

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

О ВЫБОРЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТОВ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ НЕПРИВОДИМОГО ПОЛИНОМА ОТ АРГУМЕНТА pq С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА p И q

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова

Воронежский государственный университет
E-mail: algebraist@yandex.ru

В работе получена теорема об одном выборе приближения числа элементов в конечной последовательности специального вида.

Ключевые слова: приближение, число, последовательность, полином.

On the Choice of Approximation for Number of Elements in the Sequence of Values for Simple Polynomial of Argument pq with Constraints on p and q

E. V. Vakhitova, S. R. Vakhitova

In this paper the theorem is obtained on one choice of the approximation for the element number in finite sequence of special kind.

Key words: approximation, number, sequence, polynomial.

ВВЕДЕНИЕ

При оценке количества элементов последовательности целых чисел

$$A = \{a_n \in \mathbf{Z} | a_n \leq x\}$$

($n \in \mathbf{N}$, x — достаточно большое положительное число), которые не делятся ни на какое простое число из данного множества простых, как правило применяют метод решета, который сводит эту задачу к оценке числа элементов последовательности вида

$$A_d = \{a_n \in A, a_n \equiv 0 \pmod{d}\}$$

для различных d , где $d \in \mathbf{N}$.

С целью оценки числа элементов последовательности A_d ищется достаточно точная аппроксимация числа элементов этого множества в виде

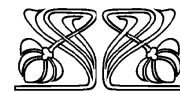
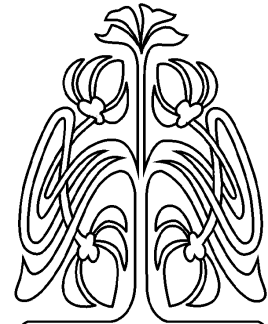
$$\frac{\omega(d)}{d} X,$$

где $\omega(d)$ — некоторая мультипликативная функция, а X — некоторая положительная функция, $X > 1$ (например, $X = li x / \varphi(d)$ для $|A_d| = \pi(x; d, l)$).

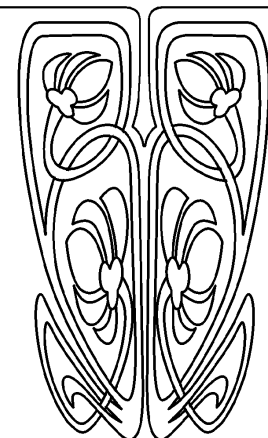
Выбор функций $\omega(d)$ и X определяется условием минимизации:

$$R(X, d) = \left| |A_d| - \frac{\omega(d)}{d} X \right|.$$

Отметим, что не всегда удается получить явную оценку величины $R(X; d)$ в классе предполагаемых функций X ; и в этом случае подби-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





рают функцию так, чтобы остаточный член был мал «в среднем» в смысле теоремы Бомбьери–Виноградова (см. [1, 2]).

Идеи метода решета лежат в основе постановки и решения задачи, которая рассматривается в данной работе.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Будем применять сведения по теории сравнений из [3] и [4] и функцию Мебиуса, которая определяется следующим равенством:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^s, & n = p_1 p_2 \dots p_s, \\ 0, & p^2 | n, \end{cases}$$

где $n, s \in \mathbf{N}$, p_1, p_2, \dots, p_s — попарно различные простые числа.

Пусть $F(n)$ — неприводимый полином степени g с целыми коэффициентами ($g, n \in \mathbf{N}$) и $n = pq$, где p и q — положительные простые числа, $p \neq q$.

Обозначим через $\rho(d)$ число различных по модулю d решений сравнения $F(n) \equiv 0 \pmod{d}$, где $d \in \mathbf{N}$ и число d свободно от квадратов, т. е. $\mu(d) \neq 0$. Предположим, что $\rho(p) < p$ для всех простых чисел p , причем $\rho(p) < p - 1$, если $p \nmid F(0)$.

Рассмотрим конечную последовательность A ,

$$A = \{F(pq) \mid p \neq q, (pq, F(0)) = 1, p \leq x^\alpha, q \leq x^{1-\alpha}\}, \quad (1)$$

где $\alpha, x \in \mathbf{R}$, $x > 1$, $0 < \alpha \leq 1/2$ и элементы из A не делятся ни на какое простое число $\leq x^{1/a}$, т. е. наименьший положительный простой делитель p_n числа $F(pq)$ удовлетворяет неравенству $p_n > x^{1/a}$, где a — параметр решета, x — достаточно большое положительное число.

Обозначим через A_d последовательность

$$A_d = \{F(pq) \in A \mid F(pq) \equiv 0 \pmod{d}\}$$

и через $|A_d|$ — число элементов в A_d , включая и одинаковые значения.

Пусть $\omega(d)$ — мультипликативная функция такая, что $\frac{\omega(d)}{d} X$ является приближением числа $|A_d|$, где $X = X(x)$.

Введем следующие условия на последовательность A .

1) Существует постоянная $C'_1 \geq 1$ такая, что

$$1 \leq \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \leq C'_1$$

для любого простого числа p , где $\omega(p)$ — мультипликативная функция такая, что $(\omega(d)/d)X$ является приближением $|A_d|$ и $\mu(d) \neq 0$ ($\mu(n)$ — функция Мебиуса).

Выполнимость условия 1) дает возможность рассматривать

$$\prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right).$$

2) Существуют постоянная $C'_2 \geq 1$ и параметр L такие, что

$$-L \leq \sum_{u \leq p < v} \frac{\omega(p)}{p} \ln p - \ln \frac{v}{u} \leq C'_2,$$

где $L \geq 1$ и не зависит от u и v ($2 \leq u \leq v$).

Условие 2) говорит о том, что $\omega(p)$, по крайней мере в среднем по p , равно 1. Иначе будем рассматривать только те последовательности A , при просеивании которых возникает задача одномерного решета.



3) Существуют постоянные α ($0 < \alpha \leq 1$), $C'_3 \geq 1$, $C_0 \geq 1$, такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X, d)| \leq C'_3 \frac{X}{\ln^C X},$$

где $X \geq 2$, $C'_3 = C'_3(C)$, $R(X, d) = |A_d| - \frac{\omega(d)}{d} X$.

Условие 3) позволяет говорить о достаточной малости остаточного члена $R(X, d)$.

