φ^{α_1} линейно зависит от производной $\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}$, т.е.

$$\Phi^{\alpha_1} = a_{k_2}^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2} + b^{\alpha_1} \quad (\text{по } \alpha_2, k_2 \text{ не суммировать}), \quad (8.24)$$

где коэффициенты $a_{k_2}^{\alpha_1 \alpha_2}$ и b^{α_1} не зависят от производной $\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}$.

Затем, подставляя выражение (8.24) для Φ^{α_1} в соотношение (8.23) при $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \alpha_3$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$, получим, что $a_{k_2}^{\alpha_1 \alpha_2}$ и b^{α_1} линейно зависят от производной $(\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3})$.

Продолжая рассуждения дальше, заключаем, что поле Φ^{γ} можно представить в виде многочлена по возрастающим степеням градиентов $\partial_{\alpha} \varphi^k$

$$\begin{aligned} \Phi^{\gamma} = & A^{\gamma} + B_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + C_{\cdot \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \\ & + D_{\cdot \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \dots, \end{aligned} \quad (8.25)$$

где коэффициенты A^{γ} , $B_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}$, $C_{\cdot \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$, $D_{\cdot \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ могут зависеть от X^{β} , φ^k , и не выписаны полиномиальные по градиентам слагаемые более высоких степеней.

Подставляя (8.25) в (8.23), получим $B_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot} = -B_{\cdot \cdot k_1}^{\alpha_1 \gamma \cdot}$, т.е. коэффициенты $B_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}$ антисимметричны по индексам γ , α_1 ; аналогично заключаем, что коэффициенты $C_{\cdot \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричны по парам индексов γ , α_1 и γ , α_2 ; коэффициенты $D_{\cdot \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричны по парам индексов γ , α_1 ; γ , α_2 ; γ , α_3 ; и т.д. для всех невыписанных в (8.25) коэффициентов.



Из антисимметричности коэффициентов $C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ по индексам γ, α_1 и γ, α_2 получаются следующие равенства: переставляя γ, α_1 : $C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = -C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdot \gamma \cdot}$; переставляя α_1, α_2 : $C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\alpha_1 \alpha_2 \cdot \gamma \cdot} = -C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot \gamma \cdot}$; переставляя γ, α_2 : $C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot \gamma \cdot} = -C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot}$.

Откуда следует, что коэффициенты $C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричны по паре греческих индексов α_1, α_2 .

Аналогично доказывается, что коэффициенты $D_{\dots k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричны по любой паре греческих индексов⁴⁶ и все остальные коэффициенты в (8.25) также антисимметричны по любой паре греческих индексов.

Таким образом, для любого, отличного от нуля, коэффициента в (8.25) все греческие индексы должны быть различны, но у греческих индексов может быть всего четыре различных значения 1, 2, 3, 4, и поэтому более четырех различных верхних индексов у коэффициентов в (8.25) быть не может, т.е. в разложении (8.25) невыписанные слагаемые на самом деле отсутствуют:

$$\Phi^\gamma = A^\gamma + B_{\dots k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + D_{\dots k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}). \quad (8.26)$$

Рассмотрим теперь индивидуальные суммы в (8.26). Переставляя в сумме $C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})$ у коэффициентов $C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ индексы α_1, α_2 , находим:

$$C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) = -C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}),$$

и переименовывая по схеме $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow \alpha_1, k_1 \rightarrow k_2, k_2 \rightarrow k_1$ немые латинские и греческие индексы, приходим к следующим равенствам:

$$C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) = -C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_2}) = -C_{\dots k_1 \cdot k_2}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}).$$

Следовательно, коэффициенты $C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричны по паре латинских индексов k_1, k_2 .

Аналогично доказывается, что коэффициенты $D_{\dots k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричны по любой паре латинских индексов.

Резюмируя сказанное, имеем, что коэффициенты $B_{\dots k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}$ антисимметричны по греческим индексам, коэффициенты $C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}, D_{\dots k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричны по любой паре греческих и любой паре латинских индексов.

Вычисляя дивергенцию Φ^γ , после ряда преобразований получим выражение для лагранжиана пустого пространства в случае 4-мерного пространственно-временного многообразия:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = & \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B_{\dots k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + \\ & + \left(\frac{\partial B_{\dots k_1}^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \\ & + \left(\frac{\partial C_{\dots k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_3}} + \left(\frac{\partial D_{\dots k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + \\ & + \frac{\partial D_{\dots k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_4}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_\gamma \varphi^{k_4}). \end{aligned} \quad (8.27)$$

Последнее слагаемое в (8.27) в силу $D_{\dots k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = D_{k_3 k_2 k_1} \varepsilon^{\gamma \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}$ и при условии, что число физических полевых величин также равно четырем, приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial D_{\dots k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_4}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) (\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) (\partial_\gamma \varphi^{k_4}) =$$

⁴⁶Последнее означает, что для коэффициентов $D_{\dots k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ справедливо также следующее представление:

$$D_{\dots k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = D_{k_3 k_2 k_1} \varepsilon^{\gamma \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1},$$

где $D_{k_3 k_2 k_1}$ — антисимметричный 3-ковариантный пространственный тензор.



$$= (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3})(\partial_{\gamma} \varphi^{k_4}) \varepsilon^{\gamma \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} \frac{\partial D_{k_3 k_2 k_1}}{\partial x^{k_4}} = J \varepsilon^{k_4 k_3 k_2 k_1} \frac{\partial D_{k_3 k_2 k_1}}{\partial x^{k_4}},$$

где J — якобиан отображения $(X^1, X^2, X^3, X^4) \rightarrow (x^1, x^2, x^3, x^4)$.

С целью оптимизации записи дальнейших рассуждений введем обозначения

$$A = \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \quad L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} = \frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \quad L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = \frac{\partial B_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial C_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}},$$

$$L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = \frac{\partial C_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_3}} + \left(\frac{\partial D_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}}, \quad L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = \frac{\partial D_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_4}}$$

и представим лагранжиан пустого 4-мерного пространственно-временного многообразия в форме

$$\mathcal{L}' = A + L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3})(\partial_{\alpha_4} \varphi^{k_4}). \quad (8.28)$$

Заметим, что в этом представлении нулевого лагранжиана все коэффициенты могут быть антисимметризованы по нижним латинским индексам, поскольку, как нетрудно проверить, все они $L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$, $L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$, $L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричны по любой паре латинских индексов.

Формула (8.28), следовательно, может быть также записана в форме

$$\mathcal{L}' = A + L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + L_{\cdot [k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + L_{\cdot [k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3}) + L_{\cdot [k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3} \varphi^{k_3})(\partial_{\alpha_4} \varphi^{k_4}), \quad (8.29)$$

где квадратные скобки применяются для обозначения операции альтернирования по заключенным в них индексам.

В дальнейшем можно считать, что

$$L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = L_{\cdot [k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}, \quad L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = L_{\cdot [k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}, \quad L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} = L_{\cdot [k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}.$$

Подставляя (8.28) в уравнение Эйлера – Лагранжа (8.2) и приравнивая нулю последовательно суммы коэффициентов при одинаковых степенях градиентов полевых величин φ^k , можно получить условия совместности для коэффициентов в разложении (8.28).

Так, условие равенства нулю суммы коэффициентов при нулевой степени градиентов есть

$$\frac{\partial A}{\partial x^{k_1}} - \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} = 0, \quad (8.30)$$

или также

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} = 0. \quad (8.31)$$

Ясно, что это условие совместности тождественно удовлетворяется в силу

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} \frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} \right)_{\text{expl}}$$

и, поскольку тензор $B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}$ антисимметричен по верхним индексам,

$$\left(\frac{\partial^2 B_{\cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}}{\partial X^{\alpha_1} \partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} = 0.$$

Следующим в ряду условий совместности будет

$$\frac{\partial L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_2}} - \frac{\partial L_{\cdot k_2}^{\alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L_{\cdot k_1 \cdot k_2}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} - \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} = 0, \quad (8.32)$$



или

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^{k_2}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma \alpha_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} \left(\frac{\partial B^{\alpha_2 \alpha_1}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial C^{\gamma \alpha_2 \alpha_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} + \\ & + \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} \left(\frac{\partial B^{\alpha_2 \alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial C^{\gamma \alpha_2 \alpha_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} - \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma \alpha_1}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right)_{\text{expl}} = 0. \end{aligned}$$

Это условие тождественно удовлетворяется в силу перестановочности частного дифференцирования и антисимметрии тензора $C^{\gamma \alpha_2 \alpha_1}$ по любой паре греческих индексов.

Используя, по-прежнему, квадратные скобки для обозначения операции альтернирования по заключенным в них индексам, условие совместности (8.32) представим в форме

$$\frac{\partial L^{\alpha_1}}{\partial x^{k_2}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L^{\alpha_2 \alpha_1} \right)_{\text{expl}}. \quad (8.33)$$

Аналогично могут быть найдены еще два условия совместности:

$$-\frac{\partial L^{\alpha_2 \alpha_1}}{\partial x^{k_3}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_3}} L^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} \right)_{\text{expl}}, \quad (8.34)$$

$$-\frac{\partial L^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}}{\partial x^{k_4}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_4}} L^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} \right)_{\text{expl}}. \quad (8.35)$$

Приведем также необходимые для понимания формул (8.33)–(8.35) соотношения:

$$P_{k_1 k_2}^{\alpha_1} = \frac{\partial L^{\alpha_1}}{\partial x^{k_2}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_1}}{\partial x^{k_2}} = P_{[k_1 k_2]}^{\alpha_1} = \frac{1}{2}(P_{k_1 k_2}^{\alpha_1} - P_{k_2 k_1}^{\alpha_1});$$

$$P_{k_1 k_2 k_3}^{\alpha_2 \alpha_1} = \frac{\partial L^{\alpha_2 \alpha_1}}{\partial x^{k_3}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_2 \alpha_1}}{\partial x^{k_3}} = P_{[k_1 k_2 k_3]}^{\alpha_2 \alpha_1},$$

$$P_{[k_1 k_2 k_3]}^{\alpha_2 \alpha_1} = \frac{1}{3!}(P_{k_1 k_2 k_3}^{\alpha_2 \alpha_1} - P_{k_2 k_1 k_3}^{\alpha_2 \alpha_1} - P_{k_3 k_2 k_1}^{\alpha_2 \alpha_1} - P_{k_1 k_3 k_2}^{\alpha_2 \alpha_1} + P_{k_2 k_3 k_1}^{\alpha_2 \alpha_1} + P_{k_3 k_1 k_2}^{\alpha_2 \alpha_1});$$

$$P_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = \frac{\partial L^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}}{\partial x^{k_4}}, \quad \frac{\partial L^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}}{\partial x^{k_4}} = P_{[k_1 k_2 k_3 k_4]}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1},$$

$$\begin{aligned} P_{[k_1 k_2 k_3 k_4]}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} = & \frac{1}{4!} \left(P_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_3 k_2 k_1 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_1 k_3 k_2 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_2 k_1 k_3 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_2 k_3 k_1 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_3 k_1 k_2 k_4}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + \right. \\ & + P_{k_4 k_2 k_1 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_1 k_4 k_2 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_2 k_1 k_4 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_4 k_1 k_2 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_1 k_2 k_4 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_2 k_4 k_1 k_3}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - \\ & - P_{k_4 k_3 k_1 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_1 k_4 k_3 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_3 k_1 k_4 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_3 k_4 k_1 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_1 k_3 k_4 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_4 k_1 k_3 k_2}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + \\ & \left. + P_{k_4 k_3 k_2 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_2 k_4 k_3 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} + P_{k_3 k_2 k_4 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_3 k_4 k_2 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_2 k_3 k_4 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} - P_{k_4 k_2 k_3 k_1}^{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} \right). \end{aligned}$$

8.4. Вычисление нулевого лагранжиана пространства произвольной размерности

Приведенные рассуждения о форме лагранжиана пустого пространства без труда обобщаются на случай произвольного числа пространственно-временных координат X^β ($\beta = 1, 2, \dots, n+1$): векторное поле Φ^γ определяется в виде

$$\Phi^\gamma = A^\gamma + A^{\gamma \alpha_1}_{\cdot k_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + A^{\gamma \alpha_2 \alpha_1}_{\cdot k_2 \cdot k_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \dots + \quad (8.36)$$

$$+ A^{\gamma \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}), \quad (8.37)$$

где тензоры $A^\gamma(X^\beta, x^s)$, $A^{\gamma \alpha_1}_{\cdot k_1}(X^\beta, x^s)$, $A^{\gamma \alpha_2 \alpha_1}_{\cdot k_2 \cdot k_1}(X^\beta, x^s)$, \dots , $A^{\gamma \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}(X^\beta, x^s)$ антисимметричны по любой паре латинских и любой паре греческих индексов⁴⁷.

⁴⁷Применительно к тензору $A^{\gamma \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1}$ антисимметричность по любой паре греческих индексов означает, что $A^{\gamma \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1}_{\cdot k_n \cdot k_{n-1} \dots k_1} = A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}^{\gamma \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1} \varepsilon^{\gamma \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1}$, где $A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}$ — антисимметричный n -ковариантный пространственный тензор.



Вычисляя дивергенцию поля Φ^γ , определенного согласно (8.37), находим выражение для лагранжиана пустого пространства в случае $(n + 1)$ -мерного пространственно-временного многообразия:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = \frac{\partial \Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = & \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) + \\ & + \left(\frac{\partial A^{\alpha_2 \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) (\partial_{\alpha_2} \varphi^{k_2}) + \dots + \\ & + \left(\frac{\partial A^{\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_n}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \right) (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) + \\ & + \frac{\partial A^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_{n+1}}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}}). \end{aligned} \quad (8.38)$$

Здесь последнее слагаемое при условии, что число физических полевых величин в точности равно $n + 1$, может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A^{\gamma \alpha_n \cdot \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \cdot}}{\partial x^{k_{n+1}}} (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}}) = \\ & = (\partial_{\alpha_1} \varphi^{k_1}) \dots (\partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^{k_{n-1}}) (\partial_{\alpha_n} \varphi^{k_n}) (\partial_\gamma \varphi^{k_{n+1}}) \varepsilon^{\gamma \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1} \frac{\partial A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}} = J \varepsilon^{k_{n+1} k_n k_{n-1} \dots k_1} \frac{\partial A_{k_n k_{n-1} \dots k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}}, \end{aligned}$$

где J — якобиан отображения $(X^1, X^2, \dots, X^{n+1}) \rightarrow (x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$.

8.5. Нулевые лагранжианы, инвариантные относительно сдвигов полевых переменных

Поставим далее задачу о разыскании наиболее общей формы лагранжиана пустого пространства, инвариантного относительно сдвигов полевых переменных φ^s . Эта проблема особенно интересна в связи, например, с возможностью представления нелинейно упругого поля лагранжианом, который заведомо явно не будет зависеть от эйлеровых переменных.

Сформулированная проблема сразу же решается в случае, когда число пространственно-временных координат X^β равно трем и имеется три полевых величины φ^s , которые в применении к нелинейной теории упругости мы, как обычно, отождествим с переменными Эйлера x^s .

Действительно, скалярные и тензорные поля A, B, C, D в выражении (8.7) для лагранжиана пустого трехмерного пространства необходимо должны удовлетворять соотношениям совместности (8.21)

$$\text{grad}_{\text{expl}} A = \text{Div}_{\text{expl}} B, \quad (\text{Rot}_{\text{expl}} C)^T = -\text{rot}_{\text{expl}} B^T, \quad \text{Grad}_{\text{expl}} D = \text{div}_{\text{expl}} C^T.$$

Учитывая, что A, B, C не зависят от переменных x^s , приходим к уравнениям

$$\text{Div}_{\text{expl}} B = 0, \quad \text{Rot}_{\text{expl}} C = 0, \quad \text{Grad}_{\text{expl}} D = 0,$$

из которых следует, что лагранжиан пустого трехмерного пространства будет инвариантен относительно сдвигов эйлеровых переменных x^s , только если $A = A(X^\beta)$, D есть некоторая постоянная, и найдутся 1-ковариантное пространственное 1-ковариантное отсчетное тензорное поле $E_{k\alpha} = E_{k\alpha}(X^\beta)$ и контравариантное пространственное векторное поле $A^k = A^k(X^\beta)$ такие, что

$$B = \text{Rot}_{\text{expl}} E = (E \times \nabla_R)_{\text{expl}}, \quad C = \text{Grad}_{\text{expl}} A = (A \otimes \nabla_R)_{\text{expl}}, \quad (8.39)$$

или в координатной записи —

$$B_k^\beta = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \partial_\gamma E_{k\alpha}, \quad C_{\cdot\beta}^k = \partial_\beta A^k. \quad (8.40)$$



Таким образом, наиболее общая форма лагранжиана пустого трехмерного пространства, инвариантного относительно сдвигов эйлеровых переменных x^s , есть⁴⁸

$$\mathcal{L}'(\partial_\alpha \varphi^k, X^\beta) = A(X^\lambda) + \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} (\partial_\beta \varphi^k) \partial_\gamma E_{k\alpha}(X^\lambda) + J(\partial_k X^\beta) \partial_\beta A^k(X^\lambda) + D_0 J. \quad (8.41)$$

Переходим к нахождению наиболее общей формы лагранжиана пустого четырехмерного пространства, инвариантного относительно сдвигов полевых переменных φ^s .

Исходя из представления лагранжиана (8.28) и учитывая условия совместности⁴⁹

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, & \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L_{\cdot [k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_3}} L_{\cdot [k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, & \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_4}} L_{\cdot [k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1]}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}} &= 0, \end{aligned} \quad (8.42)$$

сразу же заключаем относительно коэффициентов в разложении (8.28), что

$$\begin{aligned} L_{\cdot k_1}^{\alpha_1 \cdot} &= \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma} M_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}, & L_{\cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma} M_{\cdot \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}, \\ L_{\cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma} M_{\cdot \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} \right)_{\text{expl}}, & L_{\cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\alpha_4 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot} &= \varepsilon^{\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1} M_{k_4 k_3 k_2 k_1}, \end{aligned} \quad (8.43)$$

где все тензоры не зависят от полевых переменных φ^k ; $M_{\cdot \cdot k_1}^{\gamma \alpha_1 \cdot}$ антисимметричен по верхним индексам; $M_{\cdot \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричен по парам верхних индексов γ и α_2 , α_1 и α_2 ⁵⁰, и по паре нижних латинских индексов; $M_{\cdot \cdot k_3 \cdot k_2 \cdot k_1}^{\gamma \alpha_3 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_1 \cdot}$ антисимметричен по паре верхних индексов γ и α_3 и любой паре верхних индексов, не содержащей индекс γ ⁵¹, и по любой паре нижних латинских индексов; $M_{k_4 k_3 k_2 k_1}$ — постоянные величины, антисимметричные по любой паре нижних латинских индексов.

8.6. Построение законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, не следующих из вариационного принципа

Как уже было отмечено, лагранжианы пустого пространства выступают в качестве основы решения задачи вариационного исчисления об «интегрирующем множителе». Эта проблема состоит в поиске таких функций $Q^j(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\alpha)$, которые позволяли бы для данной системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$F_j(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k, \dots, X^\alpha) = 0, \quad (8.44)$$

которая не вытекает из вариационного принципа, гарантировать выполнение равенства

$$\partial_\beta J^\beta = Q^j F_j \quad (8.45)$$

с некоторым вектором J^β для произвольных полей φ^k и тем самым сформулировать на решениях системы (8.44) дивергентный закон сохранения

$$\partial_\beta J^\beta = 0. \quad (8.46)$$

«Множители» Q^j называются характеристиками закона сохранения.

Равенство (8.45), которое должно выполняться для произвольных физических полей φ^k , устанавливает, что $Q^j F_j$ есть нулевой лагранжиан, т.е. действие

$$\mathfrak{S} = \int Q^j F_j d^4 X \quad (8.47)$$

нейтрально.

⁴⁸Заметим, что тензор $E_{k\alpha}$, по существу, совпадает с тензором $K_{k\alpha}$ в формуле (8.19).

⁴⁹Коэффициент A в (8.28) может, очевидно, зависеть лишь от пространственно-временных координат X^β .

⁵⁰И, следовательно, антисимметричен по индексам γ и α_1 .

⁵¹И, следовательно, антисимметричен по парам индексов γ и α_2 , γ и α_1 .



Метод «интегрирующего множителя» является обобщением классического метода поиска законов сохранения с помощью вариационных симметрий действия. Критерий инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно обобщенной группы преобразований (7.2) имеет вид

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0;$$

он, как известно, обобщается до

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = \varepsilon \frac{\partial(B^\gamma)}{\partial X^\gamma},$$

где $B^\gamma = B^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\sigma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta)$. На основании (7.11) заключаем, что в случае, когда вариационная симметрия действия известна, то

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{L})\bar{\delta}\varphi^j + \partial_\beta \left(\mathcal{L}\delta X^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\bar{\delta}\varphi^k \right) = 0, \quad (8.48)$$

либо

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{L})\bar{\delta}\varphi^j + \partial_\beta \left(\mathcal{L}\delta X^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\bar{\delta}\varphi^k \right) = \varepsilon \frac{\partial(B^\gamma)}{\partial X^\gamma}. \quad (8.49)$$

Разделив левые и правые части (8.48) и (8.49) на ε и обозначая $Q^j = \frac{\bar{\delta}\varphi^j}{\varepsilon}$, $J^\beta = \mathcal{L} \frac{\delta X^\beta}{\varepsilon} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \frac{\bar{\delta}\varphi^k}{\varepsilon}$, приходим к равенству

$$Q^j \mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = \partial_\beta(-J^\beta) \quad (8.50)$$

или соответственно —

$$Q^j \mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = \partial_\beta(B^\beta - J^\beta). \quad (8.51)$$

Сравнивая с (8.45) убеждаемся, что метод Нетер поиска законов сохранения на основе вариационных симметрий есть частный случай метода «интегрирующего множителя», а «интегрирующий множитель» сразу же находится, если известна вариационная симметрия действия, в виде

$$Q^j = \frac{\bar{\delta}\varphi^j}{\varepsilon}. \quad (8.52)$$

Формулы (8.50) и (8.51) показывают, что $Q^j \mathcal{E}_j(\mathcal{L})$ есть лагранжиан пустого пространства, следовательно, для произвольных полей φ^k выполняется равенство

$$\mathcal{E}_i(Q^j \mathcal{E}_j(\mathcal{L})) = 0. \quad (8.53)$$

9. ТЕОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ОБОБЩЕННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ СИММЕТРИЙ В ТЕРМИНАХ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мы будем следовать терминологии и обозначениям, принятым в монографии [11].

9.1. Формализм геометрических (точечных) групп Ли

Введем непрерывную однопараметрическую группу геометрических преобразований зависимых и независимых переменных (группу Ли) в форме разложения по степеням ε

$$\tilde{X}^\beta = X^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) = X^\beta + \varepsilon \xi^\beta(\varphi^s, X^\gamma) + \dots, \quad \tilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) = \varphi^k + \varepsilon h^k(\varphi^s, X^\gamma) + \dots, \quad (9.1)$$

где при $\varepsilon = 0$ выполняются условия $X^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = X^\beta$, $\Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi^k$.

Явно выписанные члены определяют инфинитезимальное преобразование (9.1); ξ^β , h^k — инфинитезимальные образующие группы Ли (9.1).

Полные вариации переменных φ^s , X^γ пропорциональны инфинитезимальным образующим:

$$\xi^\gamma = \frac{\delta X^\gamma}{\varepsilon}, \quad h^s = \frac{\delta \varphi^s}{\varepsilon}. \quad (9.2)$$



Следуя Ли, введем символ инфинитезимального преобразования (9.1), представляющий собой дифференциальный оператор первого порядка

$$\zeta \cdot \partial = \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + h^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \quad (9.3)$$

действие которого на дифференцируемую функцию $F(\varphi^k, X^\beta)$ дается формулой

$$(\zeta \cdot \partial)F = \xi^\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + h^j \frac{\partial F}{\partial \varphi^j}.$$

Здесь частные дифференцирования по независимым переменным X^α производятся лишь по их *явным* вхождениям, что как обычно мы будем отмечать символом *expl* при соответствующей частной производной. В противном случае дифференцирование по координате X^α будет считаться полным. Мы будем пользоваться компактными символами ∂_α , $\partial_\alpha^{\text{expl}}$ для указания на полное или частное (по явным вхождениям переменной X^α) дифференцирование.

Действие однопараметрической группы преобразований (9.1) распространить (продолжить) также и на частные производные произвольного сколь угодно высокого порядка, считая их *дополнительными* к φ^j , X^α координатами в продолженном пространстве. Оно вычисляется как результат замены переменных согласно (9.1). Действительно, преобразования вида (9.1) трансформируют функции $\varphi^j(X^\alpha)$ в новые функции $\tilde{\varphi}^j(\tilde{X}^\alpha)$, поскольку, подставляя в первую группу соотношений (9.1) зависимости $\varphi^s = \varphi^s(X^\alpha)$, можно выразить из указанных соотношений «старые» независимые переменные X^α через «новые» независимые переменные \tilde{X}^α , а затем с помощью второй группы соотношений (9.1) — «новые» полевые переменные $\tilde{\varphi}^k$ через «новые» независимые переменные \tilde{X}^α . После этого можно, используя «новый» набор зависимых и независимых переменных, вычислить частные производные $\tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\varphi}^k$, $\tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\partial}_{\alpha_2} \tilde{\varphi}^k$, Все это позволяет ввести один, два, три и т.д. раза продолженные однопараметрические группы преобразований и говорить о преобразовании как независимых переменных $X^\gamma \rightarrow \tilde{X}^\gamma$, так и всего дифференциального комплекса

$$\begin{array}{c} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots \\ \downarrow \\ \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\partial}_{\alpha_2} \tilde{\varphi}^s, \dots \end{array} \quad (9.4)$$

под действием группового преобразования (9.1).

Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы (первое продолжение инфинитезимального оператора (9.3)) имеет вид

$$\zeta_1 \cdot \partial = \xi^\gamma \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + h^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} + h_\alpha^k \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \varphi^k)}, \quad (9.5)$$

где дополнительные координаты h_α^k зависят от координат продолженного пространства и выражаются согласно формулам первого продолжения [11, с. 58]:

$$h_\alpha^l = \left(\frac{\partial h^l}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha \varphi^s) \frac{\partial h^l}{\partial \varphi^s} - (\partial_\sigma \varphi^l) \left(\left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \varphi^k} \right). \quad (9.6)$$

Можно придать формулам для вычисления дополнительных координат инфинитезимального оператора h_α^k несколько иную форму, отражающую их рекуррентный характер, если ввести *усеченный* оператор D_α «полного» дифференцирования по независимой переменной с номером α :

$$h_\alpha^l = D_\alpha(h^l) - (\partial_\alpha \varphi^l) D_\alpha(\xi^\sigma), \quad (9.7)$$

где

$$D_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial}{\partial \varphi^k}. \quad (9.8)$$



Ясно, что можно также вести речь о втором продолжении однопараметрической группы преобразований (9.1) и ее инфинитезимальном операторе $\zeta_2 \cdot \partial$, который имеет вид

$$\zeta_2 \cdot \partial = \zeta_1 \cdot \partial + h_{\alpha\beta}^l \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^l)}, \quad (9.9)$$

где

$$h_{\alpha\beta}^l = \left(\frac{\partial h_\alpha^l}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial h_\alpha^l}{\partial \varphi^k} + (\partial_\sigma \partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial h_\alpha^l}{\partial(\partial_\sigma \varphi^k)} - (\partial_\sigma \partial_\alpha \varphi^l) \left(\left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \varphi^k} \right). \quad (9.10)$$

Эта же формула с использованием оператора D_β представляется как

$$h_{\alpha\beta}^l = D_\beta(h_\alpha^l) - (\partial_\sigma \partial_\alpha \varphi^l) D_{\beta 1}(\xi^\sigma), \quad (9.11)$$

где

$$D_\beta = D_{\beta 1} + (\partial_\sigma \partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \varphi^k)}. \quad (9.12)$$

Приведем также формулы для n раз продолженной однопараметрической группы преобразований (9.1):

$$\zeta_n \cdot \partial = \zeta_{n-1} \cdot \partial + h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^l \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_n} \varphi^l)}, \quad (9.13)$$

где

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta}^l = D_\beta(h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}^l) - (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \partial_\sigma \varphi^l) D_{\beta 1}(\xi^\sigma), \quad (9.14)$$

$$D_\beta = D_{\beta n-1} + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^l)}. \quad (9.15)$$

Заметим, что в некоторых случаях удобно использовать обозначения

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} = \partial_\beta^{\text{expl}}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi^l} = \partial_l, \quad \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)} = \partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \quad (9.16)$$

с целью наиболее обозримого представления формул. Так, весь комплекс формул продолжения приобретает тогда следующий наиболее компактный вид:

$$\zeta_n \cdot \partial = \zeta_{n-1} \cdot \partial + h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^l \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \quad (9.17)$$

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta}^l = D_\beta(h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}^l) - (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \partial_\sigma \varphi^l) D_{\beta 1}(\xi^\sigma), \quad (9.18)$$

$$D_\beta = D_{\beta n-1} + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \partial_\beta \varphi^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}. \quad (9.19)$$

Для координат продолженных операторов имеем развернутую формулу

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta}^l = \left(\partial_\beta^{\text{expl}} + \sum_{s=0}^{n-1} (\partial_{\beta_1} \partial_{\beta_2} \dots \partial_{\beta_s} \partial_\beta \varphi^k) \partial_k^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s} \right) h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}^l - (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \partial_\sigma \varphi^l) (\partial_\beta^{\text{expl}} + (\partial_\beta \varphi^k) \partial_k) \xi^\sigma. \quad (9.20)$$

Поскольку координаты продолженных операторов $h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}^l$ зависят от градиентов переменных φ^k порядка не выше, чем $n - 1$, то последнюю формулу можно переписать, используя операторы полного дифференцирования, в следующем виде:

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta}^l = \partial_\beta h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}^l - (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \partial_\sigma \varphi^l) \partial_\beta \xi^\sigma, \quad (9.21)$$



откуда последовательно имеем

$$\begin{aligned} h_{\alpha_1}^l &= \partial_{\alpha_1} h^l - (\partial_{\sigma} \varphi^l) \partial_{\alpha_1} \xi^{\sigma} = \partial_{\alpha_1} (h^l - (\partial_{\sigma} \varphi^l) \xi^{\sigma}) + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\sigma} \varphi^l) \xi^{\sigma}, \\ h_{\alpha_1 \alpha_2}^l &= \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} (h^l - (\partial_{\sigma} \varphi^l) \xi^{\sigma}) + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \partial_{\sigma} \varphi^l) \xi^{\sigma}, \\ h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^l &= \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_n} (h^l - (\partial_{\sigma} \varphi^l) \xi^{\sigma}) + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_n} \partial_{\sigma} \varphi^l) \xi^{\sigma}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Вводя обозначение (характеристика инфинитезимального оператора $\zeta \cdot \partial$)

$$\mathcal{Q}^l = h^l - (\partial_{\sigma} \varphi^l) \xi^{\sigma}, \quad (9.23)$$

для координат продолженных операторов находим

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^l = \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_n} \mathcal{Q}^l + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_n} \partial_{\sigma} \varphi^l) \xi^{\sigma}. \quad (9.24)$$

Знание координат продолжений инфинитезимального оператора позволяет вычислить инфинитезимальную часть преобразований частных производных (9.4) как

$$\tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\partial}_{\alpha_2} \dots \tilde{\partial}_{\alpha_n} \tilde{\varphi}^k = \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_n} \varphi^k + \varepsilon h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^k + \dots \quad (9.25)$$

Изменение функции $F(\varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots, X^{\beta})$, которая зависит от градиентов φ^k порядка не выше, чем m , вследствие преобразования ее аргументов согласно (9.1) определяется формулой

$$F(\varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots, X^{\beta}) - F(\tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\partial}_{\alpha_2} \tilde{\varphi}^s, \dots, \tilde{X}^{\beta}) = \varepsilon (\zeta \cdot \partial) F + \dots \quad (9.26)$$

Следовательно, вариация функции F , обусловленная вариацией ее аргументов согласно (9.1), есть

$$\frac{\delta F}{\varepsilon} = (\zeta \cdot \partial) F, \quad (9.27)$$

где

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \sum_{s=1}^m h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}^l \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)}, \quad (9.28)$$

или в сокращенных обозначениях

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \sum_{s=1}^m h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}^l \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}, \quad (9.29)$$

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}^l = \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} (h^l - (\partial_{\sigma} \varphi^l) \xi^{\sigma}) + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_{\sigma} \varphi^l) \xi^{\sigma}. \quad (9.30)$$

Еще одно важное представление m раз продолженного инфинитезимального оператора будет дано далее (см. (9.45)):

$$\zeta \cdot \partial = \sum_{s=0}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} + \xi^{\sigma} \partial_{\sigma}. \quad (9.31)$$

Начиная с этого места мы будем использовать еще более компактную форму записи, вводя «прямые» аналоги D, ∂ дифференциальных операторов $\partial_{\alpha_i}, \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}$. В результате вместо (9.31) имеем

$$\zeta \cdot \partial = \sum_{s=0}^m (D^s \mathcal{Q}) \cdot \partial + \xi \cdot D. \quad (9.32)$$

Из формулы (9.31), опираясь на доказываемый далее результат (см. (9.50)):

$$\sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \mathcal{Q}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) - \mathcal{Q}^l \partial_l \mathcal{L}, \quad (9.33)$$

можно получить

$$(\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \mathcal{Q}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \xi^{\sigma} \partial_{\sigma} \mathcal{L}. \quad (9.34)$$



9.2. Теоретико-групповой формализм в теории геометрических вариационных симметрий

Снова рассмотрим группу Ли геометрических преобразований (9.1) и ее инфинитезимальный оператор

$$\zeta \cdot \partial = \xi^\alpha \partial_\alpha^{\text{expl}} + h^j \partial_j. \quad (9.35)$$

Критерий инфинитезимальной инвариантности действия относительно однопараметрической группы преобразований (9.1) в терминах исчисления вариаций имеет вид (см. (4.9))

$$\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \quad (9.36)$$

а его обобщенный вариант (см. (4.13)) –

$$\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial(\delta X^\alpha)}{\partial X^\alpha} = \varepsilon \frac{\partial B^\gamma}{\partial X^\gamma}. \quad (9.37)$$

В терминах теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных они могут быть с помощью (9.27) записаны в форме

$$(\zeta \cdot \partial)_m \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial X^\gamma} = 0, \quad (9.38)$$

$$(\zeta \cdot \partial)_m \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial X^\alpha} = \frac{\partial B^\gamma}{\partial X^\gamma}, \quad (9.39)$$

пригодной для лагранжианов, зависящих от градиентов полевых переменных порядка, не превышающего m .

