

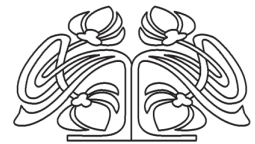


УЧРЕДИТЕЛЬ – САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 4



Научный журнал
2015 Том 15

ISSN 1814-733X

ISSN 1816-9791

Издается с 2001 года

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

- Алдашев С. А.** Корректность локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа 365
- Антонов С. Ю., Антонова А. В.** О квазимногочленах Капелли 371
- Буланов А. П.** О возможных инвариантах на совокупности показателей взаимно-обратных цепных экспонент 383
- Курдюмов В. П.** О базисах Рисса из собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и интегральными краевыми условиями 392
- Ломов И. С.** Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов 405
- Новиков В. В.** Интерполирование функций, непрерывных по упорядоченной H -вариации 418
- Орлов И. В., Романенко И. А.** Доминантные оценки роста интегранта и гладкость вариационных функционалов в пространствах Соболева 422
- Шерстюкова О. В.** О наименьшем типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями на луче 433

Механика

- Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А.** Геометрически нерегулярные пластинки под действием быстропеременных по временной координате силовых и температурных воздействий 442
- Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.** Модели микрополярных термоупругих континуумов со связанными параметрами микроструктуры 451

Информатика

- Соловьев В. М.** Квантовые компьютеры и квантовые алгоритмы. Часть 1. Квантовые компьютеры 462

Приложение

Хроника научной жизни

- Захаров А. М., Халова В. А.** К 70-летию механико-математического факультета Саратовского университета 478

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций, свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года. Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017, раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки». Журнал выходит 4 раза в год

Заведующий редакцией
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Степанова Наталия Ивановна

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Ковалева Наталья Владимировна

Корректор
Юдина Инна Геннадиевна

Адрес учредителя и редакции:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: (845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: isvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 21.12.15.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 14,41(15,5).
Тираж 500 экз. Заказ 196-Т.

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский государственный университет, 2015



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 11 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: <http://mmi.sgu.ru>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

- Aldashev S. A.** Correctness of the Local Boundary Value Problem in a Cylindrical Domain for Laplace's Many-dimensional Equation 365
- Antonov S. Yu., Antonova A. V.** Quasi-polynomials of Capelli 371
- Bulanov A. P.** Invariants on a Set of Reciprocal Iterated Exponential Power Coefficients 383
- Kurdyumov V. P.** On Riesz Bases of Eigenfunction of 2-nd Order Differential Operator with Involution and Integral Boundary Conditions 392
- Lomov I. S.** Estimates of Speed of Convergence and Equiconvergence of Spectral Decomposition of Ordinary Differential Operators 405
- Novikov V. V.** Interpolation of Continuous in Ordered H -variation Functions 418
- Orlov I. V., Romanenko I. A.** Dominant Integrands Growth Estimates and Smoothness of Variational Functionals in Sobolev Spaces 422
- Sherstyukova O. V.** On the Least Type of Entire Functions of Order $\rho \in (0, 1)$ with Positive Zeros 433

Mechanics

- Belostochny G. N., Myltcina O. A.** The Geometrical Irregular Plates under the Influence of the Quick Changed on the Time Coordinate Forces and Temperature Effects 442
- Kovalev V. A., Radayev Yu. N.** Micropolar Thermoelastic Continuum Models with Constrained Microstructural Parameters 451

Computer Sciences

- Solovyev V. M.** Quantum Computers and Quantum Algorithms. Part 1. Quantum Computers 462

Appendices

Scientific Life Chronicles

- Zakharov A. M., Khalova V. A.** On the 70-th Anniversary of the Mechanics and Mathematics Department of Saratov State University 478



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»

Главный редактор

Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Стальмахов Андрей Всеволодович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)

Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)

Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шамионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL «IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»

Editor-in-Chief – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Stalmakhov A. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Balash O. S. (Saratov, Russia)

Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)

Danilov V. N. (Saratov, Russia)

Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)

Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Makarov V. Z. (Saratov, Russia)

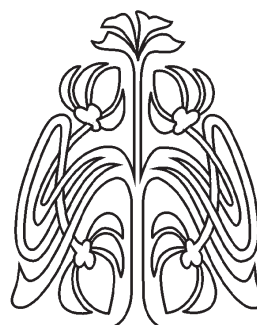
Prozorov V. V. (Saratov, Russia)

Usanov D. A. (Saratov, Russia)

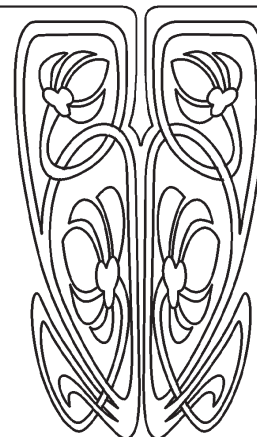
Ustiantsev V. B. (Saratov, Russia)

Shamionov R. M. (Saratov, Russia)

Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)



РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ





**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор

(Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Екатеринбург, Россия)

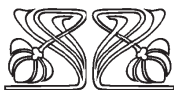
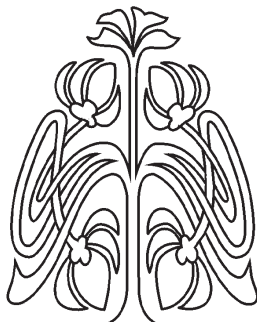
Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

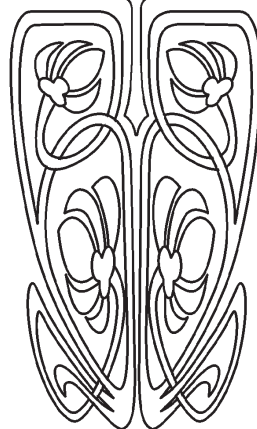
Deputy Editor-in-Chief – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)
Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)
Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)
Indeitsev D. A. (St.-Petersburg, Russia)
Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)
Kovalev V. A. (Moscow, Russia)
Lomakin E. V. (Moscow, Russia)
Manzhirov A. V. (Moscow, Russia)
Matveenko V. P. (Perm, Russia)
Morozov N. F. (St.-Petersburg, Russia)
Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)

Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)
Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)
Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)
Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)
Speranskii D. V. (Moscow, Russia)
Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)
Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)
Khromov A. P. (Saratov, Russia)
Shalyto A. A. (St.-Petersburg, Russia)
Shashkin A. I. (Voronezh, Russia)
Yurko V. A. (Saratov, Russia)



МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

С. А. Алдашев

Алдашев Серик Аймурзаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан, aldash51@mail.ru

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методами теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены.

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений.

В работе используется метод, предложенный в работах автора, и показана однозначная разрешимость локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа, которая является обобщением задач Дирихле и Пуанкаре. Получен также критерий единственности регулярного решения.

Ключевые слова: многомерное уравнение, локальная задача, функция Бесселя.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-365-371

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами подробно изучены в [1–3].

В данной работе для локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа найден явный вид классического решения и получен критерий единственности регулярного решения. В работе используется метод, предложенный в работах [4, 5].

Пусть D_α — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

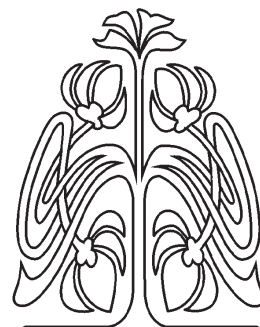
Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α , обозначим через Γ_α , S_α , S_0 соответственно.

В области D_α рассмотрим многомерное уравнение Лапласа:

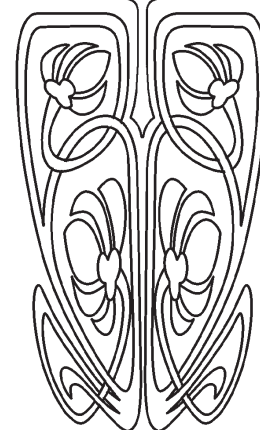
$$\Delta_x u + u_{tt} = 0, \quad (1)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_m , $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Рассмотрим следующую локальную краевую задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C(\bar{D}_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_{S_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t, \theta), \quad (\beta u + \gamma u_t)|_{S_0} = \varphi_2(r, \theta), \quad (2)$$

где $\beta, \gamma = \text{const}$, $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, которая является обобщением задач Дирихле ($\gamma = 0$) и Пуанкаре ($\beta = 0$), исследованных в [6–8], при этом $\varphi_1(1, \theta) = \psi(\alpha, \theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, \dots$, – пространства Соболева.

Имеет место следующая лемма [9].

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (3)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Обозначим через $\bar{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)$ коэффициенты разложения ряда (3) соответственно функций $\varphi_1(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta)$.

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(r, \theta) \in W_2^l(S_\alpha)$, $\psi(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\varphi_2(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, $l > 3m/2$ и

$$\beta \text{th } \mu_{s,n} \alpha \neq \mu_{s,n} \gamma, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

тогда задача 1 однозначно разрешима. Здесь $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Теорема 2. Решение задачи 1 единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

Заметим, что если $\beta = 0$ или $\gamma = 0$, то соотношение (4) выполняется всегда. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 1. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u + u_{tt} = 0, \quad (5)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [9], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.



Так как искомое решение задачи 1 принадлежит классу $C(\bar{D}_\alpha) \cap C^2(D_\alpha)$, то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [9], будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k + \bar{u}_{ntt}^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

при этом краевое условие (2) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_n^k(r, \alpha) &= \bar{\varphi}_{1n}^k(r), & \bar{u}_n^k(1, t) &= \psi_n^k(t), & \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \\ \beta \bar{u}_n^k(r, 0) + \gamma \bar{u}_{nt}^k(r, 0) &= \bar{\varphi}_{2n}^k(r), & k &= \overline{1, k_n}, & n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

В (7), (8), произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_n^k(t)$, получим:

$$v_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} v_{nr}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k + v_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (9)$$

$$\bar{v}_n^k(r, \alpha) = \varphi_{1n}^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad \beta \bar{v}_n^k(r, 0) + \gamma \bar{v}_{nt}^k(r, 0) = \varphi_{2n}^k(r), \quad (10)$$

$$\bar{f}_n^k(r, t) = -\psi_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} \psi_n^k, \quad \varphi_{1n}^k(r) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r) - \psi_n^k(\alpha),$$

$$\varphi_{2n}^k(r) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r) - \beta \psi_n^k(0) - \gamma \psi_{nt}^k(0), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{(1-m)/2} v_n^k(r, t)$, задачу (9), (10) приведем к следующей задаче:

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k + v_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = f_n^k(r, t), \quad (11)$$

$$v_n^k(r, \alpha) = \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \quad \beta v_n^k(r, 0) + \gamma v_{nt}^k(r, 0) = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad (12)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \quad f_n^k(r, t) = r^{(m-1)/2} \bar{f}_n^k(r, t),$$

$$\tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = r^{(m-1)/2} \varphi_{1n}^k(r), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{(m-1)/2} \varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) будем искать в виде

$$v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t), \quad (13)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{1n}^k = f_n^k(r, t), \quad (14)$$

$$v_{1n}^k(r, \alpha) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad \beta v_{1n}^k(r, 0) + \gamma v_{1nt}^k(r, 0) = 0, \quad (15)$$

$v_{2n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \quad (16)$$

$$v_{2n}^k(r, \alpha) = \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0, \quad \beta v_{2n}^k(r, 0) + \gamma v_{2nt}^k(r, 0) = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r). \quad (17)$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (18)$$

при этом пусть

$$f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n} R_s(r). \quad (19)$$



Подставляя (18) в (14), (15), с учетом (19) получим:

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{20}$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \tag{21}$$

$$T_{stt} - \mu T_s = a_{s,n}(t), \quad 0 < t < \alpha, \tag{22}$$

$$T_s(\alpha) = 0, \quad \beta T_s(0) + \gamma T_{st}(0) = 0. \tag{23}$$

Ограниченным решением задачи (20), (21) является [10]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{24}$$

где $\nu = n + (m - 2)/2$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Обще решение уравнения (22) представимо в виде [10]

$$T_{s,n}(t) = c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t - \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi + \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi, \tag{25}$$

c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные. Удовлетворив (25) условию (23), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha = -\frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha}{\mu_{s,n}} \int_0^\alpha a_{ns}(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi + \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha}{\mu_{s,n}} \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi, \\ \beta c_{1s} + \gamma \mu_{s,n} c_{2s} = 0, \end{cases} \tag{26}$$

которая имеет единственное решение, если выполняется условие (4).

Подставляя (24) в (19), получим:

$$\begin{aligned} r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), & r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns} J_\nu(\mu_{s,n} r), \\ r^{-1/2} \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns} J_\nu(\mu_{s,n} r), & 0 < r < 1. \end{aligned} \tag{27}$$

Ряды (27) — разложения в ряды Фурье – Бесселя [11], если

$$a_{ns}(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \tag{28}$$

$$b_{ns} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \tag{29}$$

$$e_{ns} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \tag{30}$$

$\mu_{s,n}, s = 1, 2, \dots$, — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величин.

Из (24), (25) получим решение задачи (14), (15) в виде

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{31}$$

где $T_{s,n}(t)$ определяется формулой (25), в которой $a_{ns}(t)$ и c_{1s}, c_{2s} задаются формулами (28) и (26) соответственно.



Далее, подставляя (24) в (16) и (17), с учетом (19) получим следующую задачу:

$$V_{stt} - \mu_{s,n}^2 V_s = 0, \tag{32}$$

$$V_s(\alpha) = b_{ns}, \quad \beta V_s(0) + \gamma V_{st}(0) = e_{ns}. \tag{33}$$

Общее решение уравнения (32) имеет вид

$$V_{s,n}(t) = c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t, \tag{34}$$

c'_{1s}, c'_{2s} — произвольные постоянные. Удовлетворив (34) условию (33), получим:

$$\begin{cases} c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \alpha + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \alpha = b_{ns}, \\ \beta c'_{1s} + \gamma \mu_{s,n} c'_{2s} = e_{ns}. \end{cases} \tag{35}$$

Из (24), (34) будем иметь:

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_s(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \tag{36}$$

где $b_{ns}, e_{ns}, c'_{1s}, c'_{2s}$ — находятся из (29), (30), (35).

Таким образом, из (6), (13) следует, что решением задачи 1 является ряд

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_n^k(t) + r^{(m-1)/2} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{37}$$

где $v_{1n}^k(r, t), v_{2n}^k(r, t)$ определяются из (31), (36).

Используя формулы [11] $2J'_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$ и

$$|J_{\nu}(z)| \leq \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}, \tag{38}$$

решение (37) можно оценить как степенной ряд.

Далее, учитывая условия на заданные функций $\varphi_1(r, \theta), \psi(t, \theta), \varphi_2(r, \theta)$, леммы 1, 2, оценки

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots, \tag{39}$$

и используя интегральный признак Коши, можно показать, что ряд (37) и ряды, получающиеся из него путем дифференцирования по r и t , сходятся равномерно и абсолютно.

Это означает, что искомое решение в виде (37) принадлежит классу $C(\bar{D}_{\alpha}) \cap C^1(D_{\alpha} \cup S_0) \cap C^2(D_{\alpha})$, если $l > 3m/2$. Теорема 1 доказана. \square

Доказательство теоремы 2. Если выполняется условие (4), то из теоремы 1 вытекает единственность решения задачи 1.

Пусть теперь условие (4) нарушено, хотя бы для одного $s = p$. Тогда нетривиальным решением однородной задачи, соответствующей задаче 1, является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{(2-m)/2} (\beta \operatorname{sh} \mu_{p,n} t - \gamma \mu_{p,n} \operatorname{ch} \mu_{p,n} t) J_{n+\frac{m-2}{2}}(r),$$

при этом из оценок (38), (39) следует, что она принадлежит искомому классу, если $l > 3m/2$. \square

Библиографический список

1. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О задаче с косой производной в области с кусочно-гладкой границей // Функци. анализ и его прил. 1971. Т. 5, № 3. С. 102–103.
2. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе // Тр. семинара С. Л. Соболева. 1978. № 2. С. 69–102.



3. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38, вып. 2(230). С. 3–76.
4. Алдашев С. А. О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 9, № 1. С. 3–8.
5. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы : Гылым, 1994. 170 с.
6. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 3–7.
7. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 7–13.
8. Алдашев С. А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. НАН РК. Сер. физ.-матем. Алматы, 2014. № 3. С. 62–67.
9. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 703 с.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 295 с.

Correctness of the Local Boundary Value Problem in a Cylindrical Domain for Laplace's Many-dimensional Equation

S. A. Aldashev

Aldashev Serik Aimurzaevich, Kazakh National Pedagogical University, 114, prosp. Dostyk, 480100, Almaty, Kazakhstan, aldash51@mail.ru

Correctness of boundary problems in the plane for elliptic equations is well analyzed by analytic function theory of complex variable.

There appear principal difficulties in similar problems when the number of independent variables is more than two. An attractive and suitable method of singular integral equations is less strong because of lack of any complete theory of multidimensional singular integral equations.

In the paper, using authors early methods we prove a unique solvability of the local boundary value problem in the cylindrical domain for a Laplace's many-dimensional equation which is a generalization of the Dirichlet and Poincaré problems. Besides, the criterion of uniqueness of the regular solution is obtained.

Key words: many-dimensional equation, local problem, domain, Bessel's function.

References

1. Maz'ya V. G., Plamenevskii B. A. Problems with oblique derivatives in regions with piecewise smooth boundaries. *Funct. Anal. Appl.*, 1971, vol. 5, no. 3, pp. 256–258.
2. Maz'ya V. G., Plamenevskii B. A. Schauder estimates of solutions of elliptic boundary value problems in domains with edges on the boundary. *Partial Differential Equations (Proc. Sem. S. L. Sobolev, 1978, No. 2)*, Inst. Mat. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1978, pp. 69–102 (in Russian); English transl.: *Am. Math. Soc. Transl.* 1984, vol. 123, pp. 141–169.
3. Kondratyev V. A., Oleinik O. A. Boundary-value problems for partial differential equations in non-smooth domains. *Russian Math. Surveys*, 1983, vol. 38, iss. 2 (230), pp. 3–76. DOI: 10.1070/RM1983v038n02ABEH003470.
4. Aldashev S. A. Some Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Wave Equation. *Differential Equations*, 1983, vol. 9, no. 1, pp. 3–8 (in Russian).
5. Aldashev S. A. Kraevye zadachi dlia mnogomernykh giperbolicheskikh i smeshannykh uravnenii [Boundary Value Problems for Many-dimensional Hyperbolic and Hybrid Equations]. Almaty, Gylym, 1994, 170 p. (in Russian).
6. Aldashev S. A. Correctness of Dirichlet's Problem in a Cylindrical Domain for Laplace's Many-dimensional Equation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 3–7 (in Russian).
7. Aldashev S. A. Correctness of Dirichlet's Problem in a Cylindrical Domain for a Single Class of Many-dimensional Elliptic Equations. *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 7–13 (in Russian).



8. Aldashev S. A. Correctness of Poincaré's Problem in a Cylindric Domain for Laplace's Many-dimensional Equation. *Izvestiia NAN RK. Ser. fiziko-matematicheskaja* [Proc. NAN RK. Ser. Physics and Mathematics], Almaty, 2014, no. 3, pp. 62–67 (in Russian).
9. Mikhlin S. G. *Mnogomernye singular'nye integraly i integral'nye uravneniia* [Many-dimensional Singular Integrals and Integral Equations]. Moscow, Physmathgiz, 1962, 254 p. (in Russian).
10. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook on Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965, 703 p. (in Russian).
11. Beitmen G., Erdeii A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. T. 2* [Higher Transcendental Functions. Vol. 2]. Moscow, Nauka, 1974, 295 p. (in Russian).

УДК 512

О КВАЗИМНОГОЧЛЕНАХ КАПЕЛЛИ

С. Ю. Антонов¹, А. В. Антонова²

¹Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, antonovst-vm@rambler.ru

²Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, antonovakazan@rambler.ru

В данной работе рассматривается класс многочленов типа Капелли в свободной ассоциативной алгебре $F\{Z\}$, где F — произвольное поле, Z — счетное множество. Интерес к этим объектам связан с предположением о том, что введенные многочлены (квазимногочлены Капелли) некоторой нечетной степени будут содержаться в базисе идеала Z_2 -градуированных тождеств Z_2 -градуированной матричной алгебры $M^{(m,k)}(F)$, когда $\text{char } F = 0$. В связи с этим в статье приведены основные свойства квазимногочленов Капелли. В частности, указаны разложения этих многочленов через многочлены того же вида и установлены некоторые соотношения между их T -идеалами. Кроме того, опираясь на некоторые полученные свойства квазимногочленов Капелли, а также на теорему Ченга, мы показываем, что все квазимногочлены Капелли четной степени $2n$ ($n > 1$) являются следствием стандартного многочлена S_n^- в случае, когда характеристика поля F не равна двум. Наконец, мы находим наименьшее $n \in \mathbb{N}$, при котором каждый из квазимногочленов Капелли четной степени $2n$ принадлежит идеалу тождеств матричной алгебры $M_m(F)$.

Ключевые слова: T -идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382

ВВЕДЕНИЕ

Пусть F — произвольное поле, m, k — любые натуральные числа. Описание идеала Z_2 -градуированных тождеств Z_2 -градуированной матричной алгебры $M^{(m,k)}(F)$ представляет большой интерес для теории PI -алгебр. Решение этой задачи при $m = 2, k = 1, \text{char } F = 0$ приведено в [1]. В [2] найдена наименьшая степень тождеств нечетной компоненты $M_1^{(m,k)}(F)$ Z_2 -градуированной алгебры $M^{(m,k)}(F)$ и доказано, что двойной многочлен Капелли C_{2n-1} является минимальным тождеством этого подпространства. В [3] выдвинута гипотеза о том, что многочлен C_{2n-1} есть следствие более простых тождеств, причем для двух из них указан явный вид и приведены некоторые их свойства.

В данной работе мы продолжаем изучение этих многочленов, вводим новые объекты того же типа и устанавливаем некоторые соотношения между их T -идеалами, что представляет интерес в связи с нахождением базиса тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ КАПЕЛЛИ

Пусть F — произвольное поле, $F\{Z\}$ — свободная ассоциативная алгебра над F , порожденная счетным множеством $Z = \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, которое представим в виде $Z = X \cup Y$, где $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $Y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — непересекающиеся множества, $\{d\}^T$ — T -идеал алгебры $F\{Z\}$, порожденный



многочленом d . Напомним, что двусторонний идеал I алгебры $F\{Z\}$ называется T -идеалом, если для любого эндоморфизма φ алгебры $F\{Z\}$ справедливо включение $\varphi(I) \subseteq I$. Далее, пусть $n > 1$ — какое-либо натуральное число, $I_n = \{1, \dots, n\}$, S_n — симметрическая группа степени n , $A_n^+ = \{\pi \in S_n \mid \text{sgn } \pi = 1\}$, $A_n^- = \{\tau \in S_n \mid \text{sgn } \tau = -1\}$. Рассмотрим многочлены вида:

$$\begin{aligned} f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \text{sgn } \pi \delta_{\text{sgn } \pi \text{sgn } \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)} = \\ &= \sum_{\pi \in A_n^+} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)} - \sum_{\pi \in A_n^-} \sum_{\tau \in A_{n-1}^-} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)}, \\ g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \text{sgn } \pi \delta_{-\text{sgn } \pi \text{sgn } \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)}; \\ b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)}, \\ h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^-} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)}, \\ a_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in A_n^+} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \text{sgn } \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)}, \\ c_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in A_n^-} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \text{sgn } \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)}, \\ f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn } \pi \delta_{\text{sgn } \pi \text{sgn } \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)} y_{\tau(n)} = \\ &= \sum_{\pi \in A_n^+} \sum_{\tau \in A_n^+} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)} - \sum_{\pi \in A_n^-} \sum_{\tau \in A_n^-} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)}, \\ g_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn } \pi \delta_{-\text{sgn } \pi \text{sgn } \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)}, \\ b_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_n^+} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)}, \\ h_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_n^-} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)}, \\ a_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in A_n^+} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn } \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)}, \\ c_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in A_n^-} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn } \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)}, \end{aligned}$$

которые в дальнейшем будем называть квазимногочленами Капелли нечетной и четной степени соответственно. Некоторые свойства многочленов f_{2n-1} , g_{2n-1} , f_{2n} , g_{2n} были установлены в работе [3]. Покажем, что аналогичными свойствами обладают и остальные многочлены.

Предложение 1. Для любого $s \in \{0, 1\}$ многочлены $b_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$ обладают следующими свойствами:

- 1) если отображение $\varphi : I_n \rightarrow \mathbf{N}$ не инъективно, а отображение $\psi : I_{n-s} \rightarrow \mathbf{N}$ произвольно, то $b_{2n-s}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n-s)}) = 0$, $h_{2n-s}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n-s)}) = 0$;
- 2) для любого $\sigma \in S_n$ $b_{2n-s}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_{n-s}) = \text{sgn } \sigma b_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2n-s}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_{n-s}) = \text{sgn } \sigma h_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$;
- 3) для любого $\rho \in A_{n-s}^+$ $b_{2n-s}(x_1, \dots, x_n, y_{\rho(1)}, \dots, y_{\rho(n-s)}) = b_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2n-s}(x_1, \dots, x_n, y_{\rho(1)}, \dots, y_{\rho(n-s)}) = h_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$;
- 4) для любого $\omega \in A_{n-s}^-$ $b_{2n-s}(x_1, \dots, x_n, y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n-s)}) = h_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2n-s}(x_1, \dots, x_n, y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n-s)}) = b_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$.



Доказательство. Проведем для многочлена $h_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$ при $s = 1$, так как для остальных случаев оно аналогично.

1. Для отображений φ и ψ имеем:

$$h_{2n-1}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n-1)}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^-} \operatorname{sgn} \pi x_{\varphi(\pi(1))} y_{\psi(\tau(1))} \dots y_{\psi(\tau(n-1))} x_{\varphi(\pi(n))}.$$

Если φ неинъективно, то для некоторых различных $i, j \in I_n$ справедливо равенство $\varphi(i) = \varphi(j)$.

Пусть π, τ — произвольные элементы группы S_n и множества A_{n-1}^- соответственно. Тогда для некоторых $a, b \in I_n$ $\pi(a) = i, \pi(b) = j$. Рассмотрим подстановку $\pi' \in S_n$, для которой

$$\pi'(v) = \begin{cases} \pi(v), & \text{если } v \notin \{a, b\}, \\ j, & \text{если } v = a, \\ i, & \text{если } v = b. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn} \pi x_{\varphi(\pi(1))} y_{\psi(\tau(1))} \dots y_{\psi(\tau(n-1))} x_{\varphi(\pi(n))} + \operatorname{sgn} \pi' x_{\varphi(\pi'(1))} y_{\psi(\tau(1))} \dots y_{\psi(\tau(n-1))} x_{\varphi(\pi'(n))} = \\ & = \operatorname{sgn} \pi x_{\varphi(\pi(1))} y_{\psi(\tau(1))} \dots y_{\psi(\tau(n-1))} x_{\varphi(\pi(n))} - \operatorname{sgn} \pi x_{\varphi(\pi'(1))} y_{\psi(\tau(1))} \dots y_{\psi(\tau(n-1))} x_{\varphi(\pi'(n))} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $h_{2n-1}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n-1)}) = 0$.

2. Для произвольного $\sigma \in S_n$ имеем:

$$\begin{aligned} & h_{2n-1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_{n-1}) = \\ & = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^-} \operatorname{sgn} \pi x_{\sigma(\pi(1))} y_{\tau(1)} \dots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(\pi(n))} = |\text{полагаем } \pi = \sigma^{-1}\alpha| = \\ & = \sum_{\alpha \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^-} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \alpha x_{\sigma(\sigma^{-1}\alpha(1))} y_{\tau(1)} \dots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(\sigma^{-1}\alpha(n))} = \operatorname{sgn} \sigma h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

3. Для любого $\rho \in A_{n-1}^+$ имеем:

$$\begin{aligned} & h_{2n-1}(x_1, \dots, x_n, y_{\rho(1)}, \dots, y_{\rho(n-1)}) = \\ & = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^-} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\rho(\tau(1))} \dots y_{\rho(\tau(n-1))} x_{\pi(n)} = |\text{полагаем } \tau = \rho^{-1}\gamma| = \\ & = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\gamma \in A_{n-1}^-} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\rho(\rho^{-1}\gamma(1))} \dots y_{\rho(\rho^{-1}\gamma(n-1))} x_{\pi(n)} = h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

4. Для любого $\omega \in A_{n-1}^-$ имеем:

$$\begin{aligned} & h_{2n-1}(x_1, \dots, x_n, y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n-1)}) = \\ & = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^-} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\omega(\tau(1))} \dots y_{\omega(\tau(n-1))} x_{\pi(n)} = |\text{полагаем } \tau = \omega^{-1}\alpha| = \\ & = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\alpha \in A_{n-1}^+} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\omega(\omega^{-1}\alpha(1))} \dots y_{\omega(\omega^{-1}\alpha(n-1))} x_{\pi(n)} = b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 1. Для любого натурального числа $n > 1$ в алгебре $F\{Z\}$ справедливы равенства $\{b_{2n-1}\}^T = \{h_{2n-1}\}^T, \{b_{2n}\}^T = \{h_{2n}\}^T$.

Предложение 2. Для любого $s \in \{0, 1\}$ многочлены $a_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y}), c_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$ обладают следующими свойствами:

1) если отображение $\psi : I_{n-s} \rightarrow \mathbf{N}$ не инъективно, а отображение $\varphi : I_n \rightarrow \mathbf{N}$ произвольно, то $a_{2n-s}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n-s)}) = 0, c_{2n-s}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n-s)}) = 0$;



- 2) для любого $\sigma \in S_{n-s}$ $a_{2n-s}(x_1, \dots, x_n, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n-s)}) = \text{sgn } \sigma a_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$, $c_{2n-s}(x_1, \dots, x_n, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n-s)}) = \text{sgn } \sigma c_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$;
- 3) для любого $\rho \in A_n^+$ $a_{2n-s}(x_{\rho(1)}, \dots, x_{\rho(n)}, y_1, \dots, y_{n-s}) = a_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$, $c_{2n-s}(x_{\rho(1)}, \dots, x_{\rho(n)}, y_1, \dots, y_{n-s}) = c_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$;
- 4) для любого $\omega \in A_n^-$ $a_{2n-s}(x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(n)}, y_1, \dots, y_{n-s}) = c_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$, $c_{2n-s}(x_{\omega(1)}, \dots, x_{\omega(n)}, y_1, \dots, y_{n-s}) = a_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 1. □

Следствие 2. Для любого натурального числа $n > 1$ в алгебре $F\{Z\}$ справедливы равенства $\{a_{2n-1}\}^T = \{c_{2n-1}\}^T$, $\{a_{2n}\}^T = \{c_{2n}\}^T$.

Замечание 1. Из предложений 1 и 2 работы [3] следует, что $\{f_{2n-1}\}^T = \{g_{2n-1}\}^T$, $\{f_{2n}\}^T = \{g_{2n}\}^T$.

Совместно с многочленами $b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, ..., $c_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$ рассмотрим транспонированные по отношению к ним многочлены

$$\begin{aligned}
 b_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} \text{sgn } \pi x_{\pi(n)} y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n-1)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)}, \\
 h_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^-} \text{sgn } \pi x_{\pi(n)} y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n-1)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)}, \\
 a_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in A_n^+} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \text{sgn } \tau x_{\pi(n)} y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n-1)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)}, \\
 c_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in A_n^-} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \text{sgn } \tau x_{\pi(n)} y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n-1)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)}, \\
 b_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\tau \in A_n^+} \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi y_{\tau(n)} x_{\pi(n)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)}; \\
 h_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\tau \in A_n^-} \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi y_{\tau(n)} x_{\pi(n)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)}, \\
 a_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\pi \in A_n^+} \text{sgn } \tau y_{\tau(n)} x_{\pi(n)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)}, \\
 c_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\pi \in A_n^-} \text{sgn } \tau y_{\tau(n)} x_{\pi(n)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)}.
 \end{aligned}$$

Утверждение 1. Справедливы равенства

- 1) если $(n-1)(n-2)/2 = \begin{cases} 2k, & \text{где } k \in \mathbf{N}, \\ 2k-1, & \text{где } k \in \mathbf{N}, \end{cases}$ то $b_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^{n-1} b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$,
 то $b_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^n h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$;
- 2) если $(n-1)(n-2)/2 = \begin{cases} 2k, & \text{где } k \in \mathbf{N}, \\ 2k-1, & \text{где } k \in \mathbf{N}, \end{cases}$ то $h_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^{n-1} h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$,
 то $h_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^n b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$;
- 3) если $n(n-1)/2 = \begin{cases} 2k, & \text{где } k \in \mathbf{N}, \\ 2k-1, & \text{где } k \in \mathbf{N}, \end{cases}$ то $a_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^{n-1} a_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$,
 то $a_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^n c_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$;
- 4) если $n(n-1)/2 = \begin{cases} 2k, & \text{где } k \in \mathbf{N}, \\ 2k-1, & \text{где } k \in \mathbf{N}, \end{cases}$ то $c_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^{n-1} c_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$,
 то $c_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^n a_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$.

Доказательство. Проведем для первых равенств, поскольку для остальных оно аналогично. Итак,

$$b_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} \text{sgn } \pi x_{\pi(n)} y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n-1)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)}.$$



Полагаем $\pi = \sigma\alpha$, $\tau = \rho\beta$, где $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, и заметим, что $\text{sgn } \alpha = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} = (-1)^{n(n-1)/2}$, $\text{sgn } \beta = (-1)^{(n-2)+(n-3)+\dots+1} = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot (-1)^{-2(n-1)/2} = (-1)^{n-1} \text{sgn } \alpha$. Отсюда следует, что если

$$(n-1)(n-2)/2 = \begin{cases} 2k, \text{ где } k \in \mathbf{N}, & \text{то } \beta \in A_{n-1}^+, \text{ и тогда } \rho \in A_{n-1}^+; \\ 2k-1, \text{ где } k \in \mathbf{N}, & \text{то } \beta \in A_{n-1}^-, \text{ и тогда } \rho \in A_{n-1}^-; \end{cases}$$

и потому

$$b_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{cases} \text{sgn } \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\rho \in A_{n-1}^+} \text{sgn } \sigma x_{\sigma(1)} y_{\rho(1)} \dots y_{\rho(n-1)} x_{\sigma(n)} = (-1)^{n-1} b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \text{sgn } \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\rho \in A_{n-1}^-} \text{sgn } \sigma x_{\sigma(1)} y_{\rho(1)} \dots y_{\rho(n-1)} x_{\sigma(n)} = (-1)^n h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \quad \square$$

Утверждение 2. *Справедливы равенства*

1) если $n(n-1)/2 = 2k$, где $k \in \mathbf{N}$, то $b_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = a_{2n}(\bar{y}, \bar{x})$, $h_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = c_{2n}(\bar{y}, \bar{x})$, $a_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = b_{2n}(\bar{y}, \bar{x})$, $c_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = h_{2n}(\bar{y}, \bar{x})$;

2) если $n(n-1)/2 = 2k-1$, где $k \in \mathbf{N}$, то $b_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = -c_{2n}(\bar{y}, \bar{x})$, $h_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = -a_{2n}(\bar{y}, \bar{x})$, $a_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = -h_{2n}(\bar{y}, \bar{x})$, $c_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = -b_{2n}(\bar{y}, \bar{x})$.

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 1. □

Предложение 3. *Справедливы равенства*

$$1) b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i a_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} b_{2(n-1)}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}) x_i;$$

$$2) h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i c_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} h_{2(n-1)}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}) x_i;$$

3) если $n = 2k$, то

$$\begin{aligned} a_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^k x_{2i-1} b_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + \sum_{i=1}^k x_{2i} h_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) = \\ &= \sum_{i=1}^k c_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} + a_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i}; \end{aligned}$$

4) если $n = 2k+1$, то

$$\begin{aligned} a_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} b_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + \sum_{i=1}^k x_{2i} h_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) = \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} a_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} + \sum_{i=1}^k c_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i}; \end{aligned}$$

5) если $n = 2k$, то

$$\begin{aligned} c_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^k x_{2i-1} h_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + \sum_{i=1}^k x_{2i} b_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) = \\ &= \sum_{i=1}^k a_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} + c_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i}; \end{aligned}$$

6) если $n = 2k+1$, то

$$c_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} h_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + \sum_{i=1}^k x_{2i} b_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$



$$= \sum_{i=1}^{k+1} c_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y})x_{2i-1} + \sum_{i=1}^k a_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y})x_{2i}.$$

Доказательство. Проведем для первых равенств, поскольку для остальных оно аналогично. Итак,

$$b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i t_i(y_1, \dots, y_{n-1}, x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n), \text{ причем для любого } i \in I_n$$

$$x_i t_i(y_1, \dots, y_{n-1}, x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) = \sum_{\pi \in S'_n(i)} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \dots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

где $S'_n(i) = \{\pi \in S_n \mid \pi(1) = i\}$.

Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi \in S'_n(i)$ можно представить в виде $\pi = \sigma \mu_i$, где $\mu_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ i & 1 & \dots & i-2 & i-1 & i+1 & \dots & n \end{pmatrix}$, $\sigma(i) = i$. Заметим также, что $\text{sgn } \mu_i = (-1)^{i-1}$. Положим $S_n(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$. Тогда

$$\begin{aligned} b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} \text{sgn } (\sigma \mu_i) x_{\sigma \mu_i(1)} y_{\tau(1)} \dots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma \mu_i(n)} = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} \text{sgn } \sigma y_{\tau(1)} x_{\sigma(1)} \dots y_{\tau(i)} x_{\sigma(i+1)} \dots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(n)} = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \text{sgn } \sigma y_{\tau(1)} x_{\sigma(1)} \dots y_{\tau(i)} x_{\sigma(i+1)} \dots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(n)} = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i a_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_i). \end{aligned}$$

Докажем вторую часть первого равенства. Для этого заметим, что $b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n v_i(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{n-1})x_i$, причем для любого $i \in I_n$

$$v_i(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{n-1})x_i = \sum_{\pi \in \tilde{S}_n(i)} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} \text{sgn } \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \dots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

где $\tilde{S}_n(i) = \{\pi \in S_n \mid \pi(n) = i\}$.

Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi \in \tilde{S}_n(i)$ можно представить в виде $\pi = \sigma \rho_i$, где $\rho_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & n & i \end{pmatrix}$, $\sigma(i) = i$. Заметим также, что $\text{sgn } \rho_i = (-1)^{n-i}$. Положим $S_n(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$. Тогда

$$\begin{aligned} b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} \text{sgn } (\sigma \rho_i) x_{\sigma \rho_i(1)} y_{\tau(1)} \dots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma \rho_i(n)} = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} \text{sgn } \sigma x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} \dots x_{\sigma(i-1)} y_{\tau(i-1)} x_{\sigma(i+1)} y_{\tau(i)} \dots x_{\sigma(n)} y_{\tau(n-1)} x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} b_{2(n-1)}(\bar{x}_i, \bar{y}) x_i. \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 4. Справедливы равенства

1) $b_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i a_{2n-1}(\bar{y}, \bar{x}_i);$

2) если $n = 2k$, то

$$b_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^k h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i-1}}) y_{2i-1} + b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i}}) y_{2i};$$



3) если $n = 2k + 1$, то

$$b_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} b_{2n-1}(\bar{x}, \widehat{\bar{y}_{2i-1}}) y_{2i-1} + \sum_{i=1}^k h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{2i}) y_{2i};$$

$$4) h_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i c_{2n-1}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_i});$$

5) если $n = 2k$, то

$$h_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^k b_{2n-1}(\bar{x}, \widehat{\bar{y}_{2i-1}}) y_{2i-1} + h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{2i}) y_{2i};$$

6) если $n = 2k + 1$, то

$$h_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} h_{2n-1}(\bar{x}, \widehat{\bar{y}_{2i-1}}) y_{2i-1} + \sum_{i=1}^k b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{2i}) y_{2i};$$

7) если $n = 2k$, то

$$a_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^k x_{2i-1} b_{2n-1}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i-1}}) + x_{2i} h_{2n-1}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i}}) = \sum_{i=1}^n (-1)^i a_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_i) y_i;$$

8) если $n = 2k + 1$, то

$$a_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} b_{2n-1}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i-1}}) + \sum_{i=1}^k x_{2i} h_{2n-1}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i}}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_i) y_i;$$

9) если $n = 2k$, то

$$c_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^k x_{2i-1} h_{2n-1}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i-1}}) + x_{2i} b_{2n-1}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i}}) = \sum_{i=1}^n (-1)^i c_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_i) y_i;$$

10) если $n = 2k + 1$, то

$$c_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} h_{2n-1}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i-1}}) + \sum_{i=1}^k x_{2i} b_{2n-1}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i}}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} c_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_i) y_i.$$

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3. □

Утверждение 3. Для любого натурального числа $n > 2$ в алгебре $F\{Z\}$ справедливы включения

- 1) $\{b_{2n-1}\}^T \supseteq \{b_{2n}\}^T \supseteq \{b_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{b_{2(n+1)}\}^T \supseteq \dots;$
- 2) $\{h_{2n-1}\}^T \supseteq \{h_{2n}\}^T \supseteq \{h_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{h_{2(n+1)}\}^T \supseteq \dots;$
- 3) $\{a_{2n-1}\}^T \supseteq \{a_{2n}\}^T \supseteq \{a_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{a_{2(n+1)}\}^T \supseteq \dots;$
- 4) $\{c_{2n-1}\}^T \supseteq \{c_{2n}\}^T \supseteq \{c_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{c_{2(n+1)}\}^T \supseteq \dots;$
- 5) $\{f_{2n-1}\}^T \supseteq \{f_{2n}\}^T \supseteq \{f_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{f_{2(n+1)}\}^T \supseteq \dots;$
- 6) $\{g_{2n-1}\}^T \supseteq \{g_{2n}\}^T \supseteq \{g_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{g_{2(n+1)}\}^T \supseteq \dots.$

Доказательство. Включения 1), 2) вытекают из следствия 1, предложений 3 и 4; включения 3), 4) — из следствия 2, предложений 3 и 4; включения 5), 6) следуют из замечания 1, предложений 3 и 4 работы [3]. □



2. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ КАПЕЛЛИ

В этом пункте мы продолжим изучение свойств квазимногочленов Капелли. Ввиду однообразности рассуждений мы ограничимся рассмотрением лишь многочленов f_{2n-1} и f_{2n} . Пусть q, n — любые натуральные числа, для которых $1 \leq q \leq n-1, j = \{j_1, \dots, j_q\}$ — произвольное подмножество множества $I_n = \{1, \dots, n\}, i = I_n \setminus j = \{i_1, \dots, i_{n-q}\}, l = \{l_1, \dots, l_{q-1}\} (q > 1), p = \{p_1, \dots, p_q\} (q < n-1)$ — какие-либо подмножества множества $I_{n-1}, a = I_{n-1} \setminus l = \{a_1, \dots, a_{n-q}\}, b = I_{n-1} \setminus p = \{b_1, \dots, b_{n-1-q}\}, r = n - q$. При этом будем считать, что $j_1 < \dots < j_q, i_1 < \dots < i_r, l_1 < \dots < l_{q-1}, p_1 < \dots < p_q, a_1 < \dots < a_r, b_1 < \dots < b_{r-1}$.

Кроме того, положим $J_q = \{j \subset I_n \mid \text{Card } j = q\}, L_{q-1} = \{l \subset I_{n-1} \mid \text{Card } l = q - 1\}, P_q = \{p \subset I_{n-1} \mid \text{Card } p = q\}, A_n^+ = \{\pi \in S_n \mid \text{sgn } \pi = 1\}, A_n^- = \{\pi \in S_n \mid \text{sgn } \pi = -1\}$. Каждому элементу $j \in J_q, l \in L_{q-1}, p \in P_q$ поставим в соответствие подстановку $\alpha_j \in S_n, \gamma_l \in S_{n-1}, \varepsilon_p \in S_{n-1}$, где $\alpha_j = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+r \\ j_1 & \dots & j_q & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}, \gamma_l = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q-1 & q & \dots & q+r-1 \\ l_1 & \dots & l_{q-1} & a_1 & \dots & a_r \end{pmatrix}, \varepsilon_p = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+r-1 \\ p_1 & \dots & p_q & b_1 & \dots & b_{r-1} \end{pmatrix}$, и обозначим через $J_q^+ = \{j \in J_q \mid \text{sgn } \alpha_j = 1\}, J_q^- = \{j \in J_q \mid \text{sgn } \alpha_j = -1\}, L_{q-1}^+ = \{l \in L_{q-1} \mid \text{sgn } \gamma_l = 1\}, L_{q-1}^- = \{l \in L_{q-1} \mid \text{sgn } \gamma_l = -1\}, P_q^+ = \{p \in P_q \mid \text{sgn } \varepsilon_p = 1\}, P_q^- = \{p \in P_q \mid \text{sgn } \varepsilon_p = -1\}$.

Предложение 5. Справедливы равенства

1) при $1 < q < n - 1$ $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = R_{++}(\bar{x}, \bar{y}) + R_{--}(\bar{x}, \bar{y}) + R_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) + R_{-+}(\bar{x}, \bar{y})$, где

$$\begin{aligned} R_{++}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^+} f_{2q-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_a) f_{2r}(\bar{y}_l, \bar{x}_j) - g_{2q-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_a) g_{2r}(\bar{y}_l, \bar{x}_j), \\ R_{--}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^-} \sum_{l \in L_{q-1}^-} f_{2q-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_a) f_{2r}(\bar{y}_l, \bar{x}_j) - g_{2q-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_a) g_{2r}(\bar{y}_l, \bar{x}_j), \\ R_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^-} g_{2q-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_a) f_{2r}(\bar{y}_l, \bar{x}_j) - f_{2q-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_a) g_{2r}(\bar{y}_l, \bar{x}_j), \\ R_{-+}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^-} \sum_{l \in L_{q-1}^+} g_{2q-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_a) f_{2r}(\bar{y}_l, \bar{x}_j) - f_{2q-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_a) g_{2r}(\bar{y}_l, \bar{x}_j) \end{aligned}$$

(запись \bar{z}_c означает, что из множества переменных $\{z_1, \dots, z_k\}$ удалены переменные с индексами из множества c);

2) при $1 < q < n - 1$ $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = Q_{++}(\bar{x}, \bar{y}) + Q_{--}(\bar{x}, \bar{y}) + Q_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) + Q_{-+}(\bar{x}, \bar{y})$, где

$$\begin{aligned} Q_{++}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^+} \sum_{p \in P_q^+} f_{2q}(\bar{x}_j, \bar{y}_b) f_{2r-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_p) - g_{2q}(\bar{x}_j, \bar{y}_b) g_{2r-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_p), \\ Q_{--}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^-} \sum_{p \in P_q^-} f_{2q}(\bar{x}_j, \bar{y}_b) f_{2r-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_p) - g_{2q}(\bar{x}_j, \bar{y}_b) g_{2r-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_p), \\ Q_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^+} \sum_{p \in P_q^-} g_{2q}(\bar{x}_j, \bar{y}_b) f_{2r-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_p) - f_{2q}(\bar{x}_j, \bar{y}_b) g_{2r-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_p), \\ Q_{-+}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^-} \sum_{p \in P_q^+} g_{2q}(\bar{x}_j, \bar{y}_b) f_{2r-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_p) - f_{2q}(\bar{x}_j, \bar{y}_b) g_{2r-1}(\bar{x}_j, \bar{y}_p). \end{aligned}$$

Доказательство. Проведем для первого равенства, поскольку для второго оно аналогично. В связи с этим заметим, что

$$f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q} \sum_{l \in L_{q-1}} t_{jl}(\bar{x}, \bar{y}),$$

где

$$t_{jl}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n(j)} \sum_{\tau \in S_{n-1}(l)} \text{sgn } \pi \cdot \delta_{\text{sgn } \pi \text{sgn } \tau} (x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \dots x_{\pi(q)} \cdot (y_{\tau(q)} x_{\pi(q+1)} \dots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)}),$$



$$S_n(j) = \{\pi \in S_n \mid \pi(I_q) = j, \pi(\{q+1, \dots, n\}) = i\},$$

$$S_{n-1}(l) = \{\tau \in S_{n-1} \mid \tau(I_{q-1}) = l, \tau(\{q, \dots, n-1\}) = a\}.$$

Нетрудно видеть, что для любых $\pi \in S_n(j)$, $\tau \in S_{n-1}(l)$ верны равенства

$$\pi = \sigma_\pi \mu_\pi \alpha_j, \quad \tau = \rho_\tau \omega_\tau \gamma_l,$$

где

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+r \\ j_1 & \dots & j_q & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}, \quad \mu_\pi = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_q & i_1 & \dots & i_r \\ j_1 & \dots & j_q & \pi(i_1) & \dots & \pi(i_r) \end{pmatrix},$$

$$\sigma_\pi = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_q & i_1 & \dots & i_r \\ \pi(j_1) & \dots & \pi(j_q) & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}, \quad \gamma_l = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q-1 & q & \dots & q+r-1 \\ l_1 & \dots & l_{q-1} & a_1 & \dots & a_r \end{pmatrix},$$

$$\omega_\tau = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_{q-1} & a_1 & \dots & a_r \\ l_1 & \dots & l_{q-1} & \tau(a_1) & \dots & \tau(a_r) \end{pmatrix}, \quad \rho_\tau = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_{q-1} & a_1 & \dots & a_r \\ \tau(l_1) & \dots & \tau(l_{q-1}) & a_1 & \dots & a_r \end{pmatrix}.$$

Положим $B_n(i) = \{\mu \in S_n \mid \mu|_j = id\}$, $C_n(j) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma|_i = id\}$, $D_{n-1}(a) = \{\omega \in S_{n-1} \mid \omega|_l = id\}$, $T_{n-1}(l) = \{\rho \in S_{n-1} \mid \rho|_a = id\}$. Очевидно, что $B_n(i) \cong S_r$, $C_n(j) \cong S_q$, $D_{n-1}(a) \cong S_r$, $T_{n-1}(l) \cong S_{q-1}$. Тогда

$$t_{jl}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\sigma \in C_n(j)} \sum_{\mu \in B_n(i)} \sum_{\rho \in T_{n-1}(l)} \sum_{\omega \in D_{n-1}(a)} \text{sgn}(\sigma \mu \alpha_j) \delta_{\text{sgn}(\sigma \mu \alpha_j) \text{sgn}(\rho \omega \gamma_l)} \times$$

$$\times (x_{\sigma \mu \alpha_j(1)} y_{\rho \omega \gamma_l(1)} \dots x_{\sigma \mu \alpha_j(q)} \cdot (y_{\rho \omega \gamma_l(q)} x_{\sigma \mu \alpha_j(q+1)} \dots y_{\rho \omega \gamma_l(n-1)} x_{\sigma \mu \alpha_j(n)})) =$$

$$= \text{sgn} \alpha_j \sum_{\sigma \in S_q} \sum_{\rho \in S_{q-1}} \sum_{\omega \in S_r} \sum_{\mu \in S_r} \text{sgn} \sigma \text{sgn} \mu \delta_{\text{sgn} \alpha_j \text{sgn}(\sigma \mu) \text{sgn} \gamma_l \text{sgn}(\rho \omega)} (x_{j_{\sigma(1)}} y_{l_{\rho(1)}} \dots x_{j_{\sigma(q)}}) \times$$

$$\times (y_{a_{\omega(1)}} x_{j_{\mu(1)}} \dots y_{a_{\omega(r)}} x_{i_{\mu(r)}}).$$

Следовательно,

$$f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q} \sum_{l \in L_{q-1}} t_{jl}(\bar{x}, \bar{y}) =$$

$$= \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^+} \sum_{\sigma \in S_q} \sum_{\rho \in S_{q-1}} \sum_{\omega \in S_r} \sum_{\mu \in S_r} \text{sgn} \sigma \text{sgn} \mu \delta_{\text{sgn}(\sigma \mu) \text{sgn}(\rho \omega)} (x_{j_{\sigma(1)}} \dots) (y_{a_{\omega(1)}} \dots) -$$

$$- \sum_{j \in J_q^-} \sum_{l \in L_{q-1}^-} \sum_{\sigma \in S_q} \sum_{\rho \in S_{q-1}} \sum_{\omega \in S_r} \sum_{\mu \in S_r} \text{sgn} \sigma \text{sgn} \mu \delta_{\text{sgn}(\sigma \mu) \text{sgn}(\rho \omega)} (x_{j_{\sigma(1)}} \dots) (y_{a_{\omega(1)}} \dots) +$$

$$+ \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^-} \sum_{\sigma \in S_q} \sum_{\rho \in S_{q-1}} \sum_{\omega \in S_r} \sum_{\mu \in S_r} \text{sgn} \sigma \text{sgn} \mu \delta_{\text{sgn}(\sigma \mu) - \text{sgn}(\rho \omega)} (x_{j_{\sigma(1)}} \dots) (y_{a_{\omega(1)}} \dots) -$$

$$- \sum_{j \in J_q^-} \sum_{l \in L_{q-1}^+} \sum_{\sigma \in S_q} \sum_{\rho \in S_{q-1}} \sum_{\omega \in S_r} \sum_{\mu \in S_r} \text{sgn} \sigma \text{sgn} \mu \delta_{-\text{sgn}(\sigma \mu) \text{sgn}(\rho \omega)} (x_{j_{\sigma(1)}} \dots) (y_{a_{\omega(1)}} \dots).$$

Для первого слагаемого $F_1(\bar{x}, \bar{y})$ в последнем равенстве имеем:

$$F_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^+} \sum_{\sigma \in S_q} \sum_{\rho \in S_{q-1}} \sum_{\omega \in S_r} \sum_{\mu \in A_r^+} \text{sgn} \sigma \delta_{\text{sgn} \sigma \text{sgn}(\rho \omega)} (x_{j_{\sigma(1)}} \dots) (y_{a_{\omega(1)}} \dots) +$$

$$+ \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^+} \sum_{\sigma \in S_q} \sum_{\rho \in S_{q-1}} \sum_{\omega \in S_r} \sum_{\mu \in A_r^-} \text{sgn} \sigma \text{sgn} \mu \delta_{-\text{sgn} \sigma \text{sgn}(\rho \omega)} (x_{j_{\sigma(1)}} \dots) (y_{a_{\omega(1)}} \dots) =$$

$$= \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^+} \sum_{\sigma \in S_q} \sum_{\rho \in S_{q-1}} \sum_{\omega \in A_r^+} \sum_{\mu \in A_r^+} \text{sgn} \sigma \delta_{\text{sgn} \sigma \text{sgn} \rho} (x_{j_{\sigma(1)}} \dots) (y_{a_{\omega(1)}} \dots) +$$

$$+ \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^+} \sum_{\sigma \in S_q} \sum_{\rho \in S_{q-1}} \sum_{\omega \in A_r^-} \sum_{\mu \in A_r^+} \text{sgn} \sigma \delta_{\text{sgn} \sigma - \text{sgn} \rho} (x_{j_{\sigma(1)}} \dots) (y_{a_{\omega(1)}} \dots) -$$



$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^+} \sum_{\sigma \in S_q} \sum_{\rho \in S_{q-1}} \sum_{\omega \in A_r^+} \sum_{\mu \in A_r^-} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{-\operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho} (x_{j_{\sigma(1)}} \cdots) (y_{a_{\omega(1)}} \cdots) - \\
 & - \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^+} \sum_{\sigma \in S_q} \sum_{\rho \in S_{q-1}} \sum_{\omega \in A_r^-} \sum_{\mu \in A_r^-} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{-\operatorname{sgn} \sigma - \operatorname{sgn} \rho} (x_{j_{\sigma(1)}} \cdots) (y_{a_{\omega(1)}} \cdots) = \\
 & = \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^+} f_{2q-1}(\bar{x}_i, \bar{y}_a) f_{2r}(\bar{y}_i, \bar{x}_j) - g_{2q-1}(\bar{x}_i, \bar{y}_a) g_{2r}(\bar{y}_i, \bar{x}_j) = R_{++}(\bar{x}, \bar{y}).
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом приходим к равенствам $F_2(\bar{x}, \bar{y}) = R_{--}(\bar{x}, \bar{y})$, $F_3(\bar{x}, \bar{y}) = R_{+-}(\bar{x}, \bar{y})$, $F_4(\bar{x}, \bar{y}) = R_{-+}(\bar{x}, \bar{y})$. \square

Пусть $l' = \{l'_1, \dots, l'_{q-1}\} (q > 1)$, $p' = \{p'_1, \dots, p'_q\} (q < n)$ — какие-либо подмножества множества I_n , $a' = I_n \setminus l' = \{a'_1, \dots, a'_{n+1-q}\}$, $b' = I_n \setminus p' = \{b'_1, \dots, b'_{n-q}\}$, $r = n - q$. При этом будем считать, что $l'_1 < \dots < l'_{q-1}$, $p'_1 < \dots < p'_q$, $a'_1 < \dots < a'_{r+1}$, $b'_1 < \dots < b'_r$. Кроме того, положим $L'_{q-1} = \{l' \subset I_n \mid \operatorname{Card} l' = q - 1\}$, $P'_q = \{p' \subset I_n \mid \operatorname{Card} p' = q\}$. Каждому элементу $l' \in L'_{q-1}$, $p' \in P'_q$

поставим в соответствие подстановку $\omega_{l'} \in S_n$, $\varepsilon_{p'} \in S_n$, где $\omega_{l'} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q-1 & q & \dots & q+r \\ l'_1 & \dots & l'_{q-1} & a'_1 & \dots & a'_{r+1} \end{pmatrix}$, $\varepsilon_{p'} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+r \\ p'_1 & \dots & p'_q & b'_1 & \dots & b'_r \end{pmatrix}$, и обозначим через $L'^+_{q-1} = \{l' \in L'_{q-1} \mid \operatorname{sgn} \omega_{l'} = 1\}$, $L'^-_{q-1} = \{l' \in L'_{q-1} \mid \operatorname{sgn} \omega_{l'} = -1\}$, $P'^+_q = \{p' \in P'_q \mid \operatorname{sgn} \varepsilon_{p'} = 1\}$, $P'^-_{q-1} = \{p' \in P'_q \mid \operatorname{sgn} \varepsilon_{p'} = -1\}$.