Отметим, что если известна оценка суммы, содержащейся в остаточном члене, то можно выбрать в одномерном решетке Сельберга (в неравенстве $d < \xi^2$) ξ^2 подходящим образом. Это обеспечивается условием 3), так как можно выбрать $\xi^2 = \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}$.

Усредненные оценки числа простых чисел в арифметических прогрессиях основаны на использовании идей большого решета Ю. В. Линника. Обычно пользуются оценкой при $d \leq X^C$, которую М. Б. Барбан доказал при $C = 3/8 - \varepsilon$, А. Бомбьери и А. И. Виноградов — при $C = 1/2 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная. Несколько более слабую форму этой оценки при $d \leq \frac{X^{1/2}}{\ln^C X}$ доказал А. И. Виноградов.

Поставим задачу: осуществить выбор приближения числа элементов в конечной последовательности A_d , состоящей из значений неприводимого полинома $F(pq)$ натуральной степени g с целыми коэффициентами с ограничениями на p и q , где $p \neq q$, и $F(pq)$ делится на свободное от квадратов натуральное число d .

Подобную задачу рассматривал Х. Рихерт для полинома $F(p)$, $p \leq x$.

В примере 1.2 работы [5] приближение $\frac{\rho_1(d)}{d} li x$ получено для

$$|A_d| = |\{F(p) | F(p) \equiv 0 \pmod{d}, p \leq x\}|$$

и остаточный член мал в среднем в смысле теоремы Бомбьери–Виноградова.

В работе [5, с. 10] указано (но не доказано) на то, что из теоремы Барбана–Давенпорта следует, что оценка А. И. Виноградова верна и для $n = pq$.

Авторами для остаточного члена

$$R(x, d) = \left| |A_d| - \frac{\rho_1(d)}{\varphi(d)} (li x^{1/2})^2 \right|,$$

где $\rho_1(d)$ — число решений сравнения $F(m) \equiv 0 \pmod{d}$ при $(m, d) = 1$, показано, что он достаточно мал в том смысле, что выполнено условие на последовательность:

$$\sum_{d < \frac{x^{1/2}}{\ln^{C_0} x}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(x, d)| \leq C'_3 \frac{x}{\ln^4 x}.$$

Таким образом, функция $\frac{\rho_1(d)}{d} (li x^{1/2})^2$ является приближением для

$$|A_d| = |\{F(pq) | F(pq) \equiv 0 \pmod{d}, p \leq x^{1/2}, q \leq x^{1/2}\}|.$$

Теорема. Пусть $d \in \mathbf{N}$, $d < \frac{x^{1/2}}{\ln^{C_0} x}$, d не делится на квадрат простого числа, и пусть последовательность A определяется равенством (1). Тогда существует мультипликативная функция $\omega(d)$ такая, что $\frac{\omega(d)}{d} X(x)$, где $X(x) = (li x^{1/2})^2$, является приближением числа элементов в последовательности A , которые делятся на d .

Доказательство. Для числа $|A_d|$ получим:

$$|A_d| = \sum_{\substack{p \leq x^\alpha, q \leq x^{1-\alpha} \\ F(pq) \equiv 0 \pmod{d} \\ (pq, F(0))=1}} 1 = \sum_{\substack{1 \leq m \leq d \\ F(m) \equiv 0 \pmod{d} \\ (m, d)=1}} \sum_{\substack{p \leq x^\alpha, q \leq x^{1-\alpha} \\ pq \equiv m \pmod{d}}} 1.$$



Обозначим через $\bar{\pi}(x; d, m)$ внутреннюю сумму при $(m, d) = 1$:

$$\bar{\pi}(x; d, m) = \sum_{\substack{p \leq x^\alpha, q \leq x^{1-\alpha} \\ pq \equiv m \pmod{d}}} 1, \quad (m, d) = 1.$$

Тогда получим, что

$$|A_d| = \sum_{\substack{1 \leq m \leq d \\ F(m) \equiv 0 \pmod{d} \\ (m, d) = 1}} \bar{\pi}(x; d, m).$$

Обозначим через $\rho_1(d)$ число решений сравнения $F(m) \equiv 0 \pmod{d}$ для $(m, d) = 1$.

Сравним функции ρ_1 и ρ . Имеем $\rho_1(d) = \prod_{p|d} \rho_1(p)$, $\mu(d) \neq 0$, а $\rho_1(p)$ — число решений сравнения

$F(m) \equiv 0 \pmod{p}$ при $p \nmid m$.

Тогда если $m = 0$ не является решением указанного сравнения, то $\rho_1(p) = \rho(p)$, если $m = 0$ является решением, то в $\rho_1(p)$ оно не учитывается, поэтому $\rho_1(p) = \rho(p) - 1$. Так как $m = 0$ является решением тогда и только тогда, когда $p|F(0)$, то

$$\rho_1(p) = \begin{cases} \rho(p), & p \nmid F(0), \\ \rho(p) - 1, & p | F(0). \end{cases}$$

Кроме того, известно [3, гл. 15, § 1, теорема 148, с. 128], что $\rho(p) \leq g$, если $\rho(p) < p$, поэтому

$$\rho_1(d) \leq \rho(d) \leq g^{\nu(d)}, \quad \mu(d) \neq 0,$$

если $\rho(p) < p$ для всех $p|d$ ($\nu(n)$ — число различных положительных простых делителей натурального числа n).

Таким образом, для числа $|A_d|$ получим:

$$\begin{aligned} |A_d| &= \sum_{\substack{1 \leq m \leq d \\ F(m) \equiv 0 \pmod{d} \\ (m, d) = 1}} \left(\frac{li x^\alpha \cdot li x^{1-\alpha}}{\varphi(d)} + \bar{\pi}(x; d, m) - \frac{li x^\alpha \cdot li x^{1-\alpha}}{\varphi(d)} \right) = \\ &= \sum_{\substack{1 \leq m \leq d \\ F(m) \equiv 0 \pmod{d} \\ (m, d) = 1}} \frac{li x^\alpha \cdot li x^{1-\alpha}}{\varphi(d)} + \sum_{\substack{1 \leq m \leq d \\ F(m) \equiv 0 \pmod{d} \\ (m, d) = 1}} \left(\bar{\pi}(x; d, m) - \frac{li x^\alpha \cdot li x^{1-\alpha}}{\varphi(d)} \right), \end{aligned}$$

где интегральный логарифм определяется равенством

$$li x = \int_2^x \frac{du}{\ln u},$$

а $\varphi(n)$ — функция Эйлера (которая определяется как число натуральных чисел, не превосходящих натурального числа n , и взаимно простых с n).

