



# МАТЕМАТИКА

УДК 512.5

## О СЕРИИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ МНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННОГО ПРОСТОЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ АЛГЕБРОЙ КАРТАНОВСКОГО ТИПА ОБЩЕЙ СЕРИИ $W_2$

О. А. Богданчук

Аспирант, ассистент кафедры алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет, bogdanchuk\_o\_a@mail.ru

В работе изучаются числовые характеристики многообразий алгебр Ли над полем нулевой характеристики, в основном экспонента многообразия. Автором была построена дискретная серия алгебр Ли с различными дробными экспонентами роста коразмерностей, принадлежащая многообразию, порожденному простой бесконечномерной алгеброй Ли картановского типа общей серии  $W_2$ .

*Ключевые слова:* многообразие алгебр Ли, экспонента многообразия, полиномиальные тождества.

Работа посвящена изучению многообразий алгебр Ли и их числовых характеристик. Все использованные, но не объясненные понятия можно найти в монографиях [1, 2]. Характеристика основного поля  $\Phi$  предполагается равной нулю. На протяжении всей работы в относительно свободных алгебрах, а также при записи тождественных соотношений запись лиевской операции ведется без коммутаторных скобок. Кроме того, будем использовать левонормированную запись произведений, опуская скобки, т. е.  $(ab)c = abc$ . Коммутаторные скобки используем только в конкретных алгебрах Ли, которые построены из соответствующих ассоциативных алгебр, в которых  $ab$  обозначает результат ассоциативного умножения элементов алгебры.

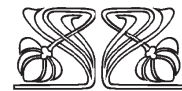
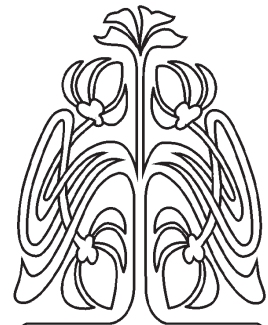
Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие алгебр Ли, а  $F(\mathbf{V})$  — его относительно свободная алгебра счетного ранга, порожденная элементами  $x_1, x_2, \dots$ . Обозначим через  $P_n(\mathbf{V})$  подпространство полилинейных элементов от  $x_1, \dots, x_n$  в  $F(\mathbf{V})$ , а через  $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$  — его размерность. Рост числовой последовательности  $c_n(\mathbf{V})$  называют ростом многообразия  $\mathbf{V}$ . Если последовательность  $c_n(\mathbf{V})$  мажорируется экспонентой  $a^n$  для подходящего  $a$ , то существуют пределы

$$LEXP(\mathbf{V}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \quad HEXP(\mathbf{V}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})},$$

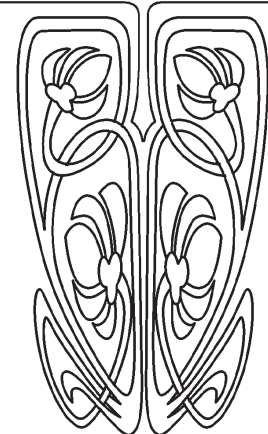
которые называют нижней и верхней экспонентой многообразия  $\mathbf{V}$ . Если предел последовательности  $\sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$  существует, то он называется PI-экспонентой или просто экспонентой многообразия  $\mathbf{V}$ :

$$EXP(\mathbf{V}) = LEXP(\mathbf{V}) = HEXP(\mathbf{V}).$$

Пусть  $R_k = \Phi[t_1, t_2, \dots, t_k]$  — кольцо многочленов от переменных  $t_1, t_2, \dots, t_k$  над полем  $\Phi$ . Всякий элемент бесконечномерной простой алгебры Ли картановского типа общей серии  $W_k$  может быть записан



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





в виде  $\sum_{i=1}^k f_i \partial_i$ , где  $\partial_i$  — оператор взятия частной производной по  $t_i$ , а  $f_i \in R_k$ ,  $i = 1, \dots, k$ . В этой алгебре лиевской операцией является коммутирование операторов. Обозначим через  $\mathbf{W}_k$  многообразие, порожденное соответствующей алгеброй  $W_k$ . В работе [3] было доказано, что для верхних экспонент многообразий  $\mathbf{W}_k$  выполняются неравенства

$$HEXP(\mathbf{W}_k) \leq k(1+k)(1+1/k)^k.$$

В этой же статье была высказана гипотеза о том, что экспонента многообразия, порожденного алгеброй  $W_k$ , существует и равна верхней оценке из приведенного выше неравенства, т.е.  $EXP(\mathbf{W}_k) = k(k+1)(1+1/k)^k$ . Давно известно, что экспонента многообразия  $\mathbf{W}_1$  равна 4 (см. [4]). В случае же многообразия, порожденного алгеброй  $W_2$ , экспонента целым числом не является. В работе [3] доказано, что в случае поля нулевой характеристики экспонента многообразия  $\mathbf{W}_2$  является дробной:

$$13,1 < LEXP(\mathbf{W}_2) \leq HEXP(\mathbf{W}_2) < 13,5.$$

Напомним еще раз строение простой бесконечномерной алгебры Ли картановского типа общей серии  $W_2$ . Пусть  $R_2 = \Phi[t_1, t_2]$  — кольцо многочленов от переменных  $t_1, t_2$ . Алгебра  $W_2$  состоит из дифференциальных операторов первого порядка вида

$$f_1 \partial_1 + f_2 \partial_2,$$

где  $\partial_i$  — оператор взятия частной производной по  $t_i$ , а  $f_i \in R_2$ ,  $i = 1, 2$ . Относительно операции коммутирования множество  $W_2$  является алгеброй Ли, причем результат коммутирования двух операторов первого порядка будет также оператором первого порядка. Проверим этот хорошо известный факт в явном виде. Действительно, выпишем результат коммутирования двух дифференциальных операторов, каждый из которых состоит из одного слагаемого. Для этого применим коммутатор к многочлену  $h \in R_2$

$$\begin{aligned} [f_1 \partial_1, f_2 \partial_2](h) &= f_1 \partial_1(f_2 \partial_2(h)) - f_2 \partial_2(f_1 \partial_1(h)) = f_1 \partial_1 \left( f_2 \frac{\partial h}{\partial t_2} \right) - f_2 \partial_2 \left( f_1 \frac{\partial h}{\partial t_1} \right) = \\ &= f_1 \frac{\partial f_2}{\partial t_1} \frac{\partial h}{\partial t_2} + f_1 f_2 \frac{\partial^2 h}{\partial t_2 \partial t_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial t_2} \frac{\partial h}{\partial t_1} - f_2 f_1 \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} = \\ &= f_1 \frac{\partial f_2}{\partial t_1} \frac{\partial h}{\partial t_2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial t_2} \frac{\partial h}{\partial t_1} = \left( f_1 \frac{\partial f_2}{\partial t_1} \partial_2 - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial t_2} \partial_1 \right) (h). \end{aligned}$$

Итак,

$$[f_1 \partial_1, f_2 \partial_2] = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial t_1} \partial_2 - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial t_2} \partial_1.$$

Договоримся опускать в произведениях элементов алгебры  $W_2$  коммутаторные скобки в случае их левонормированной расстановки, т.е.

$$[[[a, b], c], d] = [a, b, c, d],$$

где  $a, b, c, d$  — некоторые элементы алгебры  $W_2$ . В работе [5] была получена дискретная серия алгебр Ли  $L_s$ , где  $s = 3, 4, \dots$ , с различными дробными экспонентами роста их коразмерностей. Дадим определение алгебры  $L_s$ . Пусть  $\mathbf{A}^2$  — многообразие всех метабелевых алгебр Ли, определенное тождеством

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4) \equiv 0,$$

а  $M_s = F_s(\mathbf{A}^2)$ ,  $s = 3, 4, \dots$  — относительно свободная алгебра ранга  $s$  этого многообразия с множеством свободных образующих  $\{z_0, z_1, \dots, z_{s-1}\}$ . Рассмотрим линейное преобразование  $d$  векторного пространства  $\langle z_0, z_1, \dots, z_{s-1} \rangle$ , действующее по правилу  $z_i d = z_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s-1$ ,  $z_0 d = 0$ . Так как  $M_s$  — относительно свободная алгебра, то отображение  $d$  можно продолжить до дифференцирования алгебры  $M_s$ , которое мы обозначим той же буквой. Напомним, что дифференцированием  $d$  некоторой алгебры  $A$  называется линейное отображение алгебры в себя, удовлетворяющее условию

$$(xy)d = (xd)y + x(yd), \tag{1}$$



где  $x, y$  — элементы алгебры  $A$ . Вернемся к построению алгебры  $L_s$ . Линейная оболочка построенного дифференцирования  $\langle d \rangle$  алгебры  $L_s$  относительно операции коммутирования является одномерной алгеброй Ли с нулевым умножением. Поэтому можно определить полупрямое произведение (см. [1, п. 1.4.4, с. 16]) алгебр  $M_s$  и  $\langle d \rangle$ , которое обозначим  $L_s = M_s \ltimes \langle d \rangle$ . Отметим, что алгебра  $M_s$  является метабелевым идеалом коразмерности 1 алгебры  $L_s$ . Поясним, что как векторное пространство алгебра  $L_s$  является прямой суммой пространств  $M_s$  и  $\langle d \rangle$ , т. е.  $L_s = M_s \oplus \langle d \rangle$ . Элементы алгебры  $L_s$  умножаются следующим образом:

$$(x + \alpha d)(y + \beta d) = xy + \beta xd - \alpha yd,$$

где  $x, y$  — элементы относительно свободной метабелевой алгебры  $M_s$ ,  $xy$  — их лиевское произведение, а  $xd$  и  $yd$  — результаты действия дифференцирования  $d$  на элементы  $x$  и  $y$  соответственно.

Многообразие, порожденное алгеброй  $L_s$ , обозначим как  $\mathbf{L}_s$ ,  $s = 3, 4, \dots$ , и сформулируем доказанную в работе [5] теорему об экспонентах этих многообразий. Для экспонент роста коразмерностей алгебр Ли  $L_s$  выполняются строгие неравенства:

$$3 = EXP(\mathbf{L}_3) < \dots < EXP(\mathbf{L}_s) < EXP(\mathbf{L}_{s+1}) < \dots < 4, \quad \text{где } s = 4, 5, \dots$$

Хорошо известно, что в алгебре  $W_1$  выполняется стандартное лиевское тождество степени пять, которое имеет вид

$$\sum_{p \in S_4} (-1)^p x_0 x_{p(1)} x_{p(2)} x_{p(3)} x_{p(4)} \equiv 0,$$

где  $S_4$  — симметрическая группа, а  $(-1)^p$  — четность перестановки. Однако это тождество не выполняется в алгебрах  $L_s$ , где  $s = 3, 4, \dots$ , поэтому алгебры  $L_s$  не лежат в многообразии  $\mathbf{W}_1$ . Действительно, для проверки этого факта достаточно подставить элементы  $z_0, z_1, z_2, z_3, d$  алгебры  $L_4$  вместо переменных тождества  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  соответственно и получить ненулевой результат подстановки. Оказалось, что многообразию  $\mathbf{W}_2$  рассматриваемая серия алгебр уже принадлежит. Сформулируем основной результат этой работы.

**Теорема.** *Дискретная серия алгебр Ли  $L_s$  с различными дробными экспонентами роста коразмерностей принадлежит многообразию, порожденному простой бесконечномерной алгеброй Ли картановского типа общей серии  $W_2$ .*

**Доказательство.** Для доказательства теоремы достаточно проверить, что любое тождество, которое не выполняется в алгебре  $L_s$ , также не выполняется в алгебре  $W_2$ . Предположим, что произвольное тождественное соотношение степени  $n + 1$  не выполняется в алгебре  $L_s$ . Тогда существуют такие элементы этой алгебры, после подстановки которых вместо переменных тождества получаем ненулевой элемент алгебры  $L_s$ . Пусть вместо  $k$  образующих был подставлен элемент  $d$ . Обозначим эти образующие буквой  $b$ . А вместо остальных  $m$  ( $m = n + 1 - k$ ) образующих подставлены некоторые  $z_i$  или их произведения, которые мы, в свою очередь, переобозначим как  $y_0, y_1, \dots, y_m$ . Так как  $adb$  является дифференцированием алгебры и действует по правилу (1), то дифференцируя образующую  $b$  необходимое число раз, перепишем наше тождественное соотношение в виде суммы левонормированных произведений элементов вида  $y_s(adb)^p$ . После подстановки базисных элементов алгебры  $L_s$  мы можем менять местами скобки начиная с третьей, так как алгебра  $M_s$  является метабелевой. Это же свойство перестановки скобок выполняется и после подстановки элементов из алгебры  $W_2$ , что будет следовать из того типа подстановки, о которой будет рассказано ниже. Сделаем подстановки вместо образующих элементов алгебры  $L_s$  и  $W_2$  и, производя одинаковые преобразования в обоих случаях, перепишем полученное выражение, считая, что элементы алгебр уже подставлены, но не производя вычислений. При этом еще раз заметим, что мы одновременно производим преобразования, переставляя скобки начиная с третьей и приводя подобные.

В базисе алгебры  $L_s$ , кроме  $z_i$  и  $d$ , есть еще произведения свободных образующих метабелевой алгебры  $M_s$ , но произведение может быть подставлено только один раз. Так как если мы подставим произведение два раза, то по свойству метабелевости алгебры  $M_s$  получим ноль. Любой из  $y_s(adb)^p$  можно «вынести» на первое место, так как мы работаем в алгебре Ли. Будем считать, что если вместо одного из  $y_i$  мы подставили произведение, то именно его мы вынесем на первое место. Упорядочим скобки начиная с третьей, по возрастанию индекса  $i$  элементов  $y_i$ . Тогда тождественное соотношение



после подстановки элементов из  $L_s$  или из  $W_2$  будет иметь вид

$$\sum_{i, k_0, k_1, \dots, k_m} \alpha_{i, k_0, k_1, \dots, k_m} (y_0 b^{k_0}) (y_i b^{k_i}) (y_1 b^{k_1}) \dots (y_{i-1} b^{k_{i-1}}) (y_{i+1} b^{k_{i+1}}) \dots (y_m b^{k_m}). \quad (2)$$

Так как результат подстановки элементов из  $L_s$ , по нашему предположению, отличен от нуля, то хотя бы один из коэффициентов в сумме (2) отличен от нуля. Без ограничения общности будем считать, что таким ненулевым коэффициентом является  $\alpha_{i, k_0, k_1, \dots, k_m}$ .

Обозначим через  $\varphi$  подстановку элементов алгебры  $W_2$  и определим ее следующим образом:

$$\varphi(b) = \partial_2, \varphi(y_i) = t_1^m t_2^{k_i} \partial_1, \varphi(y_j) = t_2^{k_j} \partial_1, \text{ при } j \neq i.$$

Докажем, что в результате такой подстановки элементов алгебры  $W_2$  в сумму (2) остается единственное ненулевое слагаемое вида

$$\alpha_{i, k_0, k_1, \dots, k_m} (y_0 b^{k_0}) (y_i b^{k_i}) (y_1 b^{k_1}) \dots (y_{i-1} b^{k_{i-1}}) (y_{i+1} b^{k_{i+1}}) \dots (y_m b^{k_m}). \quad (3)$$

Рассмотрим любое другое слагаемое. Возможны два случая. В первом случае слагаемое имеет вид

$$\alpha_{i, p_0, p_1, \dots, p_m} (y_0 b^{p_0}) (y_i b^{p_i}) (y_1 b^{p_1}) \dots (y_{i-1} b^{p_{i-1}}) (y_{i+1} b^{p_{i+1}}) \dots (y_m b^{p_m}),$$

где  $(p_0, p_1, \dots, p_m) \neq (k_0, k_1, \dots, k_m)$ .

Чтобы такое слагаемое не было равно нулю, требуется выполнение следующих неравенств:  $p_0 \leq k_0$ ,  $p_1 \leq k_1, \dots, p_m \leq k_m$ . Но  $\sum_{i=0}^m p_i = k$  и  $\sum_{i=0}^m k_i = k$ , поэтому неравенства превращаются в равенства  $p_l = k_l, l = 0, \dots, m$ . Другими словами, приходим к слагаемому вида (3). Во втором случае слагаемое такое, что первые два сомножителя имеют вид  $(y_0 b^{p_0}) (y_j b^{p_j})$ , где  $i \neq j$ . Здесь возможны три подслучая. Если  $p_0 > k_0$ , то, исходя из вида подстановки  $\varphi$ ,  $y_0 b^{p_0} = 0$ . Аналогично, если  $p_j > k_j$ , то  $y_j b^{p_j} = 0$ . Остается третий вариант, когда  $p_0 \leq k_0$  и  $p_j \leq k_j$ . В этом случае результат произведения первых двух скобок равен

$$(-1)^{p_0+p_j} k_0(k_0-1) \dots (k_0-p_0) k_j(k_j-1) \dots (k_j-p_j) [t_2^{k_0-p_0} \partial_1, t_2^{k_j-p_j} \partial_1] = 0.$$

Таким образом, в результате такой подстановки элементов алгебры  $W_2$  в сумму (2) остается единственное ненулевое слагаемое. Заметим, что оно имеет вид  $\beta \partial_1$ , где  $\beta = (-1)^m \cdot m! \cdot \prod_{i=0}^m (k_i)!$ . А это значит, что тождество не выполняется в алгебре  $W_2$ . Теорема доказана.

Выражаю благодарность моему научному руководителю профессору Сергею Петровичу Мищенко за постановку задачи, постоянное внимание и интерес к работе.

### Библиографический список

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985. 448 с.
2. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods // Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Math. Soc., 2005. Vol. 122. 352 p.
3. Мищенко С. С. Новый пример многообразия алгебр Ли с дробной экспонентой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика и механика. 2011. № 6. С. 44–47.
4. Кириллов А. А., Молев А. И. Об алгебраической структуре алгебры Ли векторных полей. Препринт № 16. М.: Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша АН СССР, 1985. 23 с.
5. Malyusheva O. A., Mishchenko S. P., Vereokin A. B. Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents // Compt. rend. Acad. Bulg. Sci. 2013. Vol. 66, № 3. P. 321–330.

## On Subvariety of Variety Generated by a Simple Infinite Lie Algebra of Cartan Type General Series $W_2$

O. A. Bogdanchuk

Ulyanovsk State University, 42, Leo Tolstoy str., 432970, Ulyanovsk, Russia, bogdanchuk\_o\_a@mail.ru

We consider numerical characteristics of Lie algebras variety over a field of characteristic zero, basically, the exponent of variety. Here, was constructed the infinite series of varieties of Lie algebras with different fractional exponents, which belong to variety generated by a simple infinite Lie algebra of Cartan type general series  $W_2$ .

*Key words:* variety of Lie algebras, identity, exponent of variety.



## References

1. Bakhturin Iu. A. *Tozhdestva v algebrakh Li* [Identities in Lie algebras]. Moscow, Nauka, 1985, 448 p. (in Russian).
2. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. *Mathematical Surveys and Monographs*. Providence, RI, American Math. Soc., 2005, vol. 122, 352 p.
3. Mishchenko S. S. New example of a variety of Lie algebras with fractional exponent *Russian Math.* [Moscow Univ. Math. Bull.], 2011, vol. 66, pp. 264–266.
4. Kirillov A. A., Molev A. I. *On the algebraic structure of the Lie algebra of vector fields*. Preprint no. 16. Moscow, In-t prikl. matematiki im. M. V. Keldysha AN SSSR, 1985, 23 p. (in Russian).
5. Malyusheva O. A., Mishchenko S. P., Verevkin A. B. Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents. *Compt. rend. Acad. Bulg. Sci.*, 2013, vol. 66, no. 3, pp. 321–330.

УДК 517.518

# ВЕСОВАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СУММ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С. С. Волосивец<sup>1</sup>, Р. Н. Фадеев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, VolosivetsSS@mail.ru

<sup>2</sup>Аспирант кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, belal\_templier@mail.ru

Получены необходимые и достаточные условия  $L^p$ -интегрируемости со степенным весом функции  $f$ , представимой рядом по мультипликативной системе с обобщенно-монотонными коэффициентами. Интегрируемость мажоранты частичных сумм представляющего функцию ряда описывается теми же условиями. Кроме того, мы изучаем интегрируемость разностного отношения  $(f(x) - f(0))/x$ .

**Ключевые слова:** весовая  $L^p$ -интегрируемость, мультипликативная система, степенной вес, обобщенно-монотонная последовательность.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ ,  $2 \leq p_n \leq N$ . По определению  $m_0 = 1$ ,  $m_n = p_n m_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , тогда каждое  $x \in [0, 1)$  имеет разложение вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_n). \quad (1)$$

Разложение (1) будет единственным, если для  $x = k/m_l$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}_+$ ,  $0 < k < m_l$ , брать разложение с конечным числом  $x_n \neq 0$ . Каждое  $k \in \mathbb{Z}_+$  единственным образом представимо в виде  $k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}$ ,

$k_i \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_i)$ . Для  $x \in [0, 1)$  и  $k \in \mathbb{Z}_+$  положим по определению  $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / m_j\right)$ .

Система  $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  является ортонормированной на  $[0, 1)$  и полной в  $L^1[0, 1)$ . Подробнее о ее свойствах см. [1, § 1.5]. Измеримая на  $[0, 1)$  функция  $f(x)$  принадлежит пространству  $L^r_{\alpha}[0, 1)$ ,  $1 \leq r < \infty$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , если конечна норма  $\|f\|_{r, \alpha} = \left(\int_0^1 |f(x)|^r x^{\alpha} dx\right)^{1/r}$ .

Сумма  $\sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) =: D_n(x)$  называется  $n$ -м ядром Дирихле. Для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x) \quad (2)$$





**References**

1. Bakhturin Iu. A. *Tozhdestva v algebrakh Li* [Identities in Lie algebras]. Moscow, Nauka, 1985, 448 p. (in Russian).
2. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. *Mathematical Surveys and Monographs*. Providence, RI, American Math. Soc., 2005, vol. 122, 352 p.
3. Mishchenko S. S. New example of a variety of Lie algebras with fractional exponent *Russian Math.* [Moscow Univ. Math. Bull.], 2011, vol. 66, pp. 264–266.
4. Kirillov A. A., Molev A. I. *On the algebraic structure of the Lie algebra of vector fields*. Preprint no. 16. Moscow, In-t prikl. matematiki im. M. V. Keldysha AN SSSR, 1985, 23 p. (in Russian).
5. Malyusheva O. A., Mishchenko S. P., Verevkin A. B. Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents. *Compt. rend. Acad. Bulg. Sci.*, 2013, vol. 66, no. 3, pp. 321–330.

УДК 517.518

## ВЕСОВАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СУММ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С. С. Волосивец<sup>1</sup>, Р. Н. Фадеев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, VolosivetsSS@mail.ru

<sup>2</sup>Аспирант кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, belal\_templier@mail.ru

Получены необходимые и достаточные условия  $L^p$ -интегрируемости со степенным весом функции  $f$ , представимой рядом по мультипликативной системе с обобщенно-монотонными коэффициентами. Интегрируемость мажоранты частичных сумм представляющего функцию ряда описывается теми же условиями. Кроме того, мы изучаем интегрируемость разностного отношения  $(f(x) - f(0))/x$ .

*Ключевые слова:* весовая  $L^p$ -интегрируемость, мультипликативная система, степенной вес, обобщенно-монотонная последовательность.

**ВВЕДЕНИЕ**

Пусть  $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ ,  $2 \leq p_n \leq N$ . По определению  $m_0 = 1$ ,  $m_n = p_n m_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , тогда каждое  $x \in [0, 1)$  имеет разложение вида

$$x = \sum_{n=1}^\infty x_n/m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_n). \tag{1}$$

Разложение (1) будет единственным, если для  $x = k/m_l$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}_+$ ,  $0 < k < m_l$ , брать разложение с конечным числом  $x_n \neq 0$ . Каждое  $k \in \mathbb{Z}_+$  единственным образом представимо в виде  $k = \sum_{i=1}^\infty k_i m_{i-1}$ ,

$k_i \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_i)$ . Для  $x \in [0, 1)$  и  $k \in \mathbb{Z}_+$  положим по определению  $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^\infty x_j k_j / m_j\right)$ .

Система  $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  является ортонормированной на  $[0, 1)$  и полной в  $L^1[0, 1)$ . Подробнее о ее свойствах см. [1, § 1.5]. Измеримая на  $[0, 1)$  функция  $f(x)$  принадлежит пространству  $L^r_\alpha[0, 1)$ ,  $1 \leq r < \infty$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , если конечна норма  $\|f\|_{r,\alpha} = \left(\int_0^1 |f(x)|^r x^\alpha dx\right)^{1/r}$ .

Сумма  $\sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) =: D_n(x)$  называется  $n$ -м ядром Дирихле. Для ряда

$$\sum_{k=0}^\infty a_k \chi_k(x) \tag{2}$$



рассмотрим частичные суммы  $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и максимальные функции  $M(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} |S_{m_n}(x)|$ ,  $M^*(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)|$ . Будем писать  $\{a_k\}_{k=0}^\infty \in GM$ , если

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq C a_n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad |a_0 - a_1| \leq C a_0. \quad (3)$$

Можно показать, что для  $\{a_k\}_{k=0}^\infty \in GM$  при дополнительном условии  $\sum_{k=1}^\infty a_k/k < \infty$  ряд (2) сходится при  $x \neq 0$  (лемма 5). Класс  $GM$ , введенный С. Ю. Тихоновым [2], включает в себя класс последовательностей  $RBVS$ , введенный Л. Лейндлером (L. Leindler) [3] и определяемый неравенством  $\sum_{k=n}^\infty |a_k - a_{k+1}| \leq C a_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Он содержит также класс  $QM$  квазимоноотонных последовательностей, рассматривавшийся А. А. Конюшковым [4]. Далее,  $\Delta a_j = a_j - a_{j+1}$ ,  $\Delta^2 a_j = a_j - 2a_{j+1} + a_{j+2}$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ .

Обзор ранних работ по проблеме  $L^r$ -интегрируемости со степенным весом суммы тригонометрического ряда можно найти в [5]. В том числе в [5] даны критерии принадлежности сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами указанным выше классам. В последнее время много работ посвящено ослаблению условия монотонности при сохранении критерия интегрируемости. Отметим в этой связи работы [2, 3, 6]. В статье Ф. Морица [7] было дано условие  $L^r$ -интегрируемости не суммы ряда (2), а мажоранты его частичных сумм  $M^*(x)$  для ряда по системе Уолша с монотонными коэффициентами. Там же были даны оценки  $L^r$ -нормы подобных рядов снизу. Другие результаты типа теоремы Харди – Литтлвуда для рядов (2) с монотонными коэффициентами были приведены в статье [8] без доказательства. В статье С. С. Волосивца [9] аналог теоремы Харди – Литтлвуда был получен для рядов (2) с коэффициентами классов  $RBVS$  и  $QM$ . В нашей работе [10] даны оценки наилучших приближений функций сверху в  $L^r$  и пространстве Харди, при условии, что разности коэффициентов удовлетворяют некоторому условию, близкому к изучавшимся Р. Аски (R. Askey) и С. Вейнгером (S. Wainger) [11]. Следует также отметить работу Т. М. Вуколовой и М. И. Дьяченко [12], в которой получены двусторонние одинаковые по порядку оценки  $L^r$ -нормы косинус-ряда с выпуклыми коэффициентами и синус-ряда с монотонными коэффициентами, причем  $r \in (0, \infty)$ .

Далее, выражение  $A(f) \asymp B(f)$  означает, что  $C_1 A(f) \leq B(f) \leq C_2(f)$ , где  $C_1, C_2 > 0$  не зависят от  $f$ . Константы  $C, C_1, C_2, \dots$  являются разными в различных случаях.

### 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

**Лемма 1** [1, гл. 1, § 1.5; 13, гл. 4, § 3]. 1) Пусть  $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$ . Тогда  $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n]}(x)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , где  $X_E$  – характеристическая функция множества  $E$ .

2) Для любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $x \in (0, 1)$  имеет место неравенство  $|D_n(x)| \leq N/x$ , где  $p_i \leq N$  для всех  $i \in \mathbb{N}$ .

**Лемма 2.** [2] Пусть  $\{a_n\}_{n=0}^\infty \in GM$ , тогда справедливы неравенства

$$\sum_{j=k}^{n-1} |a_j - a_{j+1}| \leq C \left( \sum_{j=k}^{n-1} a_j/j + a_k \right), \quad n \geq k + 1, \quad n, k \in \mathbb{Z}_+,$$

и  $a_n \leq C a_j$ ,  $j \leq n \leq 2j$ ,  $a_1 \leq C a_0$ .

В леммах 3 и 4 приведены знаменитые неравенства Харди – Литтлвуда [14, теорема 346].

**Лемма 3.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $r > 1$ ,  $a_n \geq 0$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-r} \left( \sum_{i=1}^n a_i \right)^p \leq C(p, r) \sum_{n=1}^\infty n^{-r} (n a_n)^p.$$

**Лемма 4.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $s < 1$ ,  $a_n \geq 0$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-s} \left( \sum_{i=n}^\infty a_i \right)^p \leq C(p, s) \sum_{n=1}^\infty n^{-s} (n a_n)^p.$$



Аналогично как в статье [2], с помощью лемм 1 и 2 показывается

**Лемма 5.** Пусть  $\{a_n\}_{n=0}^\infty \in GM$  и  $\sum_{k=1}^\infty a_k/k < \infty$ . Тогда ряд (2) сходится при  $x \neq 0$ .

**Лемма 6.** Пусть  $f \in L^1[0, a)$  ( $f \in L^1_{loc}[0, a)$  при  $a = +\infty$ ),  $1 \leq p < \infty$ ,  $f(x) \geq 0$  на  $[0, a)$  и  $F(x) = x^{-1} \int_0^x f(t) dt$ ,  $x \in (0, a)$ . Тогда при  $r < p - 1$  справедливо неравенство

$$\int_0^a x^r F^p(x) dx \leq (p/(r-1))^p \int_0^a x^r f^p(x) dx.$$

Неравенство леммы 6 принадлежит Г. Харди [14, теорема 330].

Последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  называется квази убывающей, если  $a_n \geq C a_{n+j}$  при  $1 \leq j \leq n$ .

**Лемма 7. 1)** Пусть последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  квази убывает, а последовательность  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  не отрицательна. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^p n^{p-1} \sum_{k=n}^\infty \lambda_k \leq C \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^p, \quad p > 1.$$

2) Пусть последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  не отрицательна, а последовательность  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  положительна,  $p \geq 1$ . Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n \left( \sum_{k=n}^\infty a_k \right)^p \leq p^p \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{1-p} \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^p a_n^p.$$

Лемма 7 доказана Л. Лейндлером (L. Leindler) в [15, теорема 1] и [16].

**Лемма 8.** Пусть  $F_n(x) = \sum_{k=1}^n D_k(x)/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда для  $x \in (0, 1)$  и  $n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство  $|nF_n(x)| \leq Cx^{-2}$ .

Лемму 8, доказанную С. С. Волосивцом, можно найти в [17].

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Теорема 1.** Пусть  $-1 < \alpha < r-1$ ,  $r \geq 1$ ,  $\{a_k\}_{k=0}^\infty \in GM$  и  $S_{r,\alpha}(a) := \left( \sum_{j=0}^\infty a_j^r (j+1)^{r-2-\alpha} \right)^{1/r} < \infty$ .

Тогда  $M^*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^{n-1} a_j \chi_j(x) \right|$  принадлежит  $L^r_\alpha[0, 1)$  и при этом  $\|M^*\|_{r,\alpha} \leq C S_{r,\alpha}(a)$ .

**Доказательство.** Отметим, что в силу условия  $\alpha < r - 1$  из неравенства  $S_{r,\alpha}(a) < \infty$  по неравенству Гельдера следует, что  $\sum_{j=1}^\infty a_j/j < \infty$  и по лемме 5 ряд (2) сходится при  $x \neq 0$ . Пусть  $x \in [1/(p+1), 1/p)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Тогда с помощью преобразования Абеля и лемм 1, 2 имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=p}^{n-1} a_j \chi_j(x) \right| &= \left| \sum_{j=p}^{n-2} (a_j - a_{j+1}) D_{j+1}(x) + a_{n-1} D_n(x) - a_p D_p(x) \right| \leq \\ &\leq N x^{-1} \left( \sum_{j=p}^{n-2} |a_j - a_{j+1}| + a_{n-1} + a_p \right) \leq C_1 N x^{-1} \left( \sum_{j=p}^{n-1} a_j/j + a_p + a_{n-1} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Если  $n - 1 \leq 2p$ , то  $a_{n-1} \leq C_2 a_p$  по лемме 2. Если же  $n - 1 > 2p$ , то справедливо неравенство  $\sum_{j=[(n-1)/2]}^{n-1} a_j/j \geq C_3 a_{n-1}$ . Таким образом в правой части (4) можно убрать  $a_{n-1}$  и тогда

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} a_j \chi_j(x) \right| \leq C_4 \left( \sum_{j=0}^{p-1} a_j + p a_p + p \sum_{j=p}^{n-1} a_j/j \right).$$





Как и выше показывается, что  $a_p \leq C_5 \sum_{j=[(p-1)/2]}^{p-1} a_j/j$ ,  $p \geq 3$ , и  $pa_p \leq C_5 \sum_{j=0}^{p-1} a_j$ ,  $p \leq 2$ . Поэтому

$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} a_j \chi_j(x) \right| \leq C_6 \left( \sum_{j=0}^{p-1} a_j + p \sum_{j=p}^{n-1} a_j/j \right).$$

Теперь по определению  $M^*(x)$  имеем  $M^*(x) \leq C_6 \left( \sum_{j=0}^{p-1} a_j + p \sum_{j=p}^{\infty} a_j/j \right)$  и

$$\begin{aligned} \int_0^1 (M^*(x))^r x^\alpha dx &= \sum_{p=1}^{\infty} \int_{1/(p+1)}^{1/p} (M^*(x))^r x^\alpha dx \leq \\ &\leq C_7 \sum_{p=1}^{\infty} \int_{1/(p+1)}^{1/p} \left[ \left( \sum_{j=0}^{p-1} a_j \right)^r + p^r \left( \sum_{j=p}^{\infty} a_j/j \right)^r \right] p^{-\alpha} dx \leq \\ &\leq C_8 \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2-\alpha} \left( \sum_{j=1}^p a_{j-1} \right)^r + C_8 \sum_{p=1}^{\infty} p^{r-2-\alpha} \left( \sum_{j=p}^{\infty} a_j/j \right)^r. \end{aligned} \quad (5)$$

При  $2 + \alpha > 1$  применяем лемму 3 и получаем:

$$\sum_{p=1}^{\infty} p^{-2-\alpha} \left( \sum_{j=1}^p a_{j-1} \right)^r \leq C_9 \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2-\alpha} (pa_{p-1})^r = C_9 \sum_{p=1}^{\infty} p^{r-2-\alpha} a_{p-1}^r. \quad (6)$$

При  $r - \alpha - 2 > -1$ , т.е. при  $\alpha < r - 1$ , по лемме 4 находим, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} p^{r-2-\alpha} \left( \sum_{j=p}^{\infty} a_j/j \right)^r \leq C_{10} \sum_{p=1}^{\infty} p^{r-2-\alpha} (pa_p/p)^r = C_{10} \sum_{p=1}^{\infty} p^{r-2-\alpha} a_p^r. \quad (7)$$

Объединяя неравенства (5), (6) и (7), получаем:

$$\int_0^1 (M^*(x))^r x^\alpha dx \leq C_{11} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^{r+\alpha-2} a_j^r. \quad \square$$

**Теорема 2.** Пусть  $-1 < \alpha < r - 1$ ,  $r > 1$ ,  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in GM$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k/k < \infty$ . Если сумма  $f(x)$  ряда (2) принадлежит  $L_\alpha^r[0, 1]$ , то  $S_{r,\alpha}(a) \leq C \|f\|_{r,\alpha} < \infty$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $F(x) = \int_0^x f(u) du$ . В силу ортонормированности системы  $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$  и леммы 1 имеем:

$$F(1/m_l) = \int_0^{1/m_l} f(u) du = m_l^{-1} \int_0^1 f(u) D_{m_l}(u) du = m_l^{-1} \sum_{k=0}^{m_l-1} a_k.$$

Если  $G(x) = \int_0^x |f(u)| du$ , то  $|F(x)| \leq G(x)$  и по лемме 6 при  $\alpha < r - 1$

$$\int_0^1 (x^{-1}G(x))^r x^\alpha dx \leq C \int_0^1 |f(x)|^r x^\alpha dx.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{\alpha-r} G^r(x) dx &= \sum_{l=0}^{\infty} \int_{1/m_{l+1}}^{1/m_l} x^{-r} G^r(x) x^\alpha dx \geq \sum_{l=0}^{\infty} G^r(1/m_{l+1}) (1/m_l)^{\alpha-r} (m_l^{-1} - m_{l+1}^{-1}) \geq \\ &\geq 2^{-1} \sum_{l=1}^{\infty} F^r(1/m_l) m_{l-1}^{r-\alpha-1} \geq C_1 \sum_{l=0}^{\infty} \left( m_l^{-1} \sum_{k=0}^{m_l-1} a_k \right)^r m_l^{r-\alpha-1} \geq C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right)^r n^{-\alpha-2}. \end{aligned}$$



Чтобы получить последнее неравенство, надо заметить, что  $\sum_{k=0}^{m_l-1} a_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} a_k$  при  $n \in [m_{l-1}, m_l - 1]$  и  $n^{-\alpha-2} \leq N^{\alpha+2} m_l^{-\alpha-2}$  при тех же  $n$ , поэтому

$$\sum_{n=m_{l-1}}^{m_l-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right)^r n^{-\alpha-2} \leq \sum_{n=m_{l-1}}^{m_l-1} n^{-\alpha-2} \left( \sum_{k=0}^{m_l-1} a_k \right)^r \leq C_3 m_l^{-\alpha-1} \left( \sum_{k=0}^{m_l-1} a_k \right)^r.$$

Наконец, согласно части 1 леммы 7 и ввиду второго свойства  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in GM$  из леммы 2 находим при  $-\alpha - 2 < -1$ , т.е. при  $\alpha > -1$ , что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha-2} \left( \sum_{k=1}^n a_{k-1} \right)^r \geq C_4 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}^r n^{r-1} \sum_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha-2} \geq C_5 \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^{r-\alpha-2} a_j^r. \quad \square$$

**Теорема 3.** Пусть  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  не отрицательна, квази убывает и  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty$ ,  $r \geq 1$ ,  $\alpha < -1$  и  $f_d(x)$  равна сумме ряда  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(1 - \chi_i(x))$ . Тогда

$$\|f_d\|_{r,\alpha} \asymp \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha-2} \left( \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^r \right)^{1/r}.$$

**Доказательство.** Учитывая, что  $\chi_n(x) = 1$  при  $n < m_{k-1}$  на  $[1/m_k, 1/m_{k-1})$ , получаем, что при  $x \in [1/m_k, 1/m_{k-1})$

$$|f_d(x)| = \left| \sum_{n=m_{k-1}}^{\infty} a_n(1 - \chi_n(x)) \right| \leq 2 \sum_{n=m_{k-1}}^{\infty} a_n,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_d(x)|^r x^\alpha dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/m_k}^{1/m_{k-1}} |f_d(x)|^r x^\alpha dx \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\alpha} (1/m_{k-1} - 1/m_k) \left( 2 \sum_{n=m_{k-1}}^{\infty} a_n \right)^r \leq C_1 \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\alpha-1} \left( \sum_{n=m_{k-1}}^{\infty} a_n \right)^r \leq \\ &\leq C_1 \left( m_1^{-\alpha-1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^r + \sum_{k=2}^{\infty} m_k^{-\alpha-1} \left[ \sum_{j=m_{k-2}}^{m_{k-1}-1} \left( \sum_{n=j}^{\infty} a_n \right)^r (m_{k-1} - m_{k-2})^{-1} \right] \right) \leq \\ &\leq C_2 \left( m_1^{-\alpha-1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^r + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{n=j}^{\infty} a_n \right)^r j^{-\alpha-2} \right) \leq C_2 \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{n=j}^{\infty} a_n \right)^r j^{-\alpha-2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, при  $x \in [1/m_k, 1/m_{k-1})$  и  $n \in [m_{k-1}, 2m_{k-1})$  верно неравенство

$$\operatorname{Re}(1 - \chi_n(x)) = 1 - \cos(2\pi x_k/p_k) \geq 2 \sin^2 \pi/N > 0,$$

так как  $x_k$  из разложения (1) принадлежит  $[1, p_k - 1] \cap \mathbb{Z}$ . Поэтому

$$\int_0^1 |f_d(x)|^r x^\alpha dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/m_k}^{1/m_{k-1}} C_3 \left( \sum_{j=m_k}^{2m_{k-1}-1} a_j \right)^r (1/m_k)^\alpha dx.$$

Но в силу квази убывания  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\sum_{j=m_{k-1}}^{2m_{k-1}-1} a_j \geq C_4 \sum_{j=2m_{k-1}}^{4m_{k-1}-1} a_j \geq C_4^2 \sum_{j=4m_{k-1}}^{8m_{k-1}-1} a_j \geq \dots,$$



откуда в силу ограниченности  $m_k/m_{k-1}$  следует, что  $\sum_{j=m_{k-1}}^{2m_{k-1}-1} a_j \geq C_5 \sum_{j=m_{k-1}}^{m_k-1} a_j$ . Таким образом,

$$\int_0^1 |f_d(x)|^r x^\alpha dx \geq C_6 \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\alpha-1} \left( \sum_{j=m_{k-1}}^{m_k-1} a_j \right)^r.$$

Пусть  $b_k = \sum_{j=m_{k-1}}^{m_k-1} a_j$  и  $B_k = \sum_{j=k}^{\infty} b_j = \sum_{j=m_{k-1}}^{\infty} a_j$ . По части 2) леммы 7 имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\alpha-1} B_k^r \leq r^r \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-(\alpha+1)(1-r)} \left( \sum_{i=1}^n m_i^{-\alpha-1} \right)^r b_n^r \leq r^r \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-(\alpha+1)(1-r+r)} b_n^r.$$

Аналогично теореме 2 доказывается, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-\alpha-1} B_n^r \geq C_7 \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\alpha-2} \left( \sum_{i=j}^{\infty} a_i \right)^r.$$

Из полученных неравенств следует утверждение теоремы.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $r$  удовлетворяют условию теоремы 3,  $\alpha < r - 1$ ,  $f(x)$  — сумма ряда (2). Тогда функция  $(f(x) - f(0))/x$  принадлежит  $L_\alpha^r[0, 1)$  в том и только в том случае, когда сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-\alpha-2} \left( \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^r$ .

**Замечание 1.** Теоремы 1 и 2 обобщают результаты из [9], теорема 3 является мультипликативным аналогом теоремы 6.7 из [5].

**Теорема 4.** Пусть  $-1 < \alpha < 2r - 1$ ,  $r \geq 1$ ,  $\Delta^2 a_k \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$  и  $Q_{r,\alpha}(a) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{3r-2-\alpha} (\Delta^2 a_i)^r \right)^{1/r} < \infty$ . Тогда сумма  $f(x)$  ряда (2) принадлежит  $L_\alpha^r[0, 1)$  и  $\|f\|_{r,\alpha} \leq C Q_{r,\alpha}(a)$ .

**Доказательство.** В силу условия имеем  $\Delta a_k = \sum_{i=k}^{\infty} \Delta^2 a_i \geq 0$ . Применяя дважды преобразование Абеля и используя леммы 1 и 8, стандартным образом получаем  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^2 a_k (k+1) F_{k+1}(x)$ ,  $x \in (0, 1)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|^r x^\alpha dx &\leq 2^{r-1} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{1/(l+1)}^{1/l} \left| \sum_{j=0}^{l-1} \Delta^2 a_j (j+1) F_{j+1}(x) \right|^r x^\alpha dx + \\ &+ 2^{r-1} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{1/(l+1)}^{1/l} \left| \sum_{j=l}^{\infty} \Delta^2 a_j (j+1) F_{j+1}(x) \right|^r x^\alpha dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Так как  $|D_j(x)| \leq j$ , то  $|nF_n(x)| \leq \sum_{j=1}^n |D_j(x)| \leq n^2$ . Поэтому по лемме 3 при  $\alpha > -1$  имеем:

$$I_1 \leq C_1 \sum_{l=1}^{\infty} l^{-\alpha-2} \left( \sum_{j=1}^l j^2 \Delta^2 a_{j-1} \right)^r \leq C_2 \sum_{l=1}^{\infty} l^{-\alpha-2} (l^3 \Delta^2 a_{l-1})^r = C_2 \sum_{l=1}^{\infty} l^{3r-\alpha-2} (\Delta^2 a_{l-1})^r. \quad (8)$$

С другой стороны, по лемме 4 и лемме 8 при  $2r - 2 - \alpha > -1$  находим, что

$$2^{1-r} I_2 \leq \sum_{l=1}^{\infty} l^{-\alpha-2} \left( \sum_{j=l}^{\infty} C_3 l^2 \Delta^2 a_j \right)^r = C_3^r \sum_{l=1}^{\infty} l^{2r-\alpha-2} \left( \sum_{j=l}^{\infty} \Delta^2 a_j \right)^r \leq C_4 \sum_{l=1}^{\infty} l^{3r-\alpha-2} (\Delta^2 a_l)^r. \quad (9)$$

Из (8) и (9) вытекает неравенство теоремы.  $\square$



**Замечание 2.** Теорема 4 близка по своему содержанию к оценке сверху в теореме из [12], однако в последней работе оценка для косинус-ряда была получена в терминах первых разностей выпуклых коэффициентов.

### Библиографический список

1. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.
2. Tikhonov S. Trigonometric series with general monotone coefficients // *J. Math. Anal. Appl.* 2007. Vol. 326, № 1. P. 721–735.
3. Leindler L. A new class of numerical sequences and its application to sine and cosine series // *Analysis Math.* 2002. Vol. 28, № 4. P. 279–286.
4. Конюшков А. А. Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // *Мат. сб.* 1958. Т. 44, № 1. С. 53–84.
5. Boas R. P. Integrability theorems for trigonometric transforms. Berlin : Springer, 1967. 68 p.
6. Dyachenko M., Tikhonov S. Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // *Studia Math.* 2009. Vol. 193, № 3. P. 285–306.
7. Moricz F. On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero // *Acta Math. Hung.* 1983. Vol. 38, № 1–4. P. 183–189.
8. Тиман М. Ф., Рубинштейн А. И. О вложении классов функций, определенных на нуль-мерных группах // *Изв. вузов. Математика.* 1980. № 6. С. 66–76.
9. Волосивец С. С. О некоторых условиях в теории рядов по мультипликативным системам // *Analysis Math.* 2007. Vol. 33, № 3. P. 227–246.
10. Volosivets S. S., Fadeev R. N. Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems // *Analysis Math.* 2011. Vol. 37, № 3. P. 215–238.
11. Askey R., Wainger S. Integrability theorems for Fourier series // *Duke Math. J.* 1966. Vol. 33, № 2. P. 223–228.
12. Вуколова Т. М., Дьяченко М. И. О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика и механика.* 1994. № 3. С. 22–31.
13. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.
14. Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. 576 с.
15. Leindler L. Inequalities of Hardy – Littlewood type // *Analysis Math.* 1976. Vol. 2, № 2. P. 117–123.
16. Leindler L. Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood // *Acta Sci. Math. (Szeged).* 1970. Vol. 31, № 1–2. P. 279–285.
17. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Hölder and  $L^p$  norm // *East J. Approximations.* 2009. Vol. 15, № 2. P. 143–158.

## Weighted Integrability of Sums of Series with Respect to Multiplicative Systems

S. S. Volosivets, R. N. Fadeev

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, VolosivetsSS@mail.ru, belat\_templier@mail.ru

A necessary and sufficient condition for  $L^p$ -integrability with power weight of a function  $f$  represented by the series with respect to multiplicative systems with generalized monotone coefficients is obtained. The integrability of the majorant of partial sums of a representing series is also described by the same conditions. In addition we study the integrability of difference quotient  $(f(x) - f(0))/x$ .

*Key words:* weighted  $L^p$ -integrability, multiplicative system, power weight, generalized monotone sequences.

### References

1. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh series and transforms. Theory and applications.* Dordrecht, Kluwer, 1991.
2. Tikhonov S. Trigonometric series with general monotone coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 326, no. 1, pp. 721–735.
3. Leindler L. A new class of numerical sequences and its application to sine and cosine series. *Analysis Math.*, 2002, vol. 28, no. 4, pp. 279–286.
4. Konyushkov A. A. Nailuchshee priblizhenie trigonometricheskimi polinomami i koefitsienty Fur'e [The best approximation by trigonometrical polynomials and Fourier coefficients]. *Mat. sbornik*, 1958, vol. 44, no. 1, pp. 53–84 (in Russian).
5. Boas R. P. *Integrability theorems for trigonometric transforms.* Berlin, Springer, 1967.
6. Dyachenko M., Tikhonov S. Integrability and continuity of functions represented by trigonometric



- series: coefficients criteria. *Studia Math.*, 2009, vol. 193, no. 3, pp. 285–306.
7. Moricz F. On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero. *Acta Math. Hung.*, 1983, vol. 38, no. 1–4, pp. 183–189.
8. Timan M. F., Rubinstein A.I. On embedding of function classes defined on zero-dimensional groups. *Izvestiya vuzov. Matematika*. [Soviet Math.], 1980, no. 6, pp. 66–76 (in Russian).
9. Volosivets S. S. On certain conditions in the theory of series with respect to multiplicative systems. *Analysis Math.*, 2007, vol. 33, no. 3, pp. 227–246 (in Russian).
10. Volosivets S. S., Fadeev R. N. Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems. *Analysis Math.*, 2011, vol. 37, no. 3, pp. 215–238.
11. Askey R., Wainger S. Integrability theorems for Fourier series. *Duke Math. J.*, 1966, vol. 33, no. 2, pp. 223–228.
12. Vukolova T. M., Dyachenko M. I. On the properties of trigonometric series sums with monotone coefficients. *Vestnik Mosk. Universiteta. Ser. Matem. mekh.*, 1994, no. 3, pp. 22–31 (in Russian).
13. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzhafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funktsii i garmonicheskii analiz na nul'-merykh gruppah* [Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups]. Baku, Elm, 1980 (in Russian).
14. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities*. Cambridge, Cambridge University Press, 1934.
15. Leindler L. Inequalities of Hardy–Littlewood type. *Analysis Math.*, 1976, vol. 2, no. 2, pp. 117–123.
16. Leindler L. Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 1970, vol. 31, no. 1–2, pp. 279–285.
17. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier–Vilenkin series in Hölder and  $L^p$  norm. *East J. Approximations.*, 2009, vol. 15, no. 2, pp. 143–158.

УДК 517.937, 517.983

## О СОСТОЯНИЯХ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Б. Диденко

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, vladimir.didenko@gmail.com

Исследуемому линейному дифференциальному оператору (уравнению) с неограниченными периодическими операторными коэффициентами, действующему в одном из банаховых пространств векторных функций, определенных на всей оси, сопоставляется разностный оператор (разностное уравнение) с постоянным операторным коэффициентом, определенный в соответствующем банаховом пространстве двусторонних векторных последовательностей. Для дифференциального и разностного оператора доказаны утверждения о совпадении размерностей их ядер и кообразов, одновременной дополняемости ядер и образов, одновременной обратимости, получены утверждения о взаимосвязи спектров.

*Ключевые слова:* дифференциальные операторы, разностные операторы, состояния обратимости, спектр.

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$-\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $A(t) : D(A(t)) \subset X \rightarrow X$  — семейство линейных замкнутых операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве  $X$ .

Предполагается корректная разрешимость задачи Коши [1]

$$x(s) = x_0 \in D(A(s)), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

для однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \geq s. \quad (3)$$



- series: coefficients criteria. *Studia Math.*, 2009, vol. 193, no. 3, pp. 285–306.
7. Moricz F. On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero. *Acta Math. Hung.*, 1983, vol. 38, no. 1–4, pp. 183–189.
8. Timan M. F., Rubinstein A.I. On embedding of function classes defined on zero-dimensional groups. *Izvestiya vuzov. Matematika*. [Soviet Math.], 1980, no. 6, pp. 66–76 (in Russian).
9. Volosivets S. S. On certain conditions in the theory of series with respect to multiplicative systems. *Analysis Math.*, 2007, vol. 33, no. 3, pp. 227–246 (in Russian).
10. Volosivets S. S., Fadeev R. N. Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems. *Analysis Math.*, 2011, vol. 37, no. 3, pp. 215–238.
11. Askey R., Wainger S. Integrability theorems for Fourier series. *Duke Math. J.*, 1966, vol. 33, no. 2, pp. 223–228.
12. Vukolova T. M., Dyachenko M. I. On the properties of trigonometric series sums with monotone coefficients. *Vestnik Mosk. Universiteta. Ser. Matem. mekh.*, 1994, no. 3, pp. 22–31 (in Russian).
13. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzhafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funktsii i garmonicheskii analiz na nul'-merykh gruppah* [Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups]. Baku, Elm, 1980 (in Russian).
14. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. *Inequalities*. Cambridge, Cambridge University Press, 1934.
15. Leindler L. Inequalities of Hardy–Littlewood type. *Analysis Math.*, 1976, vol. 2, no. 2, pp. 117–123.
16. Leindler L. Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 1970, vol. 31, no. 1–2, pp. 279–285.
17. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier–Vilenkin series in Hölder and  $L^p$  norm. *East J. Approximations.*, 2009, vol. 15, no. 2, pp. 143–158.

УДК 517.937, 517.983

## О СОСТОЯНИЯХ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Б. Диденко

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, vladimir.didenko@gmail.com

Исследуемому линейному дифференциальному оператору (уравнению) с неограниченными периодическими операторными коэффициентами, действующему в одном из банаховых пространств векторных функций, определенных на всей оси, сопоставляется разностный оператор (разностное уравнение) с постоянным операторным коэффициентом, определенный в соответствующем банаховом пространстве двусторонних векторных последовательностей. Для дифференциального и разностного оператора доказаны утверждения о совпадении размерностей их ядер и кообразов, одновременной дополняемости ядер и образов, одновременной обратимости, получены утверждения о взаимосвязи спектров.

*Ключевые слова:* дифференциальные операторы, разностные операторы, состояния обратимости, спектр.

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$-\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $A(t) : D(A(t)) \subset X \rightarrow X$  — семейство линейных замкнутых операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве  $X$ .

Предполагается корректная разрешимость задачи Коши [1]

$$x(s) = x_0 \in D(A(s)), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

для однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \geq s. \quad (3)$$





Она ведет к существованию семейства эволюционных операторов  $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End } X$ , где  $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : s \leq t\}$  и  $\text{End } X$  — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в  $X$ .

**Определение 1.** Отображение  $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End } X$  называется *сильно непрерывным семейством эволюционных операторов («вперед»)*, если выполнены следующие условия:

- 1)  $\mathcal{U}(t, t) = I$  — тождественный оператор для любого  $t \in \mathbb{R}$ ;
- 2)  $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$  для всех  $t \leq s \leq \tau$  из  $\mathbb{R}$ ;
- 3) отображение  $(t, s) \mapsto \mathcal{U}(t, s)x : \Delta \rightarrow X$  непрерывно для любого  $x \in X$ ;
- 4) существуют такие постоянные  $M \geq 1$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ , что  $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M \exp(\alpha(t - s))$ ,  $(t, s) \in \Delta$ .

Если для  $\mathcal{U}$  выполняется условие периодичности

- 5)  $\mathcal{U}(t + w, s + w) = \mathcal{U}(t, s)$  для всех  $(t, s)$  из  $\Delta$ ,

то семейство  $\mathcal{U}$  называется *периодическим* периода  $w$  (*w-периодическим*).

Будем говорить, что семейство эволюционных операторов  $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End } X$  *решает абстрактную задачу Коши* (2), (3), если для любого  $s \in \mathbb{R}$  существует плотное в  $X$  подпространство  $X_s$  из  $D(A(s))$  такое, что для каждого  $x_0 \in X_s$  функция  $x(t) = \mathcal{U}(t, s)x_0$  дифференцируема при всех  $t \geq s$ ,  $x(t) \in D(A(t))$ , и выполнены равенства (2), (3). При наличии такого семейства эволюционных операторов  $\mathcal{U}$  будем говорить, что *задача Коши корректно разрешима*.

Отметим, что если функция  $A$  из уравнений (1), (3) периодична периода  $w$  ( $A(t + w) = A(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ) и семейство  $\mathcal{U}$  решает задачу Коши (2), (3), то семейство эволюционных операторов  $\mathcal{U}$  также периодически (выполнено условие 5 из определения 1).

Если функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow X$  принадлежит линейному пространству  $L^1_{loc}(\mathbb{R}, X)$  локально суммируемых измеримых по Бохнеру (классов) функций, определенных на  $\mathbb{R}$  со значениями в  $X$ , то слабым решением уравнения (1) (при условии, что семейство  $\mathcal{U}$  решает задачу Коши (2), (3)) называется любая непрерывная функция  $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ , удовлетворяющая при всех  $(t, s) \in \Delta$  равенствам

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau. \quad (4)$$

В дальнейшем слово «слабое» будет опускаться.

В статье рассматриваются следующие функциональные пространства. Символом  $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$  будем обозначать банахово пространство непрерывных и ограниченных на всей вещественной оси  $\mathbb{R}$  функций, принимающих свои значения в пространстве  $X$ , с нормой, определяемой равенством  $\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$ . Через  $C_0(\mathbb{R}, X)$  обозначим замкнутое подпространство из  $C_b(\mathbb{R}, X)$  функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Символом  $C_w = C_w(\mathbb{R}, X)$  будем обозначать замкнутое подпространство из  $C_b(\mathbb{R}, X)$  периодических периода  $w$  функций. Через  $L^p = L^p(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , обозначим банахово пространство измеримых по Бохнеру функций, действующих из  $\mathbb{R}$  в  $X$ , для которых конечна величина (принимаемая за норму в соответствующем пространстве)  $\|x\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}} \|x(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p}$ ,  $p \neq \infty$ ,  $\|x\|_{\infty} = \text{ess sup}_{\tau \in \mathbb{R}} \|x(\tau)\|$ ,  $p = \infty$ . Символом  $S^p(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty)$ , обозначим пространство Степанова локально суммируемых со степенью  $p$  измеримых на  $\mathbb{R}$  со значениями в  $X$  функций, для которых конечна величина (принимаемая за норму)  $\|x\|_{S^p} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left( \int_0^1 \|x(s + t)\|^p ds \right)^{1/p}$ . Через  $L^p_w = L^p_w(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , обозначим банахово пространство измеримых по Бохнеру периодических периода  $w$  (классов) функций, действующих из  $\mathbb{R}$  в  $X$ , для которых конечна величина (принимаемая за норму в соответствующем пространстве)  $\|x\|_p = \left( \int_0^w \|x(\tau)\|^p d\tau \right)^{1/p}$ ,  $p \neq \infty$ ,  $\|x\|_{\infty} = \text{ess sup}_{\tau \in [0, w]} \|x(\tau)\|$ ,  $p = \infty$ . Отметим, что  $L^p_w(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty)$  — замкнутое подпространство в пространстве Степанова  $S^p(\mathbb{R}, X)$ .

Далее символом  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$  обозначается одно из перечисленных выше пространств  $L^p(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty]$ ,  $S^p(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty)$ ,  $C_b(\mathbb{R}, X)$ ,  $C_0(\mathbb{R}, X)$ ,  $L^p_w(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty]$ ,  $C_w(\mathbb{R}, X)$ . Через  $\mathcal{F}_w = \mathcal{F}_w(\mathbb{R}, X)$  обозначим пространства периодических функций  $L^p_w(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty]$ ,  $C_w(\mathbb{R}, X)$ . Символом  $\widetilde{\mathcal{F}} = \widetilde{\mathcal{F}}(\mathbb{R}, X)$  будем обозначать пространства непериодических функций  $L^p(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty]$ ,  $S^p(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty)$ ,  $C_b(\mathbb{R}, X)$ ,  $C_0(\mathbb{R}, X)$ .

Пусть  $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End } X$  — семейство эволюционных операторов, обладающее описанными выше свойствами 1)–4) и не обязательно порожденное задачей Коши для дифференциального уравнения (3).



Определим линейный замкнутый оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$  по следующему правилу. Непрерывная функция  $x$  из  $\mathcal{F}$  включается в область определения оператора  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ , если существует функция  $f \in \mathcal{F}$  такая, что для пары функций  $(x, f)$  выполняются равенства (4). Функция  $f$  определяется однозначно, при этом полагается  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}x = f$ .