Предложение 6. *Справедливы равенства*

1) при $1 < q \leq n - 1$

$$f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = R'_{++}(\bar{x}, \bar{y}) + R'_{--}(\bar{x}, \bar{y}) + R'_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) + R'_{-+}(\bar{x}, \bar{y}),$$

где

$$\begin{aligned}
 R'_{++}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l' \in L'^+_{q-1}} f_{2q-1}(\bar{x}_i, \bar{y}_{a'}) f_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{l'}, \bar{x}_j) - g_{2q-1}(\bar{x}_i, \bar{y}_{a'}) g_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{l'}, \bar{x}_j), \\
 R'_{--}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^-} \sum_{l' \in L'^-_{q-1}} f_{2q-1}(\bar{x}_i, \bar{y}_{a'}) f_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{l'}, \bar{x}_j) - g_{2q-1}(\bar{x}_i, \bar{y}_{a'}) g_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{l'}, \bar{x}_j), \\
 R'_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l' \in L'^-_{q-1}} g_{2q-1}(\bar{x}_i, \bar{y}_{a'}) f_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{l'}, \bar{x}_j) - f_{2q-1}(\bar{x}_i, \bar{y}_{a'}) g_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{l'}, \bar{x}_j), \\
 R'_{-+}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^-} \sum_{l' \in L'^+_{q-1}} g_{2q-1}(\bar{x}_i, \bar{y}_{a'}) f_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{l'}, \bar{x}_j) - f_{2q-1}(\bar{x}_i, \bar{y}_{a'}) g_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{l'}, \bar{x}_j);
 \end{aligned}$$

2) при $1 < q < n - 1$

$$f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = Q'_{++}(\bar{x}, \bar{y}) + Q'_{--}(\bar{x}, \bar{y}) + Q'_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) + Q'_{-+}(\bar{x}, \bar{y}),$$

где

$$\begin{aligned}
 Q'_{++}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^+} \sum_{p' \in P'^+_{q-1}} f_{2q}(\bar{x}_i, \bar{y}_{b'}) f_{2r}(\bar{x}_j, \bar{y}_{p'}) - g_{2q}(\bar{x}_i, \bar{y}_{b'}) g_{2r}(\bar{x}_j, \bar{y}_{p'}), \\
 Q'_{--}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^-} \sum_{p' \in P'^-_{q-1}} f_{2q}(\bar{x}_i, \bar{y}_{b'}) f_{2r}(\bar{x}_j, \bar{y}_{p'}) - g_{2q}(\bar{x}_i, \bar{y}_{b'}) g_{2r}(\bar{x}_j, \bar{y}_{p'}), \\
 Q'_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^+} \sum_{p' \in P'^-_{q-1}} g_{2q}(\bar{x}_i, \bar{y}_{b'}) f_{2r}(\bar{x}_j, \bar{y}_{p'}) - f_{2q}(\bar{x}_i, \bar{y}_{b'}) g_{2r}(\bar{x}_j, \bar{y}_{p'}), \\
 Q'_{-+}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{j \in J_q^-} \sum_{p' \in P'^+_{q-1}} g_{2q}(\bar{x}_i, \bar{y}_{b'}) f_{2r}(\bar{x}_j, \bar{y}_{p'}) - f_{2q}(\bar{x}_i, \bar{y}_{b'}) g_{2r}(\bar{x}_j, \bar{y}_{p'}).
 \end{aligned}$$

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 5. \square



3. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ СТАНДАРТНОГО МНОГОЧЛЕНА

Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра над F .

Определение. Многочлен $d \in F\{Z\}$ называется *полиномиальным тождеством алгебры A* , если для любого гомоморфизма $\varphi \in \text{Hom}_F(F\{Z\}, A)$ справедливо равенство $\varphi(d) = 0$.

Нетрудно видеть, что множество всех полиномиальных тождеств алгебры A является T -идеалом алгебры $F\{Z\}$. Этот идеал называется идеалом тождеств алгебры A и обозначается символом $T[A]$. Заметим, что всякая конечномерная алгебра A обладает хотя бы одним полиномиальным тождеством, например, им является стандартный многочлен $S_n^-(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \pi z_{\pi(1)} \cdots z_{\pi(n)}$ при $n > \dim A$. Но тогда, как показывает приводимое ниже предложение, начиная с некоторой степени тождествами алгебры A будут и квазимногочлены Капелли.

Предложение 7. Для любого натурального числа $n > 1$ в алгебре $F\{Z\}$ справедливы включения

- 1) $\{S_n^-\}^T \supseteq \{f_{2n}\}^T, \{S_n^-\}^T \supseteq \{g_{2n}\}^T$;
- 2) если $\text{char } F \neq 2$, то $\{S_n^-\}^T \supseteq \{b_{2n}\}^T, \{S_n^-\}^T \supseteq \{h_{2n}\}^T, \{S_n^-\}^T \supseteq \{a_{2n}\}^T, \{S_n^-\}^T \supseteq \{c_{2n}\}^T$.

Доказательство. Пусть σ — произвольный элемент группы A_n^+ . Определим эндоморфизм φ_σ алгебры $F\{Z\}$, положив $\varphi_\sigma(z) = \begin{cases} x_i y_{\sigma(i)}, & \text{если } z = x_i, i = \overline{1, n}; \\ z, & \text{если } z \notin \{x_1, \dots, x_n\}. \end{cases}$ Тогда

$$\sum_{\sigma \in A_n^+} \varphi_\sigma(S_n^-(\bar{x})) = \sum_{\sigma \in A_n^+} \left(\sum_{\pi \in A_n^+} x_{\pi(1)} y_{\sigma\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\sigma\pi(n)} - \sum_{\omega \in A_n^-} x_{\omega(1)} y_{\sigma\omega(1)} \cdots x_{\omega(n)} y_{\sigma\omega(n)} \right).$$

Полагаем $\sigma = \rho\sigma\pi^{-1}$ в первой сумме и $\sigma = \mu\sigma\omega^{-1}$ во второй, получаем:

$$\sum_{\sigma \in A_n^+} \varphi_\sigma(S_n^-(\bar{x})) = \sum_{\pi \in A_n^+} \sum_{\rho \in A_n^+} x_{\pi(1)} y_{\rho(1)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\rho(n)} - \sum_{\omega \in A_n^-} \sum_{\mu \in A_n^-} x_{\omega(1)} y_{\mu(1)} \cdots x_{\omega(n)} y_{\mu(n)} = f_{2n}.$$

Следовательно, $\{S_n^-\}^T \supseteq \{f_{2n}\}^T$, отсюда и из замечания 1 получаем, что $\{S_n^-\}^T \supseteq \{g_{2n}\}^T$.

Пусть $\text{char } F \neq 2$. Легко проверить, что $2b_{2n} = f_{2n} + g_{2n} + C_{2n}$, $2a_{2n} = f_{2n} - g_{2n} + C_{2n}$, где $C_{2n} = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\pi\tau) x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)}$, причем по теореме 1 из [4] (см. также [5])

$\{C_{2n}\}^T \subseteq \{S_n^-\}^T$. Отсюда, а также из доказанных включений и следствий 1, 2 получаем, что $\{b_{2n}\}^T \subseteq \{S_n^-\}^T, \{a_{2n}\}^T \subseteq \{S_n^-\}^T, \{h_{2n}\}^T \subseteq \{S_n^-\}^T, \{c_{2n}\}^T \subseteq \{S_n^-\}^T$. \square

Пусть $A = M_m(F)$ — матричная алгебра над F . Тогда в силу теоремы Амицура–Левицкого [6] наименьшее n , при котором $S_n^- \in T[M_m(F)]$, равно $2m$.

Предложение 8. Наименьшее $n \in \mathbf{N}$, при котором каждый из квазимногочленов Капелли $b_{2n}, h_{2n}, a_{2n}, c_{2n}, f_{2n}, g_{2n} \in T[M_m(F)]$, равно $2m$.

Доказательство. Проведем для многочлена b_{2n} , поскольку для остальных оно аналогично. Пусть $\text{char } F \neq 2$ и $d(m, F)$ означает наименьшее $n \in \mathbf{N}$, при котором $b_{2n} \in T[M_m(F)]$. Тогда из предложения 7 следует, что $d(m, F) \leq 2m$, а из теоремы 4 работы [2] следует, что $d(m, F) > 2m - 1$. Отсюда $d(m, F) = 2m$. Так как коэффициенты многочлена b_{2n} равны ± 1 , то ограничение $\text{char } F \neq 2$ для матричной алгебры $M_m(F)$ становится несущественным и потому его можно снять. \square

Библиографический список

1. Аверьянов И. В. Базис градуированных тождеств супералгебры $M_{1,2}(F)$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, вып. 4. С. 483–501. DOI: 10.4213/mzm4298.
2. Антонов С. Ю. Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Изв. вузов. Матем. 2012. № 11. С. 3–19.
3. Антонов С. Ю. Некоторые виды тождеств подпространств $M_0^{(m,k)}(F), M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Учён. зап. Казан. гос.



- ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2012. Т. 154, № 1. С. 189–201.
4. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710.
 5. Антонов С. Ю., Антонова А. В. К теореме Чен-га // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 247–251.
 6. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463.

Quasi-polynomials of Capelli

S. Yu. Antonov¹, A. V. Antonova²

¹Antonov Stepan Yuryevich, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovst-vm@rambler.ru

²Antonova Alina Vladimirovna, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovakazan@rambler.ru

This paper deals with the class of Capelli polynomials in free associative algebra $F\{Z\}$ where F is an arbitrary field and Z is a countable set. The interest to these objects is initiated by assumption that the polynomials (Capelli quasi-polynomials) of some odd degree introduced will be contained in the basis ideal Z_2 -graded identities of Z_2 -graded matrix algebra $M^{(m,k)}(F)$ when $\text{char } F = 0$. In connection with this assumption the fundamental properties of Capelli quasi-polynomials have been given in the paper. In particular, the decomposition of Capelli type polynomials have been given by the polynomials of the same type and some betweenness of their T -ideals have been shown. Besides, taking into account some properties of Capelli quasi-polynomials obtained and also the Chang theorem we show that all Capelli quasi-polynomials of even degree $2n$ ($n > 1$) are consequence of standard polynomial S_n^- in case when the characteristic of field F is not equal to two. At last we find the least $n \in \mathbb{N}$ at which any of Capelli quasi-polynomials of even degree $2n$ belongs to ideal of matrix algebra $M_m(F)$ identities.

Key words: T -ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

References

1. Averyanov I. V. Basis of graded identities of the superalgebra $M_{1,2}(F)$. *Math. Notes*, 2009, vol. 85, iss. 4, pp. 467–483. DOI: 10.1134/S0001434609030195.
2. Antonov S. Yu. The least degree identities subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2012, no. 11, pp. 1–16. DOI: 10.3103/S1066369X12110011.
3. Antonov S. Yu. Some types of identities of subspaces $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ of matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap.* *Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, vol. 154, no. 1, pp. 189–201 (in Russian).
4. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710.
5. Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang Theorem. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 247–251 (in Russian).
6. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463.



УДК 517.521.2+517.537

О ВОЗМОЖНЫХ ИНВАРИАНТАХ НА СОВОКУПНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВЗАИМНО-ОБРАТНЫХ ЦЕПНЫХ ЭКСПОНЕНТ

А. П. Буланов

Буланов Александр Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, Обнинский институт атомной энергетики, bksen2002@yandex.ru

Цепная экспонента $L_B(z) = z \cdot B(z)$, имеющая последовательность показателей $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n| < \infty$, определяется последовательностью функций $B(z) = e^{b_1 z \cdot B_1(z)}$, $B_1(z) = e^{b_2 \cdot z \cdot B_2(z)}$, \dots , $B_{k-1}(z) = e^{b_k \cdot z \cdot B_k(z)}$, \dots (в работе используется обозначение $B(z) = \langle e^z; b_1, b_2, \dots \rangle$). Аналогично определяется цепная экспонента $L_a(w) = w \cdot A(w)$, где $A(w) = \langle e^w; a_1, a_2, \dots \rangle$, имеющая последовательность показателей взаимно-обратных цепных экспонент до 4-го порядка. В работе установлен конкретный инвариант 4-го порядка, выраженный формой 3-й степени от показателей. Приводится пример двух числовых последовательностей, являющихся показателями взаимно-обратных цепных экспонент, подтверждающий надежность сделанных преобразований.

Ключевые слова: цепная экспонента, показатель, инвариант, форма, последовательность.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-383-391

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим две функции:

$$L_b(z) = z \cdot B(z), \quad L_a(w) = w \cdot A(w), \quad (1)$$

где $B(z)$ и $A(w)$ — бесконечные цепные экспоненты:

$$\begin{aligned} B(z) &= e^{b_1 \cdot z \cdot e^{b_2 \cdot z \cdot e^{\dots}}} = \langle e^z; b_1, b_2, \dots \rangle, \\ A(w) &= e^{a_1 \cdot w \cdot e^{a_2 \cdot w \cdot e^{\dots}}} = \langle e^w; a_1, a_2, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

В последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ показатели $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, $b_1 \neq b_2$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \bar{b} < \infty$, а показатели a_1, a_2, \dots определяются рекуррентной формулой посредством b_1, b_2, \dots [1, с. 30, формула (5)], здесь — формула (4). Эти две цепные экспоненты образуют две функции Ламберта (1), которые могут быть взаимно-обратными функциями по отношению друг к другу. Первоначальная функция Ламберта

$$w = z \cdot \langle e^z; -b, -b, \dots \rangle \quad (3)$$

определяется как обратная функция по отношению к элементарной функции:

$$z = w \cdot e^{bw} = w \cdot \langle e^w; b, 0, 0, \dots \rangle.$$

Из формулы (3) мы видим равенство $b_1 = b_2$, тогда, включая неравенство $b_1 \neq b_2$, мы приходим к обобщению понятия первоначальной функции Ламберта (3).

Это обобщение является промежуточным между первоначальной функцией Ламберта (3) и гиперфункциями Ламберта (Lambert's W-function), которые ввел И. Н. Галидакис в 2004 г. W-функции Ламберта используются при решении некоторых функциональных уравнений, возникающих, в частности, в гравитационной механике [2–4].

Здесь задача заключается в том, чтобы по заданной функции $w = L_b(z) = z \cdot B(z)$ найти обратную к ней функцию $z = L_a(w) = w \cdot A(w)$, аналитическую в окрестности точки $w = 0$ (или, наоборот, по заданной функции $z = L_a(w)$ найти обратную к ней функцию $w = L_b(z)$), т.е. по заданным показателям b_1, b_2, \dots найти показатели a_1, a_2, \dots .



В общем случае легко определяются первые три показателя:

$$a_1 = -b_1, \quad a_2 = b_2 - b_1, \quad a_3 = \frac{1}{b_2 - b_1} \cdot (b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2b_3).$$

Показатели a_4, a_5, \dots, a_n определяются по упомянутой рекуррентной формуле, которую выразим в таком виде

Теорема 1. Пусть в последовательности $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ показатели функции $w = z \cdot B(z)$ отличны от нуля, $b_1 \neq b_2$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n| < \infty$. Тогда показатели $a_4, a_5, \dots, a_n \dots$ обратной функции $z = w \cdot A(w)$ определяются по формуле

$$a_n = \frac{-1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \cdot \left\{ \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}=n} \frac{k_1^{k_2} k_2^{k_3} \dots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1! k_2! \dots k_{n-1}!} \times \right. \\ \left. \times \left[(-(n+1))^{k_1-1} b_1^{k_1} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \dots b_{n-1}^{k_{n-1}} + a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_{n-1}^{k_{n-1}} \right] + b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n \right\}. \quad (4)$$

В работе [1] в развернутом виде представлены две формулы для определения «обратного» показателя a_4 посредством b_1, b_2, b_3, b_4 и показателя a_5 посредством b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и a_1, a_2, a_3, a_4 .

1. О СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ ЦЕПНЫХ ЭКСПОНЕНТ И О ПОЛУЧЕНИИ РЕКУРРЕНТНОЙ ФОРМУЛЫ

Цепная экспонента (2) в окрестности точки $z = 0$ является аналитической функцией и ее степенной ряд [5, 6]

$$B(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{B^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{H^{(n)}(b_1, b_2, \dots, b_n)}{n!} \cdot z^n, \quad (5)$$

где

$$H^{(n)}(b_1, b_2, \dots, b_n) = \\ = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} \cdot b_1^{k_1} \cdot (b_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (b_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \dots \cdot (b_n \cdot k_{n-1})^{k_n} \quad (6)$$

сходится в круге $K = \{z : |z| < 1/(\bar{b}e)\}$. В этом же круге сходится и степенной ряд

$$w = z \cdot B(z) = w(0) + \frac{w'(0)}{1!} \cdot z + \frac{w''(0)}{2!} \cdot z^2 + \dots = B(0) \cdot z + \frac{B'(0)}{1!} \cdot z^2 + \frac{B''(0)}{2!} \cdot z^3 + \dots$$

В работе [7] показывается, как получается формула (4). Используя разложение обратной функции

$$z = z(w) = L_a(w) = w \cdot A(w), \quad (7)$$

аналитической в окрестности точки $w = 0$, по Лагранжу, имеем формулу

$$z^{(n+1)}(0) = H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \dots, b_n). \quad (8)$$

Цепную экспоненту (7), показатели которой a_1, a_2, \dots подлежат определению, представим в виде двух степенных рядов. Во-первых, как формальное разложение в окрестности точки $w = 0$ в степенной ряд таким же способом, как осуществлено разложение цепной экспоненты (2), по формулам (5) и (6):

$$A(w) = A(0) + \sum_{n=1}^\infty \frac{A^{(n)}(0)}{n!} \cdot w^n = H_a^{(0)} + \frac{H_a^{(1)}}{1!} \cdot w + \frac{H_a^{(2)}}{2!} \cdot w^2 + \dots + \frac{H_a^{(n)}}{n!} \cdot w^n \dots, \quad (9)$$

где

$$H_a^{(n)} = H^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \\ = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} \cdot a_1^{k_1} \cdot (a_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (a_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \dots \cdot (a_n \cdot k_{n-1})^{k_n} \quad (10)$$



Во-вторых, функция $A(w)$ выражается посредством степенного ряда

$$z = z(w) = \frac{z'(0)}{1!} \cdot w + \frac{z''(0)}{2!} \cdot w^2 + \dots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \cdot w^n + \dots$$

и системы равенств

$$z'(w) = A(w) + w \cdot A'(w), \quad z''(w) = 2A'(w) + w \cdot A''(w), \quad \dots, \quad z^{(n)}(w) = nA^{(n-1)}(w) + w \cdot A^{(n)}(w),$$

откуда получаем второе представление:

$$A(w) = \frac{z'(0)}{1!} + \frac{z''(0)}{2!} \cdot w + \frac{z'''(0)}{3!} \cdot w^2 + \dots + \frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \cdot w^n + \dots \quad (11)$$

Заметим, что каждый коэффициент $H_a^{(n)}$ в разложении (9) выражен формулой (10) посредством показателей a_1, a_2, \dots, a_n , в то время как в разложении (11) коэффициент $z^{(n+1)}(0)$ выражен полиномом (8). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной w , получаем систему равенств:

$$\begin{aligned} H_a^{(0)} = A(0) = z'(0) = 1, \quad 2H_a^{(1)} = 2A'(0) = z''(0), \quad 3H_a^{(2)} = 3A''(0) = z'''(0), \quad \dots, \\ nH_a^{(n-1)} = nA^{(n-1)}(0) = z^{(n)}(0), \quad (n+1)H_a^{(n)} = (n+1)A^{(n)}(0) = z^{(n+1)}(0), \quad \dots \end{aligned}$$

Равенства в последней строке запишем в виде

$$\begin{aligned} z^{(n+1)}(0)|_a = (n+1)H_a^{(n)} = (n+1)H^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = (n+1)A^{(n)}(0) = \\ = H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = z^{(n)}(0)|_b, \end{aligned} \quad (12)$$

поскольку из определений (6) и (10) следует

$$\begin{aligned} & H^{(n)}(-(n-1) \cdot b_1, b_2, \dots, b_n) = \\ & = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} (-n+1)b_1^{k_1} \cdot (b_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (b_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \dots \cdot (b_n \cdot k_{n-1})^{k_n} = \\ & = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_{n-1}!} (-n+1)b_1^{k_1} \cdot (b_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (b_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \dots \cdot (b_{n-1} \cdot k_{n-2})^{k_{n-1}} + \\ & \quad + n!(-n+1)b_1 b_2 b_3 \dots b_{n-1} b_n, \\ & H^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_{n-1}!} \times \\ & \quad \times (a_1)^{k_1} \cdot (a_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (a_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \dots \cdot (a_{n-1} \cdot k_{n-2})^{k_{n-1}} + n!(a_1)a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n. \end{aligned}$$

Тогда из равенств (12) получаем рекуррентную формулу (4).

2. НЕКОТОРЫЕ ШАГИ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ ИЗ ОСНОВНОЙ РЕКУРРЕНТНОЙ ФОРМУЛЫ

Для выявления инвариантов и построения «равновесия» от этих равенств будем следовать двумя путями. О некоторых шагах первого пути было сказано в работе [8]. Равенства (12) дают рекуррентную формулу (4), по которой определяются все показатели типа «а». Если развернуть сумму в правой части этой формулы, то напишем слагаемые в количестве $2^n - 1$. В работе [9] представлена в развернутом виде формула для определения a_6 посредством b_1, \dots, b_6 и a_1, \dots, a_5 . В правой части этой формулы в фигурной скобке имеем 63 слагаемых. Если же в тех слагаемых, в которых множителями являются a_k , заменить каждый множитель a_k его выражением, вычисленном по данной рекуррентной формуле (4) посредством b_1, b_2, \dots, b_k , то количество слагаемых во много раз увеличится, но среди них окажутся подобные. Здесь делается попытка сократить количество слагаемых путем выявления инвариантов. Некоторые слагаемые оставляем в обозначениях «а» и с обратным знаком переставляем



в левую часть уравнения, полученного из основной формулы (4). Тогда основное равенство может оказаться инвариантом.

В работе [8] намечены некоторые «шаги» для выявления инвариантов. Умножая левую и правую части равенства (4) на $n!a_2a_3 \dots a_{n-1}$ и перемещая последнее слагаемое в правой части на первое место получаем уравнение

$$n!a_2a_3 \dots a_{n-1}a_n = n!b_2b_3 \dots b_{n-1}b_n + \left\{ \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}=n} \frac{n!k_1^{k_2}k_2^{k_3} \dots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2! \dots k_{n-1}!} \times \right. \\ \left. \times [(-(n+1))^{k_1-1}b_1^{k_1-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3} \dots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{k_1-1}a_2^{k_2} \dots a_{n-1}^{k_{n-1}}] \right\}. \quad (13)$$

Сумму в правой части в фигурной скобке этого равенства запишем в виде

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}=n} \frac{n!k_1^{k_2}k_2^{k_3} \dots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2! \dots k_{n-1}!} [(-(n+1))^{k_1-1}b_1^{k_1-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3} \dots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{k_1-1}a_2^{k_2} \dots a_{n-1}^{k_{n-1}}] = \\ = \sum_{j=n}^2 \left\{ \frac{n!}{j!} \sum_{k_2+k_3+\dots+k_{n-1}=n-j} \frac{j^{k_2}k_2^{k_3} \dots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_2! \dots k_{n-1}!} [(-(n+1))^{j-1}b_1^{j-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3} \dots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{j-1}a_2^{k_2} \dots a_{n-1}^{k_{n-1}}] \right\} + \\ + n! \sum_{k_2+k_3+\dots+k_{n-1}=n-1} \frac{k_2^{k_3}k_3^{k_4} \dots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_2! \dots k_{n-1}!} [(b_2^{k_2}b_3^{k_3} \dots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_2^{k_2}a_3^{k_3} \dots a_{n-1}^{k_{n-1}})].$$

Видно, что последняя сумма распадается на две суммы, в одной из которых слагаемые являются типа « b », а другая сумма имеет точно такие же слагаемые, только буквы b заменяются буквами a .

Последующие шаги заключаются в том, что содержимое в каждой квадратной $[\cdot]$ скобке, где $k_1 = j \geq 2$, мы помещаем в две квадратные скобки (т. е. $[\cdot] = [\cdot]_{(a,b)} + [\cdot]_a$) в виде

$$[\cdot]_{(a,b)} = [(-(n+1))^{j-1}(b_1^{j-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3} \dots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{j-1}a_2^{k_2}a_3^{k_3} \dots a_{n-1}^{k_{n-1}})], \quad (14)$$

$$[\cdot]_a = [((-n+1))^{j-1} - 1]a_1^{j-1}a_2^{k_2}a_3^{k_3} \dots a_{n-1}^{k_{n-1}}. \quad (15)$$

Если слагаемое « a » в квадратной скобке (14) (с коэффициентом, стоящим перед квадратной скобкой) переставить в левую часть равенства (13), то мы имеем слагаемое в одном из инвариантов. Слагаемое же в квадратной скобке (15) подлежит преобразованиям вместе с другими « a »-слагаемыми с целью получения инвариантов для фиксированного n , используя инварианты, полученные для меньших n .

Для следования вторым путем выявления инвариантов нам понадобится формула, по которой можно представить форму $H^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (и форму $H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$) n -го порядка посредством форм, порядок которых строго меньше:

$$H^{(0)}(1) = 1, \quad H^{(1)}(a_1) = a_1, \quad H^{(2)}(a_1, a_2) = 2a_1a_2 + a_2^2, \\ H^{(3)}(a_1, a_2, a_3), \quad \dots, \quad H^{(n-1)}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}).$$

В работе [5, с. 60, лемма 7] доказана формула

$$H^{(n)}(g_r) = H^{(0)}(a_r) \cdot \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} H^{(n-m)}(g_{r+1}^m), \quad (16)$$

где $g_r = g_r(z) = a_r \cdot e^{a_{r+1}} \cdot z \cdot e^{a_{r+2}} \cdot z \cdot e^{\dots} = a_r \cdot e^{g_{r+1}}$, а формы $H^{(n)}(g_r)$, $H^{(n-m)}(g_{r+1}^m)$ в нынешних обозначениях представляются так:

$$H^{(n)}(g_r) = a_r \cdot H^{(n)}(a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_{r+n}), \\ H^{(n-m)}(g_{r+1}^m) = a_{r+1}^m \cdot H^{(n-m)}(m \cdot a_{r+2}, a_r + 3, \dots, a_{r+n-m+1}).$$



Таким образом, мы имеем представление

$$z^{(n+1)}(0)\Big|_a = (n+1)H^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = (n+1)\binom{n}{1}a_1H^{(n-1)}(a_2, a_3, \dots, a_n) + \\ + (n+1)\binom{n}{2}a_1^2H^{(n-2)}(2a_2, a_3, \dots, a_{n-1}) + \dots + (n+1)\binom{n}{k}a_1^kH^{(n-k)}(ka_2, a_3, \dots, a_{n-k+1}) + \dots + \\ + (n+1)\binom{n}{n-1}a_1^{n-1}H^{(1)}((n-1)a_2) + (n+1)a_1^n, \quad (17)$$

$$z^{(n+1)}(0)\Big|_b = \binom{n}{1}(-(n+1)b_1)H^{(n-1)}(b_2, b_3, \dots, b_n) + \binom{n}{2}(-(n+1)b_1)^2 \times \\ \times H^{(n-2)}(2b_2, b_3, \dots, b_{n-1}) + \dots + \binom{n}{k}(-(n+1)b_1)^k H^{(n-k)}(kb_2, b_3, \dots, b_{n-k+1}) + \dots + \\ + \binom{n}{n-1}(-(n+1)b_1)^{n-1}H^{(1)}((n-1)b_2) + (-(n+1)b_1)^n. \quad (18)$$

Так как $a_1 = -b_1 \neq 0$, то можно поделить на $(n+1)a_1$ равенства (17) и (18), при этом в равенстве (14) величину $-b_1$ заменим на a_1 .

Тогда имеем разность

$$\frac{z^{(n+1)}(0)\Big|_a}{(n+1)a_1} - \frac{z^{(n+1)}(0)\Big|_{b=0}}{(n+1)a_1} = [nH^{(n-1)}(a_2, a_3, \dots, a_n) - nH^{(n-1)}(b_2, b_3, \dots, b_n)] + \\ + \left[\binom{n}{2}a_1H^{(n-2)}(2a_2, a_3, \dots, a_{n-1}) - \binom{n}{2}(n+1)a_1H^{(n-2)}(2b_2, b_3, \dots, b_{n-1}) \right] + \dots + \\ + \left[\binom{n}{n-1}a_1^{n-2}H^{(1)}((n-1)a_2) - \binom{n}{n-1}(n+1)^{n-2}a_1^{n-2}H^{(1)}((n-1)b_2) \right] + \\ + [a_1^{n-1} - (n+1)^{n-1}a_1^{n-1}]. \quad (19)$$

Если в правой части равенства (19) мы обнаруживаем «равновесную» пару типа $\phi(a) - \phi(b)$, то перемещая слагаемое $-\phi(b)$ в левую часть, где пока еще стоит ноль, мы тем самым строим инвариант n -го порядка. Видно, что разность в первых квадратных скобках является равновесной парой. Разности во вторых квадратных скобках и последующих не являются равновесными и подлежат преобразованиям.

3. ИНВАРИАНТЫ 4-ГО ПОРЯДКА

Далее рассмотрим, как этим путем получить инвариант 4-го порядка, исходя из равенства (19) при $n = 4$. Определение порядка инварианта на данной здесь совокупности связано с тем, какой наибольший индекс имеет показатель в данном инварианте, причем этот показатель фигурирует множителем в некотором слагаемом в 1-й степени. Но прежде приведем несколько простых инвариантов на совокупности первых показателей, которые будут использованы как непосредственно, так и в качестве аргументов полиномов (в частности, линейных функций), которые могут оказаться инвариантами:

$$\Delta_0 = \Delta_0(a) = \Delta_0(b) = a_1^2 = b_1^2, \\ \Delta_1 = \Delta_1(a) = 2a_2 - a_1 = 2b_2 - b_1 = \Delta_1(b), \\ \Delta_2 = \Delta_2(a) = a_2a_3 - a_2^2 = b_2b_3 - b_2^2 = \Delta_2(b), \\ \varkappa_1 = \varkappa_1(a) = a_2^2 - 2a_1a_2 + a_2a_3 = b_2^2 - 2b_1b_2 + b_2b_3 = \varkappa_1(b), \\ \varkappa_2 = \varkappa_2(a) = a_2(a_2 - a_1) = a_2b_2 = b_2(b_2 - b_1) = \varkappa_2(b), \\ \varkappa_{1,k} = a_{k-1}a_k + b_{k-1}b_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

При $k = 2$ $\varkappa_{1,2} = \Delta_0$, при $k = 3$ $\varkappa_{1,3} = 2a_2a_3 - a_1\Delta_1$,

$$\varkappa_{2,k} = a_{k-1}a_k a_{k+1} + b_{k-1}b_k b_{k+1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

При $k = 2$

$$\varkappa_{2,2} = \Delta_0\Delta_1.$$



Если равенство, которое преобразовывается (и делается попытка из него получить инвариант), содержит в правой части слагаемое типа $cb_1\kappa$ (или типа $ca_1\kappa$), где κ — инвариант, то это слагаемое можно представить в виде «равновесной» пары:

$$cb_1\kappa = \frac{c}{2}(2b_1)\kappa = \frac{c}{2}(b_1 - a_1)\kappa = \frac{c}{2}b_1\kappa - \frac{c}{2}a_1\kappa.$$

Прежде чем из уравнения

$$\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1} \Big|_a - \frac{z^{(5)}(0)}{5a_1} \Big|_b = 0$$

строить инвариант, нам понадобится такая же разность, но порядка на единицу меньше. Из формул разложения (16), (17) и (18) имеем:

$$\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_a = \binom{3}{1} H^{(2)}(a_2, a_3) + \binom{3}{2} a_1 H^{(1)}(2a_2) + a_1^2 = 3H^{(2)}(a_2, a_3) + 6a_1a_2 + a_1^2,$$

отсюда

$$3H^{(2)}(a_2, a_3) = \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_a - 6a_1a_2 - a_1^2. \tag{20}$$

Аналогично из равенств

$$\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b = \binom{3}{1} H^{(2)}(b_2, b_3) + \binom{3}{2} (4a_1)H^{(1)}(2b_2) + (4a_1)^3 = 3H^{(2)}(b_2, b_3) + 6(4a_1)b_2 + (4a_1)^2$$

имеем:

$$3H^{(2)}(b_2, b_3) = \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b - 6(4a_1)b_2 - (4a_1)^2. \tag{21}$$

Далее представим $H^{(2)}(2a_2, a_3)$ и $H^{(2)}(2b_2, b_3)$ через $H^{(2)}(a_2, a_3)$ и $H^{(2)}(b_2, b_3)$ соответственно. Имеем:

$$H^{(2)}(2a_2, a_3) = 2(2a_2a_3) + (2a_2)^2 = 2(2a_2a_3 + a_2^2 + a_2^2) = 2(H^{(2)}(a_2, a_3) + a_2^2), \tag{22}$$

$$H^{(2)}(2b_2, b_3) = 2(H^{(2)}(b_2, b_3) + b_2^2). \tag{23}$$

Используя опять формулы разложения (16), (17) и (18), получим представление

$$\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1} \Big|_a = 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) + \binom{4}{2} a_1 H^{(2)}(2a_2, a_3) + \binom{4}{3} a_1^2 H^{(1)}(3a_2) + a_1^3; \tag{24}$$

$$\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1} \Big|_b = 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + \binom{4}{2} (5a_1)H^{(2)}(2b_2, b_3) + \binom{4}{3} (5a_1)^2 H^{(1)}(3b_2) + (5a_1)^3. \tag{25}$$

Каждое второе слагаемое этих двух равенств преобразуем, используя равенства (22), (20), (23) и (21):

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 \cdot a_1 H^{(2)}(2a_2, a_3) &= 4a_1 \cdot 3(H^{(2)}(a_2, a_3) + a_2^2) = 4a_1(3H^{(2)}(a_2, a_3) + 3a_2^2) = \\ &= 4a_1 \left[\left(\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_a - 6a_1a_2 - a_1^2 \right) + 3a_2^2 \right], \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 \cdot (5a_1) H^{(2)}(2b_2, b_3) &= 4(5a_1)(3H^{(2)}(b_2, b_3) + 3b_2^2) = \\ &= 4(a_1 + 4a_1) \left[\left(\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b - 6(4a_1)b_2 - (4a_1)^2 \right) + 3b_2^2 \right] = \\ &= 4a_1 \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b + 16a_1 \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b - 4(5a_1)24a_1b_2 - 4(5a_1)16a_1^2 + 4(5a_1)3b_2^2. \end{aligned} \tag{27}$$

Теперь в представлении (24) вместо второго слагаемого помещаем правую часть равенств (26), а в представлении (25) вместо второго слагаемого ставим правую часть равенств (27). Имеем

$$\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1} \Big|_a = 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) + 4a_1 \left(\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_a - 6a_1a_2 - a_1^2 + 3a_2^2 \right) + 12a_1^2a_2 + a_1^3 =$$



$$= 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) + 4a_1 \cdot \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_a + 12a_1 a_2 b_2 - 3a_1 a_1^2. \quad (28)$$

(попутно заметим, что в правой части этих равенств $\varkappa_2 = a_2 b_2 = a_2(a_2 - a_1)$ — инвариант и $\Delta_0 = a_1^2 = b_1^2$ тоже инвариант)

$$\begin{aligned} \frac{z^{(5)}(0)}{5a_1} \Big|_b &= 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b + 16a_1 \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b - 4(5a_1) \cdot 24a_1 b_2 - \\ &- 4(5a_1) \cdot 16a_1^2 + 4(5a_1)3b_2^2 + 300a_1^2 b_2 + 125a_1^3 = 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b + \\ &+ 16a_1 [3(2b_2 b_3 + b_2^2) + 24a_1 b_2 + 16a_1^2] - 480a_1^2 b_2 - 320a_1^3 + 60a_1 b_2^2 + 300a_1^2 b_2 + 125a_1^3. \end{aligned} \quad (29)$$

В квадратных скобках в правой части этого равенства есть множитель b_3 . Поместим его в инвариант $\varkappa_3 = \varkappa_{1,3} = a_2 a_3 + b_2 b_3$ следующим образом:

$$2b_2 b_3 = b_2 b_3 + b_2 b_3 = b_2 b_3 + a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2 a_3 = (b_2 b_3 + a_2 a_3) + a_1^2 - 2a_1 a_2 = \varkappa_3 - a_1 \Delta_1 = \varkappa_3 - a_1(2a_2 - a_1),$$

используем эту разность вместо $2b_2 b_3$ в равенстве (29). Далее раскрываем скобки, приводим подобные и получаем:

$$\begin{aligned} \frac{z^{(5)}(0)}{5a_1} \Big|_b &= 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b + 48a_1 \varkappa_3 + 48a_1^3 - 96a_1^2 a_2 + 48a_1 b_2^2 + \\ &+ 16a_1 24a_1 b_2 + 16^2 a_1^3 - 180a_1^2 b_2 - 195a_1^3 + 60a_1 b_2^2 = \\ &= 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b + 48a_1 \varkappa_3 + 108a_1 b_2^2 + 204a_1^2 b_2 - 96a_1^2 a_2 + 109a_1^3. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как $b_2 = a_2 - a_1$ и $b_2^2 = a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2$, то имеем

$$a_1(108a_2^2 - 108a_2 a_1 + 13a_1^2) = a_1(108a_2 b_2 + 13\Delta_0) = 108a_1 \varkappa_2 + 13a_1 \Delta_0$$

и тогда в правой части равенства (30) последние четыре слагаемых дают две «равновесные» пары, такие, как последние два слагаемых в правой части равенства (28). Таким образом, мы получим равенство

$$\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1} \Big|_b = 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b + 48a_1 \varkappa_3 + 108a_1 \varkappa_2 + 13a_1 \Delta_0. \quad (31)$$

Теперь, возвращаясь к равенству (19) для $n = 4$, имеем разность, полученную из представлений (28) и (31):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{z^{(5)}(0)}{5a_1} \Big|_a - \frac{z^{(5)}(0)}{5a_2} \Big|_b = [4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4)] + \\ &+ [4a_1 \left(\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_a - \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b \right) - 48a_1 \varkappa_3] + [96a_1 \varkappa_2 - 16a_1 \Delta_0]. \end{aligned} \quad (32)$$

Мы видим, что полученная здесь разность $\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_a - \frac{z^{(4)}(0)}{4a_1} \Big|_b$ равна нулю, и это существенно упрощает равенство (32). Такое обстоятельство возможно и при $n > 4$. Здесь мы сократим правую часть равенства (32) на 4, представим множитель a_1 в виде $\frac{1}{2}2a_1 = \frac{1}{2}(a_1 - b_1)$ и получим в правой части «равновесные пары»:

$$\begin{aligned} 0 &= H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) - 6(a_1 - b_1) \varkappa_3 - 12(a_1 - b_1) \varkappa_2 - 2(a_1 - b_1) \Delta_0 = \\ &= \left[H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) \right] - \left[(a_1 - b_1)(6\varkappa_3 + 12\varkappa_2 + 2\Delta_0) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$



Обозначим сумму $6\kappa_3 + 12\kappa_2 + 2\Delta_0$ (где $\kappa_3 = \kappa_{1,3} = a_2a_3 + b_2b_3$, $\kappa_2 = a_2b_2$, $\Delta_0 = a_1^2 = b_1^2$) через $\overline{\kappa}_3$, тогда из равенства (33) получим инвариант 4-го порядка

$$H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - a_1\overline{\kappa}_3 = H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) - b_1\overline{\kappa}_3. \quad (34)$$

Как уже отмечалось в работе [8] рассматривались некоторые шаги первого пути выявления инвариантов из (4). Там были представлены несколько инвариантов 4-го порядка, которые были получены один из другого сокращением количества слагаемых. Последний из них (см. в работе [8] формулу (16)) записан в виде

$$\Delta_{3,5}(a) = \Delta_{3,5}(b) = 4b_2b_3b_4 + 2b_2b_3^2 - 3b_1 \left(2\Delta_2 + \frac{3}{4}\Delta_1^2 + \frac{1}{4}b_1^2 \right). \quad (35)$$

Таким образом здесь имеем инвариант 4-го порядка (35), полученного из (4) первым путем, и инвариант 4-го порядка (34), полученного вторым путем, выраженного через форму $H^{(3)}(a_2, a_3, a_4)$ и другого инварианта 3-го порядка. Использование второго пути предполагает, что инвариант 5-го порядка будет содержать форму $H^{(4)}(a_2, a_3, a_4, a_5)$. Применяя обозначения, которые были введены в работе [8], запишем (34) в виде

$$\Delta_{3,6}(a) = \Delta_{3,6}(b) = H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) - b_1\overline{\kappa}_3.$$

Теорема 2. На совокупности показателей взаимно-обратных функций $w = z \cdot B(z)$ и $z = w \cdot A(w)$ формы третьей степени

$$\begin{aligned} \Delta_{3,5}(a) = \Delta_{3,5}(b) &= 4b_2b_3b_4 + 2b_2b_3^2 - 3b_1 \cdot \left(2\Delta_2 + \frac{3}{4}\Delta_1^2 + \frac{1}{4}b_1^2 \right), \\ \Delta_{3,6}(a) = \Delta_{3,6}(b) &= H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) - b_1\overline{\kappa}_3 \end{aligned} \quad (36)$$

являются инвариантами 4-го порядка.

Так же, как в работе [8], осуществим проверку формулы (36) по известным чередующимся показателям $b_1 = b_3 = \beta$, $b_2 = b_4 = 1$, $a_1 = a_3 = -\beta$, $a_2 = 1 - \beta$, $a_4 = \frac{1}{2} - \beta$. Имеем

$$H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) = 1 - 12\beta + 27\beta^2 - 16\beta^3, \quad H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) = 1 + 12\beta + 3\beta^3.$$

Первая «равновесная» разность $H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) = -24\beta + 24\beta^2 - 16\beta^3$. Вторая «равновесная» разность $-(a_1 - b_1)\overline{\kappa}_3 = -2a_1\overline{\kappa}_3 = 24\beta - 24\beta^2 + 16\beta^3$. По этому примеру можно судить о надежности преобразований.

Библиографический список

1. Буланов А. П. О рекуррентной формуле определения показателей обратной функции Ламберта // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Саратов. зим. шк. Саратов, 2012. С. 29–32.
2. Дубинов А. Е., Галидакис И. Н. Явное решение уравнения Кеплера // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 3(139). С. 365–370.
3. Galidakis I. N. On an application of Lambert's W function to infinite exponentials // Complex Var. Theory Appl. 2004. Vol. 49, № 11. P. 759–780.
4. Galidakis I. N. On Solving the p -th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z) = z$ // Complex Variables. 2005. Vol.50, № 13. P. 977–997.
5. Буланов А. П. Регулярность степеней бесконечной кратности // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62, № 5. С. 49–78. DOI: 10.4213/im210.
6. Буланов А. П. Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 11. С. 3–34. DOI: 10.4213/sm607.
7. Буланов А. П. Цепные экспоненты и функции Ламберта // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 43. С. 64–71.
8. Буланов А. П. Об инвариантах на совокупности



показателей взаимно обратных функций Ламберта, представленных цепными экспонентами // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зим. матем. шк. Воронеж, 2013. С. 295–303.

9. Буланов А. П. Шестой показатель обратной функции Ламберта, представленной цепной экспонентой // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозаводск. междунар. конф. Петрозаводск, 2012. С. 5–10.

Invariants on a Set of Reciprocal Iterated Exponential Power Coefficients

S. P. Bulanov

Bulanov Aleksandr Pavlovich, Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering, 1, Studgorodok, 249020, Obninsk, Kaluzhskaya obl., Russia, bksen2002@yandex.ru

A chain exponent $L_B(z) = z \cdot B(z)$, having a power sequence $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n| < \infty$, is defined by a function sequence $B(z) = e^{b_1 \cdot z \cdot B_1(z)}$, $B_1(z) = e^{b_2 \cdot z \cdot B_2(z)}$, \dots , $B_{k-1}(z) = e^{b_k \cdot z \cdot B_k(z)}$, \dots (we use the denotation $B(z) = \langle e^z; b_1, b_2, \dots \rangle$ in the paper). Similarly, a chain exponent $L_a(w) = w \cdot A(w)$ is defined where $A(w) = \langle e^w; a_1, a_2, \dots \rangle$, having a power sequence of mutually inverse chain exponents up to the 4-th order. In the paper, we find the concrete invariant of the 4-t order expressed by the form of 3-rd order with respect to powers. We give an example of two number sequences which are the powers of mutually inverse chain exponents adding the truth of transformations performed.

Key words: chain exponent, power, invariant, form, sequence.

References

1. Bulanov A. P. O rekurrentnoi formule opredeleniia pokazatelei obratnoi funktsii Lamberta [About recurrence formula defining indicators of an inverse function of Lambert]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : materialy 16-i Saratov. zim. shk.* [Modern Problems of Function Theory and Their Application : Proc. 16th Saratov Winters School], Saratov, 2012, pp. 29–32 (in Russian).
2. Dubinov A. E., Galidakis I. N. Explicit Solution of the Kepler Equation. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 2007, vol. 4, no. 3, pp. 213–216. DOI: 10.1134/S1547477107030028
3. Galidakis I. N. On an application of Lambert's W function to infinite exponentials. *Complex Var. Theory Appl.*, 2004, vol. 49, no. 11, pp. 759–780.
4. Galidacis I. N. On Solving the p -th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z) = z$. *Complex Variables*, 2005, vol. 50, no. 13, pp. 977–997.
5. Bulanov A. P. Regularity of infinite exponentials. *Izv. Math.*, 1998, vol. 62, no. 5, pp. 901–928. DOI: 10.1070/im1998v062n05ABEH000210.
6. Bulanov A. P. Infinite iterated power with alternating coefficients. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, iss. 11, pp. 1589–1620 DOI: 10.1070/SM2001v192n11ABEH000607
7. Bulanov A. P. Tsepnye eksponenty i funktsii Lamberta [Chain exponents and function Lambert]. *Tr. matem. tsentra im. N. I. Lobachevskogo* [Proc. Math. Center named N. I. Lobachevskian], 2011, vol. 43, pp. 64–71 (in Russian).
8. Bulanov A. P. Ob invariantakh na sovokupnosti pokazatelei vzaimno obratnykh funktsii Lamberta, predstavlennykh tsepnyimi eksponentami [On invariants on the set of indicators of mutually inverse functions Lambert submitted chain exhibitors]. *Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy : materialy Voronezh. zim. matem. shk.* [Modern Methods of Function Theory and Related Problems : Proc. Voronezh Winters School], Voronezh, 2013, pp. 295–303 (in Russian).
9. Bulanov A. P. *Shestoi pokazatel' obratnoi funktsii Lamberta, predstavlennoi tsepnoi eksponentoi* [The sixth indicator is the inverse function of Lambert presented chain exponent]. *Kompleksnyi analiz i prilozheniia : materialy VI Petrozavodsk. mezhdunar. konf.* [Complex analysis and applications : VI Petrozavodsk Intern. Conf.], Petrozavodsk, 2012, pp. 5–10 (in Russian).



УДК 517.984

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. П. Курдюмов

Курдюмов Виталий Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KurdyumovVP@yandex.ru

Для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией в производных и интегральными краевыми условиями доказана базисность Рисса со скобками собственных и присоединенных функций. Для доказательства осуществляется сведение спектральной задачи исходного оператора к спектральной задаче для оператора первого порядка в пространстве вектор-функций размерности четыре, не содержащего инволюцию. Для преодоления трудностей, связанных с присутствием в уравнении четырехмерной задачи ненулевого коэффициента при неизвестной функции используется преобразование, зависящее от спектрального параметра, и позволяющее свести этот коэффициент к допускающему оценку $O(\lambda^{-1/2})$. Доказанное при выполнении некоторого условия регулярности утверждение о расположении собственных значений исходного оператора и полученное представление его резольвенты через интегральные операторы простой структуры вместе с полнотой системы собственных и присоединенных функций оператора, сопряженного к исходному, позволили доказать сформулированный результат.

Ключевые слова: базис Рисса, резольвента, инволюция.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-392-405

Рассматривается функционально-дифференциальный оператор L :

$$ay''(x) + y''(1-x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y'(1-x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

с интегральными краевыми условиями:

$$U_i(y) = \int_0^1 y(\tau) d\sigma_i(\tau) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Предполагаем, что $a^2 \neq 1$, $p_i(x) \in C^1[0, 1]$ ($i = 1, 2$), $\sigma_i(x)$ ($i = 1, 2$) — функции ограниченной вариации, имеющие скачки в точках 0 и 1.

Оператор (1) содержит инволюцию $\theta(x) = 1 - x$. В настоящее время дифференциальные и интегральные операторы с инволюцией интенсивно изучаются [1–6]. В данной работе рассматривается вопрос о базисности Рисса собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) оператора (1), (2). Для дифференциальных и интегродифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями такая задача изучалась в [7–9]. В [6] доказана базисность Рисса со скобками с.п.ф. оператора первого порядка:

$$ay'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x) \quad (3)$$

и интегральными краевыми условиями вида (2). Оператор (1), (2) — более сложный, чем (3), применяемый теперь метод является дальнейшим существенным развитием метода из [6].

1. Пусть $y = R_\lambda f$, где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора (1), (2) (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор). Тогда y удовлетворяет уравнению

$$ay''(x) + y''(1-x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y'(1-x) = \lambda y(x) + f(x) \quad (4)$$

и условию (2). Оператор отражения S определим следующим образом: если $f(x)$ — скалярная функция, то $Sf = f(1-x)$, если $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), то $Sf = (f_1(x), f_2(1-x))^T$, если $f(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1m}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2m}(x) \end{pmatrix}$, то

$$Sf(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1m}(x) \\ f_{21}(1-x) & f_{22}(1-x) & \dots & f_{2m}(1-x) \end{pmatrix}.$$



Рассмотрим краевую задачу:

$$v''(x) + P_1(x)v'(x) - \lambda D_1 v(x) = n_1(x), \tag{5}$$

$$\int_0^1 S(\Gamma_1 v(t)) d\sigma_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{6}$$

где $v = (v_1, v_2)^T$, $P_1(x) = D_1 \Gamma_1^{-1} P_2(x) \Gamma_1$, $D_1 = \text{diag}(d_1, d_2)$, $d_1 = (a + 1)^{-1}$, $d_2 = (a - 1)^{-1}$, $P_2(x) = S \begin{pmatrix} p_1(x) - p_2(x) \\ p_2(x) - p_1(x) \end{pmatrix}$, $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $n_1(x) = D_1 \Gamma_1^{-1} S(f(x), f(x))^T$.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$R_\lambda f = v_1(x, \lambda) + v_2(x, \lambda), \tag{7}$$

где $v_j(x, \lambda)$ — компоненты решения задачи (5), (6). Обратно, если $v(x, \lambda)$ удовлетворяет (5), (6) и соответствующая однородная краевая задача имеет только нулевое решение, то R_λ существует и выполняется (7).

Доказательство. Положим $z(x) = S(y(x), y(x))^T$, тогда из (2), (4) получаем:

$$Az''(x) + P_2(x)z'(x) = \lambda z(x) + S(f(x), f(x))^T, \tag{8}$$

$$\int_0^1 Sz(t) d\sigma_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{9}$$

где $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

Полагая в (8), (9) $z(x) = \Gamma_1 v(x)$, получим систему (5), (6), и тем самым (7) установлено. Обратное получается, как и в [5, лемма 1]. \square

Лемма 2. *Пусть $\lambda = \rho^2$. Преобразование*

$$v_1(x) = y_1(x), v_1'(x) = \rho y_2(x), v_2(x) = y_3(x), v_2'(x) = \rho y_4(x) \tag{10}$$

приводит задачу (5), (6) к виду

$$Y'(x) + \tilde{P}_1(x)Y(x) - \rho \tilde{D}_1 Y(x) = \frac{1}{\rho} \tilde{n}_1(x), \tag{11}$$

$$\int_0^1 \tilde{S}(\tilde{\Gamma}_1 Y(t)) d\sigma_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{12}$$

где

$$Y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x))^T, \quad \tilde{S}Y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(1-x), y_4(1-x))^T,$$

$$\tilde{P}_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11}(x) & 0 & p_{12}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{21}(x) & 0 & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad p_{ij}(x) \ (i = 1, 2) \text{ — элементы матрицы } P_1(x),$$

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{n}_1(x) = (0, n_{11}(x), 0, n_{12}(x))^T, \quad (n_{11}(x), n_{12}(x))^T = n_1(x).$$



Доказательство. Из (5) и (10) сразу следует (11), из (6) и (10) получим:

$$\int_0^1 S(\Gamma_1(y_1(t), y_3(t))^T) d\sigma_i(t) \quad (i = 1, 2),$$

это и есть (12). □

Лемма 3. Преобразование $Y = \Gamma Z$ приводит систему (11), (12) к виду

$$Z'(x) + P(x)Z(x) - \rho DZ(x) = \frac{1}{\rho} m(x), \tag{13}$$

$$\int_0^1 \tilde{S}(\Gamma Z(t)) d\sigma_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{14}$$

где $Z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $P(x) = \Gamma_2^{-1} \tilde{P}_1(x) \Gamma_2$, $D = \Gamma_2^{-1} \tilde{D}_1 \Gamma_2 = \text{diag}(q_1, -q_1, q_2, -q_2)$, $m(x) = \Gamma_2^{-1} \tilde{m}_1(x)$, $\Gamma = \tilde{\Gamma}_1 \Gamma_2$,

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ q_1 & -q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & q_2 & -q_2 \end{pmatrix}, \quad q_i = \sqrt{d_i} \quad (i = 1, 2).$$

Доказательство очевидно.