Обозначим через $R(x, d)$ вторую сумму:

$$R(x, d) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq d \\ F(m) \equiv 0 \pmod{d} \\ (m, d) = 1}} \left(\bar{\pi}(x; d, m) - \frac{li x^\alpha \cdot li x^{1-\alpha}}{\varphi(d)} \right).$$

Тогда число $|A_d|$ можно записать в виде

$$|A_d| = \frac{1}{\varphi(d)} \rho_1(d) li x^\alpha \cdot li x^{1-\alpha} + R(x, d).$$

Введем обозначение $\bar{E}(x, d) = \max_{2 \leq d \leq x} \max_{\substack{1 \leq m \leq d \\ (m, d) = 1}} \left| \bar{\pi}(x; d, m) - \frac{li x^\alpha \cdot li x^{1-\alpha}}{\varphi(d)} \right|$. Тогда $|R(x, d)| \leq$

$\leq \rho(d) \bar{E}(x, d)$.



Так как $\rho(d) \leq g^{\nu(d)}$, если $\mu(d) \neq 0$, то получим $|R(x, d)| \leq g^{\nu(d)} \bar{E}(x, d)$. Поэтому можно выбрать

$$X = li x^\alpha \cdot li x^{1-\alpha}, \quad \omega(d) = \frac{\rho_1(d)}{\varphi(d)} d, \quad (2)$$

так что функция $\omega(d)$ является мультипликативной и

$$\frac{\omega(d)}{d} X = \frac{li x^\alpha \cdot li x^{1-\alpha}}{\varphi(d)} \rho_1(d).$$

О достаточной малости остаточного члена $R(X, d)$ позволяет говорить выполнимость следующего условия на последовательность: существуют постоянные α ($0 < \alpha \leq 1$), $C'_3 \geq 1$, $C_0 \geq 1$, такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X, d)| \leq C'_3 \frac{X}{\ln^C X}, \quad (3)$$

где $X \geq 2$, $C'_3 = C'_3(C)$, $R(X, d) = |A_d| - \frac{\omega(d)}{d} X$, $\nu(d)$ — число различных простых делителей числа d .

Проверим выполнимость условия (3).

Рассмотрим сумму из условия (3) с некоторыми постоянными α и C_0 , которые выберем в дальнейшем. При достаточно большом X имеем:

$$\sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X, d)| \leq \sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} g^{\nu(d)} \bar{E}(X, d) = \sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) (3g)^{\nu(d)} \bar{E}(X, d).$$

Так как $d \leq X$, то $\bar{E}(X, d) \ll \frac{X}{d}$, поэтому, обозначая последнюю сумму через Y_1 , получим:

$$Y_1 \ll \sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \frac{\mu^2(d)}{d^{1/2}} (3g)^{\nu(d)} \bar{E}^{1/2}(X, d) \ll X^{1/2} \left(\sum_{d < X^\alpha} \frac{1}{d} \mu^2(d) (3g)^{2\nu(d)} \right)^{1/2} \left(\sum_{q < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \bar{E}(X, q) \right)^{1/2}.$$

Для первой из полученных сумм получим:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{d < X^\alpha} \frac{1}{d} \mu^2(d) (3g)^{2\nu(d)} \right)^{1/2} &= \left(\sum_{d_1 \dots d_{(3g)^2} < X^\alpha} \frac{\mu^2(d_1 \dots d_{(3g)^2})}{d_1 \dots d_{(3g)^2}} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\left(\sum_{n < X^\alpha} \frac{1}{n} \right)^{(3g)^2} \right)^{1/2} \leq (\alpha \ln X + 1)^{(3g)^2/2}. \end{aligned}$$

Для оценки второй суммы применим результат Барбана [6, теорема 3.3] при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 1/2$, тогда получим оценку:

$$\sum_{q < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \max_{\substack{1 \leq m \leq q \\ (m, q) = 1}} \left| \bar{\pi}(X; q, m) - \frac{li X^\alpha li X^{1-\alpha}}{\varphi(q)} \right| = O \left(\frac{X}{\ln^{\frac{C}{10}} X} \right),$$

где $C > 0$. Поэтому при $C_0/10 = 8 + (3g)^2$ получим:

$$\left(\sum_{q < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \bar{E}(X, q) \right)^{1/2} = \left(O \left(\frac{X}{\ln^{\frac{C_0}{10}} X} \right) \right)^{1/2} = O \left(\frac{X^{1/2}}{\ln^{4 + \frac{1}{2}(3g)^2} X} \right).$$

Таким образом, для суммы Y_1 получим:

$$Y_1 \ll X^{1/2} (\alpha \ln X + 1)^{(3g)^2/2} \frac{X^{1/2}}{\ln^{4 + (3g)^2/2} X} \ll \frac{X}{\ln^4 X},$$

причем постоянная в символе \ll может зависеть только от g .



Итак, при $\alpha = 1/2$ существуют постоянные $C'_3 \geq 1$ и $C_0 \geq 1$ такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^{1/2}}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X, d)| \leq C'_3 \frac{X}{\ln^4 X},$$

следовательно, условие (3) выполнено с $\alpha = 1/2$.

Таким образом, учитывая (2), получим, что существует мультипликативная функция $\omega(d)$, такая, что $\frac{\omega(d)}{d} X(x)$, где $X(x) = (li x^{1/2})^2$, является приближением числа элементов в последовательности A , которые делятся на d . Теорема доказана.