Здесь действие оператора $\zeta \cdot \partial$ на лагранжиан определяется формулами продолжения:

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \sum_{s=1}^m h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}^l \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}, \quad (9.40)$$

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}^l = \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} (h^l - (\partial_\sigma \varphi^l) \xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\sigma \varphi^l) \xi^\sigma. \quad (9.41)$$

На основании (9.39) заключаем, что

$$\mathcal{E}_l((\zeta \cdot \partial)_m \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\alpha \xi^\alpha) = 0.$$

Оператор Эйлера в символике теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных имеет форму

$$\mathcal{E}_l = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}, \quad (9.42)$$

где нулевое слагаемое суммы есть ∂_l .

Вводя «прямые» аналоги D , ∂ вместо дифференциальных операторов ∂_α , $\partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}$, формулу (9.42) можно переписать как

$$\mathcal{E} = \sum_{s \geq 0} (-1)^s D^s \cdot \partial. \quad (9.43)$$

Левая часть (9.39) допускает преобразование, которое позволяет быстро найти дивергентный закон сохранения в случае лагранжианов, которые зависят от градиентов полевых переменных выше первого порядка.

Прежде всего, нетрудно заметить, что

$$(\zeta \cdot \partial)_m \mathcal{L} = (\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} + \sum_{s=1}^m h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}^l \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L},$$



$$\begin{aligned}
 (\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} &= \xi^\sigma \partial_\sigma^{\text{expl}} \mathcal{L} + h^l \partial_l \mathcal{L} + \sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\sigma \varphi^l) \xi^\sigma \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} + \sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L}, \\
 (\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} &= \xi^\sigma \partial_\sigma^{\text{expl}} \mathcal{L} + h^l \partial_l \mathcal{L} + \xi^\sigma \partial_\sigma \mathcal{L} - (\xi^\sigma \partial_\sigma^{\text{expl}} \mathcal{L} + \xi^\sigma (\partial_\sigma \varphi^l) \partial_l \mathcal{L}) + \sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L}.
 \end{aligned}$$

Из последнего равенства находим

$$(\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} = \partial_\sigma (\xi^\sigma \mathcal{L}) - \mathcal{L} (\partial_\sigma \xi^\sigma) + \mathcal{Q}^l \partial_l \mathcal{L} + \sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L}. \quad (9.44)$$

Заметим, что полученная формула допускает более компактную запись, если включить третье по счету слагаемое в правой части в сумму:

$$\zeta \cdot \partial = \sum_{s=0}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} + \xi^\sigma \partial_\sigma, \quad (9.45)$$

или

$$\zeta \cdot \partial = \sum_{s=0}^m (D^s \mathcal{Q}) \cdot \partial_s + \xi \cdot D, \quad (9.46)$$

понимая при этом нулевое по счету слагаемое в этой сумме как $\mathcal{Q}^l \partial_l$.

Рассмотрим далее сумму

$$\sum_{s=1}^m (D^s \mathcal{Q}) \cdot \partial_s \mathcal{L} = \sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L},$$

и наряду с ней суммы ($i = 1, 2, \dots, m$)

$$S_i = \sum_{s=i}^m (\partial_{\alpha_i} \partial_{\alpha_{i+1}} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} = \sum_{s=i}^m (D^{s-i+1} \mathcal{Q}) \cdot D^{i-1} \cdot \partial_s \mathcal{L}.$$

Выполняя «дифференцирование по частям», последовательно находим

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} &= \partial_{\alpha_1} \sum_{s=2}^m (\partial_{\alpha_2} \partial_{\alpha_3} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} - \\
 &- \sum_{s=2}^m (\partial_{\alpha_2} \partial_{\alpha_3} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_{\alpha_1} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} - \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_l^{\alpha_1} \mathcal{L} + \partial_{\alpha_1} (\mathcal{Q}^l \partial_l^{\alpha_1} \mathcal{L}), \\
 \sum_{s=i}^m (\partial_{\alpha_i} \partial_{\alpha_{i+1}} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} &= \\
 &= \partial_{\alpha_i} \sum_{s=i+1}^m (\partial_{\alpha_{i+1}} \partial_{\alpha_{i+2}} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} - \\
 &- \sum_{s=i+1}^m (\partial_{\alpha_{i+1}} \partial_{\alpha_{i+2}} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_i} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} - \\
 &- \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_i} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i} \mathcal{L} + \partial_{\alpha_i} (\mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i} \mathcal{L}) \quad (i = 2, 3, \dots, m-1), \\
 \sum_{s=m}^m (\partial_{\alpha_m} \mathcal{Q}^l) \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{m-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \mathcal{L} &= \partial_{\alpha_m} \sum_{s=m}^m \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{m-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \mathcal{L} - \\
 &- \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_m} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \mathcal{L}.
 \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\mathcal{J}_1^{\alpha_1} = \sum_{s=2}^m (\partial_{\alpha_2} \partial_{\alpha_3} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} + \mathcal{Q}^l \partial_l^{\alpha_1} \mathcal{L},$$



$$\mathcal{J}_i^{\alpha_i} = \sum_{s=i+1}^m (\partial_{\alpha_{i+1}} \partial_{\alpha_{i+2}} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} + \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i} \mathcal{L} \quad (9.47)$$

$$(i = 2, 3, \dots, m-1),$$

$$\mathcal{J}_m^{\alpha_m} = \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{m-1}} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \mathcal{L},$$

$$\Gamma_i = \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_i} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i} \mathcal{L} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (9.48)$$

или в прямой записи $\mathcal{J}_i = \sum_{s=i}^m (D^{s-i} \mathcal{Q}) \cdot D^{i-1} \cdot \partial_s \mathcal{L}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $\Gamma_i = \mathcal{Q} \cdot (D^i \cdot \partial_i)$ (по i не суммировать, $i = 1, 2, \dots, m$), полученные ранее соотношения можно представить в форме

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} = \partial_{\alpha_1} \mathcal{J}_1^{\alpha_1} - S_2 - \Gamma_1 \quad (i = 1), \\ &\vdots \\ S_i &= \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} - S_{i+1} - \Gamma_i \quad (i), \\ &\vdots \\ S_m &= \partial_{\alpha_m} \mathcal{J}_m^{\alpha_m} - \Gamma_m \quad (i = m). \end{aligned} \quad (9.49)$$

Заменим затем в (9.49) последовательно, начиная с первой строки, в строке с номером j сумму S_{j+1} ее значением, указываемым строкой с номером $j+1$. В результате получим:

$$\sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^m (-1)^i \Gamma_i.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^m (-1)^i \Gamma_i = \mathcal{Q}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) - \mathcal{Q}^l \partial_l \mathcal{L}$, то окончательно имеем фундаментальную для теории вариационных симметрий формулу

$$\sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \mathcal{Q}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) - \mathcal{Q}^l \partial_l \mathcal{L}, \quad (9.50)$$

или

$$\sum_{s=0}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \mathcal{Q}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}). \quad (9.51)$$

На основании (9.44) и (9.50) имеем

$$(\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\sigma \xi^\sigma = \partial_\sigma (\xi^\sigma \mathcal{L}) + \mathcal{Q}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i}. \quad (9.52)$$

Последнее соотношение в прямой записи будет иметь вид

$$(\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} + \mathcal{L} D \cdot \xi = D \cdot (\xi \mathcal{L}) + \mathcal{Q} \cdot \mathcal{E}(\mathcal{L}) + \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} D \cdot \mathcal{J}_i. \quad (9.53)$$

Таким образом, обобщенный критерий инфинитезимальной инвариантности действия (9.37) окончательно представляется в виде

$$\partial_\sigma (B^\sigma - \xi^\sigma \mathcal{L}) + \sum_{i=1}^m (-1)^i \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} = \mathcal{Q}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}), \quad (9.54)$$

который позволяет быстро определить вектор J^σ в каноническом представлении

$$\partial_\sigma (B^\sigma - J^\sigma) = \mathcal{Q}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}). \quad (9.55)$$



Уравнение (9.54) в прямой записи есть

$$D \cdot (B - \xi \mathcal{L} - A) = \mathcal{Q} \cdot \mathcal{E}(\mathcal{L}), \quad (9.56)$$

где $-A = \sum_{i=1}^m (-1)^i \mathcal{J}_i$.

Сейчас мы проведем необходимые вычисления для случаев $m = 1, 2, 3$.

Случай $m = 1$. $\mathcal{J}_1^{\alpha_1} = \mathcal{Q}^l \partial_l^{\alpha_1} \mathcal{L}$, $J^\sigma = \xi^\sigma \mathcal{L} + \mathcal{Q}^l \partial_l^\sigma \mathcal{L}$.

Случай $m = 2$. $\mathcal{J}_1^{\alpha_1} = (\partial_{\alpha_2} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2} \mathcal{L} + \mathcal{Q}^l \partial_l^{\alpha_1} \mathcal{L}$, $\mathcal{J}_2^{\alpha_2} = \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2} \mathcal{L}$,

$$J^\sigma = \xi^\sigma \mathcal{L} + \mathcal{Q}^l \partial_l^\sigma \mathcal{L} + (\partial_\beta \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\sigma \beta} \mathcal{L} - \mathcal{Q}^l \partial_\beta \partial_l^{\sigma \beta} \mathcal{L}.$$

Случай $m = 3$. $\mathcal{J}_1^{\alpha_1} = (\partial_{\alpha_2} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2} \mathcal{L} + (\partial_{\alpha_2} \partial_{\alpha_3} \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \mathcal{L} + \mathcal{Q}^l \partial_l^{\alpha_1} \mathcal{L}$,

$$\mathcal{J}_2^{\alpha_2} = (\partial_{\alpha_3} \mathcal{Q}^l) \partial_{\alpha_1} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \mathcal{L} + \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2} \mathcal{L}, \quad \mathcal{J}_3^{\alpha_3} = \mathcal{Q}^l \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \mathcal{L},$$

$$J^\sigma = \xi^\sigma \mathcal{L} + \mathcal{Q}^l \partial_l^\sigma \mathcal{L} + (\partial_\beta \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\sigma \beta} \mathcal{L} - \mathcal{Q}^l \partial_\beta \partial_l^{\sigma \beta} \mathcal{L} + (\partial_\alpha \partial_\beta \mathcal{Q}^l) \partial_l^{\sigma \alpha \beta} \mathcal{L} - (\partial_\beta \mathcal{Q}^l) \partial_\alpha \partial_l^{\sigma \alpha \beta} \mathcal{L} + \mathcal{Q}^l \partial_\alpha \partial_\beta \partial_l^{\sigma \alpha \beta} \mathcal{L}.$$

Библиографический список

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 2 т. Т. I. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 2 т. Т. II. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
3. Noether E. Invariante Variationsprobleme // Kgl. Ges. Wiss. Nachr. Göttingen. Math.-Physik. Kl. 2. 1918. S. 235–257.
4. Радаев Ю.Н., Гудков В.А. О вычислении нулевых Лагранжианов нелинейно упругого поля // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. 2002. Спец. вып. С. 39–56.
5. Maugin G.A. Material Inhomogeneities in Elasticity. L.: Chapman & Hall, 1993. 276 p.
6. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики: В 2 т. Т. I. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. 528 с.
8. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. 1. N.Y.: Interscience Publishers, 1953. 562 p. (Пер. на рус. яз. см. [6]).
9. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
10. Gelfand I.M., Fomin S.V. Calculus of Variations. (Revised English ed. Translated and edited by R.A. Silverman.) Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1963. 232 p. (Оригинальное издание см. [9]).
11. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
12. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
13. Olver P.J. Application of Lie Groups to Differential Equations. N.Y.: Springer, 1986. (Пер. на рус. яз. см. [14]).
14. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
15. Olver P.J. Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge; N.Y.; Melbourne: Cambridge University Press, 1995. 526 p.
16. Эйнштейн А. Собрание научных трудов: В 4 т. Т. 1. Работы по теории относительности. М.: Наука, 1965. 700 с.
17. Дирак П.А.М. Общая теория относительности. М.: Атомиздат, 1978. 64 с.
18. Truesdell C., Toupin R.A. The Classical Field Theories/ Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, V.III/1 (ed. S. Flugge). Berlin: Springer, 1960. P. 226–793.
19. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
20. Silhavy M. The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1997. 506 p.
21. Bessel-Hagen E. Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik // Math. Ann. 1921. V. 84. P. 258–276.
22. Меллер К. Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.
23. Maugin G.A. Material forces: Concepts and applications// Applied Mechanics Reviews. 1995. V. 48. P. 213–245.
24. Piola G. Nuovo analisi per tutti le questioni della meccanica molecolare// Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Modena. 1835. V. 21. P. 155–321.
25. Piola G. Intorno alle equazioni fondamentali del



movimento di corpi qualsivoglionti considerati secondo la naturale loro forma e costituiva// Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Modena. 1848. V. 24(1). P. 1–186.

26. Eshelby J.D. The Force on an Elastic Singularity// Phil. Trans. Roy. Soc. L., 1951. V. A244. P. 87–112.

27. Шварц Л. Анализ: В 2 т. М.: Мир, 1972. Т. II. 528 с.

28. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.

29. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

УДК 539.374

СВЯЗАННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев*, Д.А. Семенов*

Московский городской университет управления
Правительства Москвы,

кафедра прикладной математики;

*Самарский государственный университет,

кафедра механики сплошных сред

E-mail: vlad_koval@mail.ru, radayev@ssu.samara.ru,

semenow@ssu.samara.ru

В представляемой работе в рамках линейной теории недиссипативной термоупругости Грина – Нахди (GNII, гиперболическая термоупругость), рассматривающей термоупругую деформацию среды как волновой недиссипативный процесс, с помощью связанных гиперболических уравнений движения и теплопроводности дается анализ гармонических волн, распространяющихся вдоль оси свободного теплоизолированного цилиндрического волновода. Проведен анализ частотного уравнения и форм гармонических волн в бесконечном цилиндрическом термоупругом волноводе. Численно определена зависимость волнового числа от частоты. Особое внимание уделяется волнам второго азимутального порядка. Исследованию предшествует изучение (с помощью геометрических и кинематических условий совместности Адамара – Томаса) слабых разрывов решений связанных уравнений гиперболической термоупругости, а также полный анализ вопросов распространения плоских гармонических связанных незатухающих термоупругих волн.

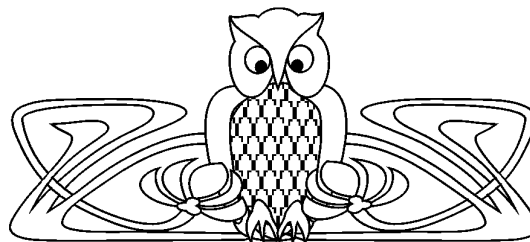
Ключевые слова: гиперболическая термоупругость, термоупругая деформация, недиссипативный процесс, гармоническая волна, волновое число, цилиндрический волновод.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория термоупругости (см., например, [1, 2]) основывается на законе теплопроводности Фурье, который устанавливает пропорциональность вектора потока тепла \mathbf{h} и отрицательного градиента температуры θ :

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta,$$

где Λ_* — коэффициент теплопроводности (thermal conductivity). Соответствующее уравнение теплопроводности, как известно, принадлежит к параболическому типу. Поэтому температурное возмущение, локализованное в определенном месте термоупругого тела, должно немедленно ощущаться и в любом другом месте, а это, вообще говоря, противоречит принципу причинности. Классическая теория термоупругости предсказывает, таким образом, бесконечно большую скорость распространения любого термического сигнала.



Coupled Dynamic Problems of Hyperbolic Thermoelasticity

V.A. Kovalev, Yu.N. Radayev*, D.A. Semenov*

Moscow City Government University of Management,

Chair of Applied Mathematics

*Samara State University,

Chair of Continuum Mechanics

E-mail: vlad_koval@mail.ru, radayev@ssu.samara.ru,

semenow@ssu.samara.ru

In the present paper in the framework of the linear non-dissipative coupled thermoelasticity (GNII, hyperbolic thermoelasticity), treating the heat transport as propagation with finite speed of undamped waves of second sound, harmonic coupled thermoelastic waves propagating in an infinite free from tractions thermoisolated cylinder are studied. Dispersion relation is derived for this type of thermoelastic waves for an arbitrary azimuthal order. Numerical results for wave numbers depending on frequency are obtained. Special attention is paid to the waves of the second azimuthal order. The study follows investigation of weak discontinuities propagation in GNII media by the Thomas – Hadamard technique and analysis of plane harmonic thermoelastic coupled waves.

Key words: hyperbolic thermoelasticity, thermoelastic strain, non-dissipative process, harmonic wave, wave number, cylindrical waveguide.



Явление теплопроводности посредством распространения (с конечной скоростью) незатухающих термических волн получило название «второго звука». Имеется ряд экспериментальных доказательств существования «второго звука», хотя его экспериментальное обнаружение всегда сопряжено с большими трудностями, поскольку в твердых телах он возможен лишь в области весьма низких температур. Последнее обстоятельство позволяет вести речь об использовании термоупругих моделей, допускающих явление «второго звука», при описании природных процессов (таких как криовулканическая активность при температурах порядка 60–70 °К), протекающих, как показали наблюдения, на удаленных от Солнца спутниках Юпитера, Сатурна и Нептуна. Основные теории теплопроводности посредством распространяющихся с конечной скоростью волн второго звука, включая и исторический аспект их развития, изложены в обстоятельной обзорной статье [3], которая содержит практически полную библиографию работ по тематике тепловых волн, опубликованных до 1989 г.

В начале 1990-х гг. Грином и Нахди [4,5] была предложена весьма общая, отличная от классической теория теплопроводности, известная в настоящее время как GN-теория. Она была развита в общей нелинейной форме в трех вариантах I, II, III: в линейном приближении первый вариант приводит к закону теплопроводности Фурье и параболическому уравнению теплопроводности, второй вариант предлагает считать распространение тепла как волновой недиссипативный процесс и приводит к *гиперболическому* уравнению теплопроводности, третий вариант, смешанный, включает первые два в качестве предельных случаев. Именно поэтому GN-теория в состоянии моделировать значительно более широкий круг явлений, по сравнению с теорией Фурье.

Теория Грина – Нахди второго типа часто называется гиперболической термоупругостью. Закон теплопроводности в теории GNII имеет вид

$$\dot{\mathbf{h}} = -\Lambda \nabla \theta,$$

где Λ — постоянная скорости теплопроводности (thermal conductivity rate). В рамках гиперболической термоупругости преодолевается присущий теории теплопроводности Фурье парадокс о бесконечной скорости распространения тепла.

К настоящему времени неклассическая термоупругость уже сформировалась как важное самостоятельное направление современной механики сплошных сред. Имеется достаточно много работ, посвященных анализу различных теоретических аспектов волновой недиссипативной термоупругости¹. Отсутствие диссипации энергии в термоупругом GNII теле позволяет дать вариационную формулировку теории с целью дальнейшего поиска вариационных симметрий связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных термоупругости. В работе [7] найдены лагранжева и гамильтонова формы теории типа GNII.

В статье [8] были исследованы плоские связанные термоупругие волны в неограниченной среде GNIII. Было установлено, что среда GNIII прозрачна для термоупругих волн весьма низкой частоты так, как это имеет место для волн любой частоты в среде GNII.

В настоящей работе в рамках линейной теории недиссипативной термоупругости Грина – Нахди (GNII, гиперболическая термоупругость), трактующей термоупругую деформацию среды как волновой недиссипативный процесс, с помощью связанных гиперболических уравнений движения и теплопроводности проводится анализ гармонических волн, распространяющихся вдоль оси свободного теплоизолированного (в том смысле, что боковая поверхность волновода непроницаема для тепла) цилиндрического волновода. Окружной профиль волны предполагается произвольным, хотя изучаться будут по отдельности волны с фиксированными (правда, сколь угодно высокими) азимутальными порядками.

С помощью метода разделения переменных построено решение связанных уравнений гиперболической термоупругости, содержащее достаточное число произвольных постоянных, с тем, чтобы

¹Мы не ставим своей целью указать на все важнейшие работы по неклассической термоупругости и экспериментальным доказательствам «второго звука». Наиболее существенные литературные источники имеются в работе [6].



оказалось возможным удовлетворить всем граничным условиям на боковой поверхности цилиндра². Проведен анализ частотного уравнения и форм гармонических волн в бесконечном цилиндрическом термоупругом волноводе в условиях как осесимметричного окружного волнового профиля, так и в случае окружных гармоник произвольного, сколь угодно высокого порядка симметрии. С помощью системы символьных вычислений Mathematica 6.0 численно определена зависимость волнового числа от частоты. Особое внимание уделяется волнам второго порядка окружной симметрии. Показано, что каждой заданной частоте отвечает счетное число волновых чисел. Заканчивается работа объяснением перехода от соотношений гиперболической термоупругости, описывающих распространение термоупругих гармонических волн в цилиндрическом волноводе, к чисто упругому случаю. Для простоты мы ограничимся осесимметричным случаем, т.е. волнами с нулевым порядком окружной гармоники.

Основному исследованию предшествует изучение (с помощью геометрических и кинематических условий совместности Адамара – Томаса) слабых разрывов решений связанных уравнений гиперболической термоупругости, а также анализ вопросов распространения плоских гармонических связанных незатухающих термоупругих волн второго звука.

Главная проблема при изучении распространения гармонических по времени линейно упругих волн в волноводах проистекает от наличия ограничивающих стенок, что вызывает дисперсию волн (т.е. зависимость фазовой скорости от частоты), а многократные отражения упругих волн от боковых стенок приводят к весьма сложному волновому полю, не поддающемуся элементарному анализу, который возможен, например, в случае плоских гармонических волн. В бесконечных волноводах, в силу трансляционной инвариантности волнового поля, каждая естественная форма волны характеризуется единственным волновым числом k и гармонической зависимостью e^{ikz} от осевой координаты, что позволяет отделить эту координату в самом начале исследования. Зависимость волнового поля от двух оставшихся координат (радиальной и угловой) по-прежнему остается довольно сложной.

Распространение чисто упругих волн в бесконечных цилиндрических волноводах изучалось впервые Похгаммером (L. Pochhammer) [9] и Кри (C. Chree) [10], а также несколько позже Релеем (Reyleigh). В книгах [11, с. 193–199; 12, с. 58–73; 13, р. 287–292] могут быть найдены основные результаты и указания на литературные источники по этому предмету. Похгаммером в 1876 г. были построены точные решения уравнений динамической теории упругости в форме продольных осесимметричных (по их окружному профилю) гармонических (по времени) волн, распространяющихся вдоль оси свободного цилиндрического волновода. Им было выведено частотное уравнение для этого типа волн, из которого в принципе можно было бы получить фазовую скорость гармонических волн любой частоты. Однако частотное уравнение Похгаммера долгое время не поддавалось анализу. Лишь через пять десятилетий удалось получить ряд численных результатов (см., например, [14]) и численно определить полный комплексный спектр волновых чисел продольных осесимметричных волн (т.е. волн нулевого азимутального порядка). Частотное уравнение для волн с первой окружной гармоникой (изгибные волны) было получено в трудно обозримой форме и было признано непригодным для практического использования, пока в работе [15] не был выполнен его численный анализ. В настоящее время подобного рода задачи и построение графических зависимостей волнового числа от частоты чаще всего решаются конечно-элементными методами.

Известно, что характер волнового поля в цилиндрическом волноводе очень сильно зависит от порядка окружной симметрии волны (азимутального порядка). Волны в упругом цилиндрическом волноводе с окружными симметриями второго и более высоких порядков, по-видимому, вообще не исследовались. Неизвестно ни одного результата, касающегося частотных уравнений для таких волн, поэтому теория Похгаммера – Кри до сих пор привлекает внимание исследователей.

²Найденные в работе частные решения связанных уравнений обладают физической и математической полнотой: любое волновое поле внутри свободного теплоизолированного термоупругого цилиндра (независимо от источников его возникновения) всегда будет представляться в форме суперпозиции с соответствующими вкладами определенных частных волновых полей.



1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТИПА GNII (гиперболическая термоупругость)

Рассмотрим связанную систему уравнений движения и теплопроводности для линейного изотропного термоупругого (типа GNII, гиперболическая термоупругость) тела при отсутствии массовых сил, источников (стоков) тепла³:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \theta - \frac{\kappa}{\Lambda} \ddot{\theta} - \frac{\alpha \theta_0}{\Lambda} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где μ, λ — упругие постоянные Ламе; $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа; ∇ — трехмерный оператор Гамильтона (набла Гамильтона); \mathbf{u} — вектор перемещения среды из отсчетного состояния; ρ — плотность среды; θ — приращение температуры над отсчетной температурой; θ_0 — отсчетная температура; Λ — характерная скорость теплопроводности; κ — теплоемкость (на единицу объема) при постоянной деформации; термомеханическая постоянная $\alpha = (1/3)(3\lambda + 2\mu)\beta^*$, где β^* — коэффициент объемного теплового расширения; точка над символом обозначает частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных координатах.

С целью упрощения записи уравнений термоупругости введем обозначения $\Lambda' = \frac{\Lambda}{\theta_0}$, $\kappa' = \frac{\kappa}{\theta_0}$. Тогда система уравнений (1.1) примет следующий несколько более простой вид:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \theta - \frac{\kappa'}{\Lambda'} \ddot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda'} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

У вновь введенных величин Λ', κ' будем всюду в дальнейшем изложении опускать штрихи, чтобы облегчить восприятие уравнений.

Сначала мы изучим, как в термоупругом теле могут распространяться слабые разрывы. Прежде всего заметим, что система дифференциальных уравнений в частных производных (1.2) содержит частные производные третьего порядка от перемещений. Мы получим более симметричную форму уравнений, если введем в них вместо θ температурное смещение $\vartheta = \theta$. Здесь точка снизу обозначает первообразную по времени от θ . После простых преобразований находим

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \dot{\vartheta} - \rho \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \vartheta - \frac{\kappa}{\Lambda} \ddot{\vartheta} - \frac{\alpha}{\Lambda} \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В этом представлении уравнения связанной гиперболической термоупругости содержат лишь частные производные второго порядка.

Пусть в пространстве с нормальной скоростью G распространяется фронт (волновая поверхность) слабых разрывов перемещений \mathbf{u} и температурных смещений ϑ . Обозначая через \mathbf{n} единичный вектор нормали к волновой поверхности, имеем геометрические и кинематические условия совместности второго порядка Адамара – Томаса⁴:

$$\begin{aligned} [\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{u}] &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}, & [\nabla \otimes \nabla \vartheta] &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{nB}, & [\ddot{\mathbf{u}}] &= G^2 \mathbf{A}, & [\ddot{\vartheta}] &= BG^2, \\ [\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}] &= -G \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}, & [\nabla \dot{\vartheta}] &= -BG \mathbf{n}, \end{aligned}$$

³Приводимые далее уравнения хорошо известны. Их вывод заинтересованный читатель может найти в ряде современных работ, посвященных гиперболической термоупругости.

⁴См., например: Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с. В этой монографии содержится полное изложение геометрических и кинематических условий совместности первого и второго порядка, которые затем применяются для систематического изучения различных вопросов, связанных с распространением волн в сплошных средах.



где квадратные скобки [] обозначают скачок при переходе через поверхность слабого разрыва; B, \mathbf{A} — некоторые поля, определенные на этой поверхности, причем равенства $B = 0$ и $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность есть, действительно, поверхность слабого разрыва.

Уравнения (1.3) позволяют найти следующие соотношения, связывающие скачки частных производных второго порядка от перемещений \mathbf{u} и температурных смещений ϑ при переходе через волновую поверхность:

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{A} + (\lambda + \mu)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A})\mathbf{n} + \alpha B G \mathbf{n} - \rho G^2 \mathbf{A} &= \mathbf{0}, \\ B - \frac{\kappa}{\Lambda} B G^2 + \frac{\alpha G}{\Lambda} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Из первого уравнения⁵ выразим скалярное произведение $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$ и подставим результат во второе уравнение. Тогда, предполагая, что на волновой поверхности имеется слабый разрыв температурного смещения ($B \neq 0$), получим уравнение для скорости распространения волновой поверхности вдоль нормали \mathbf{n} :

$$1 - \frac{G^2}{l^2} - \frac{s^2 G^2}{c_l^2 - G^2} = 0 \quad \left(l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda}, \quad s^2 = \frac{\alpha^2}{\rho \Lambda} \right),$$

откуда сразу же находим (положительный знак соответствует индексу 1)

$$\frac{G_{1,2}^2}{l^2} = \frac{1 + \frac{c_l^2}{l^2} + s^2 \pm \sqrt{\left(\frac{c_l^2}{l^2} + s^2 - 1\right)^2 + 4s^2}}{2}, \tag{1.5}$$

причем выражение справа всегда положительно, т.е. имеется ровно две возможных скорости распространения слабых разрывов температурного смещения ϑ .

Слабый разрыв температурного смещения ($B \neq 0$) всегда сопровождается слабым разрывом перемещений ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \neq 0$), поскольку

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = -\frac{\alpha G B}{\rho(c_l^2 - G^2)}.$$

Слабый разрыв температурного смещения ϑ , не сопровождающийся слабым разрывом перемещений ($\mathbf{A} = \mathbf{0}$), невозможен ни на какой волновой поверхности.

Ясно, что помимо двух скоростей $G_{1,2}$ имеется еще одна нормальная скорость распространения слабых разрывов перемещений. Действительно, проектируя первое из уравнений системы (1.4) на произвольное касательное к волновой поверхности направление $\boldsymbol{\tau}$, получаем $(\mu - \rho G^2)(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}) = 0$, следовательно, наличие слабого разрыва перемещений, характеризующегося условием $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A} \neq 0$, возможно лишь на волновой поверхности, которая распространяется с нормальной скоростью, равной скорости чисто упругих поперечных волн $G_3 = c_t$. При этом слабый разрыв температурного смещения может отсутствовать.

Далее будем рассматривать только гармоническую зависимость перемещений \mathbf{u} и приращений температуры θ от времени: $\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{-i\omega t}$, $\theta = \Theta e^{-i\omega t}$, где ω есть циклическая частота изменения гармонических полей смещений и приращений температуры; \mathbf{U}, Θ — комплексные амплитуды.

Тогда систему уравнений (1.2) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{U} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U} - \alpha \nabla \Theta + \omega^2 \rho \mathbf{U} &= \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \Theta + \omega^2 \left(\frac{\kappa}{\Lambda} \Theta + \frac{\alpha}{\Lambda} \nabla \cdot \mathbf{U} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Значения ω , при которых система (1.6) имеет нетривиальное решение при заданных граничных условиях, будут являться частотами собственных колебаний (собственные значения) термоупругого тела, а соответствующие им амплитуды \mathbf{U}, Θ будут формами собственных колебаний (собственные формы).

⁵Обе части которого предварительно надо скалярно умножить на вектор \mathbf{n} .



2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Построим решения системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.6) для неограниченного кругового цилиндра в форме нормальных гармонических волн, распространяющихся вдоль оси цилиндра, предполагая, что боковая поверхность цилиндра свободна и теплоизолирована. Эти решения должны содержать *достаточное* количество произвольных постоянных с тем, чтобы можно было удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности волновода.

Для определения указанных решений системы (1.6) представим вектор \mathbf{U} в виде разложения Гельмгольца на безвихревую и вихревую составляющие:

$$\mathbf{U} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi, \quad (2.1)$$

где Φ — скалярный потенциал, Ψ — векторный потенциал. Для однозначной определенности векторного потенциала необходимо учесть также дополнительное условие:

$$\nabla \cdot \Psi = 0. \quad (2.2)$$

Это условие калибровки векторного потенциала.

Подставляя разложение Гельмгольца (2.1) в систему (1.6), получим

$$\begin{aligned} \nabla((\lambda + 2\mu)\nabla^2\Phi - \alpha\Theta + \omega^2\rho\Phi) + \nabla \times (\omega^2\rho\Psi + \mu\nabla^2\Psi) &= \mathbf{0}, \\ \nabla^2\Theta + \omega^2\frac{\kappa}{\Lambda}\Theta + \omega^2\frac{\alpha}{\Lambda}\nabla^2\Phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ясно, что все уравнения системы (2.3) удовлетворяются, если

$$\omega^2\rho\Psi + \mu\nabla^2\Psi = \mathbf{0}, \quad (\lambda + 2\mu)\nabla^2\Phi - \alpha\Theta + \omega^2\rho\Phi = 0, \quad \nabla^2\Theta + \omega^2\frac{\kappa}{\Lambda}\Theta + \omega^2\frac{\alpha}{\Lambda}\nabla^2\Phi = 0. \quad (2.4)$$

Здесь волновые потенциалы перемещений и приращения температуры связаны только через второе и третье уравнения.

Для векторного потенциала Ψ имеем независимое векторное уравнение (уравнение Гельмгольца):

$$\nabla^2\Psi + \frac{\omega^2\rho}{\mu}\Psi = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Для дальнейшего исследования необходимо ввести цилиндрические координаты r, φ, z . Физические компоненты вектора перемещения \mathbf{u} в этой системе координат мы будем представлять в форме

$$u_r = Ue^{-i\omega t}, \quad u_\varphi = Ve^{-i\omega t}, \quad u_z = We^{-i\omega t},$$

где U, V, W являются физическими компонентами вектора комплексной амплитуды \mathbf{U} в цилиндрической системе координат.

Для приращений температуры по-прежнему имеем $\theta = \Theta e^{-i\omega t}$.

Векторное уравнение (2.5) в цилиндрической системе координат r, φ, z , представленное через физические компоненты векторного потенциала $\Psi_r, \Psi_\varphi, \Psi_z$, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \nabla^2\Psi_r - \frac{\Psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\omega^2\rho}{\mu}\Psi_r &= 0, \\ \nabla^2\Psi_\varphi - \frac{\Psi_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Psi_r}{\partial\varphi} + \frac{\omega^2\rho}{\mu}\Psi_\varphi &= 0, \\ \nabla^2\Psi_z + \frac{\omega^2\rho}{\mu}\Psi_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$



Физические компоненты Ψ_r , Ψ_φ связаны двумя первыми уравнениями системы дифференциальных уравнений в частных производных (2.6). Для определения компоненты Ψ_z имеется отдельное уравнение и мы далее рассмотрим его.

Относительно физических компонент Ψ_r , Ψ_φ необходимо решить связанную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_r - \frac{\Psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\omega^2}{c_t^2} \Psi_r &= 0, \\ \nabla^2 \Psi_\varphi - \frac{\Psi_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi} + \frac{\omega^2}{c_t^2} \Psi_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для этого представим указанные компоненты в виде

$$\Psi_r(r, \varphi, z) = A_r(r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad \Psi_\varphi(r, \varphi, z) = A_\varphi(r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (2.8)$$

где k — волновое число (или постоянная распространения)⁶, значения $n = 0, 1, 2, \dots$ нумеруют окружные гармоники и определяют окружной профиль волны. Число n называется также азимутальным порядком волны⁷.