Отметим, что введенное определение для оператора  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  применимо к произвольному (не обязательно периодическому) семейству  $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End } X$ , если  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$  совпадает с одним из банаховых пространств непериодических функций  $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathbb{R}, X)$ . Для корректности его определения в пространствах периодических функций требуется свойство периодичности семейства  $\mathcal{U}$ .

Для рассматриваемого оператора  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ , построенного по периодическому семейству эволюционных операторов  $\mathcal{U}$ , получены необходимые и достаточные условия конечномерности ядра и кообраза, инъективности, сюръективности, дополняемости ядра и образа, непрерывной обратимости, фредгольмовости, получены формулы для обратного оператора, представление спектра.

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Символом  $S(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , обозначим изометрическую группу операторов сдвигов функций из  $\mathcal{F}$ , т. е.

$$(S(t)x)(s) = x(s + t), \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{F}.$$

Непосредственно из определения оператора  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  вытекает следующая

**Лемма 1.** Для любого  $\tau \in \mathbb{R}$  оператор  $S(\tau)\mathcal{L}_{\mathcal{U}}S(-\tau)$  совпадает с оператором  $\mathcal{L}_{\widetilde{S}(\tau)\mathcal{U}}$ , где семейство эволюционных операторов  $\widetilde{S}(\tau)\mathcal{U}$  определяется по формуле

$$(\widetilde{S}(\tau)\mathcal{U})(t, s) = \mathcal{U}(t + \tau, s + \tau), \quad (t, s) \in \Delta, \quad x \in \mathcal{F}.$$

Имеет место (вытекающая из леммы 1) следующая

**Лемма 2.** Для того, чтобы оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  обладал свойством (перестановочности  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  с  $S(w)$ )

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}}S(w)x = S(w)\mathcal{L}_{\mathcal{U}}x, \quad x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}), \quad (5)$$

для некоторого числа  $w > 0$ , необходимо и достаточно, чтобы семейство  $\mathcal{U}$  было периодическим периода  $w$ .

Оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ , удовлетворяющий равенству (5), назовем *периодическим*. Оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ , действующий в пространстве  $\mathcal{F}_w(\mathbb{R}, X)$  периодических функций будем обозначать символом  $\mathcal{L}_w$ . В дальнейшем (за исключением теорем 1, 2) рассматривается оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ , порожденный периодическим семейством эволюционных операторов.

По семейству  $\mathcal{U}$  построим полугруппу операторов Хоулэнда  $T_{\mathcal{U}} : \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \rightarrow \text{End } \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ , определяя ее равенствами

$$(T_{\mathcal{U}}(t)x)(s) = \mathcal{U}(s, s - t)x(s - t), \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X).$$

Полугруппа  $T_{\mathcal{U}}$  была введена в рассмотрение Хоулэндом (J. S. Howland) [2] в гильбертовом пространстве  $L^2(\mathbb{R}, X)$ , где  $X$  — гильбертово пространство, при условии, что операторы  $\mathcal{U}(t, s)$ ,  $(t, s) \in \mathbb{R}$ , унитарны. Следующие две теоремы позволяют использовать теорию полугрупп операторов, а также теорию разностных операторов.

**Теорема 1** [3, 4]. Оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  является генератором (инфинитезимальным оператором [5]) сильно непрерывной полугруппы  $T_{\mathcal{U}}$  в любом из банаховых пространств  $L^p(\mathbb{R}, X)$ ,  $L^p_w(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty)$ ,  $C_0(\mathbb{R}, X)$ ,  $C_w(\mathbb{R}, X)$ .

Пусть  $A : D(A) \subset Y \rightarrow Y$  — линейный замкнутый оператор с областью определения  $D(A)$  из комплексного банахова пространства  $Y$ . Он называется *непрерывно обратимым*, если его ядро  $\text{Ker } A = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$  состоит только из нуля и образ  $\text{Im } A = \{Ax, x \in D(A)\}$  оператора  $A$  совпадает со всем пространством  $Y$ . По теореме Банаха о замкнутом графике оператор  $A$  непрерывно обратим тогда и только тогда, когда обратный оператор  $A^{-1}$  принадлежит банаховой алгебре  $\text{End } Y$ .

**Теорема 2.** Спектр  $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$  оператора  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  и спектр  $\{\sigma(T_{\mathcal{U}}(t))\}$  операторов  $T_{\mathcal{U}}(t)$ ,  $t > 0$ , связаны соотношением

$$\sigma(T_{\mathcal{U}}(t)) \setminus \{0\} = \exp(\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})t) = \{\exp(\lambda t) : t \in \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})\}.$$



В частности, оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  непрерывно обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}} = I - T_{\mathcal{U}}(w)$ , имеющий вид

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}x)(s) = x(s) - \mathcal{U}(s, s-w)x(s-w), \quad x \in \mathcal{F}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Важно отметить, что в теореме 2 отсутствуют ограничения на пространство  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ , которое может совпадать с одним из следующих пространств  $C_b(\mathbb{R}, X)$ ,  $C_0(\mathbb{R}, X)$ ,  $L^p(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty]$ ,  $S^p(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Теорема 2 была доказана в работе [4].

**Лемма 3.** Следующие условия эквивалентны:

- 1) семейство  $\mathcal{U}$  периодично с периодом  $w$ ;
- 2) оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  периодичен с периодом  $w > 0$ ;
- 3) операторы  $T_{\mathcal{U}}(t)$ ,  $t \geq 0$ , перестановочны с оператором  $S(w)$ .

Пространство двусторонних последовательностей  $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}(\mathbb{Z}, X)$  будем называть ассоциированным с пространством  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ , если оно совпадает с банаховым пространством последовательностей  $l^p(\mathbb{Z}, X)$ , суммируемых со степенью  $1 \leq p < \infty$ , в случае, когда  $\mathcal{F}$  совпадает с пространством  $\mathcal{L}^p$ ; совпадает с банаховым пространством ограниченных последовательностей  $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$  в случае, когда  $\mathcal{F}$  совпадает с одним из пространств  $S^p$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $\mathcal{L}^\infty$  или  $C_b$ ; совпадает с подпространством из  $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$  стремящихся к нулю на бесконечности последовательностей  $c_0(\mathbb{Z}, X)$  в случае, когда  $\mathcal{F}$  совпадает с  $C_0$ ; совпадает с банаховым пространством  $s(\mathbb{Z}, X)$  стационарных последовательностей, т. е. таких последовательностей  $x$ , что  $x(n) = x(k)$ , для всех  $k, n \in \mathbb{Z}$ , если  $\mathcal{F}$  совпадает с одним из пространств периодических функций  $C_w$  или  $L_w^p$ . Пространство  $s(\mathbb{Z}, X)$  изометрически изоморфно пространству  $X$ , поэтому в дальнейшем они будут отождествляться.

Введем в рассмотрение разностный оператор  $\mathcal{D} : \mathcal{F}_d \rightarrow \mathcal{F}_d$ , определяемый равенствами

$$(\mathcal{D}x_d)(n) = x_d(n) - \mathcal{U}(w, 0)x_d(n-1), \quad x_d \in \mathcal{F}_d, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Замечание 1.** Оператор  $\mathcal{D}$  (при указаном выше отождествлении пространства  $s(\mathbb{Z}, X)$  с  $X$ ) для  $\mathcal{F}_d = s(\mathbb{Z}, X)$  будет совпадать с оператором  $I - \mathcal{U}(w, 0)$ .

В статьях [3, 4] были доказаны следующие теоремы.

**Теорема 3.** Оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ , действующий в пространстве  $\widetilde{\mathcal{F}}$ , обратим тогда и только тогда, когда обратим разностный оператор  $\mathcal{D} \in \text{End } \mathcal{F}_d$ .

**Теорема 4.** Спектр оператора  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  в пространстве неперiodических функций  $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathbb{R}, X)$  имеет вид

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda : \exp(\lambda w) \in \sigma(\mathcal{U}(w, 0))\mathbb{T}\} = \{\lambda : \exists \mu \in \sigma(\mathcal{U}(w, 0)) : |\mu| = |\exp(\lambda w)|\}.$$

В частности, оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  непрерывно обратим тогда и только тогда, когда выполнено условие  $\sigma(\mathcal{U}(w, 0)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ , где  $\mathbb{T}$  — единичная окружность на комплексной плоскости.

Далее, всюду считается, что семейство эволюционных операторов  $\mathcal{U}$  будет периодическим периода  $w$ .

Периодическую периода  $w$  сильно непрерывную функцию  $\mathcal{P} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$ ,  $\mathcal{P}(t) = \mathcal{U}(t, t-w) - I$ ,  $t \in \mathbb{R}$  назовем функцией Пуанкаре (в монографии [6] операторы  $\mathcal{U}(t, t-w) - I$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , назывались операторами Пуанкаре, а оператор  $\mathcal{U}(w, 0)$  назывался оператором монодромии).

**Теорема 5.** Следующие условия в пространстве  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \in \{L^p(\mathbb{R}, X), C_b(\mathbb{R}, X)\}$  эквивалентны:

- 1) оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  непрерывно обратим;
- 2)  $\sigma(\mathcal{U}(w, 0)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ ;
- 3)  $\sigma(\mathcal{U}(t+w, t)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Доказательство этой теоремы можно вывести как из основных результатов статьи, так и из статей [4, 7]. Важно отметить, что оператор  $T_{\mathcal{U}}(w) \in \text{End } \mathcal{F}_w(\mathbb{R}, X)$  имеет вид  $(T_{\mathcal{U}}(w)x)(s) = \mathcal{U}(s, s-w)x(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathcal{F}_w(\mathbb{R}, X)$ , т. е. является оператором умножения на операторнозначную функцию  $(\mathcal{P} + I)(s) = \mathcal{U}(s, s-w) = \mathcal{U}(s+w, s)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Определение 2.** Пусть  $A : D(A) \subset Y \rightarrow Y$  — замкнутый линейный оператор. Рассмотрим следующие условия:

- 1)  $\text{Ker } A = \{0\}$  (т. е. оператор  $A$  инъективен);
- 2)  $1 \leq n = \dim \text{Ker } A < \infty$ ;
- 3)  $\text{Ker } A$  — бесконечномерное подпространство из  $Y$  ( $\dim \text{Ker } A = \infty$ );



- 4)  $\text{Ker } A$  — дополняемое подпространство либо в  $D(A)$  (с нормой графика), либо в  $Y$ ;  
 5)  $\overline{\text{Im } A} = \text{Im } A$ , что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора  $A$ )

$$\gamma(A) = \inf_{x \in D(A) \setminus \text{Ker } A} \frac{\|Ax\|}{\text{dist}(x, \text{Ker } A)} = \inf_{y = Ax, x \notin \text{Ker } A} \frac{\|y\|}{\text{dist}(x, \text{Ker } A)},$$

где  $\text{dist}(x, \text{Ker } A) = \inf_{x_0 \in \text{Ker } A} \|x - x_0\|$ ;

- 6) оператор  $A$  корректен (равномерно инъективен), т. е.  $\text{Ker } A = \{0\}$  и  $\gamma(A) > 0$ ;  
 7)  $\text{Im } A$  — замкнутое дополняемое в  $Y$  подпространство;  
 8)  $\text{Im } A$  — замкнутое подпространство из  $Y$  конечной коразмерности  $\text{codim } \text{Im } A = m < \infty$ ;  
 9)  $\text{Im } A$  — замкнутое подпространство из  $Y$  бесконечной коразмерности;  
 10)  $\text{Im } A = Y$ , т. е.  $A$  — сюръективный оператор;  
 11)  $\overline{\text{Im } A} \neq Y$ ;  
 12) оператор  $A$  непрерывно обратим.

Если для  $A$  выполнены все условия из совокупности условий  $S = \{i_1, \dots, i_k\}$ , где  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 12$ , то будем говорить, что оператор  $A$  находится в состоянии обратимости  $S$ . Множество состояний обратимости оператора  $A$  обозначим символом  $\text{St}_{\text{inv}}(A)$ .

Согласно классификации спектра  $\sigma(A)$  оператора  $A$ , принятой в [8], он представляется в виде  $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$  взаимно непересекающихся трех множеств: *дискретного спектра* (совокупность собственных значений оператора  $A$ )  $\sigma_d(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}\}$ , *непрерывного спектра*  $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_d(A) : \text{Im}(A - \lambda I) \neq Y, \overline{\text{Im}(A - \lambda I)} = Y\}$ , *остаточного спектра*  $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_d(A) : \overline{\text{Im}(A - \lambda I)} \neq Y\}$ . Таким образом,  $\lambda \in \sigma_r(A) \Leftrightarrow \{1, 11\} \in \text{St}_{\text{inv}}(A - \lambda I)$ ,  $\lambda \notin \sigma(A) \Leftrightarrow \{1, 10\} \in \text{St}_{\text{inv}}(A - \lambda I)$ .

Далее используются

**Определение 3.** Будем говорить, что линейный оператор  $A : D(A) \subset Y \rightarrow Y$  перестановочен с оператором  $B \in \text{End } Y$ , если  $BD(A) \subset D(A)$  и  $ABx = BAx$  для любого  $x \in D(A)$ .

**Определение 4.** Два линейных оператора  $A_1 : D(A_1) \subset Y \rightarrow Y$ ,  $A_2 : D(A_2) \subset Z \rightarrow Z$ , где  $Y, Z$  — банаховы пространства, называются *подобными*, если существует обратимый оператор  $U \in \text{Hom}(Y, Z)$ , где  $\text{Hom}(Y, Z)$  — банахово пространство ограниченных операторов, действующих из  $Y$  в  $Z$  такой, что  $UD(A_1) = D(A_2)$  и  $A_2Ux = UA_1x$ ,  $x \in D(A_1)$ . Оператор  $U$  называется оператором преобразования оператора  $A_1$  в оператор  $A_2$ .

Непосредственно из определения 4 следует, что для подобных операторов  $A_1, A_2$  имеют место равенства  $U\text{Ker } A_1 = \text{Ker } A_2$  и  $\text{Im } A_2 = U\text{Im } A_1$ . Поэтому имеет место

**Лемма 4.** Если  $A_i : D(A_i) \subset Y \rightarrow Y$ ,  $i = 1, 2$ , — подобные операторы, то  $\text{St}_{\text{inv}}(A_1) = \text{St}_{\text{inv}}(A_2)$ .

**Следствие 1.** Если  $A_1 : D(A_1) \subset Y \rightarrow Y$ ,  $A_2 : D(A_2) \subset Z \rightarrow Z$  — подобные операторы, то  $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$ .

**Замечание 2.** Из леммы 1 следует, что операторы  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  и  $\mathcal{L}_{\tilde{S}(\tau)\mathcal{U}}$  подобны и, значит, из леммы 4 вытекает, что множества их состояний обратимости совпадают.

**Определение 5.** Линейный замкнутый оператор  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  называется *фредгольмовым*, если его ядро  $\text{Ker } A$  конечномерно, образ  $\text{Im } A$  замкнут и имеет конечную коразмерность. Число  $\text{ind } A = \dim \text{Ker } A - \text{codim } A$  называется *индексом* фредгольмова оператора  $A$ . Оператор  $A$  называется *полуфредгольмовым*, если он находится в одном из состояний  $\{2, 7, 9\}$  или  $\{3, 4, 8\}$ .

Следующие две теоремы содержат основные результаты статьи.

**Теорема 6.** Для операторов  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  и  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$  имеет место равенство их состояний обратимости

$$\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) = \text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{D}_{\mathcal{U}}).$$

В частности, оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является оператор  $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ , их индексы совпадают:  $\text{ind } \mathcal{L}_{\mathcal{U}} = \text{ind } \mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ ,  $\dim \text{Ker } \mathcal{L}_{\mathcal{U}} = \dim \text{Ker } \mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ ,  $\text{codim } \text{Im } \mathcal{L}_{\mathcal{U}} = \text{codim } \text{Im } \mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ .

Отметим что в случае, когда эволюционное семейство  $\mathcal{U}$  может быть продолжено на множество  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  с сохранением свойств 1)–5), результаты теоремы 6 могут быть получены из статей [9] и [10].



**Теорема 7.** Для оператора  $\mathcal{L}_w$  справедливы следующие равенства:

$$\text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{L}_w) = \text{St}_{\text{inv}}(I - \mathcal{U}(w, 0)) = \text{St}_{\text{inv}}(\mathcal{P}(t)), \quad t \in [0, w].$$

В частности, оператор  $\mathcal{L}_w$  фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда фредгольмовым (полуфредгольмовым) является один из операторов  $\mathcal{P}(t)$ ,  $t \in [0, w]$  (и, следовательно, все эти операторы будут фредгольмовы), их индексы совпадают:  $\text{ind } \mathcal{L}_w = \text{ind } \mathcal{P}(t)$ ,  $\dim \text{Ker } \mathcal{L}_w = \dim \text{Ker } \mathcal{P}(t)$ ,  $\text{codim Im } \mathcal{L}_w = \text{codim Im } \mathcal{P}(t)$ .

**Замечание 3.** Из равенств (4), определяющих оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$ , следует, что для любого  $\lambda \in \mathbb{C}$  оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} - \lambda I$  задается (с помощью тех же равенств) по семейству эволюционных операторов  $\mathcal{U}_{\lambda} : \Delta \rightarrow \text{End } X$  вида

$$\mathcal{U}_{\lambda}(t, s) = \exp(\lambda(t - s))\mathcal{U}(t, s), \quad (t, s) \in \Delta.$$

Из сделанного замечания и теоремы 7 следует

**Теорема 8.** Пусть  $\mathcal{F}_w = \mathcal{F}_w(\mathbb{R}, X) \in \{C_w, L_w^p, p \in [1, \infty]\}$ . Тогда для полугруппы операторов  $T_{\mathcal{U}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{F}_w$  имеют места равенства

$$\begin{aligned} \sigma(T_{\mathcal{U}}(w)) \setminus \{0\} &= \sigma(\mathcal{U}(w, 0)) \setminus \{0\} = \sigma(\mathcal{U}(t + w, t)) \setminus \{0\}, \quad t \in [0, w], \\ \exp(\sigma(\mathcal{L}_w)) &= \{\exp(\lambda) : \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_w)\} = \sigma(\mathcal{U}(w, 0)) \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Равенства  $\sigma(\mathcal{U}(w, 0)) \setminus \{0\} = \sigma(\mathcal{U}(t + w, t)) \setminus \{0\}$  были получены в монографии [6, лемма 7.2.2].

Из равенств (6) следует, что экспоненциальная устойчивость решений дифференциального уравнения (3) имеет место тогда и только тогда, когда спектральный радиус  $r(\mathcal{U}(w, 0))$  оператора монодромии  $\mathcal{U}(w, 0)$  меньше единицы.

**Определение 6.** Будем говорить, что эволюционное семейство  $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End } X$  из алгебры  $\text{End } X$  допускает экспоненциальную дихотомию на  $\mathbb{R}$  с показателем  $\beta > 0$  и коэффициентом  $M > 0$ , если существует ограниченная сильно непрерывная проекторнозначная функция  $P$  такая, что

- 1)  $\mathcal{U}(t, s)P(s) = P(t)\mathcal{U}(t, s)$  при  $t \geq s$ ;
- 2)  $\|\mathcal{U}(t, s)P(s)\| \leq M \exp(-\beta(t - s))$  при  $t \geq s$ ;
- 3) при  $t \geq s$  сужение  $\mathcal{U}(t, s)|_{\text{Im } Q(s)}$  оператора  $\mathcal{U}(t, s)$  на образ  $\text{Im } Q(s)$  проектора  $Q(s) = I - P(s)$  является изоморфизмом подпространств  $\text{Im } Q(s)$  и  $\text{Im } Q(t)$ ;
- 4)  $\|\mathcal{U}(t, s)Q(s)\| \leq M \exp(\beta(t - s))$  при  $s \geq t$ .

**Теорема 9.** Оператор  $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$  непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратимым является оператор  $\mathcal{D}$ . Обратный оператор в пространстве неперiodических функций может быть представлен в виде

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}^{-1}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t, s)f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

где функция (Грина)  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{End } X$  имеет вид

$$G(t, s) = \begin{cases} -\mathcal{U}(t, s)P(s), & s \leq t, \\ \mathcal{U}(t, s)Q(s), & s > t, \end{cases}$$

а проекторы  $P(s)$ ,  $Q(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , можно найти по формулам

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} (\gamma I - \mathcal{U}(s, s - w))^{-1} d\gamma, \quad s \in \mathbb{R}, \\ Q(s) &= I - P(s), \quad s \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mathcal{U}(t, s)x = \mathcal{U}^{-1}(s, t)x$  для всех  $x \in \text{Im } Q(s)$ ,  $s > t$ . Под  $\mathcal{U}^{-1}(s, t)x$  понимается значение обратного оператора к сужению  $\mathcal{U}(s, t)|_{\text{Im } Q(t)}$  (которое является изоморфизмом пространств  $\text{Im } Q(t)$  и  $\text{Im } Q(s)$ ) на векторе  $x$ .

В этой теореме новым является представление проекторнозначной функции  $P$  в виде (7).





**Теорема 10.** Для обратимости оператора  $\mathcal{L}_w : D(\mathcal{L}_w) \subset \mathcal{F}_w \rightarrow \mathcal{F}_w$  необходимо и достаточно, чтобы был обратим оператор Пуанкаре  $\mathcal{P}(w) = \mathcal{U}(w, 0) - I$ . Если он обратим, то обратный к  $\mathcal{L}_w$  оператор определяется формулой

$$(\mathcal{L}_w^{-1})(t) = \int_0^w G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad f \in \mathcal{F}_w, \quad (8)$$

где функция Грина  $G : [0, w] \times [0, w] \rightarrow \text{End } X$  имеет вид

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \mathcal{P}(t)^{-1} \mathcal{U}(t, \tau), & 0 \leq \tau \leq t \leq w, \\ \mathcal{P}(t)^{-1} \mathcal{U}(t, \tau - w), & t < \tau \leq w. \end{cases}$$

Отметим, что формула для обратного оператора была приведена в [11].

Используя интегральные представления обратного оператора в виде (8), можно получить оценки обратного оператора  $\mathcal{L}_w^{-1}$  в разных функциональных пространствах. Отметим, что по аналогии со статьями А. И. Перова [12, 13] можно получить условия разрешимости нелинейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Пусть  $A(t) \equiv A : D(A) \subset X \rightarrow X$  — генератор (инфинитезимальный оператор [5]) сильно непрерывной полугруппы операторов  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } X$ . Тогда соответствующее семейство эволюционных операторов  $\mathcal{U} : \Delta \rightarrow \text{End } X$  представимо в виде  $\mathcal{U}(t, \tau) = T(t - \tau)$ ,  $t, \tau \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \leq t$ . Поэтому оператор монодромии  $\mathcal{U}(w, 0)$  совпадает с оператором  $T(w)$ , а операторная функция Пуанкаре  $\mathcal{P} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$  является постоянной функцией  $\mathcal{P}(t) \equiv T(w) - I$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . В этом случае функция Грина приобретает вид

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (T(w) - I)^{-1} T(t - \tau), & 0 \leq \tau \leq t \leq w, \\ (T(w) - I)^{-1} T(t - \tau + w), & t < \tau \leq w. \end{cases}$$

Полученные результаты позволяют использовать теорию разностных операторов при исследовании линейных параболических дифференциальных операторов с переменными периодическими коэффициентами и, следовательно, для дифференциальных операторов с частными производными. Например, к рассматриваемым операторам относятся примеры из статей [14, 15], если дополнительно потребовать периодичность коэффициентов.

Отметим, что полученные в работе результаты могут быть распространены на дифференциальные операторы с периодическими коэффициентами, определенных в пространстве функций на полуоси, при этом используются результаты статей [14–19].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00378, № 14-01-31196).*

### Библиографический список

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М. : Наука, 1967. 464 с.
2. Howland J. S. Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians // Math. Ann. 1974. Vol. 207, № 4. P. 315–335.
3. Баскаков А. Г. Спектральный анализ линейных дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов // Докл. РАН, 1995. Т. 343, № 3. С. 295–298.
4. Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функци. анализ и его прил. 1996. Т. 30, № 3. С. 1–11.
5. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 830 с.
6. Хенри Л. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М. : Мир, 1985.
7. Баскаков А. Г., Пастухов А. И. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1231–1243.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы : в 3 т. Т. 1. Общая теория. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.
9. Диденко В. Б. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 2. С. 226–240.
10. Диденко В. Б. О непрерывной обратимости и фредгольмовости дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями. // Изв. РАН. Сер. математическая. 2013. Т. 77, № 1. С. 5–22.
11. Баскаков А. Г., Кобычев К. С. Оценки оператора вложения пространства Соболева периодических функ-





- ций и оценки решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Дифференциальные уравнения, 2011. Т. 47, № 5. С. 611–620.
12. Перов А. И. Частотные признаки существования ограниченных решений // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 7. С. 896–904.
13. Перов А. И. Частотные методы в теории ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка (существование, почти периодичность, устойчивость) // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 663–673.
14. Баскаков А. Г. О корректности линейных дифференциальных операторов // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 3. С. 3–28.
15. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1. С. 77–128.
16. Баскаков А. Г. Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 6. С. 811–820.
17. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов I. // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 10. С. 1299–1306.
18. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов и полугруппы разностных операторов II. // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 3–11.
19. Баскаков А. Г., Синтяев Ю. Н. Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов; оценки решений // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 2. С. 1–10.

## About Reversibility States of Linear Differential Operators with Periodic Unbounded Operator Coefficients

V. B. Didenko

Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 394006, Voronezh, Russia, vladimir.didenko@gmail.com

For investigated linear differential operator (equation) with unbounded periodic operator coefficients defined at one of the Banach space of vector functions defined on all real axis difference operator (equation) with constant operator coefficient defined at appropriate Banach space of two-side vector sequences is considered. For differential and difference operators propositions about kernel and co-image dimensions coincidence, simultaneous complementarity of kernels and images, simultaneous reversibility, spectrum interrelation are proved.

*Key words:* differential operators, difference operators, reversibility states, spectrum.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-00378, no. 14-01-31196).*

### References

1. Krein S. G. *Linear Differential Equations in Banach Space*. American Math. Soc., 1971. 390 p.
2. Howland J. S. Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians. *Math. Ann.*, 1974, vol. 207, no. 4., pp. 315–335.
3. Baskakov A. G. Spectral analysis of linear differential operators and semi-groups of difference operators. *Doklady Mathematics*, 1995, vol. 343, no. 3, pp. 295–298 (in Russian).
4. Baskakov A. G. Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators. *Functional Analysis and Its Applications*, 1996, vol. 30, no. 3, pp. 149–157. DOI: 10.1007/BF02509501.
5. Hille E., Phillips R. S. *Functional Analysis and Semigroups*. American Math. Soc., 1957, 808 p.
6. Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer, 1993. 350 p.
7. Baskakov A. G., Pastukhov A. I. Spectral Analysis of a Weighted Shift Operator with Unbounded Operator Coefficients. *Siberian Math. J.*, 2001, vol. 42, no. 6, pp. 1026–1036. DOI: 10.1023/A:1012832208161.
8. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear Operators: General theory*. Interscience Publishers, 1958. 2592 p.
9. Didenko V. B. On the spectral properties of differential operators with unbounded operator coefficients determined by a linear relation. *Math. Notes*, 2011, vol. 89, no. 2, pp. 224–237. DOI: 10.1134/S0001434611010287.
10. Didenko V. B. On the continuous invertibility and the Fredholm property of differential operators with multi-valued impulse effects. *Izvestiya : Mathematics*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 3–19. DOI: 10.1070/IM2013v077n01ABEH002626.
11. Baskakov A. G., Kobychев K. S. Estimates for the embedding operator of a sobolev space of periodic functions and for the solutions of differential equations with periodic coefficients. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 5, pp. 609–619. DOI: 10.1134/S0012266111050016.
12. Perov A. I. Frequency tests for the existence of boundary solutions. *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 7, pp. 916–924. DOI: 10.1134/S001226610707004X.
13. Perov A. I. Frequency methods in the theory of boun-



ded solutions of nonlinear  $n^{th}$ -order differential equations (existence, almost periodicity, and stability). *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 670–680. DOI: 10.1134/S0012266112050059.

14. Baskakov A. G. On correct linear differential operators. *Sbornik : Mathematics*, 1999, vol. 190, no. 3, pp. 323–348. DOI: 10.1070/SM1999v190n03ABEH000390.

15. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Math. Surv.*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: RM2013v068n01ABEH004822.

16. Baskakov A. G. Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded

operators. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 6, pp. 586–593. DOI: 10.1007/BF02307207.

17. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators and semi-groups of difference operators I. *Differential Equations*, 1996, vol. 33, no. 10, pp. 1299–1306 (in Russian).

18. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators and semi-groups of difference operators II. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 1, pp. 1–10. DOI: 10.1023/A:1019298028556.

19. Baskakov A. G., Sintyaev Yu. N. Finite-difference operators in the study of differential operators: Solution estimates. *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 2, pp. 214–223. DOI: 10.1134/S0012266110020072.

УДК 517.5

## ОДИН ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

М. Г. Плешаков<sup>1</sup>, С. В. Тышкевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, pleshakovmg@mail.ru

<sup>2</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, tyszkiewicz@yandex.ru

Пусть даны  $2s$  точек  $y_i$ :  $-\pi \leq y_{2s} < \dots < y_1 < \pi$ . Отправляясь от этих точек, определим точки  $y_i$  для всех целых  $i$  при помощи равенства  $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ . Будем писать  $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ , если  $f(x)$  —  $2\pi$ -периодическая непрерывная функция и  $f(x)$  не убывает на  $[y_i, y_{i-1}]$ , если  $i$  нечетное;  $f(x)$  не возрастает на  $[y_i, y_{i-1}]$ , если  $i$  четное. Обозначим через  $E_n^{(1)}(f; Y)$  величину наилучшего равномерного приближения функции  $f \in \Delta^{(1)}(Y)$  тригонометрическими полиномами из того же множества  $\Delta^{(1)}(Y)$ . В статье доказан следующий контрпример формосохраняющего приближения.

**Пример.** Для любых  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 2$ , и  $n \in \mathbb{N}$  существует функция  $f(x) := f(x; s, Y, n, k)$  такая, что  $f \in \Delta^{(1)}(Y)$  и

$$E_n^{(1)}(f; Y) > B_Y n^{\frac{k}{2}-1} \omega_k \left( f; \frac{1}{n} \right),$$

где  $B_Y = \text{const}$ , зависит только от  $Y$  и  $k$ ;  $\omega_k$  — модуль непрерывности порядка  $k$  функции  $f$ .

**Ключевые слова:** тригонометрические полиномы, аппроксимация полиномами, формосохранение.

Получение оценки уклонения при равномерном приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами и тригонометрическими полиномами является одной из основных задач в теории приближения функций. Наиболее широкое применение в теоретических исследованиях и в прикладных областях математики получили неравенства типа Джексона – Зигмунда – Стечкина [1–3], Никольского – Тимана – Дзядыка – Фройда – Теляковского – Брудного [4–9]. Особый интерес представляет случай, когда приближение является формосохраняющим (Shape-preserving Approximation), т. е. когда аппарат приближения сохраняет некоторые свойства приближаемой функции (монотонность, выпуклость и т. д.). В 1969 г. G. G. Lorentz и K. L. Zeller [10] построили пример, который показывает, что величина наилучшего монотонного приближения алгебраическими многочленами монотонной функции по порядку, вообще говоря, «хуже» величины наилучшего приближения без ограничений. В работах И. А. Шевчука [11] и А. С. Шведова [12, 13] построены примеры, показывающие, что оценки типа Джексона – Стечкина величины приближения монотонной функции монотонными многочленами через модуль непрерывности порядка 3 и выше вообще неверны, в отличие от приближения без ограничений.

Однако результаты по комонотонному приближению периодических функций тригонометрическими полиномами, за исключением результата, полученного G. G. Lorentz и K. L. Zeller 1968 г. и касающегося так называемых «колоколообразных» функций, долгое время не были известны.



ded solutions of nonlinear  $n^{th}$ -order differential equations (existence, almost periodicity, and stability). *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 670–680. DOI: 10.1134/S0012266112050059.

14. Baskakov A. G. On correct linear differential operators. *Sbornik : Mathematics*, 1999, vol. 190, no. 3, pp. 323–348. DOI: 10.1070/SM1999v190n03ABEH000390.

15. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russian Math. Surv.*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: RM2013v068n01ABEH004822.

16. Baskakov A. G. Linear differential operators with unbounded operator coefficients and semigroups of bounded

operators. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 6, pp. 586–593. DOI: 10.1007/BF02307207.

17. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators and semi-groups of difference operators I. *Differential Equations*, 1996, vol. 33, no. 10, pp. 1299–1306 (in Russian).

18. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators and semi-groups of difference operators II. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 1, pp. 1–10. DOI: 10.1023/A:1019298028556.

19. Baskakov A. G., Sintyaev Yu. N. Finite-difference operators in the study of differential operators: Solution estimates. *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 2, pp. 214–223. DOI: 10.1134/S0012266110020072.

УДК 517.5

## ОДИН ОТРИЦАТЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР ФОРМОСОХРАНЯЮЩЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

М. Г. Плешаков<sup>1</sup>, С. В. Тышкевич<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, pleshakovmg@mail.ru

<sup>2</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, tyszkiewicz@yandex.ru

Пусть даны  $2s$  точек  $y_i$ :  $-\pi \leq y_{2s} < \dots < y_1 < \pi$ . Отправляясь от этих точек, определим точки  $y_i$  для всех целых  $i$  при помощи равенства  $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ . Будем писать  $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ , если  $f(x)$  —  $2\pi$ -периодическая непрерывная функция и  $f(x)$  не убывает на  $[y_i, y_{i-1}]$ , если  $i$  нечетное;  $f(x)$  не возрастает на  $[y_i, y_{i-1}]$ , если  $i$  четное. Обозначим через  $E_n^{(1)}(f; Y)$  величину наилучшего равномерного приближения функции  $f \in \Delta^{(1)}(Y)$  тригонометрическими полиномами из того же множества  $\Delta^{(1)}(Y)$ . В статье доказан следующий контрпример формосохраняющего приближения.

**Пример.** Для любых  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 2$ , и  $n \in \mathbb{N}$  существует функция  $f(x) := f(x; s, Y, n, k)$  такая, что  $f \in \Delta^{(1)}(Y)$  и

$$E_n^{(1)}(f; Y) > B_Y n^{\frac{k}{2}-1} \omega_k \left( f; \frac{1}{n} \right),$$

где  $B_Y = \text{const}$ , зависит только от  $Y$  и  $k$ ;  $\omega_k$  — модуль непрерывности порядка  $k$  функции  $f$ .

**Ключевые слова:** тригонометрические полиномы, аппроксимация полиномами, формосохранение.

Получение оценки уклонения при равномерном приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами и тригонометрическими полиномами является одной из основных задач в теории приближения функций. Наиболее широкое применение в теоретических исследованиях и в прикладных областях математики получили неравенства типа Джексона – Зигмунда – Стечкина [1–3], Никольского – Тимана – Дзядыка – Фройда – Теляковского – Брудного [4–9]. Особый интерес представляет случай, когда приближение является формосохраняющим (Shape-preserving Approximation), т. е. когда аппарат приближения сохраняет некоторые свойства приближаемой функции (монотонность, выпуклость и т. д.). В 1969 г. G. G. Lorentz и K. L. Zeller [10] построили пример, который показывает, что величина наилучшего монотонного приближения алгебраическими многочленами монотонной функции по порядку, вообще говоря, «хуже» величины наилучшего приближения без ограничений. В работах И. А. Шевчука [11] и А. С. Шведова [12, 13] построены примеры, показывающие, что оценки типа Джексона – Стечкина величины приближения монотонной функции монотонными многочленами через модуль непрерывности порядка 3 и выше вообще неверны, в отличие от приближения без ограничений.

Однако результаты по комонотонному приближению периодических функций тригонометрическими полиномами, за исключением результата, полученного G. G. Lorentz и K. L. Zeller 1968 г. и касающегося так называемых «колоколообразных» функций, долгое время не были известны.



В данной статье построен контрпример, указывающий, что величина наилучшего комонотонного приближения периодических функций тригонометрическими полиномами по порядку, вообще говоря, «хуже» величины наилучшего приближения без ограничений.

Пусть  $\mathbb{C}$  — пространство непрерывных  $2\pi$ -периодических действительных функций  $f$  с равномерной нормой  $\|f\| := \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ ;  $\omega(f; t)$  — модуль непрерывности функции  $f$ ;  $\mathbb{T}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , — пространство тригонометрических полиномов

$$\tau_n(x) := a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

порядка  $\leq n$ .

Пусть на промежутке  $[-\pi, \pi)$  заданы  $2s$  точек  $y_i$ :  $-\pi \leq y_{2s} < y_{2s-1} < \dots < y_1 < \pi$ . Отправляясь от этих точек, при помощи равенства  $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$  определим точки  $y_i$  для всех целых индексов  $i$ ; в частности,  $y_0 = y_{2s} + 2\pi$ ,  $y_{2s+1} = y_1 - 2\pi$  и т. д. Обозначим  $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ . Множество всех таких наборов обозначим  $\mathbb{Y}_{2s}$ . Будем писать  $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ , если  $f(x)$  —  $2\pi$ -периодическая непрерывная функция и  $f(x)$  не убывает на  $[y_i, y_{i-1}]$ , если  $i$  нечетное;  $f(x)$  не возрастает на  $[y_i, y_{i-1}]$ , если  $i$  четное.

Обозначим

$$\Pi(x) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{x - y_i}{2}$$

и заметим, что  $\Pi \in \mathbb{T}_s$ , т. е.  $\Pi(x)$  — тригонометрический полином порядка  $s$ .

Зафиксируем  $s \in \mathbb{N}$  и набор  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} = Y \in \mathbb{Y}_{2s}$ . В силу периодичности без потери общности будем считать, что точка  $0$  принадлежит набору  $Y$ , т. е.  $y_{i_*} = 0$  при некотором  $i_* \in \mathbb{Z}$ .

Обозначим

$$\Pi_*(x) := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_*}}^{2s} \sin \frac{x - y_i}{2}.$$

Для определённости будем считать, что  $i_*$  — нечётное число. Тогда  $\Pi_*(0) > 0$ .

Обозначим через  $2d$  расстояние от  $y_{i_*}$  до ближайшей точки набора  $Y$ , заметим,

$$d \leq \frac{\pi}{2}, \quad \Pi_*(x) > 0, \quad x \in (-2d, 2d).$$

Положим

$$M := \max_{x \in \mathbb{R}} |\Pi_*(x)|, \quad M_1 := \max_{x \in \mathbb{R}} |\Pi'_*(x)|, \quad m := \min_{x \in [-d, d]} \Pi_*(x).$$

Отправляясь от набора  $Y$ , определим натуральное число  $N$ . А именно обозначим через  $N$  наименьшее из чисел, удовлетворяющих неравенству

$$m \sin^3 \frac{d}{8} \geq \frac{5}{N} (M + M_1).$$

Тогда

$$m \sin \frac{d}{8} \geq \frac{5}{N} (M + M_1). \tag{1}$$

Следовательно,

$$d > \frac{40}{N}. \tag{2}$$

Выберем натуральное число  $j^*$  из условия

$$\frac{\pi}{N} + j^* \frac{2\pi}{N} \leq d < \frac{\pi}{N} + (j^* + 1) \frac{2\pi}{N}.$$

Обозначим  $d^* := \frac{\pi}{N} + j^* \frac{2\pi}{N}$  и заметим,

$$\frac{1}{2}d < d^* \leq d. \tag{3}$$



При построении контрпримера будет использовано ядро Джексона

$$J_N(t) = \frac{3}{2N(2N^2 + 1)} \left( \frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4.$$

Напомним (см. например [14, с. 127]) некоторые свойства ядра Джексона:

- а)  $J_N(t)$  является чётным неотрицательным тригонометрическим полиномом порядка  $2N - 2$ ;
- б)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_N(t) dt = 1; \tag{4}$$

в) для любой непрерывно дифференцируемой периодической функции  $g$  в каждой точке  $x$  имеет место неравенство

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (g(t) - g(x)) J_N(t - x) dt \right| \leq \frac{5}{N} \|g'\|. \tag{5}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{M} &:= \frac{1}{\pi} \|J_N\|, \\ \tilde{m} &:= \frac{1}{\pi} \min_{t \in [-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]} J_N(t - d^*) = \frac{1}{\pi} \min_{t \in [-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]} J_N(t + d^*) \end{aligned}$$

и заметим, что  $\tilde{m} > 0$ . Наконец, положим

$$\overline{M} := 2 + \pi^3 \sqrt{\frac{M\tilde{M}}{m\tilde{m}}}.$$

Всюду далее в главе предполагаем, что число  $b$  удовлетворяет неравенствам

$$0 < b < \frac{\pi}{2N\overline{M}}, \tag{6}$$

в частности, с учетом (2) и (3),

$$\frac{d^* - 2b}{2} > \frac{d}{8}. \tag{7}$$

**Пример.** Для любых  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 2$ , и  $n \in \mathbb{N}$  существует функция  $f(x) := f(x; s, Y, n, k)$  такая, что  $f \in \Delta^{(1)}(Y)$  и

$$E_n^{(1)}(f; Y) > B_Y n^{\frac{k}{2} - 1} \omega_k \left( f; \frac{1}{n} \right), \tag{8}$$

где  $B_Y = \text{const}$ , зависит только от  $Y$  и  $k$ .

**Доказательство.** Для каждого  $b$  обозначим

$$\begin{aligned} Q_r(x, b) &:= Q_r(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin \frac{t - 2b}{2} \Pi_*(t) J_N(t - d^*) dt, \\ Q_l(x, b) &:= Q_l(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^x \sin \frac{t - 2b}{2} \Pi_*(t) J_N(t + d^*) dt \end{aligned}$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} Q_r(2\pi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{d^* - 2b}{2} \Pi_*(d^*) J_N(t - d^*) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sin \frac{t - 2b}{2} \Pi_*(t) - \sin \frac{d^* - 2b}{2} \Pi_*(d^*) \right) J_N(t - d^*) dt. \end{aligned}$$



Поэтому в силу (4), (5), (7) и (1)

$$\begin{aligned} Q_r(2\pi) &\geq \sin \frac{d^* - 2b}{2} \Pi_*(d^*) - \frac{5}{N} \left\| \left( \sin \frac{\cdot - 2b}{2} \Pi_*(\cdot) \right)' \right\| \geq \\ &\geq m \sin \frac{d}{8} - \frac{5}{N} (M + M_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} Q_l(2\pi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \frac{-d^* - 2b}{2} \Pi_*(-d^*) J_N(t + d^*) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sin \frac{t - 2b}{2} \Pi_*(t) - \sin \frac{-d^* - 2b}{2} \Pi_*(-d^*) \right) J_N(t + d^*) dt. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (4), (5), (7) и (1)

$$\begin{aligned} Q_l(2\pi) &\leq \sin \frac{-d^* - 2b}{2} \Pi_1(-d^*) + \frac{5}{N} \left\| \left( \sin \frac{\cdot - 2b}{2} \Pi_1(\cdot) \right)' \right\| \leq \\ &\leq -m \sin \frac{d}{8} + \frac{5}{N} (M + M_1) \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, существует число  $\alpha_b \in [0, 1]$  такое, что

$$\alpha_b Q_r(2\pi) + (1 - \alpha_b) Q_l(2\pi) = 0. \quad (9)$$

Положим  $Q(x, b) := Q(x) := \alpha_b Q_r(x) + (1 - \alpha_b) Q_l(x)$ . Равенство (9) означает, что  $Q(x)$  есть тригонометрический полином, порядок которого в соответствии с а) равен  $s + 2N - 2$ . Чтобы построить функцию  $f$  докажем лемму.

**Лемма.** Для любого  $b$  существует число  $b_0$  такое, что

$$2b < b_0 < \overline{M}b \quad (10)$$

и

$$Q(b_0) = 0. \quad (11)$$

**Доказательство.** Заметим, что  $Q(2b) < 0$ . Кроме того, справедлива оценка

$$|Q(2b)| \leq M\tilde{M} \left| \int_0^{2b} \sin \frac{t - 2b}{2} dt \right| = 4M\tilde{M} \sin^2 \frac{b}{2} \leq M\tilde{M}b^2.$$

С другой стороны, поскольку в силу (6)  $\overline{M}b < \frac{\pi}{2N}$ , то

$$\begin{aligned} Q(\overline{M}b) - Q(2b) &= \frac{1}{\pi} \int_{2b}^{\overline{M}b} \sin \frac{t - 2b}{2} \Pi_*(t) (\alpha_b J_N(t - d^*) + (1 - \alpha_b) J_N(t + d^*)) dt \geq \\ &\geq m\tilde{m} \int_{2b}^{\overline{M}b} \sin \frac{t - 2b}{2} dt = 4m\tilde{m} \sin^2 \frac{(\overline{M} - 2)b}{4} \geq \frac{m\tilde{m}}{\pi^2} (\overline{M} - 2)^2 b^2. \end{aligned}$$

Откуда

$$Q(\overline{M}b) = Q(\overline{M}b) - Q(2b) + Q(2b) \geq \frac{m\tilde{m}}{\pi^2} (\overline{M} - 2)^2 b^2 - M\tilde{M}b^2 = M\tilde{M}b^2 (\pi^4 - 1) > 0.$$

Лемма доказана.





Продолжим доказательство примера. Пусть  $K_b(x)$  —  $2\pi$ -периодическая функция такая, что

$$K_b(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (0, b_0), \\ 1, & \text{если } x \in [-\pi, 0] \cup [b_0, \pi]. \end{cases}$$

Положим

$$g(x) := g(x; b) := \frac{1}{\pi} \int_0^x K_b(x) \sin \frac{1}{2}(t - 2b) \Pi_*(t) (\alpha_b J_N(t - d^*) + (1 - \alpha_b) J_N(t + d^*)) dt.$$

Равенство (11) вкупе с (10) означает, что  $g$  есть  $2\pi$ -периодическая функция, более того, ясно, что  $g \in \Delta^{(1)}(Y)$ . Очевидны следующие неравенства

$$\begin{aligned} \|g - Q\| &\leq M\tilde{M}b_0 \sin \frac{b_0 - 2b}{2} < \frac{1}{2} M\tilde{M}\overline{M}^2 b^2 =: c_1 b^2, \\ \omega_k \left( g; \frac{1}{n} \right) &\leq 2^k \|g - Q\| + \left( \frac{1}{n} \right)^k \|Q^{(k)}\| \leq 2^k c_1 b^2 + \left( \frac{1}{n} \right)^k M_k, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $M_k = \text{const}$ , не зависит от  $b$  и  $n$ .

Возьмём произвольный полином  $\tau_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ ,  $n > s + 2N - 2$ , положим

$$R_n(x) := \tau_n(x) - Q(x)$$

и заметим, что

$$R'_n(b) = \tau'_n(b) - Q'(b) \geq -Q'(b) \geq \frac{bm\tilde{m}}{\pi} =: c_2 b.$$

Применяя неравенство Бернштейна

$$\|\tau'_n\| \leq n\|\tau_n\|, \quad \tau_n \in \mathbb{T}_n,$$

получаем:

$$c_2 b \leq R'_n(b) \leq n\|R_n\|,$$

откуда

$$\frac{c_2 b}{n} \leq \|R_n\| \leq \|\tau_n - g\| + \|g - Q\| \leq \|\tau_n - g\| + c_1 b^2,$$

т. е.

$$\|\tau_n - g\| \geq \frac{c_2 b}{n} - c_1 b^2 = \frac{c_2 b}{n} \left( 1 - \frac{c_1 b n}{c_2} \right). \quad (13)$$

Теперь для доказательства (8) при каждом  $n > N_0$  возьмем

$$f(x) := g(x; b_n), \quad b_n := \frac{c_2}{2c_1} \left( \frac{1}{n} \right)^{k/2},$$

где  $N_0$  выбрано из условий  $\overline{M}b_{N_0} < \frac{\pi}{2N}$  и  $N_0 > s + 2N - 2$ . Тогда (8) следует из (12) и (13):

$$\frac{\|\tau_n - f\|}{\omega_k \left( f; \frac{1}{n} \right)} \geq \frac{\frac{c_2 b_n}{n} \left( 1 - \frac{c_1 b_n n}{c_2} \right)}{2^k c_1 b_n^2 + \left( \frac{1}{n} \right)^k M_k} \geq \frac{1}{2n} \frac{c_2 b_n}{2^k c_1 b_n^2 + \left( \frac{1}{n} \right)^k M_k} =: B_Y n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Для случая  $n > N_0$  неравенство (8) доказано. Для случая  $n < N_0$  оно следует из неравенства  $E_n^{(1)}(f; Y) \geq E_{1+N_0}^{(1)}(f; Y)$ . Пример доказан.



### Библиографический список

1. Jackson D. On approximation by trigonometric sums and polynomials // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1912. Vol. 13. P. 491–515. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2>.
2. Zygmund A. Smooth Functions // *Duke Math. J.* 1945. Vol. 12, № 1. P. 47–76.
3. Стечкин С. Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами // Докл. АН СССР. 1952. Т. 83, № 5. С. 651–654.
4. Копотун К. А. Равномерные оценки ковыпуклого приближения функций многочленам // *Мат. заметки.* 1992. Т. 51, № 3. С. 35–46.
5. Тиман А. Ф. Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций на конечном отрезке вещественной оси // Докл. АН СССР. 1951. Т. 78, № 1. С. 17–20.
6. Дзядык В. К. О приближении функций обыкновенными многочленами на конечном отрезке вещественной оси // *Изв. АН СССР. Сер. математическая.* 1958. Т. 22, № 3. С. 337–354.
7. Freud G. Uber die Approximation Reelen Stetiger Functionen Durch Gewohnliche Polinome // *Math. Ann.* 1959. Т. 137, № 1. С. 17–25.
8. Теляковский С. А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами // *Мат. сб.* 1966. Т. 70 (112), № 2. С. 252–265.
9. Брудный Ю. А. Приближение функций алгебраическими многочленами // *Изв. АН СССР. Сер. математическая.* 1968. Т. 32, № 4. С. 780–787.
10. Lorentz G. G., Zeller K. L. Degree of Approximation by Monotone Polynomials. II // *J. Approx. Theory*, 1969. Vol. 2, № 3. P. 265–269.
11. Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев : Наук. думка, 1992. 225 с.
12. Шведов А. С. Теорема Джексона в  $L_p$ ,  $0 < p < 1$ , для алгебраических многочленов и порядка комонотонных приближений // *Мат. заметки.* 1979. Т. 25, № 1. С. 107–117.
13. Шведов А. С. Комонотонное приближение функций многочленами // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250, № 1. С. 39–42.
14. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977. 512 с.

## One Counterexample of Shape-preserving Approximation

M. G. Pleshakov, S. V. Tyshkevich

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, pleshakovmg@mail.ru, tyszkiewicz@yandex.ru

Let  $2s$  points  $y_i = -\pi \leq y_{2s} < \dots < y_1 < \pi$  be given. Using these points, we define the points  $y_i$  for all integer indices  $i$  by the equality  $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ . We shall write  $f \in \Delta^{(1)}(Y)$  if  $f$  is a  $2\pi$ -periodic function and  $f$  does not decrease on  $[y_i, y_{i-1}]$  if  $i$  is odd; and  $f$  does not increase on  $[y_i, y_{i-1}]$  if  $i$  is even. We denote  $E_n^{(1)}(f; Y)$  the value of the best uniform comonotone approximation. In this article the following counterexample of comonotone approximation is proved.

**Example.** For each  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 2$ , and  $n \in \mathbb{N}$  there a function  $f(x) := f(x; s, Y, n, k)$  exists, such that  $f \in \Delta^{(1)}(Y)$  and

$$E_n^{(1)}(f; Y) > B_Y n^{\frac{k}{2}-1} \omega_k \left( f; \frac{1}{n} \right),$$

where  $B_Y = \text{const}$ , depending only on  $Y$  and  $k$ ;  $\omega_k$  is the modulus of smoothness of order  $k$ , of  $f$ .

*Key words:* trigonometric polynomials, polynomial approximation, shape-preserving.

### References

1. Jackson D. On approximation by trigonometric sums and polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1912, vol. 13, pp. 491–515. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2>.
2. Zygmund A. Smooth Functions. *Duke Math. J.*, 1945, vol. 12, no. 1, pp. 47–76.
3. Stechkin S. B. O nailuchshem priblizhenii periodicheskikh funktsii trigonometricheskimi polinomami [On the best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1952, vol. 83, no. 5, pp. 651–654 (in Russian).
4. Kopotun K. A. Uniform estimates of the coconvex approximation of functions by polynomials. *Math. Notes*, 1992, vol. 51, no. 3, pp. 245–254.
5. Timan A. F. Usilenie teoremy Dzhheksona o nailuchshem priblizhenii nepreryvnykh funktsii na konechnom otrezke veshchestvennoi osi [The strengthening of the theorem of Jackson on the best approximation of continuous functions on a finite interval of the real axis]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1951, vol. 78, no. 1, pp. 17–20 (in Russian).
6. Dzyadyk V. K. O priblizhenii funktsii obyknovennymi mnogochlenami na konechnom otrezke veshchestvennoi osi [On the approximation of functions by ordinary



- polynomials on a finite interval of the real axis]. *Izvestiia AN SSSR. Ser. matematicheskaja*, 1958, vol. 22, no. 3, pp. 337–354 (in Russian).
7. Freud G. Über die Approximation Reelen Stetiger Functionen Durch Gewöhnliche Polinome. *Math. Ann.*, 1959, vol. 137, no. 1, pp. 17–25.
8. Teljakovskii S. A. Two theorems on approximation of functions by algebraic polynomials. *Mat. Sb. (N. S.)*, 1966, vol. 70(112), no. 2, pp. 252–265 (in Russian).
9. Brudnyi Yu. A. The approximation of functions by algebraic polynomials. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1968, vol. 2, no. 4, pp. 735–743. DOI: 10.1070/IM1968v002n04ABEH000662
10. Lorentz G. G., Zeller K. L. Degree of Approximation by Monotone Polynomials. II. *J. Approx. Theory*, 1969, vol. 2, no. 3, pp. 265–269.
11. Shevchuk I. A. *Priblizhenie mnogochlenami i sledy nepreryvnykh na otrezke funktsii* [Approximation by polynomials and traces continuous on the interval functions]. Kiev, Naukova dumka, 1992. 225 p. (in Russian)
12. Shvedov A. S. Jackson's theorem in  $L^p$ ,  $0 < p < 1$ , for algebraic polynomials, and orders of comonotone approximations. *Math. Notes*, 1979, vol. 25, no. 1, pp. 57–63.
13. Shvedov A. S. Komonotonnoe priblizhenie funktsii mnogochlenami [Comonotone approximation of functions by polynomials]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1980, vol. 250, no. 1, pp. 39–42 (in Russian).
14. Dzyadyk V. K. *Vvedenie v teoriuu ravnomernogo priblizheniia funktsii polinomami* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moscow, Nauka, 1977, 512 p. (in Russian)

УДК 512.572

## О ТОЖДЕСТВАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В АЛГЕБРАХ ПУАССОНА

С. М. Рацеев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, RatseevSM@mail.ru

В работе рассматриваются так называемые *customary* и *extended customary* тождества в алгебрах Пуассона. Показано, что последовательность коразмерностей  $\{r_n(V)\}_{n \geq 1}$  любого *extended customary* пространства многообразия алгебр Пуассона  $V$  над произвольным полем либо ограничена полиномом, либо не ниже показательной функции с основанием степени, равной 2. При этом если данная последовательность ограничена полиномом, то найдется такой многочлен  $R(x)$  с рациональными коэффициентами, что  $r_n(V) = R(n)$  для всех достаточно больших  $n$ . Приводится нижняя и верхняя границы для многочленов  $R(x)$  произвольной фиксированной степени.

*Ключевые слова:* алгебра Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

Векторное пространство  $A$  над полем  $K$  с двумя  $K$ -билинейными операциями умножения « $\cdot$ » и « $\{, \}$ » называется алгеброй Пуассона, если относительно операции « $\cdot$ » пространство  $A$  является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции « $\{, \}$ » — алгеброй Ли, и данные операции связаны правилом Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad a, b, c \in A.$$

Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и т. д.

Пусть  $F(X)$  — свободная алгебра Пуассона, где  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  — счетное множество свободных образующих. Обозначим через  $P_n$  пространство в  $F(X)$ , состоящее из полилинейных элементов степени  $n$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

Выделим в пространстве  $P_{2n}$  подпространство  $Q_{2n}$ , порожденное элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \dots \cdot \{x_{a_{2n-1}}, x_{a_{2n}}\}.$$

Тогда данное пространство есть линейная оболочка следующих элементов:

$$Q_{2n} = \langle \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} \mid \tau \in S_{2n}, \\ \tau(1) < \tau(2), \tau(3) < \tau(4), \dots, \tau(2n-1) < \tau(2n), \\ \tau(1) < \tau(3) < \dots < \tau(2n-1) \rangle_K.$$



- polynomials on a finite interval of the real axis]. *Izvestiia AN SSSR. Ser. matematicheskaja*, 1958, vol. 22, no. 3, pp. 337–354 (in Russian).
7. Freud G. Über die Approximation Reelen Stetiger Functionen Durch Gewöhnliche Polinome. *Math. Ann.*, 1959, vol. 137, no. 1, pp. 17–25.
8. Teljakovskii S. A. Two theorems on approximation of functions by algebraic polynomials. *Mat. Sb. (N. S.)*, 1966, vol. 70(112), no. 2, pp. 252–265 (in Russian).
9. Brudnyi Yu. A. The approximation of functions by algebraic polynomials. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1968, vol. 2, no. 4, pp. 735–743. DOI: 10.1070/IM1968v002n04ABEH000662
10. Lorentz G. G., Zeller K. L. Degree of Approximation by Monotone Polynomials. II. *J. Approx. Theory*, 1969, vol. 2, no. 3, pp. 265–269.
11. Shevchuk I. A. *Priblizhenie mnogochlenami i sledy nepreryvnykh na otrezke funktsii* [Approximation by polynomials and traces continuous on the interval functions]. Kiev, Naukova dumka, 1992. 225 p. (in Russian)
12. Shvedov A. S. Jackson's theorem in  $L^p$ ,  $0 < p < 1$ , for algebraic polynomials, and orders of comonotone approximations. *Math. Notes*, 1979, vol. 25, no. 1, pp. 57–63.
13. Shvedov A. S. Komonotonnoe priblizhenie funktsii mnogochlenami [Comonotone approximation of functions by polynomials]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1980, vol. 250, no. 1, pp. 39–42 (in Russian).
14. Dzyadyk V. K. *Vvedenie v teoriuu ravnomernogo priblizheniia funktsii polinomami* [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. Moscow, Nauka, 1977, 512 p. (in Russian)

УДК 512.572

## О ТОЖДЕСТВАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В АЛГЕБРАХ ПУАССОНА

С. М. Рацеев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, RatseevSM@mail.ru

В работе рассматриваются так называемые customary и extended customary тождества в алгебрах Пуассона. Показано, что последовательность коразмерностей  $\{r_n(V)\}_{n \geq 1}$  любого extended customary пространства многообразия алгебр Пуассона  $V$  над произвольным полем либо ограничена полиномом, либо не ниже показательной функции с основанием степени, равной 2. При этом если данная последовательность ограничена полиномом, то найдется такой многочлен  $R(x)$  с рациональными коэффициентами, что  $r_n(V) = R(n)$  для всех достаточно больших  $n$ . Приводится нижняя и верхняя границы для многочленов  $R(x)$  произвольной фиксированной степени.

*Ключевые слова:* алгебра Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

Векторное пространство  $A$  над полем  $K$  с двумя  $K$ -биллинейными операциями умножения « $\cdot$ » и « $\{, \}$ » называется алгеброй Пуассона, если относительно операции « $\cdot$ » пространство  $A$  является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции « $\{, \}$ » — алгеброй Ли, и данные операции связаны правилом Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad a, b, c \in A.$$

Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и т. д.

Пусть  $F(X)$  — свободная алгебра Пуассона, где  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  — счетное множество свободных образующих. Обозначим через  $P_n$  пространство в  $F(X)$ , состоящее из полилинейных элементов степени  $n$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$ .

Выделим в пространстве  $P_{2n}$  подпространство  $Q_{2n}$ , порожденное элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \dots \cdot \{x_{a_{2n-1}}, x_{a_{2n}}\}.$$

Тогда данное пространство есть линейная оболочка следующих элементов:

$$Q_{2n} = \langle \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} \mid \tau \in S_{2n}, \\ \tau(1) < \tau(2), \tau(3) < \tau(4), \dots, \tau(2n-1) < \tau(2n), \\ \tau(1) < \tau(3) < \dots < \tau(2n-1) \rangle_K.$$



Обозначим через  $T_{2n}$  множество перестановок  $\tau$  из  $S_{2n}$ , которые удовлетворяют указанным выше свойствам. Пространство  $Q_{2n}$  было введено Д. Фаркашом (D. R. Farkas) в работах [1,2]. Важность рассмотрения данных пространств показывает следующая теорема.