Библиографический список

1. Левин Б. В. Распределение «почти простых» чисел в целозначных полиномиальных последовательностях // Докл. АН Узб. ССР. 1962. Т. 11. С. 7–9. [Levin B. V. Distribution «almost simple» number in all value polynomial sequence // Doklady Akademii Nauk Uz. SSR. 1962. Vol. 11. P. 7–9.]
2. Бухштаб А. А. Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета // УМН. 1967. Т. 22, № 3(135). С. 199–226. [Buchstab A. A. A combinatorial strengthening of the Eratosthenes' sieve method // Russian Math. Surveys. 1967. Vol. 22, № 3. P. 205–233.]
3. Рихерт Х.-Э. Решето Сельберга // Проблемы аналитической теории чисел / пер. с англ. Б. В. Левина. М. : Мир, 1975. С. 7–42. [Richert H.-E. Selbergs sieve // Proc. of Symposia in Pure Mathematics (Stony Brook, 1969). Providence, R. I. : Amer. Math. Soc., 1971. Vol. 20. P. 287–310.]
4. Бухштаб А.А. Теория чисел. М. : Просвещение, 1966. 384 с. [Buchstab A. A. Number theory. Moscow : Prosveschenie, 1966. 384 p.]
5. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М. : Наука, 1981. 176 с. [Vinogradov I. M. Basic number theory. Moscow : Nauka, 1981. 176 p.]
6. Барбан М.Б. Метод «большого решета» и его применения в теории чисел // УМН. 1966. Т. 21, № 1(127). С. 51–102. [Barban M. B. The «large sieve» method and its applications in the theory of numbers // Russian Math. Surveys. 1966. Vol. 21, № 1. P. 49–103.]

УДК 501.1

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Н. С. Калужина

Воронежский государственный университет
E-mail: kaluzhina_n_s@mail.ru

В работе изучаются качественные свойства слабого решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Доказано, что каждое слабое решение задачи Коши является медленно меняющейся на бесконечности функцией. Полученный результат применяется для исследования решения задачи Неймана для уравнения теплопроводности.

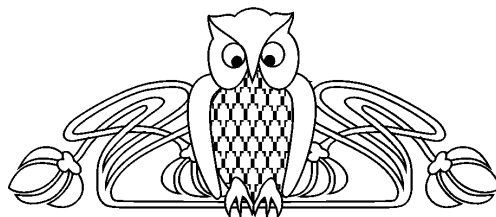
Ключевые слова: задача Коши, медленно меняющаяся на бесконечности функция, слабое решение задачи Коши, задача Неймана для уравнения теплопроводности.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H — комплексное гильбертово пространство [1], $\text{End } H$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H . Через $L^1(\mathbb{R}_+, H)$ обозначается пространство суммируемых на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ со значениями в H функций со сверткой функций в качестве умножения (см. [2])

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}_+, H).$$

Через $C_b(\mathbb{R}_+, H)$ обозначается банахово пространство непрерывных ограниченных на \mathbb{R}_+ функций со значениями в H с супремум-нормой $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|x(t)\|$. Подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}_+, H)$,



Qualitative Properties of Mild Solutions of the Cauchy Problem

N. S. Kaluzhina

In this paper we study the qualitative properties of a mild solution of the problem Cauchy problem for the heat equation. We prove that every mild Cauchy problem is a slowly varying at infinity function. The result is applied to study solutions of the Neumann problem for the heat equation.

Key words: Cauchy problem, slowly varying at infinity function, a mild solution of the Cauchy problem, Neumann problem for the heat equation.



исчезающих на бесконечности (т. е. функции x из $C_b(\mathbb{R}_+, H)$ со свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$), будем обозначать через $C_0(\mathbb{R}_+, H)$. Заметим, что во введенных функциональных пространствах действует сильно непрерывная изометрическая полугруппа операторов сдвига $(S(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, действующая по правилу: $(S(t)x)(s) = x(t + s)$, $s, t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \{C_b(\mathbb{R}_+, H), L^1(\mathbb{R}_+, H), C_0(\mathbb{R}_+, H)\}$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Lu + f(t), & t \geq 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $f \in L^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, H)$, $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$, оператор $L : D(L) \subset H \rightarrow H$ имеет дискретный спектр и является самосопряженным. Пусть $L \leq 0$, т. е. $(Lx, x) \leq 0$ для всех $x \in H$, и 0 — изолированная точка спектра $\sigma(L)$, которая является собственным значением конечной кратности (т. е. размерность ядра $\dim \text{Ker } L = n \geq 1$). Отметим, что оператор L является генератором некоторой C_0 -полугруппы $(T(t))$, $t \geq 0$.

Здесь используются некоторые результаты, изложенные в статьях [1–5].

Под решением уравнения (1) будем понимать функцию из следующего определения.

Определение 1. Функция $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ называется *слабым решением (mild-solution)* задачи (1), если она представима в виде

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2)$$

При рассмотрении задачи Коши (1) естественным образом возникает вопрос о качественном поведении слабого решения при больших значениях времени t . Для того, чтобы решить эту проблему, введем в рассмотрение следующее понятие.

Определение 2. Функция $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности* функцией (используется обозначение $u \in C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$), если для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено $S(t)u - u \in C_0(\mathbb{R}_+, H)$, т. е. для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ $\lim_{s \rightarrow \infty} \|u(t+s) - u(s)\| = 0$.

Примером медленно меняющейся на бесконечности функции является функция $\sin(\ln(1+|t|))$, $t \in \mathbb{R}$.

Целью настоящей работы является получение следующего результата.

Теорема 1. Каждое слабое решение задачи (1) является медленно меняющейся на бесконечности функцией (элементом пространства $C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$).

В п. 2 содержится доказательство теоремы 1, а п. 3 посвящен приложению полученного результата к исследованию асимптотических свойств слабого решения задачи Неймана для уравнения теплопроводности. Заметим, что в статье [6] были получены результаты относительно асимптотических свойств решения задачи Неймана, но с более сильными условиями на правую часть. В данной работе от правой части f требуется лишь $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, H)$, $x \in [0, 1]$.

Сформулируем важное свойство медленно меняющихся на бесконечности функций (см. [4, замечание 3]).