На основании формул (2.8) для определения компонент A_r , A_φ из (2.7) получим следующую, также пока еще связанную, систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_r}{dr} - \left(\frac{n^2 + 1}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) A_r + \frac{2n}{r^2} A_\varphi &= 0, \\ \frac{d^2 A_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_\varphi}{dr} - \left(\frac{n^2 + 1}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) A_\varphi + \frac{2n}{r^2} A_r &= 0. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая почленно приведенные уравнения, можно относительно суммы $A_r + A_\varphi$ и разности $A_r - A_\varphi$ получить уже несвязанные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} (A_r + A_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (A_r + A_\varphi) - \left(\frac{(n-1)^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) (A_r + A_\varphi) &= 0, \\ \frac{d^2}{dr^2} (A_r - A_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (A_r - A_\varphi) - \left(\frac{(n+1)^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) (A_r - A_\varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

которые можно интегрировать независимо друг от друга.

Полученные уравнения (2.9) являются уравнениями Бесселя⁸. Решениями уравнений (2.9) являются линейные комбинации модифицированных функций Бесселя первого и второго рода. Однако в силу того что функции Бесселя второго рода не удовлетворяют условиям ограниченности на оси

⁶ Волновое число k может быть, вообще говоря, комплексной величиной. Вполне естественными представляются лишь волны ограниченной (с ростом z) амплитуды. Кроме того, будем считать, что поверхности постоянной фазы волны распространяются вдоль оси волновода в положительном направлении. Поэтому $\text{Re } k > 0$, $\text{Im } k > 0$ при выборе положительного знака в (2.8), и $\text{Re } k < 0$, $\text{Im } k < 0$ при выборе отрицательного знака. Заметим, что в литературе собственно волновым числом называется $\text{Re } k$; величина $\text{Im } k$ обычно называется коэффициентом затухания. С волновым числом k связаны также следующие понятия: $\frac{\omega}{\text{Re } k}$ — фазовая скорость волны; $\frac{1}{\text{Im } k}$ — глубина проникания волны; $4\pi \left| \frac{\text{Im } k}{\text{Re } k} \right|$ — коэффициент потерь.

⁷ Осесимметричная волна характеризуется значением $n = 0$. Ясно, что линейные комбинации окружных гармоник вида (2.8) составляют волну сколь угодно сложного окружного профиля.

⁸ См., например: Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.; Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы). М.: Наука, 1968. 344 с.; Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с. В дальнейшем мы будем оперировать с модифицированными функциями Бесселя (или функциями Бесселя мнимого аргумента), которые являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения $\xi^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \xi \frac{dw}{d\xi} - (\xi^2 + \nu^2)w = 0$.

Решение этого уравнения, ограниченное при $\xi \rightarrow 0$, находится в виде степенного ряда $I_\nu(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\nu + 2k}$ и называется функцией Бесселя первого рода мнимого аргумента.



цилиндра, то для $A_r + A_\varphi$ и $A_r - A_\varphi$, если ввести обозначение $q_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu}$, получаем

$$A_r + A_\varphi = C_3 I_{n-1}(q_2 r), \quad A_r - A_\varphi = C_4 I_{n+1}(q_2 r).$$

Здесь C_3, C_4 — произвольные постоянные. Следовательно, для комплексных амплитуд A_r, A_φ векторного потенциала имеем формулы

$$A_r = C_3 I_{n-1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r), \quad A_\varphi = C_3 I_{n-1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r).$$

Поэтому сами компоненты Ψ_r, Ψ_φ векторного потенциала Ψ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi_r(r, \varphi, z) &= (C_3 I_{n-1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_\varphi(r, \varphi, z) &= (C_3 I_{n-1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Рассмотрим третье уравнение системы (2.6) относительно компоненты Ψ_z . Как и ранее, положим

$$\Psi_z(r, \varphi, z) = A_z(r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}.$$

Тогда для комплексной амплитуды A_z получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 A_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_z}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) A_z = 0,$$

решением которого, ограниченным на оси цилиндра, также является модифицированная функция Бесселя первого рода. Поэтому комплексная амплитуда A_z векторного потенциала находится следующим образом: $A_z = C_5 I_n(q_2 r)$, где C_5 — произвольная постоянная⁹.

Следовательно, для физической компоненты Ψ_z векторного потенциала получаем представление

$$\Psi_z(r, \varphi, z) = C_5 I_n(q_2 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \quad (2.11)$$

Второе и третье уравнения в системе (2.4) содержат лишь скалярный потенциал и комплексную амплитуду приращений температуры и составляют связанную систему:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi - \alpha \Theta + \omega^2 \rho \Phi &= 0, \\ \nabla^2 \Theta + \omega^2 \frac{\kappa}{\Lambda} \Theta + \omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} \nabla^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений представим через новую неизвестную функцию Υ в форме

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Upsilon,$$

где a, b есть некоторые постоянные, причем будем считать, что функция Υ также является решением уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \Upsilon + \gamma^2 \Upsilon = 0 \quad (2.13)$$

с некоторой постоянной γ , имеющей смысл волнового числа гармонической связанной термоупругой волны.

⁹Заметим, что волновое число k есть, вообще говоря, комплексная величина. Если k вещественно и $q_2^2 > 0$, т.е. волновое число k превосходит волновое число чисто упругой сдвиговой волны, то приведенное выражение для A_z наиболее удобно для последующего анализа. Если k вещественно и $-q_2^2 > 0$, то наиболее адекватной формой решения будет $A_z = C_5 J_n(|q_2| r)$.



С учетом этого обстоятельства система (2.12) переписывается в виде

$$\begin{aligned} [\gamma^2(\lambda + 2\mu) - \omega^2\rho] a\Upsilon + \alpha b\Upsilon &= 0, \\ \omega^2\gamma^2\frac{\alpha}{\Lambda}a\Upsilon + \left[\gamma^2 - \omega^2\frac{\kappa}{\Lambda}\right] b\Upsilon &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно $a\Upsilon$ и $b\Upsilon$, которая будет иметь нетривиальное решение только при условии, что определитель системы (2.14) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \gamma^2(\lambda + 2\mu) - \omega^2\rho & \alpha \\ \omega^2\gamma^2\frac{\alpha}{\Lambda} & \gamma^2 - \omega^2\frac{\kappa}{\Lambda} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.15)$$

Аналогичный определитель получается для нахождения волновых чисел связанной термоупругой плоской гармонической волны. Действительно, плоская гармоническая волна имеет вид (\mathbf{k} — волновой вектор, ω — циклическая частота, \mathbf{A} — вектор поляризации волны) $\theta = B e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$, $\mathbf{u} = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$. Подставляя эти выражения в систему (1.2) и учитывая $\nabla = i\mathbf{k}$, $\partial/\partial t = -i\omega$, получаем

$$\begin{aligned} -\mu k^2 \mathbf{A} + (\lambda + \mu)(i\mathbf{k})(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - \alpha(i\mathbf{k})B + \rho\omega^2 \mathbf{A} &= \mathbf{0}, \\ (-k^2 + \kappa\Lambda^{-1}\omega^2)B + \alpha\omega^2\Lambda^{-1}(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь k есть волновое число (модуль волнового вектора \mathbf{k}).

Умножив обе части первого из уравнений полученной системы скалярно на волновой вектор \mathbf{k} , приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2)(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + \alpha k^2 B &= 0, \\ \alpha\omega^2\Lambda^{-1}(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + (-k^2 + \kappa\Lambda^{-1}\omega^2)B &= 0, \end{aligned}$$

нетривиальная разрешимость которой требует того, чтобы

$$\begin{vmatrix} \rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2 & \alpha k^2 \\ \alpha\omega^2\Lambda^{-1} & \kappa\Lambda^{-1}\omega^2 - k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

Таким образом, получаем биквадратное уравнение относительно неизвестного параметра γ

$$(\lambda + 2\mu)\gamma^4 - \omega^2 \left(\rho + \frac{\kappa}{\Lambda}(\lambda + 2\mu) + \frac{\alpha^2}{\Lambda} \right) \gamma^2 + \omega^4 \rho \frac{\kappa}{\Lambda} = 0,$$

корни которого (квадраты волновых чисел связанной термоупругой волны) находятся по формуле

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{\rho + \frac{\kappa}{\Lambda}(\lambda + 2\mu) + \frac{\alpha^2}{\Lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\Lambda}(\lambda + 2\mu) + \frac{\alpha^2}{\Lambda} - \rho\right)^2 + 4\rho\frac{\alpha^2}{\Lambda}}}{2(\lambda + 2\mu)} \omega^2. \quad (2.17)$$

Далее удобно ввести стандартные фазовые скорости упругих и термических волн, а также характерные безразмерные отношения: $l^{-2} = \kappa/\Lambda$, где l — имеет размерность скорости и является скоростью распространения собственно термической волны; $s^2 = \alpha^2/(\rho\Lambda)$ — безразмерная константа; $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — скорость распространения чисто упругой продольной волны; $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения чисто упругой поперечной волны.

В дальнейшем изложении мы будем часто обращаться к безразмерным величинам s , $\delta_l = c_l/l$, $\delta = c_l/c_t \geq \sqrt{2}$.

Помимо указанных безразмерных отношений, в термоупругости используется еще одно характерное безразмерное отношение $s^2 l^2 / c_t^2$, которое часто называют постоянной термоупругой связанности. Традиционно считается, что она весьма мала.



Тогда квадраты волновых чисел связанной термоупругой волны $\gamma_{1,2}^2$ вычисляются по формуле

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1 + l^{-2}c_l^2 + s^2 \pm \sqrt{(l^{-2}c_l^2 + s^2 - 1)^2 + 4s^2}}{2c_l^2} \omega^2. \quad (2.18)$$

Здесь выражение справа, как нетрудно показать, строго положительно независимо от выбора знака. Следовательно, связанной термоупругой волне соответствуют ровно два вещественных волновых числа $\gamma_{1,2}$, что, собственно, предопределено гиперболичностью системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.2).

Волновым числам $\gamma_{1,2}$ соответствуют фазовые скорости распространения связанных термоупругих волн $c_{1,2}$, для которых находим (положительный знак соответствует индексу 1)

$$c_{1,2}^2 = \frac{c_l^2}{\frac{1}{2} \left(1 + l^{-2}c_l^2 + s^2 \pm \sqrt{(l^{-2}c_l^2 + s^2 - 1)^2 + 4s^2} \right)}. \quad (2.19)$$

Заметим, что нормальные скорости (1.5) распространения слабых разрывов перемещений и температурных смещений связаны с фазовыми скоростями $c_{1,2}$ соотношениями $G_1^2 = c_2^2$, $G_2^2 = c_1^2$, поскольку в силу $(l^{-2}c_l^2 + s^2 - 1)^2 + 4s^2 = (l^{-2}c_l^2 + s^2 + 1)^2 - 4l^{-2}c_l^2$ имеем

$$c_{2,1}^2 = l^2 \frac{1 + l^{-2}c_l^2 + s^2 \pm \sqrt{(l^{-2}c_l^2 + s^2 - 1)^2 + 4s^2}}{2}. \quad (2.20)$$

Здесь положительный знак соответствует индексу 2.

Заметим также, что на основании уравнения (2.16) можно заключить следующее: величины $c_{1,2}$ являются фазовыми скоростями связанных термоупругих плоских гармонических волн.

На рис. 1, 2 представлены полученные численно зависимости отношений квадратов фазовых скоростей $c_{1,2}^2/c_l^2$ от безразмерных параметров c_l/l и s .

Ясно, что имеется еще два характерных безразмерных отношения

$$\delta_1 = \frac{c_l}{c_1}, \quad \delta_2 = \frac{c_l}{c_2}.$$

С учетом (2.19) выражение (2.17) для волновых чисел связанной термоупругой волны примет вид $\gamma_{1,2}^2 = \omega^2/c_{1,2}^2$.

Для сокращения записи формул введем следующие обозначения: $g^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{l^2}$, $p_j^2 = k^2 - \gamma_j^2$ ($j = 1, 2$).

Из однородной системы линейных уравнений (2.14) относительно постоянных a, b для каждого из двух возможных значений волнового числа γ находим

$$a_j = b_j \frac{p_j^2 - g^2}{\omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} \gamma_j^2} \quad (j = 1, 2)$$

или, не ограничивая общности,

$$a_j = p_j^2 - g^2, \quad b_j = \omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} \gamma_j^2 \quad (j = 1, 2).$$

В итоге связанные поля Φ и Θ определяются как линейные комбинации

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \Upsilon|_{\gamma=\gamma_1} + C_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \Upsilon|_{\gamma=\gamma_2}, \quad (2.21)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

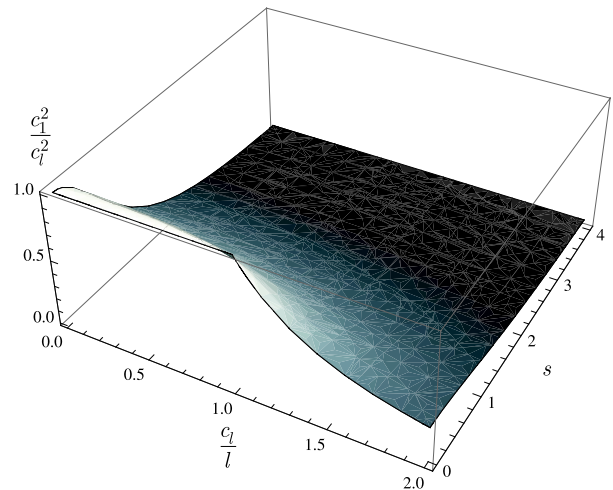


Рис. 1. Зависимость отношения квадрата фазовой скорости распространения связанной термоупругой волны c_1^2 к квадрату скорости упругой продольной волны c_l^2 от безразмерных параметров c_l/l и s



Для нахождения функции Υ необходимо разделить переменные в уравнении Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Upsilon}{\partial r} + \gamma_j^2 \Upsilon = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (2.22)$$

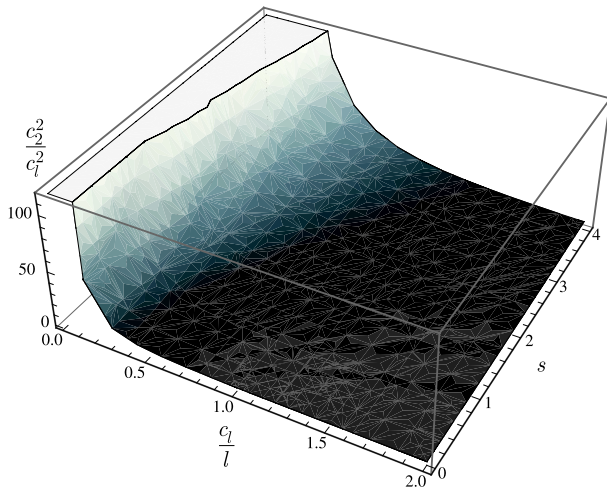


Рис. 2. Зависимость отношения квадрата фазовой скорости распространения связанной термоупругой волны c_2^2 к квадрату скорости упругой продольной волны c_1^2 от безразмерных параметров c_1/l и s

Для этого его решения будем разыскивать, отделяя все три пространственных координаты, в форме

$$\Upsilon = F(r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \quad (2.23)$$

При подстановке формулы (3.2) в (3.1), обозначая штрихом дифференцирование по переменной r , снова получаем уравнение Бесселя для определения комплексной амплитуды F

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) - \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2 - \gamma_j^2 \right) F(r) = 0. \quad (2.24)$$

Поэтому функция Υ , определяющая форму скалярного потенциала перемещений и температуры, находится в виде

$$\Upsilon|_{\gamma=\gamma_j} = I_n(p_j r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} \quad (j = 1, 2). \quad (2.25)$$

Следовательно, необходимые нам решения связанной системы (2.12) будут представляться формулой

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \left[C_1 \begin{pmatrix} p_1^2 - g^2 \\ \omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} \gamma_1^2 \end{pmatrix} I_n(p_1 r) + C_2 \begin{pmatrix} p_2^2 - g^2 \\ \omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} \gamma_2^2 \end{pmatrix} I_n(p_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \quad (2.26)$$

В итоге мы нашли решение уравнений связанной гиперболической термоупругости, содержащее пять произвольных постоянных C_j ($j = \overline{1,5}$). Как мы увидим далее, за счет выбора этих произвольных постоянных можно добиться того, чтобы построенное решение удовлетворяло всем граничным условиям на боковой поверхности волновода.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ (МОДЕЛЬ GNII)

Решение термоупругой задачи подразумевает определение перемещений, деформаций и напряжений. С этой целью мы привлечем стандартные уравнения Коши для деформаций (ϵ — тензор малых деформаций)

$$2\epsilon = \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T \quad (3.1)$$

и определяющие уравнения линейного изотропного термоупругого тела (уравнения Дюгамеля – Неймана)

$$\sigma = 2\mu\epsilon + (\lambda \text{tr}\epsilon - \alpha\theta)\mathbf{I}, \quad (3.2)$$

где σ — тензор напряжений Коши, \mathbf{I} — единичный тензор.

Приведем необходимые формулы для расчета перемещений, деформаций и напряжений в термоупругом теле, используя цилиндрическую систему координат,

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2\epsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, & 2\epsilon_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, & 2\epsilon_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}; \end{aligned} \quad (3.3)$$



$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda\varepsilon + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \alpha\theta, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\varepsilon + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) - \alpha\theta, & \sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \alpha\theta, \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right), & \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right); \\ \varepsilon &= \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Приведем также выражения для физических компонент перемещений через скалярный и векторный потенциалы, опуская при этом гармоническую экспоненту,

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial z}, \quad u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\Psi_\varphi}{r} + \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi}. \quad (3.5)$$

При проведении преобразований нам потребуются также следующие рекуррентные соотношения между модифицированными функциями Бесселя:

$$\xi I_{\nu-1}(\xi) - \xi I_{\nu+1}(\xi) = 2\nu I_\nu(\xi), \quad I_{\nu-1}(\xi) + I_{\nu+1}(\xi) = 2 \frac{d}{d\xi} I_\nu(\xi)$$

и, кроме того, формулы дифференцирования модифицированных функций Бесселя:

$$\xi \frac{d}{d\xi} I_\nu(\xi) + \nu I_\nu(\xi) = \xi I_{\nu-1}(\xi), \quad \xi \frac{d}{d\xi} I_\nu(\xi) - \nu I_\nu(\xi) = \xi I_{\nu+1}(\xi).$$

С их помощью можно найти производные

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} I_n(p\xi) &= p I_{n+1}(p\xi) + \frac{n}{\xi} I_n(p\xi), & \frac{d}{d\xi} I_n(q\xi) &= q I_n(q\xi) + \frac{n-1}{\xi} I_{n-1}(q\xi), \\ \frac{d}{d\xi} I_{n+1}(q\xi) &= q I_n(q\xi) - \frac{n+1}{\xi} I_{n+1}(q\xi), \end{aligned}$$

участвующие в последующих преобразованиях.

Вычислим сначала физические компоненты ротора векторного потенциала $\nabla \times \Psi$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \Psi)_r &= \left[\frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) + (\mp ik)(C_3 I_{n-1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ (\nabla \times \Psi)_\varphi &= \left[(\pm ik)(C_3 I_{n-1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r)) + C_5 \frac{dI_n(q_2 r)}{dr} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ (\nabla \times \Psi)_z &= (C_3 - C_4) q_2 I_n(q_2 r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \end{aligned}$$

Физические компоненты градиента скалярного потенциала $\nabla \Phi$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (\nabla \Phi)_r &= \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \frac{dI_n(p_1 r)}{dr} + C_2 (p_2^2 - g^2) \frac{dI_n(p_2 r)}{dr} \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ (\nabla \Phi)_\varphi &= -\frac{n}{r} \left[C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ (\nabla \Phi)_z &= \pm ik \left[C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \end{aligned}$$

С учетом (2.26), (2.10), (2.11) для форм гармонических связанных термоупругих волн получаем следующие комплексные представления:

$$\begin{aligned} U &= \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + C_2 (p_2^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) \right] + \\ &+ \frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) + (\mp ik) \left(C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \end{aligned}$$



$$V = \left[(\pm ik) \left(C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) - C_5 \left(\frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right) - \right. \\ \left. - \frac{n}{r} \left\{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (3.6)$$

$$W = \left[\pm (ik) \left\{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right\} + (C_3 - C_4) q_2 I_n(q_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}.$$

Подсчитывая частные производные от физических компонент перемещений и температуры по пространственным координатам, находим

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_1^2 r^2}{r^2} I_n(p_1 r) - \frac{p_1}{r} I_{n+1}(p_1 r) \right\} + \right. \\ \left. + C_2 (p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_2^2 r^2}{r^2} I_n(p_2 r) - \frac{p_2}{r} I_{n+1}(p_2 r) \right\} \mp \right. \\ \left. \mp (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{n-1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \pm (ik) C_4 \left\{ q_2 I_n(q_2 r) - \frac{n+1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} + \right. \\ \left. + C_5 \left\{ \frac{n^2 - n}{r^2} I_n(q_2 r) + \frac{q_2 n}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} = \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \left\{ -\frac{n^2}{r} I_n(p_1 r) - n p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right\} + C_2 (p_2^2 - g^2) \left\{ -\frac{n^2}{r} I_n(p_2 r) - n p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right\} \pm \right. \\ \left. \pm (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2}{q_2 r} I_n(q_2 r) + n I_{n+1}(q_2 r) \right\} \mp (ik) C_4 n I_{n+1}(q_2 r) - C_5 \frac{n^2}{r} I_n(q_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = \left[\pm (ik) C_1 (p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right\} \pm (ik) C_2 (p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right\} + \right. \\ \left. + k^2 C_3 \left\{ \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + I_{n+1}(q_2 r) \right\} - k^2 C_4 I_{n+1}(q_2 r) \pm (ik) C_5 \frac{n}{r} I_n(q_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_1 r) - \frac{n p_1}{r} I_{n+1}(p_1 r) \right\} + \right. \\ \left. + C_2 (p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_2 r) - \frac{n p_2}{r} I_{n+1}(p_2 r) \right\} \pm \right. \\ \left. \pm (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{n-1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \pm (ik) C_4 \left\{ q_2 I_n(q_2 r) - \frac{n+1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} - \right. \\ \left. - C_5 \left\{ \frac{n^2 - n + q_2^2 r^2}{r^2} I_n(q_2 r) - \frac{q_2}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \left[-C_1 \frac{n^2}{r} (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) - C_2 \frac{n^2}{r} (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \pm (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2}{q_2 r} I_n(q_2 r) + n I_{n+1}(q_2 r) \right\} \pm \right. \\ \left. \pm (ik) C_4 n I_{n+1}(q_2 r) - C_5 \left\{ \frac{n^2}{r} I_n(q_2 r) + n q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = \left[\mp (ik) C_1 \frac{n}{r} (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) \mp (ik) C_2 \frac{n}{r} (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) - k^2 C_3 \left\{ \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + I_{n+1}(q_2 r) \right\} - \right. \\ \left. - k^2 C_4 I_{n+1}(q_2 r) \mp (ik) C_5 \left\{ \frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$



$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \left[\pm(ik)C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right\} \pm (ik)C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right\} + \right. \\ \left. + (C_3 - C_4)q_2 \left\{ \frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} = [\mp(ik)(C_1(p_1^2 - g^2)n I_n(p_1 r) + C_2(p_2^2 - g^2)n I_n(p_2 r)) - \\ - (C_3 - C_4)nq_2 I_n(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = [-k^2 C_1(p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) - k^2 C_2(p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \pm \\ \pm (ik)(C_3 - C_4)q_2 I_n(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \omega^2 \frac{s^2 \rho}{\alpha} \left[C_1(k^2 - p_1^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + \right. \\ \left. + C_2(k^2 - p_2^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}.$$

Затем на основании формул Коши и определяющих уравнений термоупругости могут быть получены выражения для деформаций и напряжений. Мы выпишем лишь три компоненты тензора напряжений, которые существенны для дальнейшего изложения:

$$\sigma_{rz} = \mu e^{\pm ikz} \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} \left[\pm(2ik)C_1(p_1^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) \pm \right. \\ \pm(2ik)C_2(p_2^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) + C_3 \left(\frac{q_2 n}{r} + \frac{2nk^2}{q_2 r} \right) I_n(q_2 r) + \\ \left. + C_3(k^2 + q_2^2) I_{n+1}(q_2 r) - C_4 \frac{nq_2}{r} I_n(q_2 r) - C_4(k^2 + q_2^2) I_{n+1}(q_2 r) \pm (ik) \frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) \right], \\ \sigma_{r\varphi} = \mu e^{\pm ikz} \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} \left[2C_1(p_1^2 - g^2) \left(\frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_1 r) - \frac{n}{r} p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + \right. \\ \left. + 2C_2(p_2^2 - g^2) \left(\frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_2 r) - \frac{n}{r} p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) \pm \right. \\ \left. \pm(ik)C_3 \left(\frac{4n^2 - 4n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{2(n-1)}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right) \pm \right. \\ \left. \pm(ik)C_4 \left(q_2 I_n(q_2 r) - \frac{2(n+1)}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right) + C_5 \left(\frac{2n - 2n^2 - q_2^2 r^2}{r^2} I_n(q_2 r) + \frac{2q_2}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right) \right], \\ \sigma_{rr} = \left[(\lambda + 2\mu) \left(C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_1^2 r^2}{r^2} I_n(p_1 r) - \frac{p_1}{r} I_{n+1}(p_1 r) \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_2^2 r^2}{r^2} I_n(p_2 r) - \frac{p_2}{r} I_{n+1}(p_2 r) \right\} \mp \right. \\ \left. \mp(ik)C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{n-1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \mp \right. \\ \left. \mp(ik)C_4 \left\{ -q_2 I_n(q_2 r) + \frac{n+1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} + C_5 \left\{ \frac{n^2 - n}{r^2} I_n(q_2 r) + \frac{q_2 n}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right) + \\ \left. + \lambda \left(C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2 - k^2 r^2}{r^2} I_n(p_1 r) + \frac{p_1}{r} I_{n+1}(p_1 r) \right\} + \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2 - k^2 r^2}{r^2} I_n(p_2 r) + \frac{p_2}{r} I_{n+1}(p_2 r) \right\} \pm \\
 & \pm (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{n - 1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \pm (ik) C_4 \left\{ -q_2 I_n(q_2 r) + \frac{n + 1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} + \\
 & + C_5 \left\{ \frac{n - n^2}{r^2} I_n(q_2 r) - \frac{q_2 n}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} - C_1 \rho \omega^2 s^2 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1 r) - \\
 & - C_2 \rho \omega^2 s^2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2 r) \left[\begin{array}{c} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{array} \right] e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}.
 \end{aligned}$$

Постоянные C_j и волновое число k , входящие в выражения для форм гармонических волн, должны подбираться так, чтобы удовлетворялись следующие граничные условия на боковой поверхности цилиндра:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \tag{3.7}$$

Последнее из них выражает отсутствие теплового потока во внутрь и во внешность цилиндрического волновода. В рамках проводимого исследования можно заменить это граничное условие на более общее, соответствующее случаю, когда на боковой поверхности волновода происходит теплообмен с окружающей средой. Полагая, что отдаваемое через боковую поверхность (или получаемое) волноводом тепло пропорционально разности температур между поверхностью волновода и окружающей средой, граничное условие формулируется следующим образом:

$$\Lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=R} + h \theta|_{r=R} = 0,$$

где h — коэффициент скорости теплообмена.

Заметим также, что на основании (2.10), (2.11) уравнение (2.2), выражающее условие калибровки векторного потенциала, позволяет заключить, что должно выполняться соотношение

$$(C_3 + C_4)q_2 \pm (ik)C_5 = 0. \tag{3.8}$$

Это важное соотношение устраняет, в чем мы убедимся позднее, избыточность произвольных постоянных в той форме решения, которое было построено ранее методом разделения переменных.

4. ЧАСТОТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В СВОБОДНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим случай осевой симметрии, полагая окружной профиль волны совпадающим с нулевой гармоникой, т.е. положим $n = 0$ во всех предшествующих формулах. Компоненты Ψ_r, Ψ_z векторного потенциала обращаются в нуль. В формулах (2.10) модифицированные функции Бесселя при $n = 0$ становятся линейно зависимыми. Поэтому мы примем, что $C_3 + C_4 = 0$ и $C_5 = 0$, а разность $C_3 - C_4$ будет играть роль независимой произвольной постоянной.

Ясно, что в условиях осевой симметрии $V = 0$, а оставшиеся выражения для форм (3.6) существенно упрощаются

$$U = [C_1 (p_1^2 - g^2) p_1 I_1(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) p_2 I_1(p_2 r) \mp (ik)(C_3 - C_4) I_1(q_2 r)] e^{\pm ikz},$$

$$W = [\pm(ik) \{C_1 (p_1^2 - g^2) I_0(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_0(p_2 r)\} + (C_3 - C_4)q_2 I_0(q_2 r)] e^{\pm ikz}.$$

Условие (3.8) в случае осевой симметрии удовлетворено. Граничное условие для компоненты $\sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0$ тензора напряжений заведомо удовлетворяется. Остальные граничные условия из (3.7)



дают с учетом найденных в предыдущем разделе работы выражений для компонент тензора напряжений три соотношения

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \left[C_1(p_1^2 - g^2)p_1 \left(\frac{1}{R}I_1(p_1R) + p_1I_2(p_1R) \right) + \right. \\
 & + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 \left(\frac{1}{R}I_1(p_2R) + p_2I_2(p_2R) \right) \mp ik(C_3 - C_4) \left(\frac{1}{R}I_1(q_2R) + q_2I_2(q_2R) \right) \left. \right] + \\
 & + \frac{\lambda}{R} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1R) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2R) \mp (ik)(C_3 - C_4)I_1(q_2R)] + \\
 & + \lambda[-k^2 \{C_1(p_1^2 - g^2)I_0(p_1R) + C_2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2R)\} \pm ik(C_3 - C_4)q_2I_0(q_2R)] - \\
 & - C_1\rho\omega^2 s^2(k^2 - p_1^2)I_0(p_1R) - C_2\rho\omega^2 s^2(k^2 - p_2^2)I_0(p_2R) = 0, \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

$$\pm 2ik \{C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1R) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2R)\} + (k^2 + q_2^2)(C_3 - C_4)I_1(q_2R) = 0, \tag{4.2}$$

$$C_1(k^2 - p_1^2)p_1I_1(p_1R) + C_2(k^2 - p_2^2)p_2I_1(p_2R) = 0. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.1) разделим на $\rho\omega^2$ и, учитывая

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho\omega^2} = \frac{1}{k^2 - q_1^2}, \quad \frac{\lambda}{\rho\omega^2} = \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)},$$

где $q_1^2 = k^2 - \omega^2/c_l^2$, после ряда преобразований приходим к

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{k^2 - q_1^2} \left[C_1(p_1^2 - g^2)p_1 \left(\frac{1}{R}I_1(p_1R) + p_1I_2(p_1R) \right) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 \left(\frac{1}{R}I_1(p_2R) + p_2I_2(p_2R) \right) \mp \right. \\
 & \mp ik(C_3 - C_4) \left(\frac{1}{R}I_1(q_2R) + q_2I_2(q_2R) \right) \left. \right] + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)R} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1R) + \\
 & + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2R) \mp (ik)(C_3 - C_4)I_1(q_2R)] + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} [-k^2 \{C_1(p_1^2 - g^2)I_0(p_1R) + \\
 & + C_2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2R)\} \pm ik(C_3 - C_4)q_2I_0(q_2R)] - C_1s^2(k^2 - p_1^2)I_0(p_1R) - \\
 & - C_2s^2(k^2 - p_2^2)I_0(p_2R) = 0. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

Обезразмерим уравнения, образующие систему (4.1)–(4.3), вводя следующие обозначения для безразмерных аналогов размерных величин:

$$\begin{aligned}
 \tilde{k} &= Rk, & \tilde{g} &= Rg, & \tilde{p}_1 &= Rp_1, & \tilde{p}_2 &= Rp_2, & \tilde{q}_1 &= Rq_1, & \tilde{q}_2 &= Rq_2, \\
 \tilde{C}_1 &= R^{-4}C_1, & \tilde{C}_2 &= R^{-4}C_2, & \tilde{C}_j &= R^{-2}C_j & (j &= 3, 4, 5).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

В дальнейших выкладках, для более компактной записи соотношений будем опускать знак волны над безразмерными величинами (4.5). С учетом этого замечания система (4.1)–(4.3) в безразмерной форме будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{k^2 - q_1^2} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1 (I_1(p_1) + p_1I_2(p_1)) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 (I_1(p_2) + p_2I_2(p_2)) \mp \\
 & \mp ik(C_3 - C_4) (I_1(q_2) + q_2I_2(q_2))] + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1) + \\
 & + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2) \mp (ik)(C_3 - C_4)I_1(q_2)] + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} [-k^2 \{C_1(p_1^2 - g^2)I_0(p_1) + \\
 & + C_2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2)\} \pm ik(C_3 - C_4)q_2I_0(q_2)] - C_1s^2(k^2 - p_1^2)I_0(p_1) - C_2s^2(k^2 - p_2^2)I_0(p_2) = 0, \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

$$\pm 2ik \{C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2)\} + (k^2 + q_2^2)(C_3 - C_4)I_1(q_2) = 0,$$

$$C_1(k^2 - p_1^2)p_1I_1(p_1) + C_2(k^2 - p_2^2)p_2I_1(p_2) = 0.$$



Приведенная система трех линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $C_1, C_2, C_3 - C_4$ имеет нетривиальное решение, только если ее определитель равен нулю. Таким образом, получается частотное уравнение (дисперсионное соотношение) для связанных термоупругих волн, распространяющихся в свободном теплоизолированном цилиндрическом волноводе, из которого можно определить зависимость волнового числа k от частоты ω . Ясно, что в рассматриваемом случае частотное уравнение является чрезвычайно сложным и даже его качественное исследование представляется весьма трудоемким.