**Теорема 1** [1]. Пусть  $\mathbf{V}$  — многообразие алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики, в котором выполнено нетривиальное тождество. Тогда в  $\mathbf{V}$  выполняется нетривиальное тождество вида

$$\sum_{\tau \in T_{2n}} \alpha_{\tau} \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} = 0, \quad \alpha_{\tau} \in K.$$

Определим также подпространство  $R_n$  в  $P_n$ , порожденное элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \dots \cdot \{x_{a_{2m-1}}, x_{a_{2m}}\} \cdot x_{\alpha_{2m+1}} \cdot \dots \cdot x_{\alpha_n}.$$

Тогда пространство  $R_n$  является линейной оболочкой элементов следующего вида:

$$\begin{aligned} R_n = \{ & \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2m-1)}, x_{\tau(2m)}\} \cdot x_{\tau(2m+1)} \cdot \dots \cdot x_{\tau(n)} \mid \\ & \tau \in S_n, \quad 0 \leq 2m \leq n, \\ & \tau(1) < \tau(2), \tau(3) < \tau(4), \dots, \tau(2m-1) < \tau(2m), \\ & \tau(1) < \tau(3) < \dots < \tau(2m-1), \\ & \tau(2m+1) < \tau(2m+2) < \dots < \tau(n)\}_K. \end{aligned}$$

Пусть  $\mathbf{V}$  — некоторое многообразие алгебр Пуассона (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографиях [3,4]),  $Id(\mathbf{V})$  — идеал тождеств многообразия  $\mathbf{V}$ . Обозначим:

$$\begin{aligned} P_n(\mathbf{V}) &= P_n / (P_n \cap Id(\mathbf{V})), & c_n(\mathbf{V}) &= \dim P_n(\mathbf{V}), \\ Q_{2n}(\mathbf{V}) &= Q_{2n} / (Q_{2n} \cap Id(\mathbf{V})), & q_{2n}(\mathbf{V}) &= \dim Q_{2n}(\mathbf{V}), \\ R_n(\mathbf{V}) &= R_n / (R_n \cap Id(\mathbf{V})), & r_n(\mathbf{V}) &= \dim R_n(\mathbf{V}). \end{aligned}$$

**Лемма 1.** Пусть  $F = F(X)$ ,  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ , основное поле произвольно и элементы

$$u_s^{2n}(x_1, \dots, x_{2n}), \quad s = 1, \dots, q_{2n}(F), \quad (1)$$

образуют базис пространства  $Q_{2n}$ ,  $n > 0$ . Тогда полилинейные элементы от переменных  $x_1, \dots, x_n$  вида

$$\begin{aligned} & x_1 \cdot \dots \cdot x_n, \\ & x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$2 \leq 2k \leq n, \quad s = 1, \dots, q_{2k}(F), \quad i_1 < \dots < i_{n-2k}, \quad j_1 < \dots < j_{2k},$$

будут образовывать базис пространства  $R_n$ .

**Доказательство.** Очевидно, что любой элемент из  $R_n$  является линейной комбинацией элементов вида (2).

Покажем, что элементы вида (2) линейно независимы в  $R_n$ . Предположим противное. Пусть выполнено нетривиальное линейное соотношение:

$$\sum_{\substack{0 \leq 2k \leq n, \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{2k} \leq n}} \alpha_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,s} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}) = 0. \quad (3)$$

Выберем такое минимальное значение  $k$ , при котором  $\alpha_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,s} \neq 0$ . Подставим в этом случае вместо переменных  $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-2k}}$  единицу. Тогда из (3) будет следовать такое нетривиальное линейное соотношение:

$$\sum_{s=1}^{q_{2k}(F)} \beta_s u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}) = 0,$$

где не все  $\beta_s$  равны 0, что противоречит линейной независимости элементов (1).  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $\mathbf{V}$  — некоторое многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем. Тогда



(i) полилинейные элементы

$$u_s^{2n}(x_1, \dots, x_{2n}), \quad s = 1, \dots, q_{2n}(\mathbf{V}), \quad (4)$$

образуют базис пространства  $Q_{2n}(\mathbf{V})$  тогда и только тогда, когда полилинейные элементы от переменных  $x_1, \dots, x_n$  вида

$$\begin{aligned} & x_1 \cdot \dots \cdot x_n, \\ & x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$2 \leq 2k \leq n, \quad s = 1, \dots, q_{2k}(\mathbf{V}), \quad i_1 < \dots < i_{n-2k}, \quad j_1 < \dots < j_{2k},$$

образуют базис пространства  $R_n(\mathbf{V})$ .

(ii) для любого натурального числа  $n$  выполнено равенство

$$r_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{2 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} q_{2k}(\mathbf{V}),$$

где  $C_n^{2k}$  — число сочетаний из  $n$  по  $2k$ .

**Доказательство.** (i) Доказательство линейной независимости элементов вида (5) аналогично доказательству линейной независимости элементов вида (2) в лемме 1. Поэтому остается показать, что любой элемент из  $R_n(\mathbf{V})$  линейно выражается через элементы вида (5). Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in R_n(\mathbf{V})$ .

Дополним элементы (4) до базиса пространства  $Q_{2k}$ ,  $0 \leq 2k \leq n$ :

$$u_s^{2k}(x_1, \dots, x_{2k}), \quad v_t^{2k}(x_1, \dots, x_{2k}), \quad s = 1, \dots, q_{2k}(\mathbf{V}), \quad t = 1, \dots, q_{2k}(F) - q_{2k}(\mathbf{V}).$$

Тогда из леммы 1 следует, что элемент  $f(x_1, \dots, x_n)$  представим в виде следующей линейной комбинации:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) = & \sum_{\substack{0 \leq 2k \leq n, \\ 1 \leq s \leq q_{2k}(\mathbf{V}), \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{2k} \leq n}} \alpha_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,s} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}) + \\ & + \sum_{\substack{0 \leq 2k \leq n, \\ 1 \leq t \leq q_{2k}(F) - q_{2k}(\mathbf{V}), \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{2k} \leq n}} \beta_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,t} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{n-2k}} \cdot v_t^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}). \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим, что в равенстве (6) хотя бы один из элементов  $\beta_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,t}$  не равен нулю. Выберем такое минимальное значение  $k$ , при котором  $\beta_{j_1 \dots j_{2k}}^{k,t} \neq 0$ . Подставим вместо переменных  $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-2k}}$  единицу. Получим такое равенство:

$$f(1, \dots, x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}, \dots, 1) = \sum_{s=1}^{q_{2k}(\mathbf{V})} \epsilon_s u_s^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}) + \sum_{t=1}^{q_{2k}(F) - q_{2k}(\mathbf{V})} \delta_t v_t^{2k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2k}}), \quad (7)$$

где не все  $\delta_t$  равны 0. Так как левая часть равенства (7) принадлежит  $Q_{2k}(\mathbf{V})$  и не все  $\delta_t$  равны 0, то элементы вида (4) не являются базисом пространства  $Q_{2k}(\mathbf{V})$ . Противоречие.

Пункт (ii) следует из пункта (i). □

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbf{V}$  — нетривиальное многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем.

Тогда либо

1)  $r_n(\mathbf{V}) \geq 2^{n-1}$  для любого  $n$ ,

либо

2) найдется такой многочлен  $a_{2N}x^{2N} + \dots + a_1x + a_0$  степени  $2N \geq 0$  из кольца  $\mathbb{Q}[x]$ , что для любого  $n \geq 2N$  будет выполнено равенство

$$r_n(\mathbf{V}) = a_{2N}n^{2N} + \dots + a_1n + a_0, \quad a_{2N} \neq 0,$$

причем либо

2a)  $r_n(\mathbf{V}) \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ ,  $n \geq 1$ , и  $\frac{1}{(2N)!} \leq a_{2N} \leq \frac{1}{N!2^N}$ ,

либо

2b)  $r_n(\mathbf{V}) = 1$  для любого  $n$ .





**Доказательство.** Пусть последовательность  $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$  не ограничена полиномом. Тогда из предложения 5 работы [5] следует, что для любого целого положительного  $n$  выполнено неравенство  $q_{2n}(\mathbf{V}) > 0$ . С учетом леммы 2, получаем:

$$r_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{2 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} q_{2k}(\mathbf{V}) \geq 1 + \sum_{2 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} = 2^{n-1}.$$

Пусть теперь последовательность  $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$  ограничена полиномом. Пусть  $N$  — максимальное число, при котором  $q_{2N}(\mathbf{V}) > 0$ . Тогда из леммы 2 следует, что для любого  $n \geq 2N$  будет выполнено равенство

$$r_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{k=1}^N C_n^{2k} q_{2k}(\mathbf{V}),$$

т. е. найдется такой многочлен степени  $2N \geq 0$  с рациональными коэффициентами, что для любого  $n \geq 2N$

$$r_n(\mathbf{V}) = a_{2N} n^{2N} + \dots + a_1 n + a_0, \quad a_{2N} \neq 0.$$

Пусть  $N > 0$ . Так как  $q_{2n}(F) = \frac{(2n)!}{n!2^n}$  для любого  $n$  [6], то для любого  $n \geq 2N$  будет выполнено двойное неравенство:

$$\sum_{k=0}^N C_n^{2k} \leq r_n(\mathbf{V}) \leq \sum_{k=0}^N C_n^{2k} \cdot \frac{(2k)!}{k!2^k}. \quad (8)$$

Поэтому

$$\frac{1}{(2N)!} \leq a_{2N} \leq \frac{1}{N!2^N}.$$

При этом заметим, что

$$r_n(\mathbf{V}) \geq 1 + C_n^2 \cdot q_2(\mathbf{V}) \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Если  $N = 0$ , то  $r_n(\mathbf{V}) = 1$  для любого  $n$ . □

Пусть  $\Lambda_{2n}$  — алгебра Грассмана с единицей,  $2n$  образующими элементами  $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$  и операцией умножения « $\wedge$ ». Введем в алгебре  $\Lambda_{2n}$  два новых умножения:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \quad \{a, b\} = a \wedge b - b \wedge a, \quad a, b \in \Lambda_{2n}.$$

Обозначим полученную алгебру Пуассона  $(\Lambda_{2n}, +, \cdot, \{, \})$  через  $G_{2n}$ .

**Лемма 3** [5]. Пусть  $N$  — произвольное натуральное число. Для алгебры Пуассона  $G_{2N}$  над полем нулевой характеристики верны следующие утверждения:

(i) полилинейные тождества

$$\{x, y, z\} = 0, \quad \{x_1, y_1\} \cdot \dots \cdot \{x_{N+1}, y_{N+1}\} = 0 \quad (9)$$

порождают идеал тождеств алгебры  $G_{2N}$ ;

(ii) последовательность  $\{r_n(G_{2N})\}_{n \geq 1}$  достигает нижней границы в неравенстве (8):

$$c_n(G_{2N}) = r_n(G_{2N}) = \sum_{k=0}^N C_n^{2k}, \quad n \geq 2N,$$

при этом  $a_{2N} = \frac{1}{(2N)!}$ .

Следующая лемма, в частности, показывает, что многообразие, порожденное алгеброй  $G_2$ , является наименьшим многообразием алгебр Пуассона в классе всех многообразий алгебр Пуассона, имеющих рост не ниже полиномиального.

**Лемма 4** [5]. Для алгебры  $G_2$  над полем нулевой характеристики верны следующие утверждения:

(i) тождества

$$\{x_1, x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры  $G_2$ ;



(ii)  $q_2(G_2) = 1, q_{2n}(G_2) = 0, n \geq 2,$

$$c_n(G_2) = r_n(G_2) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \geq 1;$$

(iii) многообразие  $\text{var}(G_2)$  является наименьшим многообразием среди всех многообразий алгебр Пуассона  $\mathbf{V}$ , у которых последовательность  $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$  ( $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ ) растет не ниже полинома, т. е. если для некоторого многообразия  $\mathbf{V}$  последовательность  $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$  ( $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ ) растет не ниже полинома, то  $G_2 \in \mathbf{V}$ .

Заметим, что существует бесконечно много попарно различных многообразий алгебр Пуассона  $\mathbf{V}$ , у которых последовательность  $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$  достигает нижней границы полиномиального роста. Пусть  $SU_N = SU_N(K)$  — алгебра строго верхнетреугольных матриц порядка  $N$  над полем  $K$  и операцией умножения  $\wedge$ . В векторном пространстве  $SU_N \oplus K$  над полем  $K$  определим две операции умножения  $\cdot$  и  $\{, \}$  следующим образом:

$$(a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha \beta, \\ \{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b],$$

где  $[a, b] = a \wedge b - b \wedge a, a, b \in SU_N, \alpha, \beta \in K$ . Полученную алгебру Пуассона  $(SU_N \oplus K, \cdot, \{, \}, K)$  обозначим через  $PSU_N$ .

**Лемма 5** [7]. Для алгебры Пуассона  $PSU_N$  над полем нулевой характеристики верны следующие утверждения:

(i) полилинейные тождества

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{x_1, x_2, \dots, x_N\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры  $PSU_N$ ;

(ii)  $q_2(PSU_N) = 1, q_{2n}(PSU_N) = 0, n > 1,$

$$r_n(PSU_N) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \geq 1, \\ c_n(PSU_N) = 1 + \sum_{k=2}^{\min\{n, N-1\}} C_n^k \cdot (k-1)!, \quad n \geq 1.$$

### Библиографический список

1. Farkas D. R. Poisson polynomial identities // Comm. Algebra. 1998. Vol. 26, № 2. P. 401–416.
2. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. II // Arch. Math. (Basel). 1999. Vol. 72, № 4. P. 252–260.
3. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985.
4. Giambruno A., Zaicev M. V. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Math. Surv. and Monographs. Providence, R.I. : American Math. Soc., 2005. Vol. 122.
5. Рацеев С. М. Алгебры Пуассона полиномиального роста // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 700–711.
6. Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. Vol. 359, № 10. P. 4669–4694.
7. Череватенко О. И. О лиево нильпотентных алгебрах Пуассона // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика, физика. 2012. № 23(142), вып. 29. С. 14–16.

## On Poisson Customary Polynomial Identities

S. M. Ratseev

Ulyanovsk State University, 42, Leo Tolstoy str., 432017, Ulyanovsk, Russia, RatseevSM@mail.ru

We study Poisson customary and Poisson extended customary polynomials. We show that the sequence of codimensions  $\{r_n(V)\}_{n \geq 1}$  of every extended customary space of variety  $V$  of Poisson algebras over an arbitrary field is either bounded by a polynomial or at least exponential. Furthermore, if this sequence is bounded by polynomial then there is a polynomial  $R(x)$  with rational coefficients such that  $r_n(V) = R(n)$  for all sufficiently large  $n$ . We present lower and upper bounds for the polynomials  $R(x)$  of an arbitrary fixed degree.

*Key words:* Poisson algebra, variety of algebras, growth of a variety.



## References

1. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. *Comm. Algebra*, 1998, vol. 26, no. 2, pp. 401–416.
2. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. II. *Arch. Math. (Basel)*, 1999, vol. 72, no. 4, pp. 252–260.
3. Bahturin Yu. A. *Identical relations in Lie algebras*. Utrecht, VNU Sci. Press, 1987. 309 p. (Rus. ed. : Bahturin Yu. A. *Tozhdestva v algebrah Li*. Moscow, Nauka, 1985).
4. *Giamb Bruno A., Zaicev M. V.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods. *Math. Surv. and Monographs*. Providence, R.I., American Math. Soc., 2005, vol. 122.
5. *Ratseev S. M.* Poisson algebras of polynomial growth. *Siberian Math. J.* 2013, vol. 54, no. 3, pp. 555–565.
6. *Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A.* Poisson PI algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007, vol. 359, no. 10, pp. 4669–4694.
7. *Cherevatenko O. I.* On nilpotent Leibnitz algebras. *Nauchnyye vedomosti BelGU. Ser. Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Ser. Mathematics. Physics], 2012, no. 23(142), iss. 29, pp. 14–16.

УДК 517.54

# НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Р. Б. Салимов<sup>1</sup>, Э. Н. Карабашева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, salimov@5354.ru

<sup>2</sup>Аспирант кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, enkarabasheva@bk.ru

В работе рассматривается краевая задача Римана с бесконечным индексом, когда краевое условие задачи задается на действительной оси комплексной плоскости. Для решения этой задачи используется подход, основанный на устранении бесконечного разрыва аргумента коэффициента краевого условия и аналогичный тому, с помощью которого в случае конечного индекса задачи ранее в работах Ф. Д. Гахова устранялись разрывы коэффициента краевого условия с помощью специально подобранных функций, отличных от используемых в настоящей работе.

*Ключевые слова:* краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс.

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $D^+$  и  $D^-$  — соответственно верхняя и нижняя полуплоскости в плоскости переменного  $z = x + iy$  с действительной осью  $L$ ,  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$  — функции, аналитические соответственно в областях  $D^+$  и  $D^-$ . Требуется определить функции  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$ , ограниченные в областях  $D^+$  и  $D^-$  соответственно, если их граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

в котором  $G(t)$ ,  $g(t)$  — заданные на  $L$  функции. В случае, когда  $\ln G(t)$  и  $g(t)$  — функции, удовлетворяющие условию  $H_L$  (условию Гельдера) всюду на  $L$ , включая окрестность точки  $t = \infty$  [1, с. 67], решение задачи (1) дано в монографиях [1, с. 136–139; 2, с. 118–121]. Решение задачи зависит от её индекса, равного  $(\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty))/2\pi$ .

Начало исследования задачи (1) в случае, когда её индекс бесконечен, т.е.  $\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty) = \infty$ , было положено Н. В. Говоровым. Результаты его работ в дальнейшем вошли в монографию [3]. Этой проблеме посвящен ряд работ других авторов; отметим из них статьи [4–7], в которых изучены новые случаи задачи Римана с бесконечным индексом, в статье [8] рассмотрен особый случай задачи, в [9] изучен случай, когда в задаче (1) при  $g(t) \equiv 0$  в качестве  $L$  берется произвольный гладкий замкнутый контур, в окрестностях некоторых точек которого  $\arg G(t)$  неограничен.

Авторы указанного ряда работ решение задачи (1) получают путем построения канонического решения — частного решения соответствующей однородной задачи:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L, \quad (2)$$

обладающего нужными свойствами, аналогично тому, как это было сделано ранее Н. В. Говоровым.



## References

1. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. *Comm. Algebra*, 1998, vol. 26, no. 2, pp. 401–416.
2. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. II. *Arch. Math. (Basel)*, 1999, vol. 72, no. 4, pp. 252–260.
3. Bahturin Yu. A. *Identical relations in Lie algebras*. Utrecht, VNU Sci. Press, 1987. 309 p. (Rus. ed. : Bahturin Yu. A. *Tozhdestva v algebrakh Li*. Moscow, Nauka, 1985).
4. *Giamb Bruno A., Zaicev M. V.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods. *Math. Surv. and Monographs*. Providence, R.I., American Math. Soc., 2005, vol. 122.
5. *Ratseev S. M.* Poisson algebras of polynomial growth. *Siberian Math. J.* 2013, vol. 54, no. 3, pp. 555–565.
6. *Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A.* Poisson PI algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007, vol. 359, no. 10, pp. 4669–4694.
7. *Cherevatenko O. I.* On nilpotent Leibnitz algebras. *Nauchnyye vedomosti BelGU. Ser. Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Ser. Mathematics. Physics], 2012, no. 23(142), iss. 29, pp. 14–16.

УДК 517.54

# НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

Р. Б. Салимов<sup>1</sup>, Э. Н. Карабашева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, salimov@5354.ru

<sup>2</sup>Аспирант кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, enkarabasheva@bk.ru

В работе рассматривается краевая задача Римана с бесконечным индексом, когда краевое условие задачи задается на действительной оси комплексной плоскости. Для решения этой задачи используется подход, основанный на устранении бесконечного разрыва аргумента коэффициента краевого условия и аналогичный тому, с помощью которого в случае конечного индекса задачи ранее в работах Ф. Д. Гахова устранялись разрывы коэффициента краевого условия с помощью специально подобранных функций, отличных от используемых в настоящей работе.

*Ключевые слова:* краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс.

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $D^+$  и  $D^-$  — соответственно верхняя и нижняя полуплоскости в плоскости переменного  $z = x + iy$  с действительной осью  $L$ ,  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$  — функции, аналитические соответственно в областях  $D^+$  и  $D^-$ . Требуется определить функции  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$ , ограниченные в областях  $D^+$  и  $D^-$  соответственно, если их граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

в котором  $G(t)$ ,  $g(t)$  — заданные на  $L$  функции. В случае, когда  $\ln G(t)$  и  $g(t)$  — функции, удовлетворяющие условию  $H_L$  (условию Гельдера) всюду на  $L$ , включая окрестность точки  $t = \infty$  [1, с. 67], решение задачи (1) дано в монографиях [1, с. 136–139; 2, с. 118–121]. Решение задачи зависит от её индекса, равного  $(\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty))/2\pi$ .

Начало исследования задачи (1) в случае, когда её индекс бесконечен, т.е.  $\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty) = \infty$ , было положено Н. В. Говоровым. Результаты его работ в дальнейшем вошли в монографию [3]. Этой проблеме посвящен ряд работ других авторов; отметим из них статьи [4–7], в которых изучены новые случаи задачи Римана с бесконечным индексом, в статье [8] рассмотрен особый случай задачи, в [9] изучен случай, когда в задаче (1) при  $g(t) \equiv 0$  в качестве  $L$  берется произвольный гладкий замкнутый контур, в окрестностях некоторых точек которого  $\arg G(t)$  неограничен.

Авторы указанного ряда работ решение задачи (1) получают путем построения канонического решения — частного решения соответствующей однородной задачи:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L, \quad (2)$$

обладающего нужными свойствами, аналогично тому, как это было сделано ранее Н. В. Говоровым.



В настоящей работе для решения задачи (1) с бесконечным индексом используется другой подход, основанный на устранении разрыва  $\arg G(t)$  и аналогичный тому, с помощью которого в работе [2, с. 428–439] устранялись разрывы первого рода у функции  $\ln G(t)$ .

Подход, аналогичный используемому здесь, применялся ранее при решении краевой задачи Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости [10].

## 2. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Будем считать, что коэффициент  $G(t)$  этого краевого условия удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\ln |G(t)|$  удовлетворяет условию  $H_L$  ( $\ln |G(t)| \in H_L$ ),
- 2)

$$\arg G(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho + \nu(t), & t > 0, \\ \nu^+ |t|^\rho + \nu(t), & t < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\nu(t)$  — заданная функция,  $\nu(t) \in H_L$ ,  $\nu^-$ ,  $\nu^+$ ,  $\rho$  — заданные числа,  $0 < \rho < 1$ .

Здесь индекс задачи равен бесконечности, так как  $(\nu^- - \nu^+) |t|^\rho \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , когда  $(\nu^- - \nu^+) \neq 0$ .

Взяв действительные постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$ , введем в рассмотрение функции

$$\begin{cases} E^+(z) = \exp\{(\alpha + i\beta)z^\rho\}, & 0 \leq \arg z \leq \pi, \\ E^-(z) = \exp\{(\alpha - i\beta)z^\rho\}, & -\pi \leq \arg z \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

аналитические и однозначные в областях соответственно  $D^+$ ,  $D^-$ , понимая под  $\arg z$  ветвь, непрерывную в соответствующей области.

Для точки  $re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , области  $D^+$  (когда  $re^{-i\theta} \in D^-$ ) имеем:

$$|E^+(re^{i\theta})| = |E^-(re^{-i\theta})| = \exp\{(\alpha \cos \rho\theta - \beta \sin \rho\theta)r^\rho\}, \quad (5)$$

$$\arg E^+(re^{i\theta}) = -\arg E^-(re^{-i\theta}) = (\alpha \sin \rho\theta + \beta \cos \rho\theta)r^\rho.$$

Поэтому при  $\theta = 0$ , когда  $re^{\pm i\theta} = t > 0$ , получим

$$\frac{E^+(t)}{E^-(t)} = \exp\{i2\beta t^\rho\}, \quad t > 0, \quad (6)$$

при  $\theta = \pi$ , когда  $re^{\pm i\pi} = t < 0$ , будем иметь:

$$\frac{E^+(t)}{E^-(t)} = \exp\{i2(\alpha \sin \rho\pi - \beta \cos \rho\pi)|t|^\rho\}, \quad t < 0. \quad (7)$$

Краевое условие (2) запишем в виде

$$\Phi^+(t)E^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t)E^-(t), \quad (8)$$

где

$$G_1(t) = \frac{E^+(t)}{E^-(t)} |G(t)| e^{i \arg G(t)}. \quad (9)$$

Принимая во внимание (3), (6), (7), постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$  формул (4) выберем так, чтобы  $2\beta = -\nu^+$ ,  $2(\alpha \sin \rho\pi - \beta \cos \rho\pi) = -\nu^-$ , т. е. чтобы

$$\beta = -\nu^+/2, \quad \alpha = (\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+)/ (2 \sin \rho\pi). \quad (10)$$

Тогда формула (9) примет вид

$$G_1(t) = |G(t)| e^{i\nu(t)},$$

причем  $\ln G_1(t) \in H_L$ .



Далее находим аналитическую и ограниченную в областях  $D^+$ ,  $D^-$  функцию [2, с. 119]

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln G_1(\tau) \frac{d\tau}{\tau - z},$$

значения которой на  $L$  как слева, так и справа удовлетворяют условию  $H_L$  [1, с. 66, 68]. Затем определяем аналитические в областях  $D^+$ ,  $D^-$  функции соответственно:

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}, \quad (11)$$

где  $\Gamma^+(z) = \Gamma(z)$  при  $z \in D^+$ ,  $\Gamma^-(z) = \Gamma(z)$  при  $z \in D^-$ , причем  $X^+(z)$ ,  $X^-(z)$  отличны от нуля всюду в областях  $D^+$ ,  $D^-$  соответственно, включая границу  $L$ .

Найденные функции удовлетворяют краевому условию:

$$X^+(t) = G_1(t)X^-(t). \quad (12)$$

Учитывая последнее, краевое условие (8) запишем так

$$\frac{\Phi^+(t)E^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)E^-(t)}{X^-(t)}.$$

Отсюда видно, что функция  $\frac{\Phi^-(z)E^-(z)}{X^-(z)}$  является аналитическим продолжением функции  $\frac{\Phi^+(z)E^+(z)}{X^+(z)}$ , т. е. они образуют целую функцию  $F(z)$  в плоскости  $z$  и

$$\frac{\Phi^+(z)E^+(z)}{X^+(z)} = F(z), \quad \frac{\Phi^-(z)E^-(z)}{X^-(z)} = F(z), \quad (13)$$

для точек соответственно  $D^+$ ,  $D^-$ , включая  $L$ .

Обозначим

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} (\alpha \cos \rho\theta - \beta \sin \rho\theta) = M_1$$

тогда согласно (5) имеем:

$$|E^+(re^{i\theta})| = |E^-(re^{-i\theta})| \leq \exp\{M_1 r^\rho\}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (14)$$

Для отличных от нуля функций  $X^+(z)$ ,  $X^-(z)$  имеем

$$|1/X^+(z)| < C_1, \quad |1/X^-(z)| < C_1, \quad C_1 = \text{const}, \quad (15)$$

для всех  $z$  области соответственно  $D^+$ ,  $D^-$ , включая  $L$ . Кроме того, поскольку решения  $\Phi^+(z)$ ,  $\Phi^-(z)$  относятся к классу ограниченных функций, то

$$|\Phi^+(z)| < C_2, \quad |\Phi^-(z)| < C_2, \quad C_2 = \text{const}, \quad (16)$$

для всех  $z$  области соответственно  $D^+$ ,  $D^-$ , включая  $L$ . Поэтому согласно (13), (14) будем иметь:

$$\begin{aligned} M(r) &= \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |F(re^{i\theta})| \leq C_1 C_2 \exp\{M_1 r^\rho\}, \\ \ln M(r) &\leq \ln(C_1 C_2) + M_1 r^\rho = M_1 r^\rho \left(1 + \frac{\ln(C_1 C_2)}{M_1 r^\rho}\right), \\ \ln \ln M(r) &\leq \rho \ln r + \ln M_1 + \ln\left(1 + \frac{\ln(C_1 C_2)}{M_1 r^\rho}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, порядок  $\rho_F$  целой функции  $F(z)$  [11, с. 217] не превышает  $\rho$ :

$$\rho_F = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \leq \rho.$$





С учетом (10) формулу (5) запишем так:

$$|E^+(re^{i\theta})| = |E^-(re^{-i\theta})| = \exp\{r^\rho(\nu^- \cos \rho(\pi - \theta) - \nu^+ \cos \rho\theta)/(2 \sin \rho\pi)\}, \quad (17)$$

где  $r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi$ .

Отсюда при  $\theta = 0$ , когда  $r = t > 0$ , получаем:

$$|E^+(t)| = |E^-(t)| = \exp\{t^\rho(\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+)/(2 \sin \rho\pi)\}, \quad t > 0. \quad (18)$$

при  $\theta = \pi$ , когда  $re^{\pm i\pi} = -|t| = t < 0$ , будем иметь:

$$|E^+(t)| = |E^-(t)| = \exp\{|t|^\rho(\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi)/(2 \sin \rho\pi)\}, \quad t < 0. \quad (19)$$

Теперь, принимая во внимание (15), (16), на основании (13) получаем:

$$\begin{cases} |F(t)| < C \exp\{t^\rho(\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+)/(2 \sin \rho\pi)\}, t > 0, \\ |F(t)| < C \exp\{|t|^\rho(\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi)/(2 \sin \rho\pi)\}, t < 0, \end{cases} \quad (20)$$

где  $C = \text{const}$ .

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Если однородная задача (2) имеет ограниченные решения  $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ , то они представляются формулами

$$\Phi^+(z) = \frac{X^+(z)}{E^+(z)} F(z), \quad \Phi^-(z) = \frac{X^-(z)}{E^-(z)} F(z), \quad (21)$$

в которых  $F(z)$  — любая целая функция порядка  $\rho_F \leq \rho$ , удовлетворяющая условию (20).

Справедлива также обратная теорема.

**Теорема 2.** Если  $F(z)$  — любая целая функция порядка  $\rho_F \leq \rho$ , удовлетворяющая условиям (20), то ограниченные решения задачи (2) определяются формулами (21).

В самом деле, используя указанную в этой теореме функцию  $F(z)$ , мы по формулам (21) находим функции  $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ , удовлетворяющие краевому условию (2).

Кроме того, согласно (18)–(21), замечая, что  $X^+(t), X^-(t)$  — ограниченные функции на  $L$ , получим для  $t \in L$

$$\Phi^\pm(t) < \tilde{C} = \text{const}.$$

Примем во внимание, что  $X^+(z), X^-(z)$  — функции, ограниченные в областях соответственно  $D^+, D^-$

$$|X^\pm(z)| \leq C_* = \text{const}, \quad z \in D^\pm, \quad (22)$$

согласно (17)

$$|E^+(re^{i\theta})|^{-1} = |E^-(re^{-i\theta})|^{-1} \leq \exp\{r^\rho(|\nu^-| + |\nu^+|)/(2 \sin \rho\pi)\}, \quad (23)$$

где  $r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi$ , кроме того,

$$|F(re^{i\theta})| < \exp\{r^{\rho_F + \varepsilon}\}, \quad -\pi < \theta \leq \pi,$$

для всех достаточно больших  $r$ , здесь  $\varepsilon > 0$  — малое число, при котором  $\rho_F + \varepsilon < \rho_1$ , где  $\rho_1$  — число, удовлетворяющее условию  $\rho < \rho_1 < 1$ .

Тогда с учетом (21)–(23) будем иметь:

$$\begin{aligned} |\Phi^\pm(re^{\pm i\theta})| &\leq \exp\{\ln C_* + r^\rho(|\nu^-| + |\nu^+|)/(2 \sin \rho\pi) + r^{\rho_F + \varepsilon}\}, \\ |\Phi^\pm(re^{\pm i\theta})| &< \exp\{r^{\rho_1}\}, \quad 0 < \theta \leq \pi, \end{aligned}$$

для всех достаточно больших  $r > r_\varepsilon$ , поскольку для указанных  $r > r_\varepsilon$  справедливо неравенство

$$(\ln C_* + r^\rho(|\nu^-| + |\nu^+|)/(2 \sin \rho\pi) + r^{\rho_F + \varepsilon}) / r^{\rho_1} < 1.$$

Поэтому согласно теореме Фрагмена – Линделёфа [11, с. 206, 211] всюду в области  $D^\pm$  будем иметь  $|\Phi^\pm(z)| < \tilde{C}$ . Теорема доказана. Утверждение теоремы 2 можно сформулировать также следующим образом.

**Теорема 3.** Общее решение краевой задачи (2) в классе ограниченных функций выражается формулами (21), в которых  $F(z)$  есть любая целая функция порядка  $\rho_F \leq \rho$ , удовлетворяющая условиям (20).



### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Полученный результат нуждается в уточнении в связи с тем, что в некоторых случаях однородная краевая задача (2) будет иметь только нулевое решение. В самом деле, пусть  $\rho < 1/2$  и выполняется условие

$$\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+ < 0,$$

в этом случае согласно (20) имеем:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |F(t)| = 0,$$

и в силу теоремы Фрагмена – Линделёфа для полуплоскости с разрезом по положительной части действительной оси получим  $F(z) = \text{const} = 0$ .

Такой же результат мы получим в случае  $\rho < 1/2$ , когда выполняется условие

$$\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi < 0.$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

**Теорема 4.** Пусть  $\rho < 1/2$ , тогда однородная краевая задача (2) имеет только нулевое решение, если

$$\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+ < 0 \quad \text{или} \quad \nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi < 0.$$

Если  $\rho < 1/2$  и выполняется условие

$$\begin{cases} \nu^- \cos \rho\pi - \nu^+ = 0, \\ \nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi > 0, \end{cases} \quad (24)$$

где  $\nu^- > 0$ , или условие

$$\begin{cases} \nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi = 0, \\ \nu^- \cos \rho\pi - \nu^+ > 0, \end{cases} \quad (25)$$

где  $\nu^+ < 0$ , мы приходим к заключению, что  $F(z) = A = \text{const}$ , тогда на основании (21) получим искомое решение:

$$\Phi^+(z) = \frac{AX^+(z)}{E^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = \frac{AX^-(z)}{E^-(z)}. \quad (26)$$

Итак, справедлива

**Теорема 5.** Пусть  $\rho < 1/2$ . Если выполняются условия (24) или (25), то однородная краевая задача (2) имеет решение, определяемое формулами (26).

Пусть  $\nu^- - \nu^+ < 0$ . Тогда в силу (17) имеем:

$$|E^\pm(re^{\pm i\pi/2})| = \exp\{r^\rho(\nu^- - \nu^+) \cos \frac{\rho\pi}{2} / (2 \sin \rho\pi)\} < 1$$

и  $|E^\pm(re^{\pm i\pi/2})| \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$ . Тогда согласно (13), (15), (16) получим:

$$|F(re^{\pm i\pi/2})| \leq C = \text{const} \quad \text{и} \quad |F(re^{\pm i\pi/2})| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow +\infty.$$

Поэтому в силу теоремы Фрагмена – Линделёфа, замечая, что  $\rho_F < 1$ , будем иметь  $|F(z)| \leq C$ , как для  $\text{Re } z > 0$ , так и для  $\text{Re } z < 0$ , поэтому  $|F(z)| \equiv C_1 = \text{const} = 0$ . Следовательно, справедлива

**Теорема 6.** Если  $\nu^- - \nu^+ < 0$ , то краевая задача (2) имеет только нулевое решение при  $0 < \rho < 1$ .

Пусть выполняются условия

$$\begin{cases} \nu^- \cos \rho\pi - \nu^+ > 0, \\ \nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi > 0. \end{cases} \quad (27)$$

В этом случае имеем  $\nu^- - \nu^+ > 0$ , кроме того, при  $\rho \geq 1/2$  будут справедливы неравенства  $\nu^- > 0$ ,  $\nu^+ < 0$ . При выполнении неравенств (27) условия (20) имеют место для любой целой функции порядка  $\rho_F < \rho$ . Действительно, при любом  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \rho - \rho_F$  и  $r > r_\varepsilon$ , обозначая

$$\tilde{\nu} = \min \left\{ \frac{\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+}{2 \sin \rho\pi}, \frac{\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi}{2 \sin \rho\pi} \right\}, \quad \tilde{\nu} > 0,$$



получим:

$$\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |F(re^{i\theta})| < \exp\{r^{\rho_F + \varepsilon}\} = \frac{C \exp\{\tilde{\nu} r^\rho\}}{\exp\{\tilde{\nu} r^\rho + \ln C - r^{\rho_F + \varepsilon}\}},$$

где  $C = \text{const} > 0$ . Поэтому для всех достаточно больших  $r$ , для которых  $r > r_\varepsilon$ ,

$$\tilde{\nu} + \ln C/r^\rho - \frac{1}{r^{\rho - \rho_F - \varepsilon}} > 0,$$

будут выполняться неравенства

$$\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |F(re^{\pm i\theta})| < C \exp\{\tilde{\nu} r^\rho\},$$

т. е. будет иметь место (20).

Следовательно, в рассматриваемом случае приходим к следующей теореме.

**Теорема 7.** Если имеют место неравенства (27), то общее решение однородной краевой задачи (2) в классе ограниченных функций определяется формулами (21), в которых  $F(z)$  есть любая целая функция порядка  $\rho_F \leq \rho$  и при  $\rho_F = \rho$  удовлетворяющая соотношениям (20) для достаточно больших  $|t|$ .

Пусть  $\rho \geq 1/2$ . Если обе разности левых частей неравенств (27) отрицательны или одна из них отрицательна, а другая неположительна, то будет выполняться условие  $\nu^- - \nu^+ < 0$ , и задача (2) в силу теоремы 6 будет иметь только нулевое решение; к такому же выводу мы придем в случае, когда выполняются неравенства

$$\begin{aligned} (\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+)(\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi) &< 0, \\ (\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+) + (\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi) &< 0, \end{aligned}$$

так как в силу последнего неравенства имеем  $\nu^- - \nu^+ < 0$ .

В случае, когда при  $\rho \geq 1/2$  выполняются соотношения

$$\begin{cases} (\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+)(\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi) < 0, \\ (\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+) + (\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi) \geq 0. \end{cases} \quad (28)$$

в формулах (21) под  $F(z)$  нужно понимать целую функцию порядка  $\rho_F = \rho$ . В самом деле, при  $1/2 \leq \rho_F < \rho$ , когда выполняются соотношения (28) и, например,  $\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+ < 0$ , поэтому  $\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi > 0$ ,  $\nu^- - \nu^+ \geq 0$ , согласно первому условию (20) будем иметь:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(t)|}{t^{\rho_F}} = -\infty,$$

но тогда будет выполняться соотношение [12, с. 74, 75]

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\ln |F(t)|}{|t|^{\rho_F}} = -\infty,$$

при  $\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi < 0$  рассуждения аналогичны. Следовательно,  $F(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$ , поэтому  $F(z) \equiv 0$ , и по формулам (21) получаем нулевое решение задачи (2). При  $\rho_F < 1/2 \leq \rho$  условие  $F(z) \equiv 0$  является следствием равенства  $\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi < 0$  или  $\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+ < 0$ . Таким образом, не нулевое решение этой задачи мы можем получить, считая  $\rho_F = \rho$ . Поэтому справедлива

**Теорема 8.** Пусть  $\rho \geq 1/2$  и выполняются неравенства (28). Тогда общее решение однородной краевой задачи (2) в классе ограниченных функций определяется формулами (21), в которых  $F(z)$  есть любая целая функция порядка  $\rho$ , удовлетворяющая соотношениям (20) для достаточно больших  $|t|$ .

Утверждение этой теоремы остается в силе для  $\rho \geq 1/2$ , если условия (28) заменить на соотношения

$$\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+ = 0, \quad \nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi > 0$$



или

$$\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+ > 0, \quad \nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi = 0.$$

В этих случаях под  $F(z)$  нужно понимать любую целую функцию порядка  $\rho_F \leq \rho$ , которая при  $\rho_F < \rho$  условию (20) с положительной разностью в правой части удовлетворяет автоматически. Здесь надо учесть, что при  $\rho = 1/2$  решение задачи (2) будет определяться формулами (26), если в соотношениях (21)  $F(z)$  означает целую функцию порядка  $\rho$  минимального типа [11, с. 256].

Приведенная выше картина разрешимости задачи содержит общие утверждения, но не полностью совпадает с полученной в работах [4, 5]. Причины такого отличия требуют отдельного рассмотрения; здесь надо принять во внимание, в частности, что в отдельных деталях постановок задач в настоящей статье и в последних цитированных работах имеются отличия, и это может отразиться на результатах исследования в задачах с бесконечным индексом.

Таким образом, используемый здесь подход позволяет сравнительно простыми средствами провести достаточно полное исследование однородной краевой задачи (2).

#### 4. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим решение неоднородной задачи (1) при вышеуказанных условиях, которым удовлетворяют коэффициент  $G(t)$  и свободный член  $g(t) \in H_L$ .

По аналогии с предыдущим условие (1) представим в виде

$$\Phi^+(t)E^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t)E^-(t) + E^+(t)g(t), \tag{29}$$

где  $G_1(t)$  — функция, определяемая по формулам (7), (9), и принимая во внимание соотношение (12), связывающее функции (11), краевое условие (29) запишем так

$$\Phi^+(t) \frac{E^+(t)}{X^+(t)} = \Phi^-(t) \frac{E^-(t)}{X^-(t)} + \frac{E^+(t)}{X^+(t)} g(t). \tag{30}$$

При  $\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+ > 0$ ,  $\nu^- - \nu^+ \cos \rho\pi > 0$ , как это видно из формул (18), (19),  $|E^+(t)| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , следовательно, в указанном случае на основании (30) не удастся непосредственно найти искомого функции  $\Phi^\pm(z)$ , поступая, как это сделано в [2, с. 120]; появляется необходимость устранить отмеченную особенность функции  $E^+(t)$  в соотношении (30). Нетрудно убедиться в том, что в случае, когда вышеуказанные разности формул (18), (19) отрицательны и  $E^\pm(t)$  обращаются в нуль в точке  $t = \infty$ , целесообразно в условии (30) эти нули устранить. Покажем, что упомянутой цели можно добиться, деля соотношение (30) на значения в точках  $L$  целой функции  $F_0(z)$  с нужными свойствами. Возьмем целую функцию

$$F_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{r_k e^{i\theta_0}} \right), \tag{31}$$

в которой  $\theta_0$  — фиксированная величина,  $0 < \theta_0 < \pi$ ,  $\{r_k\}$  — возрастающая последовательность положительных чисел, которая будет определена ниже. Примем, что порядок этой функции равен  $\rho$  (т. е. показатель сходимости ее нулей равен  $\rho$ ). Предположим, что существует предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^\rho} = \Delta, \quad 0 < \Delta < \infty,$$

где  $n(r)$  — число нулей функции  $F_0(z)$  в круге  $|z| \leq r$ . Логарифмируя равенство (30), получим ряд

$$\ln F_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{z}{r_k e^{i\theta_0}} \right),$$

причем под  $\arg(1+z/r_k e^{i\theta_0})$  будем понимать ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу  $z = r e^{i(\theta_0 + \pi)}$ ,  $r > r_k$ , принимающую нулевое значение на луче  $z = t e^{i\theta_0}$ ,  $-r_k < t < +\infty$ . Поступая аналогично тому, как это сделано в статье [13], получим:

$$\ln F_0(z) = z e^{-i\theta_0} \int_0^{\infty} \frac{n(x) dx}{x(x + z e^{-i\theta_0})}.$$



Отсюда, замечая, что

$$z \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1-\rho}(x+z)} = \frac{\pi z^{\rho}}{\sin \rho\pi}, \quad -\pi < \arg z < \pi,$$

заменяя здесь  $z$  на  $ze^{-i\theta_0}$ , будем иметь:

$$\ln F_0(z) = \frac{\pi\Delta(ze^{-i\theta_0})^{\rho}}{\sin \rho\pi} + ze^{-i\theta_0} \int_0^{\infty} \frac{n(x) - \Delta x^{\rho}}{x(x + ze^{-i\theta_0})} dx, \quad (32)$$

где  $-\pi + \theta_0 < \arg z < \pi + \theta_0$ .

Поступая, как в книге [3, с. 127] и статье [13], примем:

$$n(x) = [\Delta x^{\rho} + 1/2], \quad r_k = \left(\frac{2k-1}{2\Delta}\right)^{1/\rho}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

здесь в первой формуле правая часть означает целую часть стоящей там суммы, тогда будем иметь:

$$\left| \int_0^{\zeta} (n(x) - \Delta x^{\rho}) x^{\rho-1} dx \right| < C = \text{const}, \quad 0 < \zeta < \infty. \quad (33)$$

Рассмотрим свойства входящей в формулу (32) функции

$$I(z, \theta_0) = ze^{-i\theta_0} \int_0^{\infty} \frac{n(x) - \Delta x^{\rho}}{x(x + ze^{-i\theta_0})} dx. \quad (34)$$

При  $t > 0$  имеем:

$$I(t, \theta_0) = te^{-i\theta_0} \int_0^{\infty} \frac{n(x) - \Delta x^{\rho}}{x(x + te^{-i\theta_0})} dx, \quad (35)$$

поэтому

$$\frac{dI(t, \theta_0)}{dt} = \frac{e^{-i\theta_0}}{t^{\rho+1}} \int_0^{\infty} (n(x) - \Delta x^{\rho}) x^{\rho-1} [U(x/t, \theta_0) + iV(x/t, \theta_0)] dx, \quad (36)$$

где для  $x/t = x_1$  имеем:

$$U(x_1, \theta_0) = \frac{x_1^{-\rho+1}(x_1^2 + 2x_1 \cos \theta_0 + \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0)}{(x_1^2 + 2x_1 \cos \theta_0 + 1)^2}, \quad V(x_1, \theta_0) = \frac{2x_1^{-\rho+1}(x_1 + \cos \theta_0) \sin \theta_0}{(x_1^2 + 2x_1 \cos \theta_0 + 1)^2}.$$

Нас интересует поведение интеграла  $I(t, \theta_0)$  при  $t \rightarrow \infty$ . В связи с этим в формулах (35), (36) будем считать  $t > r_1$ . Тогда для  $0 < x < \infty$  будем иметь  $0 < x_1 < \infty$ . В последнем интервале функции  $U(x_1, \theta_0)$ ,  $V(x_1, \theta_0)$  непрерывны, обращаются в ноль при  $x_1 = 0$ ,

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} U(x_1, \theta_0) = 0, \quad \lim_{x_1 \rightarrow \infty} V(x_1, \theta_0) = 0,$$

последние соотношения справедливы при любом фиксированном  $t > r_1$  и  $x \rightarrow \infty$ .

Легко проверить, что в интервале  $0 < x_1 < \infty$  функции  $U(x_1, \theta_0)$  и  $V(x_1, \theta_0)$  имеют не более шести и пяти экстремумов соответственно, поэтому существуют конечные значения  $\max_{0 < x_1 < \infty} |U(x_1, \theta_0)|$  и  $\max_{0 < x_1 < \infty} |V(x_1, \theta_0)|$ , независящие от  $t$  при фиксированной величине  $\theta_0$ . Учитывая это и принимая во внимание (33), на основании результатов [3, с. 127, 128] придем к заключению, что действительная и мнимая части интеграла формулы (36) являются ограниченными функциями от  $t$ , поэтому в силу последней формулы (36)

$$\left| \frac{d \operatorname{Re} I(t, \theta_0)}{dt} \right| < \frac{\text{const}}{t^{\rho+1}}, \quad \left| \frac{d \operatorname{Im} I(t, \theta_0)}{dt} \right| < \frac{\text{const}}{t^{\rho+1}},$$

и  $\operatorname{Re} I(t, \theta_0)$ ,  $\operatorname{Im} I(t, \theta_0)$  удовлетворяют условию Гёльдера в окрестности точки  $t = +\infty$ .



Полагая в формуле (34)  $z = te^{i\pi}$ ,  $t > 0$ , получим  $I(te^{i\pi}, \theta_0) = I(-t, \theta_0) = I(t, \theta_0 - \pi)$ . Поэтому  $\operatorname{Re} I(-t, \theta_0)$ ,  $\operatorname{Im} I(-t, \theta_0)$  удовлетворяют условию Гёльдера в окрестности точки  $-t = -\infty$ .

На основании формул (32), (34) имеем:

$$\ln F_0(z) = \frac{\pi\Delta(z e^{-i\theta_0})^\rho}{\sin \rho\pi} + I(z, \theta_0), \quad (37)$$

где  $-\pi + \theta_0 < \arg z < \pi + \theta_0$ .

Отсюда видно, что на любой конечной части действительной оси  $L$ , не содержащей окрестности точки  $t = 0$ ,  $I(t, \theta_0)$ ,  $t \in L$  представляет собой значения аналитической функции, а в окрестности точки  $t = 0$  удовлетворяет условию Гёльдера, поэтому  $I(t, \theta_0) \in H_L$ . Следовательно,  $I(z, \theta_0)$  является ограниченной функцией на всей действительной оси  $L$ .

Используя функцию  $F_0(z)$ , условие (30) представим в виде

$$\frac{\Phi^+(t) E^+(t)}{X^+(t) F_0(t)} = \frac{\Phi^-(t) E^-(t)}{X^-(t) F_0(t)} + \frac{E^+(t) g(t)}{F_0(t) X^+(t)},$$

считаем, что функция  $\Phi^-(z)$  имеет те же нули, что и  $F_0(z)$ . Согласно формулам (4), (37) имеем:

$$\frac{E^+(z)}{F_0(z)} = \frac{\exp\{(\alpha + i\beta)z^\rho\}}{\exp\left\{\frac{\pi\Delta(z e^{-i\theta_0})^\rho}{\sin \rho\pi}\right\}} \exp\{-I(z, \theta_0)\}, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi. \quad (38)$$

Выберем величины  $\Delta$ ,  $\theta_0$  так, чтобы

$$\alpha + i\beta = \frac{\pi\Delta}{\sin \rho\pi} e^{-i\rho\theta_0}, \quad (39)$$

т. е. чтобы

$$\alpha = \frac{\pi\Delta}{\sin \rho\pi} \cos \rho\theta_0, \quad \beta = \frac{\pi\Delta}{\sin \rho\pi} \sin \rho\theta_0,$$

отсюда с учетом (10) будем иметь:

$$\begin{cases} \Delta \cos \rho\theta_0 = \frac{\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+}{2\pi}, \\ \Delta \sin \rho\theta_0 = \frac{\nu^- \sin \rho\pi}{2\pi}. \end{cases} \quad (40)$$

Мы получим систему уравнений с неизвестными  $\Delta$ ,  $\theta_0$ . Из этой системы вначале, исключая  $\rho\theta_0$ , определим

$$\Delta = \frac{1}{2\pi} \left( (\nu^-)^2 - 2\nu^- \nu^+ \cos \rho\pi + (\nu^+)^2 \right)^{1/2}. \quad (41)$$

Пусть выполняются неравенства

$$\nu^- \cos \rho\pi - \nu^+ > 0, \quad \nu^- > 0. \quad (42)$$

Тогда согласно формулам (40) будем иметь:

$$0 < \rho\theta_0 < \frac{\pi}{2}, \quad (43)$$

и из второго уравнения(40) находим

$$\rho\theta_0 = \arcsin\left(\frac{1}{2\Delta\pi} \nu^- \sin \rho\pi\right).$$

При  $\rho \geq 1/2$  из (43) получаем  $0 < \theta_0 < \pi$ . В случае  $\rho < 1/2$  будем считать, что  $\nu^+ < 0$  и выполняются условия (42). При этом в силу (41) будем иметь  $\nu^-/2\pi\Delta < 1$ , тогда согласно второму уравнению (40)  $0 < \rho\theta_0 < \rho\pi$  и  $0 < \theta_0 < \pi$ .

В силу соотношений (40), равносильных (39) формула (38) при  $z = t \in L$  дает

$$\frac{E^+(t)}{F_0(t)} = e^{-I(z, \theta_0)} \in H_L, \quad (44)$$





поэтому

$$\left( \frac{E^+(t)}{F_0(t)} \frac{g(t)}{X^+(t)} \right) \in H_L.$$

Применяя метод Ф. Д. Гахова [2, с. 118–121] и вводя аналитическую функцию, определяемую формулой

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^+(t)}{F_0(t)} \frac{g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t-z}, \quad (45)$$

приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} \frac{E^+(z)}{F_0(z)} = \Psi(z), & z \in D^+, \\ \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} \frac{E^-(z)}{F_0(z)} = \Psi(z), & z \in D^-, \end{cases} \quad (46)$$

из которых находятся выражения для частных решений  $\Phi^+(z)$ ,  $\Phi^-(z)$  неоднородной задачи (1). Эти решения являются ограниченными в соответствующих областях. Здесь надо учесть, что согласно (44) имеем

$$\left| \frac{F_0(t)}{E^+(t)} \right| = e^{ReI(t, \theta_0)} \in H_L, \quad (47)$$

поэтому  $F_0(t)/E^+(t)$  — ограниченная на  $L$  функция. Порядок функции  $F_0(z)/E^+(z)$  в области  $D^+$  ( $0 \leq \arg z \leq \pi$ ) не превышает  $\rho_1$ ,  $\rho < \rho_1 < 1$ , отсюда следует, что функция  $F_0(z)/E^+(z)$  является ограниченной в области  $D^+$  [12, с. 69]. Замечая, что

$$\left| \frac{F_0(t)}{E^-(t)} \right| = \left| \frac{F_0(t)}{E^+(t)} \right| \in H_L,$$

аналогично приходим к заключению, что  $F_0(z)/E^-(z)$  есть функция ограниченная в области  $D^-$ .

Общее решение неоднородной задачи (1) представляется как сумма ее частного решения и общего решения соответствующей однородной задачи.

Таким образом, приходим к следующей теореме.

**Теорема 9.** Если выполняются неравенства (42) при  $\rho \geq 1/2$  или неравенства (42) и  $\nu^+ < 0$  при  $\rho < 1/2$ , то формулы (45), (46) определяют ограниченное частное решение неоднородной задачи (1).

### Библиографический список

1. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
3. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986. 239 с.
4. Толочко М. Э. О разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. науки. 1972. № 5. С. 34–41.
5. Сандрыгайло И. Е. О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19, № 10. С. 872–875.
6. Монахов В. Н., Семенко Е. В. Краевые задачи с бесконечным индексом в пространствах Харди // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 544–547.
7. Алехно А. Г. Достаточные условия разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Тр. Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, 2002. Т. 14. С. 71–77.
8. Гарифьянов Ф. Н. Об одном особом случае задачи Римана // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1984. № 22. С. 66–68.
9. Кац Б. А. Об одной задаче Римана с осциллирующим коэффициентом // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1977. № 14. С. 110–120.
10. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. Метод регуляризирующего множителя для решения однородной задачи Гильберта с бесконечным индексом // Изв. вузов. Математика. № 4. 2001. С. 76–79.
11. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1968. Т. 2. 624 с.
12. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.
13. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом // Мат. заметки. 2003. Т. 73, вып. 5. С. 724–734.



## The New Approach to Solving the Riemann Boundary Value Problem with Infinite Index

R. B. Salimov, E. N. Karabasheva

Kazan State University of Architecture and Engineering, 1, Zelenaya str., 420043, Kazan, Tatarstan, Russia, salimov@5354.ru, enkarabasheva@bk.ru

This research considers Riemann – Hilbert boundary value problem with infinite index where edge condition of problem is established by the real axis. To solve this problem the approach based on the removal of the infinite discontinuity of the argument of boundary condition coefficient is used. The approach is analogous to the one which, in the context of the finite index of the problem in researches by F. D. Gakhov, helps to remove a discontinuity of initial genre of boundary condition coefficient with specially created functions, different from the ones in this research.

*Key words:* Riemann boundary value problem, analytical function, infinite index.

### References

1. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations*. Moscow, Nauka, 1968, 511 p. (in Russian).
2. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka, 1977, 640 p. (in Russian).
3. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka, 1986, 239 p. (in Russian).
4. Tolochko M. E. About the solvability of the homogeneous Riemann boundary value problem for the half-plane with infinite index. *Izvestiya Akad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 1972, no. 5, pp. 34–41 (in Russian).
5. Sandrygailo I. E. On Hilbert – Riemann boundary value problem for half-plane with infinite index. *Izvestiya Akad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 1974, no. 6, pp. 872–875 (in Russian).
6. Monahov V. N., Semenko E. V. Boundary value problem with infinite index in Hardy spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 291, no. 3, pp. 544–547 (in Russian).
7. Alehno A. G. Sufficient conditions for the solvability of homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index. *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo*, Kazan, 2002, vol. 14, pp. 71–77 (in Russian).
8. Garifianov F. N. About a special case of the Riemann problem. *Trydu seminara po kraevum zadacham*. Kazan, 1984, no. 22, pp. 66–68 (in Russian).
9. Katc B. A. About Riemann problem with an oscillating coefficient. *Trydu seminara po kraevum zadacham*. Kazan, 1977, no. 14, pp. 110–120 (in Russian).
10. Salimov R. B., Shabalin P. L. The regularizing factor method for solving a homogeneous Hilbert problem with an infinite index. *Russian Math. [Izvestiya VUZ. Matematika]*, 2001, vol. 45, iss. 4, pp. 74–77.
11. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions : in 2 vol.* Moscow, Nauka, 1968, vol. 2, 624 p. (in Russian).
12. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostechizdat, 1956, 632 p. (in Russian).
13. Salimov R. B., Shabalin P. L. Solution of the Hilbert Problem with infinite index. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, iss. 5, pp. 680–689. DOI: 10.4213/mzm221.

УДК 517.538.7

## РАСХОДИМОСТЬ ВСЮДУ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

С. В. Тышкевич<sup>1</sup>, А. В. Шаталина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, tyszkiewicz@yandex.ru

<sup>2</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, teh-plast@bk.ru

Изучаются вопросы сходимости интерполяционных процессов Лагранжа в замкнутом единичном круге. Выбор матрицы с определённым распределением узлов интерполирования позволил построить множество, полностью покрывающее единичную окружность, и функцию, для которой процесс расходится всюду на этом множестве.

*Ключевые слова:* интерполирование, полиномы Лагранжа.

Пусть  $AC$  — множество функций  $f(z)$ , аналитических в  $|z| < 1$  и непрерывных в  $|z| \leq 1$ , с обычным модулем непрерывности  $\omega(f, \delta)$  и равномерной нормой;  $\Omega$  — множество функций  $\omega$  типа модуля непрерывности,  $\Omega_0$  — функции  $\omega \in \Omega$ , для которых

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\delta}{\omega(\delta)} = 0.$$



## The New Approach to Solving the Riemann Boundary Value Problem with Infinite Index

R. B. Salimov, E. N. Karabasheva

Kazan State University of Architecture and Engineering, 1, Zelenaya str., 420043, Kazan, Tatarstan, Russia, salimov@5354.ru, enkarabasheva@bk.ru

This research considers Riemann – Hilbert boundary value problem with infinite index where edge condition of problem is established by the real axis. To solve this problem the approach based on the removal of the infinite discontinuity of the argument of boundary condition coefficient is used. The approach is analogous to the one which, in the context of the finite index of the problem in researches by F. D. Gakhov, helps to remove a discontinuity of initial genre of boundary condition coefficient with specially created functions, different from the ones in this research.

*Key words:* Riemann boundary value problem, analytical function, infinite index.