Теорема 2. Любая функция $u \in C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$ представима в виде

$$u = u_0 + u_1, \quad (3)$$

где $u_0 \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ и существует $\lim_{t \rightarrow \infty} u_0(t)$, а $u_1 \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ при достаточно больших t имеет производную $u_1'(t)$, причем $u_1' \in C_0(\mathbb{R}_+, H)$. Верно и обратное свойство: если функция $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ представлена в виде (3), то она принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Поскольку 0 — изолированное собственное значение оператора L , то будем рассматривать ортогональное разложение гильбертова пространства H в прямую сумму подпространств $H = H_0 \oplus H_1$, где $H_0 = \text{Ker } L$, $\dim H_0 = n \geq 1$ и $H_1 = H_0^\perp$ — является инвариантным подпространством для оператора L и $0 \notin \sigma(L|_{H_1}) = \sigma(L_1)$ (см. [3]), где $L_1 = L|_{H_1} : H_1 \rightarrow H_1$ — сужение оператора L на подпространство H_1 . Пусть P_0, P_1 — ортопроекторы, осуществляющие это разложение, $\text{Im } P_0 = H_0$



и $\text{Im } P_1 = H_1$. В соответствии с этим уравнение (1) расщепляется на

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = P_0 f(t), & t \geq 0, \\ u_0(0) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = L_1 u_1 + P_1 f(t), & t \geq 0, \\ u_1(0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Отметим, что L_1 является генератором C_0 -полугруппы $T_1(t) = T(t)|_{H_1}$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $T_1(t)$ — сужение полугруппы $T(t)$ на H_1 .

Лемма 1. Пусть существует слабое решение $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ уравнения (1). Тогда оно представимо в виде $u = u_0 + u_1$, где функция $u_0(t) = \int_0^t P_0 f(s) ds$ — слабое решение уравнения (4), а

функция $u_1(t) = \int_0^t T_1(t-s) P_1 f(s) ds$ является слабым решением уравнения (5).

Доказательство. Пусть u — ограниченное слабое решение уравнения (1). Тогда оно представимо в виде (2). Применяя к формуле (2) ортопроектор $P_0 : H \rightarrow H_0$, получим $P_0 u(t) = \int_0^t P_0 T(t-s) f(s) ds = \int_0^t T(t-s) P_0 f(s) ds = \int_0^t P_0 f(s) ds$, $t \geq 0$, где использовалась перестановочность P_0 и $T(t)$, а также свойство $H_0 = \text{Ker } L$. Таким образом, $u_0 = P_0 u$ является слабым решением (4) по определению 1.

Аналогично, применяя к (2) ортопроектор $P_1 : H \rightarrow H_1$, получим $P_1 u(t) = \int_0^t P_1 T(t-s) f(s) ds = \int_0^t P_1 T(t-s) P_1 f(s) ds$, $t \geq 0$, откуда следует, что $u_1 = P_1 u$ является слабым решением уравнения (5). Поскольку $H = H_0 \oplus H_1$, то слабое решение (1) единственным образом представимо в виде $u = u_0 + u_1$. \square

Таким образом, уравнение (1) расщепляется на уравнения (4) и (5) и каждое ограниченное слабое решение задачи (1) представимо в виде: $u = u_0 + u_1$, где u_0 — слабое решение уравнения (4), u_1 — слабое решение уравнения (5).

Заметим, что из спектральных свойств оператора L и его сужения L_1 следует, что полугруппа $(T_1(t))$, $t \geq 0$, является экспоненциально устойчивой. А именно имеют место оценки: $\|T_1(t)\| \leq e^{\alpha_0 t}$, $t \geq 0$, где $\alpha_0 = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}\} = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(L_1)\} < 0$. Значит, существует $\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t T_1(t-s) P_1 f(s) ds$, поскольку $f \in L^1(\mathbb{R}_+, H)$.

Поскольку u — решение (1), то u_0 имеет производную $\frac{du_0}{dt}$ и в силу свойства $P_0 f \in C_0(\mathbb{R}_+, H)$ $\frac{du_0}{dt} \in C_0(\mathbb{R}_+, H)$.

Таким образом, по теореме 2 функция u является медленно меняющейся на бесконечности функцией, т. е. элементом пространства $C_{st}(\mathbb{R}_+, H)$.

3. ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В $L^2[0, 1]$

Пусть $H = L^2[0, 1]$ — комплексное гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, и скалярным произведением:

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in H.$$

Также будем рассматривать $W_2^2[0, 1]$ — пространство Соболева комплексных функций из $L^2[0, 1]$, которые абсолютно непрерывны на $[0, 1]$ и имеют вторую производную, принадлежащую пространству $L^2[0, 1]$ (см. [5]). Через $C[0, 1]$ обозначается банахово пространство комплексных непрерывных на $[0, 1]$ функций с супремум-нормой $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$.



Рассмотрим дифференциальное уравнение с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - a^2(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad t \geq 0, \quad x \in [0, 1], \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \end{cases} \quad (6)$$

где a — вещественная функция из $C_b[0, 1]$ и для всех $x \in [0, 1]$ выполнено $a^2(x) > 0$. Предполагается, что функция $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, H)$, $x \in [0, 1]$.

Вопрос о стабилизации решения задачи (6) рассматривался в статье [6], но с более жесткими условиями на правую часть. Цель п. 3 — применить теорему 1 к слабому решению задачи (6).

Введем оператор $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ с областью определения $D(A) = \{u \in W_2^2[0, 1] : u'(0) = u'(1) = 0\}$, действующий по правилу $Au = \frac{d^2 u}{dx^2}$, $u \in D(A)$. Собственные функции оператора A имеют вид: $e_n(t) = \cos(\pi n t)$, $n \geq 0$, $t \in [0, 1]$, собственные значения $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, $n \geq 0$. Таким образом, оператор A необратим (поскольку $0 \in \sigma(A)$) и $\text{Ker } A \neq \{0\}$.

Пусть оператор $B : H \rightarrow H$ действует по правилу: $Bu = a^2 u$, $u \in H$. Поскольку $a^2(x) > 0$, $\forall x \in [0, 1]$, то B обратим в H и обратный имеет вид

$$B^{-1}u = \frac{1}{a^2}u, \quad u \in H.$$

Заметим, что операторы A и B являются самосопряженными, т. е. $A^* = A$, $B^* = B$. Теперь задачу (6) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - BAu = f(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $D(BA) = D(A)$. В связи с рассмотрением задачи (7) естественным образом возникает вопрос о качественном поведении решения $u(x, t)$, когда $t \rightarrow \infty$, $x \in [0, 1]$.