Приведем преобразование задачи (13), (14), чтобы матрица $P(x)$ перешла в матрицу с элементами, допускающими оценку $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ [10, с. 48–58]. Пусть $H_0(x) = \text{diag}(h_1(x), h_1(x), h_2(x), h_2(x))$, где $h_i(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^x p_{ii}(t) dt\right)$ ($i = 1, 2$); $p_{ii}(x)$ – диагональные элементы матрицы $P_1(x)$, а $H_1(x) = (r_{ij}(x))_{i,j=1}^4$ – матрица, имеющая нулевые диагональные элементы и являющаяся решением матричного уравнения $H_0'(x) + P(x)H_0(x) + H_1(x)D - DH_1(x) = 0$.

Лемма 4. При больших $|\rho|$ неособое преобразование $Z = H(x, \rho)W$, где $H(x, \rho) = H_0(x) + \rho^{-1}H_1(x)$, приводит систему (13), (14) к виду

$$W' + P_\rho(x)W - \rho DW = m(x, \rho), \tag{15}$$

$$U^i(W) = \int_0^1 S(\tilde{H}(t, \rho)W(t)) d\sigma_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{16}$$

где $P_\rho(x) = \rho^{-1}H^{-1}(x, \rho)(H_1'(x) + P(x)H_1(x))$, $\tilde{H}(x, \rho)$ – матрица, состоящая из первой и третьей строк матрицы $\Gamma H(x, \rho)$, $m(x, \rho) = \rho^{-1}H^{-1}(x, \rho)m(x)$.

Доказательство устанавливается простой проверкой, если учесть, что вторая и четвертая строки матрицы Γ состоят из одних нулей, поэтому из одних нулей состоят такие строки и у матрицы $\Gamma H(x, \rho)$.

Лемма 5. Если $W(x, \rho) = (w_1(x, \rho), w_2(x, \rho), w_3(x, \rho), w_4(x, \rho))^T$ является решением задачи (15), (16), то

$$R_\lambda f = h_1(x)(w_1(x, \rho) + w_2(x, \rho)) + h_2(x)(w_3(x, \rho) + w_4(x, \rho)) + \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^4 r_i(x)w_i(x, \rho),$$

где $r_i(x) = \sum_{j \neq i} r_{ji}(x)$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$).



Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что $R_\lambda f = y_1(x, \rho) + y_2(x, \rho)$. Тогда из леммы 3 следует что $R_\lambda f = \sum_{i=1}^4 z_i(x, \rho)$. Отсюда и из леммы 4 получаем утверждение леммы. \square

В дальнейшем рассматриваем полуплоскость $\operatorname{Re} \rho q_1 \geq 0$, которую разобьем на 2 сектора: $S_1 = \{\rho | \operatorname{Re} \rho q_1 \geq 0, \operatorname{Re} \rho q_2 \geq 0\}$ и $S_2 = \{\rho | \operatorname{Re} \rho q_1 \geq 0, \operatorname{Re} \rho q_2 \leq 0\}$, и для определенности будем рассматривать сектор S_1 (сектор S_2 рассматривается аналогично). Рассмотрим еще краевую задачу:

$$T'(x) - \rho DT(x) = m(x), \quad U^i(T) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

где $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$ и $m_i(x) \in C[0, 1]$. \square

Лемма 6. Для решения $T(x) = T_\rho m(x)$ задачи (17), справедлива формула

$$T_\rho m(x) = \int_0^1 g(x, t, \rho) m(t) dt - V(x, \rho) \Delta^{-1}(\rho) (\Phi_1^T(m, \rho), \Phi_2^T(m, \rho))^T,$$

где $g(x, t, \rho) = \operatorname{diag}(g_1(x, t, \rho), g_2(x, t, \rho), g_3(x, t, \rho), g_4(x, t, \rho))$, $g_1(x, t, \rho) = -\varepsilon(t, x)e^{\rho q_1(x-t)}$, $g_2(x, t, \rho) = \varepsilon(x, t)e^{-\rho q_1(x-t)}$, $g_3(x, t, \rho) = -\varepsilon(t, x)e^{\rho q_2(x-t)}$, $g_4(x, t, \rho) = \varepsilon(x, t)e^{-\rho q_2(x-t)}$, $\varepsilon(x, t) = 1$ при $t \leq x$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$; $V(x, \rho) = \operatorname{diag}(e^{\rho q_1(x-1)}, e^{-\rho q_1 x}, e^{\rho q_2(x-1)}, e^{-\rho q_2 x})$, $\Delta(\rho) = (U^1(V(x, \rho))^T)^T$, $U^2(V(x, \rho))^T)^T$, $\Phi_i(m, \rho) = U^i(\int_0^1 g(x, t, \rho) m(t) dt)$ ($i = 1, 2$).

Это утверждение получается, как и лемма 3, из [11].

Лемма 7. Имеет место представление

$$\Phi_i(m, \rho) = (R_{i1}(\rho), R_{i2}(\rho))^T \quad (i = 1, 2), \quad (18)$$

где R_{is} ($s = 1, 2$) являются линейными комбинациями с ограниченными по ρ (при $|\rho|$ достаточно больших) коэффициентами интегралов $\int_0^1 \varphi_{ik}(t) e^{-\rho q_j t} dt$ ($i, j = 1, 2$; $k = 1, 2, \dots, 8$),

$\varphi_{i1}(t) = \int_0^{1-t} m_1(\tau + t) \psi(\tau) d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i2}(t) = \int_t^1 m_1(1 - \tau + t) \psi(\tau) d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i3}(t) = \int_t^1 m_2(\tau - t) \psi(\tau) d\sigma_i(\tau)$,
 $\varphi_{i4}(t) = \int_0^{1-t} m_2(1 - \tau - t) \psi(\tau) d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i5}(t) = \int_0^{1-t} m_3(\tau + t) \psi(\tau) d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i6}(t) = \int_t^1 m_3(1 - \tau + t) \psi(\tau) d\sigma_i(\tau)$,
 $\varphi_{i7}(t) = \int_t^1 m_4(\tau - t) \psi(\tau) d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i8}(t) = \int_0^{1-t} m_4(1 - \tau - t) \psi(\tau) d\sigma_i(\tau)$, $\psi(\tau)$ совпадает с одной из функций $h_i(\tau)$, $Sh_i(\tau)$ ($i = 1, 2$); $r_k(\tau)$, $S\tilde{r}_k(\tau)$ ($k = 1, 2, 3, 4$); $r_k(\tau)$ — те же, что и в лемме 5; $\tilde{r}_k(\tau) = \sum_{i \neq k} \alpha_{ik} r_{ik}(\tau)$, α_{ik} — числа, равные 1 или -1 .

Доказательство. Положим

$$F_1 = F_1(x, \rho) = - \int_x^1 e^{\rho q_1(x-t)} m_1(t) dt, \quad F_2 = F_2(x, \rho) = \int_0^x e^{-\rho q_1(x-t)} m_2(t) dt,$$

$$F_3 = F_3(x, \rho) = - \int_x^1 e^{\rho q_2(x-t)} m_3(t) dt, \quad F_4 = F_4(x, \rho) = \int_0^x e^{-\rho q_2(x-t)} m_4(t) dt.$$

Тогда

$$\int_0^1 g(x, t, \rho) m(t) dt = (F_1, F_2, F_3, F_4)^T.$$

Поэтому

$$\tilde{H}(x, \rho) (F_1, F_2, F_3, F_4)^T = (Q_1, Q_2)^T + \frac{1}{\rho} (Q_3, Q_4)^T,$$



где

$$Q_1 = h_1(x)(F_1 + F_2) + h_2(x)(F_3 + F_4),$$

$$Q_2 = h_1(x)(F_1 + F_2) - h_2(x)(F_3 + F_4), \quad Q_3 = \sum_{i=1}^4 r_i(x)F_i, \quad Q_4 = \sum_{i=1}^4 \tilde{r}_i(x)F_i.$$

Значит,

$$\Phi_i(m, \rho) = (U_i(Q_1) + \frac{1}{\rho}U_i(Q_3), U_{i+2}(Q_2) + \frac{1}{\rho}U_{i+2}(Q_4))^T \quad (i = 1, 2), \quad (19)$$

где U_i ($i = 1, 2$) определяется из (2), $U_i(y) = U_{i-2}(Sy)$ ($i = 3, 4$).

Далее, в $F_i(x, \rho)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) выполним замену переменных так, чтобы соответствующая экспонента всегда была $e^{-\rho q_i t}$. Теперь, подставляя эти выражения для F_i в Q_j и проводя в $U_i(Q_j)$ надлежащие перестановки порядков интегрирования, из (19), получаем (18). Лемма доказана. \square

2. Следующая лемма очевидна.

Лемма 8. Если $f(x) \in C[0, 1]$, $\nu(x)$ — функция ограниченной вариации и $\nu(+0) = \nu(0)$, то

$$\lim_{\operatorname{Re} \rho \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x)e^{-\rho x} d\nu(x) = 0.$$

Представим матрицу $\tilde{H}(x, \rho)$ в виде

$$\tilde{H}(x, \rho) = \tilde{H}_0(x) + \frac{1}{\rho}\tilde{H}_1(x),$$

тогда

$$\tilde{H}_0(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) & h_1(x) & h_2(x) & h_2(x) \\ h_1(x) & h_1(x) & -h_2(x) & -h_2(x) \end{pmatrix}.$$

Пусть выполняется условие

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0, \quad (20)$$

где $\alpha_i = \sigma_i(+0) - \sigma_i(0)$, $\beta_i = \sigma_i(1) - \sigma_i(1-0)$ ($i = 1, 2$).

Обозначим $\varphi(\rho) = \det \Delta_1(\rho)$, где $\Delta_1(\rho) = (U_0^1(V(x, \rho))^T, U_0^2(V(x, \rho))^T)^T$, $U_0^i(V(x, \rho)) = \int_0^1 S(\tilde{H}_0(t) \times V(t, \rho)) d\sigma_i(t)$ ($i = 1, 2$), и через S_δ обозначим область, получающуюся из ρ -плоскости удалением всех нулей $\varphi(\rho)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ . Считаем что $\arg q_1 \neq \arg q_2 + k\pi$ ($k = 0, 1$) (противоположный случай приводит к упрощению последующих рассуждений).

Лемма 9. Нули целой функции $\varphi(\rho)$ находятся в некоторых полосах $|\operatorname{Re} \rho q_j| \leq h$ ($j = 1, 2$), причем число нулей в каждом прямоугольнике $\{|\operatorname{Re} \rho q_j| \leq h, |\operatorname{Im} \rho q_j - t| \leq 1\}$ ($j = 1, 2$) ограничено при всех вещественных t . В S_δ справедлива оценка

$$|\varphi(\rho)| \geq C(1 + |e^{-2\rho q_1}| + |e^{-2\rho q_2}| + |e^{-2\rho(q_1+q_2)}|), \quad (21)$$

где $C > 0$ и не зависит от ρ .

Доказательство. Имеем:

$$S(\tilde{H}_0(t)V(t, \rho)) = \begin{pmatrix} h_1(t)e^{\rho q_1(t-1)} & h_1(t)e^{-\rho q_1 t} & h_2(t)e^{\rho q_2(t-1)} & h_2(t)e^{-\rho q_2 t} \\ h_1(1-t)e^{-\rho q_1 t} & h_1(1-t)e^{-\rho q_1(1-t)} & -h_2(1-t)e^{-\rho q_2 t} & -h_2(1-t)e^{-\rho q_2(1-t)} \end{pmatrix}.$$

Тогда по лемме 8

$$\varphi(\rho) = d_1(\rho) + d_2(\rho), \quad (22)$$



где

$$d_1(\rho) = \begin{vmatrix} h_1(0)e^{-\rho q_1}\alpha_1 + h_1(1)\beta_1 & h_1(0)\alpha_1 + h_1(1)e^{-\rho q_1}\beta_1 \\ h_1(0)\alpha_1 + h_1(0)e^{-\rho q_1}\beta_1 & h_1(1)e^{-\rho q_1}\alpha_1 + h_1(0)\beta_1 \\ h_1(0)e^{-\rho q_1}\alpha_2 + h_1(1)\beta_2 & h_1(0)\alpha_2 + h_1(1)e^{-\rho q_1}\beta_2 \\ h_1(1)\alpha_2 + h_1(0)e^{-\rho q_1}\beta_2 & h_1(1)e^{-\rho q_2}\alpha_2 + h_2(0)\beta_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} h_2(0)e^{-\rho q_2}\alpha_1 + h_2(1)\beta_1 & h_2(0)\alpha_1 + h_2(1)e^{-\rho q_2}\beta_1 \\ -h_2(1)\alpha_1 - h_2(0)e^{-\rho q_2}\beta_1 & -h_2(1)e^{-\rho q_2}\alpha_1 - h_2(0)\beta_1 \\ h_2(0)e^{-\rho q_2}\alpha_2 + h_2(1)\beta_2 & h_2(0)\alpha_2 + h_2(1)e^{-\rho q_2}\beta_2 \\ -h_2(1)\alpha_2 - h_2(0)e^{-\rho q_2}\beta_2 & -h_2(1)e^{-\rho q_2}\alpha_2 - h_2(0)\beta_2 \end{vmatrix},$$

а $d_2(\rho) = o(1)$ при $\operatorname{Re} \rho q_1 \rightarrow +\infty, \operatorname{Re} \rho q_2 \rightarrow +\infty$; $d_2(\rho) = o(1)e^{-\rho q_2}$ при $\operatorname{Re} \rho q_1 \rightarrow +\infty, \operatorname{Re} \rho q_2 \rightarrow -\infty$; $d_2(\rho) = o(1)e^{-2\rho q_1}$ при $\operatorname{Re} \rho q_1 \rightarrow -\infty, \operatorname{Re} \rho q_2 \rightarrow +\infty$; $d_2(\rho) = o(1)e^{-2\rho(q_1+q_2)}$ при $\operatorname{Re} \rho q_1 \rightarrow -\infty, \operatorname{Re} \rho q_2 \rightarrow -\infty$.

Далее, имеем $d_1(\rho) = \gamma(e^{-2\rho q_1} - 1)(e^{-2\rho q_2} - 1)$, где $\gamma = 4h_1(0)h_2(0)h_1(1)h_2(1)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2$.

В силу условия регулярности (20) нули $d_1(\rho)$ находятся в некоторых полосах $|\operatorname{Re} \rho q_j| \leq |h_j|$ ($j = 1, 2$), и вне δ -окрестностей этих нулей имеет место очевидная оценка:

$$|d_1(\rho)| \geq C(1 + |e^{-2\rho q_1}| + |e^{-2\rho q_2}| + |e^{-2\rho(q_1+q_2)}|). \quad (23)$$

Поэтому из (22) и (23) получаем, что существуют $0 < h < h_2$ такие, что $\varphi(\rho)$ ограничена в полуполосе $\{\rho \mid |\operatorname{Re} \rho q_1| \leq h_2, \operatorname{Re} \rho q_2 \geq h_2\}$, нули $\varphi(\rho)$, расположенные в полуплоскости $\operatorname{Re} \rho q_2 \geq h_2$, лежат в полуполосе $\{\rho \mid |\operatorname{Re} \rho q_1| \leq h, \operatorname{Re} \rho q_2 \geq h_2\}$, и на линиях $\{\rho \mid |\operatorname{Re} \rho q_1| = h, \operatorname{Re} \rho q_2 \geq h_2\}$ ее модуль отделен от нуля. А функция $\varphi(\rho)e^{2\rho q_2}$ ограничена в полуполосе $\{\rho \mid |\operatorname{Re} \rho q_1| \leq h_2, \operatorname{Re} \rho q_2 \leq -h_2\}$, нули $\varphi(\rho)e^{2\rho q_2}$, расположенные в полуплоскости $\operatorname{Re} \rho q_2 \leq -h_2$, лежат в полуполосе $\{\rho \mid |\operatorname{Re} \rho q_1| \leq h, \operatorname{Re} \rho q_2 \leq -h_2\}$ и на линиях $\{\rho \mid |\operatorname{Re} \rho q_1| = h, \operatorname{Re} \rho q_2 \leq -h_2\}$ ее модуль отделен от нуля. Применяя теорему из [12, § 2.3, с. 27] к функции $\varphi(\rho)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \rho q_2 \geq h_2$ и к функции $\varphi(\rho)e^{2\rho q_2}$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \rho q_2 \leq -h_2$, получаем утверждение леммы для нулей $\varphi(\rho)$, расположенных в полосе $|\operatorname{Re} \rho q_1| \leq h$. Аналогично доказывается это утверждение и для нулей $\varphi(\rho)$, расположенных в полосе $|\operatorname{Re} \rho q_2| \leq h$. Оценка (21) легко следует из [12, § 2.3, с. 27]. Лемма доказана. \square

Лемма 10. Для всех достаточно больших $|\rho|$ в области $S_\delta \cap S_1$ имеет место оценка

$$\det \Delta(\lambda) \geq C,$$

где $C > 0$ и не зависит от ρ .

Доказательство. Имеем $\Delta(\rho) = \Delta_1(\rho) + \Delta_2(\rho)$, где $\Delta_2(\rho)$ — матрица, у которой все элементы есть $O(\rho^{-1})$. Утверждение леммы теперь легко следует из леммы 9.

В дальнейшем считаем выполненным условие (20), и пусть $\operatorname{Re} \frac{iq_2}{q_1} > 0$. Обозначим через Π_j ($j = 1, 2$) полуполосы $\Pi_1 = \{\rho q_1 \mid |\operatorname{Re} \rho q_1| \leq h, \operatorname{Im} \rho q_1 \geq h_1\}$, $\Pi_2 = \{\rho q_2 \mid |\operatorname{Re} \rho q_2| \leq h, \operatorname{Im} \rho q_2 \leq -h_1\}$, где h — то же, что и в лемме 9, и пусть ρ_k — нули $\varphi(\rho)$ из леммы 9. Удалим из Π_j ($j = 1, 2$) все точки $\rho_k q_j$ вместе с круговыми окрестностями радиуса δ . Получившиеся области обозначим $\Pi_j(\delta)$ и через $\Pi_{j,1}(\delta)$ обозначим часть $\Pi_j(\delta)$, когда $\operatorname{Re} \rho q_j \geq 0$.

Лемма 11. Если $\rho q_1 \in \Pi_{1,1}(\delta)$ или $\rho q_2 \in \Pi_{2,1}(\delta)$ и $|\rho|$ достаточно велико, то существует единственное решение задачи (17), для компонент которого имеют место представления:

$$(T\rho m)_1 = - \int_x^1 e^{\rho q_1(x-t)} m_1(t) dt + T_1(m, \rho) e^{\rho q_1(x-1)}, \quad (24)$$

$$(T\rho m)_2 = \int_0^x e^{-\rho q_1(x-t)} m_2(t) dt + T_2(m, \rho) e^{-\rho q_1 x}, \quad (25)$$



$$(T\rho m)_3 = - \int_x^1 e^{\rho q_2(x-t)} m_3(t) dt + T_3(m, \rho) e^{\rho q_2(x-1)}, \quad (26)$$

$$(T\rho m)_4 = \int_0^x e^{-\rho q_2(x-t)} m_4(t) dt + T_4(m, \rho) e^{\rho q_2 x}, \quad (27)$$

где $T_i(m, \rho)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) — линейные комбинации тех же интегралов, что и в лемме 7 с ограниченными по ρ коэффициентами.

Доказательство. Нетрудно видеть, что указанные ρ принадлежат сектору S_1 , и тогда утверждение леммы следует из лемм 6 и 7, если учесть, что в силу леммы 10 элементы матрицы $\Delta^{-1}(\rho)$ ограничены по ρ . \square

Пусть $\varphi(t, f)$ — одна из функций $\varphi_{ij}(t)$ из леммы 7, когда $m_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) заменены на произвольную функцию $f(x) \in C[0, 1]$.

Лемма 12. Если $f(x) \in C[0, 1]$, то справедлива оценка

$$\|\varphi(t, f)\| \leq C \|f\|, \quad (28)$$

где $C > 0$ и не зависит от $f(x)$, а $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0, 1]$.

Доказательство. Пусть для определенности $\varphi(t, f) = \int_0^{1-t} f(t+\tau)\psi(\tau) d\sigma_1(\tau)$ и $\sigma_1(\tau)$ не убывает. Тогда

$$\|\varphi(t, f)\|^2 \leq \int_0^1 |\psi(\tau)| d\sigma_1(\tau) \int_0^{1-\tau} |\varphi(t, f)| |f(t+\tau)| dt. \quad (29)$$

Внутренний интеграл по теореме Коши – Буняковского оценивается сверху величиной $\|\psi(t, f)\| \times \|f\|$. Поэтому из (29) получаем:

$$\|\varphi(t, f)\|^2 \leq \|\varphi(t, f)\| \|f\| \int_0^1 |\psi(\tau)| d\sigma_1(\tau). \quad (30)$$

Так как $\|\varphi(t, f)\| < \infty$, то из (30) получаем (28). Лемма доказана. \square

По лемме 12 $\varphi(t, f)$ как оператор по f продолжается по непрерывности на все $L_2[0, 1]$. Это продолжение мы также обозначим через $\varphi(t, f)$. Тем самым мы можем рассмотреть задачу (17), когда $m(x) \in L_2^4[0, 1]$.

Имеет место

Лемма 13. Если $\rho q_1 \in \Pi_{1,1}(\delta)$ или $\rho q_2 \in \Pi_{2,1}(\delta)$ и $|\rho|$ достаточно велико, то для краевой задачи (17) при $m(x) \in L_2^4[0, 1]$ существует единственное решение $T_\rho m(x)$ и для его компонент имеют место формулы (24)–(27), в которых $\varphi_{ij}(t)$ из леммы 7 заменяются на соответствующие операторы $\varphi(t, f)$ в $L_2[0, 1]$.

3. Считаем, что $f(x)$ в задаче (5), (6) принадлежит $L_2[0, 1]$, тогда $m(x) \in L_2^4[0, 1]$.

Лемма 14. Если ρ — то же, что и в лемме 13, то существует единственное решение задачи (15), (16), причем

$$W(x, \rho) = \frac{1}{\rho} T_\rho p_1(x) + \frac{1}{\rho^2} T_\rho p_2(x) - \frac{1}{\rho^2} T_\rho M_\rho p_1(x) + O\left(\frac{\|f\|}{\rho^3}\right), \quad (31)$$

где $p_1(x) = H_0^{-1}(x)m(x)$, $p_2(x) = -H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)m(x)$, $M_\rho = H_2(x)(E + M_{1,\rho})^{-1}T_\rho$, $H_2(x) = H_0^{-1}(x)(H_1'(x) + P(x)H_1(x))$, $M_{1,\rho}m(x) = T_\rho P_\rho(x)m(x)$, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0, 1]$.



Доказательство. Имеем из (15):

$$W(x, \rho) = T_\rho(m(x, \rho) - P_\rho(x)W(x, \rho)). \quad (32)$$

Так как $P_\rho(x) = O(\frac{1}{\rho})$, то оператор $E + M_{1,\rho}$ ограниченно обратим. Поэтому из (32) получаем:

$$\begin{aligned} W(x, \rho) &= (E + M_{1,\rho})^{-1}T_\rho m(x, \rho) = T_\rho m(x, \rho) - M_{1,\rho}(E + M_{1,\rho})^{-1}T_\rho m(x, \rho) = \\ &= T_\rho m(x, \rho) - T_\rho P_\rho(E + M_{1,\rho})^{-1}T_\rho m(x, \rho). \end{aligned} \quad (33)$$

Но

$$m(x, \rho) = \frac{1}{\rho}p_1(x) + \frac{1}{\rho^2}p_2(x) + O\left(\frac{\|f\|}{\rho^3}\right), \quad P_\rho(x) = \frac{H_2(x)}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right).$$

Поэтому с учетом того, что T_ρ ограничен по ρ , из (33) получаем (31). Лемма доказана. \square

Лемма 15. *Существуют непрерывные функции $\gamma_{ij}(x)$, $\delta_{ij}(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2$) такие, что для $p_1(x)$ и $p_2(x)$ из леммы 14 имеют место соотношения:*

$$(T_\rho p_j)_1 = - \int_x^1 e^{\rho q_1(x-t)} \gamma_{1j}(t) f(t) dt - \int_0^{1-x} e^{\rho q_1(x+t-1)} \delta_{1j}(t) f(t) dt + T_{1j}(f, \rho) e^{-\rho q_1(x-1)}, \quad (34)$$

$$(T_\rho p_j)_2 = \int_0^x e^{-\rho q_1(x-t)} \gamma_{2j}(t) f(t) dt + \int_{1-x}^1 e^{-\rho q_1(x+t-1)} \delta_{2j}(t) f(t) dt + T_{2j}(f, \rho) e^{-\rho q_1 x}, \quad (35)$$

$$(T_\rho p_j)_3 = - \int_x^1 e^{\rho q_2(x-t)} \gamma_{3j}(t) f(t) dt - \int_0^{1-x} e^{\rho q_2(x+t-1)} \delta_{3j}(t) f(t) dt + T_{3j}(f, \rho) e^{\rho q_2(x-1)}, \quad (36)$$

$$(T_\rho p_j)_4 = \int_0^x e^{-\rho q_2(x-t)} \gamma_{4j}(t) f(t) dt + \int_{1-x}^1 e^{-\rho q_2(x+t-1)} \delta_{4j}(t) f(t) dt + T_{4j}(f, \rho) e^{-\rho q_2 x}, \quad (37)$$

где $T_{ij}(f, \rho)$ — линейные комбинации с ограниченными по ρ коэффициентами интегралов $\int_0^1 \varphi(t) e^{-\rho q_j t} dt$ ($j = 1, 2$), где $\varphi(t)$ являются продолжениями в $L_2[0, 1]$ по лемме 12 следующих, рассматриваемых как операторы по $f(x)$ интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^{1-t} f(\tau+t) \theta(\tau+t) \psi(\tau) d\sigma_k(\tau), & \quad \int_0^{1-t} f(1-\tau-t) \theta(1-\tau-t) \psi(\tau) d\sigma_k(\tau), \\ \int_t^1 f(\tau-t) \theta(\tau-t) \psi(\tau) d\sigma_k(\tau), & \quad \int_t^1 f(1-\tau+t) \theta(1-\tau+t) \psi(\tau) d\sigma_k(\tau), \end{aligned} \quad (38)$$

когда $\theta(x)$ являются произвольными функциями среди $\gamma_{ij}(x)$, $\delta_{ij}(x)$ и $k = 1, 2$. Функции $\psi(\tau)$ — те же, что и в лемме 7.

Доказательство. По определению компоненты вектор-функций $p_j(x)$ можно представить в виде

$$(p_j(x))_i = \gamma_{ij}(x) f(x) + \delta_{ij}(1-x) f(1-x) \quad (j = 1, 2),$$

где $\gamma_{ij}(x)$ и $\delta_{ij}(x)$ — непрерывные функции. Взяв в лемме 13 в качестве $m_i(x) = \gamma_{ij}(x) f(x) + \delta_{ij}(1-x) f(1-x)$, получим (34)–(37). Лемма доказана. \square

Рассмотрим операторы $Q_\rho f = \int_0^1 Q(x, t, \rho) f(t) dt$, где $Q(x, t, \rho)$ есть одна из функций:

$$\int_x^1 e^{\rho q_1(x-\tau)} \theta(t) M(\tau, t, \rho) d\tau, \quad \int_0^x e^{-\rho q_1(x-\tau)} \theta(t) M(\tau, t, \rho) d\tau,$$



$$\begin{aligned}
 & \int_x^1 e^{\rho q_2(x-\tau)} \theta(t) M(\tau, t, \rho) d\tau, & \int_0^x e^{-\rho q_2(x-\tau)} \theta(t) M(\tau, t, \rho) d\tau, \\
 & e^{\rho q_1(x-1)} N(t, \rho), & e^{-\rho q_1 x} N(t, \rho), & e^{\rho q_2(x-1)} N(t, \rho), & e^{-\rho q_2 x} N(t, \rho).
 \end{aligned}$$

Здесь $M(x, t, \rho)$ есть либо $M_{ij}(x, t, \rho)$, либо $M_{ij}(x, 1 - t, \rho)$ при некоторых i, j . Функции $M_{ij}(x, t, \rho)$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) являются компонентами ядра интегрального оператора M_ρ . Наконец, $N(t, \rho)$ — одна из следующих функций ($i, j = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 e^{-\rho q_j \tau} d\tau \int_0^{1-\tau} M(\tau + s, t, \rho) \psi(s) \theta(t) d\sigma_i(s), & \int_0^1 e^{-\rho q_j \tau} d\tau \int_0^{1-\tau} M(1 - \tau - s, t, \rho) \psi(s) \theta(t) d\sigma_i(s), \\
 & \int_0^1 e^{-\rho q_j \tau} d\tau \int_\tau^1 M(s - \tau, t, \rho) \psi(s) \theta(t) d\sigma_i(s), & \int_0^1 e^{-\rho q_j \tau} d\tau \int_\tau^1 M(1 + \tau - s, t, \rho) \psi(s) \theta(t) d\sigma_i(s). \quad \square
 \end{aligned}$$

Лемма 16. Каждая компонента вектор функции $T_\rho M_\rho p_1$ есть линейная комбинация всевозможных операторов $Q_\rho f$ с ограниченными по ρ коэффициентами.

Доказательство. Каждая компонента вектор-функции $M_\rho p_1$ есть линейная комбинация интегралов $\int_0^1 M(x, t, \rho) \theta(t) f(t) dt$ при всевозможных $M(x, t, \rho)$ и $\theta(t)$, и утверждение леммы следует из (24)–(27). \square

Обозначим через $\sigma(x, \rho_1, k)$ одну из функций

$$e^{-(\rho_1+ik)x}, \quad e^{(\rho_1+ik)(x-1)}, \quad e^{-(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}x}, \quad e^{(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}(x-1)};$$

через $w(x, t, \rho_1, k)$ — одну из функций

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon(x, t) \theta(t) e^{-(\rho_1+ik)(x-t)}, & \varepsilon(t, x) \theta(t) e^{(\rho_1+ik)(x-t)}, & \varepsilon(x, t) \theta(t) e^{-(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}(x-t)}, \\
 & \varepsilon(t, x) \theta(t) e^{(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}(x-t)}, & \varepsilon(1-x, t) \theta(t) e^{(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}(x+t-1)}, & \varepsilon(t, 1-x) \theta(t) e^{-(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}(x+t-1)},
 \end{aligned}$$

где $\theta(t)$ — либо те же, что в лемме 15, либо $\theta(t) \equiv 1$;

$$M(x, t, \rho_1, k) = M(x, t, \rho)|_{\rho q_1 = \rho_1 + ik}, \quad N(x, \rho_1, k) = N(x, \rho)|_{\rho q_1 = \rho_1 + ik}.$$

Пусть

$$A_k f = \psi(x) \int_0^1 \sigma(x, \rho_1, k) \sigma(t, \rho_1, k) A f(t) dt,$$

где $A f$ — один из операторов (38),

$$B_k f = \psi(x) \int_0^1 w(x, t, \rho_1, k) f(t) dt, \quad M_k f = \int_0^1 M(x, t, \rho_1, k) \theta(t) f(t) dt,$$

$$N_k f = \psi(x) \sigma(x, \rho_1, k) \int_0^1 N(t, \rho_1, k) f(t) dt.$$

Пусть $\rho q_1 \in \Pi_{1,1}(\delta)$, $\rho q_1 = \rho_1 + ik$, $k > 0$ и ρ_1 принадлежит ограниченной области.

Лемма 17. Если $f(x) \in L_2[0, 1]$, то при больших $|\rho|$

$$\rho R_\lambda f|_{\lambda = (\rho_1+ik)^2 q_1^{-2}} = \Omega(x, \rho_1, k; f) + O\left(\frac{\|f\|}{k^2}\right), \quad (39)$$

где $\Omega(x, \rho_1, k; f)$ есть конечная сумма с ограниченными по ρ_1 и k коэффициентами всевозможных операторов $A_k f$, $B_k f$, $\frac{1}{k} B_k f$, $\frac{1}{k} B_k M_k f$, $\frac{1}{k} N_k f$, причем коэффициенты при $B_k f$ не зависят от ρ_1 и k .



Доказательство. По лемме 15 из (34)–(37) следует, что каждая компонента вектор-функций $\psi(x)T_\rho p_j(x)$ ($j = 1, 2$) является линейной комбинацией операторов $B_k f$ с постоянными коэффициентами и операторов $A_k f$ с ограниченными по ρ_1 и k коэффициентами. Из леммы 16 следует, что каждая компонента вектора $\rho^{-1}\psi(x)T_\rho M_\rho p_1(x)$ является линейной комбинацией операторов $\frac{1}{k}B_k M_k f$, $\frac{1}{k}N_k f$ с ограниченными по ρ_1 и k коэффициентами. Отсюда и из лемм 5 и 14 следует (39).

4. Так же, как в [13] представим каждую полуполосу Π_j ($j = 1, 2$) в виде объединения конечного числа различных групп прямоугольников, границы которых γ_{kj} ($k = 1, 2, \dots$ для $j = 1$ и $k = -1, -2, \dots$ для $j = 2$) (при возрастании $|k|$ контуры удаляются от начала координат) состоят их отрезков, лежащих на прямых $\operatorname{Re} \rho q_j = \pm h$, и из отрезков, параллельных вещественной оси длины $2h$. Контуры γ_{kj} принадлежат области $\Pi_j(\delta)$ (считаем, что отрезки $\{\rho q_1 \mid |\operatorname{Re} \rho q_1| \leq h, \operatorname{Im} \rho q_1 = h_1\}$, $\{\rho q_2 \mid |\operatorname{Re} \rho q_2| \leq h, \operatorname{Im} \rho q_2 = -h_1\}$ расположены соответственно в $\Pi_1(\delta), \Pi_2(\delta)$) и для каждого γ_{kj} одной конкретной группы полуполосы Π_j существует целое t_{kj} , что $\gamma_{kj} = \gamma_j + it_{kj}$, γ_j — некоторый фиксированный прямоугольный контур из этой группы, и $t_{k1} > 0$, $t_{k2} < 0$.

Пусть Γ_{kj} — образ контура γ_{kj}/q_j ($j = 1, 2$) при отображении $\lambda = \rho^2$. Занумеруем в каком-нибудь порядке все контуры Γ_{kj} , когда $j = 1$ или $j = 2$, одним индексом $k = 1, 2, \dots$

Лемма 18. Пусть J — любой конечный набор достаточно больших номеров k . Тогда справедлива оценка

$$\left\| \sum_{k \in J} \int_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda \right\| \leq C, \tag{40}$$

равномерная по J .

Доказательство. Докажем (40) для тех Γ_k , которые являются образами контуров γ_{k1}/q_1 , когда γ_{k1} принадлежат конкретной группе одинаковых прямоугольников. Так как в области $\Pi_1(\delta)$ при $\operatorname{Re} \rho q_1 < 0$ для $R_\lambda f$ справедливо представление, аналогичное (39), то докажем (40) лишь для контуров Γ'_k , где каждый Γ'_k является образом при отображении $\lambda = \rho^2$ контура γ'_{k1}/q_1 , а γ'_{k1} образован частью γ_{k1} , лежащей в правой полуплоскости, и отрезком на мнимой оси. Считаем, что $\gamma'_{k1} \subset \Pi_1(\delta)$ (в противном случае, так же, как в [14, с. 55], переходим к смещенной полуполосе). Тогда если $\rho q_1 \in \gamma'_{k1}$, то $\rho_1 = \rho q_1 - it_{k1}$ принадлежит фиксированному контуру γ' , причем, без ограничения общности считаем, что γ' — один и тот же для всех наборов J . Имеем:

$$\sum_{k \in J} \int_{\Gamma'_k} R_\lambda f d\lambda = \int_{\gamma'} \Phi(f, \rho_1) d\rho_1,$$

где $\Phi(f, \rho_1) = \frac{2}{q_1} \sum_{k \in J} (\rho_1 + it_{k1}) R_\lambda f|_{\lambda = (\rho_1 + it_{k1})^2 q_1^{-2}}$. Пусть P_k — любой из операторов леммы 17. Тогда по лемме 17 $\Phi(f, \rho_1)$ представима в виде конечной суммы (число слагаемых не зависит от J) операторов:

$$\Sigma = \sum_{k \in J} \alpha(\rho_1, t_{k1}) P_{t_{k1}} f = \sum_{k \in J_1} \alpha(\rho_1, k) P_k f, \tag{41}$$

где $J_1 = \{t_{k1} \mid k \in J\}$, $\alpha(\rho_1, k)$ ограничены по ρ_1 и k и ядра операторов P_k состоят из одних и тех же функций, отличающихся лишь параметром k , то есть, например, все P_k в (41) есть $A_k f = \psi(x) \sigma(x, \rho_1, k) \int_0^1 \sigma(t, \rho_1, k) A f(t) dt$, где $\psi(x)$ — одна и та же функция, $A f(t)$ — один и тот же оператор, $\sigma(x, \rho_1, k) = e^{-(\rho_1 + ik)x}$, $\sigma(t, \rho_1, k) = e^{(\rho_1 + ik)(t-1)}$.

Если $P_k = B_k$, то $\alpha(\rho_1, k)$ — константы, не зависящие от ρ_1 и k , и поэтому в этом случае $\int_{\gamma'} \Sigma d\rho_1 = 0$.

Если $P_k = A_k$, то $P_k f = A_k f = \psi(x) \sigma(x, \rho_1, k) b_k(A f, \rho_1)$, где $b_k(A f, \rho_1) = \sum_{k \in J_1} \alpha(\rho_1, k) \psi(x) \times \sigma(x, \rho_1, k) b_k(A f, \rho_1)$.



Покажем, что

$$\|\Sigma\| \leq C\|f\|, \tag{42}$$

причем константа C не зависит от J_1 и ρ_1 . Пусть $u(x) \in L_2[0, 1]$. Тогда

$$(\Sigma, u) = \sum_{k \in J_1} \alpha(\rho_1, k) b_k(u\psi, \rho_1) b_k(Af, \rho_1).$$

Так как $\sigma(x, \rho_1, k) = \sigma(x, \rho_1, 0)\sigma(x, 0, k)$, то

$$b_k(Af, \rho_1) = \int_0^1 \sigma(t, 0, k) f_1(t, \rho_1) dt,$$

где $f_1(t, \rho_1) = \sigma(t, \rho_1, 0)Af$ и $\|Af\| \leq C\|f\|$. Поэтому

$$|(\Sigma, u)| \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(u\psi, \rho_1)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(Af, \rho_1)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Значит, по теореме Банаха – Штейнгауза функционалы (Σ, u) имеют нормы, ограниченные константой, не зависящей от J_1 и ρ_1 . Теперь, применяя опять теорему Банаха – Штейнгауза к операторам Σ , получим оценку (42). Если $P_k = \frac{1}{k}B_k$, то оценка (42) следует из [11, лемма 6].

Если $P_k = \frac{1}{k}B_kM_k$, то

$$(\Sigma, u) = \sum_{k \in J_1} \frac{\alpha(\rho_1, k)}{k} (M_k f, B_k^* u),$$

где B_k^* — оператор, сопряженный к оператору B_k . Так как ядра операторов M_k ограничены, то отсюда получаем оценку

$$|(\Sigma, u)| \leq C\|f\| \sum_{k \in J_1} \frac{1}{k} \|B_k^* u\|. \tag{43}$$

Аналогично лемме 6 из [11] можно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|B_k^* u\|^2 \leq C\|u\|^2.$$

Поэтому из (43) следует оценка $|(\Sigma, u)| \leq C\|f\|\|u\|$ и (42) справедлива. Если $P_k = \frac{1}{k}N_k$, то

$$(\Sigma, u) = \sum_{k \in J_1} \frac{\alpha(\rho_1, k)}{k} \int_0^1 \sigma(t, 0, k) u_1(t, \rho_1) dt \int_0^1 N(t, \rho_1, k) f(t) dt,$$

где $u_1(t, \rho_1) = \sigma(t, \rho, 0)\psi(t)u(t)$. Отсюда, учитывая ограниченность ядер $N(t, \rho_1, k)$, получаем оценку (42). Лемма доказана. \square

Лемма 19. Система с.п.ф. оператора L^* является полной в $L_2[0, 1]$.

Доказательство осуществляется стандартными рассуждениями, если учесть, что в силу лемм 5 и 14–16 справедлива оценка $R_\lambda f = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$.

Для простоты считаем, что пересечением полос $\{\rho \mid |\operatorname{Re} \rho q_j| \leq h\}$ ($j = 1, 2$) также является прямоугольник, граница которого γ_0 не пересекает δ -окрестностей точек ρ_k (считаем также, что числа h и h_1 из определения Π_j ($j = 1, 2$) совпадают). Через R_k ($k = 1, 2, \dots$) обозначим объединение уже построенных контуров Γ_k ($k = 1, 2, \dots$), образа при отображении $\lambda = \rho^2$ контура γ_0 и образов прямоугольных контуров из сектора S_2 , аналогичных контурам γ_{kj}/q_j из S_1 .

Так же, как в [15, с. 62–63], получим основной результат.



Теорема. Система с.п.ф. оператора L образует базис Рисса со скобками в $L_2[0, 1]$. При этом в скобки нужно объединять те с.п.ф., которые отвечают собственным значениям оператора L , которые попали в контуры R_k .

Доказательство. Покажем сначала, что базис Рисса со скобками образуют с.п.ф. оператора L^* . Обозначим $E^*(k) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{R_k} R_\lambda d\lambda \right)^*$ и покажем, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} E^*(k_j) f(x)$ сходится к $f(x)$, где k_1, k_2, \dots — какой-то наперед заданный порядок целых чисел. По лемме 19 система с.п.ф. $\{\psi_k\}$ оператора L^* полна в $L_2[0, 1]$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда существуют номер r и числа α_k , $k = 1, 2, \dots, r$, такие, что $\|f - \sum_{k=1}^r \alpha_k \psi_k\| \leq \varepsilon$.

Пусть $S_q = \sum_{j=1}^q E^*(k_j)$. Тогда по лемме 18 при q достаточно больших

$$\|f - S_q f\| \leq \left\| f - \sum_{k=1}^r \alpha_k \psi_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^r \alpha_k \psi_k - S_q \left(\sum_{k=1}^r \alpha_k \psi_k \right) \right\| + \left\| S_q \left(f - \sum_{k=1}^r \alpha_k \psi_k \right) \right\| \leq \varepsilon + C\varepsilon.$$

Взяв теперь систему, биортогональную к системе $\{\psi_k\}$, получим утверждение теоремы.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014К).

Библиографический список

1. Андреев А. А., Саушкин И. Н. Об аналоге задачи Трикоми для одного модельного уравнения с инволютивным отклонением в бесконечной области // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2005. Вып. 36. С. 10–16. DOI: 10.14498/vsgtu332.
2. Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50. DOI: 10.4213/smb601.
3. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // ДАН. 2011. Т. 441, № 2. С. 156–159.
4. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // ДАН. 2011. Т. 439, № 6. С. 733–735.
5. Хромов А. П., Хромова Г. В. О сходимости метода М. М. Лаврентьева для интегрального уравнения первого рода с инволюцией // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 289–297.
6. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 196–204.
7. Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, матем., мех. 1982. № 6. С. 12–21.
8. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
9. Баскаков А. Г., Кацаран Т. К. Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 8. С. 1424–1433.
10. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев : Изд-во АН УССР, 1954.
11. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Матем. заметки. 2004. Т. 76, вып. 1. С. 97–110. DOI: 10.4213/mzm92.
12. Седлецкий А. М. Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, I // СМФН. Т. 5. М. : Изд-во МАИ, 2003. С. 3–152.
13. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 80–82.
14. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.
15. Курдюмов В. П., Хромов А. П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с интегральными краевыми условиями // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 61–63.



On Riesz Bases of Eigenfunction of 2-nd Order Differential Operator with Involution and Integral Boundary Conditions

V. P. Kurdyumov

Kurdyumov Vitalii Pavlovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KurdyumovVP@yandex.ru

Riesz basisness with brackets of the eigen and associated function is proved for a 2-nd order differential operator with involution in the derivatives and with integral boundary conditions. To demonstrate this the spectral problem of the initial operator is reduced to the spectral problem of a 1-st order operator without involution in the 4-dimensional vector-function space. The equation of the new spectral problem contains a difficult non-trivial coefficient of the unknown function, but after a transformation, depending on the spectral parameter λ , this coefficient can be estimated as $O(\lambda^{-1/2})$. This makes it possible to get under some regularity conditions the location of eigenvalues of the initial operator and to present its resolvent by integral operators of simpler structure. These facts together with completeness of the eigen and associated functions of the operator, adjoint to the initial one, underlie the proof of the result formulated.

Key words: Riesz basis, resolvent, involution.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.1520.2014K).

References

1. Andreev A. A., Saushkin I. N. Ob analoge zadachi Triкоми dlia odnogo model'nogo uravneniia s involiutivnym otkloneniem v beskonechnoi oblasti [An analog of the Tricomi problem for a model equation with involutive deviation in an infinite domain]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2005, iss. 34, pp. 10–16 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu332.
2. Kornev V. V., Khromov A. P. Equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, iss. 10, pp. 1451–1469. DOI: 10.1070/SM2001v192n10ABEH000601.
3. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial-boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 783–786. DOI: 10.1134/S1064562411070088.
4. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. On riesz bases of eigenfunctions of integral operators with kernels discontinuous on diagonals. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 1, pp. 548–550. DOI: 10.1134/S1064562411050097.
5. Khromov A. P., Khromova G. V. On the convergence of the Lavrent'ev method for an integral equation of the first kind with involution. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2013, vol. 280, suppl. 1, pp. 88–97. DOI: 10.1134/S0081543813020089.
6. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz bases formed by root functions of a functional-differential equation with a reflection operator. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 203–212. DOI: 10.1134/S0012266108020079.
7. Shkalikov A. A. O bazisnosti sobstvennykh funktsii obyknovennykh differentsial'nykh operatorov s integral'nymi kraevymi usloviiami [On the basis of its own functions of ordinary differential operators with integral boundary conditions]. *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1, Mat., Mech.*, 1982, no. 6, pp. 12–21 (in Russian).
8. Shkalikov A. A. Kraevye zadachi dlia obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s parametrom v granichnykh usloviiaxh [Boundary problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions]. *Trudy Sem. I. G. Petrovskii*, 1983, vol. 9, pp. 190–229 (in Russian).
9. Baskakov A. G., Katsaran T. K. Spektral'nyi analiz integro-differentsial'nykh operatorov s nelokal'nymi kraevymi usloviiami [Spectral analysis of integral-differential operators with nonlocal boundary conditions]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 1988, vol. 24, no. 8, pp. 1424–1433 (in Russian).
10. Rapoport I. M. O nekotorykh asimptoticheskikh metodakh v teorii differentsial'nykh uravnenii [On some asymptotic methods in the theory of differential equations]. Kiev, Ukrainian Academy of Sciences, 1954 (in Russian).
11. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz Bases of Eigenfunctions of an Integral Operator with a



- Variable Limit of Integration. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, iss. 1, pp. 99–102. DOI: 10.1023/B:MATN.0000036745.53704.08.
12. Sedletsii A. M. Analytic Fourier transforms and exponential approximations. I. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 129, iss. 6, pp. 4251–4408. DOI: 10.1007/s10958-005-0349-y.
 13. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциального оператора с многоточечным краевым условием [The Riesz bases consisting of eigen and associated functions for a differential operator with multi-point difference boundary condition]. *Matematika. Mekhanika : sb. nauchn. tr.* [Mathematics. Mechanics : a collection of scientific works], Saratov, Saratov Univ. Press, 2004, iss. 6, pp. 80–82 (in Russian).
 14. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. New York, Ungar, 1967; Moscow, Nauka, 1969.
 15. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями [The Riesz bases consisting of eigen and associated functions for a differential-difference operator with integral boundary conditions]. *Matematika. Mekhanika : sb. nauchn. tr.* [Mathematics. Mechanics : a collection of scientific works], Saratov, Saratov Univ. Press, 2005, iss. 7, pp. 61–63 (in Russian).

УДК 517.927.25

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

И. С. Ломов

Ломов Игорь Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, и.о. заведующего кафедрой общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, lomov@cs.msu.su

Настоящий обзор содержит анализ результатов, полученных В. А. Ильиным и его учениками, по вопросу оценки скорости сходимости и равносходимости с тригонометрическим рядом Фурье спектральных разложений функций по корневым функциям линейных обыкновенных дифференциальных операторов как самосопряженных, так и несамосопряженных, заданных на конечном отрезке числовой прямой. Приведена первая теорема В. А. Ильина о равносходимости спектральных разложений для дифференциального оператора произвольного порядка. Формулируются теоремы о скорости равносходимости спектральных разложений сначала для произвольных самосопряженных расширений одномерного оператора Шредингера. При этом потенциал оператора может иметь любые особенности на границе интервала. Это позволяет получить новые результаты даже для всех классических ортогональных полиномов. Далее формулируются результаты для несамосопряженных операторов. Завершается обзор теоремой о скорости равносходимости для так называемых нагруженных дифференциальных операторов. Оценки скорости равносходимости разложений получены как на любом внутреннем компакте интервала, так и на всем интервале. Установлена зависимость оценки скорости равносходимости разложений на произвольном компакте основного интервала от расстояния этого компакта до границы интервала.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор, собственные значения, спектральные разложения, скорость сходимости, формула среднего значения.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418

Светлой памяти моего Учителя
Владимира Александровича Ильина
п о с в я щ а е т с я

Тригонометрические ряды Фурье, их свойства, условия сходимости исследованы весьма подробно. Многие математики, изучая спектральные разложения функций, занимались вопросом о равносходимости разложений функций по собственным функциям операторов и в тригонометрический ряд



Фурье (например, В. А. Стеклов, Ж. Биркгоф, А. Хаар, Я. Д. Тамаркин, М. Стоун, А. Ч. Титчмарш, Б. М. Левитан, В. А. Ильин, А. П. Хромов, Г. В. Радзиевский).

Первая теорема В. А. Ильина, открывающая большой цикл его работ по спектральным свойствам несамосопряженных дифференциальных операторов, была посвящена равносходимости указанных разложений (1975 г.) [1]. Доказано, что при определенных условиях на функцию и оператор оба разложения сходятся или расходятся одновременно (в равномерной метрике на любом компакте основного интервала). И хотя в этой теореме нет оценки скорости равносходимости разложений, чему посвящен обзор, сформулируем этот исходный результат В. А. Ильина.

Рассмотрим оператор L , действующий в $\mathcal{L}^2(G)$, порожденный дифференциальной операцией:

$$Lu = u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x)u^{(k)}, \quad x \in G, \quad n \in \mathbb{N},$$

где G — конечный интервал, полупрямая или прямая, $p_k(x) \in C^{k+1}$ на некотором подмножестве D основной области G , $k = \overline{0, n-2}$ ¹.

Пусть $\{u_k(x)\}, \{v_k(x)\}$ — некоторая биортогональная в $\mathcal{L}^2(G)$ система такая, что $u_k(x)$ являются на D регулярными решениями дифференциального уравнения для собственных или присоединенных функций оператора L , отвечающих собственным значениям λ_k , а $v_k(x)$ — аналогичные функции сопряженного оператора L^* , отвечающие собственным значениям $\bar{\lambda}_k$. Полнота $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ во всей области G , вообще говоря, не предполагается.

Вместо λ_k рассмотрим числа $\mu_k = ((-\lambda_k)(-1)^{n/2})^{1/n}$ при n четном, при n нечетном, $\mu_k = ((-i)\lambda_k)^{1/n}$ при $\text{Im } \lambda_k \geq 0$ и $\mu_k = ((-\lambda_k)(-1)^{n/2})^{1/n}$ при $\text{Im } \lambda_k < 0$ (выбор корня: $(re^{i\varphi})^{1/n} = r^{1/n}e^{i\varphi/n}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}$).

Рассмотрим частичные суммы биортогональных рядов:

$$\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\mu_k| < \lambda} (f, v_k)u_k(x), \quad \hat{\sigma}_\lambda(x, f) = \sum_{|\mu_k| < \lambda} (f, u_k)v_k(x),$$

составленные для любого вещественного числа $\lambda > 0$ и для произвольной функции² $f(x) \in \mathring{\mathcal{L}}^1(D)$. Эти суммы будут сравниваться с частичной суммой тригонометрического ряда Фурье, которая с точностью до слагаемого, равномерно стремящегося к нулю, равна

$$S_\lambda(x, f) = \frac{2}{\pi} \int_{x-R}^{x+R} \frac{\sin \lambda|x-y|}{|x-y|} f(y) dy,$$

где $R > 0$ — достаточно малое число.

Введем три определения.

Система $\{u_k\}$ образует на компакте $K \subset G$ след базиса в \mathcal{L}^2 в слабом смысле, если для любой $f(x) \in \mathring{\mathcal{L}}^2(K)$ разложение $\sigma_\lambda(x, f)$ слабо сходится в $\mathcal{L}^2(K)$ к функции f при $\lambda \rightarrow \infty$, т.е. $\forall f, g \in \mathring{\mathcal{L}}^2(K) : (\sigma_\lambda(x, f) - f, g) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$.

Система $\{u_k\}$ образует след базиса в \mathcal{L}^2 в слабом смысле на множестве D , если она образует след базиса в \mathcal{L}^2 в слабом смысле на любом компакте $K \subset D$.

Система $\{u_k\}$ образует на D след базиса Бесселя, если для любого компакта $K \subset D$ найдется постоянная $C(K)$, что для любой функции $f \in \mathring{\mathcal{L}}^2(K)$ справедливо $\sum_{k=1}^{\infty} |(f, u_k)|^2 \leq C(K)(f, f)$.

Обозначим через Π полосу $|\text{Im } z| \leq b = \text{const}$.

¹Требование гладкости C^{k+1} для $p_k(x)$ наложено, во-первых, для существования сопряженной операции L^* , во-вторых, это связано с методом доказательства формулы среднего Е. И. Моисеева. Вывод этой формулы с условием $p_k(x) \in \mathcal{L}^1(G)$ содержится в работе [2]. Если не рассматривать разложение по системе $\{v_k\}$, приведенное ниже, то и в работе В. А. Ильина можно не вводить оператор L^* и ограничиться требованием $p_k \in \mathcal{L}^1$.

² $\mathring{\mathcal{L}}^1(D)$ — класс всех функций из $\mathcal{L}^1(D)$, продолженных нулем за пределы D .



Теорема 1 (см. [1]). Пусть выполняются два условия: 1) $\mu_k \in \Pi$; 2) для любого $\lambda \geq 1$ равномерно относительно x на любом компакте $K \subset D$ справедливы оценки

$$\sum_{|\mu_k - \lambda| \leq 1} |u_k(x)|^2 = O(1), \quad \sum_{|\mu_k - \lambda| \leq 1} |v_k(x)|^2 = O(1).$$

Тогда для того чтобы для любой функции $f(x) \in \mathcal{L}^2(D)$ на любом компакте $K \subset D$ равномерно относительно x

$$\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f) \rightarrow 0, \quad \widehat{\sigma}_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f) \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

т. е. имеет место равномерная равносходимость разложений функции f , необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из систем $\{u_k\}$ или $\{v_k\}$ образовывала в D след базиса в \mathcal{L}^2 в слабом смысле.

Условие 2) можно заменить на одно из следующих двух условий:

2.1) справедлива оценка $\mu_k = M \cdot k + O(1)$, $M = \text{const}$;

2.2) каждая из систем $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ образует след базиса Бесселя.

Отметим, что для рассматриваемого оператора подходят все случаи регулярных (двухточечных) краевых условий. Доказанные утверждения впервые устанавливают локальный характер не только требований на разлагаемую функцию, но и требований на коэффициенты дифференциального оператора и функции биортогональной системы.

Насколько нам известно, вопрос об оценке близости частичных сумм рассматриваемых спектральных разложений функций был впервые рассмотрен В. А. Ильиным и И. Йо (1978 г.) [3]. Доказано, что для абсолютно непрерывной функции f разность частичных сумм двух спектральных разложений $\sigma_\lambda(x, f)$ и $S_\lambda(x, f)$, первое из которых отвечает произвольному неотрицательному расширению оператора $lu = -u'' + q(x)u$, а второе является разложением в тригонометрический ряд Фурье, имеет на любом компакте рассматриваемого интервала тот же порядок малости, что и последний член любого из этих разложений. При этом предполагалось лишь, что потенциал $q(x)$ принадлежит классу \mathcal{L}^r , $r > 1$, или \mathcal{L}_{loc}^2 на интервале $(0, 1)$.