### References

1. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations*. Moscow, Nauka, 1968, 511 p. (in Russian).
2. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka, 1977, 640 p. (in Russian).
3. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka, 1986, 239 p. (in Russian).
4. Tolochko M. E. About the solvability of the homogeneous Riemann boundary value problem for the half-plane with infinite index. *Izvestiya Akad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 1972, no. 5, pp. 34–41 (in Russian).
5. Sandrygailo I. E. On Hilbert – Riemann boundary value problem for half-plane with infinite index. *Izvestiya Akad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 1974, no. 6, pp. 872–875 (in Russian).
6. Monahov V. N., Semenko E. V. Boundary value problem with infinite index in Hardy spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 291, no. 3, pp. 544–547 (in Russian).
7. Alehno A. G. Sufficient conditions for the solvability of homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index. *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo*, Kazan, 2002, vol. 14, pp. 71–77 (in Russian).
8. Garifianov F. N. About a special case of the Riemann problem. *Trydu seminarov po kraevum zadacham*. Kazan, 1984, no. 22, pp. 66–68 (in Russian).
9. Katc B. A. About Riemann problem with an oscillating coefficient. *Trydu seminarov po kraevum zadacham*. Kazan, 1977, no. 14, pp. 110–120 (in Russian).
10. Salimov R. B., Shabalin P. L. The regularizing factor method for solving a homogeneous Hilbert problem with an infinite index. *Russian Math. [Izvestiya VUZ. Matematika]*, 2001, vol. 45, iss. 4, pp. 74–77.
11. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions : in 2 vol.* Moscow, Nauka, 1968, vol. 2, 624 p. (in Russian).
12. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostechizdat, 1956, 632 p. (in Russian).
13. Salimov R. B., Shabalin P. L. Solution of the Hilbert Problem with infinite index. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, iss. 5, pp. 680–689. DOI: 10.4213/mzm221.

УДК 517.538.7

## РАСХОДИМОСТЬ ВСЮДУ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

С. В. Тышкевич<sup>1</sup>, А. В. Шаталина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, tyszkiewicz@yandex.ru

<sup>2</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, teh-plast@bk.ru

Изучаются вопросы сходимости интерполяционных процессов Лагранжа в замкнутом единичном круге. Выбор матрицы с определённым распределением узлов интерполирования позволил построить множество, полностью покрывающее единичную окружность, и функцию, для которой процесс расходится всюду на этом множестве.

*Ключевые слова:* интерполирование, полиномы Лагранжа.

Пусть  $AC$  — множество функций  $f(z)$ , аналитических в  $|z| < 1$  и непрерывных в  $|z| \leq 1$ , с обычным модулем непрерывности  $\omega(f, \delta)$  и равномерной нормой;  $\Omega$  — множество функций  $\omega$  типа модуля непрерывности,  $\Omega_0$  — функции  $\omega \in \Omega$ , для которых

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\delta}{\omega(\delta)} = 0.$$



Введем множества:

$$AC(\omega) = \{f \in AC; \omega(f, \delta) = O(\omega(\delta))\}, \quad AC^*(\omega) = \{f \in AC; \omega(f, \delta) = o(\omega(\delta))\},$$

где  $\omega \in \Omega$  — наперед заданная функция. Для матрицы узлов интерполирования  $M = \{z_{k,n}\}_{k=0, n=1}^{n-1, \infty}$ , заданных на  $|z| = 1$ , построим интерполяционный процесс Лагранжа:

$$L_n(M, f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_{k,n}) l_{k,n}(M, z),$$

где  $l_{k,n}(M, z) = \frac{\omega_{k,n}(z)}{(z - z_{k,n})\omega'_{k,n}(z - k, n)}$ ,  $\omega_{k,n}(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_{k,n})$ .

Хорошо известно [1], что в случае матрицы равноотстоящих узлов для любой  $f(z) \in AC$  имеет место равномерная сходимость  $L_n(M, f, z)$  к  $f(z)$  внутри  $|z| < 1$ . Спрашивается, как ведут себя интерполяционные процессы на  $|z| = 1$ ? В работе [2] были найдены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять  $\omega(\delta)$ , для того чтобы имела место равномерная сходимость  $L_n(M, f, z)$  для  $f(z) \in AC(\omega)$  на  $|z| = 1$ , была найдена метрическая характеристика множеств точек расходимости этих процессов на  $|z| = 1$ . Позднее в [3] строились функции  $f(z) \in AC(\omega)$  и  $f(z) \in AC^*(\omega)$ , для которых процессы Лагранжа расходятся почти всюду. В данной работе уточняется последний результат. А именно доказывается следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $M$  — матрица, каждая  $n$ -я строка которой является корнями  $n$ -й степени из  $-1$ . Если  $\omega \in \Omega_0$  удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n > 0,$$

тогда существует функция  $f \in AC(\omega)$ , что интерполяционный процесс Лагранжа расходится всюду на  $|z| = 1$ , причем

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|L_n(M, f, \cdot) - f\|_{AC} = 0. \tag{1}$$

Если же для  $\omega \in \Omega_0$  справедливо

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = \infty,$$

тогда существует  $f \in AC^*(\omega)$ , для которой интерполяционный процесс Лагранжа неограниченно расходится всюду на  $|z| = 1$ , причём справедливо (1).

Перед доказательством теоремы приведем несколько лемм.

**Лемма 1.** Пусть  $\{n_p\}_{p=1}^{\infty}$  — последовательность простых чисел. Тогда для любого  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , можно указать число  $q = q(\varepsilon) > 2$ , что для каждого натурального числа  $\mu$  существует натуральное число  $\nu$ , для которого

$$\varepsilon \cdot \sum_{p=\mu}^{\nu} \frac{1}{n_p} > 2\pi, \quad n_{\nu} < n_{\mu}^q.$$

**Доказательство.** Необходимо воспользоваться следующим асимптотическим равенством для последовательности простых чисел:

$$\sum_{n_p \leq x} \frac{1}{n_p} = \ln \ln x + a + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

где  $a$  — абсолютная константа [4]. □

**Замечание 1.** Пусть  $M$  — матрица,  $n$ -я строка которой является корнями  $n$ -й степени из  $-1$ ;  $\{n_p\}$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $q$ ,  $\varepsilon$  удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда для всех  $i, j$ ,  $\mu \leq i \neq j \leq \nu$ , и для всех индексов  $k$ ,  $0 \leq k \leq n_i - 1$  и  $s$ ,  $0 \leq s \leq n_j - 1$ , за исключением двух  $k^*$  и  $s^*$ , для которых узлы  $z_{k^*, n_i} = z_{s^*, n_j} = \{-1\}$ , справедливо

$$|z_{k, n_i} - z_{s, n_j}| > n_{\mu}^{-2q}. \tag{2}$$



Предположим, что это не так, т. е. существуют  $l, t: 0 \leq (k^* + l) \leq n_i - 1, 0 \leq (s^* + t) \leq n_j - 1$ , такие, что  $|z_{k^*+l, n_i} - z_{s^*+t, n_j}| \leq n_\mu^{-2q}$ . Так как  $z_{k, n_p} = \exp\left(i\pi \frac{2k-1}{n_p}\right)$  последнее равенство переписывается:

$$\begin{aligned} n_\mu^{-2q} &\geq 2 \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{2(k^* + l) - 1}{n_i} - \frac{2(s^* + t) - 1}{n_j}\right)\right) \right| \geq \\ &\geq \frac{2}{\pi} \left| \frac{2(k^* + l) - 1}{n_i} \pi - \frac{2(s^* + t) - 1}{n_j} \pi \right| = \frac{2}{\pi} \left| \frac{2\pi l}{n_i} - \frac{2\pi t}{n_j} \right|. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\frac{1}{4\pi n_\mu^{2q}} \geq \frac{1}{\pi} \left| \frac{l}{n_i} - \frac{t}{n_j} \right| \geq \frac{1}{\pi n_\mu^{2q}}.$$

Получили противоречие.

**Лемма 2.** Пусть  $M \subset \{|z| = 1\}$  — матрица равноотстоящих узлов,  $r > 2$  — действительное число,  $l \in \mathbb{N}$  — фиксировано. Тогда для каждого  $n \in \mathbb{N}, n > l$ , можно построить множество

$$F_{n,r} = \bigcup_{k=1}^n [\exp(i(\theta_{k-1,n} + a)), \exp(i(\theta_{k,n} - a))], \quad a = \frac{\theta_{k,n} - \theta_{k-1,n}}{r},$$

линейная мера которого  $\text{mes } F_{n,r} = 2\pi - \frac{4\pi}{r}$  такое, что для всех  $z \in F_{n,r}$  выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} |l_{k,n}(M, z)| \geq \frac{1}{\pi r} \ln\left(\frac{n}{l}\right),$$

где штрих означает отсутствие произвольных  $l$  слагаемых.

**Доказательство** приведено в работе [3]. □

**Лемма 3.** Пусть  $M \subset \{|z| = 1\}$ ,  $l, \{n_p\}, \mu, \nu, q$  — такие, как описано выше. Тогда для каждого  $n_\mu \in \{n_p\}$  найдутся  $n_{\nu_0}, \nu_0 < \nu$ , множество  $E_\mu \subset \{|z| = 1\}$  и конечное семейство дуг  $\Delta_{t_j, \mu+j}^0, 0 \leq j \leq \nu_0 - \mu$ , что

а)  $\text{mes } E_\mu \geq 2\pi - 2$ ;

б)  $E_\mu \subset \bigcup_{j=0}^{\nu_0 - \mu} \Delta_{t_j, \mu+j}^0$ ;

в) для любой точки  $z \in E_\mu \cap \Delta_{t_j, \mu+j}^0$  справедливо  $L_{n_{\mu+j}}(M, l, z) \geq c_1 \ln(n_{\mu+j}/l)$ , где  $c_1 = \text{const}$ .

**Доказательство** леммы 3 подробно изложено в работе [3], приведём здесь лишь его схему.

Множество  $E_\mu$  строилось за  $\nu_0 - \mu$  шагов. На каждом  $(j-1)$ -м шаге,  $1 \leq j \leq \nu_0 - \mu$ , было построено множество, состоящее из  $j$  непересекающихся дуг  $E_\mu \cap \Delta_{t_p, n_{\mu+p}}^0 \cap F_{n_{\mu+p}, r}, 0 \leq p \leq j$ , ( $F_{n_{\mu+p}, r}$  из леммы 2), которые лежат на дуге единичной окружности от точки  $\exp\left(i\left(\theta_{t_0, n_\mu} + \frac{\theta_{t_0+1, n_\mu} - \theta_{t_0, n_\mu}}{r}\right)\right)$  до точки  $\exp\left(i\left(\theta_{t_{j-1}+1, n_{\mu+j-1}} - \frac{\theta_{t_{j-1}+1, n_{\mu+j-1}} - \theta_{t_{j-1}, n_{\mu+j-1}}}{r}\right)\right)$ , где  $t_0$  выбрано произвольно из условия  $0 \leq t_0 \leq n_\mu$ , а  $r > 2$  — фиксировано.

На следующем  $j$ -м шаге к построенному множеству присоединяли либо:

а) целую дугу

$$[\exp(i(\theta_{t_j, n_{\mu+j}} + a)), \exp(i(\theta_{t_j+1, n_{\mu+j}} - a))], \quad a = \frac{\theta_{t_j+1, n_{\mu+j}} - \theta_{t_j, n_{\mu+j}}}{r},$$

если мера наименьшей дуги  $\gamma_j = (z_{t_{j-1}+1, n_{\mu+j-1}}; z_{t_j, n_{\mu+j}})$  не превосходила  $\frac{1}{n_{\mu+j}}$ ; причем дуга  $\gamma_j$  не входила в множество  $E_\mu$ , т. е. при построении множества  $E_\mu$  на  $j$ -м шаге выбросили дугу единичной окружности, мера которой не больше  $\alpha_j = \left\{ \frac{1}{n_{\mu+j}} + \frac{2\pi}{rn_{\mu+j}} + \frac{2\pi}{rn_{\mu+j-1}} \right\}$ , а узел  $z_{t_{j-1}+1, n_{\mu+j-1}}$  принадлежит выброшенной дуге;

б) частичную дугу

$$\left[ \exp\left(i\left(\theta_{t_{j-1}+1, n_{\mu+j-1}} + \frac{\theta_{t_{j-1}+2, n_{\mu+j-1}} - \theta_{t_{j-1}+1, n_{\mu+j-1}}}{r}\right)\right), \exp(i(\theta_{t_j+1, n_{\mu+j}} - a)) \right],$$



если мера  $\gamma_j$  больше  $\frac{1}{n_{\mu+j}}$ . В этом случае выбрасывали дугу единичной окружности меры, не большей  $\left[ \frac{2\pi}{rn_{\mu+j}} + \frac{2\pi}{rn_{\mu+j-1}} \right] < \alpha_j$ , и опять тот же узел принадлежит выброшенной дуге. После построения множества  $E_\mu$  проверяется выполнение пунктов а), б) из условия, а с учетом леммы 2 получаем выполнение пункта в).  $\square$

**Лемма 4.** Для любого  $\mu \in \mathbb{N}$  существует  $\nu \in \mathbb{N}$ , что для любой точки  $z \in \{|z| = 1\}$  найдется номер  $t_j \in \{n_\mu, 2n_\mu, \dots, n_\nu, 2n_\nu\}$ , при котором

$$\sum_{k=0}^{n_j-1} ' |l_{k,n_j}(M, z)| \geq C \ln t_j, \tag{3}$$

где  $C$  — абсолютная константа, а штрих у знака  $\sum$  означает отсутствие одного произвольного слагаемого.

**Доказательство.** Положим  $r = 24\pi$ . Заметим, что строки с номерами  $n_\mu, n_{\mu+1}, \dots, n_\nu$  не имеют ни одного общего узла, за исключением точки  $-1$ . Более того, в силу замечания 1 расстояние между любыми другими двумя узлами любых двух строк из этой пачки не меньше, чем  $n_\mu^{-2q}$ . Строки с номерами  $n_k$  и  $2n_p, \mu \leq k, p \leq \nu$ , вообще не имеют общих узлов. По лемме 3 для номеров  $n_\mu$  и  $n_\nu$  существуют  $\nu_0 < \nu$ , множество  $E_\mu$ , конечное семейство дуг  $\Delta_{t_j, \mu+j}^0$ , для которых выполняются пункты а), б), в); причем можно положить  $l = 1$ . Для каждого «выброшенного» из множества  $E_\mu$  узла  $z_{t_j+1, n_{\mu+j}}, j = \overline{0, \nu_0 - \mu}$  (см. доказательство леммы 3) найдем дугу  $\Delta_{t_j^*, 2n_{\mu+j}}^0$ , такую, что этот узел будет серединой найденной дуги. Получим еще одно семейство дуг:

$$\delta_{t_j^*, 2n_{\mu+j}} = [\exp(i(\theta_{t_j^*, 2n_{\mu+j}} + a)), \exp(i(\theta_{t_j^*+1, 2n_{\mu+j}} - a))], \quad a = \frac{1}{r}(\theta_{t_j^*+1, 2n_{\mu+j}} - \theta_{t_j^*, 2n_{\mu+j}}).$$

Обозначим это семейство  $A$ . Так как

$$\frac{1}{2} \text{mes } \delta_{t_j^*, 2n_{\mu+j}} = \frac{\pi}{2n_{\mu+j}} - \frac{\pi}{rn_{\mu+j}} = \beta_j,$$

$r = 24\pi$ , то очевидно, что  $\beta_j > \alpha_j$ , где  $\alpha_j$  из леммы 3. То есть дуги, входящие в семейство  $A$  и во множество  $E_\mu$ , полностью покрывают единичную окружность, и для любой точки  $z \in \{|z| = 1\}$  найдется индекс  $t_j(z), t_j \in \{n_\mu, 2n_\mu, \dots, n_\nu, 2n_\nu\}$ , такой, что в силу лемм 2 и 3 имеем (3).  $\square$

Пусть везде в дальнейшем  $\{n_p\}, \mu, \nu, q$  — такие, как мы определили выше. Числа  $W_{k, n_i}, 0 \leq |W_{k, n_i}| \leq 1$  — произвольные, причем если для каких-то узлов из матрицы  $M$  не выполняется условие (2), то считаем соответствующее число  $W_{k, n_i} = W_{s, n_j} = 0$ .

**Лемма 5.** Пусть даны  $\{n_p\}, \mu, \nu, q, W_{k, n_i}$ . Тогда существует функция  $f \in AC(\omega, |z| \leq 1)$  такая, что

$$f(z_{k, n_t}) = W_{k, n_t} + O\left(\frac{1}{n_\mu^{2q}}\right), \tag{4}$$

причем

$$\max_{z \in \{|z| \leq 1\}} |f(z)| \leq 2, \tag{5}$$

$$\omega(f, \delta) \leq 9n_{\mu}^{79q} \delta. \tag{6}$$

**Доказательство.** Приведем схему доказательства.

Введем функцию

$$P_{k, n_t}^{s_k}(z) = [\exp(i(\pi - \theta_{k, n_t}))z + 2]^{s_k},$$

где  $0 \leq k \leq n_t, \mu \leq t \leq \nu$ .

Выбираем показатель степени  $s_k$  так, чтобы

$$|\Psi_{k, n_t}(\exp^{i\varphi})| = \left| \frac{l_{k, n_t}(\exp^{i\varphi})}{P_{k, n_t}^{s_k}(\exp^{i\varphi})} \right| \leq \begin{cases} 1, & \varphi \in \Delta_{k, t} \\ \frac{1}{n_\mu^{5q}}, & \varphi \notin \Delta_{k, t} \end{cases}, \tag{7}$$

где  $\Delta_{k, t} = \left[ \varphi_{k, n_t} - \frac{1}{n_t^{16q}}, \varphi_{k, n_t} + \frac{1}{n_t^{16q}} \right]$ .





Для этого достаточно положить  $s_k = n_t^{38q}$ . Это легко проверяется, если использовать свойства функции  $P_{k,n_t}(z)$  и арифметические преобразования. В ходе проверки, пользуясь интегральной формулой Коши, оценками полиномов на линиях уровня, принципом максимума модуля аналитической функции получаем:

$$|\Psi_{k,n_t}(z+h) - \Psi_{k,n_t}(z)| < 9|h|n_t^{78q}. \quad (8)$$

Положим теперь:

$$f(z) = \sum_{t=\mu}^{\nu} \sum_{k=0}^{n_t-1} 'W_{k,n_t} \cdot \Psi(z),$$

где штрих у знака суммы означает, что отсутствуют слагаемые, для которых  $W_{k,n_t} = 0$ .

Очевидно, что функция  $f(z)$ - аналитическая в  $|z| < 1$  и непрерывная в  $|z| \leq 1$ . Подсчитав значение  $f(z)$  в произвольном фиксированном узле  $z_{k_0,n_j}$ , будем иметь:

$$f(z_{k_0,n_j}) = W_{k_0,n_j} + \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{n_t-1} ''W_{k,n_t} \cdot \Psi_{k,n_t}(z_{k_0,n_j}),$$

второй штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемого с индексом  $(k_0, n_j)$ . Теперь, учитывая оценки (7), (8), выбор точек  $W_{k,n_t}$  и того факта, что мы имеем не более чем  $n_\mu^q$  строк, а значит, не более чем  $n_\mu^{2q}$  узлов, получаем (4)–(6).  $\square$

**Лемма 6.** Пусть  $M$  — матрица равноотстоящих узлов,  $n_{p_0}$  — произвольная строка,  $\Delta_{j,p}^0$  — одна из частичных дуг,  $z_0 = \exp(i\varphi_0) \in \Delta_{j,p}^0$ . Положим

$$W_{k,n_p} = [\eta_{k,n_p} \cdot \exp(-\frac{ik\pi}{n_p})],$$

где числа

$$\eta_{k,n_p} = \text{sign} \sin \left( \frac{1}{2}(\varphi_0 - \theta_{k,n_p}) \right). \quad (9)$$

Тогда для всех  $z \in \Delta_{j,p}^0$  справедливо:

$$\left| \sum_{k=0}^{n_p-1} W_{k,n_p} \cdot l_{k,n_p}(M, z) \right| = L_{n_p}(M, z) = \sum_{k=0}^{n_p-1} |l_{k,n_p}(M, z)|.$$

**Доказательство** следует из представления

$$l_{k,n_p}(M, z_0) = \frac{1}{n} \cdot \exp \left( \frac{i}{2}(n_p - 1)(\varphi_0 - \theta_{0,n_p}) \right) \cdot \sin \left( \frac{n}{2}(\varphi_0 - \theta_{0,n_p}) \right) \cdot \frac{\exp \left( \frac{ik\pi}{n_p} \right)}{\sin \left( \frac{1}{2}(\varphi_0 - \theta_{k,n_p}) \right)}$$

и равенств (8).  $\square$

**Замечание 2.** Рассмотрим множество  $E_\mu$  из леммы 3. Как уже говорилось, оно состоит из конечного  $(\nu_0 - \mu)$  числа непересекающихся открытых дуг. На каждой такой дуге зафиксируем по точке  $z_p = \exp(i\varphi_p)$ ,  $0 \leq p \leq \nu_0 - \mu - 1$ , определим числа  $W_{k,n_p}$  по формулам (9). Тогда в силу леммы 5 существует функция  $f_\mu(z)$  со свойствами (4)–(6). Кроме того, для любого  $z \in E_\mu$  существует  $j(z)$ ,  $0 \leq j \leq \nu_0 - \mu$ , такой, что выполняется в) из леммы 3. Отсюда и условия (4):

$$|L_{n_{\mu+p}}(M, f_\mu, z)| = \left| \sum_{k=0}^{n_{\mu+p}-1} W_{k,n_{\mu+p}} \cdot l_{k,n_{\mu+p}}(M, z) \right| + \sum_{k=0}^{n_p-1} O(n_\mu^{-2q}) \geq C_1 \ln(n_{\mu+p}) - C_2(n_\mu^{-q}), \quad (10)$$

$C_1, C_2$  — абсолютные константы.

**Лемма 7.** Пусть  $M$  — матрица корней  $n$ -й степени из  $-1$ . Тогда каждого  $\mu, n_\mu \in \mathbb{N}$  существует функция  $f_\mu \in AC$  такая, что справедливо (5), (6), и для любой точки  $z \in \{|z| = 1\}$  найдется номер  $n_t \in \{n_\mu, 2n_\mu, \dots, n_\nu, 2n_\nu\}$ , для которого справедливо:

$$|L_{n_t}(M, f_\mu, z)| \geq C^* \cdot \ln n_t - C^{**} n_\mu^{-q}, \quad (11)$$

где  $C^*, C^{**}$  — абсолютные константы.



**Доказательство.** В ходе доказательства леммы 4 строились две системы дуг: дуги, входящие во множество  $E_\mu$ , и дуги, перекрывающие  $\{|z| = 1\} \setminus E_\mu$ , т.е.  $A$ . На дугах из  $E_\mu$  зафиксируем произвольную точку и определим числа  $W_{k,n_t}$  как показано в замечании 2 (если какой-то узел равен  $-1$ , тогда полагаем соответствующую точку  $W_{k,n_t} = 0$ ). На дугах семейства  $A$  выбираем и фиксируем центральную точку (см. доказательство леммы 4) и по ней, аналогично (9), определяем числа  $W_{k,2n_j}$ . Заметим, что расстояние между узлами из пачки  $\{n_\mu, 2n_\mu, \dots, 2n_\nu\}$  не меньше  $\frac{1}{2n_\mu^{2q}}$  (см. замечание 1). Дословно повторяя рассуждения леммы 5, получаем, что существует функция  $f_\mu(z)$  со свойствами (4)–(6). Осталось проверить (11). Если  $z \in \{|z| = 1\} \setminus \{-1\}$ , то  $z$  принадлежит либо  $E_\mu$ , либо  $A$ . В силу рассуждений, приведенных в замечании 2, оценка (11) становится очевидной.  $\square$

В работе [3] была доказана следующая лемма.

**Лемма 8.** Пусть  $M = \{|z| = 1\}$  — матрица равноотстоящих узлов и  $\omega \in \Omega_0$ .

Если для любого фиксированного  $j$  существуют последовательности:  $\{\beta_{k,j}\}_{k=1}^\infty$  — положительных чисел;  $\{\mu_{k,j}\}$  и  $\{\nu_{k,j}\}$  — натуральных чисел;  $\{f_{k,j}\}$  — функций, аналитических в  $|z| < 1$  и непрерывных в  $|z| \leq 1$ ;  $\{E_{k,j}\}$  — измеримых множеств, которые удовлетворяют

а)  $\lim \beta_{k,j} = 0, \lim \mu_{k,j} = \infty, \mu_{k,j} \leq \nu_{k,j}$ ;

б)  $\|f_{k,j}\|_{AC} \leq \omega(\beta_{k,j})$ ;

в)  $\omega(f_{k,j}, \delta) \leq \frac{\omega(\beta_{k,j})}{\beta_{k,j}} \delta$ ;

г)  $E_{k,j} \in \{|z| = 1\}, \text{mes } E_{k,j} \geq 2\pi$ , для любого  $z \in E_{k,j}$  существует  $l, \mu_{k,j} \leq l \leq \nu_{k,j}$ , что

$$|L_l(M, f_{k,j}, z)| \geq C_3(j) > 0,$$

где  $C_3 = \text{const}$ .

Тогда существуют функция  $f \in AC(\omega)$  и множество  $E, \text{mes } E = 2\pi$ , такие, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |L_n(M, f, z) - f(z)| > 0$$

везде на  $E$ , причем

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |L_n(M, f, z) - f(z)| = 0.$$

**Доказательство теоремы.** Пусть выполняются условия теоремы 1. Для любых  $j \in \mathbb{N}$ , при каждом натуральном  $k$  положим:  $\mu_{k,j} = n_\mu, \nu_{k,j} = n_\nu; \beta_{k,j} = \beta_\mu = [9(n_\mu^q)^{79q}]^{-1}; f_{k,j} = f_\mu = \frac{\omega(\beta_{k,j})}{2} \tilde{f}_\mu$ , где  $\tilde{f}_\mu$  из леммы 7;  $E_{k,j} = \{|z| = 1\}$ . Тогда с учетом свойств функции  $\tilde{f}_\mu$  для последовательностей выполняются все утверждения леммы 8. Отсюда с учетом замечания 1 следует утверждение теоремы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-07-91370).

### Библиографический список

- Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964. 440 с.
- Привалов А. А. О расходимости интерполяционных процессов на множестве второй категории // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 2. С. 179–183.
- Шаталина А. В. Расходимость интерполяционных процессов Лагранжа на единичной окружности / Саратов. гос. ун-т. Саратов, 1990. 30 с. Деп. в ВИНТИ 19.07.1990, № 4060-В90.
- Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 513 с.

## Everywhere Divergence of Lagrange Processes on the Unit Circle

S. V. Tyshkevich<sup>1</sup>, A. V. Shatalina<sup>2</sup>

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, tyszkiewicz@yandex.ru, teh-plast@bk.ru

We study the convergence of Lagrange interpolation processes in the closed unit disk. Choosing a matrix with a certain distribution of interpolation nodes allowed to construct the set, completely covering the unit circle, and the function for which the process diverges everywhere on this set.

Key words: interpolation, Lagrange polynomials.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-07-91370).



## References

1. Smirnov V. I., Lebedev N. A. *Functions of a Complex Variable: Constructive Theory*. London, Iliffe Books Ltd., IX, 1968, 488 pp.
2. Privalov A. A. Divergence of interpolation processes on sets of the second category. *Math. Notes*, 1975, vol. 18, no. 2, pp. 692–694.
3. Shatalina A. V. Divergence of Lagrange Processes on the Unit Circle. *Dep. v VINITI* [Dep. in VINITI], Saratov State University, no. 4060-B90, 19.07.1990, 30 p. (in Russian).
4. K. Prachar. *Raspredelenie prostykh chisel* [The Distribution of Prime Numbers]. Moscow, Mir, 1967. 513 p. (in Russian).

УДК 517.95; 517.984

# КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ТРЕБОВАНИЯХ НА ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

А. П. Хромов<sup>1</sup>, М. Ш. Бурлуцкая<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

<sup>2</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, bmsh2001@mail.ru

В статье дается новое краткое доказательство теоремы В. А. Чернытина о классическом решении методом Фурье смешанной задачи для волнового уравнения с закрепленными концами при минимальных требованиях на начальные данные. Далее, рассматривается подобная задача для простейшего функционально-дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией в случае закрепленного конца, и также получаются результаты окончательного характера. Эти результаты получаются благодаря существенному использованию идей А. Н. Крылова по ускорению сходимости рядов, подобных рядам Фурье. Без доказательства приводятся результаты и для других схожих случаев смешанных задач.

*Ключевые слова:* смешанная задача, метод Фурье, инволюция, классическое решение, асимптотика собственных значений и собственных функций, система Дирака.

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящая публикация приурочена к 150-летию со дня рождения выдающихся отечественных ученых В. А. Стеклова (1884–1926) и А. Н. Крылова (1883–1945), внесших весомый вклад в решение смешанных задач методом Фурье.

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, полученных его почленным дифференцированием нужное число раз.

Приведем мнение В. А. Стеклова, впервые давшего строгое обоснование метода Фурье: «Необходимость доказывать равномерную сходимость рассматриваемых рядов вытекает из самой сущности метода Ляме – Фурье (Эйлера – Бернулли), дающего выражение искомой функции в виде бесконечного ряда, просуммировать который или преобразовать к виду, удобному для дифференцирования, не представляется возможным» [1, с. 224].

Эта точка зрения сделала метод Фурье очень популярным, было проведено огромное количество исследований и достигнуты значительные успехи.

Информация обзорного характера содержится, в частности, в книгах И. Г. Петровского, В. И. Смирнова, О. А. Ладыженской и В. А. Ильина, В. А. Чернытина [2–7].

Приведем один такой результат из [2]. Рассматривается задача

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (0.1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (0.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (0.3)$$

**Теорема 0.1** [2, с. 190]. Если  $q(x) \in C[0, \pi]$  и вещественна,  $\varphi(x) \in C^3[0, \pi]$ ,  $\psi(x) \in C^2[0, \pi]$ ,

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0, \quad (0.4)$$



## References

1. Smirnov V. I., Lebedev N. A. *Functions of a Complex Variable: Constructive Theory*. London, Iliffe Books Ltd., IX, 1968, 488 pp.
2. Privalov A. A. Divergence of interpolation processes on sets of the second category. *Math. Notes*, 1975, vol. 18, no. 2, pp. 692–694.
3. Shatalina A. V. Divergence of Lagrange Processes on the Unit Circle. *Dep. v VINITI* [Dep. in VINITI], Saratov State University, no. 4060-B90, 19.07.1990, 30 p. (in Russian).
4. K. Prachar. *Raspredelenie prostykh chisel* [The Distribution of Prime Numbers]. Moscow, Mir, 1967. 513 p. (in Russian).

УДК 517.95; 517.984

# КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ТРЕБОВАНИЯХ НА ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

А. П. Хромов<sup>1</sup>, М. Ш. Бурлуцкая<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

<sup>2</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, bmsh2001@mail.ru

В статье дается новое краткое доказательство теоремы В. А. Чернытина о классическом решении методом Фурье смешанной задачи для волнового уравнения с закрепленными концами при минимальных требованиях на начальные данные. Далее, рассматривается подобная задача для простейшего функционально-дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией в случае закрепленного конца, и также получаются результаты окончательного характера. Эти результаты получаются благодаря существенному использованию идей А. Н. Крылова по ускорению сходимости рядов, подобных рядам Фурье. Без доказательства приводятся результаты и для других схожих случаев смешанных задач.

*Ключевые слова:* смешанная задача, метод Фурье, инволюция, классическое решение, асимптотика собственных значений и собственных функций, система Дирака.

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящая публикация приурочена к 150-летию со дня рождения выдающихся отечественных ученых В. А. Стеклова (1884–1926) и А. Н. Крылова (1883–1945), внесших весомый вклад в решение смешанных задач методом Фурье.

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, полученных его почленным дифференцированием нужное число раз.

Приведем мнение В. А. Стеклова, впервые давшего строгое обоснование метода Фурье: «Необходимость доказывать равномерную сходимость рассматриваемых рядов вытекает из самой сущности метода Ляме – Фурье (Эйлера – Бернулли), дающего выражение искомой функции в виде бесконечного ряда, просуммировать который или преобразовать к виду, удобному для дифференцирования, не представляется возможным» [1, с. 224].

Эта точка зрения сделала метод Фурье очень популярным, было проведено огромное количество исследований и достигнуты значительные успехи.

Информация обзорного характера содержится, в частности, в книгах И. Г. Петровского, В. И. Смирнова, О. А. Ладыженской и В. А. Ильина, В. А. Чернытина [2–7].

Приведем один такой результат из [2]. Рассматривается задача

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (0.1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (0.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (0.3)$$

**Теорема 0.1** [2, с. 190]. Если  $q(x) \in C[0, \pi]$  и вещественна,  $\varphi(x) \in C^3[0, \pi]$ ,  $\psi(x) \in C^2[0, \pi]$ ,

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0, \quad (0.4)$$



$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0, \tag{0.5}$$

то ряд, представляющий формальное решение задачи (0.1)–(0.3) по методу Фурье, и ряды, получающиеся из него дважды почленным дифференцированием по  $x$  и  $t$ , сходятся абсолютно и равномерно в области  $x \in [0, \pi]$ ,  $t \in [-T, T]$  при любом  $T$  и, тем самым, сумма  $u(x, t)$  данного ряда есть классическое решение.

В трудном случае числа переменных более двух наиболее глубокие результаты в данном направлении получены О. А. Ладыженской [4] и В. А. Ильиным [6].

Рассмотрим теперь частный случай задачи (0.1)–(0.3) — задачу о колебании струны с закрепленными концами:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in (-\infty, +\infty), \tag{0.6}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \tag{0.7}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0 \tag{0.8}$$

( $\psi(x) \equiv 0$  для простоты). Эта задача впервые была решена Д. Бернулли в 1753 г. и оказала огромное влияние на последующее развитие математики. Она находится в истоке теории рядов Фурье, ортогональных систем, краевых задач на собственные значения и, тем самым, она имеет определяющее значение в современной теории функций, спектральной теории, теории краевых задач в частных производных. Укажем имена крупнейших ученых, принимавших активное участие в разработке данного направления: Д. Бернулли, Эйлер, Фурье, Пуассон, Штурм, Лиувиль, Коши, Пуанкаре, Крылов, Стеклов, Петровский.

Формальное решение задачи (0.6)–(0.8) методом Фурье есть:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\xi) \sin nx \cos nt, \tag{0.9}$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $L_2[0, \pi]$ . По теореме 0.1 соотношение (0.9) есть классическое решение, если  $\varphi(x) \in C^3[0, 1]$ , и удовлетворяет условиям (0.4) и оно получено за счет законности почленного дифференцирования дважды по  $x$  и  $t$  ряда (0.9). В то же время известно, что решение задачи (0.6)–(0.8) имеет место и при естественных минимальных условиях на функцию  $\varphi(x)$ , когда она удовлетворяет условиям (0.4), но при этом является только дважды непрерывно дифференцируемой.

В этом случае дважды почленную дифференцируемость ряда (0.9) доказать уже невозможно. Более того, при некоторых  $\varphi(x)$  ряд, полученный после дважды почленного дифференцирования, может даже расходиться (при  $t = 0$  получаем обычный ряд Фурье произвольной непрерывной функции).

Попробуем, несмотря на это, и в таком случае получить из ряда (0.9) решение задачи (это хорошо известный факт). Сам ряд (0.9) сходится абсолютно и равномерно при  $x \in [0, \pi]$  и  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Представим его в виде суммы двух рядов  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$ , где

$$\Sigma_{\pm} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\xi) \sin n(x \pm t).$$

Теперь каждый из этих рядов есть уже ряд Фурье.

Рассмотрим ряд

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \sin n\xi) \sin nx$$

при всех  $x \in (-\infty, +\infty)$  и пусть  $\tilde{\varphi}(x)$  — его сумма. Тогда  $\tilde{\varphi}(x)$  есть нечетное периодическое продолжение функции  $\varphi(x)$  на всю вещественную ось. В силу естественных условий на функцию  $\varphi(x)$  получаем, что  $\tilde{\varphi}(x) \in C^2(-\infty, +\infty)$ . Поэтому имеем:

$$u(x, t) = \frac{\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)}{2}, \tag{0.10}$$

и отсюда легко следует, что  $u(x, t)$  из (0.10) есть классическое решение задачи (0.6)–(0.8).

Таким образом, не прибегая к почленному дифференцированию ряда (0.9), мы сначала сделали преобразование этого ряда, а уже потом решили вопрос о его гладкости.



По поводу задачи (0.6)–(0.8) приведем высказывание В. А. Стеклова [1, с. 205]: «Этот классический пример показывает, что только что указанные ограничения (наши естественные условия. — А. Х., М. Б.) вызываются самой сущностью задачи, и нет оснований рассчитывать на возможность освободиться от некоторых из них при исследовании общего случая. Сравнивая затем результат, полученный для рассматриваемого простейшего случая, с общими теоремами п. 24 или п. 26 (в нашем случае с теоремой 0.1. — А. Х., М. Б.), можем признать дополнительные ограничения (т. е. условие  $\varphi(x) \in C^3[0, \pi]$ . — А. Х., М. Б.), которые несомненно должны возникать при общей постановке вопроса и которые действительно имеются в этих теоремах, сравнительно незначительными и устранимыми лишь в частных наиболее простых случаях, подобно указанному в предыдущем пункте» (т. е. задача (0.6)–(0.8). — А. Х., М. Б.)

Таким образом, В. А. Стеклов здесь опять обращает внимание на то, что ослабление условий на исходные данные при использовании метода Фурье в общем случае является трудной проблемой.

Теперь приступим к более тщательному рассмотрению этого вопроса и с этой целью обратимся к книге крупнейшего ученого (кораблестроителя, математика и механика) А. Н. Крылова «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах». Впервые эта книга вышла в 1913 г. и с той поры много раз переиздавалась без существенных изменений (5-е изд. — в 1950 г., уже после смерти А. Н. Крылова). В предисловии к пятому изданию В. И. Смирнов написал: «До настоящего времени книга А. Н. Крылова представляет единственное большое руководство по математической физике первой половины XIX века, а с другой стороны, большое внимание уделено приложениям методов математической физики к конкретным практически важным техническим задачам» [8, с. 6]. В этой книге есть очень интересная глава (гл. VI), посвященная улучшению сходимости рядов Фурье и им подобных.

Прием А. Н. Крылова продемонстрируем на примере ряда Фурье:

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad x \in [0, \pi], \quad (0.11)$$

и исследуем вопрос о гладкости суммы этого ряда. В общем случае при отсутствии информации, кроме той, что  $a_n$  есть коэффициенты Фурье, ничего сказать нельзя. Если нам известно, что исходная функция гладкая, кусочно-гладкая и т. п., то можно получить интегрированием по частям асимптотику коэффициентов Фурье, причем главные части асимптотики получаются за счет точек разрыва функции, следующие — за счет разрыва производных и т. д.

Рассмотрим обратную задачу: по асимптотике коэффициентов Фурье получить информацию о гладкости функции.

Пусть, например,  $a_n = \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n}{n^2}$ , где через  $\alpha_n$  обозначены любые числа, удовлетворяющие условию  $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$ . Если ничего не делать с рядом (0.11), то ничего нельзя сказать и о гладкости его суммы. Разобьем теперь ряд на два ряда:

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum \frac{1}{n} \sin nx, \quad \Sigma_2 = \sum \frac{\alpha_n}{n^2} \sin nx.$$

Тогда можно утверждать следующее: ряд  $\Sigma_2$  и соответствующий ему почленно дифференцированный ряд сходятся абсолютно и равномерно (из-за сходимости ряда  $\sum \frac{\alpha_n}{n}$  по неравенству Коши–Буняковского); ряд же  $\Sigma_1$  имеет сумму, равную  $\pi - x$  при  $x \in [0, \pi]$ . Значит, мы получаем информацию о гладкости суммы ряда (0.11) без его почленного дифференцирования. Если же  $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha_n}{n^3}$ , то получаем информацию о гладкости производной от суммы ряда и т. д.

Таким образом, мы сумели узнать информацию о гладкости ряда (0.11) путем его расщепления на два, один из которых точно вычисляется, а другой можно почленно дифференцировать нужное число раз (эта процедура немного напоминает нам решение задачи (0.6)–(0.8), когда мы разбивали ряд (0.9) на два). О данном способе А. Н. Крылов сказал следующее: «Этого приема я не встречал ни в руководствах, ни в литературе, хотя, по его простоте и очевидности, я не смею утверждать, что он является новым» ([8, с. 9]). С помощью этого приема он дал, в частности, хорошее качественное





исследование рядов в случае вынужденных колебаний. Еще слова А. Н. Крылова: «Этот прием не только дает практическую возможность с удобством пользоваться такими рядами в приложениях, получая желаемую степень точности, взяв самое ограниченное число (3–5) членов преобразованного ряда, но часто приводит к представлению суммы предложенного ряда в замкнутой форме под видом разрывной функции. Этот же прием дает возможность находить производные от функций, представленных такими рядами Фурье, почленное дифференцирование которых недопустимо» ([8, с. 9]). И еще ([8, с. 227]): «Изложенный прием усиления быстроты сходимости рядов Фурье и нахождения производных от функций, ими представляемых, может служить для доказательства или проверки того, что представляемая рядом функция действительно удовлетворяет тому дифференциальному уравнению, как решение коего она найдена, хотя бы самый ряд и нельзя было дифференцировать почленно требуемое число раз. Предлагается в виде задачи сделать такую проверку для величины  $u$ , данной на с. 170 и представляющей решение задачи о колебании струны». Об ускорении сходимости рядов Фурье сказано также в [9]. Отметим еще роль данного метода в вычислительной математике (см. [10, 11]).

В исследованиях метода Фурье можно сказать, что прием А. Н. Крылова является ключом к изучению смешанной задачи. В самом деле, формальное разложение решения по методу Фурье включает и собственные значения, и собственные функции соответствующих спектральных задач. Используя асимптотику собственных значений и собственных функций, можно попытаться вместо почленного дифференцирования формальных разложений разбить их на части, такие, что одни, более простые по структуре, но медленно сходящиеся, можно изучать, минуя почленное дифференцирование, а другие, быстро убывающие, уже можно изучать, используя почленное дифференцирование.

Лишь в 80-х гг. прошлого века В. А. Чернятин [7, 12–17] предпринял такую попытку изучения формальных разложений по методу Фурье и успешно изучил ряд смешанных задач. В результате требования гладкости исходных данных уже становятся минимальными.

Заметим, что указанная выше идея просматривается уже в задаче (0.6)–(0.8) колебания струны. Именно, исходя из формального решения (это не ряд Фурье) мы представляем его в виде суммы двух рядов Фурье с коэффициентами, выражающимися через исходные данные, и нужную информацию о гладкости мы получаем из структуры решения, не прибегая к почленному дифференцированию формального ряда.

В. А. Чернятин же в случае волнового уравнения представлял формальное решение в виде суммы двух рядов, один из которых допускает почленное дифференцирование два раза (идея ускорения сходимости), а другой можно представить в виде суммы двух рядов Фурье, которые можно вычислить явно, и поэтому отсюда, как и в случае уравнения струны, мы получим нужную информацию. Разумеется, во всех вопросах, связанных с методом Фурье, важная роль, которую впервые понял В. А. Стеклов, принадлежит замкнутости как тригонометрической системы, так и системы собственных функций.

Тем самым результаты В. А. Стеклова, А. Н. Крылова и В. А. Черятина являются крупным вкладом в развитие метода Фурье. Они поднимают метод Фурье на новую высоту, предельно расширяя границы его применения (т. е. при минимальных условиях на исходные данные) и ставят много интересных и очень важных вопросов и в теории функций, и в краевых задачах в частных производных. Разумеется, достижение новых успехов в данном направлении связано с большими трудностями, и оно делает метод Фурье еще более привлекательным для исследований.

Остановимся на содержании статьи.

В параграфе 1 приводится новое краткое доказательство замечательной теоремы В. А. Черятина о классическом решении по методу Фурье смешанной задачи (0.1)–(0.3) (для простоты берем  $\psi(x) \equiv 0$ ) при естественных минимальных условиях на  $\varphi(x)$ . В параграфе 2 без доказательств приводятся другие результаты В. А. Черятина. В параграфе 3 рассматривается смешанная задача для уравнения первого порядка с инволюцией. Приведем простейший пример такого уравнения:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x, t), \quad (0.12)$$

где  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ . Уравнения с инволюцией имеют давнюю историю и активно исследуются в настоящее время [18–29].

Если  $q(x) \equiv 0$ , то уравнение (0.12) есть один из корней квадратных (в смысле дифференцирования)



из уравнения струны. В самом деле, если  $u(x, t)$  удовлетворяет (0.12), то

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( i \frac{\partial u(1-x, t)}{\partial(1-x)} \right) = \\ &= i \frac{\partial}{\partial(1-x)} \left( \frac{\partial u(1-x, t)}{\partial t} \right) = i^2 \frac{\partial}{\partial(1-x)} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Уравнение (0.12) есть простейшее уравнение первого порядка с инволюцией. При решении смешанных задач для таких уравнений по методу Фурье спектральная задача сводится к системе Дирака, т. е. вместо уравнения Штурма – Лиувилля нам приходится связываться с системой Дирака. Спектральная задача для уравнения (0.12) интересна и своими приложениями к задаче на собственные значения для интегральных уравнений [21, 23, 24]. Так же, как и в параграфе 1, мы для одного самого простого (но лишь по форме) случая приводим подробные доказательства. В параграфе 4 приводятся без доказательства другие результаты по смешанным задачам с инволюцией [30–34].

Введение и параграфы 1, 2 написаны А. П. Хромовым, параграфы 3, 4 — М. Ш. Бурлуцкой и А. П. Хромовым.

## 1. ТЕОРЕМА В. А. ЧЕРНЯТИНА

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$u_{tt(x,t)} = u_{xx}(x, t) - q(x)u(x, t), \tag{1.1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \tag{1.3}$$

где  $q(x) \in C[0, \pi]$  и вещественна.

Под классическим решением задачи (1.1)–(1.3) понимаем функцию  $u(x, t)$ , дважды непрерывно дифференцируемую по  $x$  и  $t$  при  $x \in [0, \pi]$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$  и удовлетворяющую (1.1)–(1.3).

Естественные минимальные требования на  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) \in C^2[0, \pi], \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0 \tag{1.4}$$

(условия  $\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$  следуют из (1.1)).

Будем искать классическое решение задачи (1.1)–(1.3) по методу Фурье при условиях (1.4). Формальное решение по методу Фурье есть:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi)(x) \cos \sqrt{\lambda} t \, d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} (\varphi, \varphi_n) \varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t, \tag{1.5}$$

где  $R_\lambda$  — резольвента оператора  $L$ :  $Ly = -y'' + q(x)y$ ,  $y(0) = y(\pi) = 0$ ,  $\lambda_n$  — собственные значения оператора  $L$ , а  $\varphi_n(x)$  — соответствующие собственные функции, для которых  $\|\varphi_n\| = 1$  ( $\|\cdot\|$  — норма в  $L_2[0, \pi]$ ),  $r > 0$  фиксировано. Появление интеграла в (1.5) вызвано тем, что нумерация собственных значений  $\lambda_n$  привязана к их асимптотике, и потому некоторое конечное число собственных значений с малыми модулями не занумеровано.

### 1.1. Асимптотика собственных значений и собственных функций

Оператор  $L$  самосопряженный, и для  $\lambda_n$  имеет место [35, с. 71].

**Теорема 1.1.** *Все  $\lambda_n$  вещественные, достаточно большие по модулю простые и для них справедлива асимптотика*

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем одними и теми же обозначениями,  $\alpha$  и  $\alpha_n$ , будем обозначать произвольные числа (в том числе и комплексные), лишь бы  $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$ .

**Замечание.** Грубая асимптотика

$$\sqrt{\lambda_n} = n + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.7}$$

хорошо известна.



Займемся асимптотикой собственных функций. Воспользуемся оператором преобразования [35, с. 17, 23]: для решения  $y(x, \mu)$  уравнения

$$y'' - q(x)y + \mu^2 y = 0 \tag{1.8}$$

с условиями  $y(0, \mu) = 0$ ,  $y'(0, \mu) = \mu$  имеет место формула

$$y(x, \mu) = \sin \mu x + \int_0^x K(x, t) \sin \mu t dt, \tag{1.9}$$

где  $K(x, t)$  непрерывно дифференцируема по  $x$  и  $t$  и  $K(x, 0) = 0$ .

**Теорема 1.2.** Если  $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$  из (1.6), то

$$y(x, \mu_n) = \sin nx + \frac{r(x)}{n} \cos nx + \frac{1}{n} \int_0^x K_t(x, t) \cos nt dt + O\left(\frac{\alpha_n}{n}\right), \tag{1.10}$$

где  $r(x) \in C[0, \pi]$  и оценка  $O(\cdot)$  равномерна по  $x$ .

**Доказательство.** Имеем:

$$\sin \mu_n x = \sin nx + \gamma_n x \cos nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{1.11}$$

где  $\gamma_n = \frac{1}{n}(\alpha + \alpha_n)$ . Далее

$$\begin{aligned} \int_0^x K(x, t) \sin \mu_n t dt &= \int_0^x K(x, t) \sin nt dt + \gamma_n \int_0^x K(x, t) t \cos nt dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \int_0^x K(x, t) \sin nt dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{\cos nx}{n} K(x, x) + \frac{1}{n} \int_0^x K_t(x, t) \cos nt dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Из (1.11) и (1.12) следует (1.10). □

Этот результат нам нужен лишь для следующей очевидной в силу теоремы 1.2 леммы.

**Лемма 1.1.** Если  $f(x) \in C[0, 1]$ , то

$$(f, y(x, \mu_n)) = (f, \sin nx) + \frac{\alpha_n}{n}. \tag{1.13}$$

**Лемма 1.2.** Имеют место асимптотические формулы:

$$y(x, \mu_n) = \sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad y'(x, \mu_n) = n \cos nx + O(1), \quad y''(x, \mu_n) = -n^2 \sin nx + O(n).$$

Этот результат легко следует из (1.7) и (1.9). Не требуется уточненных формул для собственных значений и собственных функций.

**Лемма 1.3.** Имеют место асимптотические формулы:

$$\cos \mu_n t = \cos nt + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{d}{dt}(\cos \mu_n t) = -n \sin nt + O(1), \quad \frac{d^2}{dt^2}(\cos \mu_n t) = -n^2 \cos nt + O(n),$$

где оценки  $O(\cdot)$  равномерны по  $t \in [-T, T]$  при любом фиксированном  $T > 0$ .

Эта лемма легко следует из (1.7).

## 1.2. Преобразование формального ряда (1.5)

По условиям (1.4)  $\varphi(x) \in D_L$  (области определения оператора  $L$ ). Тогда

$$(\varphi, \varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n}(\varphi, L\varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n}(L\varphi, \varphi_n) = \frac{1}{\lambda_n}(g, \varphi_n),$$



где  $g(x) = L\varphi(x) = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x)$ . Тогда ряд в (1.5), который впредь будем обозначать  $\Sigma$ , имеет вид

$$\Sigma = \sum \frac{1}{\lambda_n} (g, \varphi_n) \varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t \quad (1.14)$$

(для краткости  $|\lambda_n| > r$  в знаке суммы справа опускаем).

**Лемма 1.4.** *Имеет место асимптотика*

$$\frac{1}{\lambda_n} (g, \varphi_n) = \frac{(g, \varphi_n^0)}{n^2} + \frac{\alpha_n}{n^3}, \quad (1.15)$$

где  $\varphi_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ .

**Доказательство.** По лемме 1.2

$$\|y(x, \mu_n)\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

и так как  $\varphi_n(x) = \frac{y(x, \mu_n)}{\|y(x, \mu_n)\|}$ , то по лемме 1.1 получаем (1.15). □

Из леммы 1.4 следует

**Лемма 1.5.** *Имеет место представление*

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2, \quad (1.16)$$

где

$$\Sigma_1 = \sum \frac{(g, \varphi_n^0)}{n^2} \varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t, \quad \Sigma_2 = \sum \frac{\alpha_n}{n^3} \varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t.$$

**Лемма 1.6.** *Имеет место представление*

$$\Sigma_1 = \Sigma_3 + \Sigma_4, \quad (1.17)$$

где  $\Sigma_3 = \frac{2}{\pi} \sum \frac{(g, \sin nx)}{n^2} \sin nx \cos nt$ ,  $\Sigma_4 = \sum a_n(x, t)$ ,  $a_n(x, t) = \frac{(g, \varphi_n^0)}{n^2} [\varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t - \varphi_n^0(x) \cos nt]$ .

**Лемма 1.7.** *Ряды  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_4$  и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием два раза по  $x$  и  $t$ , сходятся абсолютно и равномерно по  $x \in [0, 1]$  и  $t \in [T, T]$ , где  $T$  — любое фиксированное положительное число.*

**Доказательство.** Заключение о ряде  $\Sigma_2$  получаем из оценок

$$\varphi_n^{(s)}(x) = O(n^s), \quad \frac{d^s}{dt^s} \cos \sqrt{\lambda_n} t = O(n^s), \quad s = 0, 1, 2,$$

легко следуемых из лемм 1.2 и 1.3 и абсолютной сходимости ряда  $\sum \alpha_n/n$  по неравенству Коши – Буняковского. Обратимся к ряду  $\Sigma_4$ . Представим

$$a_n(x, t) = a_{1,n}(x, t) + a_{2,n}(x, t), \quad (1.18)$$

где

$$a_{1,n}(x, t) = \frac{(g, \varphi_n^0)}{n^2} [\varphi_n(x) - \varphi_n^0(x)] \cos \sqrt{\lambda_n} t,$$

$$a_{2,n}(x, t) = \frac{(g, \varphi_n^0)}{n^2} \varphi_n^0(x) [\cos \sqrt{\lambda_n} t - \cos nt].$$

В силу лемм 1.2 и 1.3 имеем оценки

$$\frac{d^s}{dx^s} a_{j,n}(x, t) = O\left(\frac{\alpha_n}{n^2} n^{-1+s}\right), \quad j = 1, 2, \quad s = 0, 1, 2,$$

и утверждение леммы для  $\Sigma_4$  получаем так же, как и для ряда  $\Sigma_2$ . □



**Лемма 1.8.** Ряд  $u_0(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g, \sin nx)}{n^2} \sin nx \cos nt$  является классическим решением задачи (0.6)–(0.8), когда вместо  $\varphi(x)$  берется  $\varphi_1(x) = L_0^{-1}g$ , где  $L_0$  есть  $L$  при  $q(x) \equiv 0$ .

**Доказательство.** Имеем  $\frac{1}{n^2} \sin nx = L_0^{-1}(\sin nx)$ , и тогда наш ряд есть

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1, \sin nx) \sin nx \cos nt. \tag{1.19}$$

Так как

$$\varphi_1(x) = L_0^{-1}g = - \int_0^x (x-t)g(t) dt + \frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi-t)g(t) dt,$$

то  $\varphi_1(x)$  удовлетворяет условиям (1.4) и поэтому  $u_0(x, t)$ , равное (1.19), есть классическое решение задачи (0.6)–(0.8) для уравнения струны при  $\varphi(x)$ , равной  $\varphi_1(x)$ .  $\square$

**Лемма 1.9.** Для формального решения (1.5) имеет место формула

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t), \tag{1.20}$$

где  $u_0(x, t)$  из леммы 1.8,

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi)(x) \cos \sqrt{\lambda} t d\lambda - \frac{2}{\pi} \sum_{n^2 \leq r} \frac{(g, \sin nx)}{n^2} \sin nx \cos nt,$$

$$u_2(x, t) = \sum_{|\lambda_n| > r} \left[ \frac{1}{\lambda_n} (g, \varphi_n) \varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t - \frac{(g, \varphi_n^0)}{n^2} \varphi_n^0(x) \cos nt \right].$$

Утверждение леммы следует из (1.14), если учесть, что  $\Sigma_2 + \Sigma_4$  есть  $u_2(x, t)$ .

Таким образом, (1.20) и есть реализация рекомендаций А. Н. Крылова по усилению быстроты сходимости рядов Фурье и им подобных: ряд  $u_2(x, t)$  имеет ускоренную сходимость, и его можно почленно дифференцировать два раза,  $u_0(x, t)$  дважды дифференцируема по  $x$  и  $t$  как решение уравнения струны,  $u_1(x, t)$  дважды дифференцируемая как конечная сумма. Тем самым решен важный вопрос о гладкости формального решения при минимальных условиях на  $\varphi(x)$ .

### 1.3. Классическое решение смешанной задачи

Завершаем доказательство следующего замечательного результата В. А. Чернытина.

**Теорема 1.3.** Формальное решение (1.5) есть классическое решение смешанной задачи (1.1)–(1.3) при минимальных условиях (1.4) на  $\varphi(x)$ .

**Доказательство.** В том, что  $u(x, t)$  удовлетворяет граничным и начальным условиям, убеждаемся тривиально, поскольку ряд (1.5) в силу (1.14) один раз по  $x$  и  $t$  можно законно почленно дифференцировать, не прибегая к процедуре ускорения сходимости. Далее, в силу (1.20)  $u(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируема. Докажем, что  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1.1). Обозначим через  $M$  оператор  $M = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Тогда по лемме 1.8

$$Mu_0 = 0. \tag{1.21}$$

Далее, имеем:

$$Mu_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} M \left( (R_\lambda \varphi) \cos \sqrt{\lambda} t \right) d\lambda. \tag{1.22}$$

Но

$$M \left( (R_\lambda \varphi) \cos \sqrt{\lambda} t \right) = q(x)\varphi(x) \cos \sqrt{\lambda} t - q(x)(R_\lambda \varphi) \cos \sqrt{\lambda} t.$$

Поэтому из (1.22) получаем:

$$Mu_1 = \frac{q(x)}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos \sqrt{\lambda} t dt. \tag{1.23}$$



Далее, в силу ускоренной сходимости ряда  $u_2(x, t)$  имеем:

$$Mu_2 = \sum_{|\lambda_n| > r} Mv_n,$$

где  $v_n$  — общий член ряда  $u_2(x, t)$ . Имеем

$$Mv_n = \frac{1}{\lambda_n} (g, \varphi_n) M \left( \varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t \right) = \frac{1}{\lambda_n} (g, \varphi_n) \left( -q(x) \varphi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t \right),$$

и, значит,  $Mu_2 = -q(x)u_2$ . Теорема доказана.  $\square$

**Замечание.** Если брать  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  вместо  $u_t(x, 0) = 0$ , то надо требовать, чтобы  $\psi(x) \in C^1[0, \pi]$  и  $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ .

## 2. ДРУГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В. А. ЧЕРНЯТИНА

Приведем другие результаты В. А. Чернятина [7], полученные методом Фурье с привлечением идей А. Н. Крылова.

### 2.1. Неоднородная смешанная задача:

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (2.1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \quad (2.3)$$

Предполагаем, что  $q(x) \in C^2[0, \pi]$  и вещественна,  $f(x, t) \in C^{2,0}(\overline{Q})$ ,  $f(0, t) = f(\pi, t) = 0$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\overline{Q} = \{(x, t) \mid x \in [0, \pi], t \in [0, T]\}$ .

**Теорема 2.1.** При указанных условиях классическое решение задачи (2.1)–(2.3) существует и имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)}{\omega_n} \int_0^t F_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau,$$

$F_n(\tau) = \int_0^\pi f(x, \tau) y_n(x) dx$ , где везде в этом параграфе  $y_n(x)$  нормированная собственная функция для собственного значения  $\omega_n^2$  оператора  $L: Ly = -y'' + q(x)y$ ,  $y(0) = y(\pi) = 0$ .

В [7] приведен и более сильный результат, который не приводим из-за громоздкости.

### 2.2. Смешанная задача для уравнения Шредингера:

$$iu_t(x, t) = -u_{xx}(x, t) + q(x)u(x, t), \quad (2.4)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, \pi]. \quad (2.6)$$

Считаем, что  $q(x) \in C[0, \pi]$  и вещественна,  $\varphi(x) \in C^2[0, \pi]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$ .

**Теорема 2.2.** Существует хотя бы одна пара  $q(x)$ ,  $\varphi(x)$ , для которой смешанная задача (2.4)–(2.6) не имеет классического решения.

**Теорема 2.3.** Для существования классического решения задачи (2.4)–(2.6) достаточно дополнительно потребовать сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n e^{-in^2 t} \sin nx,$$

где  $\vartheta_n = (\varphi(x)q(x) - \varphi''(x), \sin nx)$  к функции класса  $C(\overline{Q})$  в метрике  $L^2(Q)$ . Это решение имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n e^{-i\omega_n^2 t} y_n(x),$$

где  $\Phi_n = (\varphi, y_n)$ .

Также в [7] есть и более сильный результат.





### 2.3. Смешанная задача для уравнения теплопроводности:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (2.7)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.8)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \pi]. \quad (2.9)$$

Предполагаем, что  $q(x) \in C[0, \pi]$  и вещественна,  $f(x, t) \in C(\bar{Q})$ , и выполняется условие Гельдера  $|f(x, t') - f(x, t)| \leq B|t' - t|^\alpha$ ,  $t', t \in [0, T]$ ,  $1/2 \leq \alpha \leq 1$ , и  $B$  не зависит от  $x \in [0, \pi]$ .