Так как $I_1(\xi) = 0$ при $\xi = 0$, то система (4.6) имеет нетривиальные решения вида $C_3 - C_4 = 0, C_1 = 0, C_2 = 0$, если $q_2 = 0$ (волновое число равно волновому числу чисто упругой поперечной волны). В этом случае $\theta = 0$ и, следовательно, этот корень частотного уравнения не представляет никакого интереса, поскольку волновое число $k = \frac{\omega}{c_t}$ не соответствует никакой распространяющейся термической волне. Поэтому мы выразим из второго уравнения системы (4.6) разность $C_3 - C_4$

$$C_3 - C_4 = \mp \frac{2ik}{(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} (C_1(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2)) \quad (4.7)$$

и подставим результат в первое уравнение. В итоге приходим к системе двух линейных однородных уравнений относительно постоянных C_1, C_2 . Определитель полученной системы имеет следующие элементы:

$$D_{11} = (k^2 - q_2^2)(p_1^2 - g^2)p_1(p_1 I_0(p_1) - I_1(p_1)) - \frac{2k^2(I(q_2) - 1)}{k^2 + q_2^2}(k^2 - q_2^2)(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) + \\ + (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) - \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)}{k^2 + q_2^2}(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) - \\ - (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)k^2(p_1^2 - g^2)I_0(p_1) + \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)I(q_2)}{k^2 + q_2^2}(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) - \\ - s^2(k^2 - p_1^2)(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)I_0(p_1),$$

$$D_{12} = (k^2 - q_2^2)(p_2^2 - g^2)p_2(p_2 I_0(p_2) - I_1(p_2)) - \frac{2k^2(I(q_2) - 1)}{k^2 + q_2^2}(k^2 - q_2^2)(p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2) + \\ + (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)(p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2) - \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)}{k^2 + q_2^2}(p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2) - \\ - (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)k^2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2) + \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)I(q_2)}{k^2 + q_2^2}(p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2) - \\ - s^2(k^2 - p_2^2)(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)I_0(p_2),$$

$$D_{21} = (k^2 - p_1^2)p_1 I_1(p_1), \quad D_{22} = (k^2 - p_2^2)p_2 I_1(p_2).$$

Здесь вводится новое обозначение

$$I(\xi) = \frac{\xi I_0(\xi)}{I_1(\xi)} = 2 + \frac{\xi^2}{2^2} - \frac{\xi^4}{2^5 \cdot 3} + \frac{\xi^6}{2^9 \cdot 3} - \frac{\xi^8}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{13\xi^{10}}{2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5} - \dots$$

Частотное уравнение $D(k, \omega) = D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} = 0$ было проанализировано численно с помощью системы символьных вычислений Mathematica 6.0. Сначала задавались безразмерные параметры s, δ, δ_l (в дальнейшем мы принимаем следующие значения: $s = 0.01, \delta = c_l/c_t = 1.9, \delta_l = 1.2$), затем для различных значений безразмерного отношения $\tilde{\omega} = \frac{\omega R}{c_l}$ осуществлялся поиск корней частотного уравнения и определялись безразмерные величины $\tilde{k} = kR$. Численный анализ проводился лишь для гармонического множителя e^{+ikz} . Поэтому физический смысл будут иметь лишь такие корни частотного уравнения, для которых $\text{Im } k > 0$. Если ограничиваться волнами, фазовые поверхности которых распространяются в положительном направлении вдоль оси цилиндра, то приходится полагать, что $\text{Re } k > 0$.



Для заданной частоты всегда имеется счетное число волновых чисел. Поскольку все элементы определителя D удовлетворяют условиям (черта сверху обозначает комплексное сопряжение)

$$D_{jl}(k, \omega) = D_{jl}(-k, \omega), \quad \overline{D_{jl}(k, \omega)} = D_{jl}(\bar{k}, \omega),$$

то этим условиям будет удовлетворять и сам определитель, т.е. $D(k, \omega) = D(-k, \omega)$, $\overline{D(k, \omega)} = D(\bar{k}, \omega)$.

Поэтому корни частотного уравнения $D(k, \omega) = 0$ находятся парами $k, -k$ (если они вещественные или чисто мнимые) и четверками $k, -k, \bar{k}, -\bar{k}$ (если они обладают и вещественной, и мнимой частью, отличными от нуля). Результаты численного анализа сведены в табл. 1 (в ней указаны лишь несколько наиболее близко расположенных к нулю ($\text{Re } k = 0, \text{Im } k = 0$) волновых чисел). Кроме того, из четверки корней $k, -k, \bar{k}, -\bar{k}$ мы приводим лишь пару $k, -k$.

Таблица 1

Частоты $\tilde{\omega} = \frac{\omega R}{c_l}$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$	-0.117472, 0.117472 -1.63769 - 6.05966i, 1.63769 + 6.05966i
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.2$	0.235177, -0.235177 -1.63819 - 6.05393i, 1.63819 + 6.05393i
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.3$	-0.360084, 0.360084 -1.63902 - 6.04437i, 1.63902 + 6.04437i
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.4$	-0.47231, 0.47231 -1.64015 - 6.03096i, 1.64015 + 6.03096i
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.5$	-0.600175, 0.600175 -1.64156 - 6.01367i, 1.64156 + 6.01367i
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.6$	-0.713849, 0.713849 -1.83157 - 9.22297i, 1.83157 + 9.22297i
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.7$	-0.837132, 0.837132, -0.840674, 0.840674 -1.38012 - 2.48891i, 1.38012 + 2.48891i
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.8$	-0.964707, 0.964707 -1.38413 - 2.41191i, 1.38413 + 2.41191i
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.9$	-1.07991, 1.07991, -1.83529 - 9.16659i 1.83529 + 9.16659i, -1.3874 - 2.32184i, 1.3874 + 2.32184i
$\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$	-1.2, 1.2, -10.1024i, 10.1024i -1.83669 - 9.14266i, 1.83669 + 9.14266i
$\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$	-1.67103, 1.67103, -0.168746, 0.168746 -2.98688i, 2.98688i, -19.4685i, 19.4685i
$\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$	-2.02041, 2.02041, -3.29846, 3.29846 -3.60043, 3.60043, -6.00311, 6.00311 -1.31193i, 1.31193i, -6.02141i, 6.02141i -1.38711 + 3.96229i, 1.38711 - 3.96229i

С каждым волновым числом связано волновое решение связанной системы дифференциальных уравнений движения и теплопроводности, которое определяет бегущую (k вещественно) вдоль оси волновода или нераспространяющуюся (стоячую) экспоненциально спадающую (k чисто мнимое) волну. Внимательное изучение численных результатов свидетельствует о том, что для каждой сравнительно высокой частоты всегда имеется, по меньшей мере, одно вещественное волновое число, что указывает на возможность передачи по цилиндрическому волноводу термоупругого сигнала, амплитуда которого зависит лишь от расстояния до оси волновода, т.е. не изменяется вдоль направления



распространения сигнала, и, по меньшей мере, одно чисто мнимое волновое число, которому соответствует стоячая связанная термоупругая волна.

На рис. 3–11 даны графики (в форме поверхностей) величины $|D|$ в зависимости от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$, а также кривые пересечения указанных поверхностей с плоскостями $\text{Im } k = 0$ и $\text{Re } k = 0$.

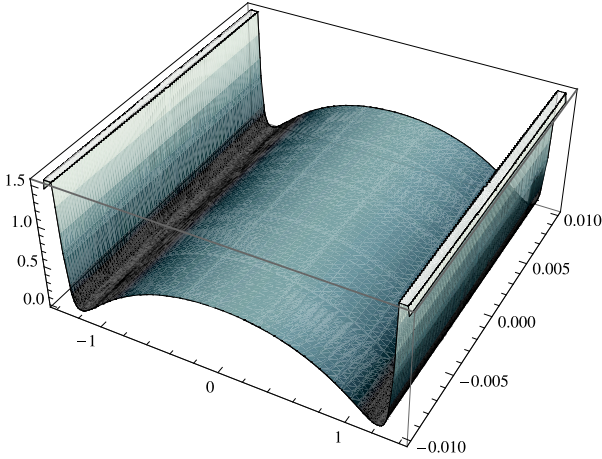


Рис. 3. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

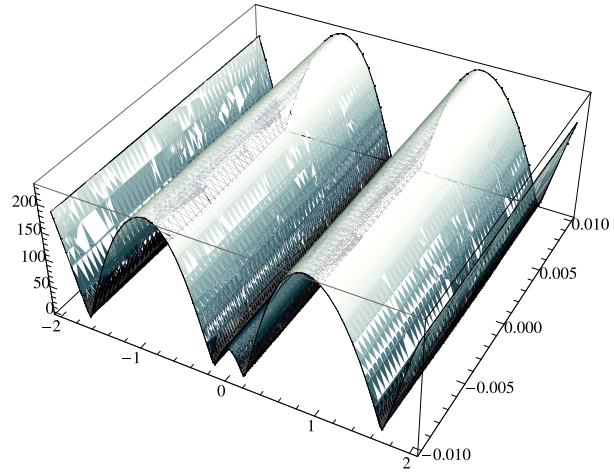


Рис. 4. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

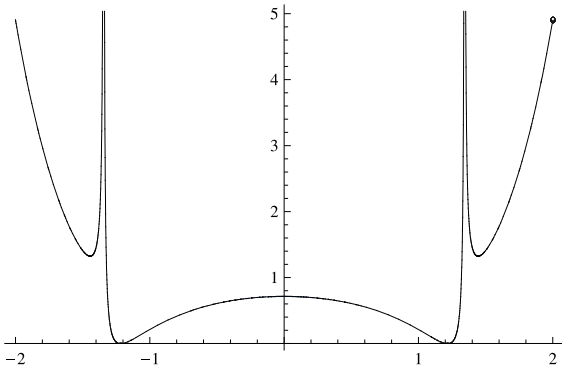


Рис. 5. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

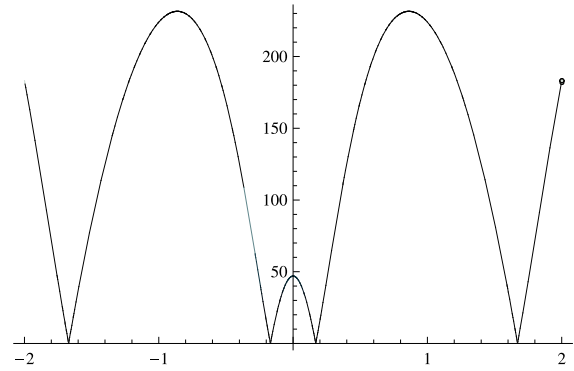


Рис. 6. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

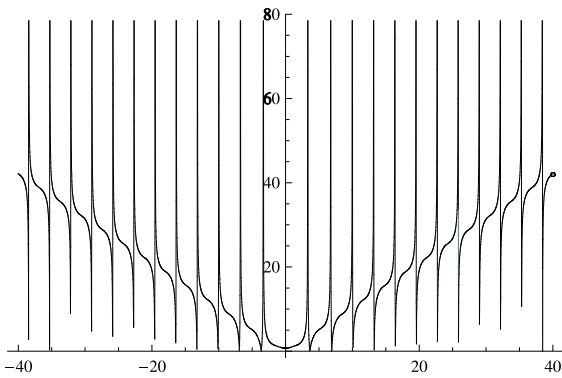


Рис. 7. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

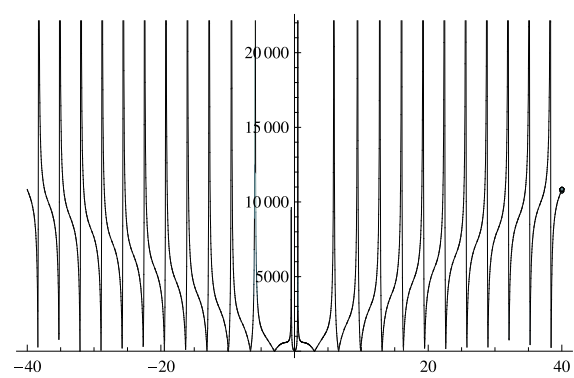


Рис. 8. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

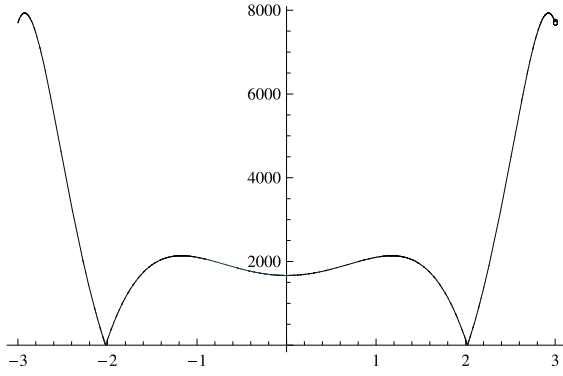


Рис. 9. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

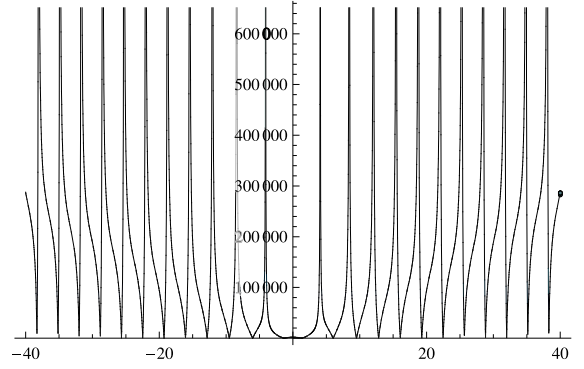


Рис. 10. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

Перейдем далее к вычислению перемещений и температуры в осесимметричной волне. Так как после исключения разности $C_3 - C_4$ постоянные C_1, C_2 удовлетворяют системе двух линейных однородных уравнений с нулевым определителем, то можно выразить C_2 через $C = C_1$ из наиболее простого третьего уравнения системы (4.6)

$$C_2 = -\frac{(k^2 - p_1^2)p_1 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)p_2 I_1(p_2)} C,$$

а затем с помощью (4.7) найти разность $C_3 - C_4$ в виде

$$C_3 - C_4 = \mp \frac{2ikCp_1 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} \times \\ \times ((k^2 - p_2^2)(p_1^2 - g^2) - (k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2)).$$

После этого можно вычислить перемещения и температуру в осесимметричной волне. Вводя следующие безразмерные отношения

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{R}, \quad \tilde{u}_r = \frac{u_r}{R}, \quad \tilde{u}_z = \frac{u_z}{R}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\rho \omega^2 s^2 \alpha^{-1}}$$

и опуская знак волны над безразмерными величинами, получим

$$u_r = C e^{\pm ikz} e^{-i\omega t} \left((p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1 r) - \frac{(k^2 - p_1^2)(p_1^2 - g^2)I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)I_1(p_2)} p_1 I_1(p_2 r) - \right. \\ \left. - \frac{2k^2 p_1 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} ((k^2 - p_2^2)(p_1^2 - g^2) - (k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2)) I_1(q_2 r) \right), \\ u_z = C e^{\pm ikz} e^{-i\omega t} \left((\pm ik)(p_1^2 - g^2)I_0(p_1 r) - (\pm ik) \frac{(k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2)p_1 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)p_2 I_1(p_2)} I_0(p_2 r) \mp \right. \\ \left. \mp \frac{2ikp_1 q_2 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} ((k^2 - p_2^2)(p_1^2 - g^2) - (k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2)) I_0(q_2 r) \right), \\ \theta = C e^{\pm ikz} e^{-i\omega t} \left((k^2 - p_1^2)I_0(p_1 r) - \frac{(k^2 - p_1^2)p_1 I_1(p_1)}{p_2 I_1(p_2)} I_0(p_2 r) \right).$$

Подчеркнем еще раз, что в этих формулах все величины не имеют физической размерности. Опуская затем множитель $C e^{-i\omega t}$, получаем безразмерные формы радиального и осевого перемещений и

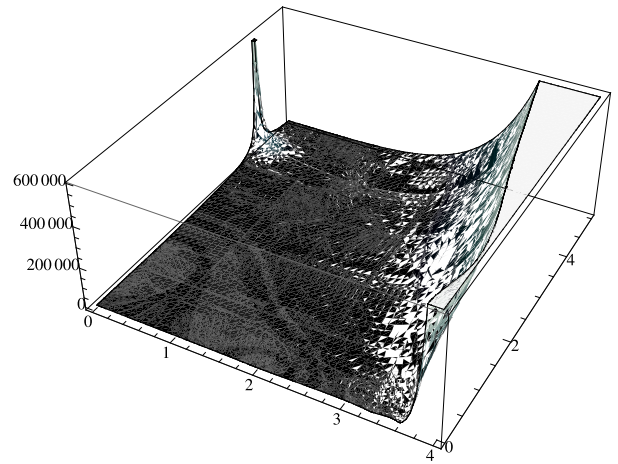


Рис. 11. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$



температуры. На рис. 12, 13 изображены типичные профили *форм* перемещений на центральной оси и в центральном сечении цилиндра для одной из бегущих осесимметричных волн с вещественным волновым числом k .

Форма u_r

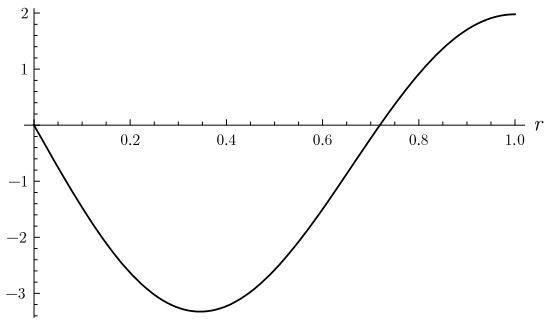


Рис. 12. Профиль формы бегущей осесимметричной волны радиального перемещения u_r в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 2.02041$

Форма u_z

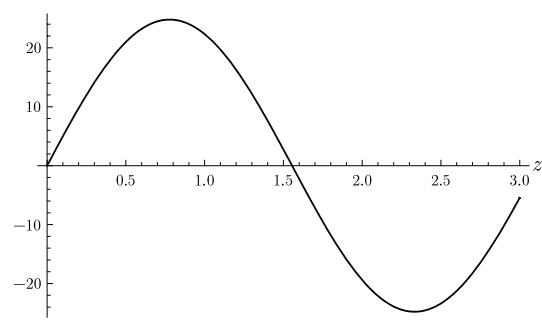


Рис. 13. Профиль формы бегущей осесимметричной волны вертикального перемещения u_z на оси $r = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 2.02041$

Соответствующие формы для температуры приводятся на рис. 14, 15. Как явствует из рис. 14 поверхность волновода будет в наибольшей степени разогреваться и охлаждаться при прохождении осесимметричной связанной термоупругой волны.

Форма θ

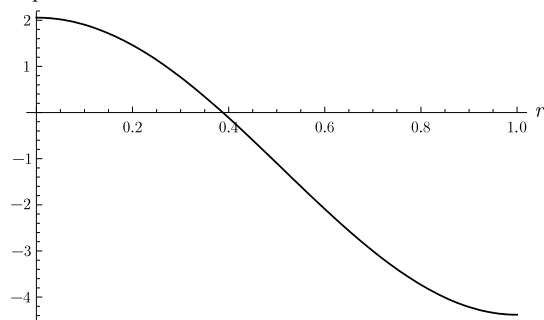


Рис. 14. Профиль формы бегущей осесимметричной температурной волны в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 2.02041$

Форма θ

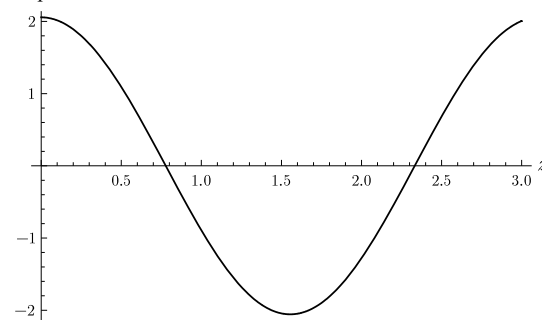


Рис. 15. Профиль формы бегущей осесимметричной температурной волны на оси $r = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 2.02041$

5. ЧАСТОТНОЕ УРАВНЕНИЕ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОКРУЖНЫХ ГАРМОНИК

Рассмотрения становятся несколько более сложными, если поставить задачу вывода частотного уравнения в случае термоупругой волны с окружной гармоникой сколь угодно высокого порядка n .

Подставляя выражения для компонент тензора напряжений и градиента температуры в граничные условия (3.7) и условие калибровки (3.8) получается система пяти линейных однородных уравнений

$$D_{jl}C_l = 0 \quad (j, l = \overline{1, 5}) \quad (5.1)$$

относительно пяти постоянных C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 .

Нас интересует условие нетривиальной разрешимости указанной системы. Приравняв нулю определитель системы, приходим к частотному уравнению. Оно содержит в качестве параметра порядок окружной гармоники n . Выполняя ряд преобразований, частотное уравнение можно обезразмерить и несколько упростить. Мы не будем останавливаться на деталях. Окончательно частотное уравнение



для волны с произвольным номером n окружной гармонике есть

$$D(k, \omega) = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} \end{vmatrix} = 0, \quad (5.2)$$

где элементы определителя вычисляются как

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_1^2 - g^2) \{ (n^2 - n + p_1^2) I_n(p_1) - p_1 I_{n+1}(p_1) \} + \\ &+ \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_1^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \{ (n - n^2 - k^2) I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1) \} - s^2 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1), \\ D_{12} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_2^2 - g^2) \{ (n^2 - n + p_2^2) I_n(p_2) - p_2 I_{n+1}(p_2) \} + \\ &+ \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_2^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \{ (n - n^2 - k^2) I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2) \} - s^2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2), \\ D_{13} &= \mp(ik) \frac{2}{k^2 - q_2^2} \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2}{q_2} I_n(q_2) + (n - 1) I_{n+1}(q_2) \right\}, \\ D_{14} &= \mp(ik) \frac{2}{k^2 - q_2^2} \{ -q_2 I_n(q_2) + (n + 1) I_{n+1}(q_2) \}, \\ D_{15} &= \frac{2}{k^2 - q_2^2} \{ (n^2 - n) I_n(q_2) + q_2 n I_{n+1}(q_2) \}, \\ D_{21} &= 2(p_1^2 - g^2) \{ (n - n^2) I_n(p_1) - n p_1 I_{n+1}(p_1) \}, \\ D_{22} &= 2(p_2^2 - g^2) \{ (n - n^2) I_n(p_2) - n p_2 I_{n+1}(p_2) \}, \\ D_{23} &= \pm(ik) \left\{ \frac{4n^2 - 4n + q_2^2}{q_2} I_n(q_2) + (2n - 2) I_{n+1}(q_2) \right\}, \\ D_{24} &= \pm(ik) \{ q_2 I_n(q_2) - (2n + 2) I_{n+1}(q_2) \}, \quad D_{25} = (2n - 2n^2 - q_2^2) I_n(q_2) + 2q_2 I_{n+1}(q_2), \\ D_{31} &= \pm(2ik) (p_1^2 - g^2) \{ n I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1) \}, \quad D_{32} = \pm(2ik) (p_2^2 - g^2) \{ n I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2) \}, \\ D_{33} &= \frac{2k^2 n + q_2^2 n}{q_2} I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2) I_{n+1}(q_2), \\ D_{34} &= -q_2 n I_n(q_2) - (q_2^2 + k^2) I_{n+1}(q_2), \quad D_{35} = \pm(ik) n I_n(q_2), \\ D_{41} &= (k^2 - p_1^2) (n I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1)), \quad D_{42} = (k^2 - p_2^2) (n I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2)), \\ D_{43} &= 0, \quad D_{44} = 0, \quad D_{45} = 0, \\ D_{51} &= 0, \quad D_{52} = 0, \quad D_{53} = q_2, \quad D_{54} = q_2, \quad D_{55} = \pm(ik). \end{aligned}$$

Следует отметить, что при вычислении отношений $\xi^{-1} I_n(\xi)$ ($n = 1, 2, \dots$) удобнее всего воспользоваться формулой

$$\frac{I_n(\xi)}{\xi} = \frac{I_{n-1}(\xi) - I_{n+1}(\xi)}{2n}.$$

Был осуществлен (средствами Mathematica 6.0) численный анализ частотного уравнения $D = 0$ в случае $n = 2$ при заданных значениях $s = 0.01$, $\delta = c_l/c_t = 1.9$, $\delta_l = 1.2$. Для проведения анализа был выбран гармонический множитель e^{+ikz} . Поэтому физический смысл имеют лишь такие корни частотного уравнения, для которых $\text{Im } k > 0$. Если рассматривать волны, фазовые поверхности



которых распространяются в положительном направлении вдоль оси цилиндра, то необходимо также полагать, что $\text{Re } k > 0$.

Как и в случае осесимметричного окружного профиля волны ($n = 0$) для заданной частоты ω всегда имеется счетное число волновых чисел k .

Определитель $D(k, \omega)$ по-прежнему удовлетворяет условиям

$$D(k, \omega) = D(-k, \omega), \quad \overline{D(k, \omega)} = D(\bar{k}, \omega). \quad (5.3)$$

Действительно, принимая во внимания вышеуказанные выражения для его элементов, видно, что он имеет следующую структуру:

$$D(k, \omega) = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & (\mp ik)D'_{13} & (\mp ik)D'_{14} & D_{15} \\ D_{21} & D_{22} & (\pm ik)D'_{23} & (\pm ik)D'_{24} & D_{25} \\ (\pm ik)D'_{31} & (\pm ik)D'_{32} & D_{33} & D_{34} & (\pm ik)D'_{35} \\ D_{41} & D_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & q_2 & \pm ik \end{vmatrix}, \quad (5.4)$$

где не выписанные явно величины (в том числе величины при множителях $\mp ik, \pm ik$) удовлетворяют условиям вида (5.3). Умножая первую строку определителя на $-D_{21}/D_{11}$ и складывая со второй строкой, добиваемся того, чтобы в позиции 21 располагался нуль; далее, умножая четвертую строку на $-D_{11}/D_{41}$ и складывая с первой строкой, получаем нуль в позиции 11; затем, умножая вторую строку на $-D_{15}/D_{25}$ и складывая с первой строкой, получаем нуль в позиции 15; умножая пятую строку на $-D'_{35}$ и складывая с третьей строкой, получаем нуль в позиции 35; вычитая из четвертого столбца определителя третий его столбец, получаем нуль в позиции 54; вычитая из второго столбца определителя первый его столбец, умноженный на D_{42}/D_{41} , получаем нуль в позиции 42; после указанных преобразований¹⁰ величина определителя не изменится, а в затронутых преобразованиями позициях определителя будут располагаться выражения (в том числе выражения при множителях $\mp ik, \pm ik$), удовлетворяющие условиям вида (5.3). Таким образом, вместо (5.4) получается определитель

$$D(k, \omega) = \begin{vmatrix} 0 & D''_{12} & (\mp ik)D''_{13} & (\mp ik)D''_{14} & 0 \\ 0 & D''_{22} & (\pm ik)D''_{23} & (\pm ik)D''_{24} & D''_{25} \\ (\pm ik)D''_{31} & (\pm ik)D''_{32} & D''_{33} & D''_{34} & 0 \\ D_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & 0 & \pm ik \end{vmatrix}, \quad (5.5)$$

раскладывая который по четвертой строке, находим

$$D(k, \omega) = -D_{41} \begin{vmatrix} D''_{12} & (\mp ik)D''_{13} & (\mp ik)D''_{14} & 0 \\ D''_{22} & (\pm ik)D''_{23} & (\pm ik)D''_{24} & D''_{25} \\ (\pm ik)D''_{32} & D''_{33} & D''_{34} & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & \pm ik \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

Далее первую строку определителя умножаем на $-D''_{22}/D''_{12}$ и, сложив со второй строкой, добиваемся того, чтобы в позиции 21 располагался нуль; после этого третью строку умножим на $-\frac{(\mp ik)D''_{12}}{k^2 D''_{32}}$ и сложим с первой строкой, получая нуль в позиции 11. Раскладывая затем полученный определитель по первому столбцу, приходим к формуле следующего вида:

$$D(k, \omega) = -(\pm ik)D_{41}D''_{32} \begin{vmatrix} (\mp ik)D'''_{13} & (\mp ik)D'''_{14} & 0 \\ (\pm ik)D'''_{23} & (\pm ik)D'''_{24} & D'''_{25} \\ q_2 & 0 & \pm ik \end{vmatrix}. \quad (5.7)$$

¹⁰При их проведении приходится полагать, что элементы D_{11}, D_{41}, D_{25} не будут равны нулю для корней частотного уравнения $D(k, \omega) = 0$.



Здесь не выписанные явно величины (включая величины при множителях $\mp ik, \pm ik$) удовлетворяют условиям вида (5.3). При вычислении оставшегося определителя *каждое* из слагаемых будет содержать множитель ik либо в первой, либо в третьей степени, и, учитывая еще один множитель ik перед определителем, заключаем, что определитель D действительно удовлетворяет (5.3).

Ясно поэтому, что корни частотного уравнения $D(k, \omega) = 0$ находятся парами $k, -k$ (если они вещественные или чисто мнимые) и четверками $k, -k, \bar{k}, -\bar{k}$ (если они обладают и вещественной, и мнимой частью, отличными от нуля).

Результаты численного анализа сведены в табл. 2 (в ней указаны лишь несколько наиболее близко расположенных к нулю ($\text{Re } k = 0, \text{Im } k = 0$) волновых чисел). Из четверки корней $k, -k, \bar{k}, -\bar{k}$ мы приводим лишь пару $k, -k$.

Таблица 2

Частоты $\tilde{\omega} = \frac{\omega R}{c_t}$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.1$	$-0.120014, -0.0999886, 0.0999886, -0.19, 0.19$ $0.120014, -4.12194i, 4.12194i, -9.96875i, 9.96875i$ $-1.8244 - 9.04076i, 1.8244 + 9.04076i$
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.2$	$-0.199977, 0.199977$ $-0.240027, 0.240027, -0.38, 0.38, -9.96658i, 9.96658i$ $-1.8247 - 9.03695i, 1.8247 + 9.03695i$
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.3$	$-0.299966, 0.299966$ $-0.360041, 0.360041, -0.57, 0.57, -9.96297i, 9.96297i$ $-1.82519 - 9.03059i, 1.82519 + .03059i$
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.4$	$-0.480055, 0.480055$ $-0.399955, 0.399955, -0.76, 0.76, -9.9579i, 9.9579i$ $-1.82588 - 9.02168i, 1.82588 + 9.02168i$
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.5$	$-0.600068, 0.600068, -49.3923i, 49.3923i$ $-0.499943, 0.499943, -0.95, 0.95, -2.99472i, 2.99472i$ $-1.82674 - 9.01021i, 1.82674 + 9.01021i$
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.6$	$-1.14, 1.14, -0.599932, 0.599932$ $-9.94343i, 9.94343i$ $-1.82777 - 8.99617i, 1.82777 + 8.99617i$
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.7$	$-0.699921, 0.699921, -1.33, 1.33$ $-2.93644i, 2.93644i, -3.88716i, 3.88716i$ $-1.82893 - 8.97954i, 1.82893 + 8.97954i$
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.8$	$-0.799909, 0.799909, -1.52, 1.52$ $-3.81142i, 3.81142i, -9.92313i, 9.92313i$ $-1.83022 - 8.9603i, 1.83022 + 8.9603i$
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.9$	$-1.08012, 1.08012, -0.899898, 0.899898$ $-2.85689i, 2.85689i, -3.72414i, 3.72414i$ $-1.62518 - 5.52602i, 1.62518 + 5.52602i$
$\frac{\omega R}{c_t} = 1.0$	$-0.999886, 0.999886, -1.9, 1.9$ $-2.80859i, 2.80859i, -3.6247i, 3.6247i$ $-1.62742 - 5.48637i, 1.62742 + 5.48637i$
$\frac{\omega R}{c_t} = 2.0$	$-1.63942, 1.63942, -1.99977, 1.99977$ $-1.88936i, 1.88936i, -6.26192i, 6.26192i$ $-1.63445 - 4.81404i, 1.63445 + 4.81404i$



Окончание табл. 2

Частоты $\tilde{\omega} = \frac{\omega R}{c_l}$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$
$\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$	-1.90591, 1.90591, -2.99966, 2.99966 -5.65782i, 5.65782i, -9.9055i, 9.9055i -1.39809 - 3.37753i, 1.39809 + 3.37753i
$\frac{\omega R}{c_l} = 10.0$	-9.99886, 9.99886, -12.0014, 12.0014 -5.42717i, 5.42717i, -11.0981i, 11.0981i -1.27647 - 17.8477i, 1.27647 + 17.8477i

На рис. 16–27 даны графики (в форме поверхностей) величины $|D|$ в зависимости от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$, а также кривые пересечения указанных поверхностей с плоскостями $\text{Im } k = 0$ и $\text{Re } k = 0$.