Сформулируем точные утверждения. Пусть на интервале $G = (0, 1)$ задан формальный дифференциальный оператор:

$$lu = -u'' + q(x)u, \quad q(x) \in \mathcal{L}_{loc}^1(G). \quad (1)$$

Рассмотрим совершенно произвольное самосопряженное неотрицательное расширение L с точечным спектром оператора (1) (считаем, что потенциал $q(x)$ допускает такое расширение), через $\{u_n(x)\}$ обозначим полную ортонормированную систему собственных функций этого расширения, а через $\{\lambda_n\}$ — соответствующую систему неотрицательных собственных значений. Для любой абсолютно непрерывной на замкнутом интервале \overline{G} функции $f(x)$ составим частичные суммы указанного разложения:

$$\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{\sqrt{\lambda_n} < \lambda} f_n u_n(x), \quad f_n = (f, u_n).$$

Через $S_\lambda(x, f)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение функции $f(x)$ по собственным функциям оператора L_0 :

$$l_0 u(x) = u''(x), \quad x \in G, \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1), \quad u(x) \in C^2(\overline{G}).$$

Теорема 2 (см. [3]). Если функция $f(x) \in A(\overline{G})$, т. е. функция f абсолютно непрерывна на \overline{G} , $q(x) \in \mathcal{L}^r(G)$, $r > 1$, тогда справедлива следующая оценка скорости равносходимости разложений

$$\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (2)$$

равномерная относительно x на любом компакте K основного интервала G .



Оценка точна по порядку. Это, по-видимому, первая теорема об оценке близости частичных сумм разложений по собственным функциям и в тригонометрический ряд. Предшествовавшие авторы, изучавшие вопрос равносходимости указанных двух разложений (в правых частях у них стоит $o(1)$), использовали асимптотическое поведение собственных функций и собственных значений рассматриваемого оператора. Тем самым используемые в этих работах методы были привязаны к конкретному виду краевых условий. В работах В. А. Ильина (1975–1976 гг.) для установления равносходимости разложений впервые был применен метод, основанный лишь на использовании формулы среднего значения для оператора (1) и охватывающий случай произвольных краевых условий (даже и для несамосопряженных операторов).

В силу важности сформулированной теоремы для развития всего описываемого направления приведем основные этапы ее обоснования.

Для доказательства теоремы 2 получены следующие оценки (с некоторыми постоянными c):

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &\leq c, \quad x \in \bar{G}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \sum_{|\sqrt{\lambda_n} - \lambda| \leq 1} 1 &\leq c \quad (\forall \lambda > 0), \\ \sum_{|\sqrt{\lambda_n} - \lambda| \leq 1} \left| \int_{x_1}^{x_2} u_n(y) dy \right|^2 &\leq \frac{c}{\lambda^2}, \quad x_1, x_2 \in \bar{G}, \quad \forall \lambda \geq 1. \end{aligned}$$

Для доказательства этих оценок и далее используется формула среднего значения для оператора (1):

$$\frac{u_n(x+t) + u_n(x-t)}{2} = u_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} \int_{x-t}^{x+t} q(\xi) u_n(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} (|x-\xi| - t) dt,$$

$(x-t, x+t) \subset G, n = 1, 2, \dots$ (формула среднего значения Титчмарша, получается интегрированием по частям после использования равенства $-u_n'' + q(x)u_n(x) = \lambda_n u_n(x)$ в интегральном слагаемом).

Обозначим через $\Theta(x, y, \lambda)$ спектральную функцию оператора L :

$$\Theta(x, y, \lambda) = \sum_{\sqrt{\lambda_n} < \lambda} u_n(x) u_n(y), \quad x, y \in \bar{G}.$$

Фиксируем любой отрезок $K = [a, b] \subset G$, произвольное число R_0 , для которого $0 < 2R_0 < \varrho(K, \partial G)$. Пусть $R \in [R_0, 2R_0]$, введем вспомогательную функцию:

$$v_R(r, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \lambda r}{r}, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r \geq R, \end{cases} \quad \lambda > 0,$$

$r = |x - y|, x \in K, y \in G$ (срезка модифицированного ядра Дирихле). Эта функция усредняется по R :

$$S_{R_0} v_R = \frac{1}{R_0} \int_{R_0}^{2R_0} v_R(r, \lambda) dR,$$

полученное выражение разлагается в ряд по системе $\{u_n(x)\}$ и устанавливается основная оценка:

$$\int_0^s (S_{R_0} v_R(|x-y|, \lambda) - \Theta(x, y, \lambda)) dy = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad s \in \bar{G}, \quad \lambda \geq 1.$$

Далее доказывается оценка теоремы 2 и доказывается окончательность оценки теоремы.



Теорема 3 (см. [3]). Если функция $f(x) \in A(\overline{G})$ и имеет на этом интервале компактный носитель, $q(x) \in \mathcal{L}_{loc}^2(G)$, тогда справедлива следующая оценка скорости равномерности разложений:

$$\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (3)$$

равномерно относительно x на любом компакте K основного интервала G .

Оценка точна по порядку.

Отметим, что теорема 3 охватывает случай собственных функций общего оператора Штурма – Лиувилля с весовым множителем $\varrho(x)$, т.е. случай собственных функций, удовлетворяющих уравнению $-[p(x)u']' = \lambda\varrho(x)u$, при условии, что $p(x), \varrho(x)$ два раза непрерывно дифференцируемы и строго положительны только на любом компакте интервала G , который в этом случае можно считать и бесконечным. Достаточно заметить, что в результате известной замены этот общий оператор приведет к оператору $-u'' + q(x)u$ с потенциалом $q(x) \in \mathcal{L}_{loc}^2(G)$. Это позволяет получить новые результаты для всех классических ортогональных полиномов (Чебышева, Якоби, Лежандра, Лагерра, Эрмита и др.).

Результат теоремы 3 перенесен В. Е. Волковым и И. Йо (1986 г.) [4] на несамосопряженный оператор Шредингера с комплекснозначным потенциалом из класса \mathcal{L}_{loc}^2 , получена точная по порядку оценка (3). Результат теоремы 2 перенесен В. А. Ильиным (1991 г.) [5–8] и Е. И. Никольской (1992 г.) [9] на случай произвольного суммируемого потенциала, скалярного или матричного. Во всех случаях были получены оценки скорости равномерной равномерности на *любом компакте* $K \subset G$. Такие же локальные оценки, но в интегральной метрике, получены В. М. Курбановым [10] для широкого класса обыкновенных дифференциальных операторов.

Системы функций, по которым ведется разложение, могут удовлетворять разным краевым условиям (либо не удовлетворять никаким краевым условиям без спектрального параметра, как системы экспонент), поэтому равномерности соответствующих рядов на всем отрезке \overline{G} в общем случае не может быть. Некоторые практические задачи, тем не менее, требуют оценки скорости равномерности разложений или оценки порядка приближения функций спектральными разложениями, именно на всем G , причем оценку достаточно установить в интегральной метрике. Вслед за работами В. А. Ильина, автор получал оценки скорости равномерности соответствующих разложений на *всем интервале* G в интегральной метрике \mathcal{L}^p .

Для функции ограниченной вариации для самосопряженного оператора оценка была получена в 1979 г. (подробнее см. [11]). Сформулируем основное утверждение. Объект исследования тот же, что в теоремах 2, 3, потенциал $q(x)$ в (1) из класса $\mathcal{L}^r(G), r > 1$. Фиксируем произвольное число $p \in [2, \infty)$ и пусть q (без аргумента) – сопряженное число: $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Теорема 4 (см. [11]). 1. Пусть функция $f(x) \in V(G)$, т.е. имеет ограниченное изменение на отрезке \overline{G} . Тогда для любого числа $\lambda \geq 3$ справедлива оценка

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{\mathcal{L}^p(G)} \leq c \|f\|_{V(G)} \frac{\ln \lambda}{\lambda^{1/p}}.$$

Если при этом $f(0) = f(1)$, то

$$\|f - \sigma_\lambda(x, f)\|_{\mathcal{L}^2(G)} \leq c \|f\|_{V(G)} \frac{\ln \lambda}{\lambda^{1/2}}.$$

Постоянные в оценках не зависят от f и λ .

2. Если $f(x) \in \mathcal{L}^1(G)$ и при некотором числе $\alpha \in (\frac{1}{q}, 1]$ имеет место оценка $|f_n| \leq c_1(\sqrt{\lambda_n})^{-\alpha}$ и такая же оценка имеет место для тригонометрических коэффициентов Фурье, то

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{\mathcal{L}^p(G)} \leq c_2 \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\alpha-1/q}}.$$

Этот результат перенесен на несамосопряженный оператор Шредингера в 1995 г. и затем на оператор Штурма – Лиувилля с негладким коэффициентом $p_1(x)$ при первой производной в дифференциальной операции в 1996 г. [12–14]. Для произвольного оператора четного порядка результат был получен



в 2001 г. [15–17] и в 2010 г. — для операторов нечетного порядка [18]. В 2010 г. [19] установлена оценка зависимости скорости локальной равносходимости разложений от расстояния внутреннего компакта до границы интервала G . А. С. Марков (2012 г.) перенес эти результаты на системы дифференциальных уравнений, что завершило исследование вопроса для классических дифференциальных операций.

Кратко прокомментируем результаты для оператора четного порядка. В работах автора 1998–2005 гг. исследован вопрос о скорости сходимости в интегральной и равномерной метриках спектральных разложений функций по собственным и присоединенным (корневым) функциям регулярных дифференциальных операторов L второго и произвольного четного порядков, порожденных дифференциальной операцией:

$$lu(x) = u^{(2n)}(x) + \sum_{k=1}^{2n} p_k(x)u^{(2n-k)}(x), \quad x \in G = (0, 1), \quad n \geq 1,$$

на множестве гладких функций $W_1^{2n}(G)$, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до $(2n - 1)$ -го порядка на отрезке $\bar{G} = [0, 1]$. На коэффициенты накладывались условия

$$p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G), \quad s > 1, \quad p_k(x) \in \mathcal{L}^1(G), \quad k = 2, 3, \dots, 2n. \quad (4)$$

В качестве краевых форм в краевых условиях могли быть любые линейные непрерывные функционалы: ограничения на них накладывались в терминах условий на собственные значения и корневые функции оператора L (условия Ильина, см. ниже). В целом развивается спектральный метод В. А. Ильина. Сопряженный оператор L^* , структура которого может быть весьма громоздкой, для доказательства утверждений не привлекался. При этом система функций, биортогонально сопряженная с системой корневых функций оператора L , могла быть не связанной с сопряженным оператором. Полученные оценки здесь не выписываем — их можно получить из оценок следующей теоремы 5, если положить в них все числа r_j равными нулю.

Известно, что наличие у дифференциального оператора интегрального краевого условия с абсолютно непрерывной мерой Стильбеса или наличие условий сопряжения в некоторых точках G , приводит к необходимости рассматривать так называемые нагруженные дифференциальные операции для сопряженных операторов. На такие операторы результаты об оценках скорости равносходимости разложений были перенесены в 2014 г. [20]. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Примеры. Предварим постановку задачи несколькими примерами, поясняющими причину нашего интереса к так называемым нагруженным операторам.

Пусть $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \nu(x)$ — вещественные интегрируемые на отрезке \bar{G} функции. Рассмотрим прямые и сопряженные к ним задачи (сопряженные операторы не вводим).

1. Оператор L :

$$lu(x) = u''(x) + \alpha(x)u(0) + \beta(x)u(1), \quad u'(0) = u'(1) = 0, \quad u \in W_1^2(G);$$

сопряженная задача L^* (получаем интегрированием по частям, используя формулу Лагранжа, $v \in W_1^2(G)$):

$$l^*v(x) = v''(x), \quad \int_0^1 \beta(x)v(x) dx - v'(1) = 0, \quad \int_0^1 \alpha(x)v(x) dx + v'(0) = 0.$$

2. Обе задачи могут содержать интегральные краевые условия и, тем самым, обе операции l и l^* будут нагруженными.

Оператор L ($u \in W_1^2(G)$):

$$lu(x) = u''(x) + \alpha(x)u(0) + \beta(x)u(1), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 \gamma(x)u(x) dx;$$



сопряженная задача ($v \in W_1^2(G)$):

$$l^*v(x) = v''(x) + \gamma(x)v(1), \quad \int_0^1 \beta(x)v(x) dx - v'(1) = 0, \quad \int_0^1 \alpha(x)v(x) dx + v'(0) = 0.$$

3. «Нагруженные» слагаемые со значениями во внутренних точках интервала G в операции l могут быть связаны с наличием разрывов функций или их производных в области определения сопряженной задачи (или с условиями сопряжения во внутренних точках отрезка \overline{G}).

Оператор L :

$$lu(x) = u''(x) + \alpha(x)u\left(\frac{1}{2}\right), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad u \in W_1^2(G);$$

сопряженная задача:

$$l^*v(x) = v''(x), \quad v(0) = v(1) = 0, \quad v\left[\frac{1}{2}\right] = 0, \quad v'\left[\frac{1}{2}\right] + \int_0^1 \alpha(x)v(x) dx = 0,$$

где обозначено $v\left[\frac{1}{2}\right] = v\left(\frac{1}{2} + 0\right) - v\left(\frac{1}{2} - 0\right)$ — скачок функции $v(x)$ в точке $x = 1/2$. Область определения сопряженной задачи — кусочно-гладкие функции ($v \in C(\overline{G}) \cap [W_1^2(0, \frac{1}{2}) \cup W_1^2(\frac{1}{2}, 1)]$).

4. Очевидно, внутренних фиксированных точек в операции l может быть больше одной. Оператор L :

$$lu(x) = u''(x) + \alpha(x)u\left(\frac{1}{4}\right) + \beta(x)u\left(\frac{1}{2}\right) + u(1),$$

$$u(0) = \int_0^1 \gamma(x)u(x) dx, \quad u'(1) = \int_0^1 \nu(x)u(x) dx, \quad u \in W_1^2(G);$$

сопряженная задача:

$$l^*v = v''(x) + \gamma(x)v'(0) + \nu(x)v(1), \quad v(0) = 0, \quad v'(1) = \int_0^1 \nu(x) dx,$$

$$v\left[\frac{1}{4}\right] = v\left[\frac{1}{2}\right] = 0, \quad v'\left[\frac{1}{4}\right] + \int_0^1 \alpha(x)v(x) dx = 0, \quad v'\left[\frac{1}{2}\right] + \int_0^1 \beta(x)v(x) dx = 0.$$

Задача рассматривается на множестве кусочно-гладких функций.

Имеется и пример оператора L , в котором дифференциальная операция l содержит проекции функции на счетное число точек.

Приведенные примеры показывают, что «локальные» дифференциальные операции (в которых все функции рассматриваются в одной точке x) не охватывают всех возможных случаев и результаты о сходимости биортогональных разложений функций следует перенести на «нелокальные», будем называть их «нагруженные», дифференциальные операторы. Если говорить о приложениях, то отметим, что такого типа операторы возникают, например, в теории фильтрации жидкостей (А. М. Нахушев, 2012) [21].

Постановка задачи. Пусть $T = \{\tau_l\}_{l=0}^\infty$ — произвольное разбиение отрезка \overline{G} , $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1$, $\tau_i \neq \tau_j$, при $i \neq j$, $i, j \geq 0$. Каждой точке $\tau_l \in T$, $l \geq 0$, поставим в соответствие функции $r_{jl}(x) \in \mathcal{L}^1(G)$, $j = 2, \dots, 2n$. Пусть ряды $r_j(x) = \sum_{l=0}^\infty |r_{jl}(x)|$, $j = 2, \dots, 2n$, сходятся почти всюду на \overline{G} и для функций $r_j(x)$ справедливо

$$r_j(x) \in \mathcal{L}^1(G), \quad j = 2, 3, \dots, 2n. \tag{5}$$

Рассмотрим оператор L , порожденный дифференциальной операцией:

$$lu(x) = u^{(2n)}(x) + p_1(x)u^{(2n-1)}(x) + \sum_{j=2}^{2n} \left[p_j(x)u^{(2n-j)}(x) + \sum_{l=0}^\infty r_{jl}(x)u^{(2n-j)}(\tau_l) \right], \tag{6}$$

$x \in G$, $n \geq 1$, на множестве функций $D_{2n} = W_1^{2n}(G)$.



Собственные и присоединенные функции оператора L определим в обобщенном (по Ильину) смысле. Это позволит рассматривать для оператора L краевые условия любого вида (в том числе и интегральные, и содержащие спектральный параметр), либо рассматривать обычную систему экспонент (в этом случае все коэффициенты в (6) следует положить равными нулю).

Под *собственной функцией* оператора L , отвечающей значению $\lambda \in \mathbb{C}$ спектрального параметра, будем понимать любую не равную тождественно нулю функцию $\overset{\circ}{u}(x) \in D_{2n}$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l \overset{\circ}{u}(x) - \omega \lambda^{2n} \overset{\circ}{u}(x) = 0$, $\omega = (-1)^n$.

Под *присоединенной функцией* порядка m , $m = 1, 2, \dots, m_0$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{u}$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x) \in D_{2n}$, которая почти всюду в G удовлетворяет уравнению $l \overset{m}{u}(x) - \omega \lambda^{2n} \overset{m}{u}(x) = \mu_0 \overset{m-1}{u}(x)$. Здесь либо $\mu_0 = 1$ (задача 1), либо $\mu_0 = \nu_0 \lambda^{2n-1}$ при $|\lambda| \geq 1$, $\mu_0 = \nu_0$ при $|\lambda| < 1$, $\nu_0 = \text{const} \neq 0$ (задача 2). Будем считать, что спектральный параметр

$$\lambda \in S = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda \geq 0, \arg \lambda \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n} \right], \exists \gamma_0 > 0 : |\text{Im } \lambda| \leq \gamma_0 \right\}.$$

Фиксируем некоторые числа $r \in [1, \infty)$ и $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L , отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие следующим трем *условиям Ильина (условия А)*:

- 1) система $\{u_k(x)\}$ замкнута и минимальна в пространстве $\mathcal{L}^r(G)$;
- 2) найдется постоянная $c_1 > 0$ такая, что

$$\lambda_k \in S, \quad \sum_{0 \leq |\lambda_k| - \lambda \leq 1} 1 \leq c_1, \quad \forall \lambda \geq 0;$$

- 3) найдется постоянная $c_2 > 0$ такая, что

$$\|u_k\|_r \cdot \|v_k\|_{r'} \leq c_2, \quad \forall k,$$

где $\{v_k(x)\}$ — биортогонально сопряженная с $\{u_k(x)\}$ система функций: $v_k \in \mathcal{L}^{r'}(G)$, $(u_k, v_j) = \delta_{kj}$, $\forall k, j \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_r$ — обозначение нормы в пространстве $\mathcal{L}^r(G)$, $r^{-1} + (r')^{-1} = 1$. Будем также обозначать $\|f\|_{r,E}$ норму функции $f(x)$ в пространстве $\mathcal{L}^r(E)$, $E \neq G$, $r \in [1, \infty)$.

Заметим, что для проверки второго и третьего условий А достаточно знать главные члены асимптотик для величин λ_k , u_k , v_k .

Присоединенные функции выбираем так, что в корневых цепочках справедлива «антиаприорная» оценка:

$$\| \overset{m-1}{u}_k \|_r \leq c \alpha_\lambda \| \overset{m}{u}_k \|_r, \quad c = \text{const} > 0, \quad m = 1, 2, \dots, m_k, \quad (7)$$

c не зависит от λ_k , $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{2n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Для оператора второго порядка ($n = 1$) эта оценка всегда выполняется при выполнении условия $|\text{Im } \lambda_k| \leq \gamma_0$; для $n > 1$ такую систему всегда можно построить.

Пусть, кроме того,

$$\|u_k\|_\infty \leq c \|u_k\|_r, \quad \forall k, \quad c = \text{const} > 0. \quad (8)$$

Для $n = 1$ эта оценка также всегда верна при выписанных условиях; для $n > 1$ это условие означает, что корневые функции содержат осциллирующие составляющие $\exp(\pm i \lambda_k x)$, $\text{Re } \lambda_k \neq 0$.

Для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{L}^r(G)$ составим частичные суммы $\sigma_\lambda(x, f)$ биортогонального разложения по системе $\{u_k(x)\}$.

Положим далее, что системы $\{u_k(x), v_k(x)\}$ и функция $f(x) \in \mathcal{L}^r(G)$ таковы, что с некоторой постоянной $\nu > 0$ выполняется условие

$$\hat{f}_k = f_k \cdot \|v_k\|_{r'}^{-1} = O(|\lambda_k|^{-\nu}), \quad |\lambda_k| \geq 1. \quad (9)$$

Предполагаем, что для оператора L_0 в последнем условии показатель $\nu_0 \geq \nu$, т.е. тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют асимптотическому соотношению (при этом



нормирующий множитель можно убрать, так как тригонометрическая система является почти нормированной в $\mathcal{L}^{r'}(G)$.

В терминах только функции $f(x)$ это условие записать нельзя (в отличие от тригонометрической системы функций).

Для произвольного отрезка $K \subset G$ обозначим $\eta = \rho(K, \partial G) > 0$ — расстояние до границы интервала G .

Зафиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$. Основная задача состоит в получении оценки малости при $\lambda \rightarrow +\infty$ для величины $\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p, K}$ для произвольного отрезка $K \subset G$ и для величины $\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_p$. Из этих оценок будет следовать, в частности, что оба разложения сходятся или расходятся в метрике \mathcal{L}^p одновременно. Из установленных оценок следует, что на скорость равномерности разложений влияют следующие характеристики задачи: гладкость разлагаемой функции $f(x)$, наличие коэффициентов $p_k(x)$, $k \geq 1$, в операции l , наличие бесконечного числа присоединенных функций в системе $\{u_k\}$, гладкость коэффициента $p_1(x)$, в частности, степень его суммируемости s , свойства функций $v_k(x)$, структура краевых условий рассматриваемой задачи, параметр η . Здесь мы выясним характер зависимости оценок скорости равномерности σ_λ и S_λ от коэффициентов $r_{ji}(x)$ операции l .

Основная теорема. Сформулируем основной результат.

Теорема 5 (см. [20]). Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются перечисленные условия (4), (5), (7)–(9) и условия A . Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p, K} \leq & \frac{c}{\eta} \left[\max \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu} \right) + \|p_1\|_s \max \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=2}^{2n} (\|p_j\|_1 + \|r_j\|_1) \max \left(\frac{\ln \lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}, \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^{\nu+1}} \right) + \frac{n_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

и аналогичная оценка на всем отрезке \overline{G}

$$\begin{aligned} \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_p \leq & c \left[\max \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\delta}}, \frac{\ln^{1/\delta} \lambda}{\lambda} \Big|_{\nu=1+1/\delta} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\|p_1\|_s}{\lambda^{1/s'}} + \sum_{j=2}^{2n} (\|p_j\|_1 + \|r_j\|_1) \max \left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{\ln \lambda}{\lambda} \right) + \frac{n_0 \ln \lambda}{\lambda^\nu} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где $\delta = \min(2, q, s)$, $q = p/(p-1)$, постоянные $c > 0$ в оценках (10), (11) не зависят от λ , число $n_0 = 1$, если общее число присоединенных функций в системе $\{u_k(x)\}$ бесконечно, и $n_0 = 0$, в противном случае.

Замечание. Мы не упрощали правых частей оценок (10), (11) для того чтобы было ясно, какие параметры задачи и каким образом влияют на итоговую оценку скорости равномерности. Так, из (10) следует, что наличие в дифференциальной операции (6) коэффициентов p_j, r_{ji} с номерами j , большими или равными двум, и наличие в системе корневых функций бесконечного числа присоединенных функций, никак не влияют на итоговую оценку.

Как следствие, из второй оценки теоремы 5 имеем

Следствие. Пусть $f(x) \in V(G)$ — функция с ограниченным на \overline{G} изменением, $p, s \geq 2, \nu = 1$, выполняются условия (4), (5), (7), (8) и условия A . Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедливо соотношение

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - f(x)\|_p \leq \frac{c}{\lambda^{1/p}}, \quad (12)$$

что совпадает с точной оценкой скорости сходимости тригонометрических рядов Фурье для функций с ограниченным изменением.



Приведем пример нагруженного дифференциального оператора второго порядка, для которого выполняются все условия теоремы 5 [22].

Пример. Оператор L :

$$lu(x) = u''(x) - u(0) \cos(\pi x), \quad x \in G, \quad u'(0) = u'(1) = 0, \quad u \in W_1^2(G).$$

Из теоремы 5 получим следующее утверждение для этого примера.

Утверждение. Пусть выполняется условие (9) на коэффициенты Фурье с некоторым показателем ν . Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p,K} &\leq \frac{c}{\eta} \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln \lambda}{\lambda^\nu}\right), \\ \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_p &\leq c \max\left(\frac{\ln \lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\delta}}\right), \end{aligned}$$

$\delta = \min(2, q, s)$. Если $f(x) \in V(G)$, то $\nu = 1$ в (9) и при $p, s \geq 2$ справедлива оценка (12) скорости сходимости биортогонального разложения к функции $f(x)$.

Развить метод В. А. Ильина для получения оценок скорости равномерности разложений на всем интервале G позволило применение следующего аппарата.

1. Использование теоремы Рисса (обобщающую теорему Рисса – Фишера на пространства \mathcal{L}^p) для ортонормированных систем в случае самосопряженных операторов и обобщение этой теоремы [12] на биортогональные системы для несамосопряженных операторов; применение условия (9).

2. Кроме указанной ранее срезки $v_R(r, \lambda)$, используются «смещенные» ядра Дирихле. Выберем произвольный отрезок $K_1 = [a, b] \subset G$, положим $t = (b - a)/4$. «Смещенные» ядра используются для получения оценок разности $\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)$ в приграничной зоне — на отрезках $[0, a]$ и $[b, 1]$. Рассмотрим случай отрезка $[0, a]$, второй случай исследуется по той же схеме.

Итак, пусть $x \in [0, a]$. Положим $x = z - t$, тогда $z \in K = [t, a+t] \subset G$. Выберем произвольное число $R_0 \in (0, t/2)$ и рассмотрим новую переменную $R \in [R_0/2, R_0]$. Введем вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} v_{1\lambda}(\varrho_1, R) &= \begin{cases} \frac{\sin \lambda \varrho_1}{\pi \varrho_1}, & \varrho_1 \in [0, R], \varrho_1 = z + t - y, z \in K, y \in \overline{G}, \\ 0, & \varrho_1 < 0, \varrho_1 > R, \end{cases} \\ v_{2\lambda}(\varrho_2, R) &= \begin{cases} \frac{\sin \lambda \varrho_2}{\pi \varrho_2}, & \varrho_2 \in [-R, 0], \varrho_2 = z - t - y, \\ 0, & \varrho_2 < -R, \varrho_2 > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

и рассмотрим функцию $v_0(z, y) = 2S_0[v_{1\lambda}(\varrho_1, R) + v_{2\lambda}(\varrho_2, R)]$, $z \in K$, $y \in \overline{G}$, где $S_0[\cdot]$ — операция усреднения. Функция $v_0(x, y)$ разлагается в биортогональный ряд и сравнивается со спектральной функцией оператора.

3. Для оператора второго порядка использовалась формула среднего Титчмарша, а для операторов высокого порядка — обобщение локальной формулы среднего Е. И. Моисеева [2].

В настоящее время метод распространяется на операторы, определенные на множестве негладких функций. Оценки скорости равномерности получены и для другого вида асимптотик коэффициентов Фурье (9) — в правой части могут стоять логарифмы [23].

В заключение отметим, что оценки скорости локальной равномерности биортогональных разложений функций с их тригонометрическими рядами Фурье для различных дифференциальных операторов получали Киевские математики [24] и Саратовские математики — представители крупной научной школы А. П. Хромова (см. обзоры [25, 26]). В настоящее время этот вопрос исследуется для операторов Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами представителями крупной научной школы А. Г. Костюченко и А. А. Шкаликowa – И. В. Садовничей [27], А. М. Савчуком и их учениками.



Вопрос о равномерности разложений по собственным и присоединенным функциям и в тригонометрический ряд Фурье рассматривается также для интегральных и интегродифференциальных операторов. Приведем в этой связи основополагающую статью А. П. Хромова [28]. В работе приведен обзор результатов, а также доказывается теорема о равномерности для специального интегродифференциального оператора с интегральными краевыми условиями. Показано, что интегральные, дифференциальные и интегродифференциальные операторы можно свести к такого рода интегродифференциальному оператору. Таким образом, теорема о равномерности Я. Д. Тамаркина для дифференциальных операторов обобщена на все перечисленные виды операторов.

Отметим недавние работы А. П. Хромова, также основополагающие, по обоснованию метода Фурье решения широкого класса смешанных задач для нестационарных уравнений (см., напр., [29, 30]). В этих работах, используя идеи академика А. Н. Крылова, проводится обоснование метода Фурье при минимальных требованиях на исходные данные задачи.

Автор выражает искреннюю признательность А. П. Хромову за внимание к этому обзору и полезные обсуждения результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-12472-офи-м).

Библиографический список

1. Ильин В. А. О равномерной равномерности разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // ДАН СССР. 1975. Т. 223, № 3. С. 548–551.
2. Ломов И. С. Формула среднего значения Е. И. Моисеева для обыкновенных дифференциальных операторов четного порядка с негладкими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1046–1057.
3. Ильин В. А., Йо И. Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма – Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1175–1193.
4. Волков В. Е., Йо И. Оценка разности частичных сумм спектральных разложений, отвечающих двум операторам Шредингера // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1865–1876.
5. Ильин В. А. Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шредингера с комплексным потенциалом из класса \mathcal{L}^1 // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 577–597.
6. Ильин В. А. Покомпонентная равномерность с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 11. С. 1862–1879.
7. Ильин В. А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М. : Наука, 1991. 368 с.
8. Ильин В. А. Избранные труды : в 2 т. Т. 2. М. : МАКС Пресс, 2008. 692 с.
9. Никольская Е. И. Оценка разности между частичными суммами разложений абсолютно непрерывной функции по корневым функциям, отвечающим двум одномерным операторам Шредингера с комплексными потенциалами из класса \mathcal{L}^1 // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 4. С. 598–612.
10. Курбанов В. М. О скорости равномерности спектральных разложений // ДАН. 1999. Т. 365, № 4. С. 444–449.
11. Ломов И. С. О скорости равномерности рядов Фурье по собственным функциям операторов Штурма – Лиувилля в интегральной метрике // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 9. С. 1480–1493.
12. Ломов И. С. Коэффициентные условия сходимости в $L_p(0, 1)$ биортогональных разложений функций // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 31–39.
13. Ломов И. С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равномерности спектральных разложений. I // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 5. С. 619–628.
14. Ломов И. С. О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равномерности спектральных разложений. II // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1066–1077.
15. Ломов И. С. О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. I // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 3. С. 328–342.



16. Ломов И. С. О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. II // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 648–660.
17. Ломов И. С. Сходимость биортогональных разложений функций на отрезке для дифференциальных операторов высокого порядка // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 5. С. 632–646.
18. Афонин С. В., Ломов И. С. О сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами нечетного порядка с негладкими коэффициентами // ДАН. 2010. Т. 431, № 2. С. 151–153.
19. Ломов И. С. Зависимость оценок скорости локальной сходимости спектральных разложений от расстояния внутреннего компакта до границы // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 10. С. 1409–1420.
20. Ломов И. С. Нагруженные дифференциальные операторы : сходимость спектральных разложений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 8. С. 1077–1086.
21. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012. 232 с.
22. Ломов И. С., Чернов В. В. Исследование спектральных свойств одного нагруженного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 7. С. 861–865.
23. Ломов И. С., Марков А. С. Оценки скорости локальной сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов четного порядка // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 557–563.
24. Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. Равносходимость рядов по собственным функциям обыкновенных функционально-дифференциальных операторов // ДАН. 1991. Т. 316, № 2. С. 265–270.
25. Хромов А. П. Спектральный анализ дифференциальных операторов на конечном интервале // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1691–1696.
26. Minkin A. M. Equiconvergence theorems for differential operators // J. Math. Sci. 1999. Vol. 96, № 6. P. 3631–3715. DOI: 10.1007/BF02172664.
27. Садовничая И. В. Равносходимость в пространствах Соболева и Гельдера разложений по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // ДАН. 2011. Т. 437, № 2. С. 162–163.
28. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114 (156), № 3. С. 378–405.
29. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // ДАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: 10.7868/S0869565214260041.
30. Хромов А. П. О классическом решении одной смешанной задачи для волнового уравнения // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 56–66.

Estimates of Speed of Convergence and Equiconvergence of Spectral Decomposition of Ordinary Differential Operators

I. S. Lomov

Lomov Igor Sergeevich, Moscow State University, Lenin mountains, 119992, Moscow, Russia, lomov@cs.msu.ru

The present review contains results of V. A. Il'in and his pupils concerning an assessment of speed of convergence and equiconvergence with a trigonometrical series of Fourier of spectral decomposition of functions on root functions of linear ordinary differential operators both self-conjugate, and not self-conjugate, set on a final piece of a numerical straight line. The first theorem of V. A. Il'in of equiconvergence of spectral decomposition for the differential operator of any order is provided. Theorems of the speed of equiconvergence of spectral decomposition at first for any self-conjugate expansions of the one-dimensional operator Schrodinger are formulated. Thus the potential of the operator can have any features on interval border. This allows us to receive new results even for all classical orthogonal polynomials. Further results for not self-conjugate operators are formulated. The review for the so-called loaded differential operators comes to the end with the theorem of equiconvergence speed. Estimates of speed of equiconvergence of decomposition are received both on any internal compact of an interval, and on the whole interval. Dependence of an assessment of speed of equiconvergence of decomposition on any compact of the main interval from distance of this compact to interval border is established.

Key words: ordinary differential operator, eigenvalues, spectral decomposition, convergence speed, formula of average value.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-12472).



References

1. Il'in V. A. The uniform equiconvergence of expansions in the eigen- and associated functions of a nonselfadjoint ordinary differential operator and in a trigonometric Fourier series. *Soviet Math. Dokl.*, 1975, vol. 223, no. 3, pp. 548–551.
2. Lomov I. S. A Moiseev mean formula for even-order differential operators with nonsmooth coefficients. *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 8, pp. 1054–1066.
3. Il'in V. A., Joo I. Estimation of the difference of partial sums of expansions corresponding to two arbitrary nonnegative selfadjoint extensions of two operators of Sturm–Liouville. *Differential Equations*, 1979, vol. 15, no. 7, pp. 1175–1193.
4. Volkov V. E., Joo I. Assessment of a difference of the partial sums spectral the decomposition answering to two operators of Schrodinger. *Differential Equations*, 1986, vol. 22, no. 11, pp. 1865–1876.
5. Il'in V. A. Equiconvergence with a trigonometric series of expansions in root functions of the Schrodinger operator with an arbitrary summable complex-valued potential. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 4, pp. 577–597.
6. Il'in V. A. Pokomponentny equiconvergence with the trigonometrical series of decomposition on root vector functions of the operator Schrodinger with matrix non-Hermitian potential, which all elements only are summarized. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 11, pp. 1862–1879.
7. Il'in V. A. *Spektral'naya teoriya differentsialnykh operatorov. Samospryazhennye differentsialnye operatory* [Spectral theory of differential operators. Selfadjoint differential operators]. Moscow, Nauka, 1991, 368 p. (in Russian).
8. Il'in V. A. *Izbrannyye trudy. Vol. 2.* [Chosen works]. Moscow, MAKS Press, 2008, 692 p. (in Russian).
9. Nikol'skaya E. I. Difference assessment between the partial sums decomposition of absolutely continuous function on root functions, to the answering two one-dimensional operators of Schrodinger with the complex potentials from class \mathcal{L}^1 are summarized. *Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 4, pp. 598–612.
10. Kurbanov V. M. About the speed of equiconvergence of spectral decompositions. *Soviet Math. Dokl.*, 1999, vol. 365, no. 4, pp. 444–449.
11. Lomov I. S. On speed of equiconvergence of Fourier series on eigenfunctions of operators of Sturm–Liouville in the integral metrics. *Differential Equations*, 1982, vol. 18, no. 9, pp. 1480–1483.
12. Lomov I. S. A coefficient condition for the convergence of biorthogonal expansions of functions in $\mathcal{L}^p(0, 1)$. *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 1, pp. 29–38.
13. Lomov I. S. The influence of the integrability degree of coefficients of differential operators on the equiconvergence rate of spectral expansions. I. *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 5, pp. 621–630. DOI: 0012-2661/98/3405-0621.
14. Lomov I. S. The influence of the integrability degree of coefficients of differential operators on the equiconvergence rate of spectral expansions. II. *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 8, pp. 1070–1081. DOI: 0012-2661/98/3408-1070.
15. Lomov I. S. The local convergence of biorthogonal series related to differential operators with nonsmooth coefficients. I. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 351–366. DOI: 10.1023/A:1019242515472.
16. Lomov I. S. The local convergence of biorthogonal series related to differential operators with nonsmooth coefficients. II. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 5, pp. 680–694. DOI: 10.1023/A:1019268615898.
17. Lomov I. S. Convergence of biorthogonal expansions of functions on an interval for higher-order differential operators. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 5, pp. 660–676. DOI: 10.1007/S10625-005-0201-7.
18. Afonin S. B., Lomov I. S. On the convergence of biorthogonal series related to odd-order differential operators with nonsmooth coefficients. *Doklady Math.*, 2010, vol. 81, no. 2, pp. 190–192. DOI: 10.1134/S1064562410020079.
19. Lomov I. S. Dependence of estimates of the local convergence rate of special expansions on the distance from an interior compact set to the boundary. *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 10, pp. 1415–1426. DOI: 10.1134/S0012266110100058.
20. Lomov I. S. Loaded differential operators : convergence of spectral expansions. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1070–1079. DOI: 10.1134/S0012266114080060.
21. Nakhushhev A. M. *Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniye* [The loaded equations and their application]. Moscow, Nauka, 2012, 232 p. (in Russian).
22. Lomov I. S., Chernov V. V. Study of spectral properties of a loaded second-order differential operator. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 861–865. DOI: 10.1134/S0012266115070046.
23. Lomov I. S., Markov A.S. Estimates of the local convergence rate of spectral expansions for even-order differential operators. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 15, pp. 529–535. DOI: 10.1134/S0012266113050017.
24. Gomilko A. M., Radzievskiy G.V. Equiconvergence of ranks on eigenfunctions of the ordinary functional and differential operators. *Soviet Math. Dokl.*, 1991, vol. 316, no. 2, pp. 265–270.



25. Khromov A. P. The spectral analysis of differential operators on final interval. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 10, pp. 1691–1696.
26. Minkin A. M. Equiconvergence theorems for differential operators. *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 96, no. 6, pp. 3631–3715. DOI: 10.1007/BF02172664.
27. Sadovnichaya I. V. Equiconvergence theorems in Sobolev and Hölder spaces of eigenfunction expansions for Sturm–Liouville operators with singular potentials. *Doklady Math.*, 2011, vol. 83, no. 2, pp. 169–170. DOI: 10.1134/S1064562411020128.
28. Khromov A. P. Theorems of equiconvergence for integro-differential and integral operators. *Sb. Math.*, 1981, vol. 114 (156), no. 3, pp. 378–405.
29. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Rezolventny approach in the Fourier method. *Doklady Math.*, 2014, vol. 90, no. 2, pp. 545–548. DOI: 10.1134/S1064562414060076.
30. Khromov A. P. About the classical solution of the mixed problem for the wave equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 56–66 (in Russian).

УДК 517.51

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ ПО УПОРЯДОЧЕННОЙ H -ВАРИАЦИИ

В. В. Новиков

Новиков Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественных и математических наук, Энгельсский технологический институт (филиал), Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., vnovikov@yandex.ru

В 1972 г. Д. Ватерман ввел класс функций ограниченной Λ -вариации (в частности, гармонической или H -вариации). Позднее им же были введены классы функций ограниченной упорядоченной Λ -вариации и функций, непрерывных по Λ -вариации. Эти классы успешно применялись рядом авторов в исследованиях по сходимости и суммируемости рядов Фурье. В настоящей статье изучается поведение интерполяционных операторов Лагранжа на классе функций, непрерывных по упорядоченной гармонической вариации. Показано, что для функции $f \in C_{2\pi}^1$, непрерывной на $[-\pi, \pi]$ по упорядоченной H -вариации, тригонометрический интерполяционный процесс Лагранжа $\{L_n(f, x)\}$ с равноотстоящими узлами сходится к f равномерно на \mathbb{R} .

Ключевые слова: обобщенная вариация, упорядоченная гармоническая вариация, интерполяция Лагранжа.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-418-422

ВВЕДЕНИЕ

Определение 1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty.$$

Говорят, что f есть функция ограниченной Λ -вариации (обозначение: $f \in \Lambda BV$), если

$$V(\Lambda, f) := \sup_{\Pi} \sum_k \frac{|f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})|}{\lambda_k} < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем системам Π непересекающихся интервалов вида

$$I_k := (t_{2k-1}, t_{2k}) \subset [-\pi, \pi], \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Определение 2. Функция f называется функцией ограниченной упорядоченной Λ -вариации (обозначение: $f \in O\Lambda BV$), если

$$\tilde{V}(\Lambda, f) := \sup_{\Pi} \sum_k \frac{|f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})|}{\lambda_k} < +\infty,$$

причем супремум берется по всевозможным системам неналегающих интервалов (1) таких, что $I_k < I_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, или $I_k > I_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ (запись $I_k < I_{k+1}$ или $I_k > I_{k+1}$ означает, что I_k расположен левее, соответственно, правее, чем I_{k+1}).



Положим $\Lambda = H := \{k\}_{k=1}^{\infty}$. Порожденная этой последовательностью вариация называется *гармонической* (или *H -вариацией*). Соответственно через HBV ($OHBV$) мы будем обозначать классы ограниченной гармонической (упорядоченной гармонической) вариации.

Определение 3. Обозначим $\Lambda^m := \{\lambda_k\}_{k=m+1}^{\infty}$. Функция f называется *непрерывной по Λ -вариации* (по упорядоченной Λ -вариации), если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} V(\Lambda^m, f) = 0 \quad \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{V}(\Lambda^m, f) = 0 \right).$$

Приведенные определения были предложены в 1970-х гг. прошлого века Ватерманом (D. Waterman) (см., например, [1, 2]). Введенные им классы функций нашли важные применения в исследованиях по сходимости и суммируемости рядов Фурье. Приведем характерный результат такого рода. Пусть $C_{2\pi}$ — пространство действительных непрерывных на всей числовой прямой 2π -периодических функций с равномерной нормой.

Теорема 1 (см. [1]). Если $f \in C_{2\pi} \cap HBV$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на \mathbb{R} . Если же $\Lambda BV \supseteq HBV$, причем $\Lambda BV \neq HBV$, то найдется функция $f \in C_{2\pi} \cap \Lambda BV$, ряд Фурье которой расходится, по крайней мере, в одной точке.

Очевидно, что $\Lambda BV \subseteq O\Lambda BV$. В статье [2] Ватерман поставил вопрос, является ли это включение строгим? Утвердительный ответ, сначала для случая гармонической вариации, был получен в работе [3]. Позднее также положительный ответ был дан в [4] для случая произвольной последовательности Λ . Отметим в этой связи любопытный факт. С одной стороны, исходя из определений, можно предположить, что различие между классами ΛBV и $O\Lambda BV$ является незначительным. Косвенно это подтверждается и тем, что построенные в статьях [3] и [4] примеры довольно сложны, т.е. обнаружить различие между данными классами — технически сложная задача. С другой стороны, известно [4], что ΛBV и $O\Lambda BV$ становятся банаховыми пространствами, если снабдить их подходящей нормой. При этом оказывается, что при всем внешнем сходстве обсуждаемых классов ΛBV является всего лишь множеством первой категории в $O\Lambda BV$.

Вопросы сходимости ряда Фурье функций класса $O\Lambda BV$ рассматривались в заметке Ватермана [5]. Существует также ряд работ, авторы которых обобщали понятие Λ -вариации на многомерный случай применительно к изучению кратных рядов Фурье.

Хорошо известен факт, что между частичными суммами ряда Фурье и интерполяционными многочленами Лагранжа существует глубокая аналогия. В связи с этим результаты, полученные для рядов Фурье функций из классов обобщенной ограниченной вариации, позже переносились на случай интерполирования. В частности, Кельзоном в [6] доказан аналог теоремы 1 для случая тригонометрического интерполирования с равноотстоящими узлами. Ряд авторов рассматривал упомянутые классы функций применительно к алгебраическому интерполированию с узлами в нулях ортогональных многочленов.

В настоящей заметке обсуждается равномерная сходимость тригонометрической интерполяции для функций, непрерывных по H -вариации. Результат дополняет полученное автором в [8] утверждение относительно сходимости интерполяционного процесса Лагранжа, а также одного специального интерполяционного процесса Биркгофа для функций из класса $f \in C_{2\pi} \cap O\Lambda BV$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обозначим через $L_n(f, x)$, $n = 1, 2, \dots$, тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа функции $f \in C_{2\pi}$ с узлами $\{x_{k,n} = 2\pi k / (2n + 1)\}_{k=-n}^n$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Если функция $f \in C_{2\pi}$ непрерывна по упорядоченной гармонической вариации на $[-\pi, \pi]$, то последовательность полиномов $\{L_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно на всей числовой прямой.

Введем некоторые обозначения. Для $f \in C_{2\pi}$ и $n \geq 3$ положим

$$T_{n,p}^*(f) = \sum_{k=-[n/2]}^{[n/2]'} \left| \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{\varphi(2k+1, n, p)} \right|, \quad p = -n-1, \dots, n,$$



где

$$\varphi(m, n, p) = \begin{cases} p - m, & \text{если } |p - m| \leq 3([n/2] + 1), \\ 2n - (p - m), & \text{если } p - m > 3([n/2] + 1), \\ -2n - (p - m), & \text{если } p - m < -3([n/2] + 1), \end{cases}$$

$$T_n^*(f) = \max_{-n-1 \leq p \leq n} T_{n,p}^*(f).$$

Здесь штрих у знака суммы указывает на отсутствие (не более двух) слагаемых, у которых индекс k является решением уравнения $\varphi(2k + 1, n, p) = 0$; кроме того, будем считать, что $x_{n+1,n} = \pi$, $x_{-n-1,n} = -\pi$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма (см. [7]). Условие $T_n^*(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ влечет равномерную на \mathbb{R} сходимость к f полиномов $\{L_n(f, x)\}$.

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем произвольное $p \in \{-n - 1, \dots, n\}$ и представим $T_{n,p}^*(f)$ в виде

$$T_{n,p}^*(f) = \left(\sum_{k \in I} + \sum_{k \in J} + \sum_{k \in K} \right) \left| \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{\varphi(2k + 1, n, p)} \right| =: \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3,$$

где множества индексов I, J, K определяются следующим образом:

$$I := \{k : |p - 2k - 1| \leq 3([n/2] + 1)\}, \quad J := \{k : p - 2k - 1 > 3([n/2] + 1)\},$$

$$K := \{k : p - 2k - 1 < -3([n/2] + 1)\}.$$

Получим оценку сверху для $T_{n,p}^*(f)$. Мы будем оценивать только сумму Σ_1 , поскольку остальные две оцениваются аналогично.

В силу равномерной непрерывности функции f найдется неубывающая последовательность номеров $\{m_n\}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = +\infty$ и

$$A_n := \omega\left(f; \frac{2\pi}{2n + 1}\right) \log m_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \tag{2}$$

Здесь $\omega(f; \delta)$ — обычный модуль непрерывности функции f . Пусть $Q := \{k \in I : |p - 2k - 1| < m_n\}$, $Q_1 := I \setminus Q$ и

$$\Sigma_1 = \left(\sum_{k \in Q} + \sum_{k \in Q_1} \right) \left| \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{\varphi(2k + 1, n, p)} \right| =: S_1 + S_2.$$

Учитывая, что для всех $k = -[n/2], \dots, [n/2]$ верно неравенство

$$|f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})| \leq \omega\left(f; \frac{2\pi}{2n + 1}\right),$$

а также принимая во внимание определение функции φ и тот факт, что $\text{card}Q \leq m_n$, находим (как обычно, C — абсолютная постоянная)

$$S_1 \leq CA_n. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь сумму S_2 . Обозначим $A := \{k \in Q_1 : 2k + 1 < p\}$, $B := \{k \in Q_1 : 2k + 1 > p\}$ и запишем S_2 в виде

$$S_2 = \left(\sum_{k \in A} + \sum_{k \in B} \right) \left| \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{p - 2k - 1} \right| =$$

$$= \sum_{k \in A} \frac{|f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})|}{p - 2k - 1} + \sum_{k \in B} \frac{|f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})|}{2k + 1 - p} =: U_1 + U_2.$$



Если расположить знаменатели $p - 2k - 1$ в сумме U_1 (знаменатели $2k + 1 - p$ в сумме U_2) в порядке возрастания, то соответствующие им неналегающие интервалы $I_k = (x_{2k,n}, x_{2k+1,n})$ будут упорядочены справа налево (соответственно слева направо). Тогда, учитывая определение величины $\tilde{V}(H^m, f)$ и тот факт, что для индексов суммы S_2 выполнено условие $|p - 2k - 1| \geq m_n$, получаем оценку

$$S_2 \leq C\tilde{V}(H^{m_n}, f). \quad (4)$$

При этом в силу непрерывности f по H -вариации и того, что $m_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{V}(H^{m_n}, f) = 0. \quad (5)$$

Поскольку номер $p = -n - 1, \dots, n$ произвольный, мы доказали на основании (2)–(5), что последовательность $T_n^*(f)$, $n = 1, 2, \dots$ мажорируется некоторой сходящейся к нулю последовательностью. Применяя лемму, заключаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - L_n(f, x)] = 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$. \square

Библиографический список

1. Waterman D. On convergence of Fourier Series of functions of generalized bounded variation // *Studia Math.* 1972. Vol. 44. P. 107–117.
2. Waterman D. Λ -bounded variation : recent results and unsolved problems // *Real Anal. Exchange.* 1978–1979. Vol. 4. P. 69–75.
3. Belna C. L. On ordered harmonic bounded variation // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1980. Vol. 80. P. 441–444.
4. Prus-Wisniowski F. On ordered Λ -bounded variation // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1990. Vol. 109. P. 375–383.
5. Waterman D. On the note of C. L. Belna // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1980. Vol. 80. P. 445–447.
6. Кельзон А. А. О тригонометрическом интерполировании функций Λ -ограниченной вариации // *ДАН СССР.* 1986. Т. 286, № 5. С. 1062–1064.
7. Привалов А. А. О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // *Матем. заметки.* 1986. Т. 39, № 2. С. 228–243.
8. Новиков В. В. Интерполяция Биркгофа функций ограниченной упорядоченной Λ -вариации // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 81–83.

Interpolation of Continuous in Ordered H -variation Functions

V. V. Novikov

Novikov Vladimir Vasil'evich, Engels Technological Institute, State Technical University of Saratov, 17, pl. Svobody, 413100, Engels, Saratov region, Russia, vnovikov@yandex.ru

In 1972 D. Waterman introduced a class of functions of Λ -bounded variation (in particular, a harmonic variation or an H -variation). Later he introduced also the class of functions of ordered Λ -bounded variation and the class of continuous in Λ -variation functions. These classes have been used by many authors in studies on the convergence and summability of the Fourier series. This paper investigates the behavior of the Lagrange interpolation of continuous in ordered H -variation functions. We prove a result: if $f \in C_{2\pi}$ is continuous in ordered harmonic variation on $[-\pi, \pi]$, then the Lagrange trigonometric polynomials $\{L_n(f, x)\}$ based on equidistant nodes converge to f uniformly on \mathbb{R} .

Key words: generalized variation, ordered harmonic variation, Lagrange interpolation.

References

1. Waterman D. On convergence of Fourier Series of functions of generalized bounded variation. *Studia Math.*, 1972, vol. 44, pp. 107–117.
2. Waterman D. Λ -bounded variation : recent results and unsolved problems. *Real Anal. Exchange*, 1978–1979, vol. 4, pp. 69–75.
3. Belna C. L. On ordered harmonic bounded variation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1980, vol. 80, pp. 441–444.
4. Prus-Wisniowski F. On ordered Λ -bounded variation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1990, vol. 109, pp. 375–383.
5. Waterman D. On the note of C. L. Belna. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1980, vol. 80, pp. 445–447.
6. Kelzon A. On trigonometric interpolation of func-



- tions of Λ -bounded variation. *Dokl. AN SSSR*, 1986, vol. 286, no. 5, pp. 1062–1064.
7. Privalov A. A. Uniform convergence of Lagrange interpolation processes. *Math. Notes*, 1986, vol. 39, no. 2, pp. 228–243.
8. Novikov V. V. On Birkhoff Interpolation of Functions of Ordered Λ -bounded Variation *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 2, pp. 81–83 (in Russian).

УДК 517.972:517.98:517.982

ДОМИНАНТНЫЕ ОЦЕНКИ РОСТА ИНТЕГРАНТА И ГЛАДКОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

И. В. Орлов¹, И. А. Романенко²

¹Орлов Игорь Владимирович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и функционального анализа, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Республика Крым, igor_v_orlov@mail.ru

²Романенко Игорь Алексеевич, ассистент кафедры алгебры и функционального анализа, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Республика Крым, rom.igor.alex@gmail.com

Для вариационных функционалов в пространствах Соболева $\{W^{1,p}\}$ ($1 \leq p < \infty$) вводится последовательность так называемых «доминантных оценок роста» градиента соответствующего порядка от интегранта, каждая из которых гарантирует соответствующий уровень гладкости вариационного функционала в C^1 -гладких точках пространства Соболева. Частными случаями доминантных оценок роста являются изученные ранее K -псевдополиномиальные представления интегранта. Однако, в отличие от псевдополиномиального случая ($p \in \mathbb{N}$) наш подход позволяет рассматривать вариационные задачи на полной соболевской шкале ($1 \leq p < \infty$).

Ключевые слова: вариационный функционал, пространства Соболева, интегрант, доминантные оценки роста, доминантная смешанная гладкость, вариационные задачи.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-422-432

1. ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Начиная с классических работ Л. Тонелли (L. Tonelli) [1] и по настоящее время вариационные задачи в пространствах Соболева привлекают внимание многих математиков [2–4]. В последние годы при исследовании вариационных задач в пространствах Соболева, активно используются так называемые компактные экстремумы и компактно-аналитические (K -аналитические) свойства вариационных функционалов [5–7]. Это связано с тем, что классические аналитические свойства у вариационных функционалов в пространствах Соболева часто отсутствуют [8]. При этом при исследовании корректной определенности вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (y(\cdot) \in W^{1,p}[a; b]), \quad (1)$$

классическая «оценка роста» интегранта $|f(x, y, z)| \leq A_1 + A_2|z|^p$ заменялась требованием так называемого K -псевдополиномиального представления интегранта:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^p P_k(x, y, z)z^k, \quad (2)$$

коэффициенты которого доминантно (по x, y) ограничены. Далее последовательно вводились более узкие классы K -псевдополиномов за счет повышения уровня доминантной гладкости коэффициентов P_k . Попадание интегранта в такой класс гарантирует соответствующий уровень K -аналитичности вариационного функционала (K -непрерывность, K -дифференцируемость, кратную K -дифференцируемость).



Однако представление (2) не всегда возможно и, кроме того, приводит к рассмотрению задач лишь на «дискретной» соболевской шкале $\{W^{1,p}\}$ ($p \in \mathbb{N}$). Таким образом, актуальной является задача такого обобщения условия (2), которое позволит уйти от конкретного представления интегранта и рассматривать вариационные задачи на полной соболевской шкале $\{W^{1,p}\}$ ($1 \leq p < \infty$).

С этой целью в настоящей работе для вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}[a, b]$ ($1 \leq p < \infty$) вводится последовательность так называемых доминантных «оценок роста» градиента соответствующего порядка от интегранта, каждая из которых гарантирует соответствующий уровень гладкости вариационного функционала (1) в C^1 -гладких точках пространства Соболева. Эти оценки, как уже отмечалось, с одной стороны, можно рассматривать в качестве обобщения K -псевдополиномиальных представлений интегрантов, а с другой — как дополнение метода K -псевдополиномов, так как в C^1 -гладких точках пространства Соболева вариационный функционал имеет не только K -аналитические, но и классические аналитические свойства.