**Теорема 2.4.** При указанных условиях смешанная задача (2.7)–(2.9) имеет классическое решение, представимое в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \int_0^t F_n(\tau) e^{-\omega_n^2(t-\tau)} d\tau,$$

где  $F_n(\tau)$  те же, что и в п. 2.1.

### 3. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

В этом параграфе рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.2)$$

где  $\beta$  — вещественное число,  $\beta \neq 0$ ,  $q(x) \in C^1[0, 1]$  и вещественна,  $\varphi(x)$  удовлетворяет естественным условиям для классического решения:

$$\varphi(x) \in C^1[0, 1], \quad \varphi(0) = \varphi'(1) = 0. \quad (3.3)$$

Решение ищется в классе функций, непрерывно дифференцируемых по обоим переменным в полосе  $[0, 1] \times (-\infty, +\infty)$ .

#### 3.1. Случай симметрического потенциала

Это случай [30], когда

$$q(x) = q(1 - x), \quad (3.4)$$

и здесь можно брать  $q(x) \in C[0, 1]$ .

Получим явную формулу для классического решения, напоминающую формулу решения уравнения струны.

Спектральная задача по методу Фурье есть

$$y'(1 - x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad (3.5)$$

$$y(0) = 0. \quad (3.6)$$

Найдем решение задачи (3.5)–(3.6). Выполняя в (3.5) замену  $x$  на  $1 - x$  и полагая  $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ , где  $z_1(x) = y(x)$ ,  $z_2(x) = y(1 - x)$  ( $T$  — знак транспонирования), получим следующую систему уравнений относительно  $z(x)$ :

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \quad (3.7)$$

где  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P(x) = \text{diag}(q(x), q(1 - x)) = \text{diag}(q(x), q(x))$ .

Верно и обратное: если  $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$  — решение (3.7) и  $z_1(x) = z_2(1 - x)$ , то  $y(x) = z_1(x)$  есть решение уравнения (3.5).

**Лемма 3.1.** Общее решение системы (3.7) имеет вид

$$z(x) = z(x, \lambda) = GV(x, \lambda)c, \quad (3.8)$$



где  $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ ,  $V(x, \lambda) = \text{diag} (u_1(x)e^{-\lambda ix}, u_2(x)e^{\lambda ix})$ ,  $u_1(x) = \exp(i \int_0^x q(t) dt)$ ,  $u_2(x) = \exp(-i \int_0^x q(t) dt)$ ,  $c = (c_1, c_2)^T$ ,  $c_k$  — произвольные постоянные.

**Доказательство.** Выполним в (3.7) замену  $z = \Gamma v$ . Получим:

$$v_1'(x) - iq(x)v_1(x) = -\lambda iv_1(x), \quad v_2'(x) + iq(x)v_2(x) = \lambda iv_2(x).$$

Отсюда

$$v_1(x) = v_1(x, \lambda) = c_1 u_1(x) e^{-\lambda ix}, \quad v_2(x) = v_2(x, \lambda) = c_2 u_2(x) e^{\lambda ix}. \quad \square$$

**Лемма 3.2.** Общее решение уравнения (3.5) имеет вид

$$y(x) = y(x, \lambda) = c\varphi(x, \lambda), \quad (3.9)$$

где  $\varphi(x, \lambda) = u_1(x) e^{-i \int_0^x q(t) dt} e^{\lambda i(1-x)} - i u_2(x) e^{\lambda ix}$ ,  $c$  — произвольная постоянная.

**Доказательство.** Как было показано выше, функция  $y(x) = z_1(x)$  является решением (3.5), если  $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$  удовлетворяет (3.7) и  $z_1(x) = z_2(1-x)$ . Отсюда, в частности, получаем условие  $z_1(0) = z_2(1)$ , откуда по лемме 3.1 получаем  $c_1 = c_2 u_2(1) e^{\lambda i}$ . Тогда

$$y(x) = z_1(x) = c_1 u_1(x) e^{-\lambda ix} - i c_2 u_2(x) e^{\lambda ix} = c_2 \varphi(x, \lambda),$$

что доказывает (3.9). □

**Лемма 3.3.** Собственные значения краевой задачи (3.5)–(3.6) есть

$$\lambda_n = 2\pi n + a, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.10)$$

где  $a = \frac{\pi}{2} + \int_0^1 q(t) dt$ , а соответствующие собственные функции имеют вид

$$y_n(x) = p(1-x) e^{2\pi n i(1-x)} - ip(x) e^{2\pi n ix}, \quad (3.11)$$

где  $p(x) = u_2(x) e^{a ix}$ .

**Доказательство.** Согласно (3.6) и (3.9) для собственных значений имеем уравнение  $\varphi(0, \lambda) = 0$ , корни которого есть (3.10).

Найдем собственные функции  $y_n(x) = \varphi(x, \lambda_n)$ . Из условия  $q(x) = q(1-x)$  получаем  $u_1(x) = e^{ia} u_2(1-x)$ . Поэтому

$$y_n(x) = u_2(1-x) e^{ia(1-x)} e^{2\pi n i(1-x)} - i u_2(x) e^{a ix} e^{2\pi n ix},$$

откуда следует (3.11). □

Исследуем свойства системы  $y_n(x)$ .

**Лемма 3.4.** Функции  $y_n(x)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) образуют ортогональную систему, полную в  $L_2[0, 1]$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $L$  оператор

$$Ly = y'(1-x) + q(x)y(x), \quad y(0) = 0,$$

собственными функциями которого являются  $y_n(x)$ . Так как  $L = L^*$ , то  $y_n(x)$  ортогональны.

Докажем полноту. Пусть  $f \in L_2[0, 1]$  и  $f$  ортогональна  $y_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тогда

$$(y_n, f) = \int_0^1 \left[ \overline{f(1-x)} - i \overline{f(x)} \right] p(x) e^{2\pi n ix} dx = 0.$$

Отсюда имеем:

$$f(1-x) + if(x) \equiv 0, \quad x \in [0, 1].$$

Значит,  $f(x) = 0$  почти всюду. □

**Замечание.** Из леммы 3.4 следует, что собственные значения (3.10) однократны.

**Лемма 3.5.** Пусть  $y_n^0(x) = y_n(x) / \|y_n\|$  ( $\|\cdot\|$  — норма в  $L_2[0, 1]$ ). Тогда  $y_n^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} y_n(x)$ .



**Доказательство.** Имеем:

$$\begin{aligned} \|y_n\|^2 &= \int_0^1 y_n(x)\overline{y_n(x)} dx = \int_0^1 p(1-x)\overline{p(1-x)} dx + \int_0^1 p(x)\overline{p(x)} dx + \\ &+ i \int_0^1 p(1-x)\overline{p(x)}e^{-4\pi nix} dx - i \int_0^1 p(x)\overline{p(1-x)}e^{4\pi nix} dx = 2 \int_0^1 |p(x)|^2 dx = 2. \end{aligned}$$

**Лемма 3.6.** Если  $f(x) \in D_L$  ( $D_L$  – область определения оператора  $L$  в пространстве  $L_2[0, 1]$ ), то ее ряд Фурье по системе  $\{y_n(x)\}$  сходится абсолютно и равномерно на  $[0, 1]$ .

**Доказательство.** Ряд Фурье функции  $f(x)$  по системе  $\{y_n(x)\}$  есть

$$\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (f, y_n)y_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (f, y_n^0)y_n^0(x).$$

Пусть вещественное число  $\mu_0$  не является собственным значением оператора  $L$ . Положим  $(L - \mu_0 E)f = g$  ( $E$  – единичный оператор). Тогда  $f = R_{\mu_0}g$ , где  $R_\lambda$  есть резольвента оператора  $L$ . Так как  $y_n^0 = (\lambda_n - \mu_0)R_{\mu_0}y_n^0$ , то

$$(f, y_n^0) = (R_{\mu_0}g, y_n^0) = (g, R_{\mu_0}y_n^0) = \frac{1}{\lambda_n - \mu_0} (g, y_n^0).$$

Поэтому

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (f, y_n^0)y_n^0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \mu_0} (g, y_n^0)y_n^0(x).$$

Так как  $\frac{1}{\lambda_n - \mu_0} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ , а  $\sum_{-\infty}^{\infty} |(g, y_n^0)|^2 < \infty$ , то утверждение леммы следует из неравенства Коши – Буняковского и равномерной ограниченности  $y_n^0(x)$ .  $\square$

Из леммы 3.6 следует, что ряд  $\sum |c_n|$ , где  $c_n = (f, y_n^0)$ , сходится. Поэтому функция

$$f_0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi nix}$$

непрерывна на  $(-\infty, \infty)$  и периодическая с периодом 1.

**Лемма 3.7.** Если  $f(x)$  из леммы 3.6 есть  $\varphi(x)$ , то при  $x \in [0, 1]$  имеет место формула

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)} [i\varphi(x) + \varphi(1-x)]. \tag{3.12}$$

**Доказательство.** Согласно лемме 3.6 при  $x \in [0, 1]$  имеем:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (\varphi, y_n)y_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n y_n(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n [p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix}],$$

откуда

$$\varphi(x) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x). \tag{3.13}$$

Отсюда

$$\varphi(1-x) = p(x)f_0(x) - ip(1-x)f_0(1-x). \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) получаем:

$$i\varphi(x) + \varphi(1-x) = 2p(x)f_0(x). \tag{3.15}$$

Из (3.15) следует (3.12).  $\square$

**Замечание.** Функция  $f_0(x)$  в силу своей периодичности однозначно определяется на всей оси заданием ее лишь на отрезке  $[0, 1]$ . Таким образом,  $f_0(x)$  определяется не рядом, а по формуле (3.12).

**Лемма 3.8.** Если  $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$ , то  $f_0(x)$  непрерывно дифференцируема на всей вещественной оси.



**Доказательство.** Из (3.12) следует, что  $f_0(x)$  непрерывно дифференцируема на  $[0, 1]$  (в конечных точках имеются в виду односторонние производные). В силу периодичности  $f_0(x)$  непрерывно дифференцируема всюду на  $(-\infty, +\infty)$ , кроме точек  $x = n$  ( $n$  – целое). Покажем, что  $f'_0(n-0) = f'_0(n+0)$ . В силу периодичности  $f_0(x)$  достаточно установить, что

$$f'_0(0+0) = f'_0(0-0). \quad (3.16)$$

Дифференцируя (3.15), получим:

$$i\varphi'(x) - \varphi'(1-x) = 2p'(x)f_0(x) + 2p(x)f'_0(x). \quad (3.17)$$

Из (3.17), условия леммы и соотношений  $f_0(0) = f_0(1)$ ,  $f'_0(1-0) = f'_0(0-0)$  имеем:

$$2p'(0)f_0(0) + 2p(0)f'_0(0+0) = i\varphi'(0), \quad 2p'(1)f_0(0) + 2p(1)f'_0(0-0) = -\varphi'(0),$$

откуда

$$2[p'(0) + ip'(1)]f_0(0) + 2[p(0)f'_0(0+0) + ip(1)f'_0(0-0)] = 0. \quad (3.18)$$

Так как  $p(0) = 1$ ,  $p(1) = \exp\left(-i \int_0^1 q(t) dt\right) e^{ia} = e^{\pi i/2} = i$ ,  $u'_2(x) = -iq(x)u_2(x)$ ,  $p'(0) = -iq(0) + ia$ ,  $p'(1) = q(1) - a$ , а также  $q(0) = q(1)$ , то  $p'(0) + ip'(1) = 0$ , и из (3.18) следует (3.16).  $\square$

**Замечание.** Условие  $\varphi'(1) = 0$  является естественным в силу дифференциального уравнения.

Согласно методу Фурье решение  $u(x, t)$  задачи (3.1)–(3.2) представляется формальным рядом:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (\varphi, y_n^0) y_n^0(x) e^{\lambda_n \beta it} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x) e^{\lambda_n \beta it}, \quad (3.19)$$

где  $c_n = \frac{1}{2}(\varphi, y_n)$ .

**Лемма 3.9.** Ряд (3.19) сходится абсолютно и равномерно по  $x \in [0, 1]$  и  $t \in (-\infty, \infty)$ , и для его суммы имеет место формула

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x) e^{\lambda_n \beta it} = e^{a\beta it} [p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)], \quad (3.20)$$

где  $p(x) = u_2(x)e^{iax}$ .

**Доказательство.** Сходимость ряда (3.19) следует из леммы 3.6. Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x) e^{\lambda_n \beta it} &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n [p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi ni x}] e^{\lambda_n \beta it} = \\ &= e^{a\beta it} [p(1-x) \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi ni(1-x+\beta t)} - ip(x) \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi ni(x+\beta t)}], \end{aligned}$$

откуда следует (3.20).  $\square$

**Теорема 3.1.** Если  $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$ ,  $q(x) \in C[0, 1]$ ,  $q(x) = q(1-x)$ , то классическое решение задачи (3.1)–(3.2) существует и имеет вид

$$u(x, t) = e^{a\beta it} [p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)], \quad (3.21)$$

где  $p(x) = \exp\left(iax - i \int_0^x q(t) dt\right)$ ,  $f_0(x)$  – периодическая с периодом 1 функция, причем на отрезке  $[0, 1]$

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)} [i\varphi(x) + \varphi(1-x)]. \quad (3.22)$$

**Доказательство.** Как установлено выше, если функцию  $f_0(x)$ , заданную с помощью (3.22), продолжить периодически с периодом 1 на всю ось, то получим непрерывно дифференцируемую всюду функцию. Проверим теперь, что  $u(x, t)$ , заданная формулой (3.21), является решением смешанной задачи (3.1)–(3.2).



Сначала покажем, что  $u(x, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.1). Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta i} u_t(x, t) &= ae^{a\beta it} [p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)] + \\ &+ \frac{1}{i} e^{a\beta it} [p(1-x)f'_0(1-x+\beta t) - ip(x)f'_0(x+\beta t)], \\ u_\xi(\xi, t) \Big|_{\xi=1-x} &= e^{a\beta it} [-p'(1-\xi)f_0(1-\xi+\beta t) - p(1-\xi)f'_0(1-\xi+\beta t) - \\ &- ip'(\xi)f_0(\xi+\beta t) - ip(\xi)f'_0(\xi+\beta t)] \Big|_{\xi=1-x} = \\ &= e^{a\beta it} [-p'(x)f_0(x+\beta t) - p(x)f'_0(x+\beta t) - \\ &- ip'(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(1-x)f'_0(1-x+\beta t)]. \end{aligned}$$

Подставляя данные соотношения в (3.1), получим:

$$\begin{aligned} e^{a\beta it} \{ &f_0(1-x+\beta t)[ap(1-x) + ip'(1-x) - p(1-x)q(x)] + \\ &+ f_0(x+\beta t)[-aip(x) + p'(x) + ip(x)q(x)] + \\ &+ f'_0(1-x+\beta t)[\frac{1}{i}p(1-x) + ip(1-x)] + f'_0(x+\beta t)[-p(x) + p(x)] \}. \end{aligned}$$

Последние две квадратные скобки равны нулю. Подставляя явные выражения для  $p(x)$  и  $p'(x)$ , получим, что первая и вторая квадратные скобки также равны нулю, т. е.  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (3.1).

Далее, при  $x \in [0, 1]$  имеем:

$$u(x, 0) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x) = \varphi(x),$$

Наконец,

$$u(0, t) = e^{a\beta it} [p(1)f_0(\beta t) - ip(0)f_0(\beta t)] = 0,$$

т. е. начальное и краевое условия выполнены. □

### 3.2. Общий случай [31]

#### 3.2.1. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задачи (3.5)–(3.6)

Приведем задачу (3.5)–(3.6) к задаче в пространстве вектор-функций размерности 2. Положим  $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ , где  $z_1(x) = y(x)$ ,  $z_2(x) = y(1-x)$ . Тогда из уравнения в (3.5) получим векторно-матричное уравнение:

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \tag{3.23}$$

где  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P(x) = \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(1-x) \end{pmatrix}$  и  $z_1(x) = z_2(1-x)$ . Более того, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 3.10.** Число  $\lambda$  является собственным значением, а  $y(x)$  — собственной функцией краевой задачи (3.5)–(3.6) тогда и только тогда, когда  $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T = (y(x), y(1-x))^T$ , является ненулевым решением системы (3.23) с краевыми условиями:

$$z_1(0) = 0, \quad z_1(1/2) = z_2(1/2). \tag{3.24}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

**Лемма 3.11.** Пусть  $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ ,  $H(x) = \text{diag}(h_1(x), h_2(x))$ , где  $h_k(x) = e^{-\int_0^x p_k(t) dt}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $p_1(x) = -p_2(x) = -\frac{i}{2}[q(x) + q(1-x)]$ . Замена  $z(x) = \Gamma H(x)u(x)$ , где  $u = (u_1, u_2)^T$ , приводит систему (3.23) к виду

$$u'(x) + Q(x)u(x) = \lambda Du(x), \tag{3.25}$$



где  $D = \text{diag}(-i, i)$ ,  $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$ ,  $q_1(x) = \frac{1}{2}[q(1-x) - q(x)]e^{i\left[\int_0^x q(t) dt + \int_{1-x}^1 q(t) dt\right]}$ ,  
 $q_2(x) = \frac{1}{2}[q(1-x) - q(x)]e^{-i\left[\int_0^x q(t) dt + \int_{1-x}^1 q(t) dt\right]}$ .

**Замечание.** Легко проверить, что функции  $h_k(x)$  удовлетворяют соотношению

$$h_1(x) = e^{i\int_0^1 q(t) dt} h_2(1-x). \tag{3.26}$$

Для удобства обозначим в (3.25)  $\mu = -\lambda i$ . Тогда  $\lambda D = \mu \tilde{D}$ , где  $\tilde{D} = \text{diag}(1, -1)$  и уравнение (3.25) примет вид

$$u'(x) + Q(x)u(x) = \mu \tilde{D}u(x). \tag{3.27}$$

Уравнение (3.27) представляет собой двумерное уравнение Дирака. Для общего решения этого уравнения известна следующая асимптотическая формула

$$u(x, \mu) = U(x, \mu)e^{\mu \tilde{D}x} c, \tag{3.28}$$

где  $U(x, \mu) = E + O(\mu^{-1})$ ,  $E$  — единичная матрица  $2 \times 2$ ,  $c = (c_1, c_2)^T$  — произвольный вектор, матрица-функция  $O(\mu^{-1})$ , регулярна<sup>1</sup> в полуплоскостях  $\text{Re } \mu \geq 0$  и  $\text{Re } \mu \leq 0$  при  $|\mu|$  достаточно больших.

Дадим уточнение асимптотических формул (3.28).

**Теорема 3.2.** Если  $\text{Re } \mu \geq 0$ ,  $q_j(x) \in C^1[0, 1]$ , то для общего решения уравнения (3.27) имеем следующую асимптотическую формулу:

$$u(x, \mu) = U(x, \mu)e^{\mu \tilde{D}x} c,$$

где  $U(x, \mu) = (u_{ij}(x, \mu))_{i,j=1,2}$ ,  $c = (c_1, c_2)^T$  — произвольный вектор и

$$u_{11}(x, \mu) = 1 + \frac{1}{2\mu} \int_0^x q_1(t)q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{12}(x, \mu) = \frac{1}{2\mu} \left( q_2(x) - q_2(1)e^{-2\mu(1-x)} + \int_x^1 e^{2\mu(x-t)} q_2'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{21}(x, \mu) = -\frac{1}{2\mu} \left( q_1(x) - q_1(0)e^{-2\mu x} - \int_0^x e^{-2\mu(x-t)} q_1'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

$$u_{22}(x, \mu) = 1 - \frac{1}{2\mu} \int_0^x q_1(t)q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right).$$

**Доказательство.** Представляя уравнение (3.27) в покомпонентном виде:

$$u_1'(x) - \mu u_1(x) = -q_2(x)u_2(x), \tag{3.29}$$

$$u_2'(x) + \mu u_2(x) = -q_1(x)u_1(x), \tag{3.30}$$

интегрируя (3.29) и (3.30) и выполняя замену  $w_1(x) = u_1(x)e^{-\mu x}$ ,  $w_2(x) = u_2(x)e^{\mu x}$ , получим:

$$w_1(x) = c_1 - \int_0^x e^{-2\mu t} q_2(t)w_2(t) dt, \tag{3.31}$$

$$w_2(x) = c_2 - \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t)w_1(t) dt. \tag{3.32}$$

<sup>1</sup>Под регулярностью понимается аналитичность функции внутри области и непрерывность на границе.





Выполним подстановку (3.32) в (3.31):

$$w_1(x) = c_1 - c_2 \int_0^x e^{-2\mu t} q_2(t) dt + \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t) w_1(t) dt \int_t^x e^{-2\mu \tau} q_2(\tau) d\tau. \quad (3.33)$$

Полагая  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  и учитывая, что

$$\int_t^x e^{-2\mu \tau} q_2(\tau) d\tau = O(\mu^{-1} e^{-2\mu t}), \quad (3.34)$$

получим  $w_1(x) = 1 + O(\mu^{-1})$ , и отсюда из (3.32)  $w_2(x) = O(\mu^{-1} e^{2\mu x})$ .

Далее, положим  $c_2 = 1$  и подставим (3.31) в (3.32). Тогда

$$w_2(x) = 1 - \varphi(x, \mu) \left[ c_1 - \int_0^x e^{-2\mu t} q_2(t) w_2(t) dt \right] + \int_0^x e^{-2\mu t} q_2(t) \varphi(t, \mu) dt, \quad (3.35)$$

где  $\varphi(x, \mu) = \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t) dt = O(\mu^{-1} e^{2\mu x})$ . Полагая  $c_1 = \int_0^1 e^{-2\mu t} q_2(t) w_2(t) dt$ , получим из (3.35), что  $w_2(x) = 1 + O(\mu^{-1})$ , а  $w_1(x) = O(\mu^{-1} e^{-2\mu x})$ . Отсюда, в частности, легко следует (3.28).

Теперь дадим уточнение  $w_1(x)$  и  $w_2(x)$ . В случае  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  обозначим  $w_1(x) = w_{11}(x)$ ,  $w_2(x) = w_{21}(x)$ . Имеем:

$$\int_t^x e^{-2\mu \tau} q_2(\tau) d\tau = -\frac{1}{2\mu} e^{-2\mu \tau} q_2(\tau) \Big|_t^x + \frac{1}{2\mu} \int_t^x e^{-2\mu \tau} q_2'(\tau) d\tau.$$

Тогда, поставив найденную асимптотику для  $w_1(x) = w_{11}(x)$  в (3.33) при  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ , получим:

$$w_{11}(x) = 1 - \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t) dt \int_t^x e^{-2\mu \tau} q_2(\tau) d\tau + O(\mu^{-2}). \quad (3.36)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t) dt \int_t^x e^{-2\mu \tau} q_2(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t) \left[ -\frac{1}{2\mu} q_2(x) e^{-2\mu x} + \frac{1}{2\mu} q_2(t) e^{-2\mu t} \right] dt + \int_0^x e^{2\mu t} q_1(t) dt \frac{1}{2\mu} \int_t^x e^{-2\mu \tau} q_2'(\tau) d\tau = \\ &= O(\mu^{-2}) + \frac{1}{2\mu} \int_0^x q_1(t) q_2(t) dt + \frac{1}{2\mu} \int_0^x e^{-2\mu \tau} q_2'(\tau) d\tau \int_0^\tau e^{2\mu t} q_1(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_0^x q_1(t) q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \end{aligned}$$

то из (3.36) получим:

$$w_{11}(x) = 1 - \frac{1}{2\mu} \int_0^x q_1(t) q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \quad (3.37)$$

Подставим (3.37) в (3.31) при  $c_2 = 0$ . Тогда

$$w_2(x) = w_{21}(x) = -\int_0^x e^{2\mu t} q_1(t) dt + O\left(\frac{1}{\mu^2} e^{2\mu x}\right) =$$



$$= -\frac{1}{2\mu} \left[ q_1(x)e^{2\mu x} - q_1(0) - \int_0^x e^{2\mu t} q_1'(t) dt \right] + O\left(\frac{1}{\mu^2} e^{2\mu x}\right).$$

Аналогичные формулы получаются для  $w_1(x) = w_{12}(x)$ ,  $w_2(x) = w_{22}(x)$  при втором выборе  $c_1$  и  $c_2$ . Образуем матрицу  $W(x, \mu) = (w_{ij}(x))_1^2$ . Тогда матрица  $U(x, \mu) = e^{\mu D x} W(x, \mu) e^{-\mu D x}$  — искомая.  $\square$

Аналогичный результат может быть получен при  $\operatorname{Re} \mu \leq 0$ .

Всюду, далее, для определенности будем считать, что  $\operatorname{Re} \mu \geq 0$ , соответственно  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$  (противоположный случай рассматривается аналогично).

По лемме 3.2 имеем:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= c_1 e^{\mu x} [h_1(x)u_{11}(x) - ih_2(x)u_{21}(x)] + c_2 e^{-\mu x} [h_1(x)u_{12}(x) - ih_2(x)u_{22}(x)], \\ z_2(x) &= c_1 e^{\mu x} [-ih_1(x)u_{11}(x) + h_2(x)u_{21}(x)] + c_2 e^{-\mu x} [-ih_1(x)u_{12}(x) + h_2(x)u_{22}(x)] \end{aligned} \quad (3.38)$$

(здесь для удобства аргументы  $\lambda$  и  $\mu$  у соответствующих функций опущены). Из краевых условий (3.24) получим следующее уравнение для собственных значений:

$$\begin{vmatrix} u_{11}(0) - iu_{21}(0) & u_{12}(0) - iu_{22}(0) \\ e^{\frac{\mu}{2}} [h_2(\frac{1}{2})u_{21}(\frac{1}{2}) - h_1(\frac{1}{2})u_{11}(\frac{1}{2})] & e^{-\frac{\mu}{2}} [h_2(\frac{1}{2})u_{21}(\frac{1}{2}) - h_1(\frac{1}{2})u_{11}(\frac{1}{2})] \end{vmatrix} = 0. \quad (3.39)$$

Для получения простейших асимптотических оценок собственных значений используем сначала  $u_{ij}$  из (3.28). Обозначая  $[1] = 1 + O(\mu^{-1})$ , имеем

$$u_{kk}(x, \mu) = [1], \quad u_{kj}(x, \mu) = O(\mu^{-1}), \quad k, j = 1, 2, k \neq j. \quad (3.40)$$

Поэтому уравнение (3.39) примет вид

$$\begin{vmatrix} [1] & -i[1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \\ e^{\frac{\mu}{2}} \left[-h_1\left(\frac{1}{2}\right)[1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right] & e^{-\frac{\mu}{2}} \left[h_2\left(\frac{1}{2}\right)[1] + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right] \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что  $\frac{h_2(1/2)}{h_1(1/2)} = e^{-i \int_0^1 q(t) dt}$ , получим  $e^\mu = -ie^{-i \int_0^1 q(t) dt} [1]$ , откуда

$$\mu_n = -\left(\frac{\pi}{2} + \int_0^1 q(t) dt\right) i - 2\pi n i + O(\mu^{-1}),$$

и  $O(\mu^{-1}) = O(1/n)$ . Вычисляя теперь  $\lambda_n = i\mu_n$ , приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.3.** Для собственных значений  $\lambda_n$  задачи (3.23)–(3.24) имеют место асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots, \quad (3.41)$$

где  $\lambda_n^0 = 2\pi n + a$ ,  $a = \pi/2 + \int_0^1 q(t) dt$ , и  $n_0$  — некоторое достаточно большое натуральное число.

При этом собственные значения, достаточно большие по модулю, — простые.

**Замечание.** Следует иметь в виду, что существование собственных значений проводится традиционно с применением теоремы Руше. Для этого следует учесть, что асимптотические формулы (3.28) имеют место при  $\operatorname{Re} \mu \geq -h$ ,  $\operatorname{Re} \mu \leq h$ , где  $h > 0$  — любое.

Для того чтобы получить более тонкие оценки для собственных значений, воспользуемся в уравнении (3.39) значениями  $u_{ij}(1/2)$  и  $u_{ij}(0)$ , вычисленными по уточненным формулам из теоремы 3.2 при  $\mu = \mu_n$ .

**Лемма 3.12.** Для любого целого числа  $k$ , любой функции  $s(x) \in C[0, 1]$  и  $p = \pm 1$  имеем:

$$e^{k\mu_n} = \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (3.42)$$



$$\int_0^{1/2} e^{2p\mu_n t} s(t) dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.43}$$

$$\int_0^1 e^{2p\mu_n t} s(t) dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.44}$$

**Лемма 3.13.** Для значений функций  $u_{ij}(x, \mu_n)$  из теоремы 3.2 справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} u_{11}(0) &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & u_{12}(0) &= \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ u_{22}(0) &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & u_{21}(0) &= O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ u_{11}\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & u_{12}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ u_{22}\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & u_{21}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

(аргумент  $\mu_n$  для удобства опускаем).

**Теорема 3.4.** Для собственных значений  $\lambda_n$  задачи (3.23)–(3.24) имеют место уточненные асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots, \tag{3.45}$$

где  $\lambda_n^0$  определяется так же, как и в теореме 3.3.

**Доказательство.** Используя в уравнении (3.39) оценки из леммы 3.13, получим:

$$e^{-\mu/2} h_2\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = i e^{\mu/2} h_1\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),$$

и, следовательно,

$$e^\mu = -i e^{-i \int_0^1 q(t) dt} \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = e^{-\pi/2i - 2\pi n i - i \int_0^1 q(t) dt} e^{\frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Поэтому для  $\mu_n$  имеем следующие уточненные асимптотические формулы:

$$\mu_n = -\lambda_n^0 i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

откуда следует (3.45). □

Перейдем к исследованию асимптотики собственных функций задачи (3.5)–(3.6). В силу леммы 3.10 собственная функция, отвечающая значению  $\lambda_n$ , есть  $y_n(x) = z_1(x, \lambda_n)$ , где  $z_1(x, \lambda_n)$  определена соотношением из (3.38), и, следовательно,

$$\begin{aligned} y_n(x) &= c_1 [h_1(x) e^{-\lambda_n i x} u_{11}(x, \mu_n) - i h_2(x) e^{-\lambda_n i x} u_{21}(x, \mu_n)] + \\ &+ c_2 [h_1(x) e^{\lambda_n i x} u_{12}(x, \mu_n) - i h_2(x) e^{\lambda_n i x} u_{22}(x, \mu_n)]. \end{aligned} \tag{3.46}$$

**Теорема 3.5.** Для собственных функций оператора  $L$  имеют место асимптотические формулы:

$$y_n(x) = y_n^0(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots,$$

где  $y_n^0(x) = e^{\lambda_n^0 i(1-x)} h_2(1-x) - i e^{\lambda_n^0 i x} h_2(x)$ , функция  $h_2(x)$  та же, что и в лемме 3.11.

**Доказательство.** Воспользуемся оценками (3.40) и полученной из них асимптотикой (3.41) для собственных значений.



Из (3.46) и краевого условия  $y_n(0) = 0$  имеем:

$$c_1[u_{11}(0) - iu_{21}(0)] + c_2[u_{12}(0) - iu_{22}(0)] = c_1[1] - ic_2[1] = 0,$$

откуда  $c_1 = c_2 i[1]$ . Положим  $c_2 = 1$ , тогда  $c_1 = i[1]$ . Так как  $e^{-\lambda_n ix} = e^{-\lambda_n^0 ix}[1]$ ,  $e^{\lambda_n ix} = e^{\lambda_n^0 ix}[1]$ , то из (3.46) и (3.40) получим:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= i[1]e^{-\lambda_n ix} [h_1(x)[1] - ih_2(x)O\left(\frac{1}{n}\right)] + e^{\lambda_n ix} [h_1(x)O\left(\frac{1}{n}\right) - ih_2(x)[1]] = \\ &= ie^{-\lambda_n^0 ix}[1] \left[ h_1(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] + e^{\lambda_n^0 ix}[1] \left[ -ih_2(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \\ &= i \left( e^{-\lambda_n^0 ix} h_1(x) - e^{\lambda_n^0 ix} h_2(x) \right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Положим  $y_n^0(x) = i \left( e^{-\lambda_n^0 ix} h_1(x) - e^{\lambda_n^0 ix} h_2(x) \right)$ . Из (3.26) следует, что

$$h_1(x) = e^{-\pi/2i} e^{\pi/2i + i \int_0^1 q(t) dt} h_2(1-x) = -ie^{ai} h_2(1-x) = -ie^{\lambda_n^0 i} h_2(1-x).$$

Тогда

$$y_n^0(x) = e^{-\lambda_n^0 ix} e^{\lambda_n^0 i} h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix} h_2(x) = e^{\lambda_n^0 i(1-x)} h_2(1-x) - ie^{\lambda_n^0 ix} h_2(x),$$

откуда следует утверждение теоремы. □

Чтобы получить более тонкие оценки для собственных функций, используем уточненные оценки (3.45) для собственных значений и асимптотики из теоремы 3.2.

**Теорема 3.6.** *Для собственных функций оператора  $L$  имеют место уточненные асимптотические формулы:*

$$y_n(x) = y_n^0(x) + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где  $y_n^0(x)$  определяется так же как в теореме 3.5, и

$$\begin{aligned} \Omega_{1n}(x) &= \frac{1}{n} [b(x)e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)e^{\lambda_n^0 ix} + b(x)\alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix} + b(x)\alpha_n e^{\lambda_n^0 ix}], \\ \Omega_{2n}(x) &= \frac{1}{n} [b(x) \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_1' \left( \frac{x+t}{2} \right) dt + b(x) \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_1' \left( \frac{x-t}{2} \right) dt + \\ &+ b(x) \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_2' \left( \frac{x+t}{2} \right) dt + b(x) \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_2' \left( \frac{x-t}{2} \right) dt] \end{aligned}$$

(через  $b(x)$  обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора).

**Доказательство.** Из (3.46) и краевого условия  $y_n(0) = 0$ , используя оценки из леммы 3.13, имеем:

$$c_1 \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] + c_2 \left[ -i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] = 0,$$

откуда

$$c_1 = ic_2 \left[ 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]. \quad (3.47)$$

Так как

$$e^{\pm \lambda_n ix} = e^{\pm \lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{\alpha}{n} x + \frac{\alpha_n}{n} x \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то по теореме 3.2 получим:

$$e^{-\lambda_n ix} u_{11}(x, \mu_n) = e^{-\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{\alpha}{n} x + \frac{\alpha_n}{n} x \right) \left( 1 + \frac{b(x)}{n} \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$



$$= e^{-\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{b(x)}{n} + \frac{\alpha_n}{n} b(x) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_n ix} u_{22}(x, \mu) &= e^{\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{\alpha}{n} x + \frac{\alpha_n}{n} x \right) \left( 1 + \frac{b(x)}{n} \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ &= e^{\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{b(x)}{n} + \frac{\alpha_n}{n} b(x) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_n ix} u_{21}(x, \mu) &= e^{-\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{\alpha}{n} x + \frac{\alpha_n}{n} x \right) \left( \frac{b(x)}{n} + \frac{\alpha}{n} e^{2\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{2\lambda_n^0 i(x-t)} q_1'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \frac{b(x)}{n} e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} e^{\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)} q_1'(t) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_n ix} u_{12}(x, \mu) &= e^{\lambda_n^0 ix} \left( 1 + \frac{\alpha}{n} x + \frac{\alpha_n}{n} x \right) \left( \frac{b(x)}{n} + \frac{\alpha}{n} e^{2\lambda_n^0 i(1-x)} + \frac{\alpha}{n} \int_x^1 e^{-2\lambda_n^0 i(x-t)} q_2'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \frac{b(x)}{n} e^{\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} \int_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)} q_2'(t) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{\lambda_n^0 i(x-2t)} q_1'(t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-x}^x e^{\lambda_n^0 i\tau} q_1'\left(\frac{x-\tau}{2}\right) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x+t}{2}\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x-t}{2}\right) dt, \\ \int_x^1 e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)} q_2'(t) dt &= e^{-\lambda_n^0 ix} \int_0^1 e^{2\lambda_n^0 it} q_2'(t) dt - \int_0^x e^{-\lambda_n^0 i(x-2t)} q_2'(t) dt = \\ &= \alpha_n e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_2'\left(\frac{x-t}{2}\right) dt + \frac{1}{2} \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_2'\left(\frac{x+t}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_n ix} u_{21}(x, \mu) &= \frac{b(x)}{n} e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} e^{\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x+t}{2}\right) dt + \\ &+ \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_1'\left(\frac{x-t}{2}\right) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_n ix} u_{12}(x, \mu) &= \frac{b(x)}{n} e^{\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha}{n} e^{-\lambda_n^0 ix} + \frac{\alpha_n}{n} e^{-\lambda_n^0 ix} + \\ &+ \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{-\lambda_n^0 it} q_2'\left(\frac{x-t}{2}\right) dt + \frac{\alpha}{n} \int_0^x e^{\lambda_n^0 it} q_2'\left(\frac{x+t}{2}\right) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Полагая  $c_2 = 1$  и подставляя (3.47)–(3.51) в (3.46), получим утверждение теоремы.  $\square$

### 3.2.2. Теорема о разложении по собственным функциям

Обозначим через  $S_\delta$  область, полученную из  $\lambda$ -плоскости удалением всех чисел вида  $\pi n + a$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ),  $a = \pi/2 + \int_0^1 q(t)dt$ , вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса  $\delta$ .

Так как  $R_\lambda = O(1)$  в  $S_\delta$ , то стандартно получается

**Теорема 3.7.** Если  $f(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $f(0) = 0$ , то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) - S_r(f, x)\|_\infty = 0,$$



где  $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda$  — частичная сумма ряда Фурье функции  $f$  по собственным и присоединенным функциям оператора  $L$ .

Так как  $L$  — самосопряженный оператор, то по теореме 3.7 получим

**Лемма 3.14.** Система  $\{y_n(x)\}$  является ортогональной и полной в  $L_2[0, 1]$ , и  $\|y_n\|^2 = 2 + O(1/n)$ , где  $\|\cdot\|$  — норма в  $L_2[0, 1]$ .

### 3.2.3. Преобразование формального решения

Идеи А. Н. Крылова – В. А. Чернытина мы реализуем следующим образом. Ряд  $\Sigma$ , представляющий формальное решение рассматриваемой задачи по методу Фурье, мы берем в виде

$$\Sigma = S_0 + (\Sigma - \Sigma_0), \quad (3.52)$$

где  $\Sigma_0$  — ряд, являющийся решением некоторой специальной эталонной задачи, а  $S_0$  — сумма этого ряда, которая явно вычисляется. В свою очередь,  $\Sigma - \Sigma_0$  представляется в виде суммы двух составляющих, одна из которых — конечная сумма, а вторая — ряд, составленный из разностей соответствующих членов рядов  $\Sigma$  и  $\Sigma_0$ , причем этот ряд и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием, сходятся равномерно. Это последнее обстоятельство, а также то, что  $S_0$  есть решение эталонной задачи, позволяет весьма просто убедиться, что  $\Sigma = S_0 + (\Sigma - \Sigma_0)$  есть классическое решение исходной задачи при минимальных требованиях гладкости начальных данных.

В качестве эталонной задачи мы берем задачу (3.1)–(3.2), где  $q(x)$  заменяется на  $q_0(x) = \frac{1}{2}(q(x) + q(1-x))$ . Функция  $q_0(x)$  является симметричной:  $q_0(x) = q_0(1-x)$ . Соответствующий оператор обозначим  $L_0$ :

$$L_0 y(x) = y'(1-x) + q_0(x)y(x), \quad y(0) = 0.$$

Собственными значениями и собственными функциями этого оператора являются  $\lambda_n^0$  и  $y_n^0(x)$  из п. 3.1.

### 3.2.4. Решение задачи (3.1)–(3.2)

Согласно методу Фурье формальное решение задачи (3.1)–(3.2) имеет вид

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi(x)) e^{\lambda \beta i t} d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{1}{\|y_n\|^2} (\varphi, y_n) y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t}, \quad (3.53)$$

где  $r$  таково, что при  $|\lambda_n| > r$  все собственные значения простые.

Представим ряд (3.53) в виде (3.52), где

$$\Sigma_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\varphi, y_n^0)}{\|y_n^0\|^2} y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t}.$$

Для суммы  $S_0$  ряда  $\Sigma_0$  справедливо утверждение.

**Лемма 3.15.** Если  $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , то имеет место формула

$$S_0 = e^{a \beta i t} [p(1-x)f_0(1-x + \beta t) - ip(x)f_0(x + \beta t)], \quad (3.54)$$

где  $f_0(x)$  — непрерывно дифференцируемая на всей оси функция, периодическая с периодом 1, и  $f_0(x) = \frac{1}{2p(x)} [i\varphi(x) + \varphi(1-x)]$  при  $x \in [0, 1]$ ;  $p(x) = e^{iax - i \int_0^x q(t) dt}$ ,  $a = \pi/2 + \int_0^1 q(t) dt$ .

Далее, положим

$$\Sigma - \Sigma_0 = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

где

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} ((R_\lambda - R_\lambda^0) \varphi(x)) e^{\lambda \beta i t} d\lambda, \quad (3.55)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{|\lambda_n|>r} \left[ \frac{(\varphi, y_n)}{\|y_n\|^2} y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t} - \frac{(\varphi, y_n^0)}{\|y_n^0\|^2} y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t} \right], \quad (3.56)$$

$R_\lambda^0$  — резольвента оператора  $L_0$ .





**Лемма 3.16.** *Имеет место формула*

$$u_2(x, t) = \sum_{|\lambda_n| > r} \left[ \frac{(g, y_n) y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t}}{\|y_n\|^2 \lambda_n} - \frac{(g, y_n^0) y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} \right] + \sum_{|\lambda_n| > r} \frac{(g_2, y_n^0) y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 (\lambda_n^0)^2}, \quad (3.57)$$

где  $g = L\varphi$ ,  $g_1 = g - L_0\varphi$ ,  $g_2 = L_0g_1$  (здесь  $g_1$  из области определения оператора  $L_0$ , так как  $q(x) \in C^1[0, 1]$ ).

**Доказательство.** Из тождества Гильберта имеем:

$$R_\lambda \varphi = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda g}{\lambda},$$

$$R_\lambda^0 \varphi = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0(L_0\varphi)}{\lambda} = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0(g - g_1)}{\lambda} = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda} - \frac{R_\lambda^0 g_1}{\lambda} = -\frac{\varphi}{\lambda} + \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda} + \frac{g_1}{\lambda^2} - \frac{R_\lambda^0 g_2}{\lambda^2}.$$

Тогда

$$R_\lambda \varphi - R_\lambda^0 \varphi = \frac{(R_\lambda - R_\lambda^0)g}{\lambda} - \frac{g_1}{\lambda^2} + \frac{R_\lambda^0 g_2}{\lambda^2},$$

и (3.57) следует из представления слагаемых в (3.56) через интегралы от резольвенты по контурам достаточно малого радиуса с центрами в  $\lambda_n$ .  $\square$

**Лемма 3.17.** *Если  $g(x) \in C[0, 1]$ , то  $(g, \Omega_{jn}) = \alpha_n/n$  ( $j = 1, 2$ ).*

**Доказательство.** Утверждение леммы для  $j = 1$  очевидно. Далее,

$$\int_0^1 b(x) dx \int_0^x e^{\lambda_n^0 i t} q_1' \left( \frac{x+t}{2} \right) dt = \int_0^1 e^{\lambda_n^0 i t} dt \int_t^1 b(x) q_1' \left( \frac{x+t}{2} \right) dx = \alpha_n,$$

и, аналогично рассмотрев остальные слагаемые в  $\Omega_{2n}$ , получим, что и  $(g, \Omega_{2n}) = \alpha_n/n$ .  $\square$

**Лемма 3.18.** *Ряды в (3.57) и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по  $x$  и  $t$ , равномерно сходятся по  $x \in [0, 1]$  и  $t \in [-A, A]$ , где  $A > 0$  — любое.*

**Доказательство.** Согласно неравенствам Коши – Буняковского и Бесселя ряды  $\sum \frac{|(g, y_n)|}{\|y_n\| \cdot |\lambda_n|}$  и  $\sum \frac{|(g, y_n^0)|}{\|y_n^0\| \cdot |\lambda_n^0|}$  сходятся, откуда следует равномерная сходимость рядов в (3.57). Рассмотрим ряд

$$\sum_{|\lambda_n| > r} \left[ \frac{(g, y_n) y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t}}{\|y_n\|^2 \lambda_n} - \frac{(g, y_n^0) y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} \right]. \quad (3.58)$$

Используя асимптотические формулы для  $\lambda_n$ ,  $y_n(x)$ , имеем:

$$\frac{(g, y_n) y_n'(x) e^{\lambda_n \beta i t}}{\|y_n\|^2 \lambda_n} = \frac{(g, y_n) (y_n^0(x))' e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} + (g, y_n) O \left( \frac{1}{n} \right).$$

Поэтому ряд, полученный почленным дифференцированием по  $x$  ряда (3.58), имеет следующее представление:

$$\sum_{|\lambda_n| > r} \left[ \frac{(g, y_n - y_n^0) (y_n^0(x))' e^{\lambda_n^0 \beta i t}}{\|y_n^0\|^2 \lambda_n^0} + (g, y_n) O \left( \frac{1}{n} \right) \right]. \quad (3.59)$$

В силу леммы 3.17  $(g, y_n - y_n^0) = \alpha_n/n$ , где  $\sum \alpha_n^2 < \infty$ . Отсюда следует равномерная сходимость первого ряда в (3.59). Для второго слагаемого в (3.59) она очевидна. Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда, полученного из (3.58) почленным дифференцированием по  $t$ . Для второго слагаемого в (3.57) утверждение леммы очевидно.  $\square$

**Теорема 3.8.** *Если  $q(x)$  вещественна,  $q(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ , то классическое решение задачи (3.1)–(3.2) существует и имеет вид*

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + S_0(x, t),$$

где  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  определены по формулам (3.55), (3.56), а  $S_0(x, t)$  по формуле (3.54).



**Доказательство.** В силу лемм 3.15 и 3.18  $u(x, t)$  дифференцируема по обоим переменным. Легко проверяется, что  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям (3.2). Докажем, что  $u(x, t)$  удовлетворяет (3.1). Обозначим составляющие в (3.55), (3.56) через  $u_{kj}$ , т. е.  $u_1 = u_{11} - u_{12}$ ,  $u_2 = u_{21} - u_{22}$ . Тогда очевидно, что

$$u_{11} + u_{21} = u, \quad u_{12} + u_{22} = \Sigma_0. \quad (3.60)$$

Обозначим через  $Du$  следующее дифференциальное выражение:

$$Du = \frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x}.$$

Тогда имеем:

$$Du = Du_1 + Du_2 + DS_0 = Du_{11} - Du_{12} + Du_2 + DS_0. \quad (3.61)$$

Но  $DS_0 = q_0(x)S_0$ ,  $Du_1 = Du_{11} - Du_{12} = q(x)u_{11} - q_0(x)u_{12}$ ,

$$Du_2 = \sum_{|\lambda_n| > r} \left[ q(x) \frac{(\varphi, y_n)}{\|y_n\|^2} y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t} - q_0(x) \frac{(\varphi, y_n^0)}{\|y_n^0\|^2} y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t} \right].$$

Поэтому из (3.60) и (3.61) получаем  $Du_1 + Du_2 = q(x)u - q_0(x)\Sigma_0$ , а значит,

$$Du = q(x)u - q_0(x)\Sigma_0 + q_0(x)S_0 = q(x)u.$$

Теорема доказана. □

#### 4. ДРУГИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем в п. 4.1–4.3 без доказательств другие результаты о смешанных задачах с инволюцией.

##### 4.1. Смешанная задача в периодическом случае

Рассматривается смешанная задача следующего вида [33]:

$$\frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], t \in (-\infty, +\infty), \quad (4.1)$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (4.2)$$

где  $\beta$  — вещественное число,  $\beta \neq 0$ ,  $q(x) \in C^1[0, 1]$  и вещественна. Естественные минимальные условия на  $\varphi(x)$ :  $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi^j(0) = \varphi^j(1)$ , ( $j = 0, 1$ ).

Введем операторы  $L$  и  $L_0$ :

$$\begin{aligned} Ly &= y'(1-x) + q(x)y(x), & y(0) &= y(1), \\ L_0y &= y'(1-x) + q_0(x)y(x), & y(0) &= y(1), \end{aligned}$$

$$q_0(x) = \frac{1}{2} [q(x) + q(1-x)].$$

**Лемма 4.1.** Собственные значения оператора  $L_0$  простые и равны  $\lambda_n^0 = 2\pi n + a$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $a = \int_0^1 q(t) dt$ , а соответствующие собственные функции

$$y_n^0(x) = u(1-x)e^{\lambda_n^0 i(1-x)} - iu(x)e^{\lambda_n^0 ix},$$

где  $u(x) = \exp\left(-i \int_0^x q_0(\tau) d\tau\right)$ .

Решение эталонной задачи (4.1)–(4.2), когда  $q(x)$  есть  $q_0(x)$ , полученное по методу Фурье, есть

$$u_0(x, t) = e^{a\beta i t} [p(1-x)f_0(1-x + \beta t) - ip(x)f_0(x + \beta t)], \quad (4.3)$$

где  $p(x) = \exp\left\{i\left(ax - \int_0^x q_0(t) dt\right)\right\}$ ,  $f_0(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$ , периодична с периодом 1, причем

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)} [i\varphi(x) + \varphi(1-x)], x \in [0, 1].$$



**Лемма 4.2.** Собственные значения  $\lambda_n$  оператора  $L$ , достаточно большие по модулю, простые и имеют асимптотику:

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots$$

**Теорема 4.1.** Классическое решение задачи (4.1)–(4.2) существует и имеет вид

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} ((R_\lambda - R_\lambda^0) \varphi)(x) e^{\lambda \beta i t} d\lambda,$$

$R_\lambda, R_\lambda^0$  – резольвенты операторов  $L$  и  $L_0$ ,

$$\Sigma_2 = \sum_{|\lambda_n| > r} \left[ \frac{(\varphi, y_n)}{\|y_n\|^2} y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t} - \frac{(\varphi, y_n^0)}{2} y_n^0(x) e^{\lambda_n^0 \beta i t} \right].$$

Ряд  $\Sigma_2$  и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по  $x$  и  $t$ , равномерно сходятся при  $x \in [0, 1]$  и  $t \in [-A, A]$  при любом  $A > 0$ .

Схожий результат получен в [32] для задачи

$$\frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q_1(x)u(x, t) + q_2(x)u(1-x, t), \quad (4.4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (4.5)$$

при условиях  $q_j(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $q_1(x)$  – вещественна,  $q_2(x) = \overline{q_2(1-x)}$ ,  $q_2(0) = 0$ ,  $\beta \neq 0$  – вещественное число. Естественные минимальные требования те же, что и в параграфе 3.

#### 4.2. Смешанная задача для неоднородного уравнения

Рассматривается задача вида [33]

$$\frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (4.6)$$

$$x \in [0, 1], t \in (-\infty, +\infty),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (4.7)$$

Считаем, что  $\beta, q(x)$  те же, что и в п. 4.1. Формальное решение по методу Фурье возьмем в виде:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} ((R_\lambda(\varphi + g))(x)) e^{\lambda \beta i t} d\lambda + \sum_{|\lambda_n| > r} (\varphi(\xi) + g_n(\xi), y_n(\xi)) \frac{y_n(x)}{\|y_n\|^2} e^{\lambda_n \beta i t},$$

где  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ ,  $Ly = y'(1-x) + q(x)y(x)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\lambda$  – спектральный параметр,  $E$  – единичный оператор,  $g = g(x, t, \lambda) = \beta i \int_0^t e^{-\lambda \beta i \tau} f(x, \tau) d\tau$ ,  $g_n(\xi) = g(\xi, t, \lambda_n)$ ,  $\lambda_n$  и  $y_n(x)$  – собственные значения и собственные функции оператора  $L$  соответственно.

**Теорема 4.2.** Пусть  $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$ ,  $f(x, t)$ ,  $f'_x(x, t)$  непрерывны по  $x \in [0, 1]$  и  $t \in (-\infty, \infty)$ , причем  $f(0, t) = f'_x(1, t) = 0$ . Классическое решение задачи (4.6)–(4.7) существует и имеет вид

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

где  $u_1(x, t)$  есть решение задачи (4.6)–(4.7) при  $f(x, t) \equiv 0$  (см. параграф 3), а  $u_2(x, t) = \beta i \int_0^t w(x, t - \tau, \tau) d\tau$  и  $w(x, t, \tau)$  есть классическое решение задачи

$$\frac{1}{\beta i} \frac{\partial w(x, t, \tau)}{\partial t} = \frac{\partial w(\xi, t, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q(x)w(x, t, \tau),$$

$$w(0, t, \tau) = 0, \quad w(x, 0, \tau) = f(x, \tau), \quad \tau - \text{параметр.}$$



### 4.3. Смешанная задача на геометрическом графе

Рассматривается смешанная задача с инволюцией на простейшем графе из двух ребер: одно ребро образует цикл-петлю, а второе примыкает к нему. Смешанная задача в таком случае берется в виде [34]

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x}, \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{i} \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q(x)u_2(x, t), \quad (4.9)$$

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) = u_2(0, t), \quad (4.10)$$

$$u_1(x, t) = \varphi_1(x), \quad u_2(x, t) = \varphi_2(x). \quad (4.11)$$

Вид графа позволяет задать простейшее уравнение (без инволюции) (4.8) на петле, а вот на другом ребре надо обязательно брать уравнение с инволюцией, так как иначе соответствующая спектральная задача нерегулярна по Биркгофу [36], и потому решение смешанной задачи того же вида, что и выше, получить нельзя. Предполагаем, что  $q(x) \in C^1[0, 1]$  и вещественна,

$$\varphi_k(x) \in C^1[0, 1], \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0), \varphi_2'(1) + q(0)\varphi_2(0) + i\varphi_1'(0) = 0 \quad (4.12)$$

(последнее условие в силу системы (4.8)–(4.9)).

По методу Фурье соответствующая (4.8)–(4.10) спектральная задача есть

$$Ly = \lambda y, \quad y = (y_1, y_2)^T$$

( $T$  — знак транспонирования), где  $L$  — следующий оператор:

$$Ly = (-iy_1'(x), y_2'(1-x) + q(x)y_2(x))^T, \quad y_1(0) = y_1(1) = y_2(0).$$

**Лемма 4.3.** Если  $a = \pi/2 + \int_0^1 q(t) dt$  не кратно  $2\pi$ , то собственные значения оператора  $L$ , достаточно большие по модулю, простые и образуют две серии:  $\lambda'_n = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda''_n = \mu_n + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}$  ( $n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots$ ), где  $\mu_n = 2\pi n + a$ . При этом все собственные значения оператора  $L$  вещественные.

Симметричным случаем задачи (4.8)–(4.11) мы будем называть задачу, когда вместо  $q(x)$  берется  $q_0(x) = \frac{1}{2}[q(x) + q(1-x)]$ , и оператор  $L$  в этом случае называем  $L_0$ . Оператор  $L^*$  ( $L_0^*$ ) имеет вид  $L^*z = Lz$  ( $L_0^*z = L_0z$ ) с краевыми условиями  $z_2(0) = z_1(1) - z_1(0) + iz_2(1) = 0$ , одними и теми же и для  $L^*$ , и для  $L_0^*$ . Собственные значения  $L$  ( $L_0$ ) и  $L^*$  ( $L_0^*$ ) совпадают, и для  $L_0$  они те же, что и в лемме 4.3, но теперь надо брать  $\alpha = \alpha_n = 0$ .

Лемма 4.3 позволяет изучить асимптотику собственных функций операторов  $L$  и  $L^*$  как и в параграфе 3 (не приводим ее из-за громоздкости).

В симметричном случае ряды формального решения по методу Фурье наподобие уравнения струны точно вычисляются, и тем самым, получаем решение  $u_0(x, t)$  смешанной задачи в этом случае. Соответствующую формулу здесь не приводим из-за громоздкости.

Формальное решение задачи (4.8)–(4.11) по методу Фурье есть

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi(x)) e^{\lambda it} d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{(\varphi, z(x, \lambda_n))}{\gamma(\lambda_n)} y(x, \lambda_n) e^{\lambda_n it}, \quad (4.13)$$

где  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))^T$ ,  $R_\lambda$  — резольвента оператора  $L$ ,  $y(x, \lambda_n)$  ( $z(x, \lambda_n)$ ) — собственные вектор-функции оператора  $L$  ( $L^*$ ) для собственного значения  $\lambda_n$ ,  $\gamma(\lambda_n) = (y(x, \lambda_n), z(x, \lambda_n))$ . Представим (4.13) в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} ((R_\lambda - R_\lambda^0) \varphi)(x) e^{\lambda it} d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} A_n(x, t), \quad (4.14)$$



где

$$A_n(x, t) = \frac{(L\varphi, z(x, \lambda_n))}{\lambda_n \gamma(\lambda_n)} y(x, \lambda_n) e^{\lambda_n i t} - \frac{(L_0 \varphi, z^0(x, \lambda_n^0))}{\lambda_n^0 \gamma} y^0(x, \lambda_n^0) e^{\lambda_n^0 i t},$$

$\lambda_n^0$  — собственное значение  $L_0$ ,  $y^0(x, \lambda_n^0)$  ( $z^0(x, \lambda_n^0)$ ) — собственные функции  $L_0$  ( $L_0^*$ ),  $\gamma = (y^0(x, \lambda_n^0), z^0(x, \lambda_n^0))$  и  $\gamma$  не зависит от  $n$ .

Формула (4.14) так же как и в параграфе 3, приводит к следующему результату.

**Теорема 4.3.** Если  $q(x) \in C^1[0, 1]$  и вещественна,  $q(0) = q(1)$ ,  $a = \frac{\pi}{2} + \int_0^1 q(t) dt$  не кратно  $2\pi$ ,  $\varphi_k(x)$  удовлетворяют (4.12), то классическое решение задачи (4.9)–(4.11) существует и имеет вид (4.14). Ряды в (4.14) и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием по  $x$  и  $t$ , сходятся абсолютно и равномерно по  $x \in [0, 1]$  и  $t \in [-A, A]$  при любом  $A > 0$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

### Библиографический список

1. Стеглов В. А. Основные задачи математической физики. М. : Наука, 1983. 432 с.
2. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1953. 360 с.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики : в 4 т. М. : Гостехиздат, 1953. Т. 4. 804 с.
4. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М. : Гостехиздат, 1953, 282 с.
5. Ильин В. А. Избранные труды : в 2 т. М. : Изд-во ООО «Макс-пресс», 2008. Т. 1. 727 с.
6. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН. 1960. Т. 15, вып. 2. С. 97–154.
7. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.
8. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
9. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 398 с.
10. Lanczos C. Discourse of Fourier Series. Edinburgh ; London : Oliver and Boyd, Ltd., 1966. 255 p.
11. Нерсисян А. Б. Ускорение сходимости разложений по собственным функциям // Докл. НАН Армении. 2007. Т. 107, № 2. С. 124–131.
12. Чернятин В. А. К уточнению теоремы существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 9. С. 1569–1576.
13. Чернятин В. А. К решению одной смешанной задачи для неоднородного уравнения с частными производными четвертого порядка // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 2. С. 343–345.
14. Чернятин В. А. О необходимых и достаточных условиях существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 5. С. 1080–1083.
15. Чернятин В. А. Классическое решение смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения // Численные методы решения краевых и начальных задач для дифференциальных уравнений. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. С. 17–36.
16. Чернятин В. А. К уточнению теоремы существования решения смешанной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности // Численный анализ : методы, алгоритмы, программы. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. С. 126–132.
17. Чернятин В. А. О разрешимости смешанной задачи для неоднородного гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 4. С. 717–720.
18. Андреев А. А. О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом // Дифференциальные уравнения и их приложения : тр. 2-го междунар. семинара. Самара, 1998. С. 5–18.
19. Dankl Ch. G. Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 311, № 1. P. 167–183.
20. Платонов С. С. Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов // Тр. Петрозавод. гос. ун-та. Сер. математическая. 2004. Вып. 11. С. 15–35.
21. Хромов А. П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–949. DOI: 10.4213/mzm1472.
22. Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С., Хромов А. П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. АН. 2007. Т. 414, № 4. С. 443–446.
23. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.
24. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Изв. АН. Сер. математическая. 2012. Т. 76, № 6. С. 106–121.
25. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функциональ-



но-дифференциального оператора переменной структуры // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 20–25.

26. Корнев В. В., Хромов А. П. Оператор интегрирования с инволюцией, имеющей степенную особенность // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 18–33.

27. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 3–10.

28. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Обоснование метода Фурье в смешанных задачах с инволюцией // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 3–12.