Покажем сначала, что оператор BA имеет компактную резольвенту. Для этого будем рассматривать разложение гильбертова пространства H в прямую сумму подпространств $H = H_0 \oplus H_1$, где H_0 — подпространство констант, и H_1 — подпространство, порожденное собственными функциями (e_n) , $n \geq 1$, оператора A . Заметим, что имеет место разложение единицы $I = P_0 \oplus P_1$, где P_0, P_1 — ортопроекторы на соответствующие подпространства H_0 и H_1 .

Рассмотрим оператор $BA - \lambda I = B(A - \lambda B^{-1}) = B(A - \lambda \tilde{B})$, где $\tilde{B} = B^{-1}$. Тогда матрица оператора $A - \lambda \tilde{B}$ относительно прямой суммы $H = H_0 \oplus H_1$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\lambda P_0 \tilde{B} P_0, & -\lambda P_0 \tilde{B} P_1 \\ -\lambda P_1 \tilde{B} P_0, & A P_1 - \lambda P_1 \tilde{B} P_1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения $B_{00} = P_0 \tilde{B} P_0$, $B_{01} = P_0 \tilde{B} P_1$, $B_{10} = P_1 \tilde{B} P_0$ и $A_0 = A P_1 - \lambda P_1 \tilde{B} P_1$. Заметим, что оператор A_0 обратим, а оператор B_{00} действует на функции $u \in H$ по правилу $B_{00}u = P_0 \tilde{B} P_0 u = (\tilde{B} P_0 u, e_0) e_0 = \left(\int_0^1 \frac{1}{a^2(x)} dx \right) (u, e_0)$, где $e_0 = 1$. Таким образом, оператор B_{00} является скалярным оператором умножения в H_0 на $\int_0^1 \frac{1}{a^2(x)} dx > 0$. Следовательно, при $|\lambda| \neq 0$ оператор $-\lambda B_{00}$ является обратимым оператором.

Итак, матрица оператора $A - \lambda \tilde{B}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\lambda B_{00}, & -\lambda B_{01} \\ -\lambda B_{10}, & A_0 \end{pmatrix}.$$

Ее можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} -\lambda B_{00}, & 0 \\ 0, & A_0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} I_0, & B_{01} B_{00}^{-1} \\ 0, & I_1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ A_0^{-1} B_{10}, & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (8)$$



где I_0, I_1 — тождественные операторы на соответствующих подпространствах H_0 и H_1 , а оператор $\begin{pmatrix} I_0, & B_{01}B_{00}^{-1} \\ 0, & I_1 \end{pmatrix}$ обратим и обратный имеет вид $\begin{pmatrix} I_0, & -B_{01}B_{00}^{-1} \\ 0, & I_1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, при малых $|\lambda|$ второй сомножитель в (8) обратим, а первый обратим при $\lambda \neq 0$ и обратный к нему есть оператор с компактной резольвентой. Значит, оператор BA , представимый в виде произведения обратимого и компактного операторов, имеет компактную резольвенту.

Введем теперь в гильбертовом пространстве H новое скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по правилу

$$\langle x, y \rangle = (B^{-1/2}x, B^{-1/2}y), \quad x, y \in H.$$

Лемма 2. Оператор $BA : D(A) \subset H \rightarrow H$ является симметрическим на своей области определения.

Доказательство. Для всех $x, y \in D(A)$ в силу самосопряженности операторов B и A справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \langle BAx, y \rangle &= (B^{-1/2}BAx, B^{-1/2}y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, B^{-1}BAy) = \\ &= (B^{-1/2}x, B^{-1/2}BAy) = \langle x, BAy \rangle, \end{aligned}$$

откуда следует симметричность BA на $D(A)$. □

Таким образом, оператор BA обладает свойствами:

- 1) является симметрическим на $D(A)$ в новом скалярном произведении;
- 2) замкнут, поскольку B обратим;
- 3) $\text{Ker } BA = \text{Ker } A$;
- 4) $D(BA) = D(A)$;
- 5) неотрицательно определен относительно нового скалярного произведения, поскольку $A \geq 0$;
- 6) имеет компактную резольвенту и 0 — изолированная точка спектра $\sigma(BA)$ оператора BA ;
- 7) существует такое $\varepsilon > 0$, что шар $B(0, \varepsilon) \setminus \{0\} \subset \rho(BA)$, где $\rho(BA)$ — резольвентное множество оператора BA .

Из этого следует, что BA является самосопряженным оператором относительно нового скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Таким образом, по теореме 1 каждое слабое решение задачи (6) является медленно меняющейся на бесконечности функцией, т. е. элементом пространства $C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$.

В заключение отметим, что медленно меняющиеся на бесконечности функции использовались при исследовании в работе [7], а также при изучении почти периодических на бесконечности функций в работе [8].

Библиографический список

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М. : Наука, 1966. 544 с. [Ahiezer N. I., Glazman I. M. The theory of linear operators in Hilbert space. Moscow : Nauka, 1966. 544 p.]
2. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Функциональный анализ. СМФН. 2004. Т. 9. М. : МАИ. С. 3–151. [Baskakov A. G. Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators // J. of Math. Sciences. 2006. Vol. 137, iss. 4. P. 4885–5036.]
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с. [Naimark M. A. Linear Differential Operators. Pt. I. New York : Ungar Publ. Co., 1967; Naimark M. A. Linear Differential Operators. Pt. II. New York : Ungar Publ. Co., 1968.]
4. Калужина Н. С. Медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции и их свойства // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2010. № 2. С. 97–103. [Kaluzhina N. S. Slowly varying function at infinity, the periodic function at infinity and their properties // Proc. of Voronezh State University. Ser. Phys. Math. 2010. № 2. P. 97–103.]
5. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987. 165 с. [Baskakov A. G. Harmonic analysis of linear operators. Voronezh, 1987. 165 p.]
6. Карпова Ю. Ю., Рябенко А. С. Изучение второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2011. № 1. С. 168–174. [Karpova Yu. Yu., Ryabenko A. S. Study of the second initial-boundary value problem for the heat equation with variable thermal conductivity // Proc. of Voronezh State University. Ser. Phys. Math. 2011. № 1. P. 168–174.]
7. Баскаков А. Г., Калужина Н. С. Теорема Берлин-



га для функций с существенным спектром из одно-родных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // *Мат. заметки*. 2012. Т. 92, № 5. С. 643–661. [Baskakov A. G., Kaluzhina N. S. Beurling's theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations // *Math. Notes*. 2012. Vol. 92, № 5. P. 643–661.]

8. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // *УМН*. 2013. Т. 68, № 1(409). С. 77–128. [Baskakov A. G. The study of linear differential equations by the methods of the spectral theory of differential operators and linear relations // *UMN*. 2013. Vol. 68, № 1 (409). P. 77–128.]

УДК 517.9

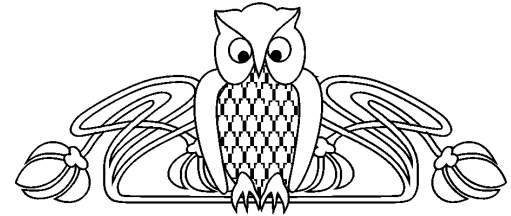
О СВЯЗИ ПРОИЗВОДНОЙ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ЕГО ОПОРНОЙ ФУНКЦИИ

Е. С. Половинкин

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный
E-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

В работе получены достаточные условия, при которых опорная функция производной многозначного отображения в некотором смысле совпадает с производной опорной функции многозначного отображения. Приведен пример несовпадения этих понятий и пример липшицева многозначного отображения, опорная функция которого ни в одной точке не имеет смешанных производных.

Ключевые слова: касательные конусы, производная многозначного отображения, опорная функция.



On Relationship between Derivative of Multifunction and Its Support Function

E. S. Polovinkin

We obtain sufficient conditions under which the support function of the derivative of a set-valued mapping coincides with the derivative of the support function of a set-valued mapping in some sense. The example showing the difference between these concepts and the example of a Lipschitz set-valued mapping whose support function at any point does not have the mixed derivatives are obtained.

Key words: tangent cones, derivative of multifunctions, support function.

ВВЕДЕНИЕ

Проблему дифференцирования многозначных отображений $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ (где $\mathcal{P}(Y)$ — множество всех подмножеств некоторого банахова пространства Y) исследовали многие ученые. В работах Ж.-П. Обена (J.-P. Aubin) и автора (см., например, [1, 2]) впервые было введено понятие производной многозначного отображения, связанное с понятием касательного конуса к графику отображения.

В то же время выпуклозначные отображения удобно исследовать, используя опорную функцию этих отображений. Некоторые авторы пытались строить аппроксимации многозначных отображений, опираясь на первую производную опорной функции $x \rightarrow s(p, F(x))$ (где $s(p, A) \doteq \sup\{\langle p, x \rangle \mid x \in A\}$ — опорная функция множества $A \subset Y$ в точке $p \in Y^*$) и даже на смешанную производную $\frac{\partial^2 s(p, F(x))}{\partial x \partial p}$. В некоторых исследованиях им требовалось существование этой смешанной производной $\frac{\partial^2 s(p, F(x))}{\partial x \partial p}$, что предполагалось верным почти всюду для любого липшицева выпуклозначного отображения.

Производная функции $x \rightarrow s(p, F(x))$, являясь положительно однородной выпуклой функцией по p , задает опорную функцию некоторого многозначного отображения по x .

В нашей работе мы покажем, что в произвольной точке $x_0 \in X$ (даже при значениях p из нормального конуса к непустому множеству $F(x_0)$) производная функции $x \rightarrow s(p, F(x))$ в точке x_0 может отличаться от опорной функции многозначной L -производной исходного отображения F в этой точке, т. е. производная опорной функции не всегда осуществляет хорошую аппроксимацию многозначного отображения F . Приведем достаточные условия, при которых производная от опорной функции отображения F задает локальную коническую аппроксимацию этого отображения. В п. 3 приведем пример липшицева многозначного отображения, у которого отсутствуют смешанные производные $\frac{\partial^2 s(p, F(x))}{\partial x \partial p}$ его опорной функции.



Уточним определения. Пусть X, Y — банаховы пространства. Через $\mathcal{K}(Y)$ ($\mathcal{F}(Y)$) будем обозначать метрическое (топологическое) пространство компактов (непустых замкнутых подмножеств) из пространства Y с хаусдорфовым расстоянием $h(\cdot, \cdot)$ (с соответствующей топологией), а через $co\mathcal{K}(Y)$ или $co\mathcal{F}(Y)$ — подпространства выпуклых подмножеств из Y , входящие в $\mathcal{K}(Y)$ или в $\mathcal{F}(Y)$ соответственно. Расстоянием, по Хаусдорфу, между множествами $A, B \subset X$ называется

$$h(A, B) \doteq \inf\{r \geq 0 \mid A \subset B + B_r(0), B \subset A + B_r(0)\},$$

где $B_r(a) \doteq \{x \in X \mid \|x - a\| < r\}$ — открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке a . Произведение на число, сумма и разность Минковского множеств определяются по формулам $\lambda A = \{x \in X \mid x = \lambda a, a \in A\}$, $A+B \doteq \{x \in X \mid x = a+b, a \in A, b \in B\}$, $A \dot{*} B \doteq \{x \in X \mid x+B \subset A\}$. $\rho(x, A) \doteq \inf\{\|x - y\| \mid y \in A\}$ — расстояние от точки до множества. Конусом называется всякое непустое множество $T_0 \subset X$, у которого для каждого элемента $x \in T_0$ справедливо включение $\lambda x \in T_0$ при всех $\lambda > 0$. Выпуклой конической оболочкой множества A называется

$$cone A \doteq \left\{ x \in X \mid x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, x_i \in A, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Замыкание множества A обозначаем \bar{A} . Барьерным конусом $b(A) \subset Y^*$ выпуклого множества $A \subset Y$ (см., например, [3]) называется конус $b(A) \doteq \{p \in Y^* \mid s(p, A) < +\infty\}$. Рецессивным конусом выпуклого множества $A \subset Y$ называется множество $0^+(A) \doteq \{x \mid x+A \subset A\}$ (см. [4]), т.е. $0^+(A) = A \dot{*} A$. Для произвольного конуса K через $K^0 \doteq \{p \in Y^* \mid \langle p, x \rangle \leq 0, \forall x \in K\}$ определяется полярный (отрицательный) конус к конусу K .

Среди множества известных типов касательных конусов к невыпуклому множеству рассмотрим лишь два их ярких представителя.