Приведем определения компактной непрерывности, компактной дифференцируемости и кратной компактной дифференцируемости функционала в полном ЛВП [5]. Далее ЛВП означает локально выпуклое пространство, абсолютно выпуклое подмножество вещественного ЛВП есть выпуклое и симметричное множество, $\text{span } C$ — линейная оболочка множества C , $\|\cdot\|_C$ — функционал Минковского множества C .

Определение 1. Пусть E — полное вещественное ЛВП, $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$. Скажем, что функционал $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ компактно непрерывен (K -непрерывен), компактно дифференцируем (дважды K -дифференцируем и т. д.) в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Φ на $(y + \text{span } C)$ соответственно непрерывно, дифференцируемо по Фреше (дважды дифференцируемо по Фреше и т. д.) в точке y относительно нормы $\|\cdot\|_C$ в подпространстве $E_C = \text{span } C$, порожденной C .

Замечание 1. Отметим, что в конечномерном случае K -непрерывность, K -дифференцируемость и т. д. совпадают соответственно с классической непрерывностью, дифференцируемостью и т. д. Однако в бесконечномерном случае K -аналитические свойства функционала, вообще говоря, слабее соответствующих классических аналитических свойств. Простые примеры K -непрерывных, но разрывных в обычном смысле функционалов связаны с переходом к слабой топологии (см. [5, пример 2.1.3]). Важным является то обстоятельство, что вариационные функционалы в пространствах Соболева при достаточно общих условиях обладают K -аналитическими свойствами, но не обладают соответствующими классическими аналитическими свойствами.

В данной работе, как уже было сказано, рассматриваются более общие, чем K -псевдополиномиальные, условия, обеспечивающие подходящие аналитические свойства вариационных функционалов в C^1 -гладких точках пространств Соболева $W^{1,p}[a; b]$ ($1 \leq p < \infty$).

2. ДОМИНАНТНАЯ ОЦЕНКА РОСТА ИНТЕГРАНТА И КОРРЕКТНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В $W^{1,p}[a; b]$

Определение 2. Будем говорить, что борелевская функция $f : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет доминантной оценке порядка p роста по z (обозначение: $f \in B_p(z)$, $0 < p < \infty$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ существуют неотрицательные константы $A_1(C)$ и $A_2(C)$ такие, что для любых $(x, y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$, f допускает оценку

$$|f(x, y, z)| \leq A_1(C) + A_2(C)|z|^p. \quad (3)$$

Напомним определение доминантно по x, y ограниченной функции [9].

Определение 3. Борелевская функция $P : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \rightarrow \mathbb{R}$ называется доминантно (по переменным x, y) ограниченной (обозначение: $P \in B_{dom}(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ функция P ограничена на множестве $C \times \mathbb{R}_z$.

Приведем важный класс примеров функций $f \in B_p(z)$ — псевдополиномы порядка p с доминантно ограниченными коэффициентами. Нетрудно проверить, что справедливо следующее



Предложение 1. Если борелевская функция f представима в виде

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z)z^p \quad (p \in \mathbb{N}),$$

где $P \in B_{dom}(z)$ и $Q \in B_{dom}(z)$, то $f \in B_p(z)$.

Замечание 2. Утверждение предложения 1 справедливо и для псевдополиномов более общего вида:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^p P_k(x, y, z) z^k \quad (p \in \mathbb{N}),$$

где $P_k \in B_{dom}(z)$.

Покажем теперь, что условие (3) для интегранта гарантирует корректную определенность основного вариационного функционала в $W^{1,p}[a; b]$, а также позволяет дать удобную локальную оценку функционала на компактах из $W^{1,p}[a; b]$.

Предварительно напомним определение пространств Соболева $W^{1,p}[a; b]$, $1 \leq p < \infty$.

Определение 4. Пространство $W^{1,p}[a; b]$ состоит из абсолютно непрерывных на $[a; b]$ функций $y = y(x)$, для которых $y' \in L_p[a; b]$. Норма в $W^{1,p}[a; b]$ обычно вводится следующим образом:

$$\|y\|_{W^{1,p}} = \left(\int_a^b |y(x)|^p dx + \int_a^b |y'(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\|y\|_{L_p}^p + \|y'\|_{L_p}^p \right)^{1/p}.$$

Как известно, соотношение между соболевскими нормами в пространствах $W^{1,p}[a; b]$ и $W^{1,1}[a; b]$ при $1 \leq p < \infty$ имеет вид

$$\|y\|_{W^{1,1}} \leq N_{1p} \|y\|_{W^{1,p}}, \quad (4)$$

где $N_{1p} = (2(b-a))^{(p-1)/p}$.

Теорема 1. Если интегрант $f \in B_p(z)$ ($1 \leq p < \infty$), то вариационный функционал Эйлера – Лагранжа

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (y(\cdot) \in W^{1,p}[a; b])$$

всюду определен в пространстве $W^{1,p}[a; b]$. Кроме того, для любого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a; b]$ при $y(\cdot) \in C_\Delta$ справедлива локальная оценка:

$$|\Phi(y)| \leq \alpha(C_\Delta) + \beta(C_\Delta) \|y\|_{W^{1,p}}^p, \quad (5)$$

где коэффициенты α и β зависят только от выбора компакта C_Δ ; $\alpha, \beta \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное отображение:

$$e : (W^{1,p}[a; b]) \times [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad e(y, x) = y(x).$$

Поскольку сходимость в $W^{1,p}[a; b]$, как известно, сильнее равномерной сходимости, то

$$\left(y \xrightarrow{W^{1,p}} 0, x \rightarrow 0 \right) \implies (y(x) = e(y, x) \rightarrow 0).$$

Отсюда ввиду билинейности e следует непрерывность e всюду в $W^{1,p}[a; b] \times [a; b]$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса множество

$$C_Y := C_\Delta([a; b]) = \bigcup_{y \in C_\Delta} y([a; b]) \text{ — компакт в } \mathbb{R}.$$



Так как по условию теоремы $f \in B_p(z)$, то при $(x, y) \in C = [a; b] \times C_Y$ выполнена оценка интегранта вида (3). Отсюда при $y(\cdot) \in C_\Delta$ получаем оценку

$$|\Phi(y)| \leq \int_a^b |f(x, y, y')| dx \leq \int_a^b (A_1(C) + A_2(C)|y'|^p) dx = (b-a)A_1(C) + A_2(C) \int_a^b |y'|^p dx =: \alpha(C_\Delta) + \beta(C_\Delta) \|y'\|_{L_p}^p \leq \alpha(C_\Delta) + \beta(C_\Delta) \|y\|_{W^{1,p}}^p,$$

т. е. оценка (5) выполнена. □

3. C-ДОМИНАНТНАЯ ОЦЕНКА РОСТА ИНТЕГРАНТА И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В $W^{1,p}[a; b]$

Определение 5. Будем говорить, что непрерывная функция $f \in B_p(z)$ ($0 < p < \infty$) удовлетворяет *C-доминантной оценке порядка p роста по z* (обозначение: $f \in CB_p(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений h, k соответственно переменных y, z при $(x, y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$ приращение f допускает оценку

$$|\Delta_{yz}f(x, y, z; h, k)| = |f(x, y+h, z+k) - f(x, y, z)| \leq A_1(C; h, k) + A_2(C; h, k)|z|^p, \quad (6)$$

где коэффициенты A_i ($i = 1, 2$) — неотрицательные борелевские функции от h, k , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} (i) & A_i \text{ локально по } h \text{ ограничены равномерно по } k; \\ (ii) & A_i(C; h, k) = o(1) \text{ при } h, k \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что из условий (6), (7) следует равномерная непрерывность f на $C \times \mathbb{R}_z$. Напомним определение доминантно непрерывной функции [9].

Определение 6. Непрерывная функция $P : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \rightarrow \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) непрерывной по z* (обозначение: $P \in C_{dom}(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ функция P равномерно непрерывна и ограничена на множестве $C \times \mathbb{R}_z$.

Приведем важный класс примеров функций $f \in CB_p(z)$.

Предложение 2. Если непрерывная функция f представима в виде

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z)z^p \quad (p \in \mathbb{N}),$$

где $P \in C_{dom}(z)$ и $Q \in C_{dom}(z)$, то $f \in CB_p(z)$.

Доказательство. Пусть функция f удовлетворяет условию предложения. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{yz}f(x, y, z; h, k) &= P(x, y+h, z+k) + Q(x, y+h, z+k)(z+k)^p - \\ &- [P(x, y, z) + Q(x, y, z)z^p] \pm Q(x, y+h, z+k)z^p = [P(x, y+h, z+k) - P(x, y, z)] + \\ &+ [Q(x, y+h, z+k) - Q(x, y, z)]z^p + Q(x, y+h, z+k)[(z+k)^p - z^p]. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует оценка

$$\begin{aligned} |\Delta_{yz}f(x, y, z; h, k)| &\leq |\Delta_{yz}P(x, y, z; h, k)| + |\Delta_{yz}Q(x, y, z; h, k)| |z|^p + \\ &+ |Q(x, y+h, z+k)| |(z+k)^p - z^p| =: \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 |z|^p + \tilde{A}_3 |(z+k)^p - z^p|. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим с учетом доминантной непрерывности соответствующих выражений в (9)

$$B_1(C; h, k) = \sup_{(x, y, z) \in C \times \mathbb{R}_z} \tilde{A}_1(x, y, z; h, k); \quad B_2(C; h, k) = \sup_{(x, y, z) \in C \times \mathbb{R}_z} \tilde{A}_2(x, y, z; h, k);$$



$$B_3(C; h, k) = \sup_{(x,y,z) \in C \times \mathbb{R}_z} \tilde{A}_3(x, y, z; h, k) \left| \frac{(z+k)^p - z^p}{z^{p-1}k} \right|. \quad (10)$$

При этом $\tilde{A}_1(x, y, z; h, k) = o(1)$, $\tilde{A}_2(x, y, z; h, k) = o(1)$ доминантно по x, y , т. е. равномерно на множестве $C \times \mathbb{R}_z$. Поэтому также и $B_1(C; h, k) = o(1)$, $B_2(C; h, k) = o(1)$ при $h, k \rightarrow 0$. Наконец, поскольку \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 и \tilde{A}_3 ограничены локально по h , равномерно по k и доминантно по x, y , то и B_1, B_2, B_3 ограничены локально по h и равномерно по k . Из (9) и (10) находим:

$$\begin{aligned} |\Delta_{yz} f(x, y, z; h, k)| &\leq B_1(C; h, k) + B_2(C; h, k)|z|^p + B_3(C; h, k)|z|^{p-1}|k| \leq \\ &\leq B_1(C; h, k) + B_2(C; h, k)|z|^p + B_3(C; h, k)|k|(1 + |z|^p) = [B_1(C; h, k) + \\ &+ B_3(C; h, k)|k|] + [B_2(C; h, k) + B_3(C; h, k)|k|]|z|^p =: A_1(C; h, k) + A_2(C; h, k)|z|^p, \end{aligned}$$

где коэффициенты A_1, A_2 удовлетворяют условиям (7). □

Замечание 3. Утверждение предложения 2 справедливо, как нетрудно убедиться, и для псевдополиномов более общего вида:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^p P_k(x, y, z) z^k \quad (p \in \mathbb{N}),$$

где $P_k \in C_{dom}(z)$.

Установим общий факт о тождестве K -непрерывности и непрерывности для отображений в банаховых пространствах. Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть E, F — банаховы пространства. Если отображение $\Phi : E \rightarrow F$ K -непрерывно в точке $y \in E$, то оно непрерывно и в обычном смысле в этой точке.

Доказательство. Допустим противное: отображение $\Phi(y)$ разрывно в точке y . Тогда

$$\exists h_n \xrightarrow{E} 0, \quad \exists \varepsilon_0 > 0 : \quad \|\Phi(y + h_n) - \Phi(y)\|_F \geq \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим а.в. компакт $C = \overline{a.c.o.}\{h_n\}$. По теореме о промежуточных компактах [10, теорема 2.2]

$$\exists C' \in \mathcal{C}(E) : \quad E_C \hookrightarrow E_{C'} \hookrightarrow E,$$

где $\mathcal{C}(E)$ — система всех абсолютно выпуклых компактов в E . Так как $\{h_n\} \subset C$, то из ограниченности $\{h_n\}$ в E_C следует (по компактности вложения E_C в $E_{C'}$) предкомпактность $\{h_n\}$ в $E_{C'}$. Следовательно, по теореме Больцано – Вейерштрасса из $\{h_n\}$ можно выделить некоторую подпоследовательность $h_{n_k} \xrightarrow{E_{C'}} 0$. Получаем (по непрерывности Φ в $E_{C'}$):

$$\|\Phi(y + h_{n_k}) - \Phi(y)\|_F \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h_{n_k} \xrightarrow{E_{C'}} 0.$$

Но по допущению $\|\Phi(y + h_{n_k}) - \Phi(y)\|_F \geq \varepsilon_0$. Пришли к противоречию. Таким образом, отображение $\Phi(y)$ непрерывно в точке $y \in E$. □

Покажем теперь, что условие (6) для интегранта гарантирует K -непрерывность, а в силу теоремы 2 и непрерывность основного вариационного функционала в $W^{1,p}[a; b]$.

Теорема 3. Если интегрант $f \in CB_p(z)$ ($1 \leq p < \infty$), то вариационный функционал непрерывен всюду в $W^{1,p}[a; b]$.

Доказательство. Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}[a; b]$ и положим $C = [a; b] \times y([a; b])$. Фиксируем также абсолютно выпуклый компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}[a; b]$ и выберем $h \in C_\Delta$. При этом ввиду ограниченности C_Δ по соболевской норме C_Δ ограничен и по равномерной норме, откуда $|h(x)| \leq \delta_h$ для любых $x \in [a; b]$, $h \in C_\Delta$, при некотором $\delta_h > 0$. Проведем оценку $\Delta\Phi(y, h)$, используя представление (6):

$$|\Phi(y + h) - \Phi(y)| \leq \int_a^b |f(x, y + h, y' + h') - f(x, y, y')| dx \leq$$



$$\leq \int_a^b A_1(C; h, h') dx + \int_a^b A_2(C; h, h') |y'|^p dx, \quad (11)$$

где коэффициенты A_1, A_2 — неотрицательные борелевские функции от h и h' , удовлетворяющие условиям (7) (при $k = h'$). Далее, для любого фиксированного $\delta > 0$ обозначим

$$e_\delta = \{x \in [a; b] \mid |h(x)| < \delta, |h'(x)| < \delta\}, \quad e^\delta = \{x \in [a; b] \mid |h(x)|^p + |h'(x)|^p \geq \delta^p\}. \quad (12)$$

Так как $\|h\|_{W^{1,p}}^p \geq \delta^p \cdot \text{mes}(e^\delta)$, то

$$\left(\|h\|_{W^{1,p}} \leq \delta^{(p+1)/p}\right) \implies (\text{mes}(e^\delta) < \delta). \quad (13)$$

Таким образом,

$$(\|h\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0) \implies (\text{mes}(e^\delta) \rightarrow 0) \text{ при } \delta \rightarrow 0. \quad (14)$$

Будем далее предполагать, что неравенство слева в (13) выполнено. Проведем отдельно оценку каждого из интегралов справа в (11), используя условия (7).

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < \varepsilon$ так, чтобы

$$(|h(x)| < \delta, |h'(x)| < \delta) \implies (A_1(C; h, h') < \varepsilon).$$

Тогда, используя (12), (13), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_a^b A_1(C; h, h') dx &\leq \int_{e_\delta} A_1(C; h, h') dx + \int_{e^\delta} A_1(C; h, h') dx < \\ < \varepsilon \text{mes}(e_\delta) + M_{A_1} \text{mes}(e^\delta) < \varepsilon(b-a) + M_{A_1} \varepsilon = \varepsilon((b-a) + M_{A_1}), \end{aligned}$$

где $M_{A_1} = \sup_{x \in [a; b], h \in C_\Delta} A_1(C; h, h')$. Таким образом, в силу (14) получаем:

$$\int_a^b A_1(C; h, h') dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0.$$

Перейдем к оценке второго интеграла справа в (11), используя условия (7) и свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега [11]. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < \varepsilon$ так, чтобы

$$(|h(x)| < \delta, |h'(x)| < \delta) \implies \left(A_2(C; h, h') < \varepsilon \text{ и } \int_{e^\delta} |y'|^p dx < \varepsilon \right).$$

Тогда, используя (12), (13), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_a^b A_2(C; h, h') |y'|^p dx &\leq \int_{e_\delta} A_2(C; h, h') |y'|^p dx + \int_{e^\delta} A_2(C; h, h') |y'|^p dx < \\ < \varepsilon \int_{e_\delta} |y'|^p dx + M_{A_2} \int_{e^\delta} |y'|^p dx < \varepsilon \int_a^b |y'|^p dx + M_{A_2} \varepsilon \leq \varepsilon \|y'\|_{L^p}^p + M_{A_2} \varepsilon \leq \varepsilon (\|y'\|_{W^{1,p}}^p + M_{A_2}), \end{aligned}$$

где $M_{A_2} = \sup_{x \in [a; b], h \in C_\Delta} A_2(C; h, h')$. Таким образом, в силу (14) получаем

$$\int_a^b A_2(C; h, h') |y'|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0.$$

Тогда $|\Phi(y+h) - \Phi(y)| \rightarrow 0$ при $\|h\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0$ и $h \in \text{span}(C_\Delta)$. Тем более, это верно при $h \in \text{span}(C_\Delta)$ и $\|h\|_{C_\Delta} \rightarrow 0$ для любого абсолютно выпуклого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a; b]$. Следовательно, вариационный функционал $\Phi(y)$ K -непрерывен всюду в $W^{1,p}[a; b]$, откуда по теореме 2 он непрерывен всюду в $W^{1,p}[a; b]$. \square

Дадим теперь общее определение C^n -доминантной оценки роста при любом $n \in \mathbb{N}$.



4. C^n -ДОМИНАНТНАЯ ОЦЕНКА РОСТА ИНТЕГРАНТА И n -КРАТНАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В $W^{1,p}[a; b]$

Определение 7. Будем говорить, что n раз непрерывно дифференцируемая функция $f \in C^{n-1}B_p(z)$ ($n \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$) удовлетворяет C^n -доминантной оценке порядка p роста по z (обозначение: $f \in C^n B_p(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений h, k соответственно переменных y, z при $(x, y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$ остаточный член формулы Тейлора первого порядка для $\nabla_{yz}^{n-1} f$ допускает оценку

$$\begin{aligned} & |(\Delta_{yz}(\nabla_{yz}^{n-1} f) - \nabla_{yz}(\nabla_{yz}^{n-1} f))(x, y, z)(h, k)| = \\ & = |[\nabla_{yz}^{n-1} f(x, y + h, z + k) - \nabla_{yz}^{n-1} f(x, y, z)] - \nabla_{yz}(\nabla_{yz}^{n-1} f(x, y, z)) \cdot (h, k)| \leq \\ & \leq A_1(C; h, k) + A_2(C; h, k)|z|^p, \end{aligned} \tag{15}$$

где коэффициенты A_i ($i = 1, 2$) — неотрицательные борелевские функции от h, k , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} (i) & A_i \text{ локально по } h \text{ ограничены равномерно по } k; \\ (ii) & A_i(C; h, k) = o(|h| + |k|) \text{ при } h, k \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что из определения следует n -кратная равномерно непрерывная дифференцируемость f на $C \times \mathbb{R}_z$ для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$.

Лемма 1. *Справедливо включение*

$$C^n B_{p-k}(z) \subset C^n B_p(z) \quad (0 < k < p < \infty).$$

Доказательство. Пусть функция $f \in C^n B_{p-k}(z)$. Тогда по определению 7 имеем:

$$\begin{aligned} & |(\Delta_{yz}(\nabla_{yz}^{n-1} f) - \nabla_{yz}(\nabla_{yz}^{n-1} f))(x, y, z)(h, k)| \leq \\ & \leq A_1(C; h, k) + A_2(C; h, k)|z|^{p-k} \leq A_1(C; h, k) + A_2(C; h, k)(1 + |z|^p) \leq \\ & \leq [A_1(C; h, k) + A_2(C; h, k)] + A_2(C; h, k)|z|^p =: \tilde{A}_1(C; h, k) + \tilde{A}_2(C; h, k)|z|^p, \end{aligned}$$

где коэффициенты \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 удовлетворяют условиям (16). Таким образом, функция $f \in CB_p(z)$. \square

Напомним определение доминантно C^n -гладкой функции [9].

Определение 8. Будем говорить, что n раз непрерывно дифференцируемая функция $P : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \rightarrow \mathbb{R}$ называется доминантно (по переменным x, y) C^n -гладкой по z (обозначение: $P \in C^n_{dom}(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ отображения $P, \nabla_{yz} P, \dots, \nabla_{yz}^n P$ равномерно непрерывны и ограничены на множестве $C \times \mathbb{R}_z$. Другими словами, $P \in C_{dom}(z), \nabla_{yz} P \in C_{dom}(z), \dots, \nabla_{yz}^n P \in C_{dom}(z)$.

Приведем важный класс примеров функций $f \in C^n B_p(z)$.

Предложение 3. *Если n раз непрерывно дифференцируемая функция f представима в виде*

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z)z^p \quad (p \in \mathbb{N}, \quad n + 1 \leq p < \infty),$$

где $P \in C^n_{dom}(z)$ и $Q \in C^n_{dom}(z)$, то $f \in C^n B_p(z)$.

Доказательство. Пусть функция f удовлетворяет условию предложения. Покажем вначале справедливость предложения для $n = 1$. Аналогично доказательству предложения 2 с учетом доминантной гладкости соответствующих выражений получим оценку

$$|\Delta_{yz} f(x, y, z; h, k) - \nabla_{yz} f(x, y, z) \cdot (h, k)| \leq A_1(C; h, k) + A_2(C; h, k)|z|^p,$$

где коэффициенты A_1, A_2 удовлетворяют условиям (16) определения 7 при $n = 1$. Следовательно, $f \in C^1 B_p(z)$.



Заметим, что функции P и Q в предложении могут быть векторнозначными.

Далее для градиента 1-го порядка от функции f имеем:

$$\begin{aligned} \nabla_{yz} f(x, y, z) &= \left(\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} z^p \right) (x, y, z); \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} z^p + Q p z^{p-1} \right) (x, y, z) \right) = \\ &= [\nabla_{yz} P(x, y, z) + \nabla_{yz} Q(x, y, z) z^p] + (O; Q(x, y, z) p) z^{p-1} =: f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z), \end{aligned}$$

где $f_1 \in C^1 B_p(z)$ и $f_2 \in C^1 B_{p-1}(z)$ по условию предложения, верного, как мы показали выше, для $n = 1$. Так как по лемме 1 $f_2 \in C^1 B_p(z)$, то в силу линейности пространства $C^1 B_p(z)$ функция $\nabla_{yz} f(x, y, z) = f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z) \in C^1 B_p(z)$. Следовательно, по определению 7 для $n = 2$ $f \in C^2 B_p(z)$.

Продолжая аналогично для градиента $(n - 1)$ -го порядка функции f , имеем:

$$\nabla_{yz}^{n-1} f(x, y, z) = f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z) + \dots + f_n(x, y, z),$$

где $f_i := P_i + Q_i z^{p-i+1}$, $P_i, Q_i \in C_{dom}(z)$ ($i = \overline{1, n}$). При этом по условию предложения ($n = 1$)

$$f_1 \in C^1 B_p(z), \quad f_2 \in C^1 B_{p-1}(z), \quad \dots, \quad f_n \in C^1 B_{p-n+1}(z).$$

Так как по лемме 1 $f_2, \dots, f_n \in C^1 B_p(z)$, то в силу линейности пространства $C^1 B_p(z)$ функция $\nabla_{yz}^{n-1} f(x, y, z) = f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z) + \dots + f_n(x, y, z)$ принадлежит $C^1 B_p(z)$. Следовательно, по определению 7 $f \in C^n B_p(z)$. \square

Замечание 4. Утверждение предложения 3 также справедливо и для псевдополиномов более общего вида:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^p P_k(x, y, z) z^k \quad (p \in \mathbb{N}, \quad n + 1 \leq p < \infty),$$

где $P_k \in C_{dom}^n(z)$.

Далее установим по индукции общий факт о тождестве n -кратной H -дифференцируемости и n -кратной дифференцируемости для отображений в банаховых пространствах. Напомним, что H -дифференцируемость (или дифференцируемость по Адамару) означает сильную дифференцируемость на всех подпространствах, порожденных компактами относительно исходной нормы. Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть E, F — банаховы пространства. Если отображение $\Phi : E \rightarrow F$ n раз H -дифференцируемо в точке $y \in E$, то оно n раз дифференцируемо в этой точке.

Доказательство. Покажем, что теорема верна при $n = 1$. Аналогично доказательству теоремы 2 методом от противного доказывается, что отображение $\Phi(y)$ дифференцируемо в точке y .

Предположим, что теорема верна при $n = m$ и докажем справедливость теоремы для $(m + 1)$ -го случая. Также аналогично доказательству теоремы 2 методом от противного доказывается, что отображение $\Phi(y)$ $m + 1$ раз дифференцируемо в точке y .

Таким образом, на основании метода математической индукции доказана n -кратная дифференцируемость отображения Φ в точке. \square

Также по индукции покажем теперь, что условие определения 7 для интегранта гарантирует n -кратную H -дифференцируемость, а в силу теоремы 4 и n -кратную дифференцируемость основного вариационного функционала во всех C^1 -гладких точках из $W^{1,p}[a; b]$, т. е. справедлива

Теорема 5. Если интегрант $f \in C^n B_p(z)$ ($n \leq p < \infty$), то вариационный функционал n раз дифференцируем во всех C^1 -гладких точках из $W^{1,p}[a; b]$. При этом справедливо равенство

$$\Phi^{(n)}(y)(h)^n = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} h + \frac{\partial}{\partial z} h' \right)^n f(x, y, y') dx. \quad (17)$$



Доказательство. Покажем справедливость теоремы при $n = 1$. Вначале докажем K -непрерывность, а в силу теоремы 2 и непрерывность формального дифференциала Адамара $d_H\Phi(y, h)$ в $W^{1,p}[a; b]$. Фиксируем $y(\cdot) \in C^1[a; b] \subset W^{1,p}[a; b]$ и положим $C = [a; b] \times y([a; b])$. Фиксируем а.в. компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}[a; b]$ и выберем $h \in C_\Delta$. При этом множество $\{|h(x)| \mid h \in C_\Delta, x \in [a; b]\}$ ограничено. Оценим этот дифференциал

$$\begin{aligned} |d_H\Phi(y, h)| &\leq \int_a^b \left(\left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right| |h| + \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right| |h'| \right) dx \leq \\ &\leq \max \left(\sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right|, \sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right| \right) \int_a^b (|h| + |h'|) dx \leq M N_{1p} \|h\|_{W^{1,p}}, \end{aligned}$$

где N_{1p} — соответствующая соболевская константа (см. определение 4, неравенство (4)). Тогда $\|d_H\Phi(y, \cdot)\|_{W^{1,p}} \leq M N_{1p}$ для любого а.в. компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a; b]$, откуда формальный дифференциал Адамара $d_H\Phi(y, h)$ K -непрерывен в $W^{1,p}[a; b]$. Следовательно, по теореме 2 он непрерывен в $W^{1,p}[a; b]$.

Проведем оценку $\Delta\Phi(y, h) - d_H\Phi(y, h)$, используя условие (15) ($n = 1$):

$$\begin{aligned} |\Delta\Phi(y, h) - d_H\Phi(y, h)| &\leq \int_a^b |(\Delta_{yz}f - \nabla_{yz}f)(x, y, y')(h, h')| dx \leq \\ &\leq \int_a^b A_1(C; h, h') dx + \int_a^b A_2(C; h, h') |y'|^p dx, \end{aligned} \tag{18}$$

где коэффициенты A_1, A_2 — неотрицательные борелевские функции от h и h' , удовлетворяющие условиям (16) (при $k = h'$). Аналогично доказательству теоремы 3 оценивается отдельно каждый из интегралов справа в (18) при условии, что $y \in C^1[a; b]$. Из (18) получаем в итоге

$$|\Delta\Phi(y, h) - d_H\Phi(y, h)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{C_\Delta} \rightarrow 0$$

для любого а.в. компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a; b]$, что и означает H -дифференцируемость вариационного функционала $\Phi(y)$ во всех C^1 -гладких точках из $W^{1,p}[a; b]$, а также справедливость равенства (17) ($n = 1$).

Следовательно, по условию теоремы 4 для $n = 1$ он дифференцируем во всех C^1 -гладких точках из $W^{1,p}[a; b]$.

Предположим, что теорема верна при $n = m$ и докажем справедливость теоремы для $(m + 1)$ -го случая. Вначале аналогично случаю $n = 1$ оценим формальный дифференциал Адамара $d_H^{m+1}\Phi(y, h)$:

$$\begin{aligned} |d_H^{m+1}\Phi(y, h)| &\leq \int_a^b \left| \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \frac{\partial^{m+1} f(x, y, z)}{\partial^k y \partial^{m+1-k} z} h^k (h')^{m+1-k} \right| dx \leq \\ &\leq \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \left| \frac{\partial^{m+1} f(x, y, z)}{\partial^k y \partial^{m+1-k} z} \right| |h|^k |h'|^{m+1-k} \right) dx \leq \\ &\leq \max_k \left(\sup_{x \in [a, b]} \left| \frac{\partial^{m+1} f(x, y, z)}{\partial^k y \partial^{m+1-k} z} \right| \right) \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k |h|^k |h'|^{m+1-k} \right) dx \leq \\ &\leq M_1 \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \left(\int_a^b |h|^p dx \right)^{\frac{k}{p}} \left(\int_a^b |h'|^{\frac{p(m+1-k)}{p-k}} dx \right)^{\frac{p-k}{p}} \leq M_1 M_2 \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \|h\|_{L_p}^k \|h'\|_{L_p}^{p-k} = \\ &= M_1 M_2 \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \|h\|_{L_p}^k \|h'\|_{L_p}^{m+1-k} \|h'\|_{L_p}^{p-m-1} = M_1 M_2 (\|h\|_{L_p} + \|h'\|_{L_p})^{m+1} \|h'\|_{L_p}^{p-m-1} \leq \end{aligned}$$



$$\leq M_1 M_2 M_3 \|h\|_{W^{1,p}}^{m+1} \|h\|_{W^{1,p}}^{p-m-1} = M_1 M_2 M_3 \|h\|_{W^{1,p}}^p.$$

Тогда $\|d_H^{m+1}\Phi(y, \cdot)\|_{W^{1,p}} \leq M_1 M_2 M_3 M_4$ для любого а.в. компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a; b]$, откуда формальный дифференциал Адамара $d_H^{m+1}\Phi(y, h)$ $(m + 1)$ раз K -непрерывен в $W^{1,p}[a; b]$. Следовательно, по теореме 2 он $(m + 1)$ раз непрерывен в $W^{1,p}[a; b]$.

Проведем оценку $\Delta^m \Phi(y, h) - d_H^{m+1}\Phi(y)(h)^{m+1}$, используя условие (15) для $\nabla_{yz}^m f$:

$$\begin{aligned} |\Delta^m \Phi(y, h) - d_H^{m+1}\Phi(y)(h)^{m+1}| &\leq \int_a^b |(\Delta_{yz}(\nabla_{yz}^m f) - \nabla(\nabla_{yz}^m f))(x, y, y')(h, h)| \leq \\ &\leq \int_a^b A_1(C; h, h') dx + \int_a^b A_2(C; h, h') |y'|^p dx, \end{aligned} \tag{19}$$

где коэффициенты A_1, A_2 — неотрицательные борелевские функции от h и h' , удовлетворяющие условиям (16) (при $k = h'$). Аналогично случаю $n = 1$ из (19) получаем в итоге

$$|\Delta^m \Phi(y, h) - d_H^{m+1}\Phi(y)(h)^{m+1}| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{C_\Delta} \rightarrow 0 \tag{20}$$

для любого а.в. компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a; b]$.

Так как по предположению вариационный функционал m раз H -дифференцируем и справедливо условие (20), то формальный дифференциал Адамара порядка $m + 1$ есть дифференциал Адамара порядка $m + 1$. Это и означает $(m + 1)$ -кратную H -дифференцируемость функционала $\Phi(y)$ во всех C^1 -гладких точках из $W^{1,p}[a; b]$, а также справедливость равенства (17). Следовательно, по теореме 4 он $(m + 1)$ раз дифференцируем во всех C^1 -гладких точках из $W^{1,p}[a; b]$.

Таким образом, на основании метода математической индукции доказана n -кратная дифференцируемость функционала $\Phi(y)$ во всех C^1 -гладких точках из $W^{1,p}[a; b]$. \square

Результаты И. В. Орлова получены при финансовой поддержке регионального гранта РФФИ (проект № 15-41-01005).

Библиографический список

1. Tonelli L. Fondamenti di Calcolo delle Variazioni. Bologna : Zanichelli, 1921–1923.
2. Dacorogna B. Direct methods in the calculus of variations. N. Y. : Springer-Verlag, 1989.
3. Jost J., Li-Jost X. Calculus of variations. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1998.
4. Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Осмоловский Н. П., Протасов В. Ю., Тихомиров В. М., Фурсиков А. В. Оптимальное управление. М. : МЦНМО, 2008.
5. Орлов И. В., Божонков Е. В. Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1 : учеб. пособие. Симферополь : ДИАЙПИ, 2010.
6. Кузьменко Е. М. Компактные экстремумы и компактно аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$ над многомерной областью. : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Симферополь, 2014. 142 с.
7. Orlov I. V. Compact-analytical properties of variational functionals in Sobolev spaces $W^{1,p}$ // Eurasian Math. J. 2012. Vol. 3, № 2. P. 94–119.
8. Скрыпник И. В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев : Наук. думка, 1973.
9. Schmeisser H.-J. Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness // Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications : Proc. of the Spring School held in Prague. May 30–June 6, 2006. Praha : Czech Academy of Sciences, Mathematical Institute, 2007. Vol. 8. P. 145–204.
10. Орлов И. В., Столякин Ф. С. Предельная форма свойства Радона – Никодима справедлива в любом пространстве Фреше // Современная математика. Фундаментальные направления. 2010. Т. 37. С. 55–69.
11. Богачев В. И. Основы теории меры : в 2 т. Т. 1. М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.



Dominant Integrands Growth Estimates and Smoothness of Variational Functionals in Sobolev Spaces

I. V. Orlov, I. A. Romanenko

Orlov Igor Vladimirovich, Romanenko Igor Alekseevich, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, 4, Vernadskogo ave., 295007, Simferopol, Republic of Crimea, Russia, igor_v_orlov@mail.ru, rom.igor.alex@gmail.com

For variational functionals in Sobolev spaces $\{W^{1,p}\}$ ($1 \leq p < \infty$) we introduce a sequence of so-called dominant "growth estimates" for the gradient of appropriate order of the integrand, each of which guarantees the appropriate level of smoothness of variational functional in the C^1 -smooth points of the Sobolev space. Earlier studied K-pseudopolynomial representations of the integrand are particular cases of dominant growth estimates. However, unlike the pseudopolynomial case ($p \in \mathbb{N}$), our approach enables us to consider variational problems on the complete Sobolev scale ($1 \leq p < \infty$).

Key words: variational functional, Sobolev spaces, integrand, dominant growth estimates, dominating mixed smoothness, variational problems.

The results of the first author were obtained by the financial support of Regional Grant of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-41-01005).

References

1. Tonelli L. *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Bologna, Zanichelli, 1921–1923.
2. Dacorogna B. *Direct methods in the calculus of variations*. New York, Springer-Verlag, 1989.
3. Jost J., Li-Jost X. *Calculus of variations*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1998.
4. Galeev Je. M., Zelikin M. I., Konjagin S. V., Magaril-Il'jaev G. G., Osmolovsky N. P., Protasov V. Yu., Tikhomirov V. M., Fursikov A. V. *Optimal'noe upravlenie* [Optimal control]. Moscow, MCNMO, 2008 (in Russian).
5. Orlov I. V., Bozhonok E. V. *Dopolnitel'nye glavy sovremennogo estestvoznaniya. Variacionnoe ischislenie v prostanstve Soboleva H^1 : uchebnoe posobie* [Additional chapters of modern science. The calculus of variations in Sobolev space H^1 : tutorial]. Simferopol', DIAJPI, 2010 (in Russian).
6. Kuz'menko E. M. *Kompaktnye jekstremumy i kompaktno analiticheskie svojstva variacionnykh funkcionalov v shkale prostranstv Soboleva $W^{1,p}$ nad mnogomernoj oblast'ju*. Diss. kand. fiz.-mat. nauk [Compact extrema and compact-analytical properties of variational functionals in the scale of Sobolev spaces $W^{1,p}$ over multidimensional domain : Dr. phys. and math. sci. diss.]. Simferopol', 2014, 142 p. (in Russian).
7. Orlov I. V. Compact-analytical properties of variational functionals in Sobolev spaces $W^{1,p}$. *Eurasian Math. J.*, 2012, vol. 3, no 2, pp. 94–119.
8. Skrypnik I. V. *Nelinejnye jellipticheskie uravnenija vysshego porjadka* [Nonlinear elliptic equations of a higher order]. Kiev, Naukova dumka, 1973 (in Russian).
9. Schmeisser H.-J. Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness. *Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Proceedings of the Spring School held in Prague, May 30-June 6, 2006*. Praha, Czech Academy of Sciences, Mathematical Institute, 2007, vol. 8, pp. 145–204.
10. Orlov I. V., Stonjakin F. S. Predel'naja forma svojstva Radona – Nikodima spravедлива v ljubom prostranstve Freshe [Limit shape of property of the Radon – Nikodim is valid in any Frechet space]. *Sovremennaja matematika. Fundamental'nye napravlenija* [Modern mathematics. Fundamental directions], 2010, vol. 37, pp. 55–69 (in Russian).
11. Bogachev V. I. *Osnovy teorii mery. Tom 1* [Foundations of the theory of measure. Vol. 1]. Moscow, Izhevsk, NIC "Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika", 2003 (in Russian).



УДК 517.547.2

О НАИМЕНЬШЕМ ТИПЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА $\rho \in (0, 1)$ С НУЛЯМИ НА ЛУЧЕ

О. В. Шерстюкова

Шерстюкова Ольга Владимировна, аспирантка кафедры математического анализа, Московский педагогический государственный университет, sherov73@mail.ru

Статья посвящена теории экстремальных задач в классах целых функций с ограничениями на рост и расположение нулей и связана с проблемами полноты систем экспонент в комплексной области. Рассматривается вопрос о нахождении точной нижней грани типов при порядке $\rho \in (0, 1)$ всевозможных целых функций, все нули которых лежат на одном луче и имеют заданные верхнюю ρ -плотность и ρ -шаг. Показано, что точная нижняя грань в этой задаче достигается, и приведено подробное построение экстремальной функции. Полученное в статье утверждение дает полное решение поставленной экстремальной задачи и обобщает в направлении учета шага последовательностей нулей предшествующий результат А. Ю. Попова.

Ключевые слова: тип целой функции, верхняя плотность и шаг последовательности нулей, экстремальная задача.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-433-441

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Статья выполнена в рамках исследования экстремальных задач для целых функций с нулями на луче, начатого в работах [1, 2] и продолженного в [3–8]. В работе изучаются целые функции, все нули которых расположены на фиксированном луче и имеют заданные верхнюю плотность и шаг при показателе $\rho \in (0, 1)$. Для точной формулировки задачи дадим необходимые определения.

Типом при порядке ρ (или ρ -типом) целой функции $f(z)$ называют величину

$$\sigma_\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

Верхней ρ -плотностью и ρ -шагом последовательности $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ называются соответственно характеристики

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}, \quad h_\rho(\Lambda) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|\lambda_{n+1}|^\rho - |\lambda_n|^\rho).$$

Здесь $n_\Lambda(r) = \sum_{|\lambda_n| \leq r} 1$ — считающая функция последовательности нулей $\Lambda = \Lambda_f$, выписанной с учетом кратностей в порядке возрастания модулей. Сразу отметим легко проверяемое соотношение $h_\rho(\Lambda) \leq 1/\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)$.

В дальнейшем без ограничения общности можно считать, что нули целой функции $f(z)$ расположены на положительной полуоси, т. е. $\Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+$. Зафиксируем три числа ρ, β, h , удовлетворяющие условиям

$$\rho \in (0, 1), \quad \beta > 0, \quad h \in [0, 1/\beta],$$

и поставим следующую экстремальную задачу: найти величину

$$s(\beta, h; \rho) = \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta, h_\rho(\Lambda) \geq h \}. \quad (1)$$

Укажем, что при $h = 0$, т. е. в отсутствии ограничения на шаг последовательностей нулей, задача отыскания точной нижней грани

$$s(\beta, 0; \rho) =: s(\beta, \rho) = \inf \{ \sigma_\rho(f) : \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+, \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta \}$$



была ранее решена А. Ю. Поповым в работе [1]:

$$s(\beta, \rho) = \beta C(\rho) := \beta \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^\rho}.$$

Эта задача послужила отправной точкой для наших исследований [4, 6].

Целью статьи является доказательство следующего результата.

Теорема. Пусть $\rho \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $h \in [0, 1/\beta]$. Тогда экстремальная величина (1) вычисляется по формуле

$$s(\beta, h; \rho) = h^{-1} \sup_{a>0} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{(1+as^{-1/\rho})^s} + \int_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \right\}, \quad (2)$$

где $s = 1 - \beta h$. Точная нижняя грань достигается на некоторой целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с простыми положительными нулями Λ верхней ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$ и шага $h_\rho(\Lambda) = h$.

Дальнейшее содержание таково. В параграфе 2 для произвольной целой функции $f(z)$ с нулями, подчиненными условиям задачи (1), дается оценка

$$\sigma_\rho(f) \geq h^{-1} \sup_{a>0} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{(1+as^{-1/\rho})^s} + \int_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \right\}. \quad (3)$$

При $h = 0$ оценку (3) следует понимать в предельном смысле ($h \rightarrow +0$) и в этом случае она дает точное неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geq \beta C(\rho),$$

установленное в [1]. Интересен и другой крайний случай: $h = 1/\beta$. Тогда оценка (3), снова понимаемая в предельном смысле ($s \rightarrow +0$), приводит к формуле

$$\sigma_\rho(f) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho},$$

известной ранее при условии существования предела

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\rho} = \beta. \quad (4)$$

Последовательности со свойством (4) называются измеримыми. По-видимому, только они считались экстремальными в хорошо известном для $\rho \in (0, 1)$, $\Lambda_f \subset \mathbb{R}_+$ неравенстве [9]:

$$\sigma_\rho(f) \leq \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho}.$$

В параграфе 3 завершается доказательство теоремы построением экстремальной целой функции. Детальное обоснование конструкции соответствующего примера потребовало значительных усилий и времени, тогда как оценка (3) уже была нами получена и опубликована в [4]. Подробный вывод этой оценки дается здесь для обеспечения цельности и полноты изложения. Кроме того, мы исправляем несущественную неточность, допущенную в [4].

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ОЦЕНКИ

Пусть $f(z)$ — целая функция, нули которой удовлетворяют условиям задачи (1). Докажем, что для типа $\sigma_\rho(f)$ выполнена оценка (3). По факторизационной теореме Адамара функция $f(z)$ с точностью до постоянного множителя раскладывается в бесконечное произведение нулевого рода

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n} \right), \quad z \in \mathbb{C}.$$



Введем функцию $\varphi_r(t)$ с параметром $r > 0$ по правилу

$$\varphi_r(t) := \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho}, \quad t > 0, \quad (5)$$

и воспользуемся формулой (см., например, [3])

$$r^{-\rho} \ln \max_{|z| \leq r} |f(z)| = \int_0^{+\infty} \varphi_r(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt. \quad (6)$$

Как отмечалось выше, при $h = 0$ неравенство (3) известно и поэтому в доказательстве не нуждается. Считаем далее, что $h \in (0, \beta]$. Рассмотрим вспомогательную последовательность $\Omega = (\lambda_n^\rho)_{n=1}^\infty$, шаг которой совпадает с ρ -шагом последовательности Λ , т. е.

$$h(\Omega) := \varliminf_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1}^\rho - \lambda_n^\rho) = h_\rho(\Lambda) \geq h.$$

Выберем произвольно числа $a > 0$ и $h_1 \in (0, h)$. По определению шага последовательности Ω найдем число $d > 0$ так, чтобы при всех $r \geq ad$ и $t \in [d/r, a^{-1}]$ для считающей функции $n_\Omega(r)$ выполнялось неравенство

$$n_\Omega((r/a)^\rho) - n_\Omega((rt)^\rho) \leq h_1^{-1}((r/a)^\rho - (rt)^\rho) + 1.$$

С учетом очевидного соотношения $n_\Lambda(t) = n_\Omega(t^\rho)$ перепишем последнее неравенство в виде

$$n_\Lambda(rt) \geq n_\Lambda(r/a) - r^\rho h_1^{-1} (a^{-\rho} - t^\rho) - 1. \quad (7)$$

Обозначив

$$\eta := \eta(r) = \varphi_r(1/a) = (r/a)^{-\rho} n_\Lambda(r/a),$$

по определению верхней плотности последовательности Λ имеем:

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \eta(r) = \beta.$$

Далее, согласно (5), (7) при всех $t \in [d/r, a^{-1}]$ можем записать оценку

$$\begin{aligned} \varphi_r(t) &= \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho} \geq \frac{n_\Lambda(r/a)}{(rt)^\rho} - \frac{a^{-\rho} - t^\rho}{h_1 t^\rho} - \frac{1}{(rt)^\rho} = \\ &= \frac{n_\Lambda(r/a)}{(r/a)^\rho} (at)^{-\rho} + h_1^{-1} - h_1^{-1} (at)^{-\rho} - (rt)^{-\rho} = h_1^{-1} + (at)^{-\rho} (\eta - h_1^{-1}) - (rt)^{-\rho}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $a > 0$ и $h_1 \in (0, h)$ найдется $d > 0$ такое, что при всех значениях $r \geq ad$, $t \in [d/r, a^{-1}]$ справедливо неравенство

$$\varphi_r(t) \geq h_1^{-1} + (at)^{-\rho} (\eta - h_1^{-1}) - (rt)^{-\rho}. \quad (8)$$

Заметим еще, что при всех $t > a^{-1}$ имеет место тривиальная оценка:

$$\varphi_r(t) = \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho} \geq \frac{n_\Lambda(r/a)}{(rt)^\rho} = \frac{n_\Lambda(r/a)}{(r/a)^\rho} (at)^{-\rho},$$

которая дает

$$\varphi_r(t) \geq \eta (at)^{-\rho}, \quad t > a^{-1}. \quad (9)$$

Объединяя оценки (8), (9), можем считать, что при всех $r \geq ad$ и $t > 0$ выполняется неравенство

$$\varphi_r(t) \geq \psi_r(t), \quad (10)$$



в котором

$$\psi_r(t) := \begin{cases} 0, & t \in (0, t_r), \\ h_1^{-1} + (at)^{-\rho}(\eta - h_1^{-1}) - (rt)^{-\rho}, & t \in [t_r, a^{-1}], \\ \eta(at)^{-\rho}, & t \in (a^{-1}, +\infty), \end{cases}$$

и $t_r := (h_1 r^{-\rho} + a^{-\rho}(1 - \eta h_1))^{1/\rho} \in (0, a^{-1})$. Из (10) заключаем, что

$$\int_0^{+\infty} \varphi_r(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \geq \int_{t_r}^{+\infty} \psi_r(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt, \quad r \geq ad. \tag{11}$$

Вычислим последний интеграл. После замены переменной $t = \tau^{-1}$ получим:

$$\begin{aligned} \int_{t_r}^{+\infty} \psi_r(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt &= h_1^{-1} \int_a^{t_r^{-1}} \frac{\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{1+\tau} d\tau + \eta a^{-\rho} \int_0^{t_r^{-1}} \frac{d\tau}{1+\tau} - r^{-\rho} \int_a^{t_r^{-1}} \frac{d\tau}{1+\tau} = \\ &= (a^{-\rho}(\eta - h_1^{-1}) - r^{-\rho}) \ln(1 + t_r^{-1}) + (a^{-\rho} h_1^{-1} + r^{-\rho}) \ln(1 + a) + h_1^{-1} \int_a^{t_r^{-1}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Подставим найденное выражение в (11) и осуществим в полученном неравенстве предельный переход по последовательности $r_j \rightarrow +\infty$, на которой $\eta(r_j) \rightarrow \beta$. Учитывая, что $t_{r_j}^{-1} \rightarrow a(1 - \beta h_1)^{-1/\rho}$ при $j \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \varphi_{r_j}(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt &\geq a^{-\rho}(\beta - h_1^{-1}) \ln(1 + a(1 - \beta h_1)^{-1/\rho}) + \\ &+ a^{-\rho} h_1^{-1} \ln(1 + a) + h_1^{-1} \int_a^{a(1 - \beta h_1)^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись обозначением $s = 1 - \beta h$, а также свободой выбора чисел $a > 0$ и $h_1 \in (0, h)$, получим неравенство

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \varphi_{r_j}(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt \geq h^{-1} \sup_{a>0} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{(1+as^{-1/\rho})^s} + \int_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \right\}.$$

Из представления (6) и определения типа $\sigma_\rho(f)$ теперь легко следует нужная оценка (3).

3. ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Случаи $h = 0$ и $h = 1/\beta$ обсуждены в параграфе 1. Здесь мы построим для любых $\rho \in (0, 1)$, $\beta > 0$, $h \in (0, 1/\beta)$, пример последовательности $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ с характеристиками $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $h_\rho(\Lambda) = h$, являющейся нулевым множеством целой функции:

$$f(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{\lambda_n} \right), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{12}$$

с наименьшим возможным типом

$$\sigma_\rho(f) = \max_{a>0} \varphi(a). \tag{13}$$

Здесь через $\varphi(a) = \varphi_{\beta, h, \rho}(a)$ обозначена функция из правой части формулы (2), т. е.

$$\varphi(a) = h^{-1} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{(1+as^{-1/\rho})^s} + \int_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \right\}, \quad a > 0. \tag{14}$$



Отметим, что для значений $h \in (0, 1/\beta)$ правомочна замена в (2) \sup на \max , поскольку теперь функция $\varphi(a)$ определена, положительна и непрерывна при $a > 0$, причем

$$\lim_{a \rightarrow +0} \varphi(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \varphi(a) = 0. \quad (15)$$

Итак, пусть

$$\rho \in (0, 1), \quad \beta > 0, \quad h \in (0, 1/\beta).$$

Определяем функцию $\varphi(a)$ формулой (14), где $0 < s = 1 - \beta h < 1$. Построим последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ так, чтобы $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $h_\rho(\Lambda) = h$, а ρ -тип соответствующего канонического произведения (12) вычислялся по формуле (13).

Зададим вначале вспомогательную последовательность $m_n = 2^{4^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что $m_{n+1} = m_n^4$, $n \in \mathbb{N}$, и для любого $p > 0$ выполнены соотношения

$$\sum_{k=1}^{n-1} m_k^p = o(m_n^p), \quad \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{m_k^p} = o(m_{n+1}^{-p}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Экстремальная последовательность положительных чисел Λ строится так: точки λ_j помещаются только на отрезки вида $[s^{1/\rho} m_n, m_n]$, $n \in \mathbb{N}$, с условием, что для λ_j , находящихся на каждом из указанных отрезков, λ_j^ρ образуют арифметическую прогрессию с разностью h . Вводя последовательность $\Omega = (\lambda_n^\rho)_{n=1}^{\infty} = (\mu_n)_{n=1}^{\infty}$, можем для каждого $n \in \mathbb{N}$ с учетом равенства $h^{-1}(1-s) = \beta$ записать

$$\Omega \cap [sm_n^\rho, m_n^\rho] = \{sm_n^\rho + jh : j \in \mathbb{N}, j \leq \beta m_n^\rho\}.$$

По построению имеем:

$$h_\rho(\Lambda) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1}^\rho - \lambda_n^\rho) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = h.$$

Запишем выражения для считающей функции $n_\Omega(r)$ на различных промежутках изменения переменной r . Вначале заметим, что

$$n_\Omega(sm_n^\rho) = \sum_{k=1}^{n-1} \beta m_k^\rho + O(n) = o(m_n^\rho), \quad n \rightarrow \infty,$$

согласно (16). Далее, если $r \in [sm_n^\rho, m_n^\rho]$, то

$$n_\Omega(r) = n_\Omega(sm_n^\rho) + h^{-1}(r - sm_n^\rho) + O(1) = h^{-1}(r - sm_n^\rho) + o(m_n^\rho), \quad n \rightarrow \infty.$$

Если же $r \in (m_n^\rho, sm_{n+1}^\rho)$, то

$$n_\Omega(r) = n_\Omega(m_n^\rho) = h^{-1}(1-s)m_n^\rho + o(m_n^\rho) = \beta m_n^\rho + o(m_n^\rho), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда с учетом связи $n_\Lambda(t) = n_\Omega(t^\rho)$ получаем, что

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho} = \varliminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Omega(r)}{r} = \beta.$$

Составим по предъявленной последовательности Λ каноническое произведение (12) и покажем, что его тип вычисляется по формуле (13). Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi_r(t) = \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho} = \frac{n_\Omega((rt)^\rho)}{(rt)^\rho}$$

и воспользуемся формулой

$$\sigma_\rho(f) = \varliminf_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_r(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt.$$



На основании предыдущих выкладок запишем представление

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} h^{-1} \left(1 - s \left(\frac{m_n}{rt} \right)^\rho \right) + o \left(\left(\frac{m_n}{rt} \right)^\rho \right), & t \in \left[\frac{s^{1/\rho} m_n}{r}, \frac{m_n}{r} \right], \\ \beta \left(\frac{m_n}{rt} \right)^\rho + o \left(\left(\frac{m_n}{rt} \right)^\rho \right), & t \in \left(\frac{m_n}{r}, \frac{s^{1/\rho} m_{n+1}}{r} \right), \end{cases}$$

справедливое при каждом $n \in \mathbb{N}$. Далее, зададим при $t \geq 0$ семейство функций $\Phi_r(t)$ так, что

$$\Phi_r(t) = 0, \quad t \in [0, s^{1/\rho} m_1/r],$$

а сужения $\Phi_r(t)$ на отрезки $[s^{1/\rho} m_n/r, s^{1/\rho} m_{n+1}/r]$, $n \in \mathbb{N}$, имеют вид

$$\Phi_r(t) = \begin{cases} h^{-1} \left(1 - s \left(\frac{m_n}{rt} \right)^\rho \right), & t \in \left[\frac{s^{1/\rho} m_n}{r}, \frac{m_n}{r} \right], \\ \beta \left(\frac{m_n}{rt} \right)^\rho, & t \in \left(\frac{m_n}{r}, \frac{s^{1/\rho} m_{n+1}}{r} \right). \end{cases}$$

Тогда значение $\sigma_\rho(f)$ можно находить по формуле

$$\sigma_\rho(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \Phi_r(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt, \quad (17)$$

поскольку остаточные члены в представлении $\varphi_r(t)$ не влияют на величину типа. Прямым подсчетом проверяется, что

$$\int_0^{+\infty} \Phi_r(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi \left(\frac{r}{m_k} \right) + \frac{\beta}{r^\rho} \sum_{k=1}^{\infty} m_k^\rho \ln \left(1 + \frac{r}{s^{1/\rho} m_{k+1}} \right). \quad (18)$$

Поскольку справедлива оценка

$$\frac{\beta}{r^\rho} \sum_{k=1}^{\infty} m_k^\rho \ln \left(1 + \frac{r}{s^{1/\rho} m_{k+1}} \right) \leq \frac{\beta}{\sqrt{s} r^{\rho/2}} \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^{\rho/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{m_k}{\sqrt{m_{k+1}}} \right)^\rho = \frac{\beta C(\rho/2)}{\sqrt{s} r^{\rho/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k^\rho},$$

то из (18) получаем:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} \Phi_r(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi \left(\frac{r}{m_k} \right) \right\} = 0. \quad (19)$$

С учетом оценки (3) обоснование равенства (13) сводится теперь к проверке неравенства

$$\sigma_\rho(f) \leq \varphi(a_0),$$

где через $a_0 = a_0(\beta, h, \rho)$ обозначена точка максимума на луче $a > 0$ функции (14). Последнее неравенство будет следовать из оценки

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \varphi \left(\frac{r}{m_k} \right) - \varphi(a_0) \right\} \leq 0, \quad (20)$$

так как в силу (17), (19) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(f) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \Phi_r(t) \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi \left(\frac{r}{m_k} \right) = \\ &= \varphi(a_0) + \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \varphi \left(\frac{r}{m_k} \right) - \varphi(a_0) \right\}. \end{aligned}$$



Осталось доказать неравенство (20). Оценим сумму в (20) для $r \in [m_n, m_{n+1}]$ при фиксированном $n \in \mathbb{N}$, разбивая ее на три части:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) - \varphi(a_0) &= \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) + \sum_{k=n+2}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) + \\ &+ \left(\varphi\left(\frac{r}{m_n}\right) + \varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right) - \varphi(a_0) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что интеграл в определении (14) допускает оценку

$$\int_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau} d\tau \leq a^{-\rho} \ln \frac{1+as^{-1/\rho}}{1+a}, \quad a > 0.$$

Но тогда, применяя соотношения (16) и неравенство

$$\varphi(a) \leq \beta \frac{\ln(1+as^{-1/\rho})}{a^\rho}, \quad a > 0,$$

видим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in [m_n, m_{n+1}]} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in [m_n, m_{n+1}]} \sum_{k=n+2}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) = 0. \quad (21)$$

Действительно, первое равенство в (21) следует из оценки

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) &\leq \beta \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(1+s^{-1/\rho}(r/m_k))}{(r/m_k)^\rho} \leq \\ &\leq \frac{\beta C(\rho/2)}{\sqrt{s} r^{\rho/2}} \sum_{k=1}^{n-1} m_k^{\rho/2} \leq \frac{\beta C(\rho/2)}{\sqrt{s} m_n^{\rho/2}} \sum_{k=1}^{n-1} m_k^{\rho/2}, \quad r \geq m_n. \end{aligned}$$

Второе получается аналогично.