29. Халова В. А., Хромов А. П. Интегральный оператор с негладкой инволюцией // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 3, вып. 1, ч. 1. С. 40–45.

30. Хромов А. П. Смешанная задача для дифференци-

ального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 17–22.

31. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 2. С. 151–154.

32. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2011. Т. 51, № 12. С. 2233–2246.

33. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 2. С. 151–154.

34. Бурлуцкая М. Ш. Смешанная задача с инволюцией на графе из двух ребер с циклом // Докл. АН. 2012. Т. 447, № 5. С. 479–482.

35. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 392 с.

36. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

## Classical Solution by the Fourier Method of Mixed Problems with Minimum Requirements on the Initial Data

A. P. Khromov<sup>1</sup>, M. Sh. Burlutskaia<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

<sup>2</sup>Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 394006, Voronezh, Russia, bmsh2001@mail.ru

The article gives a new short proof the V. A. Chernyatin theorem about the classical solution of the Fourier method of the mixed problem for the wave equation with fixed ends with minimum requirements on the initial data. Next, a similar problem for the simplest functional differential equation of the first order with involution in the case of the fixed end is considered, and also obtained definitive results. These results are due to a significant use of ideas A. N. Krylova to accelerate the convergence of series, like Fourier series. The results for other similar mixed problems given without proof.

**Key words:** mixed problem, Fourier method, involution, classical solution, asymptotic form of eigenvalues and eigenfunctions, Dirac system.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00238).*

### References

1. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [The main tasks of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1983. 432 p. (in Russian).
2. Petrovsky I. G., *Lectures on partial differential equations*. Dover Publ. Inc., 1992, 245 p. (Russian ed. : Petrovskii I. G. *Lektsii ob uravneniiakh s chastnymi proizvodnymi*. Moscow, GITTL, 1953, 360 p.).
3. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki* [A Course of Higher Mathematics : in 5 vol., vol. 4]. Moscow, Gostekhizdat, 1953. 804 p. (in Russian).
4. Ladyzhenskaya O. A. *Smeshannaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Mixed problem for a hyperbolic equation]. Moscow, Gostekhizdat, 1953, 282 p. (in Russian).
5. Il'in V. A. *Izbrannye trudy* [Selected works : in 2 vol.]. Moscow, ООО «Maks-press», 2008, vol. 1 727 p. (in Russian).
6. Il'in V. A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Rus. Math. Surv.*, 1960, vol. 15, iss. 1, pp. 85–142.
7. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoii zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991. 112 p. (in Russian).
8. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniiakh matematicheskoi fiziki, imeiushchikh prilozheniia v tekhnicheskikh voprosakh* [On some differential equations of mathematical physics with applications in technical matters]. Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
9. Krylov A. N. *Lektsii o priblizhennykh vychisleniiakh* [Lectures on approximate calculations]. Moscow; Leningrad, GITTL, 1950. 398 p. (in Russian).





10. Lanczos C. *Discourse of Fourier Series*. Edinburgh; London, Oliver and Boyd, Ltd., 1966, 255 p.
11. Nersesyan A. B. Acceleration of convergence of eigenfunction expansions. *Dokl. NAN Armenii*, 2007, vol. 107, no. 2, pp. 124–131 (in Russian).
12. Chernyatin V. A. To clarify the theorem of existence of the classical solution of the mixed problem for one-dimensional wave equation. *Differential Equations*, 1985, vol. 21, no. 9, pp. 1569–1576 (in Russian).
13. Chernyatin V. A. To the decision of one of the mixed problem for an inhomogeneous equation with partial derivatives of fourth order. *Differential Equations*, 1985, vol. 21, no. 2, pp. 343–345 (in Russian).
14. Chernyatin V. A. On necessary and sufficient conditions for the existence of the classical solution of the mixed problem for one-dimensional wave equation. *Dokl. AN SSSR*, 1986, vol. 287, no. 5, pp. 1080–1083 (in Russian).
15. Chernyatin V. A. Classical solution of the mixed problem for the inhomogeneous hyperbolic equation. *Chislennyye metody resheniya kraevykh i nachal'nykh zadach dlia differentsial* [Numerical methods for solving boundary value and initial problems for differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1986, pp. 17–36.
16. Chernyatin V. A. To clarify the existence theorem for solutions of the mixed problem for the inhomogeneous heat equation. *Chislennyi analiz : metody, algoritmy, programmy* [Numerical analysis : methods, algorithms, programs]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1988, pp. 126–132 (in Russian).
17. Chernyatin V. A. On the solvability of the mixed problem for the inhomogeneous hyperbolic equations. *Differential Equations*. 1988, vol. 24, no. 4, pp. 717–720 (in Russian).
18. Andreev A. A. About the correctness of boundary problems for some equations with calimanesti shift. *Differentsial'nye uravneniia i ikh prilozheniia : trudy 2-go mezhdunarodnogo seminara* [Differential equations and their applications : proceedings of the 2nd international workshop]. Samara, 1998, pp. 5–18 (in Russian).
19. Dankl Ch. G. Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1989, vol. 311, no. 1, pp. 167–183.
20. Platonov S. S. The eigenfunction expansion for some functional-differential operators. *Trudy Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. matematicheskaia* [Proceedings of Petrozavodsk State University. Ser. Math.], 2004, iss. 11, pp. 15–35 (in Russian).
21. Khromov A. P. Inversion of integral operators with kernels discontinuous on the diagonal. *Math. Notes*. 1998, vol. 64, no. 6, pp. 804–813. DOI: 10.4213/mzm1472.
22. Burlutskaya M. Sh., Kurdyumov V. P., Lukonina A. S., Khromov A. P. A functional-differential operator with involution. *Doklady Math.*, 2007, vol. 75, no. 3, pp. 399–402.
23. Kornev V. V., Khromov A. P. Equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. *Sbornik : Mathematics*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1451–1469. DOI: 10.4213/sm601
24. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz bases of eigenfunctions of integral operators with kernels discontinuous on the diagonals. *Izvestiya : Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 1175–1189. DOI: 10.4213/im7797.
25. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. On Riesz bases of the eigen and associated functions of the functional-differential operator with a variable structure. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2007, vol. 7, iss. 2, pp. 20–25 (in Russian).
26. Kornev V. V., Khromov A. P. Operator integration with an involution having a power singularity. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 4, pp. 18–33 (in Russian).
27. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. On the same theorem on a equiconvergence at the whole segment for the functional-differential operators. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 4, pt. 1, pp. 3–10 (in Russian).
28. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Substantiation of Fourier method in mixed problem with involution. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 4, pp. 3–12 (in Russian).
29. Khalova V. A., Khromov A. P. Integral Operators with Non-smooth Involution. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 40–45 (in Russian).
30. Khromov A. P. The mixed problem for the differential equation with involution and potential of the special kind. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 4, pp. 17–22 (in Russian).
31. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Classical solution of a mixed problem with involution. *Doklady Math.*, 2010, vol. 82, no. 3, pp. 865–868.
32. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 12, pp. 2102–2114.
33. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial-boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 783–786.
34. Burlutskaya M. Sh. A mixed problem with an involution on the graph of two edges with the cycle. *Doklady Math.*, 2012, vol. 447, no. 5, pp. 479–482.
35. Marchenko V. A. *Sturm–Liouville Operators and Applications*. Kiev, Naukova Dumka, 1977, 392 p. (in Russian).
36. Naymark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 p. (in Russian).



# МЕХАНИКА

УДК 539.374

## ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА ДЕЙСТВИЯ ПО РАСТУЩЕЙ ОБЛАСТИ

В. А. Ковалев<sup>1</sup>, Ю. Н. Радаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, профессор кафедры управления проектами и инвестициями, Московский городской университет управления Правительства Москвы, kovalev.kam@gmail.com

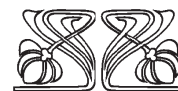
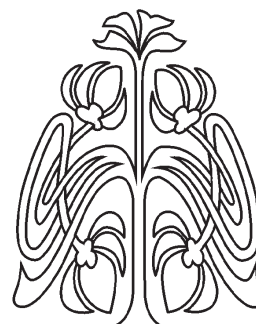
<sup>2</sup>Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

В работе рассматриваются полевые теории механики и физики континуума, основой которых выступает принцип наименьшего действия. Действие в формулировках указанного принципа представляет собой интегральный функционал, варьирование которого осуществляется по физическим полевым переменным при неварьируемых пространственно-временных координатах. Однако теория вариационных симметрий действия и само понятие об инвариантных вариационных функционалах требует привлечения более широких способов варьирования, включающих трансформацию области интегрирования, т. е. изменение пространственно-временных координат. Последнее обстоятельство характерно также при выводе «естественных» граничных условий на неизвестных поверхностях сильного разрыва поля, границах соприкосновения различных фаз и иных неизвестных а priori поверхностей, варьирование которых допускается принципом наименьшего действия. Опираясь на теорию однопараметрических групп преобразований, в работе получены общие формы первой вариации действия при трансформациях пространственно-временных координат и физических полей с помощью групп преобразований, присущих четырехмерным формулировкам полевых теорий физики и механики. При этом учитываются «навязанные» граничные условия на поверхности, ограничивающей варьлируемую область.

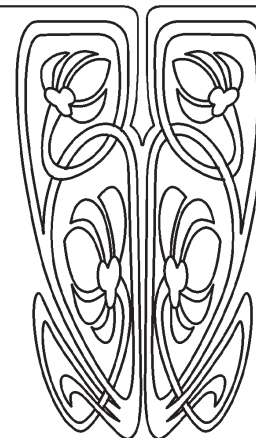
*Ключевые слова:* поле, действие, принцип наименьшего действия, уравнения поля, группа преобразований, группа Ли, инфинитезимальный генератор, вариация, варьлируемая область, ограничение.

### 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ: ПОЛЕВЫЕ ТЕОРИИ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ КONTИНУУМА

Современная механика и физика сплошных деформируемых сред по целому ряду направлений может развиваться только на основе теоретико-полевого подхода. Это обстоятельство характерно для сложных континуумов с экстрастепенями свободы и нелокальностью соответствующих математических представлений. Теории поля обладают одним неоспоримым аналитическим преимуществом — возможностью их вывода из одного вариационного функционала. Важными элементами являются также ковариантность уравнений поля и наличие вариационных симметрий поля. Последние позволяют находить законы сохранения, которые выступают в роли «первых интегралов» дифференциальных уравнений поля.



**НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ**





Классические теории поля (см., например, монографии [1, 2]) основываются на предположении о том, что непрерывное физическое поле математически представляется некоторым интегральным функционалом  $\mathcal{J}$ , который по историческим причинам называется действием:

$$\mathcal{J} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X. \quad (1.1)$$

Здесь характерная для теории поля символика, развитая в [1, 2], имеет следующий смысл:  $\mathcal{L}$  — «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия);  $\varphi^k$  — упорядоченный массив физических полевых переменных;  $X^\beta$  ( $\beta = 1, 2, 3, 4$ ) — четыре пространственно-временные координаты<sup>1</sup>. Заметим, что в традиционных текстах, посвященных классической теории поля, действие и функционал действия обычно обозначаются через  $S$ .

Под символом  $d^4 X$  в формуле (1.1) мы понимаем «естественный» пространственно-временной элемент объема

$$d^4 X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4. \quad (1.2)$$

Поэтому  $\mathcal{L}$  — «естественная» плотность лагранжиана. Инвариантный (собственный) элемент объема  $d^4 \tau$  — четырехмерного пространственно-временного многообразия — определяется согласно

$$d^4 \tau = \sqrt{g} dX^1 dX^2 dX^3 dX^4, \quad (1.3)$$

где  $g$  — определитель (точнее, его абсолютная величина) матрицы, составленной из метрических коэффициентов пространственно-временного многообразия  $g_{\alpha\beta}$ . В том случае, когда метрика пространства – времени гиперболична, обычно вместо  $\sqrt{g}$  пишут  $\sqrt{-g}$ . Часто для краткости применяется также сокращенное обозначение  $\sqrt{\phantom{x}}$ .

Через  $\partial_\beta$  в математическом оформлении действия, данном (1.1) и далее, обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате  $X^\beta$ ; в соответствии с цепным правилом дифференциального исчисления находим:

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\text{expl}} + \sum_{s \geq 0} (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)}, \quad (1.4)$$

где символом  $\partial_\beta^{\text{expl}}$  указывается оператор *частного* дифференцирования по *явному* вхождению переменной  $X^\beta$ .

В теориях поля лагранжиан  $\mathcal{L}$  всегда приходится рассматривать как функцию пространственно-временных координат, физических полей и градиентов физических полей:

$$\varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots, X^\gamma. \quad (1.5)$$

Для теории поля числовая *величина* действия не столь важна, как его аналитическая *форма*, задаваемая лагранжианом  $\mathcal{L}$ , который определяется (помимо всего прочего) выбором тех или иных координатных систем в пространственно-временном многообразии и математического представления полевых переменных. Поэтому нигде не может возникнуть необходимость дальнейшей спецификации области интегрирования в определении интеграла действия. Вот почему мы не будем явно указывать область интегрирования в (1.1) и вообще не будем каким-то образом ее специфицировать, тем более что она будет предполагаться варьируемой. С тем чтобы отличать интегралы по области от интегралов по границе области, границу неспецифицированной 4-области интегрирования (в данном случае — замкнутая трехмерная гиперповерхность в четырехмерном пространстве – времени) будем обозначать символом  $\partial$ .

<sup>1</sup>В абстрактном случае можно развивать теории поля на  $M$ -мерном многообразии. Большинство фундаментальных положений теории поля обобщается на случай пространства – времени с произвольным числом пространственных измерений. Четырехмерное риманово пространство является важнейшей моделью пространства – времени, достаточной для развития теории поля с необходимой степенью полноты. Как убедительно показывает развитие физики, четырехмерное пространство с римановой геометрией является наилучшим приближением в понимании реальных свойств пространства – времени.



Согласно принципу наименьшего действия действительное поле реализуется таким образом, что действие оказывается экстремальным, т. е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей  $\varphi^k$ :

$$\delta\mathcal{J} = 0. \quad (1.6)$$

Здесь *не подвергаются* варьированию пространственно-временные координаты  $X^\beta$  и 4-область интегрирования.

Принцип наименьшего действия позволяет сформулировать задачу о вычислении поля внутри некоторой 4-области как вариационную задачу об отыскании экстремумов интегрального функционала (1.1). В том случае, когда лагранжиан  $\mathcal{L}$  зависит от градиентов переменных поля порядка не выше первого, вариациям физических полей  $\varphi^k$  при неварьируемых пространственно-временных координатах отвечает вариация действия:

$$\delta\mathcal{J} = \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} \delta\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \partial_\beta(\delta\varphi^k) \right\} d^4X \quad (1.7)$$

или, выделяя характерное для такого рода преобразований дивергентное слагаемое,

$$\delta\mathcal{J} = \int \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \right\} \delta\varphi^k d^4X + \int \partial_\beta \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} \delta\varphi^k \right) d^4X. \quad (1.8)$$

Стационарность действия (при произвольных допустимых вариациях поля) необходимо влечет уравнения Эйлера – Лагранжа (динамические уравнения, или дифференциальные уравнения поля):

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} = 0. \quad (1.9)$$

Действительное физическое поле (при условии его гладкости) должно удовлетворять системе уравнений Эйлера – Лагранжа.

Обобщение уравнений Эйлера – Лагранжа на тот случай, когда плотность лагранжиана зависит от частных производных порядка выше первого, имеет следующий вид:

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)} - \dots = 0. \quad (1.10)$$

Закончим этот параграф работы одним важным замечанием. Если в вариационном функционале действия с самого начала использовать инвариантный элемент объема, то тогда в уравнениях поля под функцией Лагранжа следует понимать не  $\mathcal{L}$ , а  $\sqrt{\mathcal{L}}$ . Мы принимаем следующее соглашение: в последующем изложении символ  $\mathcal{L}$  служит в качестве сокращенного обозначения для  $\sqrt{\mathcal{L}}$ . Таким образом, в рамках принятого соглашения символ  $\mathcal{L}$  *не будет* указывать на плотность по отношению к инвариантному элементу объема пространственно-временного многообразия. Величина  $\mathcal{L}$  в уравнениях поля будет, как это принято в исчислении вариаций, являться плотностью по отношению к «естественному» элементу объема. Как уже отмечалось выше, величину  $\mathcal{L}$  можно поэтому называть «естественной» плотностью лагранжиана. Следовательно, в вариационном интеграле действия с самого начала следует выполнить замену

$$\sqrt{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L}, \quad (1.11)$$

а в дифференциальных уравнениях поля — обратную замену

$$\mathcal{L} \rightarrow \sqrt{\mathcal{L}}. \quad (1.12)$$

## 2. ФОРМАЛИЗМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ЛИ

Оперирование с различными формами первой вариации интегрального функционала действия существенно упрощается, если воспользоваться теорией однопараметрических групп преобразований,



составляющей основу группового анализа дифференциальных уравнений. Изложение соответствующего круга вопросов имеется в монографии [3]. Необходимые сведения могут быть почерпнуты также из книг [4, 5].

Введем непрерывную однопараметрическую группу геометрических преобразований зависимых и независимых переменных (группу Ли) в форме разложения по степеням скалярного параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}^\beta &= \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) = X^\beta + \varepsilon \xi^\beta(\varphi^s, X^\gamma) + \dots, \\ \tilde{\varphi}^k &= \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) = \varphi^k + \varepsilon h^k(\varphi^s, X^\gamma) + \dots, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где при  $\varepsilon = 0$  выполняются условия

$$\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \quad \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi^k.$$

Преобразования (2.1) предполагаются обратимыми. При  $\varepsilon = 0$  получается тождественное преобразование. Последовательное выполнение двух преобразований равносильно применению третьего преобразования того же вида (2.1). Ясно, что для общего однопараметрического семейства точечных преобразований это свойство может не выполняться. Именно оно является ключевым признаком, отличающим произвольное однопараметрическое семейство преобразований от однопараметрической группы преобразований. Явно выписанные члены определяют инфинитезимальное преобразование (2.1);  $\xi^\beta, h^k$  — инфинитезимальные образующие однопараметрической группы Ли (2.1).

Полные вариации переменных  $\varphi^s, X^\gamma$  пропорциональны инфинитезимальным образующим:

$$\xi^\gamma = \frac{\delta X^\gamma}{\varepsilon}, \quad h^s = \frac{\delta \varphi^s}{\varepsilon}. \quad (2.2)$$

Группа преобразований (2.1) индуцирует касательное векторное поле, которое определяется компонентами [3, с. 55]

$$\varsigma = (\xi^\alpha(\varphi^s, X^\gamma), h^k(\varphi^s, X^\gamma)). \quad (2.3)$$

Компоненты касательного векторного поля зависят (как это и отражено в принятых обозначениях) от переменных  $\varphi^s, X^\gamma$ .

Следуя Ли, введем символ инфинитезимального преобразования (2.1), представляющий собой дифференциальный оператор первого порядка:

$$\varsigma \cdot \partial = \xi^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + h^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \quad (2.4)$$

действие которого на заданную дифференцируемую функцию  $F(\varphi^k, X^\beta)$  дается формулой

$$(\varsigma \cdot \partial)F = \xi^\alpha \left( \frac{\partial F}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + h^j \frac{\partial F}{\partial \varphi^j}.$$

Здесь частные дифференцирования по независимым переменным  $X^\alpha$  производятся лишь по их *явным* вхождениям, что мы будем отмечать символом *expl* при соответствующей частной производной. В противном случае дифференцирование по координате  $X^\alpha$  будет считаться полным. Мы будем пользоваться компактными символами

$$\partial_\alpha, \quad \partial_\alpha^{\text{expl}}$$

для указания на полное или частное (по явным вхождениям переменной  $X^\alpha$ ) дифференцирование.

Оператор (2.4) называют также инфинитезимальным оператором группы (2.1) (см. [3, с. 55]). Коэффициенты при операторах частного дифференцирования в (2.4) называются координатами (или компонентами) инфинитезимального оператора. В приложениях группового анализа наиболее эффективным оказывается использование инфинитезимального оператора группы (2.4) вместо самой группы (2.1).

По заданному инфинитезимальному оператору (или касательному полю) однопараметрическая группа преобразований (2.1) восстанавливается единственным образом (с точностью до замены параметра  $\varepsilon$ ). Для этого необходимо найти решение задачи Коши для автономной системы обыкновенных





дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{X}^\alpha}{d\tau} &= \xi^\alpha(\tilde{X}^\gamma, \tilde{\varphi}^k), \\ \frac{d\tilde{\varphi}^s}{d\tau} &= h^s(\tilde{X}^\gamma, \tilde{\varphi}^k), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\tau$  — канонический параметр группы, с начальными данными

$$\tilde{X}^\alpha \Big|_{\tau=0} = X^\alpha, \quad \tilde{\varphi}^s \Big|_{\tau=0} = \varphi^s.$$

В дальнейшем изложении предполагается, что параметр  $\varepsilon$  является каноническим параметром однопараметрической группы преобразований (2.1).

Таким образом, однопараметрическая группа преобразований (в отличие от более общих однопараметрических семейств непрерывных точечных преобразований) полностью определяется своим инфинитезимальным «следом». Это утверждение составляет содержание одной из теорем Ли.

Действие однопараметрической группы преобразований (2.1) можно распространить (продолжить) также и на частные производные произвольного, сколь угодно высокого порядка, считая их *дополнительными* к  $\varphi^j$ ,  $X^\alpha$  координатами в продолженном пространстве. Оно вычисляется как результат замены переменных, выполненной согласно (2.1). Действительно, преобразования вида (2.1) трансформируют функции  $\varphi^j(X^\alpha)$  в новые функции  $\tilde{\varphi}^j(\tilde{X}^\alpha)$ , поскольку, подставляя в первую группу соотношений (2.1) зависимости  $\varphi^s = \varphi^s(X^\alpha)$ , можно выразить из указанных соотношений «старые» независимые переменные  $X^\alpha$  через «новые» независимые переменные  $\tilde{X}^\alpha$ , а затем с помощью второй группы соотношений (2.1) — «новые» полевые переменные  $\tilde{\varphi}^k$  через «новые» независимые переменные  $\tilde{X}^\alpha$ . После этого можно, используя «новый» набор зависимых и независимых переменных, вычислить частные производные  $\tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\varphi}^k$ ,  $\tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\partial}_{\alpha_2} \tilde{\varphi}^k$ , ... . Все это позволяет ввести один, два, три и т.д. раза продолженные однопараметрические группы преобразований и говорить о преобразовании как независимых переменных  $X^\gamma \rightarrow \tilde{X}^\gamma$  и функций  $\varphi^s \rightarrow \tilde{\varphi}^j$ , так и всего дифференциального комплекса

$$\begin{aligned} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots, \\ \downarrow \\ \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1} \tilde{\partial}_{\alpha_2} \tilde{\varphi}^s, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

под действием группового преобразования (2.1).

В дальнейшем нам будут нужны продолжения не самой однопараметрической группы преобразований преобразования (2.1), а продолжения ее инфинитезимального оператора (2.4).

Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы (или первое продолжение инфинитезимального оператора (2.4)) имеет вид

$$\xi_1 \cdot \partial = \xi^\gamma \left( \frac{\partial}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} + h^j \frac{\partial}{\partial \varphi^j} + h_\alpha^k \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha \varphi^k)}, \quad (2.7)$$

где дополнительные координаты  $h_\alpha^k$  зависят от координат продолженного пространства и выражаются согласно формулам первого продолжения [3, с. 58]

$$h_\alpha^l = \left( \frac{\partial h^l}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha \varphi^s) \frac{\partial h^l}{\partial \varphi^s} - (\partial_\sigma \varphi^l) \left( \left( \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \varphi^k} \right). \quad (2.8)$$

Можно придать формулам для вычисления дополнительных координат инфинитезимального оператора  $h_\alpha^k$  несколько иную форму, отражающую их рекуррентный характер, если ввести *усеченный* оператор  $D_\alpha$  «полного» дифференцирования по независимой переменной с номером  $\alpha$ :

$$h_\alpha^l = D_\alpha(h^l) - (\partial_\sigma \varphi^l) D_\alpha(\xi^\sigma), \quad (2.9)$$

где

$$D_\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial}{\partial \varphi^k}. \quad (2.10)$$





Ясно, что можно также вести речь о втором продолжении однопараметрической группы преобразований (2.1) и ее инфинитезимальном операторе  $\zeta_2 \cdot \partial$ , который имеет вид

$$\zeta_2 \cdot \partial = \zeta_1 \cdot \partial + h_{\alpha\beta}^l \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha \partial_\beta \varphi^l)}, \quad (2.11)$$

где

$$h_{\alpha\beta}^l = \left( \frac{\partial h_\alpha^l}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial h_\alpha^l}{\partial \varphi^k} + (\partial_\sigma \partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial h_\alpha^l}{\partial(\partial_\sigma \varphi^k)} - (\partial_\sigma \partial_\alpha \varphi^l) \left( \left( \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} + (\partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \varphi^k} \right). \quad (2.12)$$

Эта же формула с использованием оператора  $D_\beta$  представляется как

$$h_{\alpha\beta}^l = D_\beta(h_\alpha^l) - (\partial_\sigma \partial_\alpha \varphi^l) D_\beta(\xi^\sigma), \quad (2.13)$$

где

$$D_\beta = D_\beta + (\partial_\sigma \partial_\beta \varphi^k) \frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma \varphi^k)}. \quad (2.14)$$

Приведем также формулу для  $n$ -го продолжения инфинитезимального оператора однопараметрической группы преобразований (2.1):

$$\zeta_n \cdot \partial = \zeta_{n-1} \cdot \partial + h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^l \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_n} \varphi^l)}, \quad (2.15)$$

где

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta}^l = D_\beta(h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}^l) - (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \partial_\sigma \varphi^l) D_\beta(\xi^\sigma), \quad (2.16)$$

$$D_\beta = D_{\beta} + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \varphi^l)}. \quad (2.17)$$

Заметим, что в некоторых случаях удобно использовать обозначения

$$\left( \frac{\partial}{\partial X^\beta} \right)_{\text{expl}} = \partial_\beta^{\text{expl}}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi^l} = \partial_l, \quad \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)} = \partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \quad (2.18)$$

с целью наиболее обзримого представления формул. Так, формула продолжения (2.15) приобретет следующий наиболее компактный вид:

$$\zeta_n \cdot \partial = \zeta_{n-1} \cdot \partial + h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^l \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \quad (2.19)$$

где

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta}^l = D_\beta(h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}^l) - (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \partial_\sigma \varphi^l) D_\beta(\xi^\sigma), \quad (2.20)$$

$$D_\beta = D_{\beta} + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \partial_\beta \varphi^l) \partial_{n-1}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}. \quad (2.21)$$

Оператор Эйлера – Лагранжа можно записать символически в форме

$$\mathcal{E}_l = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_l^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}. \quad (2.22)$$

В такого рода суммах при  $s = 0$  подразумевается слагаемое  $\partial_l$ , обозначающее частное дифференцирование по полевой переменной  $\varphi^l$ .

Для координат продолженных операторов может быть получена развернутая формула:

$$h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta}^l = \left( \partial_\beta^{\text{expl}} + \sum_{s=0}^{n-1} (\partial_{\beta_1} \partial_{\beta_2} \dots \partial_{\beta_s} \partial_\beta \varphi^k) \partial_k^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s} \right) h_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}^l - (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{n-1}} \partial_\sigma \varphi^l) (\partial_\beta^{\text{expl}} + (\partial_\beta \varphi^k) \partial_k) \xi^\sigma. \quad (2.23)$$



Поскольку координаты продолженных операторов  $h_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}^l$  зависят от градиентов переменных  $\varphi^k$  порядка не выше, чем  $n - 1$ , то последнюю формулу можно переписать, используя операторы полного дифференцирования, в следующем виде:

$$h_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\beta}^l = \partial_\beta h_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}^l - (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\sigma\varphi^l)\partial_\beta\xi^\sigma, \quad (2.24)$$

откуда последовательно имеем:

$$\begin{aligned} h_{\alpha_1}^l &= \partial_{\alpha_1}h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\partial_{\alpha_1}\xi^\sigma = \partial_{\alpha_1}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma, \\ h_{\alpha_1\alpha_2}^l &= \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma, \\ &\vdots \\ h_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^l &= \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_n}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_n}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Вводя обозначение (характеристика инфинитезимального оператора  $\varsigma \cdot \partial$ )

$$\mathcal{Q}^l = h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma \quad (2.26)$$

для координат продолженных операторов, находим

$$h_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^l = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_n}\mathcal{Q}^l + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_n}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma. \quad (2.27)$$

Знание координат продолжений инфинитезимального оператора позволяет вычислить инфинитезимальную часть преобразований частных производных (2.6) как

$$\tilde{\partial}_{\alpha_1}\tilde{\partial}_{\alpha_2}\dots\tilde{\partial}_{\alpha_n}\tilde{\varphi}^k = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_n}\varphi^k + \varepsilon h_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^k + \dots \quad (2.28)$$

Производя несложные вычисления, можно показать, что для заданной функции  $F(\cdot)$  ее изменение  $F(\tilde{\cdot}) - F(\cdot)$  в результате смещения аргументов  $\varphi^k, X^\gamma$ , продиктованного действием группы преобразований (2.1), выражается в виде ( $\varepsilon$  — канонический параметр однопараметрической группы преобразований)

$$F(\tilde{\cdot}) - F(\cdot) = \varepsilon(\varsigma \cdot \partial)F(\cdot) + \frac{1}{2!}\varepsilon^2(\varsigma \cdot \partial)^2F(\cdot) + \dots \quad (2.29)$$

Этот ряд называется рядом Ли. Он может быть записан в форме операторной экспоненты:

$$F(\tilde{\cdot}) = e^{\varepsilon(\varsigma \cdot \partial)}F(\cdot). \quad (2.30)$$

Отсюда сразу же видно, что равенство  $F(\tilde{\cdot}) = F(\cdot)$  выполняется тогда и только тогда, когда  $(\varsigma \cdot \partial)F(\cdot) = 0$ . Функции  $F(\varphi^k, X^\gamma)$ , которые не изменяют своего значения в результате преобразования аргументов  $\varphi^k, X^\gamma$  согласно (2.1), т. е.

$$F(\tilde{\varphi}^k, \tilde{X}^\gamma) = F(\varphi^k, X^\gamma),$$

называются инвариантами однопараметрической группы преобразований (2.1).

Выбирая в качестве функции  $F$  последовательно переменные  $X^\alpha, \varphi^s$ , получаем данные формулы группового преобразования (2.1) в виде ряда по степеням параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \tilde{X}^\alpha &= X^\alpha + \varepsilon(\varsigma \cdot \partial)X^\alpha + \frac{\varepsilon^2}{2!}(\varsigma \cdot \partial)^2X^\alpha + \dots, \\ \tilde{\varphi}^s &= \varphi^s + \varepsilon(\varsigma \cdot \partial)\varphi^s + \frac{\varepsilon^2}{2!}(\varsigma \cdot \partial)^2\varphi^s + \dots, \end{aligned} \quad (2.31)$$

откуда непосредственно следует, что инфинитезимальный оператор однозначно определяет однопараметрическую группу преобразований (2.1).

Изменение «дифференциальной функции»  $F(\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^s, \dots, X^\beta)$ , которая зависит от градиентов полевых переменных  $\varphi^k$  порядка не выше, чем  $m$ , вследствие преобразования ее аргументов согласно (2.1) определяется формулой

$$\begin{aligned} \Delta F &= \varepsilon(\varsigma \cdot \partial)F + \dots \\ (\Delta F &= F(\tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1}\tilde{\varphi}^s, \tilde{\partial}_{\alpha_1}\tilde{\partial}_{\alpha_2}\tilde{\varphi}^s, \dots, \tilde{X}^\beta) - F(\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^s, \dots, X^\beta)). \end{aligned} \quad (2.32)$$



Следовательно, вариация «дифференциальной функции»  $F$ , обусловленная вариацией ее аргументов согласно (2.1), есть

$$\frac{\delta F}{\varepsilon} = (\zeta \cdot \partial)F, \quad (2.33)$$

где

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \sum_{s=1}^m h^l_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)}, \quad (2.34)$$

или в сокращенных обозначениях

$$\zeta \cdot \partial = \zeta \cdot \partial + \sum_{s=1}^m h^l_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s}, \quad (2.35)$$

$$h^l_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} = \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} (h^l - (\partial_\sigma \varphi^l) \xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\sigma \varphi^l) \xi^\sigma. \quad (2.36)$$

Доказательство еще одного важного представления  $m$  раз продолженного инфинитезимального оператора имеется в [2]:

$$\zeta \cdot \partial = \sum_{s=0}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} + \xi^\sigma \partial_\sigma. \quad (2.37)$$

Из формулы (2.37), привлекая (см., например, [2])

$$\sum_{s=1}^m (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \mathcal{Q}^l) \partial_s^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \mathcal{Q}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) - \mathcal{Q}^l_0 \partial_l \mathcal{L}, \quad (2.38)$$

можно получить результат действия  $m$  раз продолженного инфинитезимального оператора на «дифференциальную функцию»

$$\mathcal{L}(\varphi^s, \partial_{\alpha_1} \varphi^s, \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \varphi^s, \dots, X^\beta),$$

которая зависит от градиентов полевых переменных  $\varphi^k$  порядка не выше, чем  $m$ , в виде

$$(\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \partial_{\alpha_i} \mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \mathcal{Q}^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \xi^\sigma \partial_\sigma \mathcal{L}. \quad (2.39)$$

### 3. ПЕРВАЯ ВАРИАЦИЯ ДЕЙСТВИЯ В СЛУЧАЕ ВАРЬИРУЕМОЙ ОБЛАСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Варьирование интегральных функционалов с переменной областью интегрирования представляет собой самый важный технический элемент теории вариационных симметрий и законов сохранения [6]. Вывод соответствующих формул может быть выполнен, следуя, например, [7, 8]. Ниже, опираясь на теорию однопараметрических групп преобразований, рассматривается вывод формулы первой вариации интегрального функционала, считая варьiruемой также область интегрирования и предполагая, что на варьiruемой границе могут быть дополнительно сформулированы граничные условия того или иного вида (так называемые «навязанные» граничные условия). Рассуждения проведем в самом общем случае, когда интегральный функционал

$$\mathcal{J} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^M X \quad (3.1)$$

определен в некоторой переменной области пространства размерности  $M$ , но плотность действия не зависит от градиентов полевых переменных выше первого порядка.

Прежде всего заметим, что

$$\delta \mathcal{J} = \int (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\sigma \delta X^\sigma) d^M X, \quad (3.2)$$

откуда на основании (2.2) и (2.33) находим:

$$\frac{\delta \mathcal{J}}{\varepsilon} = \int ((\zeta \cdot \partial) \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\sigma \xi^\sigma) d^M X. \quad (3.3)$$



Используя, далее, формулы (2.7) (2.7) и (2.8), получаем:

$$(\xi \cdot \partial)\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\sigma\xi^\sigma = \partial_\sigma(\xi^\sigma\mathcal{L}) + \mathcal{Q}^l\mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \partial_\sigma\mathcal{K}^\sigma, \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\sigma &= \mathcal{Q}^l\partial_l^\sigma\mathcal{L}, \\ \mathcal{Q}^l &= h^l - (\partial_\gamma\varphi^l)\xi^\gamma. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно представить в терминах исчисления вариаций, если умножить обе его части на параметр  $\varepsilon$ :

$$\bar{\delta}\varphi^l = \delta\varphi^l - (\partial_\gamma\varphi^l)\delta X^\gamma,$$

где  $\bar{\delta}\varphi^l = \varepsilon\mathcal{Q}^l$  — частичная вариация полевой переменной  $\varphi^l$ . Полные вариации пространственно-временных координат  $X^\beta$  и физических полей  $\varphi^k$  при их преобразовании согласно (2.1) были определены выше. Полная вариация полевой переменной  $\varphi^k$  в данной точке пространства – времени складывается из изменения поля вследствие изменения его функциональной зависимости и изменения, вызванного перемещением  $\delta X^\beta$  в близлежащую точку пространства – времени. Поэтому мы *определяем* частичную вариацию (или вариацию формы)  $\bar{\delta}\varphi^k$  полевой переменной  $\varphi^k$  с помощью соотношения

$$\delta\varphi^k = \bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha. \quad (3.5)$$

В современной теории поля частичную вариацию полевой переменной принято называть локальной (а также функциональной) вариацией, а полную вариацию — субстанциональной. Второе слагаемое в правой части соотношения (3.5) можно назвать конвективной вариацией. Таким образом, частичная вариация поля под действием однопараметрической геометрической группы преобразований соответствует характеристике инфинитезимального оператора группы.

Подставляя (3.4) в (3.3), получаем

$$\delta\mathfrak{J} = \int (\partial_\sigma(\mathcal{L}\delta X^\sigma) + \bar{\delta}\varphi^l\mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \partial_\sigma(\varepsilon\mathcal{K}^\sigma))d^M X, \quad (3.6)$$

и, полагая выполненными дифференциальные уравнения поля

$$\mathcal{E}_l(\mathcal{L}) = 0,$$

закключаем, что

$$\delta\mathfrak{J} = \int (\partial_\sigma(\mathcal{L}\delta X^\sigma) + \partial_\sigma(\varepsilon\mathcal{K}^\sigma))d^M X, \quad (3.7)$$

а также

$$\delta\mathfrak{J} = \int \partial_\sigma(\mathcal{L}\delta X^\sigma + \varepsilon\mathcal{Q}^l\partial_l^\sigma\mathcal{L})d^M X. \quad (3.8)$$

Применяя затем к последнему интегралу теорему Гаусса – Остроградского, для первой вариации действия находим

$$\delta\mathfrak{J} = \oint_{\partial} \mathcal{N}_\sigma(\mathcal{L}\delta X^\sigma + \partial_l^\sigma\mathcal{L}\bar{\delta}\varphi^l)d^{M-1}\tau, \quad (3.9)$$

где  $\mathcal{N}_\sigma$  — внешняя единичная ( $\mathcal{N}_\sigma\mathcal{N}^\sigma = 1$ ) нормаль замкнутого  $M - 1$ -мерного многообразия  $\partial$ , ограничивающего рассматриваемую  $M$ -область;  $d^{M-1}\tau$  — инвариантный элемент объема многообразия  $\partial$ . Заметим, кроме того, что в данной выше формуле  $\mathcal{L}$  — плотность действия по отношению к инвариантному элементу объема  $M$ -многообразия.

Формула (3.9) может быть использована при анализе разрывных вариационных задач (т. е. тогда, когда допускаются разрывы первых производных полевых переменных при пересечении  $M - 1$ -мерных поверхностей), в частности, при выводе обобщенных условий Эрдмана – Вейерштрасса (см., например, [9]). В разрывных вариационных задачах частичные вариации поля разрывны, а полные — непрерывны. Поэтому удобнее оперировать с полными вариациями полевых переменных. В формулу (3.9) вместо частичной вариации поля введем полную и, принимая обозначения

$$T_{\cdot\gamma}^{\sigma} = \mathcal{L}\delta_\gamma^\sigma - \partial_\gamma\varphi^l\partial_l^\sigma\mathcal{L}, \quad -S_{\cdot l}^{\sigma} = \partial_l^\sigma\mathcal{L}, \quad (3.10)$$



в результате имеем следующее компактное выражение первой вариации интегрального функционала действия:

$$\delta \mathcal{J} = \oint_{\partial} \mathcal{N}_{\sigma} T_{\cdot \gamma}^{\sigma \cdot} \delta X^{\gamma} d^{M-1} \tau - \oint_{\partial} \mathcal{N}_{\sigma} S_{\cdot l}^{\sigma \cdot} \delta \varphi^l d^{M-1} \tau. \quad (3.11)$$

Выражение для первой вариации интегрального функционала (3.11) сразу же позволяет получить обобщенные уравнения Эрдмана – Вейерштрасса на поверхностях сильного разрыва поля. В силу непрерывности и независимости вариаций  $\delta X^{\gamma}$  и  $\delta \varphi^l$  на неизвестной поверхности сильных разрывов полевых переменных находим следующие уравнения, связывающие скачки канонических полевых тензоров  $T_{\cdot \gamma}^{\sigma \cdot}$ ,  $S_{\cdot l}^{\sigma \cdot}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\sigma} [T_{\cdot \gamma}^{\sigma \cdot}] &= 0, \\ \mathcal{N}_{\sigma} [S_{\cdot l}^{\sigma \cdot}] &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Формула (3.11) подлежит дальнейшему преобразованию в том случае, когда вариации  $\delta X^{\gamma}$  и  $\delta \varphi^l$  на границе варьируемой области не будут независимыми. Это происходит тогда, когда постановка вариационной задачи включает ограничения в виде «навязанных» граничных условий на границе переменной области интегрирования. В частности, на замкнутой  $M - 1$ -мерной поверхности  $\partial$  могут задаваться значения полевых переменных:

$$\varphi^l = \Gamma^l(X^{\gamma}) \quad (\gamma = \overline{1, M}). \quad (3.13)$$

Вариации координат и полевых переменных на  $\partial$  будут, очевидно, связаны между собой соотношениями

$$\delta \varphi^l = \frac{\partial \Gamma^l}{\partial X^{\gamma}} \delta X^{\gamma}. \quad (3.14)$$

Формула (3.11) преобразуется, следовательно, к виду

$$\delta \mathcal{J} = \oint_{\partial} \mathcal{N}_{\sigma} (T_{\cdot \gamma}^{\sigma \cdot} - (\partial_{\gamma} \Gamma^l) S_{\cdot l}^{\sigma \cdot}) \delta X^{\gamma} d^{M-1} \tau, \quad (3.15)$$

где все вариации  $\delta X^{\gamma}$  на границе варьируемой области независимы и произвольны. В силу последнего обстоятельства на основании (3.15) получаем граничные условия на  $\partial$ :

$$\mathcal{N}_{\sigma} (T_{\cdot \gamma}^{\sigma \cdot} - (\partial_{\gamma} \Gamma^l) S_{\cdot l}^{\sigma \cdot}) = 0 \quad (\gamma = \overline{1, M}). \quad (3.16)$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).*

### Библиографический список

1. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля : вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
2. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с.
4. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М. : Мир, 1989. 639 с.
5. Olver P. J. Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge; N. Y.; Melbourne : Cambridge University Press, 1995. 526 p.
6. Noether E. Invariante Variationsprobleme // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse. 1918. Н. 2. S. 235–257. (Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. М. : Физматгиз, 1959. С. 611–630.)
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики : в 2 т. М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1933. Т. 1. 528 с.
8. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М. : Физматгиз, 1961. 228 с.
9. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1941. 308 с.



## On a Form of the First Variation of the Action Integral Over a Varied Domain

V. A. Kovalev<sup>1</sup>, Yu. N. Radayev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow City Government University of Management, 28, Sretenka str., 107045, Moscow, Russia, kovalev.kam@gmail.com

<sup>2</sup>Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Field theories of the continuum mechanics and physics based on the least action principle are considered in a unified framework. Variation of the action integral in the least action principle corresponds variations of physical fields while space–time coordinates are not varied. However notion of the action invariance, theory of variational symmetries of action and conservation laws require a wider variation procedure including variations of the space–time coordinates. A similar situation is concerned to variational problems with strong discontinuities of field variables or other a priori unknown free boundaries which variations are not prohibited from the beginning. A form of the first variation of the action integral corresponding variations of space–time coordinates and field variables under one-parametrical transformations groups is obtained. This form is attributed to 4-dimensional covariant formulations of field theories of the continuum mechanics and physics. The first variation of the action integral over a varied domain is given for problems with constraints. The latter are formulated on unknown free boundaries.

*Key words:* field, action, least action principle, field equations, transformation group, Lie group, infinitesimal generator, variation, varied domain, constraint.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00139).*

### References

1. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elements of the Field Theory : Variational Symmetries and Geometric Invariants*. Moscow, Fizmatlit, 2009, 156 p. (in Russian).
2. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics*. Saratov, Saratov Univ. Press, 2010. 328 p. (in Russian).
3. Ovsyannikov L. V. *Group Analysis of Differential Equations*. Moscow, Nauka, 1978, 400 p. (in Russian).
4. Olver P. J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Moscow, Mir, 1989, 639 p. (in Russian).
5. Olver P. J. *Equivalence, Invariants and Symmetry*. Cambridge ; N.Y. ; Melbourne, Cambridge University Press, 1995, 526 p.
6. Noether E. Invariante Variationsprobleme. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse, 1918, H. 2, s. 235–257. (Rus. ed. : Noether E. Invariantnye variatsionnye zadachi // Variatsionnye printsipy mekhaniki. Moscow, Fizmatgiz, 1959, pp. 611–630).
7. Courant R., Gilbert D. *Methods of Mathematical Physics : in 2 vol.* Moscow; Leningrad, Gostekhizdat, 1933, vol. 1, 528 p. (in Russian).
8. Gelfand I. M., Fomin S. V. *Calculus of Variations*. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 228 p. (in Russian).
9. Gunter N. M. *A Course of the Calculus of Variations*. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat, 1941, 308 p. (in Russian).

УДК 539.3

## ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАРАЩИВАНИЕ ПОЛОГО ГИПЕРУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

С. А. Лычев<sup>1</sup>, А. В. Марк<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, lychevsa@mail.ru

<sup>2</sup>Кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, A-V-Mark@yandex.ru

Исследуется напряженно-деформированное состояние растущего цилиндра из несжимаемого упругого материала типа Муни–Ривлина при конечных деформациях. Деформации полагаются осесимметричными и не изменяющимися вдоль оси цилиндра. Рассмотрены дискретные и непрерывные режимы наращивания. Построены соответствующие решения краевых задач. На основе вычислений показана сходимость решения для дискретного наращивания к решениям задач для непрерывного наращивания при увеличении количества слоев и уменьшения их толщины в условиях фиксированного финального объема.

*Ключевые слова:* аддитивные технологии, растущие тела, конечные деформации, гиперупругость, непрерывное наращивание, дискретное наращивание.





## On a Form of the First Variation of the Action Integral Over a Varied Domain

V. A. Kovalev<sup>1</sup>, Yu. N. Radayev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow City Government University of Management, 28, Sretenka str., 107045, Moscow, Russia, kovalev.kam@gmail.com

<sup>2</sup>Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Field theories of the continuum mechanics and physics based on the least action principle are considered in a unified framework. Variation of the action integral in the least action principle corresponds variations of physical fields while space–time coordinates are not varied. However notion of the action invariance, theory of variational symmetries of action and conservation laws require a wider variation procedure including variations of the space–time coordinates. A similar situation is concerned to variational problems with strong discontinuities of field variables or other a priori unknown free boundaries which variations are not prohibited from the beginning. A form of the first variation of the action integral corresponding variations of space–time coordinates and field variables under one-parametrical transformations groups is obtained. This form is attributed to 4-dimensional covariant formulations of field theories of the continuum mechanics and physics. The first variation of the action integral over a varied domain is given for problems with constraints. The latter are formulated on unknown free boundaries.

*Key words:* field, action, least action principle, field equations, transformation group, Lie group, infinitesimal generator, variation, varied domain, constraint.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00139).*

### References

1. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elements of the Field Theory : Variational Symmetries and Geometric Invariants*. Moscow, Fizmatlit, 2009, 156 p. (in Russian).
2. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics*. Saratov, Saratov Univ. Press, 2010. 328 p. (in Russian).
3. Ovsyannikov L. V. *Group Analysis of Differential Equations*. Moscow, Nauka, 1978, 400 p. (in Russian).
4. Olver P. J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Moscow, Mir, 1989, 639 p. (in Russian).
5. Olver P. J. *Equivalence, Invariants and Symmetry*. Cambridge ; N. Y. ; Melbourne, Cambridge University Press, 1995, 526 p.
6. Noether E. Invariante Variationsprobleme. Nachrichten von der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse, 1918, H. 2, s. 235–257. (Rus. ed. : Noether E. Invariantnye variatsionnye zadachi // Variatsionnye printsipy mekhaniki. Moscow, Fizmatgiz, 1959, pp. 611–630).
7. Courant R., Gilbert D. *Methods of Mathematical Physics : in 2 vol.* Moscow; Leningrad, Gostekhizdat, 1933, vol. 1, 528 p. (in Russian).
8. Gelfand I. M., Fomin S. V. *Calculus of Variations*. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 228 p. (in Russian).
9. Gunter N. M. *A Course of the Calculus of Variations*. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat, 1941, 308 p. (in Russian).

УДК 539.3

## ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАРАЩИВАНИЕ ПОЛОГО ГИПЕРУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

С. А. Лычев<sup>1</sup>, А. В. Марк<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, lychevsa@mail.ru

<sup>2</sup>Кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, A-V-Mark@yandex.ru

Исследуется напряженно-деформированное состояние растущего цилиндра из несжимаемого упругого материала типа Муни–Ривлина при конечных деформациях. Деформации полагаются осесимметричными и не изменяющимися вдоль оси цилиндра. Рассмотрены дискретные и непрерывные режимы наращивания. Построены соответствующие решения краевых задач. На основе вычислений показана сходимость решения для дискретного наращивания к решениям задач для непрерывного наращивания при увеличении количества слоев и уменьшения их толщины в условиях фиксированного финального объема.

*Ключевые слова:* аддитивные технологии, растущие тела, конечные деформации, гиперупругость, непрерывное наращивание, дискретное наращивание.



## ВВЕДЕНИЕ

При моделировании разнообразных аддитивных технологических процессов [1] необходимо учитывать механические эффекты, сопутствующие процессам соединения деформируемых частиц в единое тело или, иначе говоря, вызванные *ростом деформируемого тела*. Эти эффекты проявляют себя как поля остаточных напряжений и как связанные с ними отклонения финальной формы изделия от проектной. В качестве примеров могут быть приведены технологии стереолитографии, трехмерной печати, парофазного осаждения, наплавки и т.п. [1–3]. При разработке технологий подобных процессов зачастую желательно минимизировать искажения и остаточные напряжения, либо создавать конструкции с заранее заданными распределениями начальных напряжений. Этого можно достичь посредством математического моделирования эволюции напряженно-деформированного состояния растущего тела, вопросам которого посвящена настоящая статья.

В настоящей работе используется понятие *роста деформируемого твердого тела*. Само это понятие относится к новому направлению — механике растущих тел [4–7], в связи с чем представляется здесь уместным уточнить его определение. Рост в широком смысле определяется изменением материального состава тела, происходящим в процессе его деформирования, которое может сопровождаться изменением его топологических свойств. Под изменением материального состава понимается присоединение новых материальных точек и (или) образование новых связей между материальными точками, уже входящими в состав тела. Необходимо отметить, что изменение топологических свойств может происходить без притока материала извне и может быть вызвано переходом части граничных точек во внутренность тела. Классическими примерами здесь являются склеивание берегов разреза кольца с вырезанным сектором и преобразование конечного цилиндра в полноторие с отождествлением его оснований, либо отождествлением сечений полнотория с удалением сектора, заключенного между ними (этот пример иллюстрирует понятие дислокации и был впервые использован В. Вольтерра [8]). С позиций, принимаемых в рамках настоящей работы, подобные преобразования следует рассматривать как специальные варианты дискретного роста.

В современной механике континуума сформировался ряд различных подходов к изучению феномена роста. К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных механике растущих тел и иллюстрирующих эти подходы. Ссылки на многие из них можно найти в обзоре [9]. Здесь укажем лишь некоторые работы, имеющие непосредственное отношение к вопросам, затрагиваемым в статье. В исследованиях [10] рассматривается объемный рост, в частности, рост биологических тканей. Статья [11] посвящена развитию геометрических методов механики к описанию несовместных деформаций, возникающих как результат процесса роста. В работах [4–7, 12] исследуется поверхностный рост как процесс непрерывного присоединения напряженных материальных поверхностей к растущему деформируемому телу.

Известно, что при дополнительных предположениях о непрерывности функций, определяющих изменение напряженно-деформируемого состояния присоединяемых материальных поверхностей, непрерывный процесс можно рассматривать как предел последовательности процессов дискретного наращивания при неограниченном уменьшении толщин присоединяемых слоев. Вместе с тем, в литературе представлены лишь немногочисленные примеры исследования напряженно-деформированного состояния растущих тел при конечных деформациях. Настоящая статья частично восполняет этот пробел. В ней рассматривается решение модельной задачи о растущем цилиндре, которое иллюстрирует качественные особенности процессов дискретного и непрерывного наращивания. Показана сходимость полученных решений для дискретного наращивания к решениям соответствующих задач для непрерывного наращивания при увеличении количества слоев и уменьшения их толщины в условиях фиксированного финального объема.

## 1. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для построения математической модели растущего тела воспользуемся формализацией тела как гладкого многообразия, которая развита в работах школы рациональной механики [13–17]. В рамках этой аксиоматики под *телом*  $\mathcal{B}$  будем понимать связное подмножество абстрактного топологического пространства, такое, что его образ в физическом пространстве представляет собой область с регулярной границей. Кроме того, полагаем, что тело представляет собой дифференцируемое много-



образе [18, 19]. Его элементы  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  — материальные точки; полагаем, что они являются *простыми*, т. е. тело состоит из простого материала, в котором напряжения в некоторой точке зависят только от первого градиента места в окрестности этой точки [20].

В классической механике сплошных сред тела рассматриваются как фиксированные множества материальных точек. В задачах механики растущих тел рассматривается эволюция множества  $\mathcal{B}$ , которое представляет собой множество *переменного* состава. Заметим, что эволюция тела как точечного множества в абстрактном топологическом (материальном) пространстве может быть весьма сложной [21]. Однако при некоторых ограничениях на гладкость отображений, характеризующих процесс роста, ее можно представить непрерывным семейством тел, упорядоченных относительно вложения. В общем случае это семейство можно описать как расслоение гладкого многообразия [4], размерность базы которого определяет класс растущего тела. В настоящей работе будет рассмотрен наиболее простой класс, соответствующий одномерной базе расслоения. При этом рост в терминах механики деформируемого твердого тела характеризуется как непрерывный процесс присоединения к растущему твердому телу предварительно напряженных материальных поверхностей [22], и растущее тело может быть представлено однопараметрическим семейством гладких тел:

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}},$$

где  $\mathcal{I}$  — множество индексов, которое может быть конечным или континуальным.

Введем понятия *тотального тела*  $\mathcal{B}^*$  и *начального тела*  $\mathcal{B}_*$  следующим образом:

$$\mathcal{B}^* = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_\alpha, \quad \mathcal{B}_* = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_\alpha.$$

Элементы множества  $\mathcal{C}$ , соответствующие внутренним точкам интервала  $\mathcal{I}$ , будем называть *промежуточными* телами.

Будем различать дискретный и непрерывный рост. В случае дискретного роста множество  $\mathcal{C}$  представляет собой конечную последовательность вложенных множеств:

$$\mathcal{C} : \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots \subset \mathcal{B}_N. \quad (1)$$

В случае непрерывного роста множество  $\mathcal{C}$  — непрерывное семейство тел над интервалом  $\mathcal{I} = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ , удовлетворяющее следующему условию: существуют двумерные гладкие многообразия  $\Omega_k$  и не более чем счетное множество гомеоморфизмов <sup>1</sup>:

$$\Psi_k : (\Omega_k, \alpha) \rightarrow \mathcal{B}^*, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

таких, что

$$\forall \alpha < \beta \quad \mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{B}_\beta, \quad \forall \alpha \exists k \partial \mathcal{B}_\alpha = \Psi_k(\Omega_k, \alpha), \quad \bigcup_k \Psi_k(\Omega_k \times \mathcal{I}_k) = \mathcal{B}^*, \quad \bigcup_k \mathcal{I}_k = \mathcal{I}. \quad (2)$$

Очевидно, что множество  $\mathcal{C}$  имеет счетную мощность  $|\mathcal{C}| = \aleph_1$ . Многообразия  $\Omega_k$  будем называть прообразом границы роста. Соотношения (2) устанавливают структуру гладкого расслоения многообразия  $\mathcal{B}^*$  [4, 18, 19]. При этом интервал  $\mathcal{I}$  представляет собой базу расслоения, а многообразие  $\Omega_k$  — прообраз слоя. Если существует единственный (универсальный) гомеоморфизм  $\Psi = \Psi_1$  единственного многообразия  $\Omega = \Omega_1$  на все границы элементов множества  $\mathcal{C}$ , то расслоение оказывается тривиальным. В противном случае, топологическая структура прообраза растущей границы может меняться. Изменение топологии прообраза границы роста соответствует самосоприкосновению частей образа  $\Omega_k$ , например, преобразованию конечного цилиндра в полноторие при отождествлении его оснований.

Таким образом, растущее тело может быть представлено как расслоение тотального тела  $\mathcal{B}^*$ . Слои, соответствующие координате базы  $\alpha$ , будем обозначать символом  $\mathfrak{M}_\alpha$ . Из структурных свойств расслоения вытекает, что слои не пересекаются, а их объединение совпадает с тотальным телом  $\mathcal{B}^*$ , т. е.

<sup>1</sup>Гомеоморфизм — это непрерывное отображение топологических пространств  $X \rightarrow Y$ , которое имеет непрерывное обратное отображение. Отображение топологических пространств  $X \rightarrow Y$  непрерывно, если для каждого открытого подмножества  $V \subset Y$  его прообраз в  $X$  открыт [19].



$\mathcal{B}^* = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{I}} \mathfrak{M}_\gamma$ . В процессе роста тело  $\mathcal{B}_\alpha$  представляется открытыми подмножествами тотального тела  $\mathcal{B}^*$ , граница которых  $\partial \mathcal{B}_\alpha$  образуется двумя различными слоями  $\mathfrak{M}_{\alpha'}$  и  $\mathfrak{M}_{\beta'}$ , т. е.  $\partial \mathcal{B}_\alpha = \mathfrak{M}_{\alpha'} \cup \mathfrak{M}_{\beta'}$ . В этом случае тело  $\mathcal{B}_\alpha$  может быть представлено как объединение множества слоев, индексы которых принадлежат открытому интервалу  $(\alpha', \beta') \subset \mathcal{I}$ :

$$\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}(\alpha', \beta') = \bigcup_{\gamma \in (\alpha', \beta')} \mathfrak{M}_\gamma. \quad (3)$$

При принятых предположениях растущее тело определяется как однопараметрическое семейство таких множеств

$$\mathfrak{C} = \{ \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}(\alpha_0, \alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I} \},$$

где  $\alpha$  теперь определяет параметр семейства, характеризующий эволюцию растущего тела, причем при  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  тело вырождается в бесконечно тонкий слой. Очевидно обобщение этого определения

$$\mathfrak{C} = \{ \mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}(\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \mid (\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \subset \mathcal{I} \},$$

где  $(\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$  — семейство вложенных интервалов.

Согласно данным определениям граница растущего тела должна быть топологически эквивалентна типовому слою, который сам представляет собой гладкое многообразие, и, следовательно, растущая граница топологически эквивалентна геометрически замкнутой поверхности. Если растущая граница топологически эквивалентна многообразию с краем, то растущее тело может быть определено следующим образом:

$$\mathfrak{C} = \{ \mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B}_0 \cap \mathcal{B}(\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \mid (\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \subset \mathcal{I} \}.$$

Здесь  $\mathcal{B}_0$  — фиксированное подмножество материального многообразия с гладкой границей.

В настоящей работе рассматривается наращивание полого цилиндра фиксированной высоты, в ходе которого материал присоединяется к его боковой поверхности. Если на материальном многообразии ввести координатные карты, соответствующие положениям точек в какой-либо актуальной конфигурации, то карта для  $\mathcal{B}_0$  будет соответствовать достаточно большому параллелепипеду, высота которого равна высоте растущего цилиндра.

## 2. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА-СЛОЯ

Напряженно-деформированное состояние (НДС) растущего тела принципиально отличается от НДС тел, рассматриваемых в классической механике деформируемого твердого тела тем, что растущее тело не обладает натуральной (свободной от напряжений) конфигурацией. Никакая его деформация не приводит к одновременной релаксации напряжений во всем теле. НДС таких тел может быть описано в рамках теории неоднородных, но материально единообразных тел, развитой в работах [13–15]. Представление тела как расслоение гладкого многообразия позволяет ввести гипотезы о свойствах составляющих его слоев, в частности, гипотезу о том, что каждый слой в отдельности обладает натуральной конфигурацией. Эта гипотеза принимается в настоящей работе.