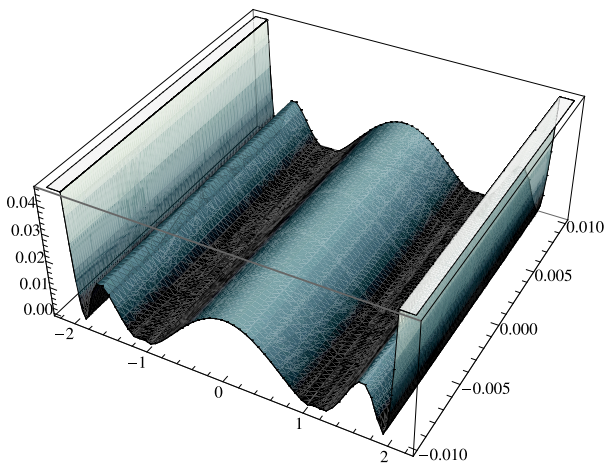


Рис. 16. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

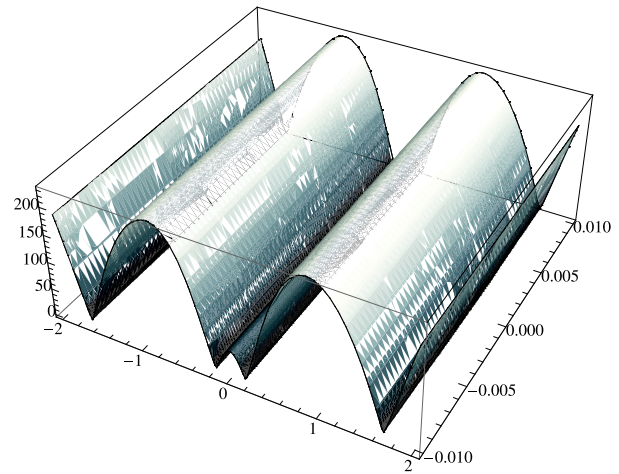


Рис. 17. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

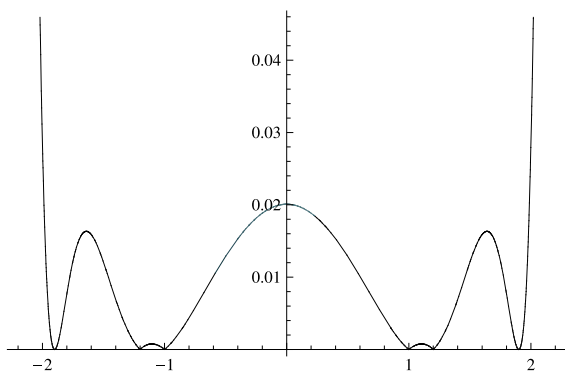


Рис. 18. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

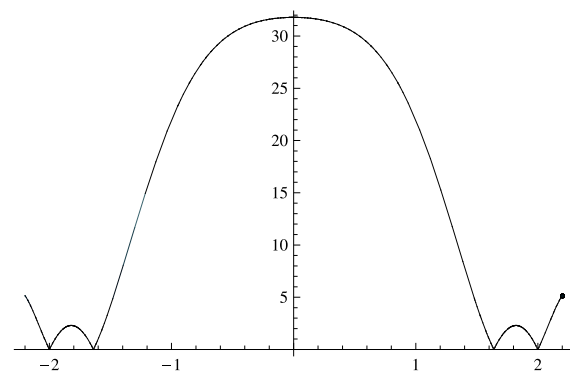


Рис. 19. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

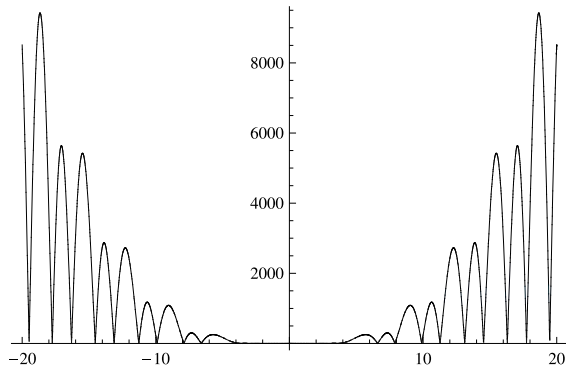


Рис. 20. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

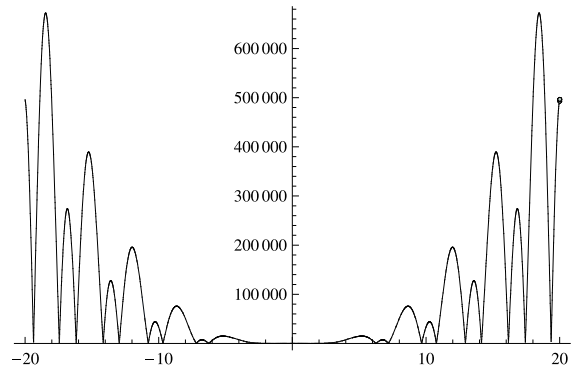


Рис. 21. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

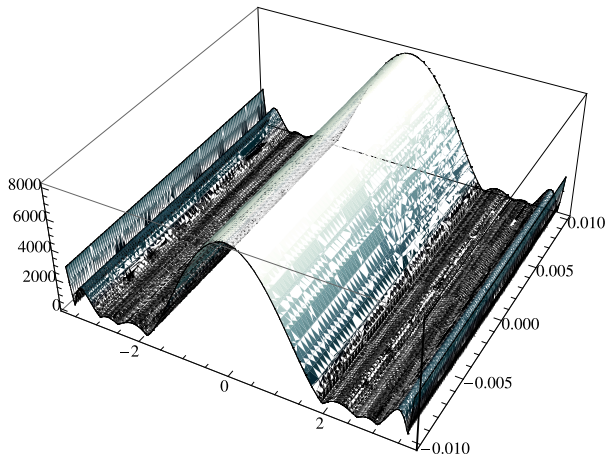


Рис. 22. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

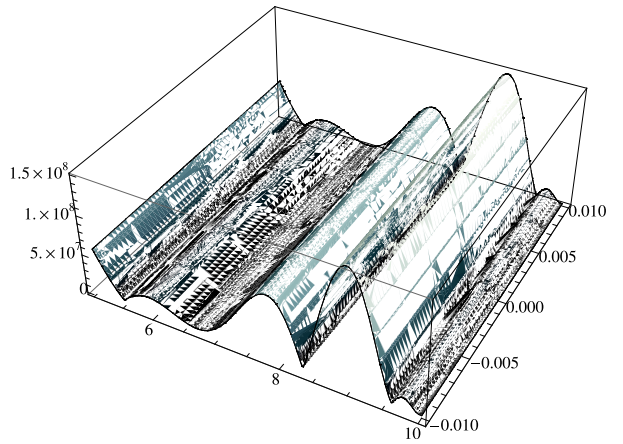


Рис. 23. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 10.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

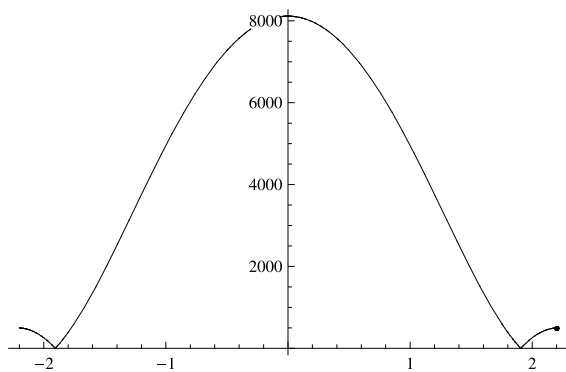


Рис. 24. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

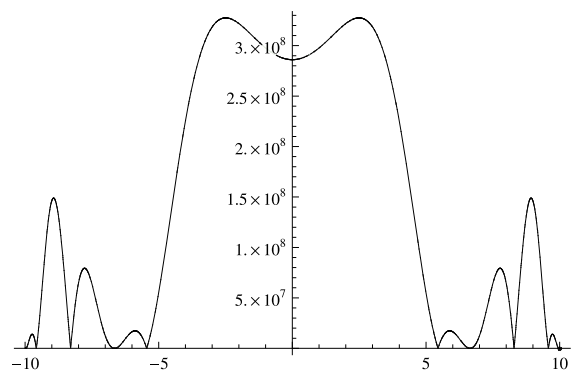


Рис. 25. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 10.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

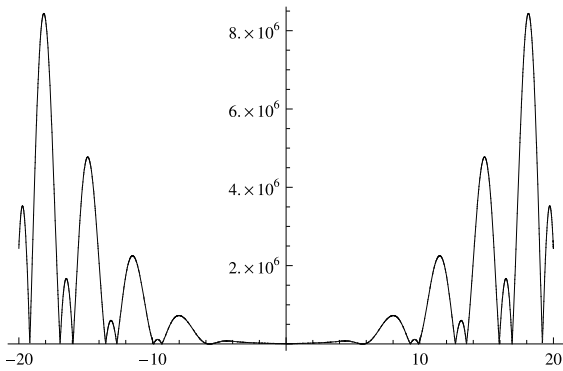


Рис. 26. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

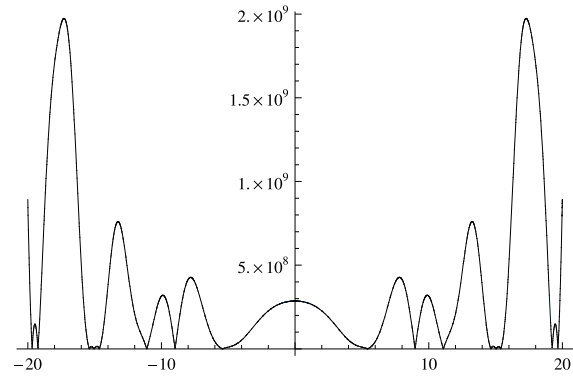


Рис. 27. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 10.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

Переходим к определению перемещений и температуры в случае связанной термоупругой волны с окружной гармоникой произвольного порядка n . Для этого рассмотрим систему линейных уравнений (5.1). Поскольку определитель этой системы равен нулю (см. (5.2)), то мы попытаемся выразить постоянные C_j через одну из них, скажем, $C_1 = C$. С этой целью из пятого уравнения системы (5.1) выразим C_5 через C_3 и C_4 , считая при этом, что $D_{55} \neq 0$. Полученное значение C_5 подставим в первое, второе и третье уравнения системы (5.1). Затем из преобразованного первого уравнения найдем выражение C_4 через C_1 , C_2 , C_3 и подставим результат во второе и третье уравнения¹¹.

Тогда второе и третье уравнения будут содержать только C_1 , C_2 , C_3 . Из второго уравнения находим C_3 через C_1 , C_2 , предполагая

$$D_{55}(D_{23}D_{14} - D_{13}D_{24}) + D_{53}(D_{13}D_{25} + D_{15}D_{24} - D_{15}D_{23} - D_{14}D_{25}) \neq 0.$$

Из четвертого уравнения выразим C_2 через C при условии $D_{42} \neq 0$. Тогда появляется возможность найти выражение C_3 через C , затем C_4 через C и C_5 через C . В итоге, вводя обозначения

$$K = D_{55}(D_{23}D_{14} - D_{13}D_{24}) + D_{53}(D_{13}D_{25} + D_{15}D_{24} - D_{15}D_{23} - D_{14}D_{25}),$$

$$K_1 = D_{42}D_{11} - D_{41}D_{12}, \quad K_2 = D_{15}D_{53} - D_{14}D_{55}, \quad K_3 = D_{24}D_{55} - D_{25}D_{53},$$

$$K_4 = D_{42}D_{21} - D_{41}D_{22}, \quad K_5 = D_{15}D_{53} - D_{13}D_{55},$$

после ряда преобразований получаем

$$C_2 = -\frac{D_{41}}{D_{42}}C, \quad C_3 = \frac{K_3K_1 + K_2K_4}{D_{42}K}C, \quad D_{42}C_4 = \frac{K_1K - K_2K_4K_5 - K_1K_3K_5}{KK_2}C,$$

$$C_5 = -\frac{D_{53}}{D_{55}D_{42}} \frac{K_1K_2K_3 + K_2^2K_4 + KK_1 - K_2K_4K_5 - K_1K_3K_5}{KK_2}C.$$

Перемещения и температура в связанной термоупругой волне, как было указано ранее, имеют вид

$$u_r = \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + C_2 (p_2^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) + \right. \\ \left. + \frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) \mp (ik) \left(C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \\ u_\varphi = \left[\pm (ik) \left(C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) - C_5 \left(\frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right) - \right]$$

¹¹При этом нам придется полагать, что $D_{15}D_{53} - D_{14}D_{55} \neq 0$.



$$-\frac{n}{r} \left\{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right\} \left[\begin{matrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{matrix} \right] e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$u_z = \left[\pm(ik) \left\{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right\} + (C_3 - C_4) q_2 I_n(q_2 r) \right] \left[\begin{matrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{matrix} \right] e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\theta = \frac{\rho s^2 \omega^2}{\alpha} (C_1 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1 r) + C_2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2 r)) \left[\begin{matrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{matrix} \right] e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

и для их определения необходимо подставить только что найденные выражения для произвольных постоянных в приведенные формулы.

Стоит отметить, что при вычислении отношений $\xi^{-1} I_n(\xi)$ ($n = 1, 2, \dots$) при малых ξ удобнее всего, как и ранее, воспользоваться формулой

$$\frac{I_n(\xi)}{\xi} = \frac{I_{n-1}(\xi) - I_{n+1}(\xi)}{2n}.$$

На рис. 28–31 приводятся профили форм (за вычетом окружных гармоник) перемещений и температуры в сечении волновода $z = 0$ для бегущей волны, характеризуемой значениями $n = 2$, $\omega R/c_l = 2.0$, $kR = 1.63942$.

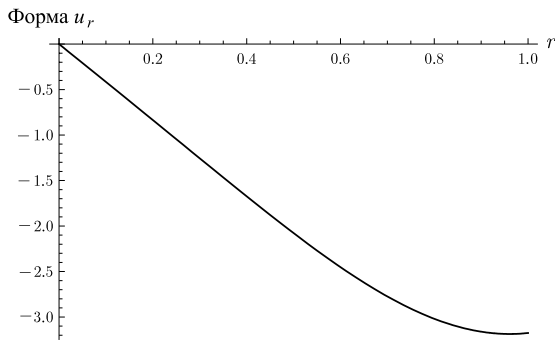


Рис. 28. Профиль формы бегущей волны радиального перемещения u_r ($n = 2$) в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 1.63942$

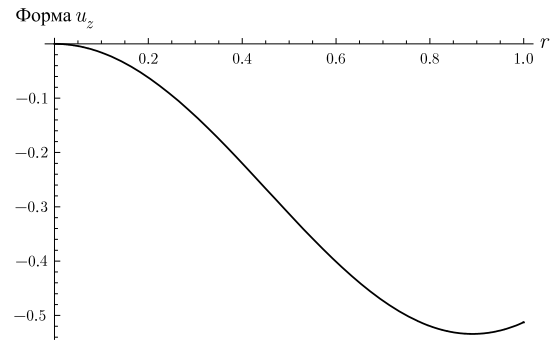


Рис. 29. Профиль формы бегущей волны осевого перемещения u_z ($n = 2$) в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 1.63942$

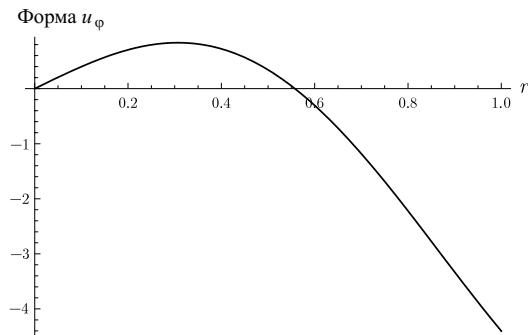


Рис. 30. Профиль формы бегущей волны тангенциального перемещения u_φ ($n = 2$) в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 1.63942$

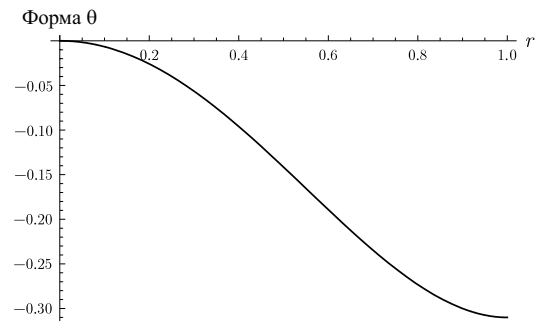


Рис. 31. Профиль формы бегущей температурной волны ($n = 2$) в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 1.63942$



Данная описанная процедура редукции системы линейных алгебраических уравнений (5.1) приводит к системе из двух уравнений $\Delta_{jl}C_l = 0$ ($j, l = 1, 2$), в которой коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= D_{41}, & \Delta_{12} &= D_{42}, \\ \Delta_{21} &= \frac{1}{K_2} \left[D_{11}P + D_{31}K_2 - \frac{S}{K} (D_{11}K_3 + D_{21}K_2) \right], \\ \Delta_{22} &= \frac{1}{K_2} \left[D_{12}P + D_{32}K_2 - \frac{S}{K} (D_{12}K_3 + D_{22}K_2) \right], \end{aligned}$$

где для сокращения записи формул были введены следующие обозначения:

$$P = D_{34}D_{55} - D_{35}D_{53}, S = D_{55}(D_{14}D_{33} - D_{13}D_{34}) + D_{53}(D_{13}D_{35} + D_{15}D_{34} - D_{14}D_{35} - D_{15}D_{33}).$$

Ясно, что частотное уравнение будет иметь вид $\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{21}\Delta_{12} = 0$. Корни этого уравнения при заданной частоте будут определять волновые числа связанных термоупругих волн с произвольным номером окружной гармоники n .

Заключая эту часть исследования, сделаем несколько замечаний относительно редукции к осесимметричному случаю общих формул данного раздела работы. Осевая симметрия характеризуется тем, что $n = 0$, $C_3 + C_4 = 0$, $C_5 = 0$, и имеется всего три независимых постоянных $C_1, C_2, C_3 - C_4$. Для элементов D_{jl} при $n = 0$ получаются более простые выражения

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_1^2 - g^2) \{ p_1^2 I_0(p_1) - p_1 I_1(p_1) \} + \\ &+ \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_1^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \{ -k^2 I_0(p_1) + p_1 I_1(p_1) \} - s^2(k^2 - p_1^2) I_0(p_1), \\ D_{12} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_2^2 - g^2) \{ p_2^2 I_0(p_2) - p_2 I_1(p_2) \} + \\ &+ \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_2^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \{ -k^2 I_0(p_2) + p_2 I_1(p_2) \} - s^2(k^2 - p_2^2) I_0(p_2), \\ D_{13} &= \mp(2ik) \frac{1}{k^2 - q_2^2} \{ q_2 I_0(q_2) - I_1(q_2) \}, & D_{14} &= -D_{13}, & D_{15} &= 0, \\ D_{21} &= 0, & D_{22} &= 0, & D_{23} &= \pm(ik) \{ q_2 I_0(q_2) - 2I_1(q_2) \}, \\ D_{24} &= D_{23}, & D_{25} &= -q_2^2 I_0(q_2) + 2q_2 I_1(q_2), \\ D_{31} &= \pm(2ik)(p_1^2 - g^2) p_1 I_1(p_1), & D_{32} &= \pm(2ik)(p_2^2 - g^2) p_2 I_1(p_2), \\ D_{33} &= (k^2 + q_2^2) I_1(q_2), & D_{34} &= -D_{33}, & D_{35} &= 0, \\ D_{41} &= (k^2 - p_1^2) p_1 I_1(p_1), & D_{42} &= (k^2 - p_2^2) p_2 I_1(p_2), & D_{43} &= 0, & D_{44} &= 0, & D_{45} &= 0, \\ D_{51} &= 0, & D_{52} &= 0, & D_{53} &= q_2, & D_{54} &= q_2, & D_{55} &= \pm(ik). \end{aligned}$$

Пятое и второе уравнения системы (5.1) удовлетворяются тождественно в силу условий $C_3 + C_4 = 0$ и $C_5 = 0$, и структуры коэффициентов D_{jl} . Следовательно, остается ровно три уравнения относительно величин $C_1, C_2, C_3 - C_4$, которые образуют систему линейных алгебраических уравнений с определителем

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \\ D_{41} & D_{42} & 0 \end{vmatrix},$$

элементы которого вычисляются по только что данным упрощенным формулам.



6. ПЕРЕХОД К ЧИСТО УПРУГИМ ВОЛНАМ В СООТНОШЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Покажем как может быть осуществлен переход к чисто упругому случаю от уравнений гиперболической связанной термоупругости, описывающих распространение гармонических термоупругих волн в цилиндрическом волноводе. При этом, помимо волн произвольного азимутального порядка, отдельно будут рассматриваться осесимметричный случай, т.е. продольные волны с нулевым азимутальным порядком, и случай изгибных волн, которым соответствует азимутальный порядок n , равный единице.

Для простоты сначала ограничимся осесимметричным случаем, т.е. продольными волнами с нулевым азимутальным числом n . Прежде всего заметим, что поставленная задача будет выполнена, если в соотношениях гиперболической термоупругости, выведенных для осесимметричного случая, удалить температурное граничное условие и совершить предельный переход, полагая

$$s \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty, \quad c_1 \rightarrow c_l, \quad c_2 \rightarrow \infty, \quad p_1^2 \rightarrow q_1^2, \quad p_2^2 \rightarrow k^2, \quad g^2 \rightarrow k^2. \quad (6.1)$$

Поскольку наибольший интерес представляет собой частотное уравнение, то мы сразу же преобразуем систему граничных условий на боковой поверхности волновода (4.6), учитывая (6.1) и отбрасывая третье уравнение системы (4.6), так как оно как раз и задает граничное условие для градиента температуры. В результате приходим к следующей системе двух линейных алгебраических уравнений, связывающей постоянные C_1 и $C_3 - C_4$:

$$\begin{aligned} & -(k^2 - q_2^2)(k^2 - q_1^2)q_1(q_1 I_0(q_1) - I_1(q_1))C_1 \mp (ik)(k^2 - q_2^2)(q_2 I_0(q_2) - I_1(q_2))(C_3 - C_4) + \\ & + (2q_1^2 - q_2^2 - k^2) \left(-(k^2 - q_1^2)q_1 I_1(q_1)C_1 \mp (ik)(C_3 - C_4)I_1(q_2) \right) - \\ & - (2q_1^2 - q_2^2 - k^2) \left(-k^2(k^2 - q_1^2)I_0(q_1)C_1 \mp (ik)(C_3 - C_4)q_2 I_0(q_2) \right) = 0, \\ & \mp (2ik)(k^2 - q_1^2)q_1 I_1(q_1)C_1 + (k^2 + q_2^2)I_1(q_2)(C_3 - C_4) = 0. \end{aligned}$$

Формируя определитель D из коэффициентов полученной системы уравнений, произведем необходимые преобразования и выпишем его элементы

$$\begin{aligned} D_{11} &= (q_1^2 - k^2)^2 \left(-(q_2^2 + k^2)I_0(q_1) + 2q_1 I_1(q_1) \right), \\ D_{12} &= \pm (2ik)(q_1^2 - k^2) (q_2 I_0(q_2) - I_1(q_2)), \\ D_{21} &= \pm (2ik)(q_1^2 - k^2)q_1 I_1(q_1), \quad D_{22} = (q_2^2 + k^2)I_1(q_2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Частотное уравнение $D = 0$ поэтому получается в виде

$$(q_2^2 + k^2)[2q_1 I_1(q_1) - (q_2^2 + k^2)I_0(q_1)]I_1(q_2) + 4k^2 q_1 [q_2 I_0(q_2) - I_1(q_2)]I_1(q_1) = 0.$$

Последнее уравнение, в свою очередь, можно привести к

$$I_1(q_1)I_1(q_2) \left\{ (q_2^2 + k^2)(2q_1^2 - (q_2^2 + k^2)I(q_1)) + 4k^2 q_1^2 (I(q_2) - 1) \right\} = 0. \quad (6.3)$$

Здесь еще раз вводится ранее уже использованная нами функция

$$I(\xi) = \frac{\xi I_0(\xi)}{I_1(\xi)} = 2 + \frac{\xi^2}{2^2} - \frac{\xi^4}{2^5 \cdot 3} + \frac{\xi^6}{2^9 \cdot 3} - \frac{\xi^8}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{13\xi^{10}}{2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5} - \dots \quad (6.4)$$

Ей, как правило, уделяется внимание в руководствах по теории функций Бесселя (см., например: Грей Э., Мэтьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. С. 203–205). Данное разложение $I(\xi)$ в ряд по степеням переменной ξ легко преобразуется в непрерывную дробь, которую также можно эффективно использовать при расчете ее значений.

После отбрасывания множителей $I_1(q_1)$, $I_1(q_2)$ уравнение (6.3) приобретает довольно простой вид

$$(q_2^2 + k^2) \left(2q_1^2 - (q_2^2 + k^2)I(q_1) \right) + 4k^2 q_1^2 (I(q_2) - 1) = 0. \quad (6.5)$$



Это известное уравнение Похгаммера – Кри [9, 10]; его можно также представить в форме

$$2q_1(q_2^2 - k^2)I_1(q_1)I_1(q_2) - (q_2^2 + k^2)^2 I_0(q_1)I_1(q_2) + 4k^2 q_1 q_2 I_1(q_1)I_0(q_2) = 0. \quad (6.6)$$

Вводя «поперечные» волновые числа (transverse wavenumbers)

$$g_1^2 = -q_1^2, \quad g_2^2 = -q_2^2 \quad (6.7)$$

и учитывая хорошо известные соотношения между функциями Бесселя

$$I_0(i\xi) = J_0(\xi), \quad I_1(i\xi) = -\frac{J_1(\xi)}{i}, \quad (6.8)$$

уравнение (6.6) можно также привести к виду

$$2g_1(g_2^2 + k^2)J_1(g_1)J_1(g_2) - (g_2^2 - k^2)^2 J_0(g_1)J_1(g_2) - 4k^2 g_1 g_2 J_1(g_1)J_0(g_2) = 0. \quad (6.9)$$

Именно в этой форме уравнение Похгаммера – Кри чаще всего встречается в современной научной литературе [16, р. 214–225; 17, р. 464–474].

Обозначая через $E(k, \omega)$ левую часть уравнения (6.9) и учитывая (черта сверху обозначает комплексное сопряжение) $E(k, \omega) = E(-k, \omega)$, $\overline{E(k, \omega)} = E(\bar{k}, \omega)$, заключаем, что корни уравнения Похгаммера – Кри $E(k, \omega) = 0$ находятся парами $k, -k$ (если они вещественные или чисто мнимые) и четверками $k, -k, \bar{k}, -\bar{k}$ (если они обладают и вещественной, и мнимой частью, отличными от нуля).

Рассмотрим общий случай, т.е. примем, что азимутальное число n произвольно. Граничные условия на боковой поверхности волновода (3.7) и условие калибровки (3.8) после отбрасывания граничного условия для градиента температуры позволяют выписать четыре линейных уравнения для нахождения четырех постоянных C_1, C_3, C_4, C_5 :

$$\begin{aligned} & -(q_2^2 - k^2) \{ ((q_1^2 - n + n^2)I_n(q_1) - q_1 I_{n+1}(q_1)) (q_1^2 - k^2)C_1 + (nq_2 I_{n+1}(q_2) + n(n-1)I_n(q_2))C_5 \mp \\ & \mp (ik) (q_2^{-1}(-2n + 2n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + (n-1)I_{n+1}(q_2)) C_3 \pm (ik)(q_2 I_n(q_2) - (n+1)I_{n+1}(q_2))C_4 \} + \\ & + (2q_1^2 - q_2^2 - k^2) \{ ((n - n^2 - k^2)I_n(q_1) + q_1 I_{n+1}(q_1)) (q_1^2 - k^2)C_1 \pm \\ & \pm (ik) (q_2^{-1}(2n^2 - 2n + q_2^2)I_n(q_2) + (n-1)I_{n+1}(q_2)) C_3 \pm \\ & \pm (ik)((n+1)I_{n+1}(q_2) - q_2 I_n(q_2))C_4 + ((n - n^2)I_n(q_2) - nq_2 I_{n+1}(q_2))C_5 \} = 0, \quad (6.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2(q_1^2 - k^2) ((n - n^2)I_n(q_1) - nq_1 I_{n+1}(q_1)) C_1 \pm (ik) (q_2^{-1}(-4n + 4n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + \\ & + 2(n-1)I_{n+1}(q_2)C_3 \pm (ik)(q_2 I_n(q_2) - 2(n+1)I_{n+1}(q_2))C_4 + \\ & + ((2n - 2n^2 - q_2^2)I_n(q_2) + 2q_2 I_{n+1}(q_2))C_5 = 0, \quad (6.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pm (2ik)(q_1^2 - k^2)(nI_n(q_1) + q_1 I_{n+1}(q_1))C_1 + ((nq_2 + 2nk^2 q_2^{-1})I_n(q_2) + \\ & + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2)C_3 - (nq_2 I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2))C_4 \pm (ik)nI_n(q_2)C_5 = 0, \quad (6.12) \end{aligned}$$

$$(C_3 + C_4)q_2 \pm (ik)C_5 = 0. \quad (6.13)$$

Ясно, что частотный определитель будет иметь размерность 4×4 , а его элементы вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{11} &= -(q_1^2 - k^2)(q_2^2 - k^2) ((q_1^2 - n + n^2)I_n(q_1) - q_1 I_{n+1}(q_1)) + \\ & + (2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(q_1^2 - k^2) ((n - n^2 - k^2)I_n(q_1) + q_1 I_{n+1}(q_1)), \\ D_{12} &= \pm (ik)(q_2^2 - k^2) (q_2^{-1}(-2n + 2n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + (n-1)I_{n+1}(q_2)) \pm \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \pm(ik)(2q_1^2 - q_2^2 - k^2) (q_2^{-1}(2n^2 - 2n + q_2^2)I_n(q_2) + (n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{13} = & \mp(ik)(q_2^2 - k^2)(q_2I_n(q_2) - (n + 1)I_{n+1}(q_2)) \pm (ik)(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)((n + 1)I_{n+1}(q_2) - q_2I_n(q_2)), \\
 & D_{14} = 2(q_1^2 - k^2)((n - n^2)I_n(q_2) - nq_2I_{n+1}(q_2)), \\
 & D_{21} = 2(q_1^2 - k^2) ((n - n^2)I_n(q_1) - nq_1I_{n+1}(q_1)), \\
 & D_{22} = \pm(ik) (q_2^{-1}(-4n + 4n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + 2(n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 & D_{23} = \pm(ik)(q_2I_n(q_2) - 2(n + 1)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{24} = (2n - 2n^2 - q_2^2)I_n(q_2) + 2q_2I_{n+1}(q_2), \\
 D_{31} = & \pm(2ik)(q_1^2 - k^2)(nI_n(q_1) + q_1I_{n+1}(q_1)), \quad D_{32} = (nq_2 + 2nk^2q_2^{-1})I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2), \\
 & D_{33} = -(nq_2I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{34} = \pm(ik)nI_n(q_2), \\
 & D_{41} = 0, \quad D_{42} = q_2, \quad D_{43} = q_2, \quad D_{44} = \pm(ik).
 \end{aligned}$$

Не изменяя корней частотного уравнения, можно несколько упростить приведенные выражения для элементов определителя, опуская в элементах первого столбца множитель $q_1^2 - k^2$,

$$\begin{aligned}
 D_{11} = & -(q_2^2 - k^2) ((q_1^2 - n + n^2)I_n(q_1) - q_1I_{n+1}(q_1)) + (2q_1^2 - q_2^2 - k^2)((n - n^2 - k^2)I_n(q_1) + \\
 & + q_1I_{n+1}(q_1)) = (q_1^2 - k^2) (2q_1I_{n+1}(q_1) - (2(n^2 - n) + q_2^2 + k^2)I_n(q_1)), \\
 D_{12} = & \pm(ik)(q_2^2 - k^2) (q_2^{-1}(-2n + 2n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + (n - 1)I_{n+1}(q_2)) \pm \\
 & \pm(ik)(2q_1^2 - q_2^2 - k^2) (q_2^{-1}(2n^2 - 2n + q_2^2)I_n(q_2) + (n - 1)I_{n+1}(q_2)) = \\
 & = \pm 2(ik)(q_1^2 - k^2) (q_2^{-1}(-2n + 2n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + (n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{13} = & \mp(ik)(q_2^2 - k^2)(q_2I_n(q_2) - (n + 1)I_{n+1}(q_2)) \pm (ik)(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)((n + 1)I_{n+1}(q_2) - q_2I_n(q_2)) = \\
 & = \pm 2(ik)(q_1^2 - k^2)((n + 1)I_{n+1}(q_2) - q_2I_n(q_2)), \\
 D_{14} = & 2(q_1^2 - k^2)((n - n^2)I_n(q_2) - nq_2I_{n+1}(q_2)), \quad D_{21} = 2((n - n^2)I_n(q_1) - nq_1I_{n+1}(q_1)), \\
 & D_{22} = \pm(ik) (q_2^{-1}(-4n + 4n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + 2(n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 & D_{23} = \pm(ik)(q_2I_n(q_2) - 2(n + 1)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{24} = (2n - 2n^2 - q_2^2)I_n(q_2) + 2q_2I_{n+1}(q_2), \\
 D_{31} = & \pm 2(ik)(nI_n(q_1) + q_1I_{n+1}(q_1)), \quad D_{32} = (nq_2 + 2nk^2q_2^{-1})I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2), \\
 & D_{33} = -(nq_2I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{34} = \pm(ik)nI_n(q_2), \\
 & D_{41} = 0, \quad D_{42} = q_2, \quad D_{43} = q_2, \quad D_{44} = \pm(ik).
 \end{aligned}$$

Из первой строки определителя снова можно вынести множитель $q_1^2 - k^2$. В итоге получаем

$$\begin{aligned}
 D_{11} = & 2q_1I_{n+1}(q_1) - (2(n^2 - n) + q_2^2 + k^2)I_n(q_1), \\
 D_{12} = & \pm 2(ik) (q_2^{-1}(-2n + 2n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + (n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{13} = & \pm 2(ik)((n + 1)I_{n+1}(q_2) - q_2I_n(q_2)), \quad D_{14} = 2((n - n^2)I_n(q_2) - nq_2I_{n+1}(q_2)), \\
 & D_{21} = 2((n - n^2)I_n(q_1) - nq_1I_{n+1}(q_1)), \\
 & D_{22} = \pm(ik) (q_2^{-1}(-4n + 4n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + 2(n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{23} = & \pm(ik)(q_2I_n(q_2) - 2(n + 1)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{24} = (2n - 2n^2 - q_2^2)I_n(q_2) + 2q_2I_{n+1}(q_2), \\
 & D_{31} = \pm 2(ik)(nI_n(q_1) + q_1I_{n+1}(q_1)), \\
 & D_{32} = (nq_2 + 2nk^2q_2^{-1})I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2), \\
 D_{33} = & -(nq_2I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{34} = \pm(ik)nI_n(q_2),
 \end{aligned}$$



$$D_{41} = 0, \quad D_{42} = q_2, \quad D_{43} = q_2, \quad D_{44} = \pm(ik).$$

Более простые формулы получаются, если перейти к исследованию изгибной упругой волны первого азимутального порядка $n = 1$. Тогда элементы частотного определителя будут иметь вид

$$\begin{aligned} D_{11} &= (q_1^2 - k^2)(2q_1 I_2(q_1) - (q_2^2 + k^2)I_1(q_1)), & D_{12} &= \pm 2(ik)(q_1^2 - k^2)q_2 I_1(q_2), \\ D_{13} &= \pm 2(ik)(q_1^2 - k^2)(2I_2(q_2) - q_2 I_1(q_2)), & D_{14} &= -2(q_1^2 - k^2)q_2 I_2(q_2), & D_{21} &= -2q_1 I_2(q_1), \\ D_{22} &= \pm(ik)q_2 I_1(q_2), & D_{23} &= \pm(ik)(q_2 I_1(q_2) - 4I_2(q_2)), & D_{24} &= -q_2^2 I_1(q_2) + 2q_2 I_2(q_2), \\ D_{31} &= \pm 2(ik)(I_1(q_1) + q_1 I_2(q_1)), & D_{32} &= (q_2 + 2k^2 q_2^{-1})I_1(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_2(q_2), \\ D_{33} &= -(q_2 I_1(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_2(q_2)), & D_{34} &= \pm(ik)I_1(q_2), \\ D_{41} &= 0, & D_{42} &= q_2, & D_{43} &= q_2, & D_{44} &= \pm(ik). \end{aligned}$$

Далее можно устранить функции Бесселя мнимого аргумента второго порядка на основании формулы $I_2(\xi) = -\frac{2}{\xi}I_1(\xi) + I_0(\xi)$. Затем выполним следующие преобразования частотного определителя:

- 1) второй столбец определителя умножим на q_2 ;
- 2) третий столбец определителя умножим на q_2 ;
- 3) из первой строки определителя вынесем множитель $q_1^2 - k^2$;
- 4) из первого столбца определителя вынесем множитель $I_1(q_1)$;
- 5) из второго столбца определителя вынесем множитель $I_1(q_2)$;
- 6) из третьего столбца определителя вынесем множитель $I_1(q_2)$;
- 7) из четвертого столбца определителя вынесем множитель $I_1(q_2)$;
- 8) четвертую строку определителя умножим на $I_1(q_2)$.

Вводя обозначение $I(\xi) = \xi I_0(\xi)/I_1(\xi)$, перейдем к «эквивалентному» определителю:

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{vmatrix},$$

в четвертой строке которого располагаются элементы $D_{41} = 0, D_{42} = q_2^2, D_{43} = q_2^2, D_{44} = \pm(ik)$.