Оценим, наконец, выражение

$$\varphi\left(\frac{r}{m_n}\right) + \varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right) - \varphi(a_0), \quad r \in [m_n, m_{n+1}],$$

опираясь на определение точки a_0 и свойство (15) функции $\varphi(a)$. Рассмотрим два возможных случая: $r \in [m_n, \sqrt{m_n m_{n+1}}]$ и $r \in [\sqrt{m_n m_{n+1}}, m_{n+1}]$. В первом случае имеем:

$$\varphi\left(\frac{r}{m_n}\right) - \varphi(a_0) + \varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right) \leq \varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right), \quad \frac{r}{m_{n+1}} \leq \sqrt{\frac{m_n}{m_{n+1}}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Во втором случае получим:

$$\varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right) - \varphi(a_0) + \varphi\left(\frac{r}{m_n}\right) \leq \varphi\left(\frac{r}{m_n}\right), \quad \frac{r}{m_n} \geq \sqrt{\frac{m_{n+1}}{m_n}} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{r \in [m_n, m_{n+1}]} \left(\varphi\left(\frac{r}{m_n}\right) + \varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right) - \varphi(a_0) \right) \leq 0. \quad (22)$$

Сочетание соотношений (21), (22) приводит к нужной оценке (20). Построение экстремального примера завершено. Теорема доказана.



Библиографический список

1. Попов А. Ю. Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2005. № 1. С. 31–36.
2. Попов А. Ю. О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ -плотности, лежащими на одном луче // Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 2. С. 246–260.
3. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 1. С. 3–28.
4. Шерстюкова О. В. О влиянии шага последовательности нулей целой функции порядка меньше единицы на величину ее типа // Наука в вузах : математика, информатика, физика, образование. М. : МПГУ, 2010. С. 192–195.
5. Брайчев Г. Г., Шерстюкова О. В. Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями фиксированных ρ -плотностей // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 199–215.
6. Шерстюкова О. В. Об экстремальном типе целой функции порядка меньше единицы с нулями фиксированных плотностей и шага // Уфимск. матем. журн. 2012. Т. 4, № 1. С. 161–165.
7. Брайчев Г. Г. Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 7. С. 31–56.
8. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями // Матем. заметки. 2012. Т. 91, № 5. С. 674–690.
9. Valiron G. Sur les fonctions entieres d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions a correspondance reguliere // Annales de la faculte des sciences de Toulouse. Ser. 3. 1913. Т. 5. P. 117–257.

On the Least Type of Entire Functions of Order $\rho \in (0, 1)$ with Positive Zeros

O. V. Sherstyukova

Sherstyukova Olga Vladimirovna, Moscow Pedagogical State University, 1, M. Pirogovskaya st., 199296, Moscow, Russia, sherov73@mail.ru

The paper is devoted to the theory of extremal problems in classes of entire functions with constraints on the growth and distribution of zeros and is associated with problems of completeness of exponential systems in the complex domain. The question of finding the exact lower bound for types of all entire functions of order $\rho \in (0, 1)$ whose zeros lie on the ray and have prescribed upper ρ -density and ρ -step is discussed. It is shown that the infimum is attained in this problem, and a detailed construction of the extremal function is given. This result gives a complete solution of the extremal problem and generalizes preceding result of A. Yu. Popov.

Key words: type of an entire function, upper density and step of sequence of zeros, extremal problem.

References

1. Popov A. Yu. The least possible type under the order $\rho < 1$ of canonical products with positive zeros of a given upper ρ -density. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2005, vol. 60, iss. 1, pp. 32–36.
2. Popov A. Yu. On the least type of an entire function of order ρ with roots of a given upper ρ -density lying on one ray. *Math. Notes*, 2009, vol. 85, iss. 1–2, pp. 226–239. DOI: 10.4213/mzm4645.
3. Braichev G. G., Sherstyukov V. B. On the least possible type of entire functions of order $\rho \in (0, 1)$ with positive zeros. *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, iss. 1, pp. 1–27. DOI: 10.4213/im4104.
4. Sherstyukova O. V. О влиянии шага последовательности нулей тселей функтсии порjadка мен'she edinit'sy na velichinu ejo tipa [On the influence of the step sequence of zeros of entire functions of order less than one on the value of its type]. *Nauka v vuzakh : matematika, informatika, phizika, obrazovanie* [Science in high schools : mathematics, computer science, physics, education]. Moscow, Moscow Pedagogical State University, 2010, pp. 192–195 (in Russian).
5. Braichev G. G., Sherstyukova O. V. The greatest possible lower type of entire functions of order $\rho \in (0, 1)$ with zeros of fixed ρ -densities. *Math. Notes*, 2011, vol. 90, iss. 1–2, pp. 189–203. DOI: 10.4213/mzm8766.
6. Sherstyukova O. V. On extremal type of an entire function of order less than unity with zeros of prescribed densities and step. *Ufa Mathematika*



- tical Journal*, 2012, vol. 4, iss. 1, pp. 151–155.
7. Braichev G. G. The least type of an entire function of order $\rho \in (0, 1)$ having positive zeros with prescribed averaged densities. *Sbornik: Mathematics*, 2012, vol. 203, iss. 7, pp. 950–975. DOI: 10.4213/sm7879.
 8. Braichev G. G., Sherstyukov V. B. On the growth of entire functions with discretely measurable zeros. *Math. Notes*, 2012, vol. 91, iss. 5-6, pp. 630–644. DOI: 10.4213/mzm9357.
 9. Valiron G., Sur les fonctions entieres d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions a correspondance reguliere. *Annales de la faculte des sciences de Toulouse Ser. 3*, 1913, vol. 5, pp. 117–257. DOI: 10.5802/afst.287.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ БЫСТРОПЕРЕМЕННЫХ ПО ВРЕМЕННОЙ КООРДИНАТЕ СИЛОВЫХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Г. Н. Белосточный¹, О. А. Мыльцина²

¹Белосточный Григорий Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, belostochny@mail.ru

²Мыльцина Ольга Анатольевна, ассистент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, omyltcina@yandex.ru

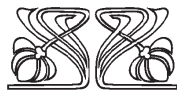
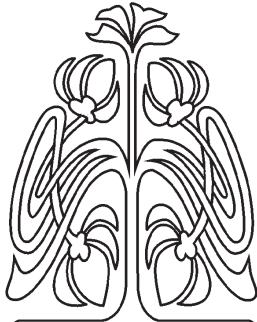
На основе несвязной термоупругости исследуется динамическое поведение геометрически нерегулярных пластинок под действием быстропеременных по временной координате температурных и силовых воздействий на основные поверхности. Предлагается подход, позволяющий получить аналитическое решение термоупругой динамической задачи для пластинки при неоднородных граничных условиях на всех четырех краях. Проводится количественный анализ влияния геометрических и термомеханических параметров упругой системы на изменение величины прогиба и характер колебаний точек срединной поверхности.

Ключевые слова: пластинка, геометрическая нерегулярность, демпфирование, динамика, термоупругость, обобщенные функции, конвективный теплообмен, сосредоточенная сила, температура.

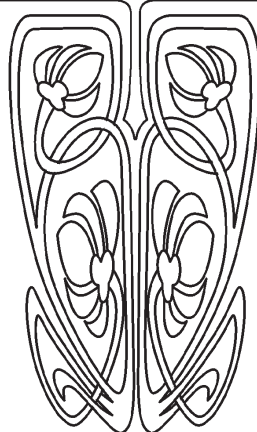
DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-442-451

Рассмотрим геометрически нерегулярную [1] изотропную пластину в условиях конвективного теплообмена через основные поверхности с окружающей средой. В некоторый момент времени t_1 в точке с координатами (x_1, y_1) прикладывается сосредоточенная сила \bar{q} , действие которой продолжается до момента t_2 . На этом же временном интервале $|t_2 - t_1|$ происходит скачкообразное изменение температуры окружающей среды на постоянную величину T_1^+ . Предполагается, что пластинка испытывает линейное демпфирование. Ввиду отсутствия внутренних источников тепла температурное поле принимается линейным по толщине h и высоте h_i подкрепляющих ребер, расположенных симметрично относительно срединной плоскости пластинки $\Theta(x, y, z) = \theta_0(x, y) + \frac{z}{h}\theta_1(x, y)$. Решение несвязной термодинамической задачи сводится к интегрированию сингулярного дифференциального уравнения [1, 2]:

$$\frac{\gamma h}{gD} \ddot{w} + \frac{\mu}{D} \dot{w} + \nabla^2 \nabla^2 w + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta(x - \tilde{x}_i) =$$



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\beta}_i}{D} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \Big|_{x=\tilde{x}_i} \frac{d\delta}{dx} + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma h_i a_i}{gD} \ddot{w} \delta(x - \tilde{x}_i) = \\
 &= \frac{q_0 a_1 b_1}{D} \delta(x - x_1, y - y_1) (H(t - t_1) - H(t - t_2)) - \frac{1 + \nu}{h} \alpha \nabla^2 \theta_1, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $\delta(x - \tilde{x}_i)$ — дельта-функции Дирака, $H(t - t_l)$ ($l = 1, 2$) — функции Хевисайда неопределенные и ограниченные в точках t_l временной оси, μ — коэффициент демпфирования, $\frac{\beta_i}{D} = \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 a_i$, $\frac{\tilde{\beta}_i}{D} = 2(1 - \nu) \frac{\beta_i}{D}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $\Phi_{3i} = 1 + 3\frac{h}{h_i} + 3\left(\frac{h}{h_i}\right)^2$, $\theta_1(x, y)$ — температурная функция, которая является интегралом дифференциальных уравнений [3–8]

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\beta} \theta_{0,t} - \nabla^2 \theta_0 + \frac{\kappa^+}{\lambda h} \theta_0 + \frac{\kappa^-}{2\lambda h} \theta_1 + \sum_i \left[-\frac{h_i}{h} (\theta_{0,1} \varphi_i)_{,1} - \frac{h_i}{h} \theta_{0,22} \varphi_i + \frac{1}{2} \frac{h_i}{h} \frac{\kappa^-}{\lambda h} \varphi_i \theta_1 \right] + \\
 &+ \sum_i \left[\frac{1}{4} \frac{h_i}{h} \frac{\kappa_i^+}{\lambda} \theta_0 + \frac{1}{16} \frac{\kappa_i^-}{\lambda} H_{2i} \theta_1 - \frac{1}{4} \frac{h_i}{h} \left(T^+ \frac{\varkappa_i^+}{\lambda} + T^- \frac{\varkappa_i^-}{\lambda} \right) \right] \tilde{\delta}_i = \left(T^+ \frac{\varkappa^+}{\lambda h} + T^- \frac{\varkappa^-}{\lambda h} \right), \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\beta} \theta_{1,t} - \nabla^2 \theta_1 + \left(\frac{12}{h^2} + 3 \frac{\kappa^+}{\lambda h} \right) \theta_1 - 6 \frac{\kappa^-}{\lambda h} \theta_0 + \sum_i \left[-\left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \Phi_{3i}^* (\theta_{1,1} \varphi_i)_{,1} - \right. \\
 &\left. - \left(\frac{h_i}{h}\right)^3 \Phi_{3i}^* \varphi_i \theta_{1,22} + \left(\frac{12}{h^2} + 3 \frac{\kappa^+}{\lambda h} \left(\frac{h_i}{h}\right)^2 \right) \varphi_i \theta_1 + 6 \frac{h_i}{h} \frac{\kappa^-}{\lambda h} \varphi_i \theta_0 + 6 \frac{h_i}{h} \left(T^- \frac{\varkappa^-}{\lambda h} - T^+ \frac{\varkappa^+}{\lambda h} \right) \varphi_i \right] + \\
 &+ \sum_i \left\langle \frac{3}{4} H_{2i} \frac{\kappa_i^-}{\lambda} \theta_0 + \frac{1}{4} H_{3i} \frac{\kappa_i^+}{\lambda} \theta_1 - \frac{3}{4} H_{2i} \left(T^+ \frac{\varkappa_i^+}{\lambda} - T^- \frac{\varkappa_i^-}{\lambda} \right) \right\rangle \tilde{\delta}_i = \frac{6}{\lambda h} (T^+ \varkappa^+ - T^- \varkappa^-). \quad (3)
 \end{aligned}$$

Здесь обозначено: β — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, h_i/h — относительная высота ребер и $h_i/h \leq 5$ [2], \varkappa^\pm — коэффициенты теплоотдачи с основных плоскостей пластинки и торцов ребер, T^\pm — температуры окружающей среды со стороны основных поверхностей, $\varphi_i(x, \tilde{x}_i, a_i) = H(x - (\tilde{x}_i - \frac{a_i}{2})) - H(x - (\tilde{x}_i + \frac{a_i}{2}))$, $\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\varphi_i}{a_i} \rightarrow \delta(x - \tilde{x}_i)$, a_i — ширина i -го ребра, $H_{li} = (1 + \frac{h_i}{h})^l - 1$ ($l = 1, 2$), $\tilde{\delta}_i = -\delta(x - (\tilde{x}_i - \frac{a_i}{2})) + \delta(x - (\tilde{x}_i + \frac{a_i}{2}))$, $\Phi_{2i}^* = 1 + 2\frac{h}{h_i}$, $\Phi_{3i}^* = 12 + 6\frac{h}{h_i} + 3\left(\frac{h}{h_i}\right)^2$, $\kappa^\pm = \varkappa^+ \pm \varkappa^-$, $\kappa_i^\pm = \varkappa_i^+ \pm \varkappa_i^-$, n — число ребер.

Совокупность уравнений (1)–(3) образует основную систему несвязной термоупругости геометрически нерегулярной пластинки в рамках модели типа Лява и теории теплопроводности Фурье. Следует отметить, что: 1) если коэффициенты теплопроводности одинаковы, то система сингулярных дифференциальных уравнений (2), (3) распадается на два самостоятельных уравнения относительно температурных функций $\theta_p(x, y)$ ($p = 0, 1$); 2) во многих технических приложениях относительная ширина подкрепляющих элементов мала: $a_i/a \leq 0.01$. По этой причине в уравнениях системы (2), (3) на основании гипотезы «сжатых ребер», отсутствия внутренних источников тепла и симметричного расположения ребер относительно срединной плоскости пластинки слагаемые, содержащие δ -функции, можно опустить [1, 3]. Тогда, при определении температурной функции $\theta_1(x, y, t)$ для пластинки, со стороны внешней плоскости которой происходит скачкообразное изменение температуры окружающей среды на малом временном интервале $|t_2 - t_1| \ll 1$, следует исходить из уравнения

$$\frac{1}{\beta} \theta_{1,t} - \nabla^2 \theta_1 + \left(\frac{12}{h^2} + 6 \frac{\varkappa}{\lambda h} \right) \theta_1 = 6 \frac{\varkappa}{\lambda h} \langle T_0^+ + T_1^+ [H(t - t_1) - H(t - t_2)] - T^- \rangle. \quad (4)$$

2. Решение несвязной термоупругости геометрически нерегулярной пластинки при однородных краевых условиях (шарнирное опирание)

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad x = a: \quad w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad \theta_1 = 0, \\
 y = 0, \quad y = b: \quad w = 0, \quad M_{22} = 0, \quad \theta_1 = 0; \quad (5)
 \end{aligned}$$



будем разыскивать в виде двойных тригонометрических рядов с переменными по временной координате коэффициентами

$$w(x, y, t) = \sum_{km} w_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad \vartheta_1(x, y, t) = \sum_{km} \vartheta_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

где $\vartheta_{km}(t)$ на основании стандартных процедур метода двойных тригонометрических рядов являются интегралами дифференциальных уравнений [2, 9]:

$$\dot{\vartheta}_{km} + \frac{\beta}{a^2} S_{km} \vartheta_{km} = 6 \frac{\alpha\beta}{\lambda h} \Delta T_{km} + 6 \frac{\alpha\beta}{\lambda h} T_1^+ e_{km} [H(t - t_1) - H(t - t_2)]$$

и запишутся в виде

$$\vartheta_{km} = E_{km}^1 e^{-\frac{\beta S_{km}}{a^2} t} + E_{km}^2 + E_{km}^3 \left(\left(1 - e^{-\frac{\beta S_{km}(t-t_1)}{a^2}} \right) H(t - t_1) - \left(1 - e^{-\frac{\beta S_{km}(t-t_2)}{a^2}} \right) H(t - t_2) \right), \quad (6)$$

а коэффициенты $w_{km}(t)$ на основании процедуры Галеркина являются интегралами дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 w_{km}}{dt^2} + \frac{\mu g}{\gamma h} \frac{1}{H_i} \frac{dw_{km}}{dt} + \frac{gD}{\gamma h a^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i} w_{km} = 4 \frac{q_0 g}{\gamma h} \frac{1}{H_i} \frac{a_1 b_1}{ab} \sin \frac{k\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi y_1}{b} \langle H(t - t_1) - H(t - t_2) \rangle + \frac{1 + \nu}{h} \frac{gD}{\gamma h a^2} \frac{1}{H_i} L_{km} \alpha \vartheta_{km}(t). \quad (7)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} L_{km} &= (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2, & H_i &= 1 + 2 \frac{h_i}{h} \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{k\pi \tilde{x}_i}{a}, \\ \tilde{H}_i &= L_{km}^2 + 2 \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^4 \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{k\pi \tilde{x}_i}{a} + 4 (k\pi)^2 \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2 (1 - \nu) \Phi_{3i} \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \frac{a_i}{a} \cos^2 \frac{k\pi \tilde{x}_i}{a}, \\ E_{km}^1 &= \left(1 - 6 \frac{\alpha a}{\lambda h} \frac{1}{S_{km}} \right) \Delta T_{km}, & E_{km}^2 &= 6 \frac{\alpha a}{\lambda h} \frac{\Delta T_{km}}{S_{km}}, & E_{km}^3 &= 6 \frac{\alpha a}{\lambda h} \frac{e_{km}}{S_{km}} T_{km}^+, \\ e_{km} &= \frac{4(1 - \cos k\pi)(1 - \cos m\pi)}{km\pi^2}, & s_{km} &= (k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2 + 6 \frac{\alpha a}{\lambda h} + 12 \left(\frac{a}{h} \right)^2. \end{aligned}$$

При выполнении неравенства

$$4 \frac{gD}{\gamma h a^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i} > \left(\frac{\mu g}{\gamma h H_i} \right)^2$$

фундаментальная система функций для соответствующего (7) однородного дифференциального уравнения запишется

$$\varphi_{km}^1(t) = e^{-\tilde{\mu}t} \sin(K_{km}t), \quad \varphi_{km}^2(t) = e^{-\tilde{\mu}t} \cos(K_{km}t),$$

здесь

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu g}{2\gamma h H_i}, \quad k_{km} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h a^4} \sqrt{4 \frac{\tilde{H}_i}{H_i} - 12(1 - \nu^2) \frac{\mu^2 g}{\gamma E} \left(\frac{a}{h} \right) \frac{1}{H_i^2}}}$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (7) запишется в виде

$$\begin{aligned} w_{km}(t) &= (C_{km}^1 \sin(K_{km}t) + C_{km}^2 \cos(K_{km}t)) e^{-\tilde{\mu}t} + A_{km}^3 + B_{km}^3 e^{-\frac{\beta S_{km}}{a^2} t} + \\ &+ \sum_{l=1}^2 (D_{km1}^l \sin(K_{km}t) + D_{km2}^l \cos(K_{km}t) + \tilde{w}_{km}^l) H(t - t_l) + \\ &+ \sum_{l=1}^2 (F_{km1}^l \sin(K_{km}t) + F_{km2}^l \cos(K_{km}t) + \tilde{w}_{km}^l) H(t - t_l). \end{aligned}$$



Постоянные $D_{km1}^l, D_{km2}^l, F_{km1}^l, F_{km2}^l$ являются решениями алгебраических систем [9, 10]

$$\begin{aligned} & \sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l}D_{km1}^l + \cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l}D_{km2}^l = (-1)^l\tilde{w}_{km}^l, \\ & \left(\cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}}\sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) D_{km1}^l + \\ & + \left(-\sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}}\cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) D_{km2}^l = 0, \\ & \sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l}F_{km1}^l + \cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l}F_{km2}^l = -\tilde{w}'_{km}{}^l \Big|_{t=t_l}, \\ & \left(\cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}}\sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) F_{km1}^l + \\ & + \left(-\sin(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} - \frac{\tilde{\mu}}{K_{km}}\cos(K_{km}t_l)e^{-\tilde{\mu}t_l} \right) F_{km2}^l = \frac{1}{K_{km}} \left(-\tilde{w}'_{km}{}^l \right)' \Big|_{t=t_l}, \\ & \tilde{w}_{km}^l = (-1)^{l+1}4\frac{q_0a^4}{D}\frac{a_1b_1}{ab}\frac{1}{\tilde{H}_i}\sin\frac{k\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi y_1}{b}, \quad \tilde{w}'_{km}{}^l = A_{km}^l + B_{km}^l e^{-\frac{\beta S_{km}}{a^2}(t-t_l)}, \\ & A_{km}^l = \frac{(-1)^{l+1}(1+\nu)L_{km}\alpha E_{km}^3 a^2}{h\tilde{H}_i}, \quad B_{km}^l = \frac{(-1)^l \frac{1+\nu}{h} \frac{gD}{\gamma ha^2} \frac{L_{km}}{H_i} \alpha E_{km}^3}{\left(\frac{\beta S_{km}}{a^2}\right)^2 - \frac{\mu g}{\gamma h H_i} \frac{\beta S_{km}}{a^2} + \frac{gD}{\gamma ha^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i}}, \\ & A_{km}^3 = \frac{1+\nu}{h} \frac{a^2 L_{km} \alpha E_{km}^2}{\tilde{H}_i}, \quad B_{km}^3 = \frac{\frac{1+\nu}{h} \frac{gD}{\gamma ha^2} \frac{L_{km}}{H_i} \alpha E_{km}^1}{\left(\frac{\beta S_{km}}{a^2}\right)^2 - \frac{\mu g}{\gamma h H_i} \frac{\beta S_{km}}{a^2} + \frac{gD}{\gamma ha^4} \frac{\tilde{H}_i}{H_i}}. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования C_{km}^l ($l = 1, 2$) определяются из начальных условий. При $0 \leq t < t_1$ пластина находилась в покое $w = 0, w_{,t} = 0$.

3. Задача значительно усложняется в случае неоднородных краевых условий. Предположим, что на краях гладкой пластинки поддерживается постоянный по толщине перепад температуры $\tilde{\theta}_1$, тогда краевые условия (5) переписутся через функцию прогиба в виде

$$\text{при } x = 0, \quad x = a: \quad w = 0, \quad w_{,11} = -\frac{1+\nu}{h}\alpha\tilde{\theta}_1, \quad \theta_1 = \tilde{\theta}_1, \quad (8)$$

$$\text{при } y = 0, \quad y = a: \quad w = 0, \quad w_{,22} = -\frac{1+\nu}{h}\alpha\tilde{\theta}_1, \quad \theta_1 = \tilde{\theta}_1. \quad (9)$$

Температурная функция θ_1 в этом случае запишется

$$\theta_1(x, y, t) = \sum_{km} \vartheta_{km}(t) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} + \tilde{\theta}_1,$$

где $\vartheta_{km}(t)$ определяется формулой (6), в которой предварительно E_{km}^2 следует взять в виде

$$E_{km}^2 = 6\frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} \frac{\Delta T_{km}}{S_{km}} - \left(6\frac{\varkappa a}{\lambda} \frac{a}{h} + 12\left(\frac{a}{h}\right)^2 \right) \frac{e_{km}}{S_{km}} \tilde{\theta}_1.$$

Определить функцию $f(x, y)$, тождественно удовлетворяющую всем условиям (8), (9), и искать решение термодинамической задачи в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{km} w_{km}(t) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} + f(x, y)$$

не представляется возможным. По этой причине решение запишем в виде, тождественно удовлетворяющем только условиям (8)

$$w(x, y, t) = \sum_{km} w_{km}(t) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{k\pi y}{b} + \sum_k f_k(y) \sin\frac{k\pi x}{a} - \frac{1+\nu}{h}\alpha\tilde{\theta}_1 \frac{1}{2}(x^2 - ax), \quad (10)$$

где $f_k(y) = \sum_{l=0}^3 A_l^k y^l$.

Подстановка (10) в краевые условия (9) приводит к равенствам:
при $y = 0$

$$\sum_k A_0^k \sin \frac{k\pi x}{a} = \frac{1+\nu}{h} \alpha \tilde{\theta}_1 \frac{1}{2} (x^2 - ax), \quad \sum_k A_2^k \sin \frac{k\pi x}{a} = -\frac{1+\nu}{2h} \alpha \tilde{\theta}_1; \quad (11)$$

при $y = b$

$$\sum_k \sum_{l=0}^3 A_l^k b^l \sin \frac{k\pi x}{a} = \frac{1+\nu}{h} \alpha \tilde{\theta}_1 \frac{1}{2} (x^2 - ax), \quad \sum_k (A_2^k + 3A_3^k b) \sin \frac{k\pi x}{a} = -\frac{1+\nu}{2h} \alpha \tilde{\theta}_1. \quad (12)$$

Раскладывая правые части равенств (11), (12) в тригонометрические ряды, получим неоднородную алгебраическую систему для коэффициентов A_l^k

$$A_0^k = b_k^2, \quad A_2^k = -\frac{b_k^0}{2}, \quad 2A_2^k + 6A_3^k = -b_k^0, \quad \sum_{l=0}^3 A_l^k = b_k^2,$$

где

$$b_k^2 = -\frac{b_k^0}{(k\pi)^2}, \quad b_k^0 = \frac{2(1+\nu)\alpha\tilde{\theta}_1}{h} \frac{(1 - \cos(k\pi))}{k\pi}.$$

Структуру функции $w(x, y, t)$ по пространственным переменным можно считать известной, что дает возможность при определении дифференциальных уравнений для коэффициентов $w_{km}(t)$ в аппроксимации (10) исходить при отсутствии ребер из метода двойных тригонометрических рядов либо, в случае дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами (1), обращаться к процедуре Галеркина.

4. На рис. 1–7 приводятся изображения поверхностей прогибов термоупругой системы и графики движения точек срединной плоскости во времени при различных значениях относительной высоты ребер a/b , их числа n , величины температурного скачка $\tilde{\theta}_1$, числа Bio и при фиксированных значениях параметров: $\mu = 0.00007$, $q_0 = 10$, $T_0^+ = T^- = 20$, $t_1 = 1$ с, $t_2 = 1.005$ с, $h/a = 0.005$.

На рис. 1–3 изображены при $a/b = 1$, $Bio = 0.5$, $T_1^+ = 100$ поверхности прогиба гладкой ($n = 0$) и ребристой ($n = 3$, $h_i/h = 2$) пластин в различные моменты времени, близких к верхней границе интервала температурно-силовых воздействий.

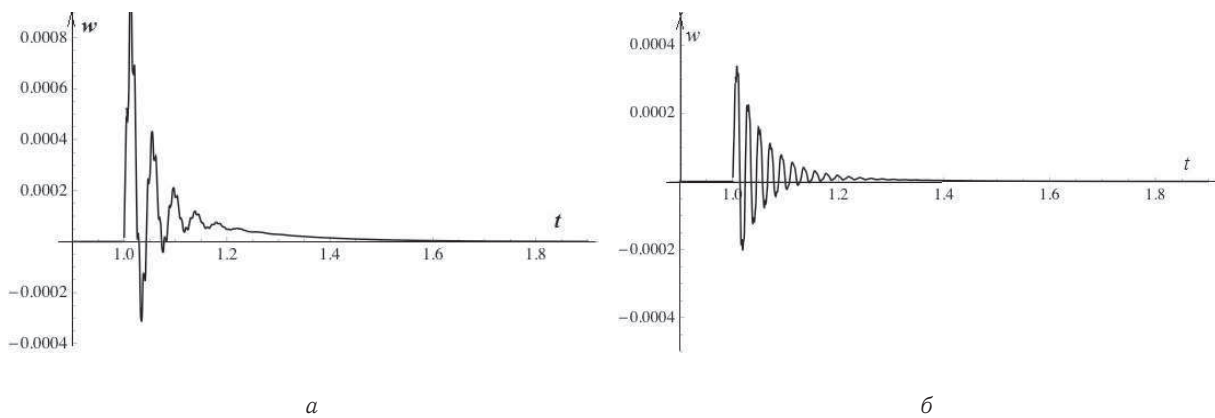


Рис. 1. Графики движения точек срединной плоскости $w(a/2, b/2, t)$ гладкой (а) и ребристой (б) пластин

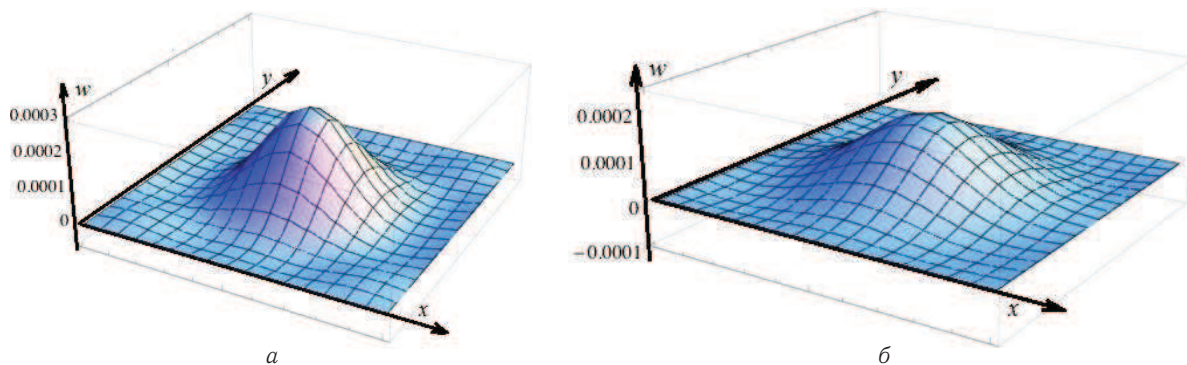


Рис. 2. Поверхность прогиба $w(x, y, t)$ гладкой пластины: а — при $t = 1.0025$; б — при $t = 1.0053$

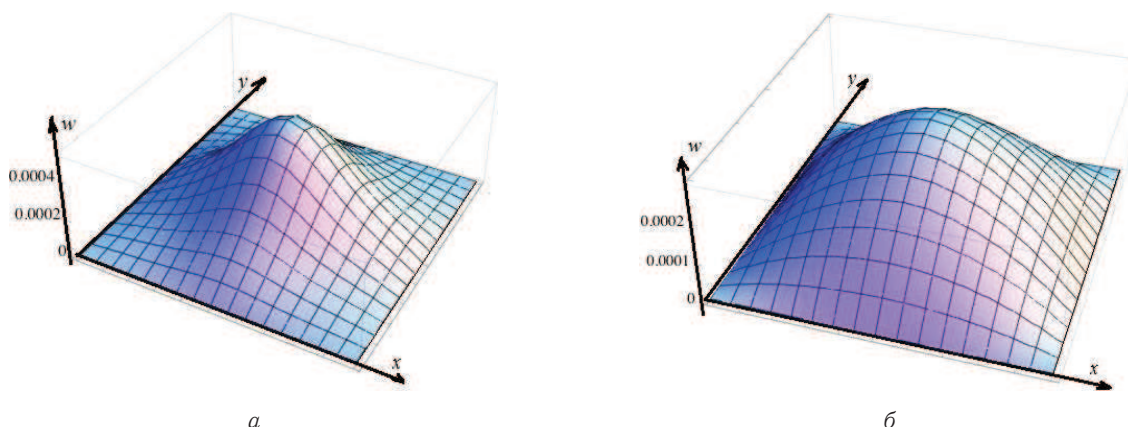


Рис. 3. Поверхность прогиба $w(x, y, t)$ ребристой пластины: а — при $t = 1.0025$; б — при $t = 1.0053$

Количественный анализ полученных решений выявил следующие закономерности в отклике термоупругой системы на изменения перечисленных параметров.

1. С увеличением числа ребер (как и их жесткости на изгиб и кручение) размахи колебаний уменьшаются, частота значительно возрастает (рис. 4). Следует отметить, что в термостатической постановке задачи увеличение изгибной жесткости ребер, как и их числа, ведет к росту прогиба, а увеличение жесткости на кручение — к уменьшению прогиба, при прочих равных условиях [11].

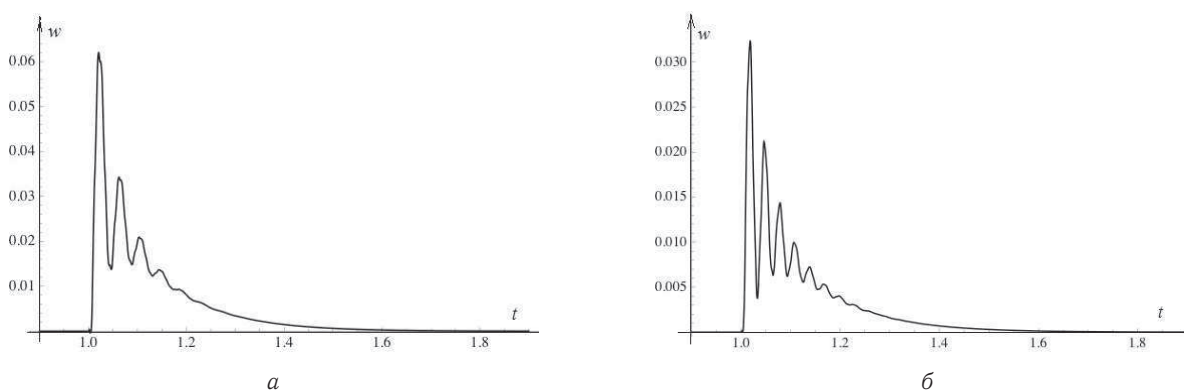
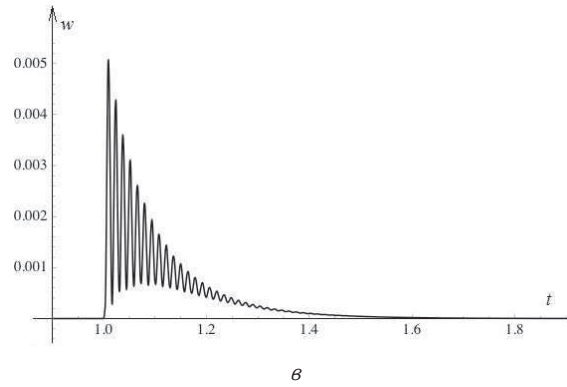


Рис. 4. Графики движения точек серединной плоскости $w(a/2, b/2, t)$ ребристой пластины с различным числом ребер n , $B_{10} = 100$, $h_i/h = 5$: а — $n = 0$; б — $n = 1$



Окончание рис. 4. $\nu - n = 10$

2. Существенное влияние на частоту и размахи колебаний ребристой пластинки оказывает параметр a/b (рис. 5), с уменьшением которого размахи колебаний возрастают, при этом частота колебаний существенно уменьшается. Этот факт объясняется изменением длины подкрепляющих элементов.

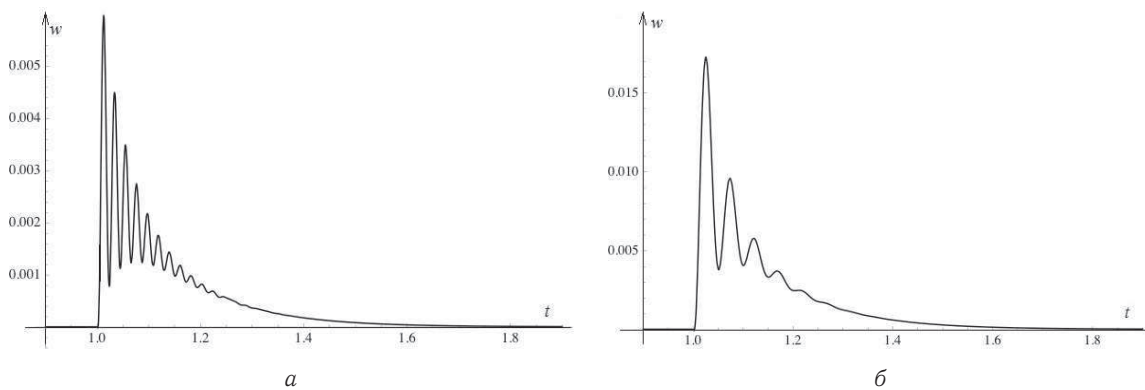


Рис. 5. Графики зависимости движения точек плоскости $w(a/3, b/3, t)$ ребристой пластины от параметра a/b при $Bio = 50$, $\tilde{\theta}_1 = 100$, $n = 3$: а — $a/b = 1$; б — $a/b = 1/2$

3. При малых значениях параметра Bio затухающие колебания геометрически нерегулярной пластинки происходят около прямой, практически совпадающей с временной осью (рис. 6).

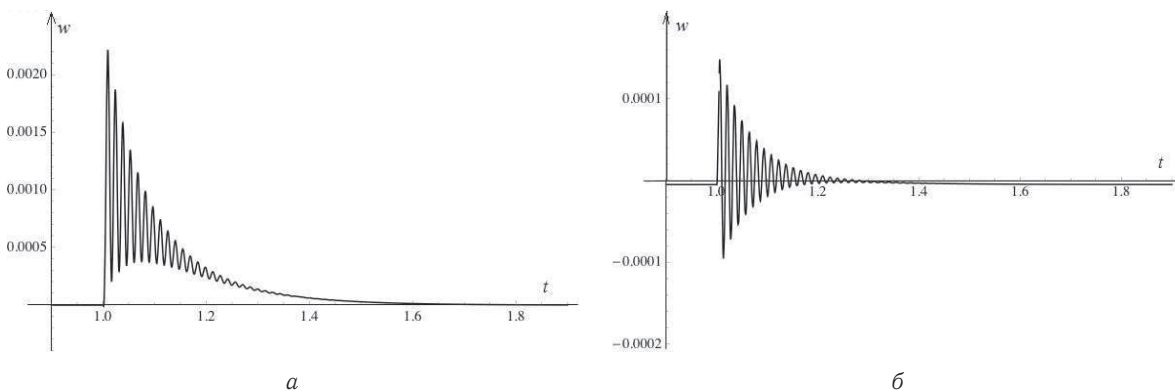


Рис. 6. Графики зависимости движения точек плоскости $w(a/3, b/3, t)$ ребристой пластины от параметра Bio при $a/b = 1$, $\tilde{\theta}_1 = 100$, $n = 9$: а — $Bio = 50$; б — $Bio = 1$

4. При наличии на краях пластинки перепада температуры по толщине асимметричные затухающие колебания происходят около прямой параллельной временной оси. Расстояние между этими прямыми зависит от величины перепада (рис. 7).

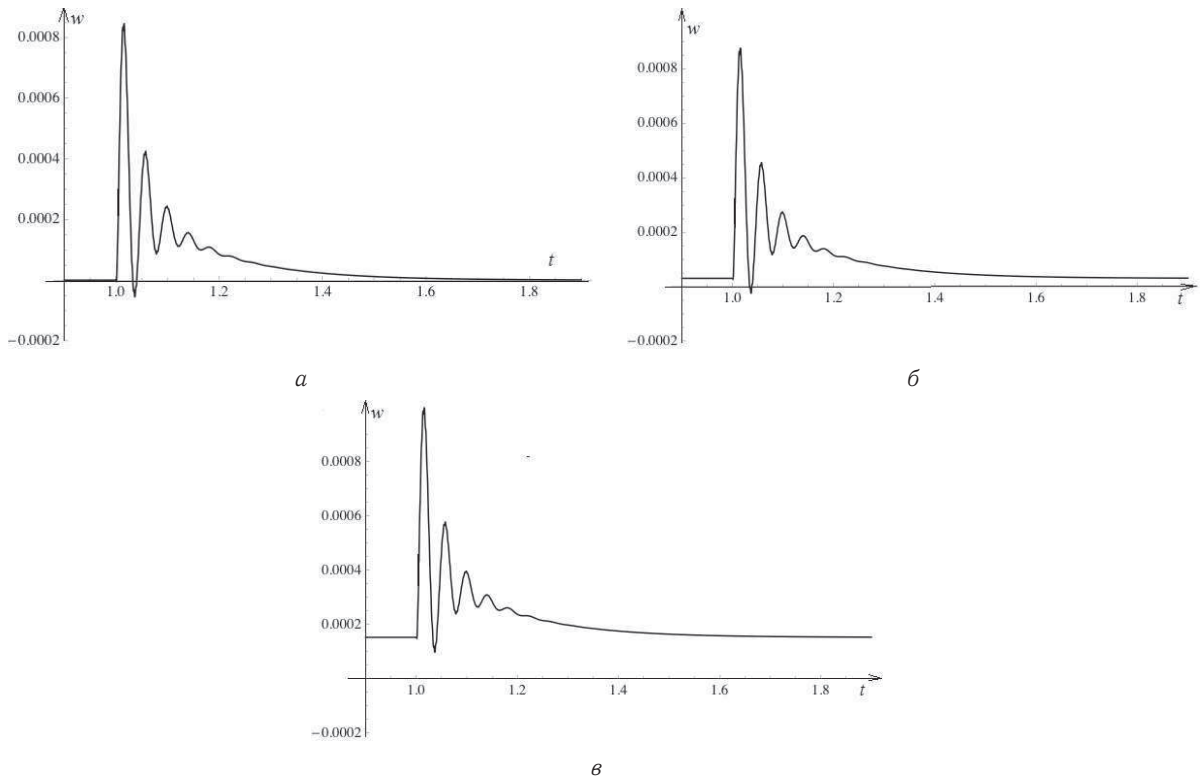


Рис. 7. Графики зависимости движения точек плоскости $w(a/3, b/3, t)$ ребристой пластины от величины перепада температуры $\tilde{\theta}_1$ при $Bio = 1$: а — $\tilde{\theta}_1 = 0$; б — $\tilde{\theta}_1 = 20$; в — $\tilde{\theta}_1 = 100$

Отмеченные закономерности термоупругого поведения геометрически нерегулярной пластинки происходят на временном промежутке, значительно большем (более чем в 38 раз) временного интервала температурно-силового воздействия. В целом картина нестационарного термоупругого поведения геометрически нерегулярной пластины чрезвычайно сложная. Алгоритмизация полученных аналитических решений не представляет трудности, что весьма важно для инженерной практики в целях предварительного количественного и качественного анализов поведения геометрически нерегулярной пластины под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий, предусмотренных условиями эксплуатации конструкции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-00644а).

Библиографический список

1. Белосточный Г. Н. Геометрически нерегулярные оболочки и пластинки под действием температурных факторов : дис. ... д-ра техн. наук. М. : МАИ, 1992. 593 с.
2. Мыльцина О. А., Белосточный Г. Н. Термоупругость подкрепленной пластинки под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий на границе // Вестн. МАИ. 2014. Т. 21, № 2. С. 169–174.
3. Белосточный Г. Н., Гуцин Б. А. Уравнения теплопроводности оболочек со ступенчато изменяющейся толщиной / Саратов. политех. ин-т. Саратов, 1990. 11 с. Деп. в ВИНТИ 14.06.90, № 3434-B90.
4. Белосточный Г. Н., Рассудов В. М. Нестационарное уравнение теплопроводности подкрепленных оболочек и некоторое решение задачи термоупругости ребристых пластин и пологих оболочек с учетом связности полей температуры и деформаций / Саратов. политех. ин-т. Саратов, 1984. 49 с. Деп. в ВИНТИ 6.04.84, № 2080-84.
5. Проблемы высоких температур в авиационных конструкциях / под ред. Г. В. Ужика М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 595 с.
6. Чернуха Ю. А. Дискретно-континуальная модель температурных полей оребренных оболочек // Матем. методы и физ.-мех. поля. 1978. Т. 7. С. 43–47. URL: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/688/734> (дата обращения 10.09.15).
7. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость



- тонких оболочек. Киев : Наук. думка, 1978. 343 с.
8. Расчет элементов конструкций летательных аппаратов / под ред. В. В. Кабанова. М. : Машиностроение, 1982. 136 с.
 9. Белостошный Г. Н. Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Докл. Академии военных наук. 1999. № 1. С. 14–26.
 10. Белостошный Г. Н., Гуцин Б. А. Эффективный метод решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений // Прикладные задачи напряженного состояния упругих тел : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во СПИ, 1987. С. 54–58.
 11. Белостошный Г. Н., Зеленикин Ю. В. Некоторые решения задач несвязной термоупругости изотропных систем «пластинка-ребра» на базах континуальной и дискретной моделей / Саратов. политех. ин-т. Саратов, 1982. 12 с. Деп. в ВИНТИ 7.01.82, № 521-82.

The Geometrical Irregular Plates under the Influence of the Quick Changed on the Time Coordinate Forces and Temperature Effects

G. N. Belostochny, O. A. Myltcina

Belostochny Grigory Nikolaevich, Myltcina Olga Anatolevna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, belostochny@mail.ru, omyltcina@yandex.ru

On the basis of incoherent thermoelasticity, the dynamic behaviour of geometrically irregular plates under the influence of quick changed, on the time coordinate, forces and temperature effects on surfaces is considered. An approach allowing to obtain the analytical solution of the thermoelasticity dynamic problem for the plate under inhomogeneous boundary conditions at all four edges is suggested. Quantitative analysis of the influence of the geometrical and thermomechanical parameters of elastic system on the change of bending and the character of oscillation of the points of medial surface is carried out.

Key words: plate, geometrical irregularity, damping, динамика dynamics, thermoelasticity, generalized functions, convective heat exchange, concentrated force, temperature.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-08-00644a).

References

1. Belostochny G. N. *Geometricheski neregularnyye obolochki i plastinki pod deistviem temperaturnykh faktorov*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Geometrically irregular shells and plates under the influence of temperature factors : Dr. techn. sci. diss.]. Moscow, MAI, 1992, 593 p. (in Russian).
2. Myltcina O. A., Belostochny G. N. Thermoelasticity of the reinforced plate under influence of quick change for coordinate of thermal and force factors on the boundary. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2014, vol. 21, iss. 2, pp. 169–174 (in Russian).
3. Belostochny G. N., Gushchin B. A. *Uravneniia teploprovodnosti obolochek so stupenchato izmeniaiushcheisia tolshchinoi* [Equations of thermoelasticity of shells with step variation in thickness] / Saratov Polytechnic Institute, Saratov, 1990, 11 p. Dep. in VINITI 14.06.90, no. 3434-B90 (in Russian).
4. Belostochny G. N., Rassudov V. M. *Nestatsionarnoe uravnenie teploprovodnosti podkrepennykh obolochek i nekotoree reshenie zadache termouprugosti rebristykh plastin i pologikh obolochek s uchetom svyaznosti polei temperatury i deformatsii* [Nonstationary equation of thermal conductivity of supported shells, and some solution of the problem of the thermo elasticity of ribbed plates and shallow shells with account of the coherence of temperature and deformation fields] / Saratov Polytechnic Institute, Saratov, 1984, 49 p. Dep. in VINITI 6.04.84, no. 2080-84 (in Russian).
5. *Problemy vysokikh temperatur v aviastroitel'nykh konstruktsiiakh* [Problems of high temperatures in the aerostructures] / ed. by G. V. Uzhik. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1961, 595 p. (in Russian).
6. Chernukha Yu. A. Diskretno-kontinual'naiia model' temperaturnykh polei orebrennykh obolochek [The discrete - continuum model of the temperature fields of ribbed shells]. *Mat. metody i fiz.-mekh. polia*, 1978, vol. 7, pp. 43–47 (in Russian). Available at: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/688/734> (accessed 10, September, 2015).
7. Podstrigach Ia. S., Shvets R. N. *Termoupru-*



- gost' tonkikh obolochek* [Thermoelasticity of thin shells]. Kiev, Naukova Dumka, 1978, 343 p. (in Russian).
8. *Raschet elementov konstruksii letatel'nykh apparatov* [Calculation of the components of the aircraft structure] / ed. by V. V. Kabanova. Moscow, Mashinostroenie, 1982, 136 p. (in Russian).
 9. Beloshtochny G. N. Analiticheskie metody opredeleniia zamknutykh integralov singuliarnykh differentsial'nykh uravnenii termouprugosti geometricheski neregularnykh obolochek [Analytical methods for definition of the closed integrals of singular differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells]. *Doklady Akademii voennykh nauk*, 1999, no. 1, pp. 14–26 (in Russian).
 10. Belostochny G. N., Gushchin B. A. Effektivnyi metod resheniia lineinykh neodnorodnykh differentsial'nykh uravnenii [The effective method for solution of linear inhomogeneous differential equations]. *Prikladnye zadachi napriazhennogo sostoianiia uprugikh tel : Mezhdouzovsk. nauchn. sb.* [Applications strained condition of elastic bodies : Interuniversity scientific collection]. Saratov, Publ. Saratov Pedagogical Institute, 1987, pp. 54–58 (in Russian).
 11. Belostochnyi G. N., Zelepukin Iu. V. Nekotorye resheniia zadach nesviaznoi termouprugosti izotropnykh sistem «plastinka – rebra» na bazakh kontinual'noi i diskretnoi modelei [Some solutions of the problems of incoherent thermoelasticity of the isotopic systems «plate – ribs» on the basis of the continuum and discrete models] / Saratov Polytechnic Institute. Saratov, 1982, 12 p. Dep. in VINITI 7.01.82, no. 521-82 (in Russian).

УДК 539.374

МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ КОНТИНУУМОВ СО СВЯЗАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ МИКРОСТРУКТУРЫ

В. А. Ковалев¹, Ю. Н. Радаев²

¹Ковалев Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры финансового менеджмента, Московский городской университет управления Правительства Москвы, kovalev.kam@gmail.com

²Радаев Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Предложена новая теоретико-полевая модель термоупругого континуума с микрополярной структурой, определяемой микроструктурными d -векторами и d -тензорами, ранг которых может быть произвольно высоким. Микроструктурные векторные и тензорные экстраполевые переменные подчиняются уравнениям связей (ограничениям), конечным (голономным) или дифференциальным (неголономным). Исследование выполнено на основе лагранжева полевого формализма в стиле 4-ковариантных физических теорий поля. Наличие конечных или дифференциальных связей, накладываемых, в частности, на микроструктурные параметры, подразумевает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления, точнее, как вариационной задачи Лагранжа для многомерного интегрального функционала. Правило множителей Лагранжа применяется для вывода дифференциальных уравнений поля при наличии связей между микроструктурными переменными. Связи могут быть конечными и дифференциальными, в каждом их этих случаев получены уравнения поля. В качестве примера рассматривается микрополярный континуум с жестким репером директоров, определяющих его микроструктуру.

Ключевые слова: термоупругость, микроструктура, микрополярный континуум, поле, действие, d -тензор, связь, множитель Лагранжа.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-451-461

1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Содержание механики континуума как науки и современный подход к математическому представлению деформаций и напряжений, выводу уравнений динамики и термодинамики, формулировке определяющих уравнений сложились в результате довольно длительного исторического развития. Механика континуума продолжает бурно развиваться, и прогресс этой науки в значительной мере связан



с новыми моделями сплошных деформируемых сред. Никогда не следует забывать о том, что корректное построение новых математических моделей континуума должно опираться на проверенные временем принципы и методы. Не последняя роль здесь принадлежит методам теории поля. Часто теоретико-полевые методы выступают как единственный инструмент вывода физически приемлемых и разумных уравнений. Указанное обстоятельство характерно, прежде всего, для сложных континуумов с экстрастепенями свободы, приписываемыми микроэлементам, в частности, для микрополярных сред, когда признаются допустимыми дополнительные повороты и аффинные деформации микроэлементов.

Как известно, теории поля обладают одним неоспоримым аналитическим преимуществом — возможностью их систематического вывода из одного вариационного функционала. Указанный вариационный функционал называется действием. Принцип наименьшего действия отделяет действительные процессы и состояния от всех других, кинематически и термодинамически допустимых. Преимущества теоретико-полевой точки зрения в механике микрополярных континуумов убедительно продемонстрированы в ряде публикаций. Важными элементами теоретико-полевого подхода являются также ковариантность дифференциальных уравнений поля и вариационные симметрии поля. Последние позволяют находить законы сохранения, которые выступают в роли «первых интегралов» дифференциальных уравнений поля и выполняются в силу уравнений поля, т.е. на решениях дифференциальных уравнений поля.

Нелинейные термомеханические модели сложных континуумов с микроструктурой, в частности, микрополярные среды и метаматериалы, в решающей степени определяются термодинамическими параметрами состояния, которые формируются из независимых объективных (т.е. выдерживающих повороты эйлеровой пространственной координатной системы в трехмерном пространстве) скалярных, векторных и тензорных переменных, определяющих термодинамическое состояние микроэлемента. Подобные системы термодинамических параметров состояния мы будем называть также термодинамическими базисами. Термодинамический базис должен обладать необходимыми свойствами полноты относительно тензорных мер состояния континуума.

Теоретико-полевые формулировки всегда подразумевают существенное и интенсивное использование понятий и формализма вариационного исчисления [1]. С формальной точки зрения принцип наименьшего действия принадлежит к классу основных задач вариационного исчисления. Однако по существу это не в полной мере соответствует действительности, поскольку в механике символ вариации традиционно обозначает виртуальную вариацию, т.е. не произвольное сколь угодно малое изменение, а изменение, совместимое со связями, ограничивающими геометрические положения, кинематические и термодинамические состояния. Виртуальные вариации определяющих переменных являются произвольными, только если они независимы друг от друга. В противном случае, принцип наименьшего действия следует отнести к классу *связанных* задач вариационного исчисления. Такая постановка вариационных задач впервые была предложена Лагранжем и называется задачей Лагранжа. Итак, наличие ограничений (связей), накладываемых, в частности, на микроструктурные параметры, предполагает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления (calculus of variations with constraints). Ограничения при этом могут накладываться в форме конечных, либо дифференциальных уравнений и неравенств. Решение подобного рода задач обычно выполняется с помощью правила множителей Лагранжа (см., например, [2]). Рассмотрение вариационных задач для интегрального функционала с ограничениями типа равенств и неравенств на уровне необходимых условий сводится к проблеме безусловного экстремума с помощью правила Лагранжа. Оказывается, что этот принцип распространяется на задачи весьма сложной природы.