Для описания НДС тела, растущего дискретным или непрерывным образом, необходимо определить НДС слоя как его составного элемента. В первом случае этот элемент представляет собой трехмерное тело  $\mathcal{B}_{n+1} \setminus \mathcal{B}_n$ , соответствующую инкременту последовательности (1), во втором случае — материальную поверхность  $\mathfrak{M}_\gamma$ , соответствующую слою расслоения (3). В рамках настоящей работы будем полагать, что тело-слой в отдельности обладает натуральной конфигурацией, погружаемой в евклидово пространство, но в совокупности слои не обладают таковой. Как уже отмечалось, в качестве модельного объекта, представляющего растущее тело, рассмотрим полый конечный цилиндр. Соединение элементов дискретного множества  $\mathcal{B}_N$  и континуального семейства  $\mathcal{B}_\gamma$ , определяющее состав растущего тела, будем называть сборками, что образно отражает характер процесса как при дискретном, так и при непрерывном росте.

В случае дискретного роста каждая сборка состоит из конечного числа вложенных полых цилиндрических слоев. Второй случай, конечно, более абстрактный: он соответствует сборке континуального множества слоев, каждый из которых представлен двумерным телом — материальной



поверхностью. Напряженное состояние, ассоциированное с материальной поверхностью, полагается реализуемым в составе некоторого тела, деформируемого из натурального состояния в евклидовом пространстве.

Будем полагать, что цилиндрические слои изготовлены из гиперупругого несжимаемого материала. Тогда их НДС может быть определено аналитически с помощью решений типа Ривлина–Эриксона [20]. Кратко остановимся на форме этого решения.

Пусть в образе свободной от напряжений (натуральной) конфигурации положения точки  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}_{n+1} \setminus \mathcal{B}_n$  тела-слоя с номером  $n$  в физическом (евклидовом) пространстве  $\mathcal{E}$  задаются векторным полем мест, которое может быть представлено в декартовом базисе  $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$  разложением  $\mathbf{X} = X^m \mathbf{i}_m$ , где  $\{X^1, X^2, X^3\}$  — декартовы координаты точки. Пусть деформация слоя в элемент сборки определяется отображением  $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}$ . Будем полагать, что это отображение обладает симметрией относительно общей оси цилиндрических слоев и не зависит от координаты  $X^3$ .

Для более компактной формулировки кинематических соотношений, определяющих деформацию, воспользуемся цилиндрическими координатами  $\{R, \Theta, Z\}$ :

$$X^1 = R \cos \Theta, \quad X^2 = R \sin \Theta, \quad X^3 = Z, \quad R = \sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2}.$$

В каждой точке  $\mathcal{E}$  цилиндрические координаты определяют локальный базис  $\{\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_Z\}$  и взаимный к нему базис  $\{\mathbf{e}^R, \mathbf{e}^\Theta, \mathbf{e}^Z\}$ . Элементы базисов могут быть представлены разложениями

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{e}^R = \mathbf{i}_1 \cos \Theta + \mathbf{i}_2 \sin \Theta, \quad \mathbf{e}_\Theta = -\mathbf{i}_1 R \sin \Theta + \mathbf{i}_2 R \cos \Theta, \quad \mathbf{e}^\Theta = \frac{\mathbf{e}_\Theta}{R^2}, \quad \mathbf{e}^Z = \mathbf{e}_Z = \mathbf{i}_3.$$

Представление отсчетных позиций точек цилиндрических слоев наиболее компактно выражается в форме разложения  $\mathbf{X} = R\mathbf{e}_R + Z\mathbf{e}_Z$ . Учитывая центральную симметрию смещений, их независимость от вертикальной координаты  $Z$  и условие несжимаемости  $|d\mathbf{x}/d\mathbf{X}| = 1$ , приходим к следующему классу отображений (универсальных деформаций, принадлежащих семейству 3 по классификации [20]):

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_R \sqrt{(\mathbf{e}^R \cdot \mathbf{X})^2 + a} + \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}^Z \cdot \mathbf{X}, \quad (4)$$

где  $a$  — параметр деформации, определяющий изменение радиуса внешней цилиндрической поверхности тела-слоя. Соответствующие градиент деформации<sup>2</sup>  $\mathbf{F}$  и левый тензор Коши–Грина  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^*$  (здесь и далее символ  $*$  обозначает операцию транспонирования) определяются разложениями по элементам локального базиса, соответствующего отсчетной позиции точки:

$$\mathbf{F} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a}} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \frac{\sqrt{R^2 + a}}{R^3} \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta + \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_Z, \\ \mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^* = \frac{R^2}{R^2 + a} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \frac{R^2 + a}{R^4} \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta + \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_Z.$$

Разложения тензора  $\mathbf{B}$  и обратного к нему  $\mathbf{B}^{-1}$  по элементам локального базиса  $\{\mathbf{e}^r, \mathbf{e}^\theta, \mathbf{e}^z\}$ , соответствующего актуальной позиции точки  $\mathbf{x}(\mathbf{X})$ , т. е.

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_\Theta = \frac{\sqrt{r^2 - a}}{r} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_Z = \mathbf{e}_z,$$

имеют вид

$$\mathbf{B} = \frac{r^2 - a}{r^2} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r^2 - a} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \quad (5) \\ \mathbf{B}^{-1} = \frac{r^2}{r^2 - a} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{r^2 - a}{r^4} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z.$$

<sup>2</sup>Следуя [20], будем полагать, что градиент деформации  $\mathbf{F}$  представляет линейный оператор, действующий на свой аргумент слева, т. е.

$$\mathbf{x}(\mathbf{X} + \Delta) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) + \mathbf{F} \cdot \Delta + o(\|\Delta\|).$$



Если цилиндрический слой изготовлен из несжимаемого материала типа Муни – Ривлина, то энергия деформации может быть представлена как линейная функция первого  $I_1 = I_1(\mathbf{B})$  и второго  $I_2 = I_2(\mathbf{B})$  инвариантов меры деформаций  $\mathbf{B}$ :

$$W(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3),$$

$$I_1 = \text{Tr} \mathbf{B} = 3 + \frac{a^2}{r^2(r^2 - a)}, \quad I_2 = 1/2 ((\text{Tr} \mathbf{B})^2 - \text{Tr}(\mathbf{B}^2)) = I_1.$$

Здесь  $C_1, C_2$  — экспериментально определяемые константы материала. Тензор напряжений Коши, определяемый для несжимаемой среды законом состояния  $\mathbf{T} = \partial W / \partial \mathbf{B}$ , может быть определен с точностью до гидростатического давления  $p$  формулой [8]:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + J_1\mathbf{B} + J_{-1}\mathbf{B}^{-1},$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор, представляющий тождественное преобразование в  $\mathcal{E}$ ,  $J_1 = 2\partial W / \partial I_1 = 2C_1$  и  $J_{-1} = -2\partial W / \partial I_2 = -2C_2$  — коэффициенты реакции материала. Заметим, что константы материала  $C_1, C_2$  могут быть определены через другую пару (инженерных) материальных постоянных  $\mu, \beta$ :

$$C_1 = \mu(1 + \beta)/4, \quad C_2 = \mu(1 - \beta)/4.$$

При этом постоянная  $\mu$  соответствует модулю сдвига при малых деформациях, а  $\beta$  определяет дополнительную параметрическую степень свободы закона состояния. Из термодинамических соображений  $-1 < \beta < 1$  [20].

В результате элементарных вычислений приходим к выражению

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T^{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + T^{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + T^{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\ T^{rr} &= -p + J_1 \frac{r^2 - a}{r^2} + J_{-1} \frac{r^2}{r^2 - a}, \quad T^{\theta\theta} = -\frac{p}{r^2} + J_1 \frac{1}{r^2 - a} + J_{-1} \frac{r^2 - a}{r^4}, \\ T^{zz} &= -p + J_1 + J_{-1}. \end{aligned}$$

Гидростатическая компонента напряжений определяется из уравнения равновесия  $\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$ , которое в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии имеет вид

$$\frac{T^{rr}}{r} - rT^{\theta\theta} + \frac{\partial T^{rr}}{\partial r} = 0. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) может быть записано в квадратурах

$$T^{rr} = \int \left( rT^{\theta\theta} - \frac{T^{rr}}{r} \right) dr = \int (J_1 - J_{-1}) \left( \frac{r}{r^2 - a} - \frac{r^2 - a}{r^3} \right) dr. \tag{7}$$

Интегрируя равенство (7), с учетом формул (6) будем иметь:

$$\begin{aligned} T^{rr} &= \frac{\mu}{2} \left( \ln \frac{r^2 - a}{r^2} - \frac{a}{r^2} \right) + p_0, \quad T^{\theta\theta} = \frac{T^{rr}}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{r^2}{r^2 - a} - \frac{r^2 - a}{r^2} \right), \\ T^{zz} &= T^{rr} + \mu a \frac{r^2 - (1 + \beta)a/2}{r^2(r^2 - a)}, \end{aligned} \tag{8}$$

где  $p_0$  — постоянная интегрирования. Заметим, что в физическом базисе  $\mathbf{e}_{(r)} = \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_{(\theta)} = \mathbf{e}_\theta / r$ ,  $\mathbf{e}_{(z)} = \mathbf{e}_z$  компоненты напряжений имеют вид

$$T_{(rr)} = T^{rr}, \quad T_{(\theta\theta)} = T^{\theta\theta} r^2, \quad T_{(zz)} = T^{zz}.$$

**Замечание 1.** Деформации вида (4) принадлежат к классу контролируемых деформаций: они могут быть реализованы, если к граничным поверхностям приложить специальным образом подобранные поверхностные силы.





Ввиду того что деформации заданы с точностью до параметра  $a$ , а поле напряжений с точностью до постоянной  $p_0$ , возможно точно удовлетворить граничные условия на цилиндрических поверхностях, если на них задана постоянная гидростатическая нагрузка интенсивностью  $p_i$  и  $p_e$ :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^r \Big|_{r=r_i} = p_i \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^r \Big|_{r=r_e} = p_e \mathbf{e}_r, \quad (9)$$

где  $r_i, r_e$  — радиусы внутренней (*internis*) и внешней (*exterius*) цилиндрических граничных поверхностей.

Подстановка выражений для радиальных компонент напряжений (8) в граничные условия (9) с учетом кинематических соотношений (4) приводит к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{\mu}{2} \left( \ln \frac{R_i^2}{R_i^2 + a} - \frac{a}{R_i^2 + a} \right) + p_0 = p_i, \\ \frac{\mu}{2} \left( \ln \frac{R_e^2}{R_e^2 + a} - \frac{a}{R_e^2 + a} \right) + p_0 = p_e, \end{cases}$$

где  $R_i = \sqrt{r_i^2 - a}$ ,  $R_e = \sqrt{r_e^2 - a}$  — отсчетные значения радиусов граничных поверхностей. Исключая  $p_0$  из полученной системы, приходим к уравнению относительно параметра деформации  $a$ :

$$\ln \left( \frac{R_i^2 R_e^2 + a}{R_e^2 R_i^2 + a} \right) = 2 \frac{p_i - p_e}{\mu} + a \frac{R_e^2 - R_i^2}{(R_i^2 + a)(R_e^2 + a)}.$$

Вводя новую переменную — относительный параметр деформации  $x = a/R_e^2$  — и потенцируя левую и правую части полученного выражения, получим уравнение в виде

$$F = 0, \quad F = \frac{1+x}{\gamma+x} - \frac{A}{\gamma} e^{x \frac{1-\gamma}{(1+x)(\gamma+x)}}. \quad (10)$$

Здесь  $\gamma = R_i^2/R_e^2$ ,  $A = \exp[2(p_i - p_e)/\mu]$ . Поскольку внутренний отсчетный радиус не может превышать внешнего и является положительной величиной, то  $0 < \gamma < 1$ . Кроме того, для того чтобы под знаком корня в выражении для отсчетного значения радиуса внутренней граничной поверхности была положительная величина, следует потребовать выполнения неравенства  $x > -\gamma$ . Из предельных соотношений

$$\lim_{x \rightarrow -\gamma} F = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F = 1 - \frac{A}{\gamma}$$

следует, что уравнение (10) имеет решение при условии  $A > \gamma$ , т. е. для заданной величины  $\gamma$  имеется ограничение для разности интенсивностей гидростатической нагрузки:  $p_i - p_e > \mu/2 \ln \gamma$ .

**Замечание 2.** Решение трансцендентного уравнения (10) можно найти аналитически с помощью метода обращения степенного ряда (метода Лагранжа). Для этого уравнение (10) разрешается относительно параметра  $A$ :

$$A = \gamma \frac{1+x}{\gamma+x} e^{x \frac{\gamma-1}{(1+x)(\gamma+x)}}.$$

и полученное выражение раскладывается в ряд Тейлора в окрестностях точек  $x_0 = 1$  и бесконечно удаленной точки. Для формулировки общих членов разложений в аналитическом виде воспользуемся формулой Лейбница для производной произведения и формулой Фаа-ди-Бруно для производной  $n$ -го порядка сложной функции:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{k=1}^n f^{(k)}(g(x)) B_{n,k} \left( g'(x), g''(x), \dots, g^{(n-k+1)}(x) \right).$$

Здесь  $B_{n,k}$  — полиномы Белла

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \dots, x_{n-k+1}) = \sum \frac{n!}{J_1! J_2! \dots J_{n-k+1}!} \left( \frac{x_1}{1!} \right)^{J_1} \left( \frac{x_2}{2!} \right)^{J_2} \dots \left( \frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!} \right)^{J_{n-k+1}},$$

при вычислении которых сумма берется по всем последовательностям  $J_1, J_2, \dots, J_{n-k+1}$  неотрицательных целых чисел таких, что

$$J_1 + J_2 + \dots + J_{n-k+1} = k, \quad J_1 + 2J_2 + 3J_3 + \dots + (n-k+1)J_{n-k+1} = n.$$



В результате разложения приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{p=0}^{\infty} A_p^1 \frac{(x-1)^p}{p!} \text{ при } -\gamma < x < 2 + \gamma, & A &= \sum_{p=0}^{\infty} A_p^{\infty} \frac{1}{x^p p!} \text{ при } 1 < x < \infty, & (11) \\
 A_p^1 &= e^{\frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)}} \sum_{k=0}^n q_{n,k}^1 \sum_{m=0}^k B_{k,m}(x_1^1, \dots, x_{n-k+1}^1), & A_p^{\infty} &= \sum_{k=0}^n q_{n,k}^{\infty} \sum_{m=0}^k B_{k,m}(x_1^{\infty}, \dots, x_{n-k+1}^{\infty}), \\
 x_p^1 &= (-1)^p p! (\gamma(\gamma+1)^{-p-1} - 2^{-p-1}), & x_p^{\infty} &= (-1)^p p! (1 - \gamma^p), \\
 q_{n,k}^1 &= (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \begin{cases} \gamma(1-\gamma)(\gamma+1)^{k-n-1}, & n-k > 0, \\ 2\gamma(\gamma+1)^{-1}, & n-k = 0, \end{cases} \\
 q_{n,k}^{\infty} &= (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \begin{cases} \gamma^{n-k}(\gamma-1), & n-k > 0, \\ \gamma, & n-k = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Величины первых членов прямых разложений (11) отличны от нуля, что позволяет воспользоваться процедурой обращения степенных рядов [23] и выразить относительный параметр деформации  $x$  в форме аналитической зависимости от параметра  $A$ .

По найденному  $x$  определяется абсолютный параметр деформации  $a = R_e^1 x$  и соответствующее значение  $p_0$ . Таким образом, для заданных значений гидростатических нагрузок  $P_i, P_e$  и отсчетных радиусов граничных поверхностей  $R_i, R_e$  определены параметры  $a, p$  и соответственно закон деформирования (4), компоненты тензоров деформации (5) и напряжений (8).

В дальнейшем понадобится выражение для напряжений на поверхностях  $\theta = \text{const}$ . Соответствующий этим напряжениям главный вектор, который будем называть вектором натяга, имеет следующее выражение:

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_{\langle\theta\rangle} \int_0^h \int_{r_i}^{r_e} T_{\langle\theta\theta\rangle} dr = \mathbf{e}_{\langle\theta\rangle} h (r_e T_{\langle rr\rangle}|_{r=r_e} - r_i T_{\langle rr\rangle}|_{r=r_i}). \quad (12)$$

### 3. ДИСКРЕТНОЕ НАРАЩИВАНИЕ

Пусть имеются конечные множества тел, которые в натуральной конфигурации представляют собой полые цилиндры с одинаковой высотой  $h$ , деформируемые преобразованием (4) в полые цилиндры той же высоты, но другой толщины. Такая деформация может быть реализована, например, при расширении полого цилиндра, основания которого лежат на полых гладких плитах. Будем полагать, что образы актуальных конфигураций тел этого множества попарно не пересекаются, а их объединение представляет связное множество — полый цилиндр. Этим определяется геометрически идеальный контакт тел по цилиндрическим поверхностям. Полученное в результате составное тело можно рассматривать как результат дискретного наращивания, если после соединения слоев возникают связи, препятствующие независимому деформированию этих тел-слоев.

Пусть имеется  $N$  тел-слоев. Предположим, что реализуется следующий сценарий роста. Осуществляется соединение 1-го тела-слоя со вторым, в результате чего образуется составное тело, которое будем называть первой сборкой. Затем присоединяется 3-е тело-слой, в результате чего получается 2-я сборка и т.д. На внутренней  $r = r_{i,n}^1$  и внешней границах  $r = r_{e,n}^n$  растущего тела, состоящего из  $n$  тел-слоев ( $n \leq N$ ), заданы равномерно распределенные давления  $p_{i,n}$  и  $p_{e,n}$ :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^r |_{r=r_{i,n}^1} = p_{i,n} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^r |_{r=r_{e,n}^n} = p_{e,n} \mathbf{e}_r. \quad (13)$$

Индекс  $n$  после запятой указывает на номер сборки, а индексация в обозначениях интенсивности гидростатических нагрузок — на то, что они, вообще говоря, изменяются при переходе от одной сборки к другой. Полагаем, что тела-слои находятся в идеальном контакте, т. е. внутренняя поверхность  $k$ -го слоя и внешняя поверхность  $k+1$ -го слоя в образе актуальной конфигурации совпадают, а напряжения на них самоуравновешены, т.е.

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^r |_{r=r_{e,n}^k} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^r |_{r=r_{i,n}^{k+1}}, \quad r_{e,n}^k = r_{i,n}^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (14)$$



Параметры деформации  $a_n^k$  и параметры  $p_{0,n}^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  для каждого тела-слоя находятся из системы  $2n$  нелинейных уравнений (13), (14). С учетом (4), (8) эта система принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\mu}{2} \left[ \ln \frac{(R_i^1)^2}{(R_i^1)^2 + a_n^1} - \frac{a_n^1}{(R_i^1)^2 + a_n^1} \right] + p_{0,n}^1 = p_{i,n}, & \frac{\mu}{2} \left[ \ln \frac{(R_e^n)^2}{(R_e^n)^2 + a_n^n} - \frac{a_n^n}{(R_e^n)^2 + a_n^n} \right] + p_{0,n}^n = p_{e,n}, \\ \frac{\mu}{2} \left[ \ln \frac{(R_e^k)^2}{(R_e^k)^2 + a_n^k} - \frac{a_n^k}{(R_e^k)^2 + a_n^k} \right] + p_{0,n}^k = \frac{\mu}{2} \left[ \ln \frac{(R_i^{k+1})^2}{(R_i^{k+1})^2 + a_n^{k+1}} - \frac{a_n^{k+1}}{(R_i^{k+1})^2 + a_n^{k+1}} \right] + p_{0,n}^{k+1}, \\ (R_e^k)^2 + a_n^k = (R_i^{k+1})^2 + a_n^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (15)$$

Исключение переменных, характеризующих гидростатическую компоненту в каждом слое  $p_{0,n}^1, p_{0,n}^2, \dots, p_{0,n}^n$ , дает систему  $n$  уравнений относительно переменных  $a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^n$ , т. е.

$$\ln \left( \frac{(R_i^1)^2 (R_i^2)^2}{(R_e^1)^2 (R_e^2)^2} \cdots \frac{(R_i^n)^2 (R_e^1)^2 + a_n^1 (R_e^2)^2 + a_n^2}{(R_e^n)^2 (R_i^1)^2 + a_n^1 (R_i^2)^2 + a_n^2} \cdots \frac{(R_e^n)^2 + a_n^n}{(R_i^n)^2 + a_n^n} \right) - a_n^1 \left( \frac{1}{(R_i^1)^2 + a_n^1} - \frac{1}{(R_e^1)^2 + a_n^1} \right) - \dots - a_n^n \left( \frac{1}{(R_i^n)^2 + a_n^n} - \frac{1}{(R_e^n)^2 + a_n^n} \right) = 2 \frac{p_{i,n} - p_{e,n}}{\mu}, \quad (16)$$

$$a_n^k = a_n^1 + \sum_{p=2}^k \left( (R_e^{p-1})^2 - (R_i^p)^2 \right), \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (17)$$

Исключение переменных  $a_n^2, a_n^3, \dots, a_n^n$  приводит к одному уравнению относительно  $a_n^1$

$$\ln \left[ \prod_{k=1}^n \left( \gamma_k \frac{1 + (a_n^1 + A_k)/(R_e^k)^2}{\gamma_k + (a_n^1 + A_k)/(R_e^k)^2} \right) \right] - \sum_{k=1}^n \frac{[(R_e^k)^2 - (R_i^k)^2] (a_n^1 + A_k)}{((R_i^k)^2 + a_n^1 + A_k)((R_e^k)^2 + a_n^1 + A_k)} = B_n,$$

где использованы следующие обозначения:

$$\gamma_k = \left( \frac{R_i^k}{R_e^k} \right)^2, \quad A_1 = 0, \quad A_k = \sum_{p=2}^k \left( (R_e^{p-1})^2 - (R_i^p)^2 \right), \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad B_n = 2 \frac{p_{i,n} - p_{e,n}}{\mu}.$$

Пусть  $\alpha_k = 1 + A_k/(R_e^k)^2$ ,  $\beta_k = \gamma_k + A_k/(R_e^k)^2$ ,  $\nu_k = (R_i^1)^2/(R_e^k)^2$ ,  $x_n = a_n^1/(R_e^1)^2$ . Имеем:

$$\ln \left[ \prod_{k=1}^n \gamma_k \frac{\alpha_k + \nu_k x_n}{\beta_k + \nu_k x_n} \right] - \sum_{k=1}^n \left[ (1 - \gamma_k) \frac{\nu_k x_n + \alpha_k - 1}{(\beta_k + \nu_k x_n)(\alpha_k + \nu_k x_n)} \right] = B_n.$$

В результате потенцирования левой и правой частей уравнения приходим к следующей его форме:

$$\prod_{k=1}^n \gamma_k \frac{\alpha_k + \nu_k x_n}{\beta_k + \nu_k x_n} = W_n \exp \left[ \sum_{k=1}^n (1 - \gamma_k) \frac{\nu_k x_n + \alpha_k - 1}{(\beta_k + \nu_k x_n)(\alpha_k + \nu_k x_n)} \right], \quad W_n = e^{2 \frac{p_{i,n} - p_{e,n}}{\mu}}. \quad (18)$$

Будем различать следующие виды наращивания.

1. Наращивание с заданной отсчетной геометрией. Полагаем, что заданы геометрические характеристики тел-слоев  $\mathcal{B}_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ), в образе натуральной конфигурации, т. е. отсчетные радиусы ненапряженных тел-слоев  $R_i^k$  и  $R_e^k$ .
2. Наращивание с заданной актуальной геометрией. Задано положение растущей границы в образе актуальной конфигурации  $\mathcal{R}_n$ , толщины тел-слоев в образе отсчетной конфигурации, т. е. величины  $\Delta^k = R_e^k - R_i^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
3. Наращивание с заданным натягом  $\mathcal{T}_n$ . Задано среднее значение окружных напряжений, вычисленных по формуле (12) в каждом теле-слое в момент его присоединения к растущему телу, а также, как и в предыдущем пункте, толщины тел-слоев в образе отсчетной конфигурации.

Рассмотрим каждый из этих типов наращивания подробнее.

*Тип 1. Наращивание с заданной отсчетной геометрией.* По заданным значениям отсчетных радиусов  $R_i^k$ ,  $R_e^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , вычисляются значения  $\alpha_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\nu_k$ , а по заданным значениям гидростатической нагрузки  $p_{i,n}$ ,  $p_{e,n}$  вычисляются значения  $W_n$ . В результате приходим к последовательности несвязанных нелинейных уравнений (18), из решения которых независимо определяются



параметры деформации  $x_n$ . При решении уравнений могут быть использованы представления, указанные в *замечании 2*. По формулам (17) вычисляются параметры  $a_n^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , а из соотношений (8) определяются напряжения.

*Тип 2. Нарастивание с заданной актуальной геометрией.* В этом случае отсчетные радиусы тел слоев заранее не известны, а уравнения (18) дополняются уравнениями, задающими радиус растущей границы  $\mathcal{R}_n$  в образах промежуточных конфигураций:

$$r_{e,n}^n = \sqrt{(R_e^n)^2 + a_n^n} = \mathcal{R}_n.$$

Для анализа системы уравнений вначале выделим в левой и правой частях уравнения (18) члены, отвечающие слою с номером  $n$ :

$$\begin{aligned} & \gamma_n \frac{\alpha_n + \nu_n x_n}{\beta_n + \nu_n x_n} \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k \frac{\alpha_k + \nu_k x_n}{\beta_k + \nu_k x_n} = \\ & = W_n \exp \left[ \frac{(1 - \gamma_n)(\nu_n x_n + \alpha_n - 1)}{(\beta_n + \nu_n x_n)(\alpha_n + \nu_n x_n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1 - \gamma_k)(\nu_k x_n + \alpha_k - 1)}{(\beta_k + \nu_k x_n)(\alpha_k + \nu_k x_n)} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Величины  $\gamma_n$ ,  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\nu_n$ , в отличие от нарастивания по *типу 1*, не могут быть заданы заранее, поскольку они зависят от безразмерного параметра деформации первого слоя  $x_n$ . Действительно, так как

$$(R_e^n)^2 = \mathcal{R}_n^2 - a_n^n = \mathcal{R}_n^2 - (R_e^1)^2 x_n - A_n, \quad R_i^n = R_e^n - \Delta^n,$$

то выражение для  $A_n$

$$A_n = A_{n-1} + (R_e^{n-1})^2 - (R_i^n)^2$$

в действительности оказывается алгебраическим уравнением, решение которого определяет  $A_n$  через параметры с индексами  $m < n$ , актуальный радиус растущей границы  $\mathcal{R}_n$  и параметр деформации  $x_n$ , т. е.

$$A_n = A_{n-1} + (R_e^{n-1})^2 - \left( \sqrt{\mathcal{R}_n^2 - (R_e^1)^2 x_n - A_n} - \Delta^n \right)^2.$$

Решение этого уравнения приводит к явному выражению для  $A_n$ :

$$A_n = \mathcal{R}_n^2 - (R_e^1)^2 x_n - \left( \frac{\mathcal{R}_n^2 - A_{n-1} - (R_e^{n-1})^2 - (R_e^1)^2 x_n + (\Delta^n)^2}{2\Delta^n} \right)^2$$

и соответственно к явным выражениям для  $\gamma_n$ ,  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\nu_n$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \left( 1 - \frac{2(\Delta^n)^2}{\mathcal{H}_n - (R_e^1)^2 x_n} \right)^2, \quad \alpha_n = 1 + \nu_n \left[ \frac{\mathcal{R}_n^2}{(R_e^1)^2} - x_n - \left( \frac{\mathcal{H}_n - (R_e^1)^2 x_n}{2R_e^1 \Delta^n} \right)^2 \right], \\ \beta_n &= \nu_n \frac{A_{n-1} + (R_e^{n-1})^2}{(R_e^1)^2}, \quad \nu_n = 4 \left( \frac{R_e^1 \Delta^n}{\mathcal{H}_n - (R_e^1)^2 x_n} \right)^2, \\ \mathcal{H}_n &= \mathcal{R}_n^2 - A_{n-1} - (R_e^{n-1})^2 + (\Delta^n)^2. \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (19) приводит его к явному виду:

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{2\xi_n}{\sigma_n - x_n} \right)^2 \frac{\zeta_n}{\phi_{n-1} + x_n} \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k \frac{\alpha_k + \nu_k x_n}{\beta_k + \nu_k x_n} = \\ & = W_n \exp \left[ \frac{\sigma_n - x_n - \xi_n}{\phi_{n-1} + x_n} \left( 1 - \frac{(\sigma_n - x_n)^2}{4\zeta_n \xi_n} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1 - \gamma_k)(\nu_k x_n + \alpha_k - 1)}{(\beta_k + \nu_k x_n)(\alpha_k + \nu_k x_n)} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$\xi_n = \left( \frac{\Delta^n}{R_e^1} \right)^2, \quad \sigma_n = \frac{\mathcal{H}_n}{(R_e^1)^2}, \quad \zeta_n = \left( \frac{\mathcal{R}_n}{R_e^1} \right)^2, \quad \phi_{n-1} = \frac{A_{n-1} + (R_e^{n-1})^2}{(R_e^1)^2}.$$

Решая последовательно эти уравнения, находим параметры  $x_n$ .



Тип 3. Наращивание с заданным натягом. Известно значение натяга  $\mathcal{T}_n$  в последнем теле-слое. Согласно формуле (12) это значение определяется так:

$$\mathcal{T}_n = h \left( rT_{(rr)}|_{r=r_{e,n}^n} - rT_{(rr)}|_{r=r_{i,n}^n} \right).$$

Заметив, что  $T_{(rr)}|_{r=r_{e,n}^n} = p_e^n$ , будем иметь:

$$\frac{2(\mathcal{T}_n/h - (\sqrt{(R_i^n)^2 + a_n^n} - \sqrt{(R_e^n)^2 + a_n^n})p_e^n)}{\mu\sqrt{(R_e^n)^2 + a_n^n}} = \ln \frac{(R_e^n)^2((R_i^n)^2 + a_n^n)}{((R_i^n)^2 + a_n^n)(R_i^n)^2} + a_n^n \left( \frac{1}{(R_i^n)^2 + a_n^n} - \frac{1}{(R_e^n)^2 + a_n^n} \right).$$

В этом случае при каждой  $n$ -й сборке придется решать следующую систему нелинейных уравнений для определения  $R_0^n, R_1^n, a_{1,n}$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \ln \frac{(R_e^k)^2((R_i^k)^2 + a_n^k)}{((R_i^k)^2 + a_n^k)(R_i^k)^2} + a_n^k \left( \frac{1}{(R_i^k)^2 + a_n^k} - \frac{1}{(R_e^k)^2 + a_n^k} \right) \right] + \\ + \frac{2(\mathcal{T}_n/h - (\sqrt{(R_i^k)^2 + a_n^k} - \sqrt{(R_e^k)^2 + a_n^k})p_e^n)}{\mu\sqrt{(R_e^k)^2 + a_n^k}} = 2 \frac{p_e^n - p_i^n}{\mu}, \\ \frac{2(\mathcal{T}_n/h - (\sqrt{(R_i^n)^2 + a_n^n} - \sqrt{(R_e^n)^2 + a_n^n})p_e^n)}{\mu\sqrt{(R_e^n)^2 + a_n^n}} = \\ = \ln \frac{(R_e^n)^2((R_i^n)^2 + a_n^n)}{((R_i^n)^2 + a_n^n)(R_i^n)^2} + a_n^n \left( \frac{1}{(R_i^n)^2 + a_n^n} - \frac{1}{(R_e^n)^2 + a_n^n} \right). \end{cases} \quad (21)$$

#### 4. НЕПРЕРЫВНОЕ НАРАЩИВАНИЕ

С физической точки зрения непрерывное наращивание представляет непрерывный процесс присоединения к растущему телу континуального семейства предварительно деформированных материальных поверхностей  $\mathfrak{M}_\gamma$ . При этом НДС растущего тела зависит как от внешних силовых полей, так и предварительной деформации материальных поверхностей, образующих тело.

Для анализа НДС удобно ввести некоторую промежуточную конфигурацию, образ которой не свободен от напряжений, но его можно погрузить в евклидово пространство. Все величины, отнесенные к промежуточной конфигурации, далее обозначаются символом с тильдой ( $\sim$ ). В частности, локальный базис, отвечающий положению материальной точки в промежуточной конфигурации  $\tilde{x}(X)$ , обозначим символами  $\mathbf{e}_{\tilde{r}}, \mathbf{e}_{\tilde{\theta}}, \mathbf{e}_{\tilde{z}}$ . Если от этой конфигурации потребовать выполнения дополнительного условия: локальная конфигурация в окрестности любой внутренней точки не изменяется в процессе роста, то полная локальная деформация, трансформирующая окрестность материальной точки из ненапряженного состояния в напряженное соответствует актуальной конфигурации растущего тела, может быть представлена в виде мультипликативной декомпозиции:

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}, \quad \text{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \text{rot} \mathbf{K} \neq \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{0},$$

где  $\dot{\mathbf{K}}$  обозначает производную по времени, либо по времяподобному параметру процесса.

В общем случае промежуточная конфигурация не согласована с актуальными внешними полями, действующими на растущее тело. Это означает, что для реализации этой конфигурации необходимо к телу приложить некоторую систему фиктивных массовых и поверхностных сил, которые имеют характер сил Эшелби [24].

Имея в виду идею о расслоении растущего тела на континуальное семейство материальных поверхностей, каждая из которых в отдельности обладает натуральной, т. е. свободной от напряжений конфигурацией в евклидовом пространстве, эту систему фиктивных сил можно представить континуальным семейством поверхностных нагрузок, удерживающих каждую поверхность в составе образа промежуточной конфигурации. При этом с каждой поверхностью может быть ассоциирована деформация, трансформирующая материальную поверхность из ненапряженного состояния в ее образ в составе промежуточной конфигурации:

$$\mathbf{K} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \alpha(R)}} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}^R + \frac{\sqrt{R^2 + \alpha(R)}}{R} \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}^\Theta + \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}^Z.$$



Заметим, что перенос полей в трехмерное пространство и объединение их в единое поле линейных преобразований порождает гладкое трехмерное поле тензоров второго ранга, которое не является градиентом никакого поля мест, реализуемого в евклидовом пространстве. Кроме того, следует отметить, что в натуральном состоянии множество поверхностей (до деформации полем  $\mathbf{K}$ ) не образуют связанного множества в евклидовом пространстве, а после преобразования полем  $\mathbf{K}$  образуют связанное множество, которое может быть рассмотрено как образ напряженной отсчетной конфигурации. Она подвергается совместной деформации  $\mathbf{F}$ , имеющей вид

$$\mathbf{F} = \frac{\tilde{r}}{\sqrt{\tilde{r}^2 + A(t)}} \mathbf{e}_{\tilde{r}} \otimes \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \frac{\sqrt{\tilde{r}^2 + A(t)}}{\tilde{r}} \mathbf{e}_{\tilde{\theta}} \otimes \mathbf{e}_{\tilde{\theta}} + \mathbf{e}_{\tilde{z}} \otimes \mathbf{e}_{\tilde{z}}.$$

В этом случае полная дисторсия и соответствующее поле деформаций могут быть представлены следующими выражениями:

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*,$$

$$\mathbf{H}(\tilde{r}, t) = \frac{\sqrt{\tilde{r}^2 - \alpha(\tilde{r})}}{\sqrt{\tilde{r}^2 + A(t)}} \mathbf{e}_{\tilde{r}} \otimes \mathbf{e}_{\tilde{r}} + \frac{\sqrt{\tilde{r}^2 + A(t)}}{\sqrt{\tilde{r}^2 - \alpha(\tilde{r})}} \mathbf{e}_{\tilde{\theta}} \otimes \mathbf{e}_{\tilde{\theta}} + \mathbf{e}_{\tilde{z}} \otimes \mathbf{e}_{\tilde{z}}.$$

Рассматривая общий случай, будем полагать, что наращивание производится на некоторое начальное тело, которое представляет собой полый цилиндр, свободный от напряжений в начальный момент времени. Его внутренний и внешний радиусы равны соответственно  $\tilde{r}_i, \tilde{r}_e$ .

Цилиндрические материальные поверхности присоединяются к внешней части тела, непрерывно увеличивая его радиус в промежуточной конфигурации. Текущее значение этого радиуса обозначим  $r_g$ . Пусть на цилиндрических поверхностях растущего тела заданы гидростатические нагрузки  $p_e$  и  $p_i$ , т. е.

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{\tilde{r}}|_{\tilde{r}=\tilde{r}_i} = p_i \mathbf{e}_{\tilde{r}}, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{\tilde{r}}|_{\tilde{r}=\tilde{r}_e} = p_e \mathbf{e}_{\tilde{r}}. \quad (22)$$

Тогда физические компоненты тензора напряжений, вызванные локальной деформацией  $\mathbf{H}$ , могут быть представлены следующими формулами:

$$T_{\langle \tilde{r}\tilde{r} \rangle} = \begin{cases} I(\tilde{r}, A) + p_i, & \tilde{r}_i \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_e, \\ I(\tilde{r}_e, A) + p_i + \int_{\tilde{r}_e}^{\tilde{r}} \rho \left( \frac{1}{\rho^2 - \alpha} - \frac{\rho^2 - \alpha}{(\rho^2 + A)^2} \right) d\rho, & \tilde{r}_e \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_g, \end{cases}$$

$$T_{\langle \tilde{\theta}\tilde{\theta} \rangle} = T_{\langle \tilde{r}\tilde{r} \rangle} + \begin{cases} \frac{\tilde{r}^2 + A}{\tilde{r}^2} - \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2 + A}, & \tilde{r}_i \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_e, \\ \frac{\tilde{r}^2 + A}{\tilde{r}^2 - \alpha} - \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2 + A}, & \tilde{r}_e \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_g, \end{cases} \quad (23)$$

$$T_{\langle \tilde{z}\tilde{z} \rangle} = T_{\langle \tilde{r}\tilde{r} \rangle} + \begin{cases} \frac{\tilde{r}^2 + A - (1 + \beta)A/2}{(\tilde{r}^2 + A)\tilde{r}^2} A, & \tilde{r}_i \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_e, \\ \frac{\tilde{r}^2 + A - (1 + \beta)(A + \alpha)/2}{(\tilde{r}^2 + A)(\tilde{r}^2 + \alpha)} (A + \alpha), & \tilde{r}_e \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_g, \end{cases}$$

$$I(\tilde{r}, A) = \int_{\tilde{r}_i}^{\tilde{r}} \rho \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{(\rho^2 + A)^2} \right) d\rho = \ln \frac{\tilde{r} \sqrt{A + \tilde{r}_i^2}}{r_i \sqrt{A + \tilde{r}_i^2}} - \frac{A}{2} \left( \frac{1}{A + \tilde{r}_i^2} + \frac{1}{A + \tilde{r}_i^2} \right).$$

Радиальные напряжения  $T_{\langle \tilde{r}\tilde{r} \rangle}$  в окрестности растущей границы задаются формулой

$$T_{\langle \tilde{r}\tilde{r} \rangle} = I(\tilde{r}_e, A) + p_i + \int_{\tilde{r}_e}^{\tilde{r}_g} \rho \left( \frac{1}{\rho^2 - \alpha} - \frac{\rho^2 - \alpha}{(\rho^2 + A)^2} \right) d\rho. \quad (24)$$

Окружные напряжения  $T_{\langle \tilde{\theta}\tilde{\theta} \rangle}$  в окрестности растущей границы могут быть определены соотношением

$$T_{\langle \tilde{\theta}\tilde{\theta} \rangle}|_{\tilde{r}=\tilde{r}_g} = p_e + \frac{\tilde{r}^2 + A}{\tilde{r}^2 - \alpha(\tilde{r}_g)} - \frac{\tilde{r}^2 - \alpha(\tilde{r}_g)}{\tilde{r}^2 + A}. \quad (25)$$





Радиус внешней цилиндрической границы в актуальной конфигурации определяется равенством

$$r_g = \sqrt{\tilde{r}_g^2 + A}. \quad (26)$$

Темп изменения материального состава тела может быть задан функцией  $V(t)$ , определяющей закон изменения объема растущего тела в ходе процесса роста. В силу несжимаемости материала она инвариантна относительно перехода к различным конфигурациям. В предположении, что внутренний радиус  $\tilde{r}_i$  не изменяется во времени, радиус растущей границы  $r_g$  может быть определен следующим образом:

$$\tilde{r}_g = \sqrt{V(t)/(\pi h) + \tilde{r}_i^2}. \quad (27)$$

Рассмотрим типы наращивания, аналогичные рассмотренным в случае дискретного наращивания. Считаем, что во всех случаях известен объем тела, т. е.  $V(t)$ , а также начальные размеры начальной части.

*Тип 1. Наращивание с заданной дисторсией.* Задается функция дисторсии  $\alpha = \alpha(\tilde{r})$ . Для определения поля напряжений требуется найти параметр  $A(t)$ , который определяется неявно уравнением

$$F(A) = \Delta p, \quad F(A) = I(\tilde{r}_e, A) + \int_{\tilde{r}_e}^{\tilde{r}_g} \rho \left( \frac{1}{\rho^2 - \alpha} - \frac{\rho^2 - \alpha}{(\rho^2 + A)^2} \right) d\rho. \quad (28)$$

Здесь  $\Delta p = (p_e - p_i)/\mu$ . При заданной зависимости  $\alpha(\tilde{r})$  и найденной зависимости  $A(t)$  напряжения, возникающие в растущем теле в процессе роста, определяются соотношением (23).

*Тип 2. Наращивание с заданной поверхностью роста.* Задано положение образа границы роста в актуальной конфигурации. В отношении к рассматриваемому примеру это означает, что задана функция  $z = r_g(t)$ . Поскольку радиальная координата растущей границы в промежуточной конфигурации задается соотношением (27), то параметр  $A$  определяется из уравнения (26), т. е.

$$A = z^2 - \tilde{r}_g^2. \quad (29)$$

Подстановка выражений (29) и (24) в краевые условия (22) приводит к интегральному уравнению относительно  $\alpha(\tilde{r})$  т. е.

$$\int_{\tilde{r}_i}^x \rho \left( \frac{1}{\rho^2 - \alpha} - \frac{\rho^2 - \alpha(\rho)}{(\rho^2 + z^2(x) - x^2)^2} \right) d\rho = \Delta p - I(\tilde{r}, z^2(x) - x^2), \quad \Delta p = (p_e - p_i)/\mu.$$

В результате замены переменных  $\xi = \rho^2$ ,  $y = \rho^2 - \alpha(\rho)$ ,  $\zeta = x^2$ , приходим к интегральному уравнению:

$$\int_a^\zeta \left( \frac{1}{y(\xi)} - \frac{y(\xi)}{(\xi - A(\zeta))^2} \right) d\xi = Q(\xi) \quad (30)$$

относительно функции  $y(\xi)$  при заданных функциях  $A(\zeta) = z^2(\sqrt{\xi}) - \zeta$  и  $Q(\zeta) = 2(\Delta p(\sqrt{\xi}) - I(\tilde{r}_e, A(\zeta)))$ .

Решение этого уравнения определяет функцию  $\alpha(\rho)$  и, следовательно, все компоненты напряжений (23).

*Тип 3. Наращивание с заданным натягом.* Задан натяг в присоединяемом слое, т. е. в случае непрерывного наращивания известно  $T_{(\tilde{\theta}\tilde{\theta})}(t)$  на поверхности роста.

Из уравнения  $T_{\langle \tilde{\theta}\tilde{\theta} \rangle}|_{r=r_g} = \mathcal{T}$  и соотношения (25) вытекает, что алгебраическое соотношение между параметрами  $A$  и  $\tilde{r}_g$  имеет вид

$$r_g^2 + A = \frac{\tilde{r}_g^2 - \alpha(\tilde{r}_g)}{2} \left( q \pm \sqrt{q^2 + 4} \right), \quad q = \frac{\mathcal{T} - p_e}{\mu}. \quad (31)$$

Поскольку должны выполняться неравенства  $\tilde{r}_g^2 + A \geq 0$ ,  $\tilde{r}_g^2 - \alpha \geq 0$ , то в выражении (31) перед радикалом следует использовать знак «плюс». Таким образом, имеем:

$$A = \frac{\tilde{r}_g^2 - \alpha(\tilde{r}_g)}{2} \left( q + \sqrt{q^2 + 4} \right) - r_g^2. \quad (32)$$



Алгебраическое соотношение (32) и краевое условие (22), в которое следует подставить выражение (24), приводят к интегральному уравнению того же типа, что и (30):

$$\int_a^{\zeta} \left( \frac{1}{y(\xi)} - \frac{y(\xi)}{(\xi - A(\zeta))^2} \right) d\xi = Q(\xi), \quad A(\zeta) = \frac{y(\zeta)}{2} (q + \sqrt{q^2 + 4}).$$

В результате решения этого уравнения определяется функция  $y(\xi)$  и соответственно  $\alpha(\rho) = \rho^2 - y(\rho^2)$ . Все компоненты напряжений определяются из соотношений (23).

## 5. ПРИМЕРЫ

На основе приведенных соотношений были разработаны алгоритмы для вычисления напряженно-деформированного состояния дискретного и непрерывного наращивания. Задачи для дискретного наращивания сводились к последовательностям нелинейных уравнений, которые рекурсивно решались методом Ньютона. Задачи для непрерывного наращивания сводились к нелинейным интегральным уравнениям типа Урысона – Вольтерра, решения которых находились методом квадратур [25]. Ниже приведены некоторые результаты этих вычислений.

Рассматривался резиноподобный материал типа Муни – Ривлина, механические характеристики которого взяты из [26], а именно  $J_1 = 9.838 \cdot 10^5$  Па,  $J_{-1} = -6.017 \cdot 10^5$  Па. Этим значениям соответствуют «инженерные» константы:  $\mu = 7.928 \cdot 10^5$  Па,  $\beta = 0.241$ . Во всех вычислениях внешний и внутренний радиусы начального тела принимались равными  $R_i^1 = 1.8h$ ,  $R_e^1 = 2h$ . В случае дискретного наращивания рассматривались два сценария, в ходе которых присоединялись 5, 10 и 25 слоев соответственно. Толщины их подбирались таким образом, что финальный объем растущего тела оказывался одинаковым. Давление на внутренней и внешней поверхностях наращиваемого тела принималось равное нулю. Момент времени окончания роста  $T$  для непрерывного наращивания и толщины слоев в случае дискретного наращивания подбирались так, что объем тела увеличивался вдвое.

Для всех видов непрерывного наращивания принимался следующий закон эволюции растущей границы в образе промежуточной конфигурации:

$$\tilde{r}_i = 1.8, \quad \tilde{r}_e(t) = 2 + t.$$

Этому закону соответствует значение  $T = 0.182$  с.

В случае наращивания с заданной дисторсией принималось, что

$$\alpha(\tilde{r}) = \begin{cases} 1 + \tilde{r}, & \tilde{r}_e(0) \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_e(t), \\ 0, & \tilde{r}_i < \tilde{r} \leq \tilde{r}_e(0). \end{cases}$$

Дискретное и непрерывное наращивания согласовывались следующим образом. Интервал  $[\tilde{r}_e, \tilde{r}_g]$ , соответствующий приращению радиуса внешней цилиндрической поверхности в процессе наращивания, заданного в образе промежуточной конфигурации, разбивался на одинаковые интервалы. Рассматривалось три сценария дискретного наращивания, соответствующих 5, 10 и 25 подынтервалам. При сопоставлении дискретных и непрерывных режимов роста с заданной дисторсией отсчетные радиусы тел слоев выбирались таким образом, что соответствующий им параметр дисторсии  $a_n$ , трансформирующий тело-слой в образ промежуточной конфигурации, численно был равен значению  $\alpha[(\tilde{r}_e^n - \tilde{r}_i^n)/2]$ . Графики распределения относительных радиальных окружных и осевых напряжений приведены на рис. 1–3 (а). Точечный пунктир соответствует непрерывному наращиванию, а сплошные линии — дискретному наращиванию при  $N = 5$ . На рис. 1–3 (б) показаны различия в значениях напряжений, соответствующих непрерывному и дискретному режимам (штриховой пунктир  $N = 5$ , точечный пунктир  $N = 10$ , сплошная линия  $N = 25$ ).

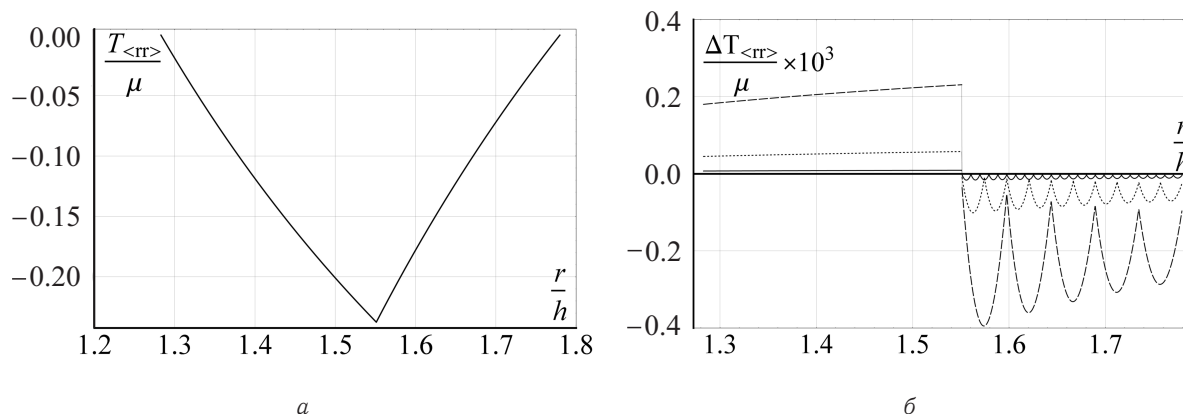


Рис. 1. Относительные радиальные напряжения при наращивании с заданной дисторсией

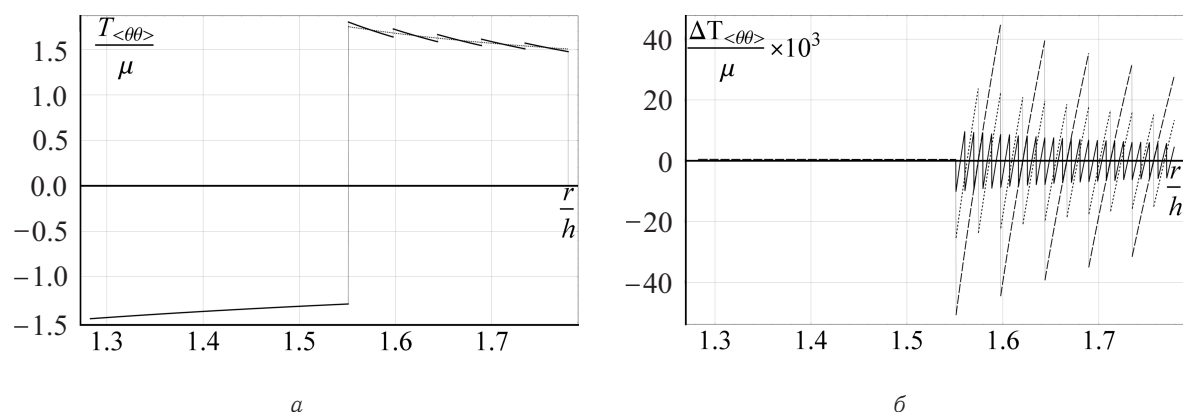


Рис. 2. Относительные окружные напряжения при наращивании с заданной дисторсией

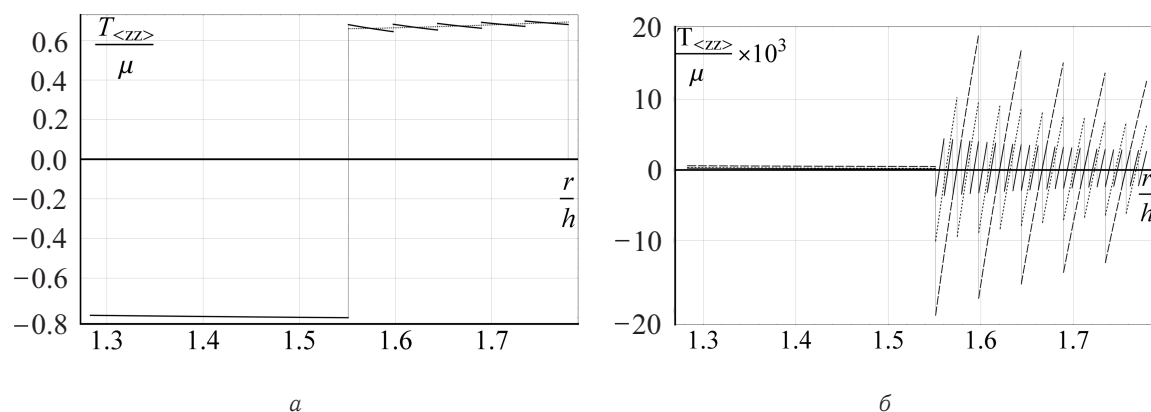


Рис. 3. Относительные осевые напряжения при наращивании с заданной дисторсией

В случае непрерывного наращивания с заданной поверхностью роста считался заданным следующий закон движения растущей границы в актуальной конфигурации:

$$r_e(t) = 2.$$

В случае соответствующего дискретного наращивания внешние радиусы сборок принимались равными  $2h$ . Рассматривалось три сценария дискретного наращивания, соответствующих присоединению 5, 10 и 25 слоев. Графики распределения относительных радиальных окружных и осевых напряжений приведены на рис. 4–6 (а). Различия между непрерывным и дискретным режимами показаны на рис. 4–6 (б).

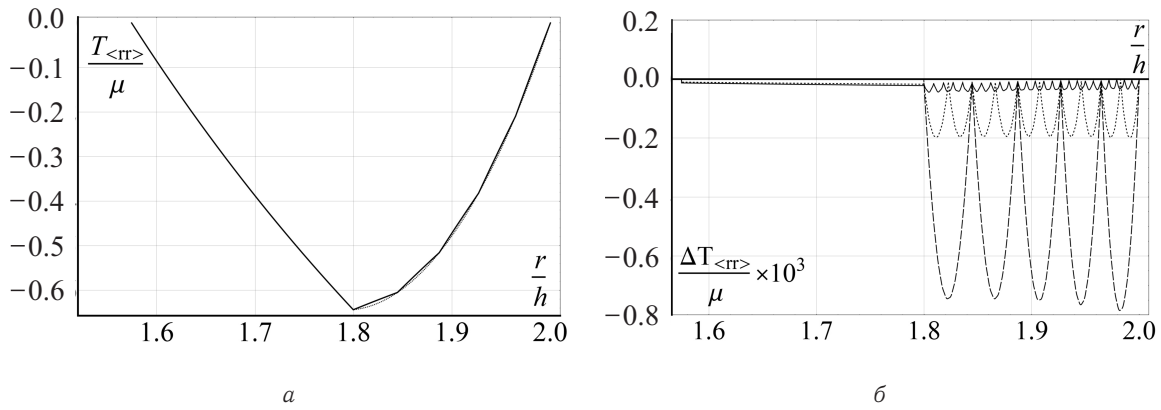


Рис. 4. Относительные радиальные напряжения при наращивании с заданной актуальной геометрией

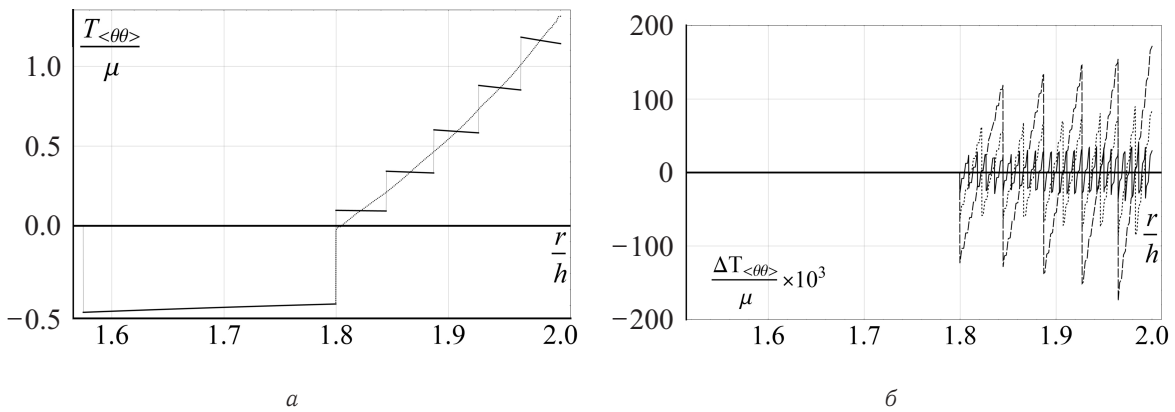


Рис. 5. Относительные окружные напряжения при наращивании с заданной актуальной геометрией

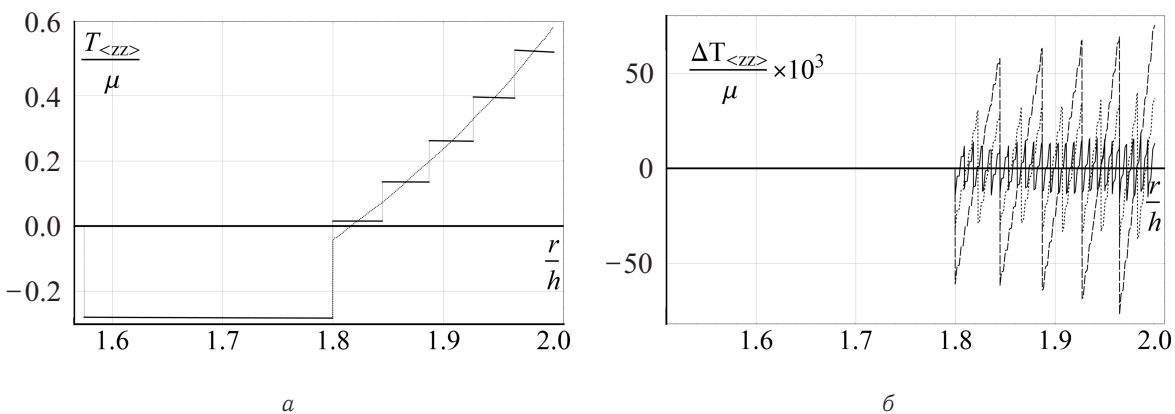


Рис. 6. Относительные осевые напряжения при наращивании с заданной актуальной геометрией

В случае непрерывного наращивания с заданным натягом считалось

$$T_{(\theta\theta)}(t) = \mu.$$

Соответствующее условие для натяга в дискретных слоях может быть записано в виде

$$F_n = \mu h (r_{1,n}^n - r_{0,n}^n),$$

т.е.  $T^{(\theta\theta)}(t)$  равно среднему окружному напряжению в последнем слое каждой сборки. Графики распределения радиальных окружных и осевых напряжений приведены на рис. 7, а-в. Сплошные кривые соответствуют непрерывному наращиванию, «точечная» и пунктирная кривые — дискретному наращиванию при 5 и 10 слоях.

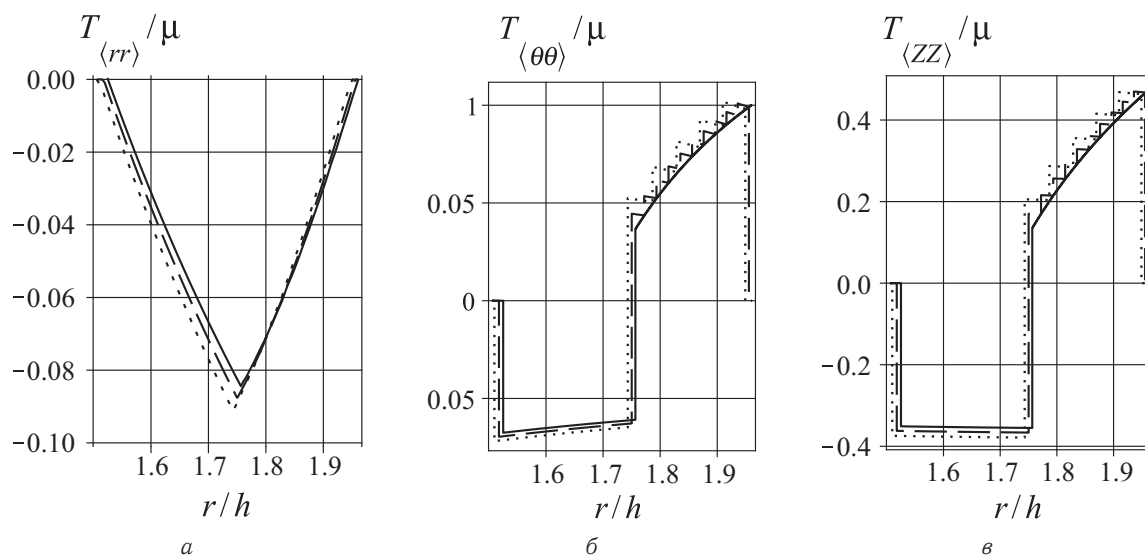


Рис. 7. Относительные напряжения при наращивании с заданным натягом

Авторы статьи выражают благодарность профессору А. В. Манжирову за конструктивное обсуждение вопросов, отраженных в статье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-08-01119-а, № 11-01-00669-а).