Остальные элементы «эквивалентного» определителя вычисляются в виде

$$\begin{aligned} D_{11} &= 2I(q_1) - 4 - q_2^2 - k^2, & D_{12} &= \pm 2(ik)q_2^2, & D_{13} &= \pm 2(ik)(2I(q_2) - 4 - q_2^2), \\ D_{14} &= -2(I(q_2) - 2), & D_{21} &= -2(I(q_1) - 2), & D_{22} &= \pm(ik)q_2^2, \\ D_{23} &= \pm(ik)(-4I(q_2) + q_2^2 + 8), & D_{24} &= 2I(q_2) - 4 - q_2^2, & D_{31} &= \pm 2(ik)(I(q_1) - 1), \\ D_{32} &= -q_2^2 + (q_2^2 + k^2)I(q_2), & D_{33} &= q_2^2 + 2k^2 - (q_2^2 + k^2)I(q_2), & D_{34} &= \pm(ik). \end{aligned}$$

Разложим частотный определитель по четвертой строке $D = D_2 - D_3 + D_4$, где

$$\begin{aligned} D_2 &= q_2^2 \left(-2I^2(q_2) (k^2 + q_2^2)^2 + I(q_2) (4k^4 + k^2 (2 + k^2 + 10I(q_1))) q_2^2 + 2 (5 + k^2 - I(q_1)) q_2^4 + q_2^6 \right) - \\ &\quad - q_2^2 (k^2 (-8 + k^2) - 2 (-4 + k^2) q_2^2 + q_2^4 + 2I(q_1) (9k^2 + (-1 + 2k^2) q_2^2)), \\ D_3 &= -D_2, \\ D_4 &= 2k^2 \left(2I^2(q_2) (k^2 + q_2^2)^2 - I(q_2) (4k^4 + k^2 (2 + k^2 + 10I(q_1))) q_2^2 + 2 (5 + k^2 - I(q_1)) q_2^4 + q_2^6 \right) + \\ &\quad + q_2^2 (k^2 (-8 + k^2) - 2 (-4 + k^2) q_2^2 + q_2^4 + 2I(q_1) (9k^2 + (-1 + 2k^2) q_2^2)). \end{aligned}$$



Следовательно, частотное уравнение в случае $n = 1$ после ряда преобразований представляется в следующем виде:

$$D = 2D_2 + D_4 = 2(k^2 - q_2^2) \times \\ \times \left(2I^2(q_2)(k^2 + q_2^2)^2 - I(q_2)(4k^4 + k^2(2 + k^2 + 10I(q_1))q_2^2 + 2(5 + k^2 - I(q_1))q_2^4 + q_2^6) + \right. \\ \left. + q_2^2(k^2(-8 + k^2) - 2(-4 + k^2)q_2^2 + q_2^4 + 2I(q_1)(9k^2 + (-1 + 2k^2)q_2^2)) \right) = 0,$$

или, опустив множитель $2(k^2 - q_2^2)$,

$$k^2(-8 + k^2 + 18I(q_1))q_2^2 + 2(4 - k^2 + (-1 + 2k^2)I(q_1))q_2^4 + q_2^6 + 2I^2(q_2)(k^2 + q_2^2)^2 - \\ - I(q_2)(4k^4 + k^2(2 + k^2 + 10I(q_1))q_2^2 + 2(5 + k^2 - I(q_1))q_2^4 + q_2^6) = 0.$$

Окончательно частотное уравнение в случае $n = 1$ можно выписать в форме

$$A_1 I(q_1) + A_2 I(q_2) + A_3 I(q_1) I(q_2) + A_4 I^2(q_2) + A_5 = 0, \quad (6.14)$$

где

$$A_1 = 2q_2^2 [k^2(9 + 2q_2^2) - q_2^2], \quad A_2 = - [4k^4 + k^2(2 + k^2)q_2^2 + 2(5 + k^2)q_2^4 + q_2^6], \\ A_3 = 2q_2^2(q_2^2 - 5k^2), \quad A_4 = 2(k^2 + q_2^2)^2, \quad A_5 = q_2^2 [k^2(k^2 - 8) + 2(4 - k^2)q_2^2 + q_2^4].$$

С точностью до обозначений частотное уравнение (6.14) совпадает с уравнением, данным в книге [16, p. 224].

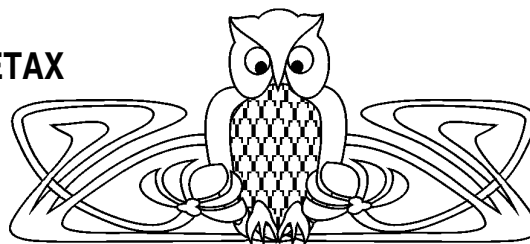
Библиографический список

1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
3. Joseph D.D. Heat waves // Rev. Modern Physics. 1989. V. 61, № 1. P. 41–73.
4. Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Therm. Stress. 1992. V. 15. P. 253–264.
5. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. V. 31. P. 189–208.
6. Bargmann S., Steinmann P. Theoretical and computational aspects of non-classical thermoelasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2006. V. 196. P. 516–527.
7. Kalpakides V.K., Maugin G.A. Canonical formulation and conservation laws of thermoelasticity without dissipation // Reports in Mathematical Physics. 2004. V. 53. P. 371–391.
8. Puri P., Jordan P.M. On the propagation of plane waves in type-III thermoelastic media // Proc. R. Soc. Lond. A. 2004. V. 460. P. 3203–3221.
9. Pochhammer L. Uber Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder // J. reine angew. Math. 1876. V. 81. P. 324–336.
10. Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates: Their solution and application // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1889. V. 14. P. 250–369.
11. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. М.: Физматлит, 1961. 220 с.
12. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 192 с.
13. Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. N.Y.: Dover Publications, 1944. 644 p.
14. Bancroft D. The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars // Phys. Rev. 1941. V. 59. P. 588–593.
15. Hudson G.E. Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // Phys. Rev. 1943. V. 63. P. 46–51.
16. Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. Amsterdam; N.Y.; Oxford.: North-Holland Publishing Company, 1978. 618 p.
17. Graff K.F. Wave motion in elastic solids. N.Y.: Dover Publications, 1991. 649 p.



УДК 539.376

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В РАСЧЕТАХ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ (обзор)



А.М. Локощенко

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова
E-mail: loko@imec.msu.ru

Критерии сопротивления металлов длительному разрушению при сложном напряженном состоянии основаны на концепции так называемого эквивалентного напряжения σ_e . При этом основное внимание уделяется установлению зависимости эквивалентного напряжения от главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и зависимости времени до разрушения от величины σ_e .

Приведен детальный обзор основных зависимостей $\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, предложенных различными отечественными и зарубежными учеными. Отдельно рассмотрены эквивалентные напряжения σ_e , зависящие только от главных напряжений, и σ_e , дополнительно зависящие от констант, характеризующих условия испытаний. С помощью статистических методов получены выражения σ_e для различных видов напряженных состояний.

Ключевые слова: длительная прочность, металлы, сложное напряженное состояние, критерии, эквивалентные напряжения, обзор, статистические методы.

The Equivalent Stresses at Calculation of Creep Rupture of Metals Under Complex Stress State (Review)

A.M. Lokoshchenko

Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University
E-mail: loko@imec.msu.ru

The criteria of creep rupture of metals under complex stress state are based on conception of equivalent stress σ_e . The basic attention is given to determination of dependence of equivalent stress from the main stresses $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ and to determination of dependence of rupture time from value σ_e .

The detailed review of dependencies $\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ is described, which were proposed by domestic and foreign scientists. The equivalent stresses σ_e , which are depended only on main stresses, and σ_e , which are depended also on the additional constants, are considered separately. By using of statistical methods the formulas for σ_e are obtained for various kinds of complex stress states.

Key words: creep rupture, metals, complex stress state, criteria, equivalent stresses, review, statistical methods.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих практических случаях ответственные конструкции эксплуатируются в условиях высокотемпературной ползучести при сложном напряженном состоянии. Основной проблемой при расчетах работы таких конструкций является недопущение их разрушения, поэтому особое внимание приобретает проблема длительной прочности металлов, из которых изготовлены конструкции. При исследовании этой проблемы следует различать два подхода. Один из них — кинетический — основан на использовании введенного Л.М. Качановым и Ю.Н. Работновым параметра поврежденности и разработанной впоследствии Ю.Н. Работновым [1] кинетической теории ползучести и длительной прочности. Второй подход — критериальный — основан на установлении критериев сопротивления металлов длительному разрушению, основанных на концепции так называемого эквивалентного напряжения. При этом основное внимание уделяется установлению зависимости эквивалентного напряжения σ_e от главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) при различных видах сложного напряженного состояния и зависимости времени разрушения t^* от σ_e . В данной статье приведены разные виды эквивалентных напряжений $\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, предложенные различными учеными, и обсуждается их эффективность при описании известных экспериментальных данных.

Большинство экспериментальных данных по длительной прочности металлов получено на основе результатов испытаний в условиях одноосного растяжения. Однако при оценке работоспособности элементов конструкций, находящихся в сложном напряженном состоянии, необходимы подходы, учитывающие неодноосность нагружения. Проведение высокотемпературных испытаний в условиях сложного напряженного состояния связано со значительными техническими трудностями, поэтому в настоящее время известно ограниченное количество надежных опытных данных. Типичными испытаниями металлов при сложном напряженном состоянии являются испытания трубчатых образцов



при комбинации растягивающей силы P с крутящим моментом M или внутренним давлением q . Анализ известных экспериментальных исследований длительной прочности металлов в рассматриваемых условиях можно найти в обзорах [2–5] и монографиях [6–8].

1. БАЗОВЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Систематическое исследование длительной прочности металлов началось в 40-х годах XX века работами Джонсона (А.Е. Johnson) и его учеников. В обзоре [2] Джонсон описал особенности немногочисленных к тому времени экспериментальных и теоретических исследований. При этом он обратил внимание на структурные изменения, происходящие в металлах в процессе их испытаний на ползучесть.

В обзоре [2] приводится анализ испытаний различных материалов при рабочих температурах. Эти испытания проводились на тонкостенных трубчатых образцах при комбинации растягивающей силы P и крутящего момента M . В качестве возможных видов эквивалентных напряжений σ_e рассматривались максимальное главное напряжение $\sigma_{\max} = \sigma_1$, интенсивность касательных напряжений σ_u , максимальная разность главных напряжений, гидростатическое давление и другие комбинации главных напряжений. В качестве зависимости времени до разрушения t^* от эквивалентного напряжения σ_e рассматривались степенная и экспоненциальная функции. Многие из анализируемых в [2] экспериментальных серий заключались в проведении всего 4–5 опытов на одном материале при сложном напряженном состоянии. В качестве истинного эквивалентного напряжения принималось то выражение $\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, при котором экспериментальные точки приводили к визуально определяемому наименьшему суммарному разбросу относительно теоретической кривой длительной прочности или хотя бы они имели монотонный характер. Графический анализ экспериментальных данных в координатах $\lg \sigma_e - \lg t^*$ или $\sigma_e - \lg t^*$ привел Джонсона к выводу, что истинным эквивалентным напряжением σ_e для большинства исследованных металлов следует считать максимальное главное напряжение σ_1 .

Следует отметить систематическое исследование длительной прочности металлов при одновременном действии нормального σ и касательного τ напряжений в работах В.П. Сдобырева [9–10]. В работе [9] он представил анализ результатов проведенных им испытаний никелевого сплава ЭИ-437Б при 700°C. Этот анализ показал, что графики зависимости $\lg t^*$ от σ_1 имеют вид прямых линий, различных для одноосного растяжения, чистого кручения и их комбинаций. В.П. Сдобырев решил подобрать такое эквивалентное напряжение σ_e , чтобы можно было экспериментальные точки расположить в координатах $\sigma_e - \lg t^*$ вдоль одной прямой. Для описания всех трех видов нагрузок в результате рассмотрения 10 видов эквивалентного напряжения им предложена следующая эмпирическая зависимость:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 1.366\tau^2}.$$

В работе [10] В.П. Сдобыревым предложен принципиально новый вид эквивалентного напряжения σ_e , который впоследствии использовали и в настоящее время используют многие ученые. Поскольку для разрушения с рассеянным распространением микротрещин в качестве эквивалентного напряжения часто принимается σ_1 , а для локализованного разрушения — σ_u , то В.П. Сдобырев в качестве σ_e принял их полусумму

$$\sigma_e = 0.5(\sigma_1 + \sigma_u).$$

С помощью этого σ_e им в работе [10] были обработаны результаты семи серий собственных экспериментов на различных металлах и сплавах. Обработка результатов испытаний с помощью этого эквивалентного напряжения σ_e привела к более точному соответствию с опытами, чем обработка с помощью выражений $\sigma_e = \sigma_1$ или $\sigma_e = \sigma_u$. Кроме того, В.П. Сдобырев в работе [10] обработал результаты опытов, проведенных другими учеными, и пришел к выводу, что предложенное им выра-



жение σ_e описывает опытные данные, полученные на различных материалах при различных видах напряженного состояния, лучше, чем $\sigma_e = \sigma_1$.

Ниже в качестве базовых рассматриваются четыре вида эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{e1} = \sigma_1, \quad \sigma_{e2} = \sigma_u, \quad \sigma_{e3} = 0.5(\sigma_1 + \sigma_u), \quad \sigma_{e4} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}.$$

2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ С ОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ КОНСТАНТОЙ

Если ни одно из рассмотренных известных простейших выражений эквивалентных напряжений σ_e , зависящих только от величин главных напряжений ($\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$), при описании испытаний на длительную прочность не приводит к удовлетворительному соответствию экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения, то следует использовать усложненные выражения σ_e с константами, характеризующими условия испытаний данного материала.

Сначала рассмотрим усложненные выражения с одной константой материала.

Наиболее простым и естественным обобщением рассматриваемых соотношений является соотношение, предложенное А.А. Лебедевым [11], $\sigma_{e5} = \chi\sigma_u + (1-\chi)\sigma_1$ с одной константой материала χ . При присвоении χ значений 0, 0.5 и 1 из соотношения для σ_{e5} получаем соответственно σ_{e1} , σ_{e3} и σ_{e2} .

В монографии Г.С. Писаренко и А.А. Лебедева [6] описана методика определения искомого параметра (назовем его χ_0). Она основана на визуальной обработке результатов двух серий опытов, проведенных при разных напряженных состояниях. Там же приведены результаты обработки трех серий опытов, проведенных различными авторами, с целью определения значений χ_0 для соответствующих материалов при температурах испытаний.

В работах [12, 13] И.И. Трунин идет по пути усложнения выражения σ_{e3} для эквивалентного напряжения. В работе [12] им предложена следующая форма σ_e :

$$\sigma_e = 0.5(\sigma_1 + \sigma_u)a \left[1 - \frac{2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{\sigma_1 + \sigma_u} \right],$$

где a — некоторая характеристика материала (константа), зависящая от соотношения свойств при растяжении и сжатии. Там же описана методика определения характеристики a по данным длительной прочности при одноосном растяжении и чистом кручении и приведены результаты обработки конкретных экспериментальных данных с помощью предложенного вида σ_e .

С.Т. Милейко [14] проверял на алюминиевом сплаве целый набор эквивалентных напряжений, он предложил оценивать длительную прочность материалов с помощью следующих выражений σ_e :

$$\sigma_e = \sigma_1^a (\sigma_1 - \sigma_3)^{(1-a)}, \quad \sigma_e = \sigma_1^b \sigma_u^{(1-b)}, \quad \sigma_e = \sigma_1 - \alpha\sigma_u,$$

где a, b, α — константы материала. Он отмечает, что при плоском напряженном состоянии эти выражения несущественно отличаются от известных выражений, разница выявляется только при трехосном растяжении.

Р.Дж. Браун с соавторами [5] подробно описали различные методы проведения испытаний и особенности разрушения образцов в ряде известных серий испытаний, при моделировании результатов этих испытаний они предложили использовать эквивалентное напряжение, совпадающее с σ_e [14], в виде $\sigma_e = \sigma_1^b \sigma_u^{(1-b)}$.

А.М. Локощенко и С.А. Шестериков [15] предложили следующее выражение для σ_e :

$$\sigma_{e6} = \sigma_{\max} - \xi(\sigma_{\min} - |\sigma_{\min}|),$$

выражение σ_{e6} имеет характер кусочно-линейной зависимости от главных напряжений. Эквивалентное напряжение σ_{e6} зависит от максимального и минимального напряжений и не зависит от среднего напряжения. Кусочно-линейная зависимость σ_{e6} от главных напряжений, в отличие от существенно нелинейной зависимости $\sigma_{e5}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, часто приводит к более простым решениям краевых задач.



Е.Р. Голубовский [16] предложил в качестве эквивалентного напряжения σ_e использовать линейную комбинацию среднего напряжения σ_{cp} и интенсивности касательных напряжений σ_u :

$$\sigma_e = \lambda \sigma_u + 3(1 - \lambda) \sigma_{cp}, \quad \sigma_{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Это эквивалентное напряжение, в отличие от многих известных автору данной статьи других видов σ_e , позволяет учитывать различие времен до разрушения при одноосном и равноосном плоском напряженном состоянии в условиях ползучести.

В.П. Голуб [17] приводит подробный обзор критериев длительной прочности изотропных материалов при плоском напряженном состоянии. Сначала рассматриваются 6 различных видов эквивалентных напряжений σ_e , зависящих только от компонент тензора напряжений, и один вид σ_e , имеющий деформационную природу. Затем приведены некоторые эквивалентные напряжения с материальными константами.

Наибольшее внимание в [17] уделяется следующему выражению для σ_e :

$$\sigma_{e7} = \begin{cases} \gamma \sigma_{e4} + (1 - \gamma) \psi & \text{при } \sigma_1 > 0 \geq \sigma_2 = 0 \geq \sigma_3, \\ \alpha \sigma_{e1} + (1 - \alpha) \psi & \text{при } \sigma_1 > \sigma_2 \geq 0, \quad \sigma_3 = 0, \end{cases}$$

$$\psi = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{\left(\frac{2\sigma_3}{\sigma_1}\right)} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2} & \text{при } \sigma_3 \leq 0, \quad \sigma_2 = 0, \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\left(\frac{2\sigma_2}{\sigma_1}\right)} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} & \text{при } \sigma_2 \geq 0, \quad \sigma_3 = 0. \end{cases}$$

Эквивалентное напряжение σ_{e7} представляет собой выражение, записанное только для случая плоского напряженного состояния. В связи с этим во всех расчетах пространственного напряженного состояния, существующего в относительно толстостенных трубах под внутренним давлением, эквивалентное напряжение σ_{e7} не рассматривается.

В работе [18] А.М. Коврижных с соавторами предложили критерий длительной прочности, основанный на критерии Кулона – Мора:

$$t^* = A \sigma_e^{-n}, \quad \sigma_e = \max_{\nu} [|\tau_{\nu}| + \sigma_{\nu} \operatorname{tg} \varphi],$$

здесь τ_{ν} и σ_{ν} – касательное и нормальное напряжения в плоскости с нормалью ν , дополнительная константа φ интерпретируется как угол внутреннего трения.

3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ МАТЕРИАЛЬНЫМИ КОНСТАНТАМИ

R.L. Huddleston [19] проводил испытания нержавеющей стали (стали типа 304) при необычно низкой температуре (320°С). В качестве σ_e предложено громоздкое выражение с двумя материальными константами:

$$\sigma_e = \frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_{cp}) \left[\frac{2\sigma_u}{3(\sigma_1 - \sigma_{cp})} \right]^a \exp \left[b \left(\frac{3\sqrt{3}\sigma_{cp}}{\sqrt{2\sigma_u^2 + (3\sigma_{cp})^2}} - 1 \right) \right].$$

Показано, что описание представленных и других известных экспериментальных данных с помощью предложенного выражения для σ_e приводит к лучшему соответствию теоретических и экспериментальных значений t^* , чем использование выражений $\sigma_e = \sigma_{e2}$ и $\sigma_e = \sigma_{e4}$.

В.А. Маньковский [20, 21] предложил следующие варианты эквивалентного напряжения σ_e с двумя и тремя константами:

$$\sigma_e^{2n} = (\sigma_1^{2n} + \sigma_2^{2n} + \sigma_3^{2n}) - \lambda [(\sigma_1 \sigma_2)^n + (\sigma_2 \sigma_3)^n + (\sigma_3 \sigma_1)^n] \quad \text{при } \sigma_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$\sigma_e^{2n} = \sigma_1^{2n} + \sigma_3^{2n} - \lambda \sigma_1^n \sigma_3^n, \quad \sigma_e^{2n} = \sigma_1^{2n} + \chi^{2n} |\sigma_3|^{2n} + \lambda \chi^n \sigma_1^n |\sigma_3|^n \quad \text{при } \sigma_1 \geq \sigma_2 = 0 \geq \sigma_3.$$

В работах [20, 21] приведено описание известных экспериментальных данных с помощью этих эквивалентных напряжений.



В работах [13, 22, 23, 24] И.И. Трунин, D.R. Hayhurst, G.W. Greenwood, О.Е. Ольховик и Е.О. Ольховик предложили эквивалентные напряжения с тремя константами.

В работе [13] И.И. Трунин предлагает обобщенное выражение для эквивалентного напряжения, содержащее три параметра, которые определяются при трех различных видах напряженного состояния:

$$\sigma_e = 0.5(\sigma_1 + |\sigma_1|)(1 - A)e^{\alpha(\eta-1)} + \sigma_u A e^{\beta(\eta-1)}, \quad \eta = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{0.5(1 - A)(\sigma_1 + |\sigma_1|) + A\sigma_u}.$$

Параметры A , α и β , по мнению И.И. Трунина, отражают влияние микронеоднородности материала на его сопротивление макроскопическому разрушению. В работе [13] приведены также различные выражения введенного упрощения σ_e : 1) $\alpha = \beta$; 2) $\alpha = \beta$, $A = 0.5$; 3) $\beta = 0$.

С помощью этих трех упрощенных вариантов σ_e И.И. Трунин [13] обрабатывает результаты испытаний чугуна.

D.R. Hayhurst [22] в 1972 г. предложил эквивалентное напряжение с тремя константами материала:

$$\sigma_e = \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_{cp} + \gamma\sigma_u.$$

G.W. Greenwood [23] исследовал влияние формы зерен на управляемую межзеренными границами диффузионную ползучесть. В выражении σ_e для рассмотренных им поликристаллов, по его мнению, должны фигурировать три независимых коэффициента, соответствующих размерам трех осей зерна материала.

В работе [24] О.Е. Ольховик и Е.О. Ольховик в качестве критерия длительной прочности рассмотрели формулу С.Н. Журкова:

$$t^* = t_0 \exp \left[\frac{U_0 - \gamma\sigma_e}{RT} \right],$$

в качестве σ_e они использовали предложенное ранее К.Н. Каном и Ю.С. Первушиным [25] для полимеров нелинейную комбинацию σ_{cp} и σ_u с тремя константами, в результате критерий длительной прочности принял следующую форму:

$$t^* = t_0 \exp \left[\frac{U_0 - \alpha\sigma_{cp} - \beta\sigma_{cp}^2 - \gamma\sigma_u}{RT} \right].$$

С помощью этого критерия в работе [24] проведено описание результатов известных испытаний трех марок сталей.

И.А. Биргер [26] предложил рассматривать в качестве σ_e линейную комбинацию интенсивности напряжений и главных напряжений с 4 константами:

$$\sigma_e = \lambda_0\sigma_u + \lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \lambda_3\sigma_3.$$

W. Kissel и F. Blum [27] предложили использовать в качестве σ_e громоздкое линейное выражение с 6 константами:

$$\sigma_e = B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3 + B_4|\sigma_1| + B_5|\sigma_2| + B_6|\sigma_3|.$$

И.И. Трунин [28] рассматривает термосиловую зависимость долговечности жаропрочных материалов с помощью кинетической теории прочности твердых тел. Им предложена зависимость времени до разрушения t^* от компонент тензора напряжений и температуры, она имеет громоздкий характер и достаточно большое количество материальных констант:

$$t^* = AT^n \sigma_k^{-m/T} \exp \left\{ \frac{U_0 - m\lambda_1(\eta - 1) - \gamma\sigma_k \exp[\lambda_2(\eta - 1)]}{RT} \right\},$$

$\sigma_k = 0.5(\sigma_1 + |\sigma_1|)(1 - A_0) + \sigma_u A_0$, $\eta = \eta(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, A , n , m , λ_1 , λ_2 , γ , A_0 — постоянные.

В работе [28] объяснен физический смысл вводимых констант и приведены результаты описания результатов испытаний сталей перлитного и аустенитного классов и ряда никелевых сплавов.



4. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В работе [29] впервые был предложен количественный метод выбора вида эквивалентного напряжения σ_e , в дальнейшем этот подход был продолжен в ряде работ А.М. Локощенко [30, 31, 8]. При этом экспериментальные данные располагались вдоль прямой в логарифмических $\lg t^*$, $\lg \sigma_e$ или полулогарифмических $\lg t^*$, σ_e координатах для каждого эквивалентного напряжения σ_e , за характеристику суммарного расхождения экспериментальных данных относительно этой прямой принималась дисперсия η расстояний опытных точек от этой прямой. Параметры этой прямой определялись из условия минимума дисперсии. В качестве истинного эквивалентного напряжения σ_e принималось то выражение $\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, которому соответствует наименьшее значение дисперсии η . С помощью критерия Фишера анализировался вопрос о том, существенно ли различаются значения η , соответствующие различным видам σ_e . Получено условие, согласно которому для степенной или экспоненциальной зависимости $t^*(\sigma_e)$ в качестве эквивалентного напряжения для конкретной серии испытаний могут выступать один или несколько видов σ_e .

В дальнейшем был проведен анализ известных экспериментальных данных с помощью других мер суммарного расхождения экспериментальных $t_{\text{э}}^*$ и теоретических t^* значений времен разрушения [31, 32, 8]:

$$S = \sum_{k=1}^N \left[\frac{t_{\text{э}}^* - t^*(\sigma_e)}{t_{\text{э}}^* + t^*(\sigma_e)} \right]_k^2 \quad \text{и} \quad W = \sum_{k=1}^N [\lg(t^*/t_{\text{э}}^*)]_k^2,$$

N — количество испытаний в серии. Сравнительный выборочный анализ показал, что все три предложенных метода определения вида σ_e (с помощью η , S и W) приводят к одним и тем же результатам. Меры суммарного расхождения S и W имеют преимущество перед дисперсией η : применение этих мер позволяет определить не только наиболее подходящий для описания конкретной серии испытаний вид эквивалентного напряжения σ_e при заданной функции $t^*(\sigma_e)$, но и наиболее подходящий вид зависимости $t^*(\sigma_e)$ среди нескольких рассмотренных зависимостей $t^*(\sigma_e)$.

При анализе результатов испытаний в [8] в качестве эквивалентного напряжения σ_e рассматриваются четыре комбинации компонент тензора напряжений: максимальное главное напряжение σ_{e1} , интенсивность напряжений σ_{e2} , их полусумма σ_{e3} и разность максимального и минимального напряжений σ_{e4} . В качестве зависимости $t^*(\sigma_e)$ рассматривались степенная, экспоненциальная и четыре варианта дробно-степенной [33] модели длительной прочности.

Проведена статистическая обработка всех известных экспериментальных данных по длительной прочности при сложном напряженном состоянии с использованием различных эквивалентных напряжений σ_e [30–32, 8]. Показано, что условие минимального суммарного разброса с использованием статистических методов позволяет в случае плоского напряженного состояния выделить в качестве эквивалентного напряжения σ_{e3} для описания испытаний в случае $(P + M)$ и σ_{e4} для описания испытаний в случае $(P + q)$. В случае толстостенных труб, находящихся под действием внутреннего давления и дополнительной осевой силы (пространственное напряженное состояние), в качестве σ_e следует принимать осредненное значение σ_{e4} . В работе [32] показано, что в качестве критерия длительной прочности при описании известных экспериментальных данных следует отдавать предпочтение степенной модели и одному из вариантов дробно-степенной модели:

$$t^* = C\sigma_e^{-n} \quad \text{и} \quad t^* = D[(\sigma_b - \sigma_e)/\sigma_e]^m,$$

под σ_b здесь понимается предел кратковременной прочности материала при температуре испытаний.

Отмечено, что в ряде серий испытаний отдельные экспериментальные данные имеют характер случайных выбросов. Рассмотрен количественный метод исключения таких данных из рассмотрения [34]. Применение указанного метода при анализе известных серий испытаний после исключения этих данных не изменило основные выводы относительно выбора σ_e при различных видах сложных напряженных состояний.



При анализе экспериментальных данных с помощью эквивалентных напряжений, дополнительно зависящих от константы, А.М. Локощенко предложил определять значение этой константы с помощью статистического метода.

Было показано, что значения констант, фигурирующих в каждом из σ_{e5} , σ_{e6} и σ_{e7} , практически не зависят от выбора меры суммарного разброса η , S или W .

В работе [35] А.М. Локощенко и В.В. Назаров вместо критерия Фишера использовали другой способ определения предпочтительного эквивалентного напряжения среди четырех базовых видов σ_e . При этом сначала определяется σ_e , приводящее к минимальному значению W

$$W_0 = \min_{1 \leq i \leq 4} W_i,$$

а затем в качестве допустимых принимаются все виды σ_e , которым соответствуют значения W_i , удовлетворяющие неравенству

$$1.0 \leq \frac{W_i}{W_0} \leq 1.1, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Этот метод отбраковки неподходящих видов σ_e и метод, основанный на использовании критерия Фишера, приводят практически к одним и тем же результатам относительно выбора эквивалентного напряжения для различных видов напряженного состояния.

Следует отметить, что все предложенные в разд. 2–3 виды эквивалентных напряжений характеризуются громоздкими выражениями. В связи с этим большинство этих видов редко используется для описания конкретных экспериментальных данных.

В [8] показано, что применение усложненных эквивалентных напряжений $\sigma_{e5} - \sigma_{e7}$ для обработки рассмотренных всех известных автору серий испытаний статистически не всегда оправданно: по сравнению с $\sigma_{e1} - \sigma_{e4}$ оно вносит дополнительные вычислительные сложности, которые, однако, не всегда приводят к значительному (с точки зрения критерия Фишера) уменьшению мер суммарного расхождения η , S и W . Поэтому следует рекомендовать при описании длительной прочности в условиях плоского напряженного состояния в качестве эквивалентного напряжения, как правило, использовать σ_{e3} при разных знаках ненулевых главных напряжений и σ_{e4} при одинаковых знаках этих напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-08-00407) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (проект П1123).

Библиографический список

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Johnson A.E. Complex-stress creep of metals // Metallurgical Reviews. 1960. V. 5, № 20. P. 447–506. (Джонсон. Ползучесть металлов при сложном напряжённом состоянии // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1962. № 4. С. 91–146.)
3. Локощенко А.М., Шестериков С.А. Ползучесть // Итоги науки. Сер. Механика. М.: ВИНТИ, 1965. С. 177–227.
4. Шестериков С.А., Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов // Итоги науки и техники. Сер. Механ. деформ. тверд. тела. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 13. С. 3–104.
5. Браун Р.Дж., Лонсдейл Д., Флюитт П. Испытания на длительную прочность при многоосном напряжённом состоянии и анализ данных для жаропрочных сталей // Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Теорет. основы инж. расчетов. 1982. Т. 104, № 4. С. 56–65.
6. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряжённом состоянии. Киев: Наук. думка, 1976. 415 с.
7. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / Под общ. ред. А.А. Лебедева. Киев: Издат. дом «Ин Юре», 2003. 540 с.
8. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ, 2007. 264 с.



9. *Сдобырев В.П.* Длительная прочность сплава ЭИ437Б при сложном напряженном состоянии // Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук. 1958. № 4. С. 92–97.
10. *Сдобырев В.П.* Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии // Изв. АН СССР. Отдел. технических наук. Механика и машиностроение. 1959. № 6. С. 93–99.
11. *Лебедев А.А.* Экспериментальное исследование длительной прочности хромоникелевой стали в условиях двухосного растяжения // Термопрочность материалов и конструкционных элементов. Киев: Наук. думка, 1965. С. 77–83.
12. *Трунин И.И.* Критерий прочности в условиях ползучести при сложном напряженном состоянии // Прикладная механика. 1965. Т. 1, вып. 7. С. 77–83.
13. *Трунин И.И.* Обобщенный критерий сопротивления разрушению материалов при сложном напряженном состоянии // Изв. вузов. Машиностроение. 1968. № 8. С. 50–55.
14. *Милейко С.Т.* Длительная прочность конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228, № 3. С. 562–565.
15. *Локощенко А.М., Шестериков С.А.* Исследование длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности. 1986. № 12. С. 3–8.
16. *Голубовский Е.Р.* Длительная прочность и критерий разрушения при сложном напряженном состоянии сплава ЭИ698ВД // Проблемы прочности. 1984. № 8. С. 11–17.
17. *Голуб В.П.* Критерии длительного разрушения изотропных материалов при плоском напряженном состоянии // Теоретическая и прикладная механика: Науч.-техн. сб. Харьков: Основа, 2002. Вып. 35. С. 3–19.
18. *Коврижных А.М., Барышников В.Д., Мананков А.В., Никитенко А.Ф.* Длительная прочность металлов и уравнения ползучести, основанные на критерии Кулона – Мора // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48, № 6. С. 115–123.
19. *Huddleston R.L.* An improved multiaxial creep-rupture strength criterion // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol. 1985. V. 107, № 4. P. 421–429.
20. *Маньковский В.А.* Длительная прочность сталей при различных напряженных состояниях // Проблемы прочности. 1984. № 1. С. 74–78.
21. *Маньковский В.А.* Критерии повреждаемости и длительной прочности конструкционных материалов // Машиноведение. 1985. № 1. С. 87–94.
22. *Hayhurst D.R.* Creep rupture under multi-axial states of stress // J. of the mechanics and physics of solids. 1972. V. 20, № 6. P. 381–390.
23. *Greenwood G.W.* Grain shape effects on interface-controlled diffusional creep under multiaxial stresses // Acta Met. Et. Mater. 1995. V. 43, № 5. P. 1811–1816.
24. *Ольховик О.Е., Ольховик Е.О.* Долговечность конструкционных материалов при объемном напряженном состоянии // Заводская лаборатория. 1997. Т. 63, № 7. С. 39–45.
25. *Кан К.Н., Первушин Ю.С.* Выбор критерия прочности для жестких терморезистивных пластмасс // Механика полимеров. 1966. № 4. С. 543–549.
26. *Биргер И.А.* Об одном критерии разрушения и пластичности // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1977. № 4. С. 143–150.
27. *Kissel W., Blum F.* Neue Festigkeitshypothese. Schweizerische Technische Zeitschrift. 1965. V. 62, № 32. P. 641–645.
28. *Трунин И.И.* Температурно-силовая зависимость сопротивления разрушению жаропрочных материалов с учетом вида напряженного состояния // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 1995. № 3. С. 53–62.
29. *Локощенко А.М., Мякотин Е.А., Шестериков С.А.* Ползучесть и длительная прочность стали X18N10T в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 4. С. 87–94.
30. *Локощенко А.М.* Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности. 1983. № 8. С. 55–59.
31. *Локощенко А.М.* К выбору критерия длительной прочности при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности. 1989. № 9. С. 3–6.
32. *Локощенко А.М., Назаров В.В., Платонов Д.О., Шестериков С.А.* Анализ критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 2. С. 139–149.
33. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–91.
34. *Локощенко А.М., Мартыненко А.И., Платонов Д.О.* Анализ критериев длительной прочности при сложном напряженном состоянии с учетом корректировки результатов испытаний // Проблемы динамики и прочности в газотурбостроении: Тез. докл. II Междунар. науч.-техн. конф. (25–27.05.2004, Киев). Киев: ИПП НАНУ, 2004. С. 119–121.
35. *Локощенко А.М., Назаров В.В.* Выбор критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии // Авиационно-космическая техника и технология. Харьков: Изд-во Харьк. авиац. ин-та, 2004. № 7(15). С. 124–128.