2. ДЕФОРМАЦИЯ И ЭКСТРАДЕФОРМАЦИЯ. ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕРМОМЕХАНИКИ МИКРОПОЛЯРНОГО КОНТИНУУМА

Ключевым признаком деформации континуума является изменение взаимных расстояний между его точками. В рамках математической модели, как правило, принимается концепция сравнения пространственных положений составляющих континуум точек. В этом плане необходимы инструменты, позволяющие однозначно идентифицировать все точки, совокупность которых образует континуум.



В качестве одного из способов индивидуализации, широко используемого в механике деформируемого твердого тела, обычно выступают метки, частным вариантом которых являются лагранжевы координаты-метки. Однако в некоторых случаях механизм идентификации заранее может быть не вполне ясным, как это видно на примере перемещения тени, отбрасываемой некоторым движущимся от системы источников света телом.

Индивидуальные точки континуума в механике континуума представляются специальной переменной ξ , которая, в свою очередь, идентифицируется с помощью координат ξ^α (так называемые материальные координаты). Референциальная координата \mathbf{X} всегда взаимно-однозначно связана с материальной переменной ξ , поэтому референциальную переменную \mathbf{X} можно рассматривать как материальную и попросту отождествить переменные \mathbf{X} и ξ . То же самое относится к координатам X^α и ξ^α .

Ясно, что в наиболее общей форме деформацию континуума можно выразить отображением

$$\xi \rightarrow \mathbf{x}, \tag{1}$$

которое в каждый данный момент времени t указывает пространственное положение \mathbf{x} индивидуальной точки континуума ξ . В силу сказанного выше отображение (1) может быть заменено

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}. \tag{2}$$

В теориях континуума с микроструктурой (см., например, [3]) произвольная «конечная» деформация континуума, представляемая чисто геометрическим преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \tag{3}$$

положения \mathbf{X} отсчетной (референциальной) конфигурации в соответствующее актуальное место \mathbf{x} пространства, сопровождается экстрадеформацией, проявляющейся в форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех некопланарных полярных d -векторов \mathbf{d}_α ($\alpha = 1, 2, 3$), связанных с микроэлементом:

$$\mathbf{d}_\alpha = \mathbf{d}_\alpha(\mathbf{X}, t). \tag{4}$$

Деформация и экстрадеформация в координатах X^α , x^j имеют следующий вид:

$$x^j = x^j(X^\alpha, t), \tag{5}$$

$$\mathbf{d}_\alpha^j = \mathbf{d}_\alpha^j(X^\alpha, t). \tag{6}$$

Система трех пространственных полярных d -векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, по существу задает микрополярную структуру континуума. Эта система в самом общем случае предполагается «нежесткой».

Переменные \mathbf{X} и \mathbf{x} (и позиционные координаты X^α , x^j) выступают как соответственно лагранжева (отсчетная, референциальная) и эйлерова (пространственная) переменные, если воспользоваться стандартной терминологией механики континуума [4, 5]. С этими переменными связаны метрики: отсчетная (лагранжева) метрика $g_{\alpha\beta}$ и пространственная (эйлерова) метрика g_{ij} . Конвективная (сопутствующая) метрика характеризуется метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ и в отличие от метрик $g_{\alpha\beta}$ и g_{ij} , определяется деформацией (3).

Как ясно из предложенных обозначений, эйлеровы пространственные индексы всегда будут обозначаться латинскими буквами, греческие буквы всегда будут указывать на отсчетные или сопутствующие индексы. Индексы, имеющие начертания \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , ... , применяются для идентификации d -вектора. Обратным штрихом (backgrime) слева от символа будут снабжаться величины, ассоциированные с референциальным состоянием. Так, например, в силу принятого выше соглашения о референциальном и актуальном положениях точек континуума должно выполняться равенство

$$\backslash \mathbf{x} = \mathbf{X}.$$



В такого рода равенствах латинский индекс у координаты x^j может трансформироваться в греческий. Кроме того, референциальное положение d -векторов часто удобнее вместо d_a^j указывать компонентами с греческим индексом

$$d_a^\alpha, \quad d_a^j = \frac{\partial x^j}{\partial X^\alpha} d_a^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3; j, \alpha = 1, 2, 3).$$

Следуя известным схемам построения математических теорий континуумов, введем градиент «конечной» деформации (градиент места, position gradient) или «дисторсию» [2, 6]

$$\partial_\alpha x^j \quad (j, \alpha = 1, 2, 3) \tag{7}$$

и соответствующий якобиан

$$J = \det(\partial_\alpha x^j). \tag{8}$$

Дисторсия, как хорошо известно, характеризует аффинную деформацию элемента континуума. Она никогда не вырождается, поэтому якобиан деформации J сохраняет свой знак.

Конвективная метрика вычисляется с помощью градиента деформации согласно формуле

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j) \tag{9}$$

и в силу своего определения ротационно-инвариантна при произвольных поворотах эйлеровой координатной системы. Последнее справедливо и для отсчетной метрики ${}^{\backslash}g_{\alpha\beta}$, поскольку

$${}^{\backslash}g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha {}^{\backslash}x^i)(\partial_\beta {}^{\backslash}x^j). \tag{10}$$

Заметим, что лагранжевы переменные X^α ($\alpha = 1, 2, 3$), дополненные четвертой временной координатой, выступают в развиваемой ниже теории как пространственно-временные координаты. Эйлеровы переменные x^j ($j = 1, 2, 3$) представляют собой физические поля. То же самое относится и к «нежесткой» системе d -векторов d_a^α ($\alpha = 1, 2, 3$). Но они классифицируются нами как экстраполевые (сверх переменных x^j) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент d_a^j ($\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$). Таким образом, полевыми переменными в данной модели будут выступать

$$x^j \quad (j = 1, 2, 3); \quad d_a^k \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3). \tag{11}$$

Как указывалось выше, система трех d -векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, собственно и задает микроструктуру континуума. С теоретико-полевой точки зрения наличие микроструктуры приводит лишь к увеличению числа полевых переменных и, возможно, повышению максимального порядка дифференцирований в списке функциональных аргументов «естественной» плотности лагранжиана. Более «тонкая» (fine) микроструктура континуума представляется экстраполями контравариантных тензоров (d -тензоров) сколь угодно высоких рангов (симметричными по всем индексам):

$$d_c^{j_1 j_2 \dots} \quad (c = 1, 2, 3, \dots). \tag{12}$$

Экстрадеформация, обусловленная наличием «тонкой» микроструктуры, математически описывается отображениями, подобными (4), т.е.

$$d_c = d_c(\mathbf{X}, t) \quad (c = 1, 2, 3, \dots), \tag{13}$$

или в координатном представлении

$$d_c^{j_1 j_2 \dots} = d_c^{j_1 j_2 \dots}(X^\alpha, t) \quad (c = 1, 2, 3, \dots). \tag{14}$$

Поведение репера d_a^α ($\alpha = 1, 2, 3$) характеризуется как его возможной «чистой» деформацией (сдвигами трехгранника и удлинениями его ребер), так и поворотом, поэтому становится ясно, что каждый



элемент континуума с микроструктурой обладает большим числом степеней свободы, чем классический континуум, деформация которого сводится лишь к трансформации позиционных координат (3). С дополнительными степенями свободы, которыми обладает микроэлемент, связаны естественно и дополнительные (экстра) инерция, импульс, кинетическое и деформационное действие (кинетическая энергия и свободная энергия). Трансформация репера \mathbf{d}_a ($a = 1, 2, 3$) может сводиться только к его «жестким» поворотам в пространстве; в этом случае [7] помимо трех трансляционных степеней свободы микроэлемент будет обладать лишь тремя дополнительными ротационными степенями свободы.

Полевые переменные (11) в любой термомеханической модели должны дополняться термическими переменными. В дальнейшем будет развиваться термомеханика с единственной термической переменной. В качестве основной термической полевой переменной примем температурное смещение ϑ , которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры θ :

$$\vartheta = \int \theta dt. \quad (15)$$

Именно такой подход характерен для теоретико-полевых формулировок термомеханики континуума.

Перечислим далее все определяющие переменные термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой. Помимо переменных x^j и ϑ и их скоростей $\partial_4 x^j = \dot{x}^j$, $\partial_4 \vartheta = \dot{\vartheta}$, к ним относятся:

- градиент деформации $\partial_\alpha x^j$ ($j, \alpha = 1, 2, 3$);
- d -векторы d_a^j ($a = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$);
- d -тензоры $d_c^{j_1 j_2 \dots}$ ($c = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$);
- референциальные градиенты d -векторов $\partial_\alpha d_a^j$ ($a = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3$);
- референциальные градиенты d -тензоров $\partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}$ ($c = 1, 2, 3, \dots; \alpha = 1, 2, 3; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$);
- референциальный градиент температурного смещения $\partial_\alpha \vartheta$ ($\alpha = 1, 2, 3$).

В основе классической теории поля (см., например, монографии [8, 9]) лежит положение о том, что непрерывное физическое поле математически представляется некоторым интегральным функционалом \mathfrak{J} , который по историческим причинам называется действием (action):

$$\mathfrak{J} = \int \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) d^4 X. \quad (16)$$

Здесь характерная для теории поля символика имеет следующий смысл:

- \mathcal{L} — «естественная» плотность лагранжиана (плотность действия);
- φ^k — упорядоченный массив физических полевых переменных;
- X^β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) — четыре пространственно-временные координаты;
- $d^4 X$ — «естественный» элемент объема четырехмерного пространства—времени.

Символ $d^4 X$ в (16) указывает на «естественный» пространственно-временной элемент объема и представляет собой обычное произведение дифференциалов пространственно-временных координат:

$$d^4 X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4. \quad (17)$$

Через ∂_β в (16) и далее обозначается оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β ; в соответствии с цепным правилом дифференциального исчисления находим:

$$\partial_\beta = \partial_\beta^{\text{expl}} + \sum_{s \geq 0} (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \partial_\beta \varphi^l) \frac{\partial}{\partial (\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_s} \varphi^l)}, \quad (18)$$

где символом $\partial_\beta^{\text{expl}}$ указывается оператор *частного* дифференцирования по *явному* вхождению переменной X^β .

Математическое описание поля представляет собой вариационный принцип, который по соображениям исторического характера называется вариационным принципом Гамильтона—Остроградского (или принципом наименьшего действия). Действительное поле реализуется в пространстве—времени



таким образом, что действие оказывается экстремальным, т. е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k при неварьируемых пространственно-временных координатах и четырехмерной области, выступающей в качестве носителя поля:

$$\delta\mathcal{I} = 0. \tag{19}$$

Из принципа наименьшего действия получаются ковариантные дифференциальные уравнения поля в форме уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0, \tag{20}$$

где

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots \tag{21}$$

есть один из важнейших дифференциальных операторов математической физики — оператор Эйлера.

Каждая теория поля подразумевает задание плотности действия (плотности Лагранжиана). Для связанного термомеханического поля в терминах референциальных переменных X^α ($\alpha = 1, 2, 3$), эйлеровых переменных x^j ($j = 1, 2, 3$), экстраполевых d -переменных и температурного смещения ϑ «естественная» плотность действия (лагранжиан) в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии принимается в следующей форме:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_a^j, d_c^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta). \tag{22}$$

Данная выше форма термомеханического лагранжиана \mathcal{L} по необходимости является весьма общей. Более специальная форма получается, если рассматривать плотность действия как разность плотности кинетической энергии и плотности свободной энергии Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \rho_R g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2} \rho_R g_{ij} \overset{ab}{\mathfrak{J}} d_a^i d_b^j + \frac{1}{2} \rho_R \sum_{\kappa} g_{j_1 k_1} g_{j_2 k_2} \dots \overset{cd}{\mathfrak{J}} d_c^{j_1 j_2 \dots} d_d^{k_1 k_2 \dots} \dots - \\ & - \psi(X^\beta, x^j, d_a^j, d_c^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta). \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь точкой в верхней позиции обозначается частное дифференцирование по времени при постоянных лагранжевых координатах X^α , которое мы будем обозначать также с помощью оператора ∂_4 ; ρ_R — референциальная плотность; $\overset{ab}{\mathfrak{J}}$, $\overset{cd}{\mathfrak{J}}$ — тензоры инерции микроэлемента. Первые три слагаемых в (23) составляют кинетическую часть плотности действия.

Вариационный интеграл термомеханического действия в силу указанной формулой (22) плотности действия будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & \int \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_a^j, d_c^{j_1 j_2 \dots}, \vartheta, \dot{x}^j, \dot{d}_a^j, \dot{d}_c^{j_1 j_2 \dots}, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha d_c^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\alpha \vartheta) d^4 X, \\ & (\alpha = 1, 2, 3; \mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; \alpha, \beta = 1, 2, 3; j, j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{24}$$

Вариационный интеграл (24) приводит к уравнениям поля, которые естественным образом распадаются на следующие четыре группы:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_j^\alpha - \dot{P}_j &= - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \overset{a}{\mathcal{M}}_j^\alpha + \overset{a}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 \overset{a}{\mathcal{Q}}_j &= 0 \quad (\mathbf{a} = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \overset{c}{\mathcal{M}}_{j_1 j_2 \dots}^\alpha + \overset{c}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2 \dots} - \partial_4 \overset{c}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \dots} &= 0 \quad (\mathbf{c} = 1, 2, 3, \dots; \alpha = 1, 2, 3; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{25}$$



Здесь введены обозначения для полевых частных производных, которые необходимы для записи дифференциального оператора Эйлера и дифференциальных уравнений поля:

$$\begin{aligned}
 P_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}, & \overset{a}{\mathcal{Q}}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{a}{d}^j}, & \overset{c}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \dots} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{c}{d}^{j_1 j_2 \dots}}, \\
 S_j^{\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)}, & \overset{a}{\mathcal{M}}_j^{\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \overset{a}{d}^j)}, & \overset{c}{\mathcal{M}}_{j_1 j_2 \dots}^{\alpha \dots} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \overset{c}{d}^{j_1 j_2 \dots})}, \\
 \overset{a}{\mathcal{A}}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{a}{d}^j}, & \overset{c}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2 \dots} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{c}{d}^{j_1 j_2 \dots}}, & s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta}, & j_R^\alpha &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \vartheta)}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

В приведенных выше уравнениях (26) приняты следующие обозначения:

- P_j — обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы;
- $\overset{a}{\mathcal{Q}}_j, \overset{c}{\mathcal{Q}}_{j_1 j_2 \dots}$ — обобщенные экстраимпульсы, соответствующие дополнительным степеням свободы;
- S_j^{α} — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа;
- $\overset{a}{\mathcal{M}}_j^{\alpha}, \overset{c}{\mathcal{M}}_{j_1 j_2 \dots}^{\alpha \dots}$ — «первые» тензоры экстранапряжений;
- $\overset{a}{\mathcal{A}}_j, \overset{c}{\mathcal{A}}_{j_1 j_2 \dots}$ — обобщенные силы, сопряженные экстраполевым переменным $\overset{a}{d}^j$ ($a = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), $\overset{c}{d}^{j_1 j_2 \dots}$ ($c = 1, 2, 3, \dots$; $j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$);
- s — плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии);
- j_R^α — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

Заметим, что (26) по существу представляют собой определяющие уравнения для рассматриваемого континуума. Лагранжев полевой формализм исключительно удобен тем, что *определяющие* уравнения получаются просто как система обозначений для полевых частных производных, необходимая для записи дифференциальных уравнений поля.

Рассмотрим важный и сравнительно простой случай, когда параметрами микроструктуры являются только d -векторы $\overset{a}{d}^j$ ($a = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$), не подчиняющиеся никаким дополнительным ограничениям. В этом случае система дифференциальных уравнений поля (25) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \partial_\alpha S_j^{\alpha} - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} & (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\
 \partial_\alpha \overset{a}{\mathcal{M}}_j^{\alpha} + \overset{a}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 \overset{a}{\mathcal{Q}}_j &= 0 & (a = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\
 \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} & (\alpha = 1, 2, 3).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Уравнения поля (27) несколько упрощаются, если считать, что лагранжиан \mathcal{L} обладает свойством трансляционной инвариантности относительно произвольных сдвигов эйлеровых переменных x^j и температурного смещения ϑ . В этом случае явная зависимость лагранжиана от переменных x^j и ϑ исключается и вместо (27) приходим к системе уравнений поля:

$$\begin{aligned}
 \partial_\alpha S_j^{\alpha} - \dot{P}_j &= 0 & (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\
 \partial_\alpha \overset{a}{\mathcal{M}}_j^{\alpha} + \overset{a}{\mathcal{A}}_j - \partial_4 \overset{a}{\mathcal{Q}}_j &= 0 & (a = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\
 \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= 0 & (\alpha = 1, 2, 3).
 \end{aligned} \tag{28}$$

3. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ МИКРОСТРУКТУРНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Как уже упоминалось, с формальной точки зрения принцип наименьшего действия принадлежит к классу простейших основных задач вариационного исчисления о поиске безусловного экстремума интегрального функционала. Однако по существу это не в полной мере соответствует действительности, поскольку в аналитической механике и термомеханике символ вариации δ согласно исторически сложившейся традиции обозначает *виртуальную вариацию*, т.е. произвольное сколь угодно малое



изменение, а изменение, совместимое со связями, ограничивающими геометрические положения, кинематические и термодинамические состояния механической или термомеханической системы. Виртуальные вариации определяющих состояние континуума переменных являются произвольными, только если они независимы друг от друга. В противном случае, принцип наименьшего действия следует отнести к классу так называемых *связанных* задач вариационного исчисления (см., например, [1]). Такая постановка вариационных задач впервые была предложена Лагранжем и называется задачей Лагранжа. Итак, наличие ограничений (связей), накладываемых, в частности, на микроструктурные параметры, предполагает формулировку проблемы как связанной задачи вариационного исчисления. Ограничения при этом могут накладываться в форме конечных либо дифференциальных уравнений и неравенств.

Связанные задачи вариационного исчисления весьма часто встречаются в механике. Их решение чаще всего опирается на правило множителей Лагранжа (см., например, [1, 2]).

Мы будем рассматривать только двусторонние связи, которые могут быть заданы либо конечными уравнениями (голономные связи), либо уравнениями, которые содержат явные вхождения первых производных от полевых переменных (дифференциальные неголономные связи). Ограничимся пока только связями между экстраполевыми d -переменными и, возможно, эйлеровыми координатами x^j .

В наиболее общей форме голономные связи между микроструктурными d -переменными d_a^j ($a = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$), $d_c^{j_1 j_2 \dots}$ ($c = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$) и переменными x^j задаются конечными уравнениями:

$$\mathcal{F}_h(x^j, d_1^j, d_2^j, d_3^j, d_1^{j_1 j_2 \dots}, d_2^{j_1 j_2 \dots}, \dots) = 0. \quad (29)$$

Число таких уравнений должно быть меньше, чем число независимых контравариантных полевых d -переменных и эйлеровых координат x^j :

$$x^j, \quad d_a^j \quad (a = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \quad d_c^{j_1 j_2 \dots} \quad (c = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3).$$

Далее рассмотрим вывод дифференциальных уравнений поля в том случае, когда d -векторы подчинены конечным (голономным) ограничениям:

$$\mathcal{F}_h(x^j, d_1^j, d_2^j, d_3^j) = 0. \quad (30)$$

Вспользуемся правилом множителей Лагранжа. С этой целью введем множители Лагранжа λ^h и новый лагранжиан \mathcal{L}^* согласно

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} - \lambda^h \mathcal{F}_h. \quad (31)$$

Заметим, что множители Лагранжа λ^h представляют собой функции только пространственно-временных координат X^α .

В уравнениях поля (27) лагранжиан \mathcal{L} подлежит замене на новый лагранжиан \mathcal{L}^* . Выполняя замену, в результате приходим к уравнениям поля:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_j^\alpha - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \lambda^h \frac{\partial}{\partial x^j} \mathcal{F}_h \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \mathcal{M}_j^\alpha + \mathcal{A}_j - \partial_4 \mathcal{Q}_j &= \lambda^h \frac{\partial}{\partial d_a^j} \mathcal{F}_h \quad (a = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (32)$$

Дифференциальные связи между микроструктурными d -переменными d_a^j ($a = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$), $d_c^{j_1 j_2 \dots}$ ($c = 1, 2, 3, \dots; j_1, j_2, \dots = 1, 2, 3$) и переменными x^j задаются неинтегрируемыми уравнениями следующего вида:

$$\mathcal{F}_h(x^j, d_1^j, d_2^j, d_3^j, d_1^{j_1 j_2 \dots}, d_2^{j_1 j_2 \dots}, \dots, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_1^j, \partial_\beta d_2^j, \partial_\gamma d_3^j, \partial_\alpha d_1^{j_1 j_2 \dots}, \partial_\beta d_2^{j_1 j_2 \dots}, \dots) = 0. \quad (33)$$



Дифференциальные связи также могут быть учтены в уравнениях поля с помощью правила множителей. Вводя множители Лагранжа λ и новый лагранжиан \mathcal{L}^* согласно

$$\mathcal{L}^{**} = \mathcal{L} - \lambda \mathcal{F}, \quad (34)$$

заменяем в уравнениях поля (27) лагранжиан \mathcal{L} на \mathcal{L}^* ; в итоге после ряда преобразований можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_j^{\alpha \cdot} - \dot{P}_j &= -(\partial_4 \lambda) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \mathcal{F} - \lambda \partial_4 \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \mathcal{F} - \\ &- (\partial_\alpha \lambda) \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha x^j)} \mathcal{F} - \lambda \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha x^j)} \mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \lambda \frac{\partial}{\partial x^j} \mathcal{F} \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha M_j^{\alpha \cdot} + \mathcal{A}_j - \partial_4 \mathcal{Q}_j &= -(\partial_4 \lambda) \frac{\partial}{\partial (\partial_4 d^j)} \mathcal{F} - \lambda \partial_4 \frac{\partial}{\partial (\partial_4 d^j)} \mathcal{F} - \\ &- (\partial_\alpha \lambda) \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha d^j)} \mathcal{F} - \lambda \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial (\partial_\alpha d^j)} \mathcal{F} + \lambda \frac{\partial}{\partial d^j} \mathcal{F} \quad (\alpha = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_R^\alpha + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (35)$$

Полученные уравнения принципиально отличаются от (32), поскольку множители Лагранжа входят в них также в форме частных производных первого порядка.

Оставшуюся часть работы посвятим уравнениям поля для жесткого репера d -векторов. В случае простейшей голономной связи, когда трансформация репера \mathbf{d} ($\alpha = 1, 2, 3$) сводится только к его «жестким» поворотам в пространстве, имеем следующие конечные ограничения:

$$g_{ij} d_a^i d_b^j = \delta_{ab} \quad (\alpha, \mathbf{b} = 1, 2, 3), \quad (36)$$

где g_{ij} — компоненты эйлеровой пространственной метрики, δ_{ab} — символ Кронекера.

В том важном и сравнительно простом случае, когда параметрами микроструктуры являются только d -векторы d_a^j ($\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$), а кинематические связи задаются уравнениями (36), система дифференциальных уравнений поля (27) подлежит некоторой модификации, поскольку согласно правилу множителей лагранжиан \mathcal{L} подлежит замене на новый лагранжиан \mathcal{L}^* :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^* = \mathcal{L} - \frac{1}{2} \lambda^{cb} \left(g_{kl} d_c^k d_b^l - \delta_{cb} \right) \quad (\mathbf{c}, \mathbf{b} = 1, 2, 3).$$

Здесь λ^{cb} — множители Лагранжа, которые представляют собой функции пространственно-временных координат. Их можно считать симметричными при перестановке индексов:

$$\lambda^{bc} = \lambda^{cb} \quad (\mathbf{c}, \mathbf{b} = 1, 2, 3).$$

Вычислим сначала требуемые для модификации уравнений поля (27) полевые производные.

Прежде всего нас интересует производная лагранжиана \mathcal{L}^* по полевой переменной x^j :

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \lambda^{cb} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} d_c^k d_b^l.$$

Полученное выражение преобразуем, принимая во внимание (Γ_{kj}^s — символы Кристоффеля второго рода пространственной метрики)

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} = \Gamma_{kj}^s g_{sl} + \Gamma_{lj}^s g_{ks},$$

а также симметрию множителей λ^{cb} . В итоге приходим к следующему выражению:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} - \lambda \Gamma_{kj}^s d_c^k d_b^l.$$



Интерес представляет также производная лагранжиана \mathcal{L}^* по экстраполевой переменной d^j_α :

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial d^j_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j_\alpha} - \frac{1}{2} \lambda^{cb} (g_{kl} \delta^k_j d^l_{bc} \delta + g_{kl} \delta^l_j d^k_{ca} \delta).$$

Привлекая затем соглашение о симметрии множителей λ^{cb} , получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial d^j_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j_\alpha} - \frac{1}{2} \lambda (g_{jl} d^l_{bc} \delta + g_{jk} d^k_{ca} \delta)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial d^j_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j_\alpha} - \lambda d^j_b.$$

В результате вместо (27) дифференциальные уравнения поля получаются в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S^{\alpha:j} - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^s \lambda d^k_{bc} \delta \quad (\alpha = 1, 2, 3; j, s, k = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha \mathcal{M}^{\alpha:j} + \mathcal{A}^*_j - \partial_4 \mathcal{Q}_j &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j^\alpha_R + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\mathcal{A}^*_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j_\alpha} - \lambda d^j_b.$$

Сворачивая левую и правую части последнего равенства с вектором d^j_α , на основании уравнений связей

$$g_{kl} d^k_c d^l_{cb} - \delta = 0$$

находим

$$(\mathcal{A}^*_j - \mathcal{A}_j) d^j_\alpha = -\lambda d^j_{ab} \delta.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).

Библиографический список

1. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1941. 308 с.
2. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М. : Наука, 1983. 448 с.
3. Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol. 17, № 5. P. 85–112.
4. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. М. : Физматгиз, 1962. 284 с.
5. Ильюшин А. А. Механика сплошных сред. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
6. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М. : Мир, 1965. 456 с.
7. Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
8. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Элементы теории поля : вариационные симметрии и геометрические инварианты. М. : Физматлит, 2009. 156 с.
9. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.



Micropolar Thermoelastic Continuum Models with Constrained Microstructural Parameters

V. A. Kovalev¹, Yu. N. Radayev²

¹Kovalev Vladimir Aleksandrovich, Moscow City Government University of Management, 28, Sretenka st., 107045, Moscow, Russia, kovalev.kam@gmail.com

²Radayev Yuri Nikolaevich, Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

A new micropolar thermoelastic continuum model formulated by microstructural d -vectors and d -tensors of an arbitrary ranks is proposed. The microstructural vectorial and tensorial extra-field variables are restricted by holonomic or non-holonomic (differential) constraints. The study is carried out in the framework of the Lagrange field formalism as a 4covariant field theory. Taking into consideration of holonomic or differential constraints involving microstructural parameters implies problem formulation as a problem of calculus of variations with constraints, namely as the variational Lagrange problem. The Lagrange multipliers technique is employed for derivation of field equations when microstructural parameters are restricted by the two types of constraints. Micropolar thermoelastic continuum model for the case of rigid rotations of the micropolar trihedron is considered as an example.

Key words: thermoelasticity, microstructure, micropolar continuum, field, action, d -tensor, constraint, Lagrange multiplier.

The present work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00139 "Hyperbolic thermal waves in solids with microstructure").

References

1. Gunter N. M. *Kurs variatsionnogo ischisleniia* [A Course of the Calculus of Variations]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1941, 308 p. (in Russian).
2. Berdichevskii V. L. *Variatsionnye printsipy mekhaniki sploshnoi sredy* [Variational Principles of Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1983, 448 p. (in Russian).
3. Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964, vol. 17, no. 5, pp. 85–112.
4. Sedov L. I. *Vvedenie v mekhaniku sploshnykh sred* [An Introduction to Continuum Mechanics]. Moscow, Fizmatgiz, 1962, 284 p. (in Russian).
5. Il'yushin A. A. *Mekhanika sploshnykh sred* [Continuum Mechanics]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1978, 287 p. (in Russian).
6. Green A., Adkins G. *Bol'shie uprugie deformatsii i nelineinaya mekhanika sploshnoi sredy* [Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics]. Moscow, Mir, 1965, 456 p. (in Russian).
7. Cosserat E. et F. *Théorie des corps déformables*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909, 226 p.
8. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elementy teorii polia : variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [Elements of the Field Theory : Variational Symmetries and Geometric Invariants]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 156 p. (in Russian).
9. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, 328 p. (in Russian).

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.688

КВАНТОВЫЕ КОМПЬЮТЕРЫ И КВАНТОВЫЕ АЛГОРИТМЫ. Часть 1. КВАНТОВЫЕ КОМПЬЮТЕРЫ

В. М. Соловьев

Соловьев Владимир Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, начальник Поволжского регионального центра новых информационных технологий, svm@sgu.ru

В работе изложены принципы функционирования квантовых компьютеров. Приведены конкурентные преимущества квантовых вычислений. Представлены варианты построения идеального квантового компьютера. Проанализирован вычислительный процесс в квантовом компьютере с позиции сложности алгоритмов. Даны примеры реализации узлов квантового компьютера на основе коммуникационных квантовых схем. Описана работа сферы Блоха и визуализация состояния кубита. Рассмотрены основные проблемы, препятствующие созданию квантовых компьютеров.

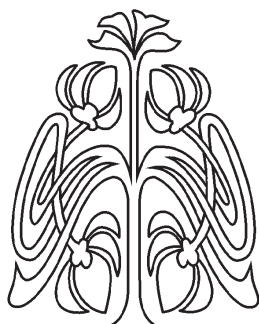
Ключевые слова: квантовые вычисления, квантовый компьютер, квантовые алгоритмы, кубит, сфера Блоха, базисные состояния, квантовый гейт, квантовая суперпозиция, квантовая запутанность, декогеренция.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-462-477

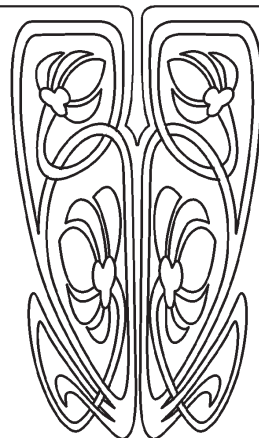
ВВЕДЕНИЕ

В области обработки информации всё явственнее нарастает конкуренция между квантовыми и классическими законами природы. В настоящее время эта конкуренция обострилась, во-первых, вследствие невозможности решить некоторый класс вычислительных задач на классическом компьютере, из-за отсутствия эффективных алгоритмов^а. В то же время квантовые вычисления (quantum computation, QC), используя парадоксы квантовой механики, позволяют решить эти задачи. Во-вторых, квантовая механика становится «локомотивом» развития современной технологической базы (в наноэлектронике, атомной промышленности, лазерных технологиях, а теперь и в информационных технологиях). Современные квантовые технологии могут поддерживать совершенно новые алгоритмы

^аВ теории сложности эффективным алгоритмом считается тот, который состоит из полиномиального числа операций, а время его выполнения полиномиально возрастает с размером решаемой задачи. Эффективные алгоритмы, относящиеся к классу полиномиальных, используют ограниченное количество вычислительных ресурсов. Неэффективные же алгоритмы требуют экспоненциально больших ресурсов, которые даже суперкомпьютеры не могут обеспечить.



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





вычислений (квантовые алгоритмы), основанные на принципах квантовой механики. По оценкам известного американского физика Джона Уилера примерно треть ВВП США основывается на достижениях квантовой механики [1, 2]. В-третьих, эксперименты с узлами квантовых компьютеров позволяют понять, как обрабатывается информация в природе. Один из лучших способов понять законы природы — это создать устройство, которое иллюстрировало бы этот закон [3, 4]. При этом для развития самой квантовой механики приходится решать специфические квантовые проблемы, которые за исключением простейших современные классические компьютеры могут решить за время, превышающее механический ресурс всей вселенной². Для решения таких задач необходимы квантовые компьютеры. Однако, несмотря на впечатляющие успехи квантовой механики в изучении фундаментальных законов природы, полномасштабная практическая реализация ее в информационных технологиях тормозится сложностью организации и описания квантовых систем. Поэтому, поняв, как работают квантовые компьютеры, можно значительно расширить вычислительные возможности современных информационных технологий.

1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ КВАНТОВОГО КОМПЬЮТЕРА

Информация, обрабатываемая современными классическими компьютерами, представляется в них двоичным кодом (битами). В любой момент времени бит может находиться в одном из двух состояний — логическом 0 или 1. Квантовые же компьютеры обрабатывают информацию на основе квантовых вычислений³, используя кубиты (квантовые биты, q-биты, qubits), являющиеся квантовой суперпозицией состояний⁴ 0 и 1, записанной следующим образом $p_0|0\rangle + p_1|1\rangle$ ⁵. В теории квантовых вычислений такая запись является описанием (списком) квантовых состояний. Она означает, что кубит состоит из списка квантовых состояний и может принимать значение 0 с вероятностью $|p_0|^2$ и значение 1 с вероятностью $|p_1|^2$, ($|p_0|^2 + |p_1|^2 = 1$). Причем эти вероятности могут быть выражены комплексными числами. Квантовые компьютеры называют еще квантовыми машинами Тьюринга⁶, имеющими теоретические сходства с недетерминированными⁷ и вероятностными⁸ компьютерами и отличающиеся от них характером изменения состояния Δ :

$$\Delta : Q \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma \times \{L, R\} \times \mathbf{C}_{[0,1]}),$$

где: Q — конечное множество состояний, Γ — алфавит ленты, L, R — направление движения ленты (на ячейку влево — L , на ячейку вправо — R), $\mathbf{C}_{[0,1]} = \{p \in \mathbf{C} | p|^2 \leq 1\}$ — вероятностный элемент,

²Число элементарных частиц во вселенной приблизительно равно 10^{78} . При моделировании методом конечных элементов квантовых свойств атома железа, состоящего из ядра и 26-ти электронов, вращающихся в трехмерном пространстве необходимо решить уравнение Шредингера в конфигурационном пространстве размерностью 78 ($26 \times 3 = 78$). При очень грубой расчетной сетке $10 \times 10 \times 10$ понадобится просчитать 10^{78} узлов, что сравнимо с механическим ресурсом вселенной.

³Квантовые вычисления — это обработка квантовыми системами информации, полученной в квантово-механических явлениях.

⁴Квантовая суперпозиция — это суперпозиция альтернативных (взаимоисключающих, наложенных) квантовых состояний, когда наблюдаемая величина не имеет конкретного значения, а ее измерения являются вероятностными. Суть принципа суперпозиций в том, что если сложить несколько разных решений в линейном уравнении, то их сумма тоже будет решением.

⁵Для описания квантовой системы используются специальные bracket (скобка) обозначения, алгебраический формализм введенный П. А. М. Дираком. Так бра-вектор $\langle y |$ обозначает вектор строку, а кет-вектор $| \rangle$ — вектор столбец, обычно обозначающий квантовые состояния.

⁶Квантовая машина Тьюринга (универсальный квантовый компьютер) — это абстрактная машина (теоретическая модель), используемая для реализации любого квантового алгоритма, выраженного формально. Она описывается кортежем: $M_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, где Q — конечное множество состояний, Σ — входной алфавит, не содержащий пустой символ \sqcup (пробел), Γ — алфавит ленты, содержащий пустой символ $\sqcup \in \Gamma$ и $\Sigma \subset \Gamma$, Δ — конечное множество допустимых состояний, q_0 — начальное состояние, q_{accept} — принимаемое состояние, q_{reject} — отвергнутое состояние [14].

⁷Недетерминированная машина Тьюринга (nondeterministic Turing machine, NTM) — это теоретическая (мысленная) модель проведения экспериментов для изучения возможностей компьютера. В отличие от детерминированной машины Тьюринга NTM может иметь не одно, а целый набор действий для конкретной ситуации (неограниченный параллелизм).

⁸Вероятностная машина Тьюринга (probabilistic Turing machine) — это NTM, выбирающая случайным образом из любого состояния и значений на ленте один из нескольких возможных переходов. От NTM она отличается тем, что вместо недетерминированного перехода машина выбирает один из вариантов с некоторой вероятностью (параллелизм, ограниченный вероятностью).



учитывающий состояние k кубитов, где $\sum^k |p|^2 = 1$. Такие компьютеры реализуют квантовые алгоритмы, которые являются реалистическими моделями квантовых вычислений, использующими квантовые схемы.

2. КВАНТОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Классические (не квантовые) алгоритмы подразумевают конечную последовательность инструкций, или шаг за шагом выполняемые процедуры. Аналогичным образом, квантовые алгоритмы также подразумевают пошаговое выполнение процедур, выполняемых на квантовом компьютере. Все классические алгоритмы выполнимы также и на квантовом компьютере, однако термин квантовый алгоритм, как правило, используется для алгоритмов, учитывающих особенности квантовых вычислений (квантовую суперпозицию, квантовую запутанность⁹ и т. д.). Все алгоритмы, реализуемые на квантовом компьютере, могут быть реализованы и на классическом компьютере, а все проблемы, неразрешимые с помощью классических компьютеров остаются неразрешимыми и с помощью квантовых компьютеров. Однако интерес к квантовым компьютерам оправдан тем, что некоторые алгоритмы (например, переборного типа) могут быть выполнены на них гораздо быстрее, чем на классических компьютерах. Наибольший интерес, в этой связи, вызывает класс BPP-алгоритмов¹⁰, расширенный в настоящее время и на квантовые алгоритмы $BQP \subseteq BQP$ (рис. 1).

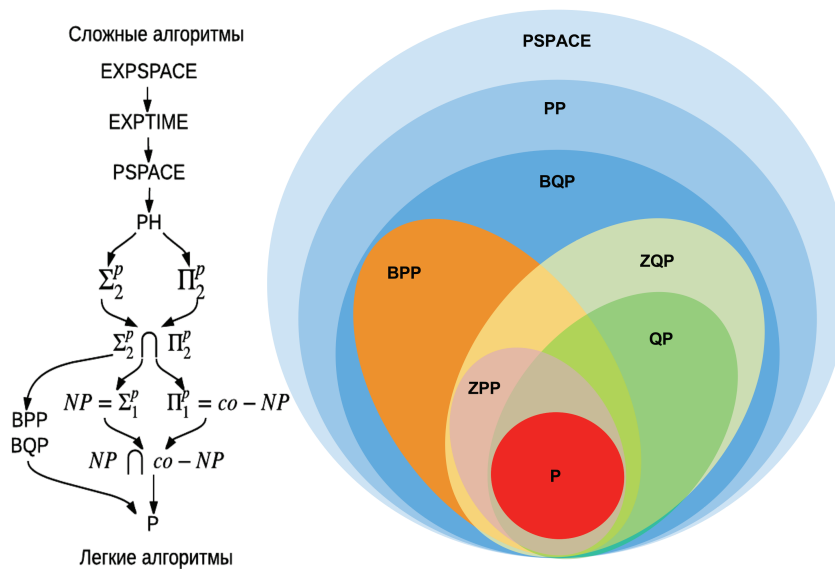


Рис. 1. Диаграмма включения классов сложности алгоритмов

⁹Квантовая запутанность (quantum entanglement) — это, с одной стороны, невозможность представления вектора состояния квантовой системы в виде прямого произведения векторов состояний, составляющих ее частей, а с другой — это взаимозависимость частей, когда они ведут себя как единое целое. При этом квантовое состояние каждой части не может быть описано независимо друг от друга. Запутанность следует из математического формализма квантовой механики. В соответствии с первым постулатом квантовой механики состояние квантовой системы полностью описывается её волновой функцией. Однако в некоторых случаях квантовым системам не удастся приписать собственные волновые функции, а только одну на всех. Такое состояние и есть запутанность.

¹⁰В теории алгоритмов классом P (polynomial) называют «быстрые» алгоритмы решения задач, время работы которых полиномиально зависит от размера входных данных. Класс P как наиболее узкий класс сложности может принадлежать также алгоритмам класса BPP (bounded-error, probabilistic, polynomial), дающим «быстрые» (за полиномиальное время) решения с высокой вероятностью. Иерархия классов сложности алгоритмов: P — polynomial; BPP — bounded-error, probabilistic, polynomial; (BQP, QP, ZQP — класс квантовых алгоритмов); BQP — bounded-error quantum polynomial; QP — quantum polynomial-time; ZQP — zero-error quantum polynomial-time; P/Poly — non uniform polynomial-time; NP — nondeterministic polynomial; co-NP — complement of NP; PH — polynomial-time hierarchy; ZPP — zero-error probabilistic; PSPACE — polynomial-space; EXPTIME — exponential time (EXP); EXPSPACE — exponential space.



С. Смейл доказал, что с точки зрения сложности алгоритмов $BPP \not\subseteq NP$, это нечто похожее на $P \neq NP$ [5]. Однако условия BPP накладывают меньше ограничений, чем условия P, что расширяет круг практического использования VQP-алгоритмов (нахождение периода, факторизация, дискретный логарифм и т. д.). В таких алгоритмах допускается производить те или иные вычисления в зависимости от полученных результатов. Требуется, чтобы правильный ответ получался в «большинстве» случаев. Выполняя параллельно множество вычислений, можно получить правильный результат с очень большой вероятностью. Так, например, в квантовом алгоритме факторизации Шора¹¹ количество операций зависит от числа десятичных знаков и пропорционально квадрату разрядности числа [6], а в самом известном классическом алгоритме решета числового поля (general number field sieve) количество шагов растет экспоненциально и быстро выходит за границы возможностей современных компьютеров (рис. 2).

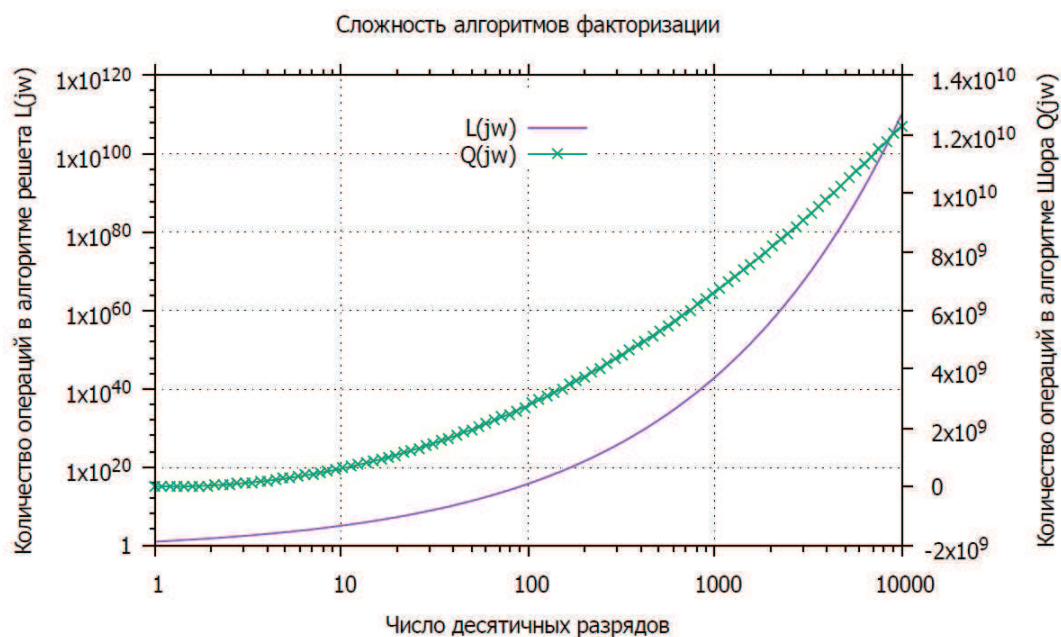


Рис. 2. Сравнение алгоритмов факторизации

Например, будущие суперкомпьютеры эксафлопсной¹² производительности позволят факторизовать 512-значное число приблизительно за 500 тысяч лет. Эту же факторизацию квантовый компьютер, выполняющий 10^6 операций в секунду, выполнит приблизительно за 2.5 минуты. Такие возможности квантовых компьютеров проявляются потому, что преобразования в квантовых вычислениях выполняются одновременно одной операцией. При этом квантовый компьютер, работающий с k кубитами, может выполнить параллельно 2^k операций. Квантовые алгоритмы, как правило, быстро выдают все возможные результаты и правильные, и неправильные, а выбранный результат только с некоторой вероятностью является правильным. Для повышения вероятности правильного результата в квантовых алгоритмах специально увеличивается кратность операций, которые подбираются таким образом, чтобы неправильные результаты с большой вероятностью взаимно уничтожались, и вероятность правильного результата увеличивалась.

Квантовые алгоритмы выполняются с использованием квантовых схем, которые служат моделями квантовых вычислений, включающих последовательности квантовых вентилях (квантовых логических

¹¹ Алгоритм Шора — это алгоритм разложения числа на простые множители, был предложен П. Шором в 1994 году. Практическая значимость алгоритма в том, что с его помощью можно компрометировать криптографические системы с открытым ключом.

¹² Производительность суперкомпьютера 1 Petaflops = 10^{15} операций с плавающей точкой в секунду была достигнута в 2008 году, в 2019 году планируется достигнуть производительности суперкомпьютеров в 1 Exaflops = 10^{18} операций с плавающей точкой в секунду.



элементов): это строительные элементы квантовых схем, являющиеся аналогами логических элементов обычных цифровых схем классического компьютера, реализующих основные булевы функции (логический базис). Таким образом, квантовые схемы выполняют физические преобразования на логическом базисе элементарных преобразований (квантовых гейтах, quantum gates). Так, например, на вход конкретной квантовой схемы может подаваться k кубитов, а результат её работы, однозначно задаваемый значениями на базисных состояниях¹³, будет носить вероятностный характер и представляться матрицей $2^k \times 2^k$. Как известно, логические элементы классического компьютера не обратимы, то есть по значению на выходе, например, логического элемента «И» нельзя однозначно установить входные значения. Для обратимых логических элементов (теоретически они возможны и в классическом компьютере), какими и являются квантовые логические элементы, однозначно можно определить входные значения любой длины. На основе таких элементов создаются реверсивные квантовые схемы, реализующие обратимые функции в пространстве k кубитов. На основе реверсивных схем могут быть созданы обратимые машины — узлы квантовых компьютеров. Создание реальных квантовых компьютеров (не имитаторов и не моделей)¹⁴ усложняет декогеренция¹⁵, проявляющаяся при физическом соединении таких узлов.

Схема идеального¹⁶ квантового компьютера в самом общем виде представлена на рис. 3.

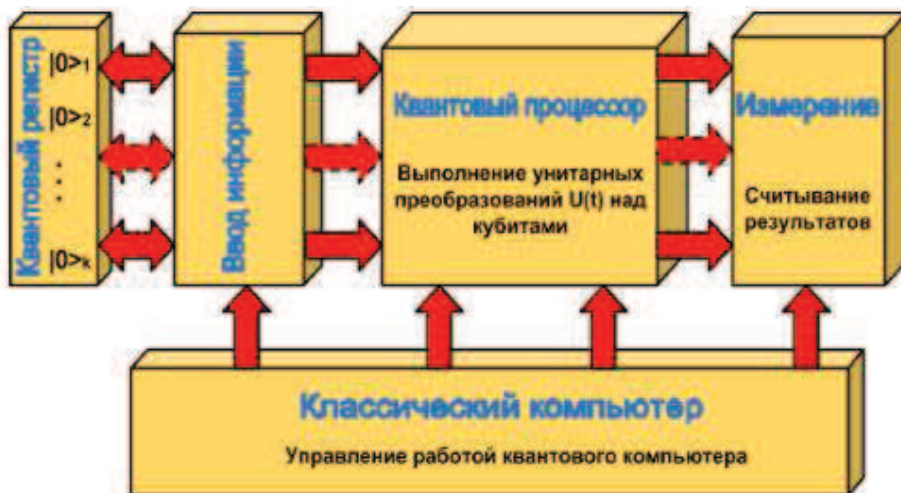


Рис. 3. Схема идеального квантового компьютера

Она может быть реализована k -кубитными регистрами¹⁷, представляющими собой квантовый процессор (аналог классического процессора), управляемый сигналами с обычного компьютера. Кроме того, в схему идеального квантового компьютера входит система измерения состояния кубитов, считывающая результаты и замыкающая контур управления квантовым компьютером. Квантовый процессор, кроме основного, может включать дополнительные регистры, играющие вспомогательную роль. Состояния идеального квантового компьютера всегда когерентны и описываются разложением в 2^k

¹³Базисные состояния — это набор ортогональных друг другу кубитов. Если ограничиваться двумя квантовыми состояниями $|0\rangle$ и $|1\rangle$, то базис будет состоять из двух кубитов.

¹⁴В настоящее время нет однозначного мнения ученых, что первый коммерческий квантовый компьютер Oqion канадской фирмы D-Wave, использующий адиабатические квантовые вычисления, является реально квантовым (<http://old.computerra.ru/offline/2007/677/310169/>).

¹⁵Декогеренция — спонтанный распад сложных квантовых состояний, делающий невозможным длинные квантовые вычисления с использованием большого числа кубитов. Декогеренция носит фундаментальный характер и ее нигде не удастся избежать, как своеобразную «силу трения» в квантовых системах, сводящуюся к проблеме коллапса волновой функции при измерении, которая до сих пор не решена.

¹⁶Идеальный квантовый компьютер, во-первых, не взаимодействует с окружающей средой, создающей помехи его работе и нарушающей когерентность его квантовых состояний (декогеренция); во-вторых, он управляется внешними импульсными сигналами (лазерными, СВЧ и т.д.), не имеющими «контакта» с квантовой средой.

¹⁷Регистр из k кубитов может в суперпозиции хранить и параллельно выполнять 2^k вычислений. Например, классический трехразрядный регистр в каждый момент времени может хранить одно трехразрядное число, а регистр из трех кубитов одновременно может хранить восемь чисел и выполнять восемь вычислений.



базисе $|i_1 \dots i_k\rangle$, $i_1, \dots, i_k = \{0, 1\}$:

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_k} p_{i_1, \dots, i_k} |i_1, \dots, i_k\rangle, \quad (1)$$

где: $|\psi\rangle$ — суперпозиция состояний в 2^k -мерном векторном пространстве (волновая функция ψ в векторном виде), $|i_1 \dots i_k\rangle$ — 2^k базисных ортов этого пространства, p_{i_1, \dots, i_k} — проекция вектора $|\psi\rangle$ на направления ортов $|i_1 \dots i_k\rangle$. Процесс вычисления на квантовом компьютере — это преобразование (1) одного вектора состояния $|\psi_i\rangle$ в другое $|\psi_{i+1}\rangle$ путем умножения вектора $|\psi_i\rangle$ на унитарную матрицу U размерности $2^k \times 2^k$:

$$|\psi_{i+1}\rangle = U(2^k \times 2^k)|\psi_i\rangle. \quad (2)$$

Обычно работа квантового компьютера, как и старт обычного компьютера, начинается с состояния инициализации. При этом состояние его кубитов $|0_1 \dots 0_k\rangle$ достигается охлаждением до сверхнизких температур или путем управления этим состоянием. Информация во входном квантовом регистре с помощью импульсных воздействий преобразуется в когерентную суперпозицию базисных ортогональных состояний $|\psi_i\rangle$. Далее эту информацию обрабатывает квантовый процессор в соответствии с алгоритмом решения задачи. Этот алгоритм реализует матрица преобразования $U(2^k \times 2^k)$, а информация по решаемой задаче содержится в векторе $|\psi_{i+1}\rangle$ и получить ее можно путем измерения состояния кубитов, то есть определением вероятности нахождения кубита в квантовых состояниях, определяемых базисом. Таким образом, выше приведенное выражение (2) для $|\psi_{i+1}\rangle$ может служить моделью вычислений на квантовом компьютере. Для этого нужно создать в квантовой среде кубиты, заставить её вычислять¹⁸ (обрабатывать информацию с использованием кубитов) в соответствии с преобразованиями $U|\psi_i\rangle$, предварительно инициализировав, и далее измерить и выдать результат. Такая модель вычислений, реализованная в идеальном квантовом компьютере (рис. 3), является вероятностной аналого-цифровой. Аналоговая часть («аналоговый компьютер») — это собственно квантовая среда (квантовый процессор, выполняющий унитарные преобразования) и измеритель¹⁹ состояния кубитов. Цифровая часть — это классический управляющий компьютер, на котором пользователь получает результат вычислений. Такого сочетания аналоговых и цифровых частей с вероятностным представлением решения не имели ни классические аналоговые компьютеры прошлого, ни современные классические цифровые компьютеры. Эта модель квантовых вычислений выполняет преобразование начального вектора состояний кубитов

$$|\psi_i\rangle = \sum_x p_x^i |x\rangle \quad (3)$$

в конечный вектор

$$|\psi_{i+1}\rangle = \sum_x p_x^{i+1} |x\rangle, \quad (4)$$

через непрерывный ряд вероятностных состояний. Динамика преобразований (3), (4) — это передача во времени изменений аналоговых величин (амплитуд) $p_x(t)$ в интервале $0 \leq |p_x| \leq 1$. За это отвечает цифровая часть квантового компьютера, реализующая управление.

Управление вычислительным процессом в k -кубитном квантовом компьютере связано с преобразованием 2^k компонент векторов $|\psi_i\rangle \rightarrow |\psi_{i+1}\rangle$ в соответствии с матрицей преобразований $U(2^k \times 2^k)$. Даже на современном классическом суперкомпьютере трудно реализовать эти преобразования из-за очень большого количества операций, выполняемых при разложении матрицы $U(2^k \times 2^k)$ в упорядоченное множество произведений матриц [7]:

$$U(2^k \times 2^k) = \prod_{i,j} U_i(2 \times 2) \otimes U_j(2^2 \times 2^2). \quad (5)$$

¹⁸Известный специалист в области квантовых вычислений Сет Ллойд (Seth Lloyd) считает, что для того чтобы заставить квантовую среду вычислять (обрабатывать информацию), ее надо очаровать, воздействуя определенным образом [3].

¹⁹Измерения в квантовом компьютере — это передача информации от одного квантового регистра другому, связанному с классическим управляющим компьютером.



В квантовом компьютере разложение (5) одновременно выполняется отдельным кубитом за счет квантового параллелизма, основанном на вычислениях суперпозиций базовых состояний. Это позволяет ему при интерпретации команд одновременно принимать несколько значений, находясь в состоянии квантового запутывания. Как данные в кубите могут содержать множество значений сразу, так и квантовый компьютер может выполнять множество интерпретированных команд одновременно. Однако квантовый параллелизм отличается от классических параллельных вычислений компьютера. Как правило, классический высокопроизводительный компьютер состоит из нескольких процессоров или вычислительных ядер. При этом, как правило, один процессор или ядро выполняют одну вычислительную задачу. В случае квантового параллелизма один квантовый процессор выполняет сразу несколько задач. В выражении (5) каждая матрица $U_i(2 \times 2)$ описывает операцию на отдельном кубите, а матрица $U_j(2^2 \times 2^2)$ преобразует векторы состояний пар кубитов. Таким образом, число сомножителей в разложении (5) определяется числом однокубитовых и двухкубитовых операций, необходимых для реализации квантовых алгоритмов. Поэтому ВQP алгоритмы относят к эффективным, так как общее число операций полиномиально от числа используемых кубитов в квантовом компьютере.