#### Библиографический список

- Gibson I., Rosen D. W., Stucker B. Additive Manufacturing Technologies. Rapid Prototyping to Direct Digital Manufacturing. Springer, 2009. 459 p.
- Choy K. L. Chemical vapour deposition of coatings // Progress in Materials Science. 2003. Vol. 48. P. 57–170.
- Nastasi M., Mayer J. W. Ion Implantation and Synthesis of Materials. Springer, 2006. 263 p.
- Лычев С. А., Манжиров А. В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // ПММ. 2013. Т. 77, вып. 4. С. 585–604.
- Лычев С. А., Манжиров А. В. Отсчетные конфигурации растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 86–95.
- Лычев С. А. Универсальные деформации растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 63–79.
- Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. Механика растущих вязкоупругопластичных тел. М. : Наука, 1987. 412 с.
- Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М. : Наука, 1980. 512 с.
- Klarbring A., Olsson T., Stalhand J. Theory of residual stresses with application to an arterial geometry // Archives of Mechanics. 2001. Vol. 59. P. 341–364.
- Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // Intern. J. Plasticity. 2000. Vol. 16, № 7. P. 951–978.
- Yavari A. A geometric theory of growth mechanics // J. Nonlinear Sci. 2010. Vol. 20, № 6. P. 781–830.
- Манжиров А. В., Лычев С. А. Математическая теория растущих тел при конечных деформациях // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 4. С. 438–441.
- Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. Vol. 27, № 1. P. 1–32.
- Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. Vol. 27, № 1. P. 33–94.
- Epstein M. The Geometrical Language of Continuum Mechanics. Cambridge Univ. Press, 2010. 312 p.
- Maugin G. A. Material Inhomogeneities in Elasticity. L. : Chapman and Hall, 1993. 294 p.
- Marsden J. E., Hughes T. J. R. Mathematical Foundations of Elasticity. N. Y. : Dover Publ., 1994. 556 p.
- Постников М. М. Гладкие многообразия. М. : Наука, 1987. 478 с.
- Choquet-Bruhat Y., Dewitt-Morette C., Dillard-Bleick M. Analysis, Manifolds and Physics : in 2 pt. Pt. 1. Basics. Amsterdam : Elsevier, 1982. 660 p.
- Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Springer, 2004. 602 p.
- Manzhirou A. V., Lychev S. A. Residual Stresses in Growing Bodies // Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics. Delhi : Elite Pub. House, 2011. P. 66–79.
- Gurtin M. E., Murdoch A. I. A Continuum Theory of Elastic Material Surfaces. // Arch. Rat. Mech. Anal. 1975. Vol. 27. P. 291–323.
- Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. М. : Физматлит, 2001. Т. 2. 810 с.
- Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М. : Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
- Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям. М. : Физматлит, 2003. 608 с.
- Hartman S. Numerical studies on the identification of the material parameters of Rivlin's hyperelasticity using tension-torsion tests // Acta Mechanica. 2001. Vol. 148. P. 129–155.



## Axisymmetric growth of a hollow hyperelastic cylinder

S. A. Lychev, A. V. Mark

Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, lychevs@mail.ru, A-V-Mark@yandex.ru

The finite deformations of the growing cylinder fabricated of an incompressible elastic material of Mooney–Rivlin type are under consideration. We assume that the deformations are axisymmetric and constant along the cylinder axis. The discrete and continuous types of growing are studied. The analytical solutions of the corresponding boundary-value problems are derived. The computational examples show the convergence of solutions obtained for the discrete growth to corresponding solutions for continuous growth under the following conditions: the number of discrete plies increases while their thickness decreases such that the final volume of growing solid is fixed.

**Key words:** additive technologies, growing solids, finite deformations, hyperelasticity, continuous growth, discrete growth.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 12-08-01119-a, no. 11-01-00669-a).*

### References

1. Gibson I., Rosen D. W., Stucker B. *Additive Manufacturing Technologies. Rapid Prototyping to Direct Digital Manufacturing*. Springer, 2009. 459 p.
2. Choy K. L. Chemical vapour deposition of coatings. *Progress in Materials Science*, 2003, vol. 48, pp. 57–170.
3. Nastasi M., Mayer J. W. *Ion Implantation and Synthesis of Materials*. Springer, 2006. 263 p.
4. Lychev S. A., Manzhurov A. V. The mathematical theory of growing bodies. Finite deformations. *J. Appl. Math. Mech.*, 2013, vol. 77, no. 4, pp. 421–432.
5. Lychev S. A., Manzhurov A. V. Reference Configurations of Growing Bodies. *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, no. 5, pp. 553–560.
6. Lychev S. A. Universal Deformations of Growing Solids. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 863–876.
7. Arutiunian N. Kh., Drozdov A. D., Naumov V. E. *Mekhanika rastushih viazkoprugoplastichnikh tel* [Mechanics of viscous, elastic, plastic bodies]. Moscow, Nauka, 1987, 412 p. (in Russian).
8. Lurie A. I. *Nonlinear theory of elasticity*. Amsterdam, North-Holland, 1990, 617 p. (Рус. ed.: Lurie A. I. Nelineinaya teoriya uprugosti. Moscow, Nauka, 1980, 512 p.)
9. Klarbring A., Olsson T., Stalhand J. Theory of residual stresses with application to an arterial geometry. *Archives of Mechanics*, 2001, vol. 59, pp. 341–364.
10. Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies. *Int. J. Plasticity*, 2000, vol. 16, no. 7, pp. 951–978.
11. Yavari A. A geometric theory of growth mechanics. *J. Nonlinear Sci.*, 2010, vol. 20, no. 6, pp. 781–830.
12. Manzhurov A. V., Lychev S. A. The mathematical theory of growing solids: Finite deformations. *Doklady Physics*, 2012, vol. 57, no. 4, pp. 160–163.
13. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1967, vol. 27, no. 1, pp. 1–32.
14. Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1967, vol. 27, no. 1, pp. 33–94.
15. Epstein M. *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*. Cambridge Univ. Press, 2010, 312 p.
16. Maugin G. A. *Material Inhomogeneities in Elasticity*. London, Chapman and Hall, 1993, 294 p.
17. Marsden J. E., Hughes T. J. R. *Mathematical Foundations of Elasticity*. New York, Dover Publ., 1994, 556 p.
18. Postnikov M. M. *Gladkie mnogoobrazia* [Smooth manifolds]. Moscow, Nauka, 1987, 478 p. (in Russian).
19. Choquet-Bruhat Y., Dewitt-Morette C., Dillard-Bleick M. *Analysis, Manifolds and Physics : in 2 pt. Pt. 1. Basics*. Amsterdam, Elsevier, 1982, 660 p.
20. Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer, 2004, 602 p.
21. Manzhurov A. V., Lychev S. A. Residual Stresses in Growing Bodies. *Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics*. Delhi : Elite Pub. House, 2011, pp. 66–79.
22. Gurtin M. E., Murdoch A. I. A Continuum Theory of Elastic Material Surfaces. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1975, vol. 27, pp. 291–323.
23. Fihtengolts G. M. *Kurs differentsalnogo i integralnogo ischisleniya* [A course of differential and integral calculus : in 3 vol.]. Moscow, Fizmatlit, 2001, vol. 2, 810 p. (in Russian).
24. Eshelby J. D. The continuum theory of lattice defects. *Solid State Physics*, 1956, vol. 3, pp. 79–144; Eshelby J. D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. *Proc. Roy. Soc., ser. A241*, 1957, no. 1226, pp. 376–396; Eshelby J. D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proc. Roy. Soc., ser. A252*, 1959, no. 1271, pp. 561–569; Eshelby J. D., Frank F. C., Nabarro F. R. N. The equilibrium of linear arrays of dislocations. *Phil. Mag.*, 1951, vol. 42, no. 327, pp. 351–364.
25. Polyanin A. D., Manzhurov A. V. *Handbook of Inte-*





gral Equations. Boca Raton ; London, Chapman and Hall/CRC Press, 2008, 1544 p.  
26. Hartman S. Numerical studies on the identification of

the material parameters of Rivlin's hyperelasticity using tension-torsion tests. *Acta Mechanica*, 2001, vol. 148, pp. 129–155.

УДК 539.3

## КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВНЕЗАПНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА

О. А. Мыльцина<sup>1</sup>, Е. Н. Савина<sup>2</sup>, Г. Н. Белосточный<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Ассистент кафедры теории вероятностей, математической статистики и управления стохастическими процессами, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, omyltcina@yandex.ru

<sup>2</sup>Ведущий документовед деканата механико-математического факультета, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, savinaen@info.sgu.ru

<sup>3</sup>Доктор технических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, belostochny@mail.ru

На основании замкнутых интегралов начально-краевых задач несвязной термоупругости пологих оболочек проводится количественный анализ влияния параметров, характеризующих геометрию оболочки, на колебания оболочек постоянного кручения и цилиндрической, обусловленные тепловым ударом со стороны одной из основных поверхностей.

*Ключевые слова:* пологие оболочки, кривизна, кручение, термоупругость, тепловой удар.

В рамках модели типа Лява рассматриваются прямоугольные в плане пологие оболочки (постоянного кручения и цилиндрическая) с основными поверхностями и краями, теплоизолированными до определенного момента времени ( $t = 0$ ), начиная с которого происходит мгновенное нарушение термоизоляции по всей внешней поверхности оболочки.

На основании замкнутых интегралов нестационарной термоупругости пологих оболочек определяется их динамическая реакция на мгновенное тепловое воздействие в зависимости от параметров, характеризующих геометрию оболочки.

Температурное поле  $\Theta(\vec{r}, t)$  — при сделанных выше предположениях — будет функцией двух переменных [1–4] — пространственной  $z$  и временной  $t$  координат. Рассмотрим начально-краевую задачу теплопроводности (в силу пологости оболочек кривизна в уравнениях теплопроводности не учитывается)

$$\beta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \quad (1)$$

$$t = 0, \quad \Theta = \theta_0; \quad z = h/2, \quad \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} = q; \quad z = -h/2, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2) с помощью преобразований Лапласа либо методом суперпозиции одинарного тригонометрического ряда с переменными коэффициентами и многочлена, учитывающего характер неоднородности начальных и краевых условий (2), запишется в виде

$$\Theta(z, t) = \frac{qh}{\lambda} \left( \frac{\beta t}{h^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{h} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{z}{h} - \frac{1}{24} - 2 \sum_k \frac{\cos k\pi}{(k\pi)^2} e^{-\beta \left( \frac{k\pi}{h} \right)^2 t} \cos \left( \frac{k\pi}{2} + \frac{k\pi z}{h} \right) \right) + \theta_0. \quad (3)$$

Здесь  $q$  — тепловой поток постоянной интенсивности,  $h$  — толщина,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\beta$  — коэффициент температуропроводности.

Решение несвязной динамической термоупругости пологих оболочек в компонентах поля перемещений  $\bar{U}(u, v, w)$  с учетом структуры температурного поля (3) сводится к интегрированию неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных [5–6]:

$$u_{,11} + \frac{1-\nu}{2} u_{,22} + \frac{1+\nu}{2} v_{,12} - [(k_1 + \nu k_2)w]_{,1} - (1-\nu)(k_{12}w)_{,2} = \frac{\gamma h}{gB} u_{,tt},$$

$$\frac{1+\nu}{2} u_{,12} + v_{,22} + \frac{1-\nu}{2} v_{,11} - [(k_2 + \nu k_1)w]_{,2} - (1-\nu)(k_{12}w)_{,1} = \frac{\gamma h}{gB} v_{,tt},$$



$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{12}{h^2} (k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2 + 2(1-\nu)k_{12}^2) w - \frac{12}{h^2} (k_1 + \nu k_2) u_{,1} - \\ - \frac{12}{h^2} (k_2 + \nu k_1) v_{,2} - \frac{12(1-\nu)}{h^2} k_{12} (u_{,2} + v_{,1}) = -\alpha(1+\nu) \frac{12}{h^2} (k_1 + k_2) \Theta_0(t) - \frac{\gamma h}{gD} w_{,tt}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $k_1, k_2, k_{12}$  — соответственно кривизны и кручение оболочки,  $\gamma$  — удельный вес,  $g$  — интенсивность поля тяжести,  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения материала,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad \Theta_0(t) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Theta(z, t) dz.$$

1. В случае оболочки постоянного кручения ( $k_1 = 0, k_2 = 0, k_{12} = \text{const}$ ) будем предполагать, что она бесконечна вдоль координатной прямой  $Ox$ , края, расположенные по прямым  $y = 0, y = b$  шарнирно закреплены, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial y} - 2k_{12}w = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\Psi(t), \quad (5)$$

в начальный момент времени ( $t = 0$ ) термоупругая система находится в покое

$$\bar{U} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$\Psi(t) = \frac{1+\nu}{2} \frac{q\alpha}{\lambda} \left( 1 + 48 \sum_k \beta_k e^{-\beta(\frac{k\pi}{h})^2 t} \right).$$

Решение системы (4) при сделанных предположениях с помощью подстановки

$$u = (1-\nu) k_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (7)$$

сведем к интегрированию одного дифференциального уравнения шестого порядка относительно функции перемещений  $\Phi(y, t)$ :

$$\frac{1-\nu}{2} \frac{gD}{\gamma h} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} - \frac{D}{B} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^4 \partial t^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} - 2(1-\nu)k_{12} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} = 0. \quad (8)$$

Краевые и начальные условия (5), (6) переписутся через функцию  $\Phi(y, t)$  при  $y = 0, y = b$  в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} = -\Psi(t); \quad (9)$$

при  $t = 0$  в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = 0, \quad \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial t} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} = 0. \quad (10)$$

Решение неоднородной краевой задачи (8), (9) будем разыскивать методом суперпозиции одинарного тригонометрического ряда с переменными по временной координате коэффициентами и многочлена, учитывающего характер неоднородности краевых условий (9):

$$\Phi(y, t) = \sum_K \Phi_K(t) \sin \frac{K\pi y}{b} - \frac{1}{12(1-\nu)} \Psi(t) (y^4 - 2by^3 + b^3y), \quad (11)$$

где коэффициенты ряда  $\Phi_K(t)$  являются решениями обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\Phi_K^{(IV)}(t) + A_1 \frac{gB}{\gamma h} \frac{1}{b^2} \Phi_K^{(II)}(t) + \frac{1-\nu}{2} \frac{gD}{\gamma h} \frac{gB}{\gamma h} \frac{(K\pi)^6}{b^6} \Phi_K(t) =$$



$$= 48 \frac{1+\nu}{2} \frac{g\alpha b}{\lambda} \frac{\beta}{h^4} \sum_k \beta_k (k\pi)^4 \left( \frac{gB}{\gamma h} A_2 + \frac{2}{1-\nu} a_K \left( \frac{b}{h} \right)^2 \frac{\beta^2}{h^2} (k\pi)^4 \right) e^{-\beta \left( \frac{k\pi}{h} \right)^2 t}. \quad (12)$$

Здесь введены обозначения

$$A_1 = \frac{(K\pi)^4}{12} \left( \frac{h}{b} \right)^2 + 2(1-\nu)(k_{12}b)^2 + \frac{1-\nu}{2}(K\pi)^2,$$

$$A_2 = a_K \left( \frac{1}{1-\nu} \frac{(K\pi)^4}{6} \left( \frac{h}{b} \right)^2 + 4(k_{12}b)^2 + (K\pi)^2 \right), \quad a_K = \frac{2(1-\cos K\pi)}{(K\pi)^5}.$$

Определяя стандартным образом фундаментальную систему функций  $\varphi_{Kl}(t)$  для однородного дифференциального уравнения, соответствующего (12), запишем его общий интеграл в виде

$$\Phi_K(t) = D_{K1} \cos C_K t + D_{K2} \sin C_K t + D_{K3} \cos \tilde{C}_K t + D_{K4} \sin \tilde{C}_K t + \sum_k \tilde{A}_{Kk} h^3 e^{-\beta \left( \frac{k\pi}{h} \right)^2 t}, \quad (13)$$

где

$$C_K = \sqrt{\frac{gE}{\gamma h^2}} d_K, \quad d_K = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left( A_1 - \sqrt{A_1^2 - (1-\nu) \frac{h^2 (K\pi)^6}{6b^2}} \right)},$$

$$\tilde{C}_K = \sqrt{\frac{gE}{\gamma h^2}} \tilde{d}_K, \quad \tilde{d}_K = \frac{h}{b} \sqrt{\frac{1}{2(1-\nu^2)} \left( A_1 - \sqrt{A_1^2 + (1-\nu) \frac{h^2 (K\pi)^6}{6b^2}} \right)}.$$

Окончательно выражение для функции относительного прогиба  $W(y, t) = w(y, t)/b$  оболочки, испытывающей термодинамический удар, примет вид

$$W(y, t) = -\frac{1-\nu}{2} \sum_K (K\pi)^2 \left( \sum_{l=1}^4 D_{Kl} \varphi_{Kl}(t) + \sum_k \tilde{A}_{Kk} e^{-\beta \left( \frac{k\pi}{h} \right)^2 t} \frac{h^3}{b^3} \right) \sin \frac{K\pi y}{b} +$$

$$+(1-\nu^2) \frac{b^2}{h^2} \sum_K \left( \sum_{l=1}^4 D_{Kl} d_{Kl}^2 \varphi_{Kl}(t) - \frac{h^3}{b^3} \alpha_*^2 \sum_k (k\pi)^4 \tilde{A}_{Kk} e^{-\beta \left( \frac{k\pi}{h} \right)^2 t} \right) \sin \frac{K\pi y}{b} +$$

$$+\frac{(1+\nu)b^3\gamma}{12gE} \ddot{\Psi}(t) \left( \left( \frac{y}{b} \right)^4 - 2 \left( \frac{y}{b} \right)^3 + \frac{y}{b} \right) - \frac{b}{2} \Psi(t) \left( \left( \frac{y}{b} \right)^2 - \frac{y}{b} \right), \quad (14)$$

где  $D_{Kl}$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий (10), предварительно переписанных через функцию  $\Phi_K(t)$  (ввиду громоздкости не выписываются);

$$\alpha_* = \frac{\beta}{h} \sqrt{\frac{\gamma}{gE}}, \quad q_* = \frac{q\alpha b}{\lambda},$$

$$\tilde{A}_{Kk} = \frac{\frac{24q_*}{1-\nu} \frac{h}{b} (k\pi)^4 \beta_k B_{Kk} \alpha_*^2}{\alpha_*^4 (k\pi)^8 + \frac{A_1}{1-\nu^2} (k\pi)^4 \alpha_*^2 \left( \frac{h}{b} \right)^4 + \frac{1-\nu}{24} \left( \frac{h}{b} \right)^{10} \frac{(K\pi)^6}{(1-\nu^2)^2}},$$

$$B_{Kk} = A_2 + \frac{2a_K}{1-\nu} \left( \frac{b}{h} \right)^2 \frac{\gamma h}{gB} \left( \frac{\beta}{h} \right)^2 (k\pi)^4.$$

2. Уравнения динамической термоупругости (4) цилиндрической оболочки ( $k_1 = 0$ ,  $k_{12} = 0$ ,  $k_2 = \text{const}$ ) при тех же предположениях преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_2 \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{B}{D} k_2^2 w - k_2 \frac{B}{D} \frac{\partial v}{\partial y} = -\alpha(1+\nu) \frac{B}{D} k_2 \Theta_0(t) - \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (15)$$

и подстановкой

$$v = k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (16)$$



система (15) сводится к одному неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных шестого порядка:

$$\frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^4 \partial t^2} + \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} - \frac{B}{D} k_2^2 \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} = -\alpha(1 + \nu)k_2 \frac{B}{D} \Theta_0(t). \quad (17)$$

Краевые и начальные условия переписутся через функцию перемещений при  $y = 0, y = b$  в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = R_2(1 + \nu)\alpha\Theta_0(t), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{gB}{\gamma h} R_2(1 + \nu)\alpha\Theta_0(t), \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^2 \partial t^2} = -\Psi(t); \quad (18)$$

при  $t = 0$  в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2 \partial t} - \frac{\gamma h}{gB} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^3} = 0. \quad (19)$$

Решение уравнения (17), тождественно удовлетворяющее всем краевым условиям (18), будем разыскивать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(y, t) = & \sum_K \Phi_K(t) \sin \frac{K\pi y}{b} - \Psi(t)f(y) + R_2(1 + \nu)\alpha\Theta_0(t)f''(y) + \\ & + \frac{gB}{\gamma h} R_2(1 + \nu)\alpha \int_0^t \left( \int_0^t \Theta_0(t) dt \right) dt, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $R_2 = \frac{1}{k_2}$ ,  $\Theta_0(t) = \frac{qh}{\lambda} \frac{\beta t}{h^2} + \theta_0$ .

Функция относительного прогиба термоупругой системы на основании аналогичных преобразований запишется:

$$\begin{aligned} W(y, t) = & - \sum_K \left( (K\pi)^2 \left( \sum_{l=1}^4 C_{Kl} \varphi_{Kl}(t) + \sum_k \tilde{D}_{Kk} e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 t} \right) \right) \sin \frac{K\pi y}{b} + \\ & + (1 - \nu^2) \sum_K \left( \sum_{l=1}^4 d_{Kl}^2 C_{Kl} \varphi_{Kl}(t) - \frac{b^2}{h^2} \alpha_*^2 \sum_k (k\pi)^4 \tilde{D}_{Kk} e^{-\beta \left(\frac{k\pi}{h}\right)^2 t} \right) \sin \frac{K\pi y}{b} + \\ & + b^3(1 - \nu^2) \frac{\gamma}{gE} \ddot{\Psi}(t) \left( \left(\frac{y}{b}\right)^4 - 2\left(\frac{y}{b}\right)^3 + \frac{y}{b} \right) - \frac{b}{2} \Psi(t) \left( \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{y}{b} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

На рис. 1 и рис. 2 приводятся графики функций относительного прогиба (14) и (21) при  $y = b/2$  на двух временных интервалах с момента термодинамического удара.

Во всех случаях отмечаются следующие закономерности:

1) параметр кручения  $k_{12}$  существенно влияет на момент времени возникновения наибольшего прогиба (рис. 1, а; кривым 1–6 соответствуют параметры кручения  $k_{12}$ , равные 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05). При прочих равных условиях наибольший прогиб раньше возникает у пластинки ( $k_{12} = 0$ );

2) в случае цилиндрической оболочки (рис. 1, б; кривым 1–4 соответствуют кривизны  $k_2$ , равные 0.01, 0.02, 0.03, 0.04.) время наступления наибольшего прогиба менее чувствительно к параметру кривизны  $k_2$ , а временной интервал максимальных прогибов значительно меньше временного интервала для оболочки постоянного кручения;

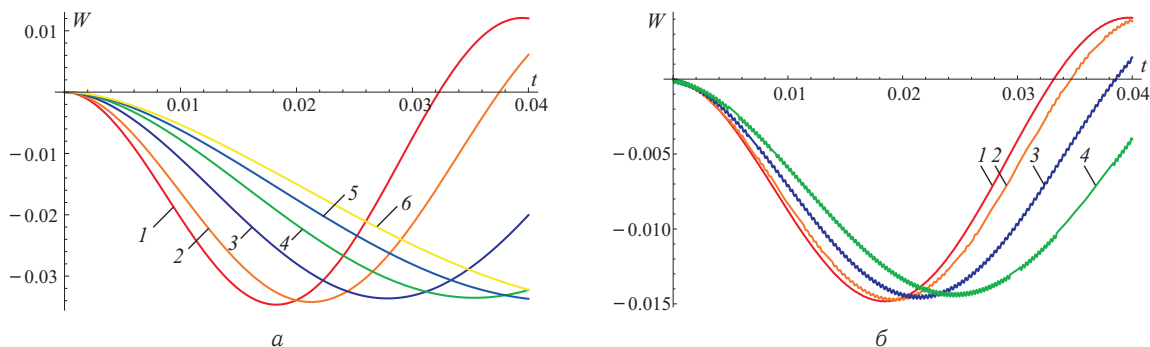


Рис. 1. Прогиб  $W(b/2, t)$ , заданный формулой (14): а – для оболочки постоянного кручения, б – для цилиндрической оболочки



3) с увеличением значений параметров  $k_{12}$  и  $k_2$  динамические прогибы оболочек при «замороженном» моменте времени значительно убывают (на рис. 2, а кривым 1-5 соответствуют параметры кручения  $k_{12}$ , равные 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04; на рис. 2, б кривым 1-5 соответствуют кривизны  $k_2$ , равные 0.001, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04). Величина максимального прогиба оболочек мало чувствительна к кривизне и кручению на временном отрезке  $[0; 0.05]$  при той же тенденции к убыванию;

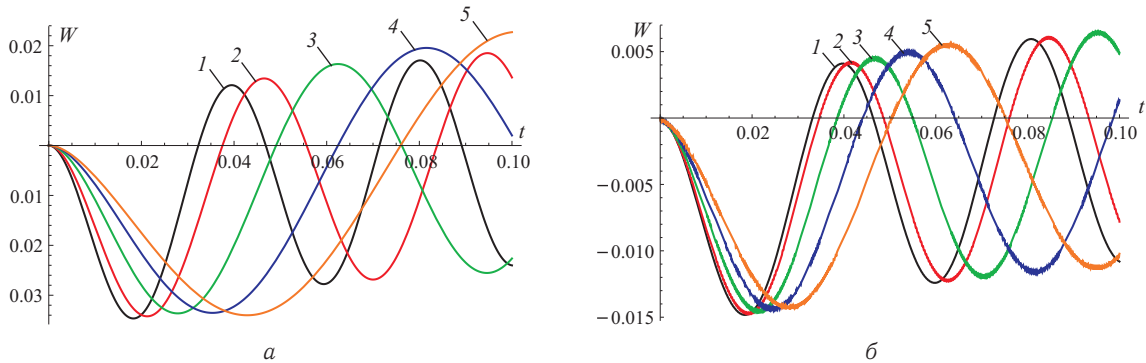


Рис. 2. Прогиб  $W(b/2, t)$ , заданный формулой (21): а – для оболочки постоянного кручения, б – для цилиндрической оболочки

4) при прочих равных условиях значение динамического прогиба цилиндрической оболочки во всех случаях практически в два раза меньше прогиба оболочки постоянного кручения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-00644-а).*

#### Библиографический список

1. Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. Термостойчивость пластин и оболочек. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1968. 520 с.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев : Наук. думка, 1970. 303 с.
3. Белосточный Г. Н., Рассудов В. М. Колебания термоупругой изотропной системы пластинка – ребра, подверженной тепловому удару / Саратовский политехнический институт. Деп. в ВИНТИ № 87-82, 1981. 11 с.
4. Мыльцина О. А., Белосточный Г. Н. Динамика поверхности прогиба ребристой пластинки при мгновенном воздействии температуры со стороны окружающей среды // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XIX междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова : в 2 т. М. : ООО «ТР-принт», 2013. Т. 1. С. 167–170.
5. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев : Наук. думка, 1978. 343 с.
6. Рассудов В. М., Красюков В. П., Панкратов Н. Д. Некоторые задачи термоупругости пластинок и пологих оболочек. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1973. 154 с.

## Oscillations of Shallow Shells at abrupt Influence of Thermal Flow

O. A. Myltcina, E. N. Savina, G. N. Belostochny

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, omyltcina@yandex.ru, savinaen@info.sgu.ru, belostochny@mail.ru

On the basis of the closed integrals of the initial and boundary problems for incoherent thermoelasticity of shallow shells the quantitative analysis of influence of the geometrical parameters on the oscillations of constant rotation and cylindrical shells, which are conditioned by the thermal shock to outbound surface of shallow shell are carried out.

*Key words:* shallow shells, rotation, curvature, thermoelasticity, thermal shock.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-08-00644-а).*

#### References

1. Oigibalov P. M., Gribanov V. F. *Termoustojchivost' plastin i obolochek* [Thermostability of plates and shells]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1968, 520 p. (in Russian).
2. Kovalenko A. D. *Osnovy termouprugosti* [Fundamentals of thermoelasticity]. Kiev, Naukova Dumka, 1970, 303 p. (in Russian).



3. Belostochny G. N., Rassudov V. M. *Kolebaniya termouprugoj izotropnoj sistemy plastinka – rebra, podverzhennoj teplovomu udaru* [Oscillations of the thermoelastic isotropic system of plate-rib subjected to thermal bump]. Dep. in VINITI. № 87–82, 1981, 11 p. (in Russian)
4. Mylcina O. A., Belostochny G. N. *Dinamika poverkhnosti progiba rebristoi plastinki pri mgnovennom vozdeistvii temperatury so storony okruzhaiushchei sredy* [Dynamics of the surface of bending of the ribbed plate under instantaneous temperature bump from the environment]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksii i sploshnykh sred : materialy XIX mezhdunarodnogo simpoziuma im. A. G. Gorshkova : v 2 t.* [Dynamic and technological problems of mechanics of continuum and structures : XX International symposium dedicated to Anatoly G. Gorshkov : in 2 vol.]. Moscow, ООО «TR-print», 2013, vol. 1. pp. 167–170 (in Russian)
5. Podstrigach Ia. S., Shvets R. N. *Termouprugost' tonkikh obolochek* [Thermoelasticity of thin shells]. Kiev, Naukova Dumka, 1978, 343 p. (in Russian)
6. Rassudov V. M., Krasiukov V. P., Pankratov N. D. *Nekotorye zadachi termouprugosti plastinok i pologikh obolochek* [Some problems of thermoelasticity of plates and sloping shells]. Saratov, Saratov Univ Press, 1973, 154 p. (in Russian)





# ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

## МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕРШИННЫЕ 1-РАСШИРЕНИЯ ПАЛЬМ

Д. Д. Комаров

Аспирант, ассистент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Komarovdd@gmail.com

Минимальные вершинные 1-расширения графов можно рассматривать как модель оптимальной вершинной 1-отказоустойчивой реализации некоторой системы. Эта работа посвящена вершинным 1-расширениям графов специального класса — класса пальм. Приводится решение задачи нахождения минимального вершинного 1-расширения для двулистных пальм.

**Ключевые слова:** графы, минимальные расширения графов, пальмы, сверхстройные деревья, отказоустойчивость.

Хейз (J. P. Hayes) в своей работе [1] рассматривает граф как модель некоторой технической системы в контексте отказоустойчивости. Вершины графа — ее элементы, а ребра — связи между элементами системы. Отказ элемента системы рассматривается как удаление соответствующей этому элементу вершины. При такой интерпретации минимальное вершинное  $k$ -расширение графа, моделирующего некоторую систему  $\Sigma$ , является моделью оптимальной вершинной  $k$ -отказоустойчивой реализации системы  $\Sigma$ . Задача распознавания минимального вершинного расширения произвольного графа является  $NP$ -полной [2], поэтому представляет интерес нахождение классов графов, для которых возможно построить минимальное вершинное расширение аналитически. В данной работе исследуется класс графов, являющийся особым подклассом деревьев, — класс пальм. Исследования будут ограничены рассмотрением минимальных вершинных 1-расширений двулистных пальм.

Дадим основные определения, которые будут использованы в работе, преимущественно согласно книге [3].

Назовем граф  $G_1 = (V_1, \alpha_1)$  *вершинным  $k$ -расширением* графа  $G = (V, \alpha)$ , если граф  $G$  вложим в каждый подграф графа  $G_1$ , получающийся удалением любых его  $k$  вершин.

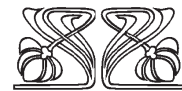
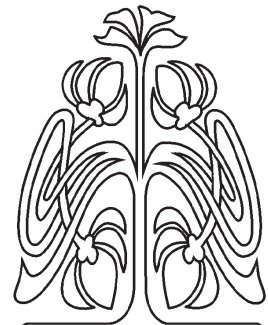
Граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  называется *минимальным вершинным  $k$ -расширением* графа  $G = (V, \alpha)$ , если выполняются следующие условия:

- 1) граф  $G^*$  является вершинным  $k$ -расширением графа  $G$ ;
- 2)  $|V^*| = |V| + k$ ;
- 3)  $\alpha^*$  имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

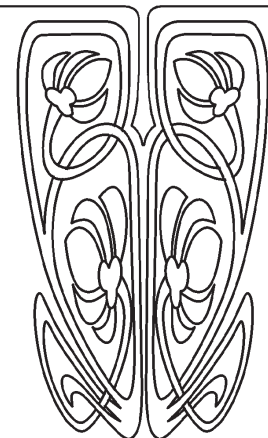
*Путь длины  $k$*  из вершины  $u$  в вершину  $v$  в графе  $G = (V, \alpha)$  есть последовательность  $(v_0, v_1, v_2 \dots v_k), v_i \in V$ , в которой  $v_0 = u, v_k = v$  и  $\{v_{i-1}, v_i\} \in \alpha$ .

*Циклом* в графе называется путь  $(v_0, v_1, v_2 \dots v_k)$ , в котором  $v_0 = v_k$ .

Граф, в котором нет циклов, называется *ациклическим*.



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





Вершина  $w$  графа  $G$  называется *достижимой* из вершины  $v$ , если либо  $w = v$ , либо существует путь из  $v$  в  $w$ .

Граф  $G$  называется *связным*, если любые две его вершины достижимы друг из друга.

Ациклический связный граф называется *деревом*.

Дерево с одной выделенной вершиной называется *корневым* деревом, а выделенная вершина называется *корнем* дерева. В дереве вершины степени 1 называются *листьями*.

Цепью  $P_n$  называется граф  $G = (V, \alpha)$ , где  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  и  $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\}$ .

*Сверхстройным деревом* называется корневое дерево, где степень всех вершин, кроме корня, не превосходит 2, а степень корня — более 2. Можно дать другое определение.

Граф  $G$  называется *сверхстройным деревом*, если он является объединением  $s (s > 2)$  цепей  $P_1, \dots, P_s$  с общей концевой вершиной (пример сверхстройных деревьев показан на рис. 1).

Назовем сверхстройное дерево  *$p$ -листной пальмой высоты  $r$* , если оно образовано объединением  $s (s > 2)$  цепей длинами  $m_1, \dots, m_s$  с общей концевой вершиной, причем одна из длин (не теряя общности пусть это будет  $m_1$ ) равна  $r$ , а остальные  $(m_2, \dots, m_s)$  равны 1 (примеры пальм показаны на рис. 2).

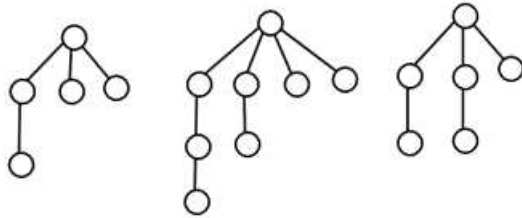


Рис. 1. Пример сверхстройных деревьев

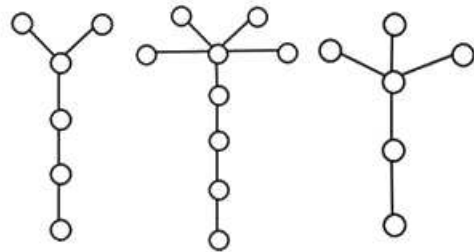


Рис. 2. Пример пальм

Одним из способов задания сверхстройного дерева является вектор длин цепей, упорядоченных по невозрастанию. При этом будем говорить, что дерево  $T$  имеет вид  $(m_1, \dots, m_k)$ .

На сегодняшний день существуют некоторые результаты относительно вершинных расширений пальм, рассмотрим их.

**Теорема 1** [3]. Пусть граф  $G$  является объединением  $s (s > 2)$  цепей, длинами не более 2, среди которых есть хотя бы одна цепь длины 1 и хотя бы одна длины 2, с общей концевой вершиной. Тогда граф  $G^*$ , полученный из графа  $G$  добавлением вершины и соединением ее со всеми листьями и любой вершиной степени 2 (рис. 3), является минимальным вершинным 1-расширением графа  $G$ .

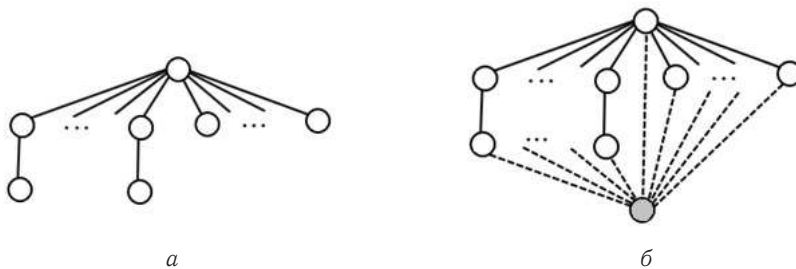


Рис. 3. Схема к теореме 1

Если в рассмотренной теореме  $k$  (количество цепей длины 2) положить равным 1, то получим утверждение для пальм высоты 2.

Так называемый звездный граф можно рассматривать как пальму высоты 1.

**Теорема 2** [3]. Единственным с точностью до изоморфизма минимальным вершинным 1-расширением звездного графа является его тривиальное 1-расширение (рис. 4).



В статье [4] было высказано утверждение, претендующее на решение задачи нахождения минимального вершинного 1-расширения сверхстройного дерева произвольного вида.

Дадим определение сложной вершины.

Вершина  $v_{ij}$  ( $j$ -я по счету в  $i$ -й цепи) сверхстройного дерева  $T$  вида  $(m_1, \dots, m_k)$  называется *сложной*, если среди длин цепей дерева  $T$  нет цепи длины  $j - 1$  или  $m_i - j$ .

**Утверждение 1** [4]. *Минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева с  $k$  цепями и  $p$  сложными вершинами содержит в точности  $k+p+1$  дополнительных ребер.*

Пусть  $v_{ij}$  — сложная вершина, тогда предлагается добавить ребро из добавленной вершины в вершину  $v_{i(j-1)}$ , а также соединить добавленную вершину со всеми листьями и корнем сверхстройного дерева. Далее в [4] утверждается, что построенный граф будет являться минимальным вершинным 1-расширением заданного сверхстройного дерева.

В статье М. Б. Абросимова [5] показывается, что данное утверждение неверно в части минимальности, то есть построенный граф является вершинным 1-расширением, но не обязательно минимальным. В любом случае, данный результат можно использовать как верхнюю оценку количества дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения сверхстройных деревьев. Там же высказывается предположение относительно того, что для сверхстройных деревьев вида  $(t, 1, 1)$  разность между количеством дополнительных ребер вершинного 1-расширения, построенного по схеме Харари – Хуррума, и количеством дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения может расти неограниченно.

Будем называть граф вида  $(t, 1, 1)$  двулистной пальмой.

Рассмотрим двулистную пальму. Субъективно графом, наиболее похожим на двулистную пальму, для которого существуют результаты относительного его минимальных вершинных 1-расширений, является цепь. Задача о нахождении минимальных вершинных 1-расширений цепи полностью решена.

**Теорема 3** [3]. *Единственным с точностью до изоморфизма минимальным вершинным 1-расширением  $n$ -звенной цепи является  $(n + 2)$ -звенный цикл (рис. 5).*

Оказалось, что для 2-листных пальм существует минимальное вершинное 1-расширение, похожее на минимальное вершинное 1-расширение цепи.

Для формулировки следующей теоремы введем понятие *рогатого цикла*.

Назовем рогатым циклом длины  $n$  с  $k$  рогами граф, полученный из  $n$ -звенного цикла и  $k$  3-звенных циклов, таким образом, что каждый из 3-звенных циклов имеет ровно одно общее ребро с  $n$ -звенным циклом, и ни один из 3-звенных циклов не имеет общих ребер с другими 3-звенными циклами. При этом назовем  $k$ -звенный цикл телом рогатого цикла, а 3-звенные циклы назовем его рогами.

Назовем *максимальной разреженностью* рогатого цикла длину максимального пути между вершинами, принадлежащими разным рогам рогатого цикла, проходящего по ребрам, не принадлежащим ни одному из рогов рогатого цикла.

Назовем *минимальной разреженностью* рогатого цикла длину минимального пути между вершинами, принадлежащими разным рогам рогатого цикла, проходящего по ребрам, не принадлежащим ни одному из рогов рогатого цикла.

На рис. 6 показаны рогатый цикл длины 6 с 3 рогами с максимальной разреженностью 2 и минимальной разреженностью 0 (слева), и рогатый цикл длины 8 с 2 рогами с максимальной разреженностью 3 и минимальной разреженностью 3 (справа).

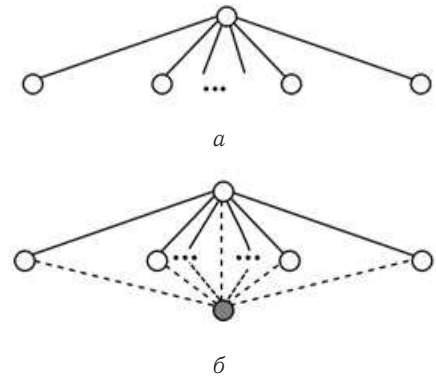


Рис. 4. Схема к теореме 2

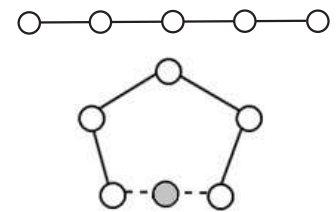


Рис. 5. Схемы к теореме 3

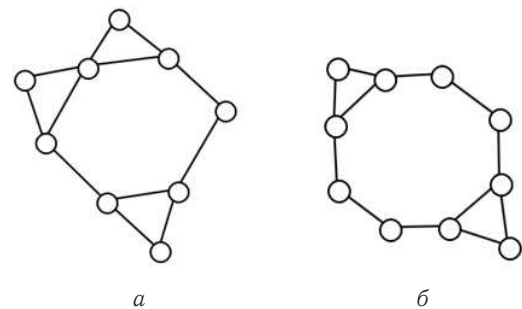
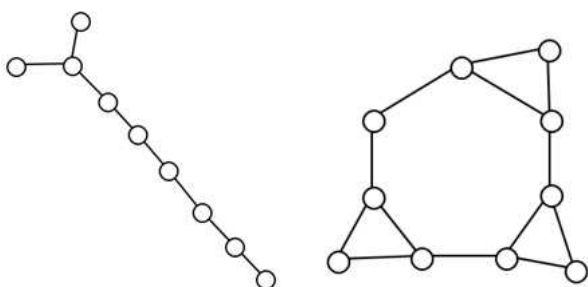


Рис. 6. Примеры рогатых циклов



**Теорема 4.** Пусть дан граф  $G$  – 2-листная пальма высоты  $n$ ,  $n > 5$ . Тогда рогатый цикл  $G_1$  с количеством рогов  $p = \lfloor (n-1)/4 \rfloor + 2$  длиной  $n_1 = n - p + 4$  с максимальной разреженностью меньше 3 и минимальной разреженностью больше 0 (рис. 7), будет являться минимальным вершинным 1-расширением графа  $G$ .



а б  
Рис. 7. Примеры для теоремы 4

**Доказательство.** Сначала покажем, что рогатые циклы с параметрами, описанными в формулировке теоремы, существуют.

Для возможности построения рогатого цикла длиной  $n_1$  с количеством рогов  $p$  достаточно, чтобы выполнялось  $n_1 \geq p$ .

Очевидно, что при  $n > 5$  для  $n_1$  и  $p$  из формулировки теоремы это соотношение выполняется всегда.

Для того чтобы рогатый цикл длины  $n_1$  с количеством рогов  $p$  мог иметь разреженность меньше некоторого  $k$ , достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение  $n_1 \leq (k + 1)p$ .

В частном случае для  $k = 3$  соотношение будет иметь вид

$$n_1 \leq 3p. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь выражения для длины рогатого цикла и количества рогов из формулировки теоремы:

$$p = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 2, \tag{2}$$

$$n_1 = n - p + 4. \tag{3}$$

Из (3) следует:

$$n = n_1 + p - 4. \tag{4}$$

Подставив (4) в (2), получим:

$$p = \left\lfloor \frac{n_1 + p - 5}{4} \right\rfloor + 2.$$

Так как  $p$  целое, то его можно внести под знак целой части, тогда получим:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n_1 + p - 5}{4} - p + 2 \right\rfloor &= 0, \\ \left\lfloor \frac{n_1 - 3p + 3}{4} \right\rfloor &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Из соотношения (5) следует:

$$\begin{aligned} 0 &\leq n_1 - 3p + 3 < 4, \\ n_1 &< 3p + 1, \\ n_1 &\geq 3p - 3. \end{aligned} \tag{6}$$

Так как  $n_1$  и  $p$  целые, то из (6) следует (1).

Для того чтобы рогатый цикл длины  $n_1$  с количеством рогов  $p$  мог иметь минимальную разреженность больше некоторого  $k$ , достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$n_1 \geq p(k + 2).$$

В частном случае для  $k = 0$  соотношение будет иметь вид

$$n_1 \geq 2p. \tag{7}$$



Подставив (2) и (3) в (7), получим:  $n > 1$ . Таким образом, мы показали, что рогатые циклы с параметрами, описанными в формулировке теоремы, существуют для любого  $n > 1$ .

Теперь покажем, что рогатый цикл  $G_1$  является вершинным 1-расширением графа  $G$ . Всего существует 4 варианта по удалению одной вершины из рогатого цикла с максимальной разреженностью меньше 3 и минимальной разреженностью больше 0. Рассмотрим все варианты.

1. Для схемы удаления вершины, показанной на рис. 8, а, вложение можно осуществить по схеме, показанной на рис. 8, б (черный цвет обозначает используемые при вложении ребра, серый — не используемые).

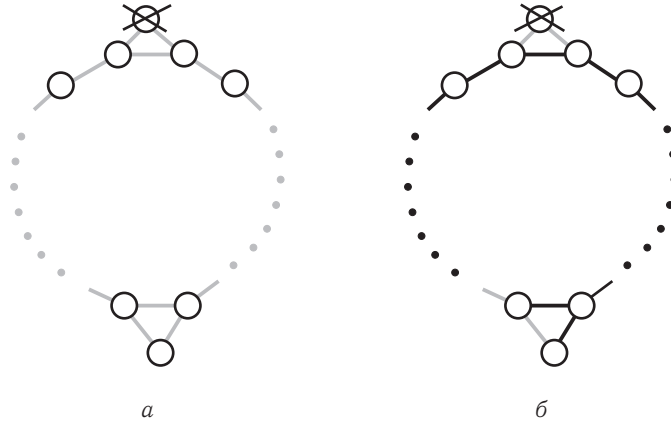


Рис. 8. Схема удаления вершины из рогатого цикла. Случай 1

2. Для схемы удаления вершины, показанной на рис. 9, а вложение можно осуществить по схеме, показанной на рис. 9, б.

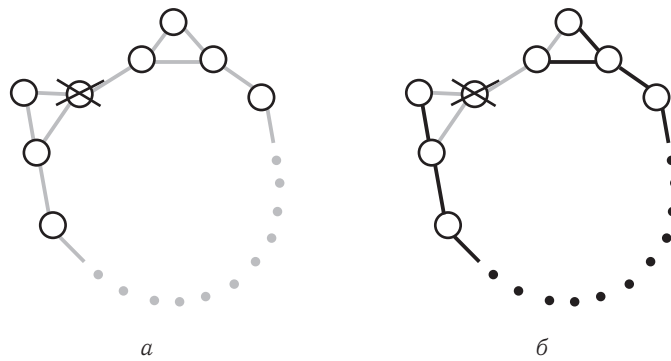


Рис. 9. Схема удаления вершины из рогатого цикла. Случай 2

3. Для схемы удаления вершины, показанной на рис. 10, а вложение можно осуществить по схеме, показанной на рис. 10, б.

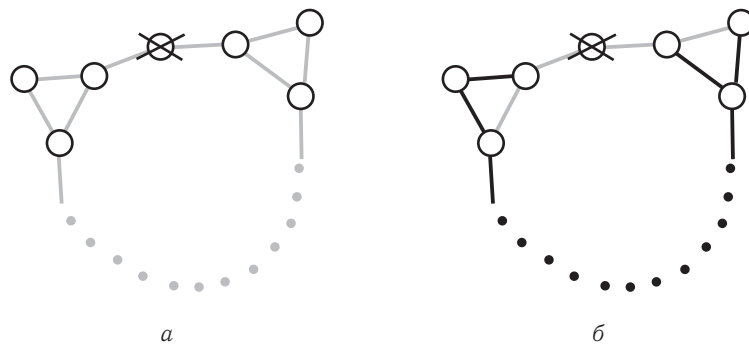


Рис. 10. Схема удаления вершины из рогатого цикла. Случай 3



4. Для схемы удаления вершины, показанной на рис. 11, а, вложение можно осуществить по схеме, показанной на рис. 11, б.

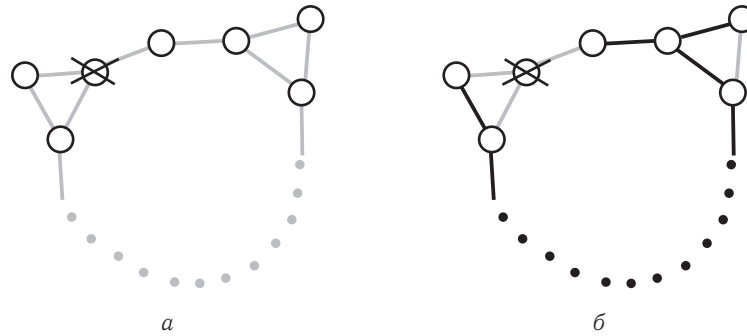


Рис. 11. Схема удаления вершины из рогатого цикла. Случай 4

Таким образом, мы доказали, что граф  $G_1$  является вершинным 1-расширением графа  $G$ .

Граф  $G_1$  имеет  $(p+2)$  или, если записать иначе,  $\lfloor (n-1)/4 \rfloor + 4$  дополнительных ребер по сравнению с графом  $G$ . Покажем, что это минимальное из возможного количества дополнительных ребер.

**Утверждение 2.** В минимальном вершинном 1-расширении двулистной пальмы  $G$  не может быть более 4-х подряд идущих вершин степени 2.

Действительно, рассмотрим 5 подряд идущих вершины степени 2 (рис. 12).

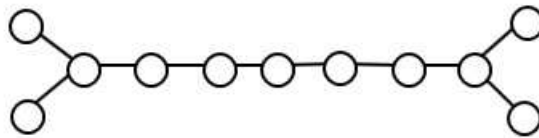


Рис. 12. Подряд идущие вершины степени 2

При удалении центральной вершины мы получим две вершины степени 1, каждая из которых при вложении графа  $G$  сможет быть лишь окончанием ствола пальмы, но никак не листом. Но у пальмы лишь один ствол, значит, утверждение верно.

**Утверждение 3.** Минимальное вершинное 1-расширение двулистной пальмы  $G$  должно содержать цикл длиной, равной  $n+3$ .

Действительно, если будет отсутствовать цикл длиной большей или равной  $n+3$ , то найдется вершина, при удалении которой будет невозможно вложить цепь длины  $n+1$  (ствол пальмы и один лист), а соответственно и двулистную пальму высоты  $n$ .

**Утверждение 4.** Минимальное вершинное 1-расширение двулистной пальмы  $G$  не содержит вершин степени меньше 2.

Действительно, если минимальное вершинное 1-расширение двулистной  $G$  содержит вершину степени 1, то можно удалить смежную с ней вершину, в результате чего получится изолированная вершина, и вложения осуществить будет нельзя.

Рассмотрим несколько случаев.

1. Рассмотрим две вершины степени больше 2, принадлежащие циклу длины  $n+3$ , причем между этими вершинами по ходу цикла находится только одна вершина степени 2 (рис. 13).

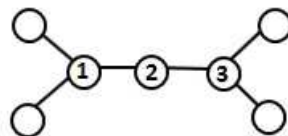


Рис. 13. Утверждение 4. Случай 1

При удалении вершины 2 одна из вершин 1 или 3 при вложении графа  $G$  перейдет в лист, а другая в окончание ствола пальмы. Тогда одна из вершин, смежных с вершиной, перешедшей при вложении в лист, перейдет в корень пальмы, соответственно будет иметь степень, как минимум, 3. То есть на





каждые 4 вершины по циклу длины  $n + 3$  будет, по крайней мере, 2 вершины степени больше 3, это потребует одно дополнительное ребро. Всего на всю пальму потребуется, по крайней мере,  $\lceil (n + 3)/4 \rceil$  дополнительных ребер.

2. Рассмотрим две вершины степени больше 2, принадлежащие циклу длины  $n + 3$ , причем между этими вершинами по ходу цикла находятся только две вершины степени 2 (рис. 14).

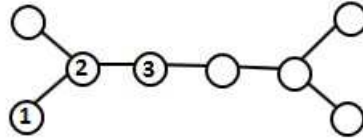


Рис. 14. Утверждение 4. Случай 2

Пусть по ходу цикла длины  $n + 3$  вершина 2 лежит между вершинами 1 и 3. При удалении вершины 2 вершина 3 при вложении графа  $G$  сможет перейти только в окончание ствола пальмы. Тогда при вложении графа  $G$  вершина 1 перейдет в лист. Тогда вершина, смежная с вершиной 1, перейдет в корень и должна иметь степень, как минимум, 3. То есть на каждые 4 вершины по циклу длины  $n + 3$  будет, по крайней мере, 2 вершины степени больше 3, это потребует одно дополнительное ребро. Таким образом, количество дополнительных ребер, по крайней мере, не меньше, чем в случае 1.

3. Рассмотрим две вершины степени больше 2, принадлежащие циклу длины  $n + 3$ , причем между этими вершинами по ходу цикла находятся только три вершины степени 2 (рис. 15).

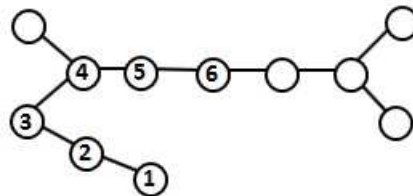


Рис. 15. Утверждение 4. Случай 3

Пусть вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6 находятся подряд по ходу цикла длины  $n + 3$ . При удалении вершины 5 вершина 6 при вложении графа  $G$  сможет перейти только в окончание ствола пальмы. Тогда при вложении графа  $G$  вершина 4 перейдет в лист. Следовательно, вершина 3, смежная с вершиной 4, перейдет в корень и должна иметь степень, как минимум, 3. При удалении вершины 4 вершина 5 при вложении графа  $G$  сможет перейти только в окончание ствола пальмы. Тогда при вложении графа  $G$  вершина 3 перейдет в лист. Тогда вершина 2, смежная с вершиной 3, перейдет в корень и должна иметь степень, как минимум, 3. Аналогично, при удалении вершины 3 только вершина 1 сможет при вложении графа  $G$  перейти в корень пальмы, соответственно будет иметь степень, как минимум, 3. Таким образом, на каждые 7 вершин по циклу длины  $n + 3$  потребуются, как минимум, 2 дополнительных ребра, что хуже, чем для случая 1.

4. Рассмотрим две вершины степени больше 2, принадлежащие циклу длины  $n + 3$ , причем между этими вершинами по ходу цикла находятся только 4 вершины степени 2 (рис. 16).

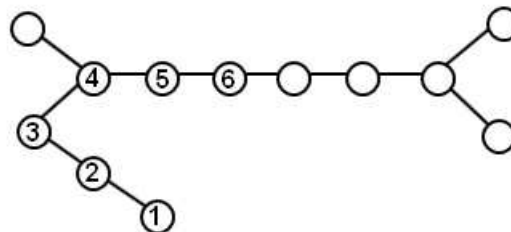


Рис. 16. Утверждение 4. Случай 4

Пусть вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6 находятся подряд по ходу цикла длины  $n + 3$ . При удалении вершины 5 вершина 6 при вложении графа  $G$  сможет перейти только в окончание ствола пальмы. Тогда при вложении графа  $G$  вершина 4 перейдет в лист. Следовательно, вершина 3, смежная с



вершиной 4, перейдет в корень и должна иметь степень, как минимум, 3. При удалении вершины 4 вершина 5 при вложении графа  $G$  сможет перейти только в окончание ствола пальмы. Тогда при вложении графа  $G$  вершина 3 перейдет в лист и вершина 2, смежная с вершиной 3, перейдет в корень и должна иметь степень, как минимум, 3. Аналогично, при удалении вершины 3, только вершина 1 сможет при вложении графа  $G$  перейти в корень пальмы, соответственно будет иметь степень, как минимум, 3. Таким образом, на каждые 8 вершин по циклу длины  $n + 3$  потребуется, как минимум, 2 дополнительных ребра, что повторяет результат для случая 1.

Резюмируя все 4 случая, получим, что минимальное вершинное 1-расширение двулистной пальмы должно содержать цикл длины  $n + 3$ , где, по крайней мере, 2 из 4 последовательных вершин имеют степень больше 2.

Собирая все утверждения и рассуждения вместе, получим:

1. Для обеспечения утверждения 4.2 необходимо, по крайней мере, 2 дополнительных ребра.
2. Для обеспечения утверждения 4.3 необходимо, по крайней мере, 1 дополнительное ребро.
3. Минимальное вершинное 1-расширение графа  $G$  должно содержать цикл длины  $n + 3$ , где, по крайней мере, 2 из 4 последовательных вершин имеют степень больше 2— для обеспечения этого необходимо, по крайней мере,  $\lceil (n + 3)/4 \rceil$  дополнительных ребер.

Таким образом, минимальное вершинное 1-расширение графа  $G$  должно иметь, по крайней мере,  $2 + 1 + \lceil (n + 3)/4 \rceil = \lceil (n - 1)/4 \rceil + 4$  дополнительных ребер.

Что и требовалось доказать — граф  $G_1$  является минимальным вершинным 1-расширением графа  $G$ .  $\square$

Рассмотрим двулистные пальмы высоты меньше 6. Оказалось, что для пальм высоты 2, 3, 4, минимальное вершинное 1-расширение можно строить по схеме из теоремы 4. Для двулистной пальмы высоты 5 схема минимального вершинного расширения будет отличаться (рис. 17).

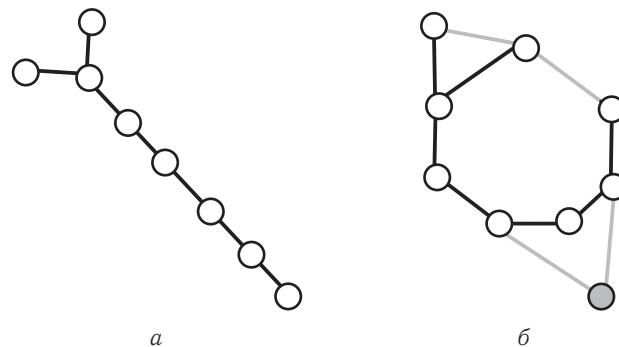


Рис. 17. Случай для двулистной пальмы высоты 5

Так как количество сложных вершин сверхстройного дерева вида  $(t, 1, 1)$  равно  $t - 4$  ( $t > 4$ ), то количество дополнительных ребер по схеме Харари – Хурума будет равно  $t$ . С учетом этого можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 5.** Для любого положительного  $x$  существует сверхстройное дерево, для которого разность между количеством дополнительных ребер вершинного 1-расширения, построенного по схеме Харари – Хурума, и количеством дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения этого графа будет равна  $x$ .

Таким образом, гипотеза М. Б. Абросимова [5] подтвердилась.

### Библиографический список

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. C.25, № 9. P. 875–884.
2. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650. DOI: 10.4213/mzm8403.
3. Абросимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2012. 192 с.
4. Harary F., Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. Vol. 56. P. 135–143.
5. Абросимов М. Б. О числе дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения сверхстройного дерева // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 103–113.



## Minimal Vertex 1-extensions of Palm Trees

D. D. Komarov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KomarovDD@gmail.com

Minimal vertex 1-extension of graphs can be regarded as a model of optimal 1-node fault tolerant implementation of a system. This paper is about of the 1-vertex extensions of a graphs from a special class named palm trees. This article presents a solution to the problem of finding the minimal vertex 1-extension of palm trees with two leafs.

*Key words:* graphs, minimal extensions of graphs, fault tolerance, palm trees, star-like trees.

### References

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system. *IEEE Trans. Comput.*, 1976, vol.C-25, no. 9, pp. 875–884.
2. Abrosimov M. B. Complexity of some problems associated with the extension of graphs. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, no. 5, pp. 619–625. DOI: 10.1134/S0001434610110015.
3. Abrosimov M. B. *Graph models of fault tolerance*. Saratov, Saratov Univ. Press, 2012, 192 p. (in Russian).
4. Harary F., Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees. *Internet J. Comput. Math.*, 1995, vol. 56, pp. 135–143.
5. Abrosimov M. B. On the number of additional edges of a minimal vertex 1-extension of a starlike tree. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 103–113 (in Russian).