УДК 539.3+539.214

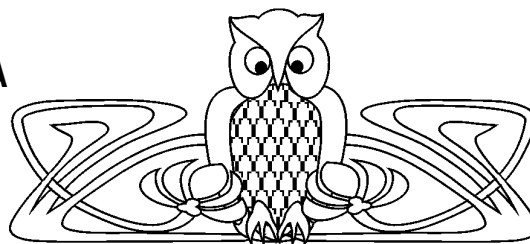
ОДНОМЕРНАЯ АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ ПО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

А.А. Манцыбора, К.Т. Семенов

Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН,
Владивосток,
лаборатория механики деформируемого твердого тела
E-mail: manzubor@iacp.dvo.ru

Решена одномерная автомодельная задача ударного деформирования упругопластического полупространства жестким телом с плоской границей. Представлен случай, когда необратимые деформации накапливаются внутри простых волн Римана. Приведено решение с возможной волновой картиной, когда возмущение в среде распространяется посредством двух упругих ударных волн и одной пластической централизованной волны.

Ключевые слова: упругость, пластичность.



One-Demential Automodel Problem about Impact of Rigid Body with Elastoplastic Half-Space

A.A. Mantsybora, K.T. Semenov

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok,
Laboratory of a Deformable Solid Mechanics
E-mail: manzubor@iacp.dvo.ru

The one-demential automodel problem about impact of rigid body with elastoplastic half-space is considered. In the case of plastic deformation is accumulated inside Riman simple wave is presented. The solution with a possible wave picture, when perturbation in the environment propagate by means of two elastic waves and one plastic simple wave, is shown.

Key words: elastic, plastic.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение процессов распространения упругопластических деформаций было начато еще в середине прошлого века. По-видимому, первой работой, посвященной теоретическому рассмотрению данной проблематики, была работа Х.А. Рахматулина [1]. В работах Хилла и Томаса [2, 3] для рассмотрения одномерных волн использовалась идея Адамара, рассмотрения волн, как поверхностей разрывов. Мандель [4] получил, что скорости распространения пластических волн не превышают скорости распространения упругих волн. В работах Блейха с соавторами [5, 6] рассмотрены автомодельные задачи, в условиях плоской деформации при условии пластичности Мизеса. Отражение сдвиговой волны в двумерной постановке изучалось в [7], рассмотренное далее для различных сред в [8]. В работе Г.И. Быковцева и Л.Д. Кретьевой [9] при помощи дополнительной гипотезы о максимальной диссипации энергии на разрыве была получена система уравнений сильного разрыва для упругопластической среды, также были найдены скорости распространения упругопластических ударных волн при условии пластичности Мизеса и Треска – Сен-Венана. Дальнейшее изучение условий существования поверхностей разрывов необратимых деформаций было произведено в [10]. Наиболее близкие к теме данной работы вопросы плоского деформирования упругопластической среды под воздействием подвижных нагрузок рассматривались в [11].

В данной работе на примере одномерной автомодельной задачи о разгрузке упругопластического полупространства рассматриваются процессы распространения возмущений в упругопластической среде. Отличительной особенностью настоящей публикации является то, что материал считается пластически сжимаемым, это обеспечивается выбором поверхности нагружения в форме пирамиды Кулона – Мора, основанием которой в плоскости, параллельной девиаторной, является шестиугольник Ишлинского – Ивлева.

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Положим, что процесс упругопластического деформирования среды можно описать в рамках малых деформаций, т.е. полные деформации определяются следующими соотношениями:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{i,j}) = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad (1.1)$$



где e_{ij}^e и e_{ij}^p являются компонентами тензора упругих и пластических деформаций соответственно; u_i — компоненты вектора перемещений. Запятая после переменной означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате: $u_{i,j} = \partial u / \partial x_j$.

Напряжения связаны с упругими деформациями посредством закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad (1.2)$$

здесь и далее везде по повторяющимся индексам ведется суммирование; λ и μ — параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера.

Динамические изменения в среде в процессе деформирования описываются законом сохранения импульса, который в случае малых деформаций принимает следующий вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho \chi_i = \rho v_i, \quad (1.3)$$

где ρ — плотность среды; χ_i — плотности распределения массовых сил (в данном случае полагаются равными нулю); v_i — компоненты скорости перемещений точек среды ($v_i = \dot{u}_i$). Точкой обозначается частная производная по времени ($\dot{u} = \partial u / \partial t$).

При достижении напряженными состояниями поверхности нагружения

$$f^{(s)}(\sigma_{ij}) = k, \quad k = \text{const}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

в деформируемой среде возможны три состояния: элемент может перейти в состояние пластического деформирования; элемент может перейти в состояние упругого деформирования; элемент может остаться в предельном упругом состоянии (нейтральное нагружение). Постоянная k — это предел текучести.

Принимая принцип максимума Мизеса (при этом соотношения (1.4) становятся пластическим потенциалом), для скорости пластического деформирования, согласно ассоциированному закону пластического течения, можем записать:

$$\varepsilon_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^p = \sum_{s=1}^n \Psi_s \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.5)$$

где $\Psi_s > 0$ при $\frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0$, $\Psi_s = 0$ при $\frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0$.

Дифференцируя соотношения (1.2) по времени и исключая из соотношений упругие деформации, получим:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda (v_{k,k} - \varepsilon_{kk}^p) \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) - 2\mu \varepsilon_{kk}^p. \quad (1.6)$$

Соотношения (1.3), (1.4)–(1.6) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающую динамическое деформирование идеального упругопластического тела в областях, где напряжения и скорости перемещений непрерывны.

2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ ОДНОМЕРНОГО АВТОМОДЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассматривая одномерную задачу, положим, что компоненты вектора перемещения зависят только от одной пространственной переменной x_1 и момента времени t имеют вид

$$u_1 = u_1(x_1, t), \quad u_2 = u_2(x_1, t), \quad u_3 = 0. \quad (2.1)$$

Соотношения (1.1)–(2.1) определяют систему дифференциальных уравнений в частных производных. До настоящего времени не разработано приемов построения обобщенных аналитических решения для подобных систем в общем случае. Наиболее простыми решениями подобных систем уравнений являются автомодельные решения, которые строятся путем замены нескольких переменных (x_i, t)



одной автомодельной переменной. В данном одномерном случае введем автомодельную переменную следующего вида:

$$\xi = \frac{x_1}{c_1 t}, \quad (2.2)$$

где $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, и положим, что компоненты вектора перемещения выражаются зависимостями

$$u_1 = c_1 t w(\xi), \quad u_2 = c_1 t z(\xi), \quad u_3 = 0, \quad (2.3)$$

где w и z — компоненты безразмерного вектора перемещений в координатном пространстве ξ .

Отметим, что согласно соотношениям (2.2) и (2.3)

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= w', & v_1 &= \dot{u}_1 = c_1(w - w'\xi), \\ u_{2,1} &= z', & v_2 &= \dot{u}_2 = c_1(z - z'\xi). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рассмотрим плоскую деформацию упругопластической среды, тогда $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0$. Это возможно, если σ_{33} является главным напряжением. Тогда для главных напряжений, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_3 &= \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Примем в качестве условия пластичности пирамиду Ишлинского – Ивлева:

$$\max_i |\sigma_i - \sigma| + q\sigma = \frac{2}{3}k. \quad (2.6)$$

Приведем соотношения для случая, когда условие пластичности выполняется на одной из граней пирамиды

$$\frac{(q+2)}{2}\sigma_1 + \frac{(q-1)}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = k, \quad (2.7)$$

где $\sigma = \sigma_i/3$, q — константа, отвечающая за пластическую сжимаемость материала.

Соотношению (2.7) можно удовлетворить, положив

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2} r \cos(\theta) + \frac{2k}{2q+1} - \frac{3}{2} \frac{r+p}{2q+1}, \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{2} r \cos(\theta) + \frac{2k}{2q+1} - \frac{3}{2} \frac{r+p}{2q+1}, \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2} r \sin(\theta), & \sigma_{33} &= \frac{3p}{2(q-1)}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где r , p и θ являются функциями от ξ .

Используя выражения (2.7)–(2.8) в уравнениях (1.5), получим, что компоненты тензора скоростей пластических деформаций выражаются зависимостями

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^p &= \frac{1}{4} \Psi (2q+1 + 3\cos(\theta)), & \epsilon_{22}^p &= \frac{1}{4} \Psi (2q+1 - 3\cos(\theta)), \\ \epsilon_{33}^p &= \frac{q-1}{2} \Psi, & \epsilon_{12}^p &= \frac{3}{2} \Psi \sin(\theta). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.3), (2.8) и (2.9) в соотношения (1.3) и (1.6), окончательно получим значения для Ψ :

$$\Psi = \frac{x_1 (3p' - 2\lambda(q-1) w'')}{t^2 c_1 (3\lambda q^2 - 3\lambda q + 2\mu q^2 - 4\mu q + 2\mu)} \quad (2.10)$$

и следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A_{i1} r' + A_{i2} p' + A_{i3} \theta' + A_{i4} w'' + A_{i5} z'' = 0, \quad (2.11)$$



где $i = 1..5$, а штрихом обозначается производная функции по ξ . Коэффициенты A_{ij} являются функциями от r , θ и констант материала.

Перепишем систему (2.11) в безразмерном виде, поделив для этого все уравнения системы на $(\lambda + 2\mu)$ и введя новые функции $r_n = r/(\lambda + 2\mu)$ и $p_n = p/(\lambda + 2\mu)$. При этом получим новую систему соотношений

$$B_{i1} r'_n + B_{i2} p'_n + B_{i3} \theta' + B_{i4} w'' + B_{i5} z'' = 0. \quad (2.12)$$

В (2.12) введены обозначения

$$\begin{aligned} B_{11} &= 1/2 \frac{(2 \cos(\theta) q - 3 + \cos(\theta)) \xi}{2q + 1}, & B_{12} &= -1/2 \xi \sin(\theta) r_n, \\ B_{13} &= -9/2 \frac{\xi (\mu + 2\mu q^2 + \mu \cos(\theta) + 3\lambda q^2 + 2\mu q \cos(\theta))}{(2q + 1) (3\lambda q^2 - 3\lambda q + 2\mu q^2 - 4\mu q + 2\mu)}, \\ B_{14} &= -\frac{\mu \xi (6\lambda q + 4\mu q - 3\lambda - 4\mu - 3\lambda \cos(\theta))}{(\lambda + 2\mu) (3\lambda q + 2\mu q - 2\mu)}, & B_{15} &= 0, \\ B_{21} &= -1/2 \frac{(2 \cos(\theta) q + \cos(\theta) + 3) \xi}{2q + 1}, & B_{22} &= 1/2 \xi \sin(\theta) r_n, \\ B_{23} &= -9/2 \frac{\xi (\mu + 2\mu q^2 - \mu \cos(\theta) + 3\lambda q^2 - 2\mu q \cos(\theta))}{(2q + 1) (3\lambda q^2 - 3\lambda q + 2\mu q^2 - 4\mu q + 2\mu)}, \\ B_{24} &= -3 \frac{\lambda \mu \xi (-1 + \cos(\theta))}{(\lambda + 2\mu) (3\lambda q + 2\mu q - 2\mu)}, & B_{25} &= 0, & B_{31} &= 1/2 \xi \sin(\theta), \\ B_{32} &= 1/2 \xi r_n \cos(\theta), & B_{33} &= -9 \frac{\xi \mu \sin(\theta)}{3\lambda q^2 - 3\lambda q + 2\mu q^2 - 4\mu q + 2\mu}, \\ B_{34} &= 6 \frac{\lambda \mu \xi \sin(\theta)}{(\lambda + 2\mu) (3\lambda q + 2\mu q - 2\mu)}, & B_{35} &= -\frac{\xi \mu}{\lambda + 2\mu}, \\ B_{41} &= 1/2 \frac{2 \cos(\theta) q - 3 + \cos(\theta)}{2q + 1}, & B_{42} &= -1/2 r_n \sin(\theta), \\ B_{43} &= -3/2 (2q + 1)^{-1}, & B_{44} &= -\xi^2, & B_{45} &= 0, \\ B_{51} &= 1/2 \sin(\theta), & B_{52} &= 1/2 r_n \cos(\theta), & B_{53} &= 0, & B_{54} &= 0, & B_{55} &= -\xi^2. \end{aligned}$$

Система (2.12) является однородной, поэтому существование нетривиального решения возможно только при равенстве определителя этой системы нулю. Такое решение описывает слой пластического течения, в котором деформации, напряжения, скорости перемещений точек среды не являются постоянными.

Согласно проведенным численным расчетам, было получено, что возможно два решения, каждое из которых описывает слой пластического течения. Причем большая скорость распространения слоя находится между значениями скоростей безвихревой и эквиволлюмиальной упругими волнами, а меньшая — за скоростью эквиволлюмиальной упругой волны.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УДАРЕ ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ ПО ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

Рассмотрим задачу об ударе жестким телом по упругопластическому полупространству. Выберем систему координат таким образом, что ось x_2 будет направлена по границе полупространства, а ось x_1 направим в глубь тела по направлению нормали к границе (рис. 1). Среда предполагается изначально равномерно нагруженной при $x_1 > 0$ $\sigma_{ij} = \text{const}$. Далее происходит удар по границе $x_1 = 0$ соответственно на границе мгновен-

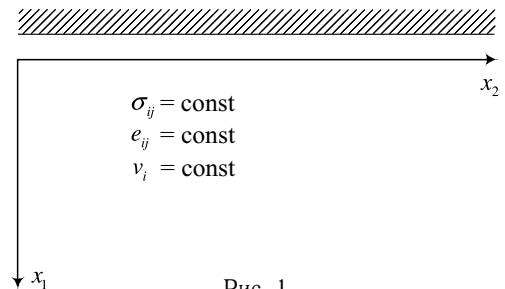


Рис. 1

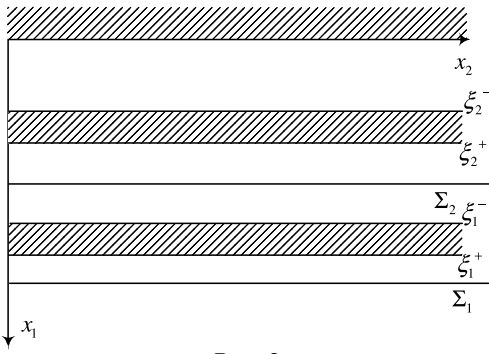


Рис. 2

здесь w — интенсивность безвихревой волны, n_i — компоненты вектора нормали к поверхности волны, G_1 — скорость распространения волны, $[\sigma_{ij}]$ и $[v_i]$ — скачки величин σ_{ij} и v_i соответственно.

Скорость движения другой волны совпадает со скоростью распространения эквиволумиальной волны, где выполняются следующие равенства:

$$G_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad [v_i]n_i = 0, \quad -G_2[\sigma_{ij}] = \mu([v_i]n_j + [v_j]n_i). \quad (3.2)$$

Изменение пластических деформаций будет осуществляться, как было показано ранее, посредством простых волн Римана, т.е. в некотором слое, на рис. 2 это области $(\xi_1^+; \xi_1^-)$ и $(\xi_2^+; \xi_2^-)$. Согласно полученным результатам, возможны две простые волны: одна из них располагается между безвихревой и эквиволумиальной ударными волнами $(\xi_1^+; \xi_1^-)$, а другая — между эквиволумиальной ударной волной и границей упругопластического полупространства $(\xi_2^+; \xi_2^-)$. В процессе решения конкретной краевой задачи возможны случаи, когда одновременно существует два слоя с пластическими деформациями или только один (в зависимости от выполнения условия пластичности в соответствующей области).

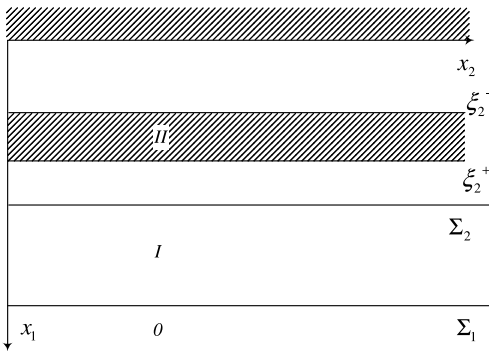


Рис. 3

Приведем пример, когда пластическое течение возникает в одном слое, расположенном между эквиволумиальной ударной волной и границей полупространства (рис. 3).

Данный случай реализован при следующих начальных и краевых условиях:

$$\lambda = 38.7 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \mu = 34.8 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad q = 0.05, \quad k = 0.774 \cdot 10^3 \text{ МПа}. \quad (3.3)$$

До начала ударного воздействия на границу предварительное деформированное состояние тела определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} e_{11}^{e(0)} &= 0, & e_{22}^{e(0)} &= -0.016004, & e_{12}^{e(0)} &= 0, \\ e_{33}^{e(0)} &= -0.027359, & e_{11}^{p(0)} &= -0.15152, & e_{12}^{p(0)} &= -0.17361. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь и далее по тексту цифра в скобках при деформациях обозначает область на волновой картине (например, см. рис. 3), к которой относятся данные деформации. При этом везде в силу соотношений (2.1) $e_{22}^e = -e_{22}^p$ и $e_{33}^e = -e_{33}^p$.

Положим, что в начальный момент времени граница тела ($x_1 = 0$) начинает подвергаться нагружению, вследствие чего деформации на границе начинают удовлетворять следующим равенствам:

$$\begin{aligned} e_{11}^e|_{x_1=0} &= -0.01, & e_{22}^e|_{x_1=0} &= -0.014, \\ e_{12}^e|_{x_1=0} &= 0.063984, & e_{33}^e|_{x_1=0} &= -0.02, \\ e_{11}^p|_{x_1=0} &= -0.141, & e_{12}^p|_{x_1=0} &= -0.155. \end{aligned} \quad (3.5)$$



В условиях (3.4) и (3.5) реализуется волновая картина упругопластического деформирования (см. рис. 3), состоящая из ударных волн Σ_1 , Σ_2 и простой волны (слой между ξ_2^- и ξ_2^+). На упругой волне Σ_1 скачком изменяются только e_{11}^e и соответственно $u_{1,1}$, остальные деформации остаются без изменения. При этом $e_{11}^{e+} = e_{11}^{e(0)}$, а $e_{11}^{e-} = -0.007331$. В области I напряжения не удовлетворяют условию пластичности, соответственно между ударными волнами Σ_1 и Σ_2 деформации и напряжения остаются постоянными. Далее на упругой волне Σ_2 неизменными остаются все упругие деформации, кроме e_{12}^e , при этом $e_{12}^{e+} = e_{12}^{e(0)}$, а $e_{12}^{e-} = 0.0009412$. При данных значениях в области II за ударной волной Σ_2 выполняется условие пластичности (2.6) на одной из граней призмы, а именно равенство (2.7). Это означает, что в данной области строится решение с пластическим слоем, границы которого находим, приравняв нулю определитель системы (2.12).

Ниже представлены графики изменения пластических деформаций на простой волне в области $\xi_2^- \dots \xi_2^+$, т.е. на интервале $0.19798 \dots 0.516$.

Из графиков (рис. 4, 5) видно, что в пластическом слое $\xi_2^- \dots \xi_2^+$, расположенном за экволюционной ударной волной Σ_2 , пластические деформации e_{12}^p меняются в большей степени, чем e_{11}^p , т.е. данный пластический слой несет в среду в основном изменение формы.

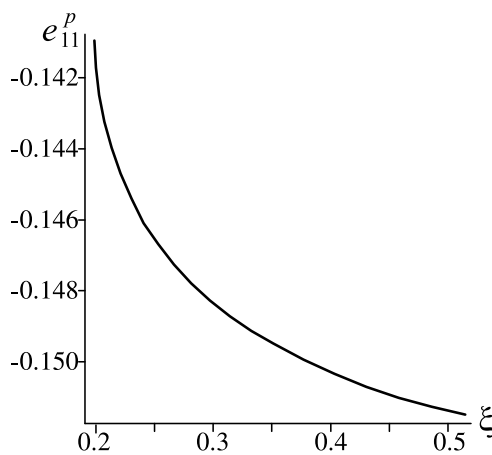


Рис. 4

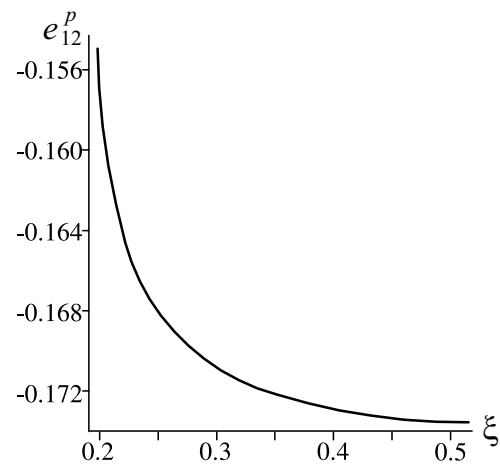


Рис. 5

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00001-а), программы отделения ЭММПУ РАН (проект 09-1-П12-01) и ДВО РАН (проект 09-III-B-03-080).

Библиографический список

1. Рахматулин Х.А. О распространении волны разгрузки // ПММ. 1945. Т. 9, № 1. С. 91–100.
2. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
3. Хилл Р. Соотношения на разрывах в механике деформируемых твердых тел // Механика: Сб. пер. 1963. № 3. С. 117–142.
4. Мандель Д. Пластические волны в неограниченной трехмерной среде // Механика: Сб. пер. 1963. № 5(81). С. 151–179.
5. Блейх Г.Г., Мэтьюз А.Т. Движение со сверхсейсмической скоростью ступенчатой нагрузки по поверхности упругопластического полупространства // Механика: Сб. пер. 1968. № 1 (107). С. 123–155.
6. Блейх Г.Г., Нельсон Дж. Плоские волны в упругопластическом полупространстве, вызванные совмест-
7. Быковцев Г.И., Вервейко Н.Д. Отражение сдвиговой волны граничной плоскостью, свободной от напряжений // IV Всесоюз. симпозиум по распространению упругих и упругопластических волн: Тез. докл. Кишинев, 1968. С. 18–19.
8. Баскаков В.А., Быковцев Г.И. Об отражении плоскополяризованной волны от свободной поверхности в упрочняющейся упругопластической среде // ПММ. 1971. Т. 35, №1. С. 71–72.
9. Быковцев Г.И., Кретова Л.Д. О распространении ударных волн в упругопластических средах // ППМ. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 106–116.
10. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Рычков В.А. Поверхности разрывов скоростей в динамике необратимо жи-



маемых сред // Проблемы механики сплошной среды (к 60-летию акад. В.П. Мясникова): Сб. науч. тр. Владивосток, 1996. С. 116–127.
11. Быковцев Г.И., Колокольчиков А.В., Сыгуров П.Н.

Автомодельные решения уравнений динамики идеального упругопластического тела при условии пластичности Треска // Журн. прикл. мех. и техн. физ. 1984. № 6. С. 148–156.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

П.Ф. Недорезов

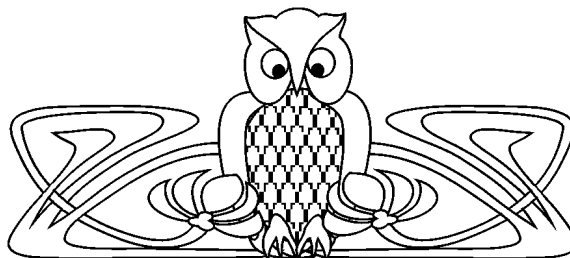
Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики
E-mail: p1934n@yandex.ru

В рамках гипотез Кирхгофа рассматривается задача статического поперечного изгиба тонкой прямоугольной пластинки из анизотропного материала, у которого в каждой точке имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости пластинки. Предполагается, что вид граничных условий вдоль каждой из сторон контура не меняется.

Двумерная краевая задача для определения прогиба модифицированным методом сплайн-коллокации сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно.

Приведены результаты числовых расчетов для двух вариантов закрепления граничного контура.

Ключевые слова: анизотропная пластинка, изгиб пластинки, напряженно-деформированное состояние, модифицированный метод сплайн-коллокации.



Numerical Study of Stress-Strain State of a Thin Anisotropic Rectangular Plate

P.F. Nedorezov

Saratov State University,
Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics
E-mail: p1934n@yandex.ru

Static bending of a thin rectangular anisotropic plate is considered in the framework of Kirchhoff hypotheses. At each point of the plate there is one plane of elastic symmetry parallel to the middle plane of the plate. It is assumed that the type of boundary conditions does not change along each of the straight sides.

By applying of a modified method of spline collocation the two-dimensional boundary value problem for the determination of deflection is reduced to a boundary value problem for the system of ordinary differential equations, which is solved numerically.

The results of numerical calculations for two variants of the boundary conditions on the contour of the plate are presented.

Key words: anisotropic plate, bending of plate, stress-strain state, modified method of spline collocation.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается статический изгиб прямоугольной пластинки с размерами в плане $a \times b$ и малой толщиной h (рис. 1) под действием поперечной нагрузки интенсивности $q(x, y)$. Пластинка изготовлена из анизотропного материала, у которого в каждой

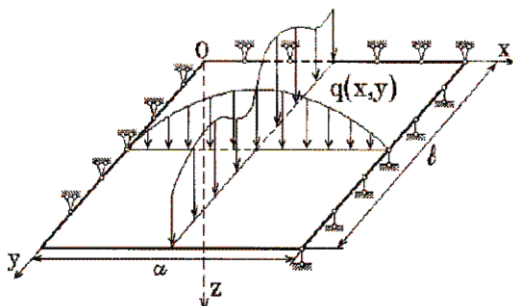


Рис. 1. Анизотропная пластинка

точке имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости. Деформации считаются малыми и подчиняются закону Гука.

Уравнение для определения прогиба w точек срединной плоскости такой пластинки в рамках классической теории Кирхгофа приводится в [1]. Это уравнение после перехода к безразмерным переменным $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ и ряда преобразований для безразмерного прогиба $W(\xi, \eta) = w(x, y)/h$ может быть записано в виде

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2\gamma_2 c \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(\gamma_1 + \gamma_4) c^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 2\gamma_3 c^3 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi \partial \eta^3} + \gamma_5 c^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} = q(\xi, \eta)/D_{11}^* \quad (1)$$



Здесь $c = a/b$, $D_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 6$) — соответствующие жесткости относительно осей x и y , $D_{11}^* = D_{11}ha^{-4}$, $\gamma_1 = D_{12}/D_{11}$, $\gamma_2 = 2D_{16}/D_{11}$, $\gamma_3 = 2D_{26}/D_{11}$, $\gamma_4 = 2D_{66}/D_{11}$, $\gamma_5 = D_{22}/D_{11}$.

Внутренние усилия и моменты в пластинке через производные от функции $W(\xi, \eta)$ выражаются по формулам [1]

$$\begin{aligned} M_x &= -a^2 D_{11}^* \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \gamma_1 c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \gamma_2 c \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ M_y &= -a^2 D_{11}^* \left(\gamma_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \gamma_5 c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \gamma_3 c \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ H_{xy} &= -0.5a^2 D_{11}^* \left(\gamma_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \gamma_3 c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + 2\gamma_4 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right), \\ N_x &= -aD_{11}^* \left(\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + 1.5\gamma_2 c \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (\gamma_1 + \gamma_4)c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} + 0.5\gamma_3 c^3 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right), \\ N_y &= -aD_{11}^* \left(0.5\gamma_2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + (\gamma_1 + \gamma_4)c \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + 1.5\gamma_3 c^2 + \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} + \gamma_5 c^3 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right), \\ N_x^* &= -aD_{11}^* \left(\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + 2\gamma_2 c \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (\gamma_1 + 2\gamma_4)c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} + \gamma_3 c^3 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right), \\ N_y^* &= -aD_{11}^* \left(\gamma_2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + (\gamma_1 + 2\gamma_4)c \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \eta} + 2\gamma_3 c^2 \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \eta^2} + \gamma_5 c^3 \frac{\partial^3 W}{\partial \eta^3} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнения (1) должно быть подчинено граничным условиям, вид которых определяется условиями нагружения или деформирования контура пластинки.

Для численного определения напряженно-деформированного состояния (НДС) такой пластинки применяется модифицированный метод сплайн-коллокации (ММСК) [2], который в отличие от классического метода (КМСК) [3] позволяет решать задачи при любых внешних воздействиях на контуре. Единственное ограничение состоит в том, что вид условий вдоль каждой стороны граничного контура предполагается неизменным.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ $W(\xi, \eta)$ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТАХ УСЛОВИЙ НА СТОРОНАХ $\xi = 0$ И $\xi = 1$

Следуя [2], будем искать функцию $W(\xi, \eta)$ в виде разложения

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=-2}^{N+2} B_{5,j}(\xi)W_j(\eta). \quad (3)$$

Здесь $B_{5,j}(\xi)$ — нормализованные B — сплайны пятой степени [4], построенные на равномерной сетке $\xi_i = ih_x$ ($i = \overline{-5, N+5}$), $h_x = 1/N$; нумерация сплайнов ведется по среднему узлу интервала-носителя $\xi_{j-3} \leq \xi \leq \xi_{j+3}$, на котором сплайн $B_{5,j}(\xi)$ отличен от нуля. Функции $W_{-k}(\eta)$ и $W_{N+k}(\eta)$ должны быть подобраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия на сторонах $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Уравнения для остальных функций $W_j(\eta)$ получаются из требования, чтобы уравнение (1) при подстановке выражения (3) выполнялось в точках коллокации $\xi = \xi_i^*$ ($i = \overline{0, N}$).

Рассмотрим ход решения задачи для нескольких вариантов граничных условий на стороне $\xi = 0$:

а) сторона $\xi = 0$ деформирована заданным образом

$$W(0.0; \eta) = w_0^*(\eta), \quad \frac{\partial W(0.0; \eta)}{\partial \xi} = \Theta_0^*(\eta). \quad (4a)$$

Подстановка выражения (3) в условия (4a) приводит к системе двух линейных алгебраических уравнений, из которой следует

$$W_{-p}(\eta) = m_{0,p}(\eta) + \sum_{k=0}^2 \alpha_{p,k} W_k(\eta) \quad (p = 1, 2), \quad (5a)$$



где $\alpha_{p,k}$ — известные коэффициенты, а $m_{0,p}$ выражаются через $w_0^*(\eta)$ и $\Theta_0^*(\eta)$.

б) сторона $\xi = 0$ нагружена моментами и усилиями заданной интенсивности

$$M_x(0.0; \eta) = -a^2 D_{11}^* m_0^*(\eta), \quad N_x^*(0.0; \eta) = -a D_{11}^* p_0^*(\eta). \quad (4b)$$

Тогда из (4b) и (3) получаются два дифференциальных соотношения, которые преобразуются к виду

$$\frac{d^2 W_{-p}}{d\eta^2} = m_{0,p}(\eta) + \sum_{k=0}^2 \alpha_{p,k} \frac{d^2 W_k}{d\eta^2} + c^{-1} \sum_{r=-2}^2 \beta_{p,r} \frac{dW_r}{d\eta} + c^{-2} \sum_{r=-2}^2 \lambda_{p,r} W_r(\eta) \quad (p = 1, 2) \quad (5b)$$

с известными коэффициентами $\alpha_{p,k}$, $\beta_{p,k}$, $\lambda_{p,k}$ и функциями $m_{0,p}(\eta)$.

с) если при $\xi = 0$ заданы смешанные граничные условия

$$W(0.0; \eta) = w_0^*(\eta), \quad M_x(0.0; \eta) = -a^2 D_{11}^* m_0^*(\eta), \quad (4c)$$

то при подстановке разложения (3) в условия (4c) получатся алгебраическое уравнение, из которого определяется $W_{-2}(\eta)$, и дифференциальное соотношение для функции $W_{-1}(\eta)$

$$W_{-2}(\eta) = \left(w_0^*(\eta) - \sum_{k=-1}^2 B_{5,k}(\xi_0) W_k(\eta) \right) / B_{5,-2}(\xi_0),$$

$$\frac{dW_{-1}}{d\eta} = m_0(\eta) + \sum_{k=0}^2 \alpha_{1,k} \frac{dW_k}{d\eta} + c^{-1} \sum_{s=-1}^2 \mu_s W_s(\eta). \quad (5c)$$

Как и в предыдущих случаях, коэффициенты $\alpha_{1,k}$, μ_s и функция $m_0(\eta)$ известны. Совершенно аналогично из условий на стороне $\xi = 1$ получаются формулы и соотношения, определяющие функции $W_{N+k}(\eta)$ ($k = 1, 2$):

а) если на стороне $\xi = 1$ задаются прогиб и угол поворота

$$W(1.0; \eta) = w_N^*(\eta), \quad \frac{\partial W(1.0; \eta)}{\partial \xi} = \Theta_N^*(\eta), \quad (6a)$$

то

$$W_{N+p}(\eta) = m_{N,p}(\eta) + \sum_{k=0}^2 \alpha_{p,N-k} W_{N-k}(\eta) \quad (p = 1, 2); \quad (7a)$$

б) при нагруженной стороне $\xi = 1$

$$M_x(1.0; \eta) = -a^2 D_{11}^* m_N^*(\eta), \quad N_x^*(1.0; \eta) = -a D_{11}^* p_N^*(\eta), \quad (6b)$$

$$\frac{d^2 W_{N+p}}{d\eta^2} = m_{N,p}(\eta) + \sum_{k=0}^2 \alpha_{p,N-k} \frac{d^2 W_{N-k}}{d\eta^2} + c^{-1} \sum_{r=-2}^2 \beta_{p,N-r} \frac{dW_{N-r}}{d\eta} +$$

$$+ c^{-2} \sum_{r=-2}^2 \lambda_{p,N-r} W_{N-r}(\eta) \quad (p = 1, 2); \quad (7b)$$

с) в случае смешанных граничных условий на стороне $\xi = 1$

$$W(1.0; \eta) = w_N^*(\eta), \quad M_x(1.0; \eta) = -a^2 D_{11}^* m_N^*(\eta), \quad (6c)$$

для функций $W_{N+k}(\eta)$ ($k = 1, 2$) имеем

$$W_{N+2}(\eta) = \left(w_N^*(\eta) - \sum_{r=N-2}^{N+1} B_{5,r}(\xi_N) W_r(\eta) \right) / B_{5,N+2}(\xi_N),$$

$$\frac{dW_{N+1}}{d\eta} = m_N(\eta) + \sum_{r=N-2}^N \alpha_{1,r} \frac{dW_r}{d\eta} + c^{-1} \sum_{s=N-2}^{N+1} \mu_s W_s(\eta). \quad (7c)$$



Различные комбинации из приведенных выше выражений для функций $W_{-k}(\eta)$ и $W_{N+k}(\eta)$ ($k = 1, 2$) позволяют по формуле (3) получить разложения функции $W(\xi, \eta)$, удовлетворяющие разным вариантам граничных условий при $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Эти разложения могут быть представлены в виде

$$W(\xi, \eta) = \sum_{j=j_0}^{j_N} \varphi_j(\xi) W_j(\eta) + M(\xi, \eta), \quad (8)$$

где функция $M(\xi, \eta)$ известным образом выражается через характеристики внешнего воздействия на сторонах $\xi = 0$ и $\xi = 1$ и B — сплайны $B_{5,r}(\xi)$ ($r = -2, -1, N+1, N+2$).