3. УЗЛЫ КВАНТОВОГО КОМПЬЮТЕРА

Однокубитовые операции описывают состояние отдельного кубита, а двухкубитовые операции в квантовом алгоритме описывают взаимосвязь одного кубита (контролируемого) с другим (контролирующим), могут быть и многокубитовые операции, составляющие квантовый регистр. Связь кубитов требует физического взаимодействия между ними. Эту связь реализуют квантовые гейты, переводящие кубиты из одного состояния в другое, то есть работающие с суперпозицией. Наиболее известными гейтами являются: гейт NOT, гейт Адамара (Hadamard gate, H), X-, Y-, Z-гейт Паули (Pauli-X, -Y, -Z gate), гейт фазового сдвига (phase shift gate, R), гейт обмена (swap gate, SWAP), гейт контролируемого НЕ (Controlled NOT, CNOT), гейт Тоффоли (Toffoli gate, Controlled Controlled NOT, CCNOT), гейт Фредкина (Fredkin gate) и т. д. Как и в классическом логическом базисе, действия гейта на кубиты описываются таблицей истинности, отражающей изменения базисных состояний. При этом матрица гейта умножается на столбец значений кубитов, участвующих в действии гейта. На основе гейтов могут быть созданы квантовые логические элементы и узлы квантового компьютера. Как и в классическом компьютере, эти элементы могут быть представлены в графической форме, где кубиты изображаются горизонтальными линиями, а действие гейта на кубит (или несколько кубитов) соответствующей квантовой схемой. Таким образом, квантовый алгоритм создается на основе коммуникационной квантовой схемы, где слева находится начальное состояние, а справа — конечное. Эта схема и каузальная (причинно-следственная) структура определяют квантовые вычисления. Работа квантового узла заключается в реализации квантового алгоритма путем прохождения кубитов через гейты.

В соответствии с квантовым алгоритмом узел реализует квантовые вычисления. Например, квантовый гейт NOT (аналог классического инвертора НЕ) выполняет следующее однокубитовое преобразование состояния: $NOT : |\psi_i\rangle \rightarrow NOT : (p_0|0\rangle + p_1|1\rangle) \rightarrow NOT : |\psi_{i+1}\rangle \rightarrow NOT : (p_0|1\rangle + p_1|0\rangle)$. Преобразование однокубитовых состояний выполняют унитарные матрицы размерности 2×2 . На их основе можно построить неограниченное число гейтов, среди которых наиболее известными матрицами являются: матрица Адамара (H), матрица фазового сдвига (R), матрицы Паули, реализующие соответствующие X-, Y-, Z-гейты и т. д. (рис. 4):

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_\varphi \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Самым распространенным гейтом, выполняющим двухкубитовые операции, является CNOT (контролируемое НЕ), изображенный на рис. 5.



Наименование	Обозначение	Состояние выхода при входе $(a 0\rangle + b 1\rangle)$	Унитарная матрица
Элемент Паули X		$b 0\rangle + a 1\rangle$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Элемент Паули Y		$-i\{b 0\rangle - a 1\rangle\}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
Элемент Паули Z		$a 0\rangle - b 1\rangle$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Элемент Адамара		$\frac{a+b}{\sqrt{2}} 0\rangle + \frac{a-b}{\sqrt{2}} 1\rangle$	$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
Фазовый элемент		$a 0\rangle + ib 1\rangle$	$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
Элемент $\pi/8$		$a 0\rangle + e^{i\pi/8} b 1\rangle$	$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/8} \end{pmatrix}$
Элемент тождественного преобразования		$a 0\rangle + b 1\rangle$	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Элемент измерения		Проекция на $ 0\rangle$ и $ 1\rangle$	

Рис. 4. Однокубитовые гейты

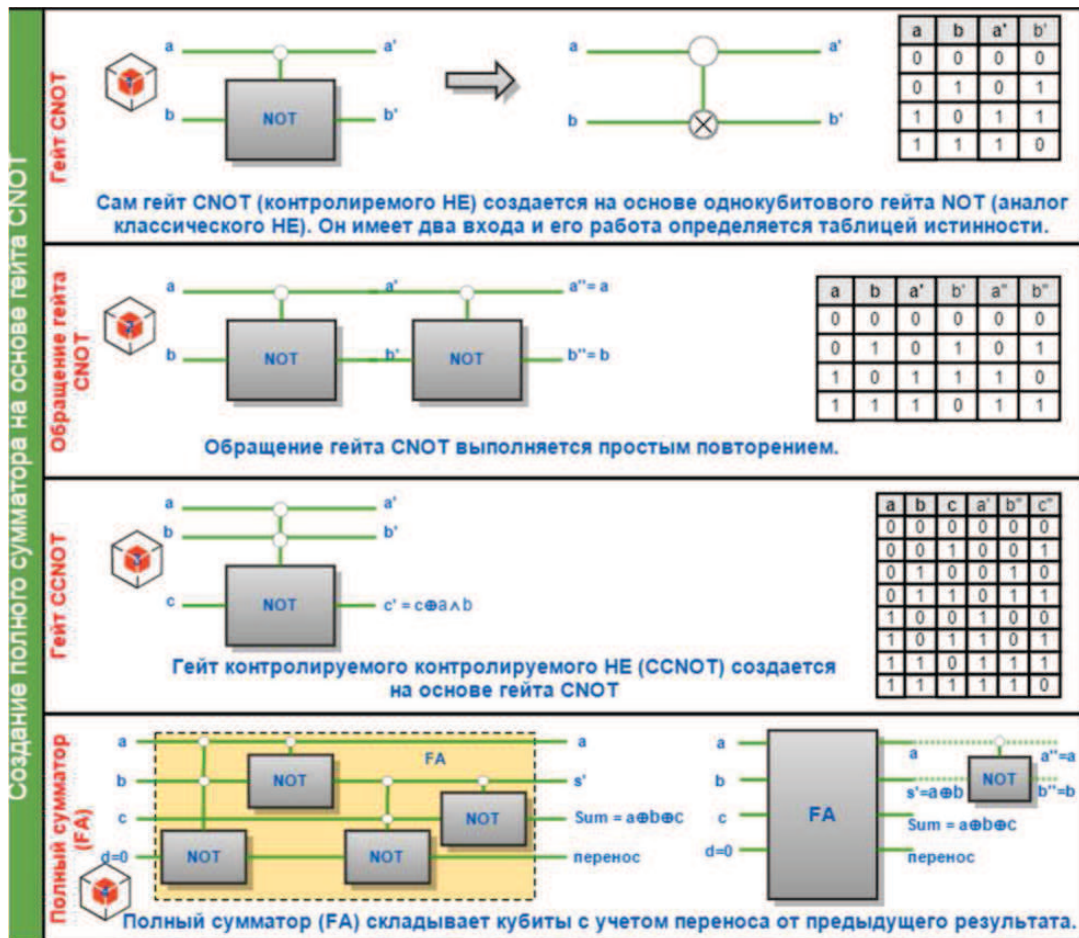


Рис. 5. Квантовый узел на основе гейта, контролируемого НЕ

Это аналог классического логического элемента исключающее ИЛИ (логическое сложение, XOR), являющегося основой построения большинства узлов классического компьютера (например, сумматора).

Двухкубитовая операция CNOT, выполняемая квантовой системой, включает процесс эволюции двух кубитов под воздействием гамильтониана их взаимодействия²⁰. В процессе эволюции один кубит управляет другим, используя энергию взаимодействия. При этом второй кубит инвертируется, если первый находится в состоянии $|1\rangle$, в противном случае, он остается без изменений. При этом начальное состояние кубитов $|\psi_i^1\rangle = (p_0^1|0\rangle + p_1^1|1\rangle)$, $|\psi_i^2\rangle = (p_0^2|0\rangle + p_1^2|1\rangle)$, эволюционирует в следующее состояние:

$$|\psi_{i+1}^{12}\rangle = p_0^1 p_0^2 |00\rangle + p_0^1 p_1^2 |01\rangle + p_1^1 p_0^2 |11\rangle + p_1^1 p_1^2 |10\rangle \equiv \begin{pmatrix} p_0^1 p_0^2 \\ p_0^1 p_1^2 \\ p_1^1 p_0^2 \\ p_1^1 p_1^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Соединяя в коммуникационную квантовую схему гейты CNOT, можно получить сложные узлы квантового компьютера (например, сумматор рис. 5). Пространство состояний такой квантовой системы представляет собой тензорное произведение пространств состояний, входящих в нее систем. При этом если одна система находится в состоянии $|\psi_1\rangle$, а другая в состоянии $|\psi_2\rangle$, то квантовая система будет находиться в состоянии $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОСТОЯНИЯ КУБИТОВ

Как следует из коммуникационной квантовой схемы, кубит может находиться в одном из возможных состояний, определяемых гейтом. Кроме того, кубит — это минимальное количество информации, хранящейся в квантовом компьютере. Носителем такой информации является квантовая среда (аналоговая часть квантового компьютера), базисные состояния которой кубит представляет линейной суперпозицией. Визуализацию состояния кубита можно представить с помощью сферы Блоха (рис. 6).

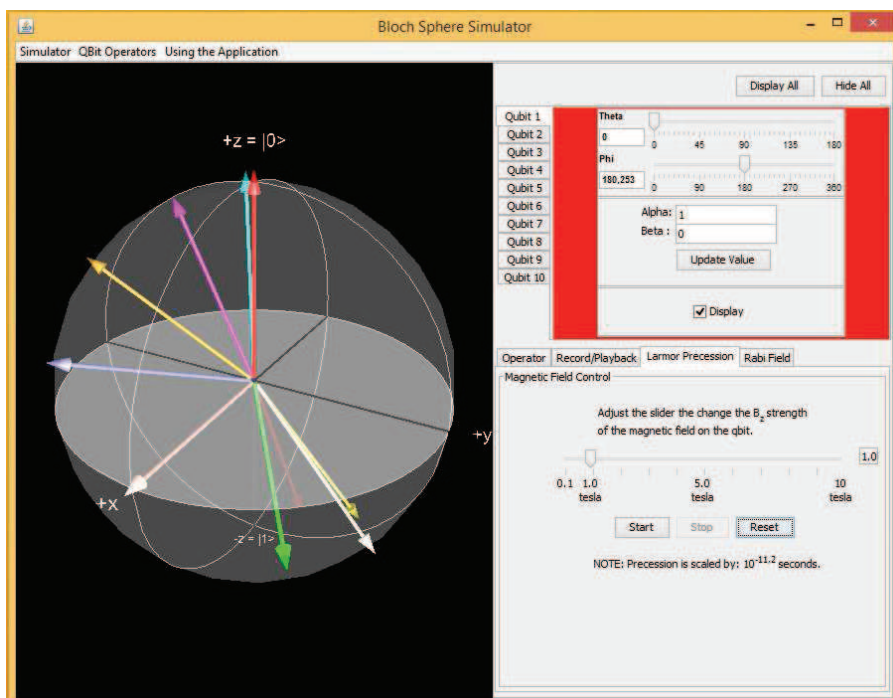


Рис. 6. Сфера Блоха

²⁰Гамильтониан H — это оператор, определяющий изменение во времени состояния квантовой среды. Он изменяет волновую функцию (вид уравнения Шредингера $i\hbar(d\psi/dt) = H|\psi\rangle$) и одновременно является оператором полной энергии системы.



Классический бит на поверхности сферы Блоха может находиться только в точках $|0\rangle$ «логический 0» и $|1\rangle$ «логическая 1», а остальная часть сферы является для него недоступной. Состояние же кубита может быть отображено с помощью любой точки на поверхности сферы Блоха, описывающей «чистые» состояния квантовой среды, которые всегда когерентны. Смешанные же квантовые состояния являются некогерентными и могут быть отображены на шаре Блоха. Таким образом можно представить состояние любой квантовой системы, характеризуемой ортонормированными волновыми функциями. Для реализации аналоговой части квантового компьютера нужна квантовая система, векторы состояний которой $|\psi\rangle$ образуют гильбертово²¹ двумерное векторное пространство. Компоненты этих двумерных векторов имеют следующий вид: $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |\psi\rangle = p_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$. Здесь $|0\rangle$ и $|1\rangle$ состояния, служащие ортами в двумерном гильбертовом пространстве кубита. Проекции состояний $|\psi\rangle$ на орты равны амплитудам p_0 и p_1 в суперпозиции: $\langle 0|\psi\rangle = p_0, \langle 1|\psi\rangle = p_1$. В общем виде амплитуды p_0 и p_1 — это комплексные числа вида $p = |p|e^{i\varphi}$, тогда выражение (3) при переходе кубита из состояния $|0\rangle$ в состояние $|1\rangle$ будет иметь следующий вид:

$$|\psi\rangle = e^{i\varphi_{p_0}} [|p_0\rangle + |p_1| e^{i(\varphi_{p_1} - \varphi_{p_0})}]. \quad (7)$$

Общий фазовый множитель в выражении (7) не влияет на состояние кубита, так как фаза в начальном состоянии $|0\rangle$ может иметь произвольное значение. Отсюда следует, что вектор $|\psi\rangle$ определяется параметрами p_0, p_1 и разностью фаз $(\varphi_{p_1} - \varphi_{p_0})$. Значения p_0, p_1 получаются многократным вычислением в базисе $|0\rangle$ и $|1\rangle$ как вероятностный результат. Разность фаз $(\varphi_{p_1} - \varphi_{p_0})$ вычисляется на основе матрицы унитарных преобразований U выражения (5). При этом вращения вектора состояния кубита на сфере Блоха рассматривается как элементарные однокубитовые вычислительные операции. Обычно параметры вращения (направление оси, угол поворота и т. д.) определяются параметрами физических полей (напряженностью, частотой, поляризацией, длительностью воздействия и т. д.), воздействующих на квантовую среду и управляющих динамикой квантовой системы. Значит, всегда можно подобрать некоторое воздействие на квантовую систему, которое переведет ее из одного произвольного состояния, заданного точкой на сфере Блоха, в другое. Для определения состояния квантовой системы, как видно на рис. 3, его нужно измерить.

Квантовые измерения описываются набором операторов в пространстве состояний системы $\{\langle\psi|M_m^\dagger, M_m|\psi\rangle\}$ [7]. Если состояние квантовой системы до измерения было $|\psi\rangle$, то вероятность получения результата измерения m будет $p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$, а состояние квантовой системы после измерения будет описываться следующим выражением: $\frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}$. Операторы измерения должны удовлетворять требованию полноты [7] $\sum(M_m^\dagger M_m) = 1$, следовательно, $\sum p(m) = \sum \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle = 1$.

Измерение состояния кубитов как неотъемлемая функция квантового компьютера является стрессовым воздействием на квантовую систему в виде квантового скачка. Это объясняется тем, что до измерения квантовая система находилась в некотором состоянии квантовой статистической неопределённости (суперпозиции), а после измерения эта неопределенность снимается. Измерение можно представить аналогом двухкубитовой операции, описываемой выражением (6). Только здесь в регистре из двух кубитов второй кубит участвует не в операции CNOT, а «измеряет» состояние первого. Это измерение основано на явлении запутанности посредством нелокальной²² квантовой корреляции, не имеющем аналога в классической физике и являющегося контринтуитивным [11]. В классической физике по полному описанию системы всегда можно описать части этой системы. В квантовой же

²¹Гильбертово пространство — обобщение евклидова пространства, допускающее бесконечную размерность. Это линейное векторное пространство над полем вещественных или комплексных чисел, в котором для любых двух элементов определено скалярное произведение.

²²Квантовая нелокальность — это непроявленные состояния квантовой системы [9]. В квантовой механике известны состояния полной запутанности (состояния Белла), являющиеся уникальным нелокальным свойством частиц. В этом случае поведение частиц синхронно, но не связано с их локальной связью (нелокально).



системе, находящейся в запутанном состоянии, этого сделать нельзя, так как информации, дающей полное описание квантовой системы, недостаточно для описания частей, из которых она состоит. Таким образом, для измерений, для квантовой телепортации²³, для квантовых вычислений необходимо реализовать запутанность квантовой системы, когда за счет высокого уровня корреляции, обусловленной взаимодействием, одна часть её будет «знать», что были выполнены измерения на другой части. Запутанные состояния — это основа парадигмы квантовой информатики и их реализация является одной из самых сложных задач при создании квантовых компьютеров. Эта задача выполнима пока на очень короткое время²⁴. В настоящее время квантовая запутанность — это уже привычная физическая величина (не математическая абстракция), изменяющаяся от нуля до единицы. В зависимости от этой величины квантовая система может состоять из отделимых локальных частей, которые либо слабо связаны друг с другом (мера запутанности равна нулю), либо квантовая система составляет единое неделимое целое (мера запутанности равна единице), находясь в нелокальном состоянии, когда нет никаких классических «проявленных» объектов. Мера запутанности зависит от интенсивности взаимодействий в квантовой системе [8]. Следовательно, управляя взаимодействием и манипулируя мерой квантовой запутанности, можно управлять квантовыми вычислениями, измерять и выводить результаты. По мере взаимодействия с окружением, когда мера запутанности между подсистемами квантового компьютера постепенно уменьшается, в нем «проявляются» результаты в виде локальных объектов. Этот процесс очень упрощенно можно пояснить как проявление изображения на фотобумаге, помещенной в проявитель (взаимодействие с окружением). Запутанность только намного сложнее, так как нет заранее экспонированной «картинки», она «размазана» по фотобумаге (аналогично голографическому изображению) и поэтому невидима. Все элементы находятся в суперпозиции и у них нет «видимых» локальных форм, но по мере взаимодействия с окружением суперпозиция постепенно разрушается и проявляется то или иное классическое «видимое» состояние. Этот процесс декогеренции «растаскивает» в разные стороны то, что было единым целым (невидимым), придает определенные формы, которые становятся видимыми с привычной классической точки зрения. Обратный процесс управления мерой запутанности (рекогеренция) может её увеличивать (дистиллировать), что аналогично превращению снимка, обработанного проявителем, в чистый лист фотобумаги, то есть возврат к исходному суперпозиционному состоянию. В этом случае квантовая система полностью лишается самостоятельности и не может изменяться независимо от своих подсистем, так как даже небольшие деградационные изменения одной подсистемы приводят к изменению остальных, что может дестабилизировать квантовую систему. Таким образом мера квантовой запутанности может контролироваться и целенаправленно изменяться квантовым компьютером в процессе обработки информации, которая количественно выражается через энтропию фон Неймана²⁵. Это позволяет описывать квантовый компьютер в терминах информатики и рассматривать изменение меры запутанности как процессы обмена информацией в нём. В этом случае уменьшение меры запутанности соответствует передаче информации из квантовой системы в окружение при взаимодействии с ним. Запутанная квантовая система в терминах квантовой информации — это единое информационное поле, вычисления в котором одновременно содержат все возможные правильные и неправильные реализации. Задача квантовых вычислений, кроме всего, — свести к минимуму неправильные реализации.

Для вычислений в квантовом компьютере необходимо как минимум два k -кубитных регистра. В один регистр будет заноситься аргумент, а в другой результат вычислений. Процедура вычислений рассматривается как работа того или иного гейта, преобразующего аргумент в выходные значения: $f : \{0, 1\}^{k_1} \rightarrow \{0, 1\}^{k_2}$. Например, рассмотренный выше гейт CNOT, реализующий функцию $f : (x, y) \rightarrow (x, x \otimes y)$, выполняет вычислительные процедуры над четырьмя аргументами, как видно из выражения (6). Процедура квантовых вычислений функции f (аналог суммирования по модулю 2

²³Квантовая телепортация — это передача квантового состояния на расстояние при помощи квантовой пары и классического канала связи. При этом состояние квантовой системы в точке отправления при измерении разрушается, а в точке приема воссоздается вновь. Квантовая телепортация не передает энергию или вещество, а передает только информацию.

²⁴В настоящее время кубиты функционируют только при очень низкой температуре (-233.4 C) и рекордное время составляет пока 39 минут. За это время с ними можно выполнить до 20 млн операций [15].

²⁵Энтропия фон Неймана — это основная физическая характеристика энергоинформационного процесса, показывающая изменение информации при изменении энергии.



в классическом компьютере) можно представить следующим образом. Вначале в один из k -кубитных регистров заносятся все значения аргумента x , которые затем переводятся в суперпозиционное состояние в другом регистре: $f(x) \rightarrow |0\rangle|f(0)\rangle + |1\rangle|f(1)\rangle + \dots + |2^k - 1\rangle|f(2^k - 1)\rangle$. Такое запутанное состояние двух регистров, где записана вся таблица истинности, описывает операцию сложения по модулю 2. В классическом компьютере для двухразрядного аргумента вычисление функции $f(x)$ пришлось бы проводить 4 раза или использовать четыре рабочих ресурса. В квантовом же компьютере, используя суперпозиционные состояния, вычисления позволяют сразу получить результат. Но воспользоваться этими преимуществами квантовых вычислений далеко не просто из-за особенностей измерений состояний кубитов. Суперпозиционное состояние, возникающее в результате вычисления, из-за запутанности описывает, в большей степени, общее поведение квантовой системы (например, функции f). Поэтому квантовые вычисления более эффективны в задачах, исследующих общие свойства систем.

Основываясь на выражениях (6) и (7), запутанное состояние квантовой системы при измерении может быть представлено следующим образом²⁶:

$$|\psi\rangle_{12} = |0\rangle_1|1\rangle_2 + e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}|1\rangle_1|0\rangle_2. \quad (8)$$

Разность фаз ($\varphi_1 - \varphi_2$) определяется внутренними свойствами квантовой системы. Особенностью запутанного состояния (8) является то, что ни один из двух кубитов не несет в себе определенного значения, а о квантовой системе известно лишь то, что один из двух кубитов является предметом измерения и результат этого измерения носит случайный характер. Это же подтверждает и свойство квантовой нелокальности, когда кубиты находятся на произвольном расстоянии во время измерения [9]. Способы получения и наблюдения квантовой запутанности вытекают из выражения (8). Во-первых, это может быть квантовая система, которая физически реализует свойство нелокальности. Например, частица с целым спиновым числом, распавшаяся на две частицы с противоположными спинами и с сохранением внутреннего углового момента. В этом случае выражение (8) может быть представлено в следующем виде: $|\psi\rangle_{12} = (|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2)$, где $|\uparrow\rangle_1$ — частица 1 со спином вверх, $|\downarrow\rangle_2$ — частица 2 со спином вниз. Тогда измерение сводится к определению антипараллельных спинов частиц. Во-вторых, это может быть квантовая система, состояние которой определяется в виде отдельных компонент выражения (8). Например, спонтанное параметрическое преобразование состояния фотонов $|H\rangle_1|V\rangle_2$ и $|V\rangle_1|H\rangle_2$, генерирующее пары запутанных фотонов [10]. В этом случае запутанные фотоны 1 и 2 имеют разные плоскости поляризации (H — горизонтальную и V — вертикальную). При прохождении таких поляризованных фотонов через преобразующую систему (нелинейный кристалл) из-за различия скоростей света в плоскостях H и V временные интервалы соответствующих фотонов будут отличаться. Таким образом, слагаемые выражения (8) можно разделить, а тем самым выделить и определить запутанное состояние квантовой системы, используя методику квантового ластика (quantum eraser)²⁷. Каждый из рассмотренных методов может быть использован для получения и наблюдения запутанных состояний. В общем виде это означает следующее: полностью запутанные или частично запутанные состояния в той или иной форме могут быть приведены к описанным выше.

При измерении суперпозиция разрушается, так как не существует суперпозиции измерений [9]. Следовательно, при измерении нет суперпозиции состояний, а есть мгновенное описание изменения квантового состояния (волновой функции). Это нелокальный процесс мгновенного измерения приводит к коллапсу волновой функции (редукции фон Неймана²⁸). Измерение тесно связано с мысленным

²⁶Строго говоря, это лишь часть всех возможных состояний запутанности, их частный случай.

²⁷Квантовый ластик (quantum eraser) — эксперимент с интерферометром, позволяющий изучить механизм квантовой запутанности. В ходе физического эксперимента каждый из запутанных фотонов направляется в разные устройства анализа, что позволяет манипулировать информацией о каждом фотоне.

²⁸Редукция фон Неймана — это математический прием описания редукции волновой функции, а не физический процесс, так как распространяется быстрее скорости света. Однако некоторые исследователи считают редукцию фон Неймана физическим процессом, для которого необходимо разработать новую теорию.



экспериментом кота Шредингера²⁹, поясняющим взаимное влияние квантовой системы и измерения. Это влияние сводит измерение (выбор) к взаимодействию между квантовой системой и её окружением, что приводит к их запутыванию. Коллапс волновой функции при измерении тесно связан с декогеренцией, так как «запутанное» измерение неминуемо сопровождается этим объективным физическим процессом [11]. Вследствие этого к внутренней запутанности квантовой системы, которой компьютер может управлять и которая ему подвластна, добавляется запутанность с окружением (распад единства квантовой системы, возникновение ошибок, неточностей, мешающих факторов и т. д.). Здесь можно говорить о «свертывании» исходного пространства состояний квантовой системы в пространство состояний меньшего размера, когда исходный вектор состояния делится на части — на свою собственную (внутреннюю) и внешние. Декогеренция и связанные с ней ошибки — это одна из главных проблем на пути создания квантового компьютера. В упрощенном виде эти ошибки можно представить двумя уровнями. На первом уровне ошибки, которые присутствуют в каждом компьютере, в том числе и классическом (ошибки вычислений, работы аппаратных платформ, операторов и т. д.). Эти ошибки современные компьютеры умеют эффективно исправлять. В квантовых вычислениях в настоящее время тоже стали успешно с ними справляться³⁰. Второй уровень ошибок в квантовых компьютерах гораздо сложнее, так как кубиты крайне нестабильны и подвержены декогеренции, что нарушает связи внутри квантовых систем. Как упоминалось ранее, квантовый процессор на время вычислений нужно максимально изолировать от окружающей среды и охладить. Но из-за декогеренции в результате внутренних процессов этого тоже недостаточно, чтобы избавиться полностью от ошибок второго уровня. Их можно сделать только достаточно редкими, чтобы квантовый компьютер смог эффективно работать. По оценкам некоторых исследователей, это потребует до 99% вычислительной мощности квантового компьютера, но и оставшегося 1% хватит для решения многих задач [12]. Работа квантового компьютера предполагает измерение состояния k -кубитных регистров, например, для получения информации о решении задачи по завершению вычислений. В теоретическом плане больших сложностей в процедуре такого измерения состояний нет. Однако физическая реализация измерения состояний квантовой системы, представляемой кубитами, сопряжены с решением весьма сложных технологических проблем. Они связаны с преодолением трудностей измерения состояния отдельных частиц и коррекции ошибок. По существу, для каждого квантового компьютера нужна разработка своего физического метода измерения и коррекции ошибок, которая является одной из самых трудных с точки зрения физической реализации. Одним из путей решения этой задачи является увеличение времени декогеренции t_{dc} , которое должно быть значительно больше времени выполнения вычислительных операций t_{op} . Кроме того, время декогеренции уменьшается с ростом числа кубитов и для k -кубитного регистра оно будет существенно меньше времени декогеренции одного кубита. Отношение $n = t_{dc}/t_{op}$ показывает, сколько вычислительных операций можно выполнить пока квантовый компьютер сохраняет когерентное состояние, при котором кубиты связаны друг с другом, а не с окружающей средой за счет декогеренции. Для некоторых физических реализаций это отношение приведено в табл. 1 [7].

Таблица 1

Время декогеренции и выполнения вычислительной операции

Измерения при физической реализации	Время декогеренции (t_{dc} , с)	Время выполнения операции (t_{op} , с)	Количество операций (n)
Ядерный спин	$10^{-2} - 10^8$	$10^{-3} - 10^{-6}$	$10^{-5} - 10^{14}$
Электронный спин	10^{-3}	10^{-7}	10^4
Ионная ловушка	10^{-1}	10^{-14}	10^{13}
Оптические решетки	10^{-5}	10^{-14}	10^9
Квантовые точки	10^{-6}	10^{-9}	10^3

²⁹Мысленный эксперимент с котом Шредингера описывает положение кота в ящике. В ходе эксперимента фотон падает на полупрозрачное зеркало, и его волновая функция регистрируется датчиком. Поскольку зеркало полупрозрачное, датчик может обнаружить фотон, а может не обнаружить. Если датчик обнаруживает фотон, то срабатывает пистолет, убивающий кота. Если датчик не обнаруживает фотон, то кот остается жив.

³⁰Google совместно с Калифорнийским университетом стабилизировали цепочку из девяти кубитов и устранили в ней ошибки [16].



Физическая реализация квантовой системы (аналоговая часть квантового компьютера) в настоящее время возможна при условии эффективного наблюдения двух уровней ее состояния (например, статического и возбужденного). В табл. 2 приведены квантовые явления, обладающие такими состояниями и реализованные в той или иной мере.

Таблица 2

Физическая реализация квантовых систем

Квантовая среда	Квантово-механические явления	Кодирование информации	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$
Фотоны	Поляризация света	Плоскостью поляризации	Горизонтальная	Вертикальная
	Фоковское состояние ¹	Фоковским состоянием	Вакуумное состояние (отсутствие квантов)	Точно определенное количество квантов
	Временное кодирование ²	Временем распространения	Короткое время	Длинное время
Когерентное состояние света	Сжатое состояние ³	Квадратурой компонентой поля	Амплитудно-сжатое состояние	Фазово-сжатое состояние
Электроны	Спин электрона	Спином электрона	Спин вверх	Спин вниз
	Подсчет электронов	Зарядом	Нет электронов	Точно определенное количество электронов
Атомные ядра	Ядерный магнитный резонанс	Спином ядра	Спин вверх	Спин вниз
Ионы в ловушках	Квантовый электромагнитный резонанс	Спином внешнего электрона в ионе	Спин вверх	Спин вниз
Оптические ловушки (решетки)	Конденсат Бозе – Эйнштейна ⁴	Спином атома	Спин вверх	Спин вниз
Контакты Джозефсона ⁵	Заряд в сверхпроводнике	Зарядом	Разряженная сверхпроводящая область	Заряженная сверхпроводящая область
	Ток в сверхпроводнике	Направлением тока	Ток по часовой стрелке	Ток против часовой стрелки
	Фаза в сверхпроводнике	Фазой тока в сверхпроводнике	Фаза в статическом состоянии	Фаза в возбужденном состоянии
Квантовые точки ⁶	Локализация электронов	Зарядом	Разряженная квантовая точка	Заряженная квантовая точка
	Спин квантовой точки	Спином квантовой точки	Спин вниз	Спин вверх

Примечание. ¹фоковское состояние — это квантовомеханическое состояние с точно определенным количеством элементарных частиц; ²временное кодирование основано на различии времени прохождения одиночных фотонов через один из двух путей (например, в интерферометре Маха – Цендера); ³сжатое состояние — это особый класс состояний квантовой системы, когда дисперсия флуктуаций одной из сопряженных компонент меньше другой (например, квадратуры амплитуды и фазы); ⁴конденсат Бозе – Эйнштейна — это сильно охлажденное состояние бозонов (близко к абсолютному нулю), когда квантовые эффекты начинают проявляться на макроуровне (например, газ из атомов рубидия); ⁵контакты Джозефсона — это соединение двух сверхпроводников, разделенных тонким слоем диэлектрика; ⁶квантовые точки — это очень малые нанокристаллические полупроводниковые структуры, в которых начинают проявляться квантовые свойства.



Из табл. 2 видно, что наиболее исследованными такими квантовыми двухуровневыми элементами являются спины (электронные или ядерные), которые описываются двухкомпонентными спиновыми волновыми функциями (спинорами). Они представляют собой векторы состояния в двумерном гильбертовом пространстве $|0\rangle$ или $|1\rangle$. По аналогии двухуровневые элементы не спиновой природы также могут описываться псевдоспинорами и псевдоспинами. Квантовый двухуровневый элемент находится не только в одном из двух чистых базисных состояний, но и в обоих состояниях одновременно, соответственно выражению (1). Двухуровневый квантовый элемент и является кубитом, включающим более общее понятие, чем классический бит, так как допускает кодирование большего количества информации и может образовывать запутанные состояния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время нет универсального промышленного (production) квантового компьютера, а имеются только экспериментальные образцы, реализующие отдельные подходы к его созданию. Они, как правило, существуют в лабораторных исследовательских (research) вариантах, но в то же время позволяют реализовывать элементы квантовых вычислений. При создании аппаратных платформ (hardware) квантовых компьютеров пока остаются нерешенными следующие проблемы:

- выбор физической квантовой среды, которая обеспечит возможность получения достаточно для высокопроизводительных вычислений числа, хорошо определенных и управляемых кубитов, содержащих обрабатываемую информацию в когерентной суперпозиции базисных ортогональных состояний $|\psi_i\rangle$;
- определение принципов селективного управления кубитами (проведение логических операций) и кубитового измерения их состояния на выходе;
- создание механизма взаимодействия между кубитами, основывающегося на квантовой запутанности, поддержании реверсивности вычислений, квантовом параллелизме и интерференции;
- уменьшение уровня квантовых ошибок и увеличение времени декогеренции.

Продолжение следует.

Библиографический список

1. Богданов Ю. И., Кокин А. А., Лукичев В. Ф., Орликовский А. А., Семенихин И. А., Чернявский А. Ю. Квантовая механика и развитие информационных технологий // Информационные технологии и вычислительные системы. 2012. № 1. С. 17–31.
2. Closing in on quantum computing. URL : <http://www.wired.com/2014/10/quantum-computing-close> (accessed 23, June, 2015).
3. Ллойд С. Программируя вселенную. Квантовый компьютер и будущее науки. М. : Альпина нон-фикшн, 2014. 256 с.
4. Валиев К. А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // УФН. 2005. Т. 175, № 1. С. 3–39.
5. Смейл С. О проблемах вычислительной сложности. Математическое просвещение. М. : МЦНТО, 2000. Сер. 3, вып. 4. С. 115–119.
6. Shor P. W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. 1996. arXiv: quant-ph/9508027. 28 p.
7. Nielsen M., Chuang I. Quantum Computation and Quantum Information. 10th Anniversary Edition. Cambridge Univ. Press, 2010. 698 p.
8. Rieffe E. G., Polak W. H. Quantum computing: a gentle introduction. Scientific and Engineering Computation. MIT Press, 2011. 389 p.
9. Белинский А. В. Квантовая нелокальность и отсутствие априорных значений измеряемых величин в экспериментах с фотонами // УФН. 2003. Т. 173, № 8. С. 905–909.
10. Bouwmeester D., Ekert F., Zeilinger A. The Physics of Quantum Information. Springer, 2000. 315 p.
11. Менский М. Б. Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология : пер. с англ. М. : Физматлит, 2001. 232 с.
12. Прескилл Дж. Квантовая информация и квантовые вычисления : в 2 т. Т. 2. М. : Рег. дин.; Ижевск : Ин-т компьют. исслед., 2011. 312 с.
13. Algebraic and Number Theoretic Algorithms. URL: <http://math.nist.gov/quantum/zoo/> (accessed 23, June, 2015).
14. Venegas-Andraca S. E. Quantum Walks for Computer Scientists. Synthesis Lectures on Quantum Computing. Morgan Claypool, 2008. 133 p.
15. Kastrenakes J. Researchers smash through quantum computer storage record. URL: <http://www.theverge.com/2013/11/14/5104668/qubits-stored-for-39-minutes-quantum-computer-new-record> (accessed 23, June, 2015).
16. Kelly J. State preservation by repetitive error detection in a superconducting quantum circuit // Nature. Macmillan Publ. Ltd., 2015. Vol. 519. P. 66–69.



Quantum Computers and Quantum Algorithms. Part 1. Quantum Computers

V. M. Solovyev

Solovyev Vladimir Mihajlovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, svm@sgu.ru

The paper presents the principles of operation of quantum computers. Competitive advantages of quantum computing are shown and some variants of a construction of an ideal quantum computer proposed. We analyze also the computational process in a quantum computer from the point of view of the complexity of algorithms. Implementation of nodes of a quantum computer is exemplified based on quantum communication schemes. The operation of Bloch sphere and visualization of the state of the qubit are described. Major obstacles to the creation of quantum computers are considered.

Key words: quantum computing, quantum computers, quantum algorithms, qubit, Bloch sphere, basic state, quantum gates, quantum superposition, quantum entanglement, decoherence.

References

1. Bogdanov U. I., Kokin A. A., Lukichev V. F., Orlikovskij A. A., Semenihin I. A., Chernavskij A. U. Quantum mechanics and the development of information technology. *Information technologies and computer systems*, 2012, no. 1, pp. 17–31 (in Russian).
2. Closing in on quantum computing. Available at: <http://www.wired.com/2014/10/quantum-computing-close> (accessed 23, June, 2015).
3. Lloyd S. Programming universe. A quantum computer science and the future. Moscow, Alpina non-fiction, 2014, 256 p.
4. Valiev K. A. Quantum computers and quantum computing. *Successes of physical sciences*, 2005, vol. 175, no. 1, pp. 3–39.
5. Smale S. On the problems of computational complexity. Mathematical education. Moscow, MCNTO, 2000, Ser. 3, iss. 4, pp. 115–119.
6. Shor P. W. *Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*. 1996. arXiv: quant-ph/9508027. 28 p.
7. Nielsen M., Chuang I. *Quantum Computation and Quantum Information*. 10th Anniversary Edition. Cambridge Univ. Press, 2010, 698 p.
8. Rieffe E. G., Polak W. H. *Quantum computing: a gentle introduction. Scientific and Engineering Computation*. MIT Press, 2011, 389 p.
9. Belinskij A. V. Quantum nonlocality and the absence of a priori values for measurable quantities in experiments with photons. *Successes of physical sciences*, 2003, vol. 173, no. 8, pp. 905–909.
10. Bouwmeester D., Ekert F., Zeilinger A. *The Physics of Quantum Information*. Springer, 2000, 315 p.
11. Menskij M. B. *Quantum measurement and decoherence. Models and phenomenology*: Trans. from English. Moscow, Fizmatlit, 2001, 232 p.
12. Preskill J. *Quantum information and quantum computation. Vol. 2*. Moscow, Izhevsk, SIC «Regular and Chaotic Dynamics», Institute of Computer Science, 2011, 312 p.
13. Algebraic and Number Theoretic Algorithms. Available at: <http://math.nist.gov/quantum/zoo/> (accessed 23, June, 2015).
14. Venegas-Andraca S. E. *Quantum Walks for Computer Scientists. Synthesis Lectures on Quantum Computing*. Morgan Claypool, 2008, 133 p.
15. Kastrenakes Jacob. Researchers smash through quantum computer storage record. Available at: <http://www.theverge.com/2013/11/14/5104668/qubits-stored-for-39-minutes-quantum-computer-new-record> (accessed 23, June, 2015).
16. Kelly J. State preservation by repetitive error detection in a superconducting quantum circuit. *Nature*, Macmillan Publ. Ltd., 2015, vol. 519, pp. 66–69.

ХРОНИКА НАУЧНОЙ ЖИЗНИ

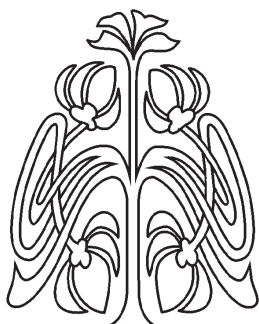
К 70-ЛЕТИЮ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

В 2015 году механико-математический факультет отметил свой 70-летний юбилей. Однако официальную историю математического образования в Саратове следует исчислять с 1 июля 1917 г., когда вместе с тремя другими старейшими факультетами университета был открыт физико-математический. В разные годы в Саратове работали выдающиеся математики и механики. В годы становления математического образования это были Н. Н. Андреев, И. И. Привалов, В. В. Голубев, Л. С. Лейбензон, Г. Н. Свешников. Особенно велик вклад В. В. Голубева, проработавшего в университете двенадцать лет, в том числе в должности декана и ректора [1–3]. Уровень преподавания на физмате в тридцатые годы прошлого века легко представить по фамилиям молодых профессоров: И. Г. Петровский, А. Я. Хинчин, А. Г. Курош, В. В. Вагнер [3–5].

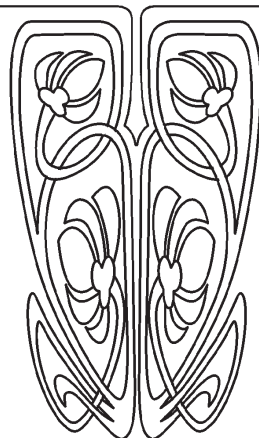
Особую страницу в истории составляют военные годы [6]. В 1942 г. в Саратов был эвакуирован Ленинградский университет. Более двух лет в одних аудиториях совместно трудились преподаватели, научные работники, студенты двух вузов. Такое тесное сотрудничество заложило основы дальнейших теплых отношений между двумя университетами.

Постановлением Совнаркома СССР от 18 июля 1945 г. было принято решение о разделении физико-математического факультета на физический и механико-математический факультеты. На момент создания механико-математического факультета в его составе функционировало пять кафедр [7, 8]: алгебры и теории чисел (заведующий кафедрой профессор Н. Г. Чудаков), геометрии (заведующий кафедрой профессор В. В. Вагнер), математического анализа (заведующий кафедрой профессор Г. П. Боев), теории упругости (заведующий кафедрой профессор С. Г. Лехницкий [9]), механики (заведующий кафедрой — доцент А. А. Назаров). Первым деканом механико-математического факультета (1945–1947) стал профессор Георгий Петрович Боев.

Научно-исследовательская деятельность ученых послевоенного механико-математического факультета развивалась в нескольких направлениях. Успешно разрабатывались алгебраические вопросы оснований дифференциальной геометрии. Международное признание получила научная школа, созданная профессором В. В. Вагнером. Под руководством профессора С. В. Фальковича изучались проблемы аэродинамики околосзвуковых и сверхзвуковых потоков газа. На кафедре алгебры продолжались работы по исследованию проблем теории дзета-функций (профессор Н. Г. Чудаков). Работа профессора С. Г. Лехницкого «Анизотропные пластинки» в 1947 г. была удостоена Сталинской премии.



ПРИЛОЖЕНИЕ





С 1947 по 1961 г. факультет возглавлял доцент Алексей Иванович Барабанов [10]. В то время (1957 г.) в Саратовском государственном университете имени Н. Г. Чернышевского (СГУ) был организован первый вычислительный центр, которому еще предстояло получить статус «регионального» [8, с. 64–65]. Организацию Центра поручили кафедре математического анализа (заведующий кафедрой — профессор Г. П. Боев). Это был первый общедоступный вычислительный центр, не только в городе и области, но и во всем Поволжье.

С 1962 по 1981 г. глава механико-математического факультета — профессор Евгений Федорович Бурмистров, факультет активно развивается. Особенно заметную роль в жизни факультета в обозначенный период сыграли Н. Г. Чудаков, С. В. Фалькович, Н. П. Купцов [3, 11], В. В. Вагнер, А. П. Хромов [12, 13], В. Ф. Емельянов, В. Е. Воскресенский и другие.

В течение трех лет, с 1981 по 1984 г., механико-математическим факультетом руководил кандидат физико-математических наук, доцент Николай Михайлович Маслов [8]. Именно в этот исторический период, с 1982 г., механико-математический факультет Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского совместно с Московским государственным университетом имени М. В. Ломоносова и Математическим институтом имени В. А. Стеклова РАН начинает проводить свои знаменитые Саратовские зимние математические школы по теории функций и приближений [14]. Среди их участников — ведущие ученые, академики и члены-корреспонденты РАН и республик СНГ. С 1996 г. Саратовские зимние математические школы носят название «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратовские зимние математические школы стали широко известны как в России, так и за рубежом.

С 1984 по 1993 г. декан механико-математического факультета — известный специалист по теории интерполирования функций, заведующий кафедрой теории функций и приближений, доктор физико-математических наук, профессор Андрей Андреевич Привалов [3, 15]. Это были нелегкие перестроенные годы. Но именно в это сложное время начали налаживаться постоянные связи с зарубежными партнерами, активизировалась работа со школьниками.

С 1993 по 2003 г. деканом механико-математического факультета был заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, доктор физико-математических наук, профессор Леонид Юрьевич Коссович [16] (ректор СГУ 2003–2013 гг., президент СГУ с 2013 г.). В это время расширяются учебные и научные связи факультета с промышленностью региона, устанавливаются контакты с университетами Германии, США, Великобритании, других стран. Ученые факультета принимают участие в совместных фундаментальных и прикладных исследованиях, выигрывают научные гранты.

В 2000 г. от механико-математического факультета отделился факультет компьютерных наук и информационных технологий (КНиИТ) [17]. Идея создания факультета КНиИТ принадлежала Анатолию Михайловичу Богомолу [3, 18] (ректор СГУ 1977–1994 гг.), однако факультет был создан уже после его смерти [8, с. 241–244].

С 2003 г. механико-математический факультет возглавляет кандидат физико-математических наук, доцент Андрей Михайлович Захаров.

Более подробно с историей Саратовского университета, а также с историей механико-математического факультета до 2009 г. можно ознакомиться в [2, 8]. Мы же остановимся на современных достижениях факультета.

В настоящее время Саратовскому университету присвоен статус национального исследовательского. В 2015 г. согласно рейтингу QS СГУ вошёл в число 50 вузов, разместившихся на 601–650-м местах в мировом рейтинге, занял 13–16-е место среди российских вузов и стал единственным вузом Саратова, включённым в рейтинг. В рамках предметного рейтинга университет оценивался по 5 дисциплинам. Наилучший результат, 11-е место в Российской Федерации, был показан по математике.

На 11 кафедрах механико-математического факультета [19] работают более 100 преподавателей, в том числе 27 докторов наук. За последние пять лет сотрудниками успешно защищено 5 докторских и 30 кандидатских диссертаций.

Механико-математический факультет является крупнейшим в СГУ по бюджетному набору. Подготовка ведется по 6 направлениям бакалавриата (математика и компьютерные науки, прикладная



математика и информатика, механика и математическое моделирование, прикладная информатика, бизнес-информатика, педагогическое образование) и 6 направлениям магистратуры (математика и компьютерные науки, прикладная математика и информатика, механика и математическое моделирование, прикладная информатика, педагогическое образование, экономика). Национальный центр общественно-профессиональной аккредитации назвал реализуемые на факультете программы «Математика и компьютерные науки», «Прикладная математика и информатика», «Педагогическое образование», «Прикладная информатика» лучшими образовательными программами инновационной России.

Механико-математический факультет — мощный научный центр. Исследования, проводимые на факультете, носят фундаментальный и прикладной характер. Ученые механико-математического факультета за последние пять лет участвовали в выполнении 5 грантов Президента РФ, 4 грантов Министерства образования и науки РФ, более 20 грантов РФФИ и более 20 грантов зарубежных научных фондов. Такой успех стал возможен благодаря стабильному существованию сложившихся научных школ:

- Динамические задачи теории тонкостенных конструкций: теория и приложения (руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Л. Ю. Коссович);
- Спектральная теория несамосопряженных линейных операторов (руководитель — доктор физико-математических наук, профессор А. П. Хромов);
- Обратные и некорректно поставленные задачи (руководитель — доктор физико-математических наук, профессор В. А. Юрко);
- Теория аналитических функций и функциональных пространств (руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Д. В. Прохоров);
- Ортогональные ряды и теория приближений (руководитель — доктор физико-математических наук, профессор С. Ф. Лукомский).

Статистика такова: за последние 5 лет издано 23 монографии, 142 учебных пособия, 16 сборников, около 1300 статей; проведено 14 конференций, в том числе 5 международных и 1 всероссийская.

Ведущие ученые факультета являются членами редколлегий крупных математических журналов, в том числе зарубежных:

- Analysis and Mathematical Physics (международное издательство Birkhäuser);
- Journal of Inverse and Ill-Posed Problems (издательство de Gruyter, Berlin, Germany);
- International Journal of Differential Equations (издательство Hindawi Publishing Corporation, New York, USA);
- Tamkang Journal of Mathematics (издательство Tamkang Publishing, Tamsui, Taiwan);
- Applications and Applied Mathematics (издательство PVAMU, Texas, USA);
- Advances in Pure Mathematics (издательство Scientific Research Publishing, Irvine, USA).

Механико-математический факультет плодотворно сотрудничает с Образовательно-научным институтом наноструктур и биосистем СГУ (директор — кандидат физико-математических наук И. В. Кириллова) и Институтом рисков (руководитель — доктор физико-математических наук С. П. Сидоров).

Нашими зарубежными партнерами в академической среде являются:

- Брунельский университет (Brunel University, England);
- Университет Лафборо (Loughborough University, England);
- Университет Бергена (University of Bergen, Norway);
- Тамканский университет (Tamkang University, Taiwan);
- Университет Токио (Tokyo University, Japan);
- Университет Морелиа (Morelia University, Mexico).

Много сил и внимания сотрудники механико-математического факультета уделяют работе с молодежью. Лучшим показателем этого являются призовые места, занимаемые нашими студентами в международных и всероссийских олимпиадах. Особо следует отметить Чемпионат мира по программированию (2009 — золото, 2010 — серебро, 2011 — серебро), Международную студенческую



олимпиаду «Информационные системы в экономике» (2010 — I место в командном и личном зачётах) и Всероссийскую студенческую олимпиаду по математике (2013 — I место в региональном этапе).

Для привлечения молодых кадров к научной деятельности на базе СГУ проводится множество конференций, в том числе по математике, механике и математической экономике (см., например, [20–23]).

Отметим конференции, проходившие в 2015 г.

С 21 по 24 октября 2015 г. прошла Всероссийская конференция молодых ученых с международным участием «Практическая биомеханика». Она была адресована студентам, аспирантам, докторантам и молодым ученым, проводящим свои исследования в областях биомеханики и механики, биомедицинской инженерии, физики и биофизики, прикладной математики, физиологии и науки о материалах, а также всем ученым и инженерам, чьи интересы лежат в областях биомеханики и механобиологии.

С 2 по 5 декабря 2015 г. прошла IV Международная молодежная научно-практическая конференция «Математическое моделирование в экономике и управлении рисками». Целью конференции были обсуждение научных результатов и практических приложений в области экономико-математического моделирования и управления рисками в финансовой деятельности, страховании, банковском деле, экономическом прогнозировании, инвестировании, финансовом анализе и других разделах экономических знаний.

Приглашаем коллег принять участие в конференциях 2016 г.

18-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» пройдет с 27 января по 3 февраля 2016 г.

Первая школа прошла в Саратове в 1982 г. и с тех пор проведение их стало хорошей традицией, настоящей кузницей отечественных научных кадров. Многие саратовские (и не только саратовские) ученые-математики получили на этих школах путевки в научную жизнь. Организация таких школ — это реальная работа по возрождению и сохранению отечественной науки.

Ежегодная научная конференция механико-математического факультета «Актуальные проблемы математики и механики» состоится 1–30 апреля 2016 г. Материалы конференции регулярно публикуются в сборнике научных трудов «Математика. Механика» (ISSN 1609-4751, учитывается РИНЦ).

XIV Международная конференция «Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения», посвященная 70-летию со дня рождения Г. И. Архипова, С. М. Воронина намечается на 12–15 сентября 2016 г. Целью проведения конференции является координация современных исследований по алгебре и теории чисел, направленная на решение актуальных фундаментальных проблем в этих областях математики.

Молодые ученые, аспиранты и докторанты могут опубликовать результаты своей научной деятельности в журнале «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика». Журнал входит в международную базу zbMath и включен в новый Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (см. письмо о Перечне рецензируемых научных изданий от 01.12.2015 г. № 13-6518, опубликованное на сайте ВАК <http://vak.ed.gov.ru/87>). Журнал активно развивается и продвигается в открытое научное информационное пространство. Кроме сайта журнала mmi.sgu.ru, полнотекстовые версии выпусков также представлены на общероссийском математическом портале Math-Net.ru и в научных электронных библиотеках e-lubragu и КиберЛенинке.

Благодаря высокому профессионализму преподавателей и сотрудников, творческим начинаниям студентов и аспирантов научно-образовательный потенциал механико-математического факультета продолжает расти. На сегодняшний день механико-математический факультет динамично развивается, открыт для новых идей и приглашает коллег к сотрудничеству.



Библиографический список

1. Хромов А. П. Владимир Васильевич Голубев // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 88–89.
2. Аврус А. И., Гапоненков А. А., Данилов В. Н. История Саратовского университета. 1909–2009 : в 2 т. Т. 1. 1909–1945. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. 296 с.
3. Выдающиеся люди факультета. URL: <http://www.sgu.ru/structure/mechmath/history/history/istoriya> (дата обращения: 25.11.2015).
4. Виктор Владимирович Вагнер / под ред. В. В. Розена // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8. Отдельный оттиск. 37 с.
5. Васильев А. М., Ефимов Н. В., Кострикин А. И., Либер А. Е., Лопищ А. М., Ляпин Е. С., Рашевский П. К. Виктор Владимирович Вагнер (некролог) // УМН. 1982. Т. 37, № 2(224). С. 171–174.
6. Они сражались за Родину. URL: <http://www.sgu.ru/structure/mechmath/history/history/battledforcountry> (дата обращения: 15.11.2015).
7. История механико-математического факультета. URL: <http://www.sgu.ru/structure/mechmath/history> (дата обращения: 15.11.2015).
8. Мяснев А. П. История Саратовского университета. 1909–2009 : в 2 т. Т. 2. 1945–2009. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. 348 с.
9. Недорезов П. Ф. Сергей Георгиевич Лехницкий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 2. С. 153–155.
10. Богомолов А. М., Кострикин А. И., Купцов Н. П., Минеев М. П., Ульянов П. Л., Чудаков Н. Г. Алексей Иванович Барабанов (некролог) // УМН. 1985. Т. 40, № 6(246). С. 129–130.
11. Кудрявцев Л. Д., Никольский С. М., Прохоров Д. В., Стечкин С. Б., Теляковский С. А., Ульянов П. Л., Хромов А. П., Юрко В. А. Николай Петрович Купцов (некролог) // УМН. 1995. Т. 50, № 4(304). С. 71–72.
12. Богомолов А. М., Никольский С. М., Ульянов П. Л. Август Петрович Хромов (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1995. Т. 50, № 2(302). С. 236–238.
13. Август Петрович Хромов (к 80-летию со дня рождения) // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 351–356.
14. Богомолов А. М., Привалов А. А., Ульянов П. Л. Вторая саратовская зимняя школа по теории функций и приближений // УМН. 1985. Т. 40, № 1(241). С. 243–244.
15. Богомолов А. М., Купцов Н. П., Никольский С. М., Стечкин С. Б., Ульянов П. Л., Хромов А. П. Андрей Андреевич Привалов (некролог) // УМН. 1994. Т. 49, № 1(295). С. 199–200.
16. Яровой Г. П., Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Профессор Леонид Юрьевич Коссович (к 60-летию со дня рождения) // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная сер. 2008. № 6(65). С. 5–19. URL: <http://vestnik-samgu.samsu.ru/est/2008web6/misc/200860001.pdf> (дата обращения: 15.11.2015).
17. Федорова А. Г. Факультету КНИИТ исполнилось 15 лет! // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 239–242.
18. Анатолий Михайлович Богомолов / под ред. Д. В. Сперанского, А. Г. Федоровой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Отдельный оттиск. 40 с.
19. Захаров А. М., Шаталова А. В., Кучер Н. А. Механико-математический факультет Саратовского государственного университета // Математика и информационные технологии в естественно-научном образовании : сб. науч. тр. Тюмень : Изд-во Тюмен. гос. ун-та, 2014. С. 133–138.
20. Голубов Б. И., Кашин Б. С., Коссович Л. Ю., Сидоров С. П., Хромов А. П. 17-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященная 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 357–359.
21. Розен В. В. Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры», посвященная 100-летию профессора В. В. Вагнера // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 90.
22. Коссович Л. Ю. Международная конференция «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды» // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 2. С. 85–87.
23. Коссович Л. Ю. Всероссийская конференция «III сессия научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела» // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 2. С. 149–152.

А. М. Захаров, В. А. Халова



Подписка на I полугодие 2016 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017,
раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки».
Журнал выходит 4 раза в год.

Подписка оформляется по заявочным письмам

непосредственно в редакции журнала.

Заявки направлять по адресу:

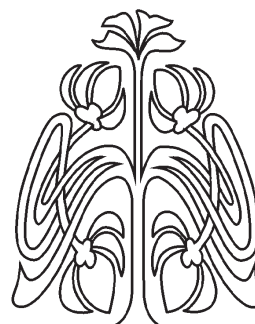
410012, Саратов, Астраханская, 83.

Редакция журнала «Известия Саратовского университета».

Тел. (845-2) 51-45-49, 52-26-89; факс (845-2) 27-85-29;

e-mail: izvestiya@sgu.ru, mmi@sgu.ru

Цена свободная.



ПОДПИСКА