Отдельный интерес представляют однородные граничные условия (4a), (4b), (4c) и (6a), (6b), (6c). В этом случае функция $W(\xi, \eta)$ в виде (8) при значениях $j_0 = 0$, $j_N = N$ и

$$\varphi_k(\xi) = B_{5,k}(\xi) + \sum_{p=1}^2 \alpha_{p,k} B_{5,-p}(\xi), \quad \varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi) \quad (j = \overline{3, N-3})$$

$$\varphi_{N-k}(\xi) = B_{5,N-k}(\xi) + \sum_{p=1}^2 \alpha_{p,N-k} B_{5,N+k}(\xi) \quad (k = \overline{0, 2})$$

удовлетворяет условиям жесткого закрепления сторон $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

Если $j_0 = -2$, $j_N = N+2$, $\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi)$ ($j = \overline{-2, N+2}$), а функции $W_{-p}(\eta)$ и $W_{N+p}(\eta)$ ($p = 1, 2$) удовлетворяют однородным уравнениям (5b) и (6b), то из (8) получается представление $W(\xi, \eta)$ для свободных от нагрузки сторонах $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

При $j_0 = -1$, $j_N = N+1$,

$$\varphi_s(\xi) = \frac{1}{B_{5,-2}(\xi_0)} [B_{5,-2}(\xi_0) B_{5,s}(\xi) - B_{5,-2}(\xi) B_{5,s}(\xi_0)],$$

$$\varphi_{N-s}(\xi) = \frac{1}{B_{5,N+2}(\xi_N)} [B_{5,N+2}(\xi_N) B_{5,N-s}(\xi) - B_{5,N+2}(\xi) B_{5,N-s}(\xi_N)] \quad (s = \overline{-1, 2}),$$

$$\varphi_j(\xi) = B_{5,j}(\xi) \quad (j = \overline{3, N-3})$$

и функциях $W_{-1}(\eta)$ и $W_{N+1}(\eta)$, удовлетворяющих однородным уравнениям (5c) и (6c), формула (8) определяет $W(\xi, \eta)$ при свободно опертых сторонах $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

В перечисленных случаях однородных условий в формуле (8) функцию $M(\xi, \eta)$ следует полагать равной нулю.

3. СИСТЕМЫ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ. ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Количество слагаемых в разложении (8) функции $W(\xi, \eta)$ и, следовательно, число неизвестных функций $W_j(\eta)$, подлежащих определению, меняется в зависимости от вида граничных условий при $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Минимальное число неизвестных $W_j(\eta)$, равное $N+1$, получается в случае граничных условий (4a) и (6a). Максимальное число неизвестных $W_j(\eta)$ в разложении (8) равно $N+5$ и получается при заданных на сторонах $\xi = 0$ и $\xi = 1$ внешних усилиях, в случае смешанных граничных условий при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ число неизвестных $W_j(\eta)$ будет $N+3$.

В предлагаемой методике переход от двумерной краевой задачи для функции $W(\xi, \eta)$ к одномерной задаче для неизвестных $W_j(\eta)$ выполняется методом коллокации. С этой целью вводится в рассмотрение система точек коллокации $\xi = \tilde{\xi}_i$ ($i = \overline{0, N}$), $\tilde{\xi}_N < 1$ и требуется, чтобы результат подстановки (8) в (1) выполнялся вдоль прямых $\xi = \tilde{\xi}_i$ ($i = \overline{0, N}$). Полученную таким образом систему $N+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно функций $W_j(\eta)$ условно будем называть системой «А».



В случае, когда на сторонах $\xi = 0$ и $\xi = 1$ заданы смещения — условия (4a) и (6a), система «А» является разрешающей системой уравнений для определения всех неизвестных $W_j(\eta)$ ($j = \overline{0, N}$). Эта система уравнений стандартным приемом преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая в векторной форме записывается в виде

$$\frac{d\bar{Y}}{d\eta} = A\bar{Y}(\eta) + \bar{F}(\eta), \quad (9)$$

где компонентами неизвестного вектора $\bar{Y}(\eta) = \{y_i(\eta)\}$ ($i = \overline{0, 4N+3}$) являются функции $W_j(\eta)$ ($j = \overline{0, N}$) и их производные до третьего порядка включительно, а матрица A и вектор \bar{F} известны.

Требую, чтобы граничные условия на сторонах $\eta = 0$ и $\eta = 1$ выполнялись в точках коллокации $\xi = \tilde{\xi}_i$ ($i = \overline{0, N}$) для значений компонент вектор-функции $\bar{Y}(\eta)$, получаем систему $4N + 4$ соотношений, которую будем условно называть условиями «Б». Условия «Б» являются в рассматриваемом случае граничными условиями для вектор-функции $\bar{Y}(\eta)$ и в векторной форме записываются в виде

$$H_1\bar{Y}(0) = \bar{e}_1, \quad H_2\bar{Y}(1) = \bar{e}_2, \quad (10)$$

где компоненты матриц H_k и векторов \bar{e}_k ($k = 1, 2$) соответствующей размерности известны.

Если при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ задается распределение внешних усилий — условия (4b) и (6b), то к уравнениям системы «А» следует добавить уравнения (5b) и (7b) и из уравнений системы «А» исключить третьи и четвертые производные функций $W_{-p}(\eta)$ и $W_{N+p}(\eta)$ ($p = 1, 2$). Выражения для этих производных получаются из (5b) и (7b) дифференцированием. Полученная система также преобразуется к виду (9), где компонентами вектора неизвестных $\bar{Y}(\eta) = \{y_i(\eta)\}$ ($i = \overline{0, 4N+11}$) являются функции $W_j(\eta)$ и их производные до третьего порядка включительно, а также функции $W_{-p}(\eta)$, $W_{N+p}(\eta)$ ($p = 1, 2$) и их первые производные. Выполнение граничных условий при $\eta = 0$ и $\eta = 1$ требуется не только в точках коллокации $\xi = \tilde{\xi}_i$ ($i = \overline{0, N}$), но и в концевых точках отрезков $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Таким образом, к условиям «Б» добавляются еще восемь условий (по два условия в каждой угловой точке). Соответствующие граничные условия для вектора $\bar{Y}(\eta)$ по-прежнему представляются в виде (10).

В случае граничных условий смешанного типа — условия (4c) и (6c) — система уравнений «А» с добавленными к ней уравнениями (5c) и (7c), вообще говоря, составляет полную систему уравнений для функций $W_s(\eta)$ ($s = \overline{-1, N+1}$). Этой системе эквивалентна системе $4N + 6$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, для однозначного решения которой необходимо иметь $4N + 6$ граничных условий. Как и ранее, $4N + 4$ условия составляют условия «Б». Недостающие условия естественно формулировать в угловых точках пластинки. Однако в каждой из этих точек можно записать по два условия, при этом условия для W будут выполнены автоматически. Поэтому вопрос о том, какие два из четырех оставшихся условий выбрать, имеет неоднозначное решение.

Чтобы избежать подобной ситуации, за систему разрешающих уравнений в этом случае примем систему «А», дополненную продифференцированными по η уравнениями (5c) и (7c). Порядок такой системы равен $4N + 8$, и в качестве граничных условий для нее можно взять $4N + 4$ условия «Б», к которым добавлены оставшиеся четыре условия в угловых точках. Такой подход делает постановку краевой задачи для указанной системы разрешающих уравнений математически корректной. Компонентами вектора $\bar{Y}(\eta)$ в этом случае будут функции $W_j(\eta)$ ($j = \overline{0, N}$), их производные до третьего порядка включительно, а также функции $W_{-1}(\eta)$, $W_{N+1}(\eta)$ и их первые производные. Полученная таким способом краевая задача снова записывается в виде (9), (10).

Аналогичным образом строятся краевые задачи, если на сторонах $\xi = 0$ и $\xi = 1$ задаются граничные условия разного типа.

Численное решение краевых задач (9), (10) выполняется методом дискретной ортогонализации, который обеспечивает высокую точность результатов.



4. ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНКИ ИЗ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Рассмотрим частный случай прямоугольной пластинки, изготовленной из ортотропного материала. Предполагается, что в каждой точке одно главное направление упругости перпендикулярно срединной плоскости, а два других — направления x' и y' (рис. 2) — составляют со сторонами пластинки угол ψ . Пластинка изгибается поперечной нагрузкой интенсивности $q(x, y)$.

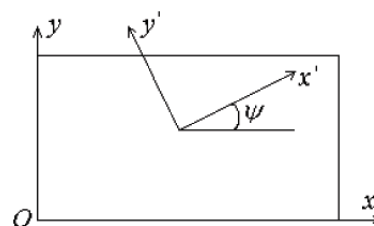


Рис. 2. Ортотропная пластинка

Если угол ψ равен нулю, то дифференциальное уравнение для прогиба точек срединной поверхности не содержит слагаемых с нечетными производными по переменным ξ и η и $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ [1]. Применение ММСК для численного определения НДС такой пластинки детально изложено в работе [5].

При $\psi \neq 0$ для ортотропной пластинки остается в силе [1] уравнение (1). Однако теперь коэффициенты γ_i ($i = \overline{1,5}$) не являются независимыми, так как жесткости D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) относительно осей x и y выражаются через главные жесткости $D_1, D_2, D_k, D_3 = D_1\nu_2 + 2D_k$, вычисленные относительно осей x' и y' по известным формулам [1].

В этом случае НДС пластинки определяется в соответствии с методикой, изложенной в разд. 2 и 3.

5. ПРИМЕРЫ ЧИСЛОВЫХ РАСЧЕТОВ

Изложенная методика была применена при численном исследовании НДС квадратных пластинок ($a = b = 1\text{ м}$) под действием распределенной статической нагрузки интенсивности $q(x, y) = q_0 = \text{const}$. Предполагалось, что края $\xi = 0$ и $\eta = 0$ жестко закреплены, а края $\xi = 1$ и $\eta = 1$ свободны; угловая точка $\xi = \eta = 1$ либо свободна — задача 1, либо подкреплена шарниром — задача 2. Вычисления выполнены для пластинок из ортотропного материала АГ-4с, у которого [6] $E_1 = 2.1 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 1.6 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0.42 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_2 = 0.07$.

Значения функции W в долях величины q_0/D_* ($D_* = E_1 h_0^4 / 12(1 - \nu_1 \nu_2)$) в некоторых характерных точках пластинки при $\psi = 0, \pi/12, \pi/6, \pi/3$ приведены в табл. 1 ($D_* = 1.761 \cdot 10^3 h_0^4$). Для задачи 2 в столбце значений $\max W$ в скобках указаны координаты точек, где достигается максимум W .

Таблица 1

Значения функции W (материал АГ-4с)

Задача	ψ	$\max W$	$W(0.5; 0.5)$	$W(0.5; 1.0)$	$W(1.0; 0.5)$
1	0.0	5.953E-2	1.081E-2	2.545E-2	2.670E-2
	$\pi/12$	5.356E-2	1.073E-2	2.396E-2	2.938E-2
	$\pi/6$	5.398E-2	1.126E-2	2.484E-2	2.864E-2
	$\pi/4$	5.158E-2	1.101E-2	2.488E-2	2.437E-2
2	0.0	8.138E-3 (1.00; 0.59)	5.047E-3	6.197E-3	7.726E-3
	$\pi/12$	8.191E-3 (1.0; 0.53)	5.231E-3	7.230E-3	8.155E-3
	$\pi/6$	8.181E-3 (0.74; 0.67)	5.626E-3	7.427E-3	7.632E-3
	$\pi/4$	7.879E-3 (0.70; 0.70)	5.628E-3	6.670E-3	6.632E-3

Аналогичные результаты для пластинок из дельта-древесины, которая обладает более сильной анизотропией по сравнению с АГ-4с, с постоянными $E_1 = 3.05 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0.467 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0.22 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_2 = 0.02$ [1], представлены в табл.2 ($D_* = 2.626 \cdot 10^3 h_0^4$).

Приведенные данные позволяют оценить влияние ориентации сторон пластинки по отношению к главным направлениям ортотропии и степень анизотропии материала на прогибы пластинки.



Таблица 2

Значения функции W (дельта-древесина)

Задача	ψ	$\max W$	$W(0.5; 0.5)$	$W(0.5; 1.0)$	$W(1.0; 0.5)$
1	0.0	1.0832E-1	2.165E-2	4.060E-2	5.789E-2
	$\pi/12$	1.377E-1	2.261E-2	5.207E-2	7.374E-2
	$\pi/6$	1.5151E-1	2.114E-2	5.5689E-2	7.385E-2
	$\pi/4$	2.735E-2	3.604E-2	1.492E-1	1.034E-1
2	0.0	3.129E-2 (1.00; 0.58)	1.275E-2	6.545E-3	3.010E-2
	$\pi/12$	3.313E-2 (1.00; 0.55)	1.326E-2	1.016E-2	3.247E-2
	$\pi/6$	2.506E-2 (1.00; 0.59)	1.190E-2	1.149E-2	2.387E-2
	$\pi/4$	4.443E-2 (0.61; 1.00)	1.501E-2	4.032E-2	1.428E-2

Библиографический список

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТТЛ, 1957. 463 с.
2. Недорезов П.Ф., Шевцова Ю.В., Ромакина О.М. Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Второй Всерос. науч. конф. Самара: СамГТУ, 2005. Ч. 1. С. 203–209.
3. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // Прикл. механика. 1995. Т. 31, № 6. С. 3–26.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Ю.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. Шевцова Ю.В. Применение модифицированного метода сплайн-коллокации в задачах изгиба ортотропных прямоугольных пластинок // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. гос. техн. ун-та, 2005. С. 146–149.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 268 с.

ХРОНИКА

ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «III СЕССИЯ НАУЧНОГО СОВЕТА РАН ПО МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА»

Л.Ю. Коссович

Саратовский государственный университет
E-mail: rector@sgu.ru

Информационное сообщение о Всероссийской конференции «III сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела», которая проходила с 10 по 15 августа 2009 года на базе Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

All-Russian Conference «III Session of Scientific Council of Russian Academy of Sciences on Solid Mechanics»

L.Yu. Kossovich

Saratov State University
E-mail: rector@sgu.ru

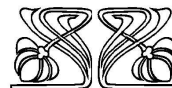
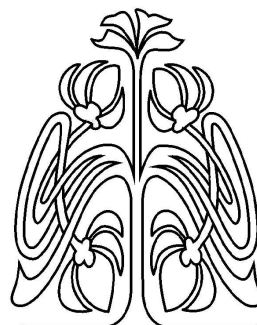
Information letter about All-Russian conference «III Session of Scientific Council of Russian Academy of Sciences on Solid Mechanics», Saratov State University on 10–15 of august 2009.

Всероссийская конференция «III сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела» была проведена с 10 по 15 августа 2009 года в Саратове. Организаторами конференции являлись Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, объединенный Научный совет РАН по комплексной проблеме «Механика», Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. Конференция была проведена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-06081-г).

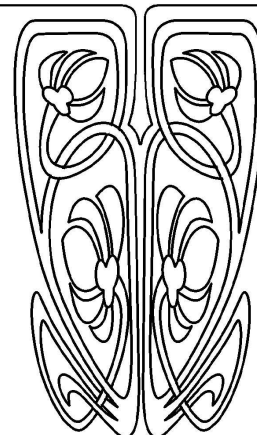
В работе сессии приняли участие ведущие специалисты в области механики деформируемого твердого тела.

Научный форум проводился уже в третий раз. Торжественное открытие конференции состоялось 11 августа 2009 года в Саратове.

Открыл конференцию сопредседатель Оргкомитета конференции академик РАН, лауреат Государственной премии РФ, заслуженный деятель науки РФ Никита Федорович Морозов, который в своей речи подчеркнул необходимость проведения сессий Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела, отметил актуальность докладов, принятых к участию в конференции, рассказал об особенностях нынешней сессии. Академик Н.Ф. Морозов акцентировал внимание слушателей на характерной особенности современного



ПРИЛОЖЕНИЯ





этапа развития механики, которая проявляется в глубокой интеграции фундаментальных и прикладных исследований, на возможности и перспективах междисциплинарных исследований, которые обычно проводятся взаимодействующими группами специалистов.

Затем с приветственным словом к участникам конференции обратился сопредседатель Оргкомитета доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии РФ, ректор Саратовского государственного университета (СГУ) Леонид Юрьевич Коссович. В своем выступлении он познакомил гостей Саратова с историей и достижениями университета, рассказал о становлении, этапах и перспективах развития механики в СГУ.

Вниманию участников сессии были представлены обзорные лекции и краткие сообщения, тематика которых являлась наиболее актуальной с точки зрения мировой науки и покрывала основные разделы механики деформируемого твердого тела, также были заслушаны выступления молодых ученых, аспирантов и студентов Саратовского государственного университета.

В работе конференции приняли участие известные ученые и специалисты, работающие в области механики деформируемого тела из Москвы, Санкт-Петербурга, Саратова, Перми, Воронежа, Ростова-на-Дону, Самары, Владивостока, Чебоксар. Среди выступивших на конференции были два академика и три члена-корреспондента РАН.

Большой интерес аудитории вызвал пленарный доклад академика РАН Никиты Федоровича Морозова «Упругие свойства нанообъектов».

В докладе академика РАН, лауреата Государственной премии РФ, директора Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН Валерия Павловича Матвеевко рассматривалась проблема решения задач на собственные значения и их практического приложения.

Оживленная дискуссия развернулась по докладу «Прикладные задачи механики сплошной среды переменной структуры» члена-корреспондента РАН, директора Института проблем машиноведения РАН Дмитрия Анатольевича Индейцева.

Член-корреспондент РАН, лауреат Государственной премии СССР, заведующий лабораторией Института теплофизики экстремальных состояний объединенного института высоких температур РАН Геннадий Исаакович Канель выступил с лекцией, в которой был дан глубокий анализ основных закономерностей и аномалий упругопластических волн ударного сжатия.

В докладе члена-корреспондента РАН, заведующего кафедрой теории пластичности Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова Евгения Викторовича Ломакина рассматривалась проблема разносопротивляемости зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров.

Доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии РСФСР, заместитель директора Института механики Московского университета Александр Михайлович Локощенко прочитал лекцию об эквивалентных напряжениях в расчетах длительной прочности материалов при сложном напряженном состоянии.



Во время пленарного заседания: член-корреспондент РАН Е.В. Ломакин (слева) и доктор физико-математических наук А.Б. Фрейдин (справа)

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, заместитель председателя Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела Александр Владимирович Манжиров впервые представил полную замкнутую систему уравнений и краевых



условий механики наращиваемых тел, а также масштабную, подробно проработанную стратегию ее развития.

Доклад «Контактные задачи для упругих оснований с функционально-градиентными покрытиями сложной структуры» представил доктор физико-математических наук, профессор НИИМ и ПМ им. И.И. Воровича Южного федерального университета Сергей Михайлович Айзикович.

Доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института прикладной механики РАН Сергей Альбертович Лурье рассказал об особенностях моделирования адгезионных эффектов в континуальной механике твердых деформируемых тел.

Профессор Леонид Юрьевич Коссович прочитал лекцию «Асимптотическая модель дальнего поля интерфейсной волны Стоунли».

В своем выступлении доктор физико-математических наук, профессор СГУ Мария Владимировна Вильде провела анализ задачи о распространении волны Рэлея в многослойной пластине.

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики сплошных сред Самарского государственного университета Юрий Николаевич Радаев познакомил слушателей с пространственной задачей математической теории пластичности.

В докладе доктора физико-математических наук, профессора, заведующего кафедрой Московского городского университета управления Правительства Москвы Владимира Александровича Ковалева говорилось о связанных динамических задачах гиперболической термоупругости.

Доктор физико-математических наук, профессор, заместитель председателя Южного научного центра РАН Валерий Владимирович Калинин представил доклад «Динамика функционально градиентных материалов и наноразмерных структур».

Доктор физико-математических наук, заведующий отделом Института проблем машиноведения РАН Александр Борисович Фрейдин представил доклад на тему «Квазистатические фронты превращений в деформируемых телах».

Доктор физико-математических наук, профессор, проректор Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева Борис Гурьевич Миронов познакомил слушателей с проблемой кручения стрежней, находящихся под действием давления.

Один день работы конференции был посвящен посещению Саратовского государственного университета, его научных подразделений, музея, Зональной научной библиотеки СГУ им. В.А. Артисевич. Участники сессии посетили Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем (ОНИ НС и БС) Саратовского государственного университета.

(В качестве пояснения: Междисциплинарный образовательно-научный институт наноструктур и биосистем, предназначенный для решения фундаментальных задач физики, механики, материаловедения, химии, биологии и медицины был образован в ходе реализации национальной программы «Образование» в Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского в 2009 году. В организации этого института принимали участие механико-математический, нано- и биомедицинских технологий, химический, биологический



Участники конференции в Образовательно-научном институте наноструктур и биосистем СГУ

факультеты университета. В состав института входят три департамента: нанотехнологий, биотехнологий и компьютерного моделирования. Департамент нанотехнологий состоит из двух отделов: электро-



формования полимеров, нанотехнологий, предполагается создание отдела наномеханики. Департамент биотехнологий — самый многочисленный, в него входят отделы клеточной инженерии, высокомолекулярных соединений, наноаналитики, биомеханики, молекулярной биологии. Департамент компьютерного моделирования состоит из трех отде-



Посещение участниками конференции отдела компьютерного моделирования и прототипирования

лов: высокопроизводительных вычислительных систем, компьютерного инжиниринга, компьютерного моделирования и прототипирования). Участники сессии познакомились с основными направлениями работы ОНИ НС и БС, получили возможность не только увидеть уникальное оборудование, сосредоточенное в институте, но и принять непосредственное участие в научных исследованиях, результатом посещения института стали договоренности о возможности проведения совместных исследований.

В рамках конференции заседали круглые столы, где участники получили возможность выступить с сообщениями о своих исследованиях и обсудить полученные результаты с ведущими специалистами. Участники дискуссий в своих выступлениях неоднократно подчеркивали особую для российской науки важность вовлечения молодежи в научно-исследовательский процесс и отмечали, что Саратовский госуниверситет с этой задачей успешно справляется, чему подтверждение активное участие студентов, аспирантов, молодых ученых СГУ в работе конференции.



Участники конференции в отделе нанотехнологий

Всего на конференции были прочитаны 16 лекций, 32 аудиторных доклада, среди которых 18 были представлены молодыми учеными, аспирантами и студентами СГУ.

Представленные на конференции лекции и доклады вновь подтвердили традиционно высокий уровень фундаментальных и прикладных исследований российских ученых в области механики деформируемого твердого тела, который соответствует мировому уровню, а по ряду направлений его превосходит. Заслушанные доклады показали, что успешно развиваются как традиционные, так и абсолютно новые направления, соответствующие современным потребностям производства.

Следует отметить, что с точки зрения мировой науки наиболее актуальными рассмотренными на конференции проблемами являются проблемы, относящиеся к областям нано- и микромеханики, механики разрушения, механики наращиваемых тел, контактной механики и трибологии, биомеханики, а также междисциплинарные проблемы.

На закрытии Всероссийской конференции «III сессия Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела» было принято решение опубликовать отдельные лекции, прочитанные на конференции, в журнале «Известия Саратовского университета». Отобранные Оргкомитетом конференции работы представлены в настоящем выпуске.

PERSONALIA

СЕРГЕЙ ГЕОРГИЕВИЧ ЛЕХНИЦКИЙ

Сергей Георгиевич Лехницкий родился 22 июня 1909 года в Костроме Ярославской области. Его родители происходили из обедневших дворян и работали учителями в Костроме и Кинешме.



Весной 1926 года С.Г. Лехницкий окончил среднюю школу — девятилетку. Затем в течение года готовился к поступлению в вуз. В 1927 году он успешно выдержал вступительные экзамены в Ленинградский университет и был зачислен студентом первого курса физико-математического факультета, который закончил в 1931 году по специальности «Механика».

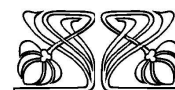
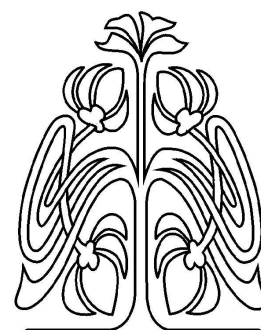
После окончания университета С.Г. Лехницкий поступает в аспирантуру при ЛГУ по специальности «Механика деформируемого твердого тела», его научными руководителями были известные ученые, профессора С.А. Гершгорин и Г.В. Колосов. В это время им подготовлены и опубликованы первые самостоятельные работы по теории упругости анизотропного тела, которой он посвятил всю свою дальнейшую исследовательскую деятельность.

По-видимому, под влиянием Г.В. Колосова С.Г. Лехницкий начал разрабатывать проблему применения аппарата теории функций комплексного переменного в задачах о концентрации напряжений около отверстий в анизотропных пластинках и массивах (плоская задача) и в задачах о кручении и изгибе анизотропных стержней, ослабленных полостями. В этом направлении он получил фундаментальные результаты, а введенные им функции обобщенного комплексного переменного известны в отечественной и зарубежной литературе как комплексные потенциалы С.Г. Лехницкого.

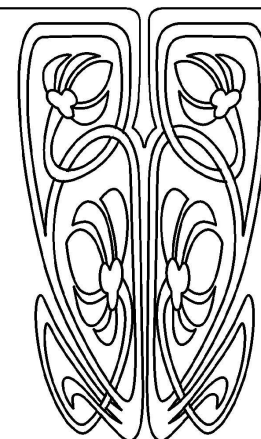
После окончания аспирантуры в 1934 году С.Г. Лехницкий был оставлен в Ленинградском университете в должности ассистента кафедры теории упругости, однако его педагогическая деятельность началась еще раньше, когда он, будучи студентом, совмещал учебу с преподаванием математики на рабфаке при Ленинградском институте изобразительных искусств (ныне Академия художеств).

22 мая 1935 года в Ленинградском университете состоялась публичная защита кандидатской диссертации Сергея Георгиевича на тему «Плоская задача теории упругости анизотропного тела». После утверждения решения Совета о присуждении ученой степени кандидата в ВККВШ (ныне ВАК) С.Г. Лехницкий был переведен на должность старшего научного сотрудника НИИ математики и механики ЛГУ, где он работал до 1937 года.

Летом 1937 года дирекцией Саратовского университета С.Г. Лехницкий был приглашен возглавить вновь открывшуюся кафедру те-



ПРИЛОЖЕНИЯ





рии упругости. С этого момента начался новый, саратовский, период жизни выдающегося ученого. Проводя огромную организационную работу по разработке учебных планов и программ новых курсов, выполняя большую педагогическую работу, С.Г. Лехницкий продолжал активную исследовательскую деятельность в области теории упругости анизотропного тела. В феврале 1940 года он представил в Совет Ленинградского индустриального института свою докторскую диссертацию «Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела», которую успешно защитил 19 июня того же года. 2 ноября 1940 года С.Г. Лехницкий приказом ВККВШ был утвержден в ученой степени доктора физико-математических наук, а 16 августа 1941 года ему было присвоено ученое звание профессора.

В Саратовском университете С.Г. Лехницкий создал и возглавил новое в то время научное направление — теория упругости анизотропного тела. Различным аспектам этой проблемы посвящены его многочисленные работы. За монографию «Анизотропные пластинки» в 1947 году профессору С.Г. Лехницкому была присуждена Сталинская премия. Это событие явилось свидетельством высокого признания выдающегося вклада С.Г. Лехницкого в науку о прочности. Научные труды С.Г. Лехницкого получили широкую известность не только в нашей стране, но и далеко за ее пределами. Монография «Анизотропные пластинки» была переведена на английский, китайский языки и переиздана за рубежом.

Свои знания и опыт научной работы С.Г. Лехницкий охотно и с успехом передавал молодежи. Под его руководством в Саратовском университете закончили аспирантуру и защитили кандидатские диссертации В.М. Рассудов, Е.Ф. Бурмистров, А.И. Уздалев, А.С. Космодамианский, Б.И. Ермолаев и П.Ф. Недорезов. Впоследствии В.М. Рассудов, Е.Ф. Бурмистров, А.И. Уздалев, А.С. Космодамианский и П.Ф. Недорезов стали докторами наук, а А.С. Космодамианский был избран сначала член-корреспондентом, а затем и действительным членом НАН Украины. В этом немалая заслуга их учителя профессора С.Г. Лехницкого, который привил им вкус к научной работе и о котором они всегда вспоминали с глубоким уважением.

За 22 года работы в Саратовском университете (1937–1959 гг.) С.Г. Лехницкий разработал и прочитал ряд оригинальных общих и специальных курсов, руководил работой нескольких специальных семинаров. Под его руководством было выполнено около 100 дипломных работ. Его лекции вызывали восхищение у слушателей большой содержательностью, четкостью формулировок и ясностью изложения, прекрасно выполненными рисунками. В своих лекциях он всегда подчеркивал роль и приоритет русских и советских ученых в разработке проблем сопротивления материалов и теории упругости.

В 1959 году профессор С.Г. Лехницкий возвращается в Ленинград и работает старшим научным сотрудником Всесоюзного научно-исследовательского маркшейдерского института (Институт горного дела им. акад. А.А. Скочинского).

Скончался профессор С.Г. Лехницкий в августе 1981 года в возрасте 72 лет.

П.Ф. Недорезов

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ ПРОФЕССОРА С.Г. ЛЕХНИЦКОГО ЗА ГОДЫ РАБОТЫ В САРАТОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ (1937–1959)

Устойчивость анизотропных пластинок. М.; Л.: Гостехиздат, 1943. 66 с.

Анизотропные пластинки. М.: ГИТТЛ, 1947. 355 с.

Теория упругости анизотропного тела. М.: Гостехиздат, 1950.

Анизотропные пластинки. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.

Теоретическое исследование напряженного состояния анизотропной пластинки, ослабленной эллиптическим и круговым отверстием // Тр. конф. по оптическому методу изучения напряжений. М.: НИИ ММ ЛГУ и НИИ Мех МГУ, ОНТИ, 1937.

Плоская статическая задача теории упругости анизотропного тела // ПММ. Нов. сер. 1937. Т. 1, вып. 1. С. 77–89.



Решение плоской задачи теории упругости анизотропного тела для сплошного эллипса // Докл. АН СССР. 1937. Т. XV, № 9. С. 527–530.

О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит // ПММ. Нов. сер. 1938. Т. 2, вып. 2. С. 181–210.

Плоская задача теории упругости для тела с цилиндрической анизотропией // Учен. зап. Сарат. гос. ун-та. 1938. Т. I (XIV), вып. 2.

Обобщенная плоская деформация в бесконечном упругом анизотропном полупространстве, ограниченном поверхностью параболического цилиндра // Докл. АН СССР. 1939. Т. XXV, № 3. С. 182–185.

Некоторые случаи распределения напряжений в анизотропной пластинке с круговым отверстием // Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук (механика). 1939. Вып. 8. С. 43–55.

Некоторые случаи упругого равновесия однородного цилиндра с произвольной анизотропией // ПММ. 1939. Т. 2, вып. 6. С. 181.

Симметричная деформация и кручение тела вращения с анизотропией частного вида // ПММ. 1940. Т. 4, вып. 3. С. 43–60.

Плоская задача теории упругости для среды со слабовыраженной анизотропией // Докл. АН СССР. 1941. Т. XXXI, №5. С. 433–436; №9. С. 844–847.

Изгиб неоднородных анизотропных тонких плит симметричного строения // ПММ. 1941. Т. 5, вып. 1. С. 71–92.

О равновесии анизотропной консольной балки // ПММ. 1942. Т. 6, вып. 1. С. 3–17.

О комплексных параметрах, входящих в общие формулы некоторых задач теории упругости анизотропного тела // Учен. зап. ЛГУ. Сер. физ.-мат. наук. 1944. Вып. 13. С. 167–171.

Распределение напряжений во вращающейся эллиптической анизотропной пластинке // Учен. зап. ЛГУ. Сер. физ.-мат. наук. 1944. Вып. 13. С. 161–166.

Устойчивость анизотропной пластинки, усиленной ребрами по двум сторонам // Науч. бюл. ЛГУ. 1945. № 2. С. 9.

Изгиб прямоугольной ортотропной пластинки с параллельными ребрами жесткости // ПММ. 1948. Т. 12, № 3. С. 339–348.

Распределение напряжений в упругом стержне с криволинейной анизотропией под действием растягивающей силы и изгибающих моментов // ПММ. 1949. Т. 13, вып. 3. С. 307–316.

Приближенный метод определения напряжений в упругой анизотропной пластинке вблизи отверстия, мало отличающегося от кругового // Инженерный сб. М., 1953. Т. XVII, 6/474. С. 3–28.

Распределение напряжений в анизотропной пластинке с эллиптическим упругим ядром (плоская задача) // Инженерный сб. М., 1954. Т. XIX. С. 83–106.

Некоторые случаи упругого равновесия анизотропной пластинки с некруглым отверстием (плоская задача) // Инженерный сб. М., 1955. Т. 22. С. 160–187.

Кручение многослойного стержня прямоугольного сечения // Инженерный сб. М., 1956. Т. 23. С. 63–76.