Нижним касательным конусом (см. [3, 5]) ко множеству $A \subset X$ в точке $a \in \bar{A}$ называется нижний топологический предел вида

$$T_H(A; a) \doteq \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{A - a}{\lambda} \doteq \{v \in X \mid \lim_{\lambda \downarrow 0} \rho(v, \lambda^{-1}(A - a)) = 0\}.$$

Верхним касательным конусом (иначе называют: контингентным конусом, или конусом Булигана (см. [3, 6])) ко множеству $A \subset X$ в точке $a \in \bar{A}$ называется верхний топологический предел вида

$$T_B(A; a) \doteq \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{A - a}{\lambda} \doteq \{v \in X \mid \liminf_{\lambda \downarrow 0} \rho(v, \lambda^{-1}(A - a)) = 0\}.$$

Очевидно включение $T_H(A; a) \subset T_B(A; a)$. Если же множество A выпукло (или локально выпукло), то имеет место равенство указанных конусов.

1. ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Для каждого касательного конуса, следуя [1, 2], определим соответствующую производную от многозначного отображения, которую будем называть аналогично названию конуса, т.е. верхней (В) или нижней (Н) производной по направлениям.

Определение 1. Пусть $L \in \{B, H\}$. L -производной от многозначного отображения $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ в точке $z_0 \in \overline{\text{graph } F} \subset X \times Y$ называется отображение $D_L F(z_0): X \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ вида

$$D_L F(z_0)(u) \doteq \{v \in Y \mid (u, v) \in T_L(\text{graph } F; z_0)\}, \quad u \in X.$$

Из определения 1, очевидно, следует включение $D_H F(z)(u) \subset D_B F(z)(u)$.

Предложение 1. Для $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ в точке $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } F}$ и $u \in X$ справедливы равенства

$$D_B F(z_0)(u) = \{v \in Y \mid \liminf_{\substack{\lambda, x: \\ \lambda \downarrow 0, x \rightarrow u}} \rho_Y(v, \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda x) - y_0)) = 0\},$$



$$D_H F(z_0)(u) = \{v \in Y \mid \lim_{\lambda \downarrow 0} (\liminf_{x \rightarrow u} \varrho_Y(v, \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda x) - y_0))) = 0\}.$$

Формулы упрощаются, когда F является псевдолипшицевым по Ж.-П. Обену [7].

Определение 2. Отображение $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ называется псевдолипшицевым около точки $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in X \times Y$, если существуют числа $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > \varrho(y_0, F(x_0))$ и константа $l > 0$ такие, что для всех $x_1, x_2 \in B_{\alpha_1}(x_0)$ справедливо включение

$$F(x_1) \cap \overline{B_{\alpha_2}(y_0)} \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}.$$

Предложение 2. Пусть отображение $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ псевдолипшицево около точки $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } F}$. Тогда для любого $u \in X$ справедливы равенства

$$D_B F(z_0)(u) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda u) - y_0), \quad (1)$$

$$D_H F(z_0)(u) = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda u) - y_0). \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть отображение $F: X \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ псевдолипшицево около точки $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } F}$ с константой $l > 0$. Тогда множества $D_B F(z_0)(u)$ не пусты при всех $u \in X$, а отображение $u \rightarrow D_B F(z_0)(u)$ удовлетворяет условию Липшица с той же константой $l > 0$.

2. О РАЗЛИЧИИ И СВЯЗИ ПРОИЗВОДНЫХ

Напомним, что опорной функцией отображения $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ называется опорная функция его значений $F(x)$, т. е.

$$s(p, F(x)) \doteq \sup\{\langle p, y \rangle \mid y \in F(x)\}, \quad p \in Y^*.$$

В дальнейшем полагаем, что отображение $F: X \rightarrow \text{co } \mathcal{F}(Y)$ псевдолипшицево около заданной точки $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } F}$. Зафиксируем направление $u \in X$ и перейдем к более простому отображению $Q: [0, 1] \rightarrow \text{co } \mathcal{F}(Y)$ вида

$$Q(\lambda) \doteq F(x_0 + \lambda u) - y_0, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (3)$$

Тогда включение $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } F}$ заменяется на включение $(0, 0) \in \overline{\text{graph } Q}$, и справедливы равенства $D_L F(z_0)(u) = D_L Q(0, 0)(1)$, $\forall L \in \{B, H\}$. Для отображения Q обозначим через

$$K_0 \doteq \{p \in Y^* \mid s(p, Q(0)) = 0\} \quad (4)$$

конус, который назовём *нормальным конусом ко множеству $Q(0)$ в точке $0 \in Q(0)$* .

Пример 1. Пусть отображение $Q: [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ имеет вид

$$Q(\lambda) \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1], y = \lambda x\}.$$

Очевидно, что существует предел $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}Q(\lambda)$ и он равен прямой $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Поэтому существуют L -производные отображения $Q(\cdot)$ в точке графика $(0, 0) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ по направлению $\tilde{u} = 1$, причём они равны

$$D_H Q(0, 0)(1) = D_B Q(0, 0)(1) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}Q(\lambda).$$

Отсюда для векторов из нормального конуса K_0 (см. (4)), принимающих вид $p_\alpha = (0, \alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^1$, легко получаем:

$$s(p_\alpha, D_H Q(0, 0)(1)) = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^1. \quad (5)$$

С другой стороны, так как опорная функция отображения Q равна $s(p_\alpha, Q(\lambda)) = |\alpha|\lambda$, то её производная по λ в нуле равна:

$$\left. \frac{\partial s(p_\alpha, Q(\lambda))}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=+0} = |\alpha|. \quad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), убеждаемся в том, что опорная функция от производной многозначного отображения и производная от опорной функции этого отображения различны.



Изучим условия, при которых возможно равенство между производной опорной функции и опорной функцией от L -производной многозначного отображения.

Лемма 1. Для отображения $Q: [0, 1] \rightarrow \text{co } \mathcal{F}(Y)$ и любого $p \in Y^*$ справедливо неравенство

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} s(p, Q(\lambda)) \geq s(p, \liminf_{\lambda \downarrow 0} Q(\lambda)). \quad (7)$$

Лемма 2. Пусть отображение $Q: [0, 1] \rightarrow \text{co } \mathcal{F}(Y)$ таково, что $0 \in Q(0)$, и существует число $l > 0$ такое, что при всех $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство $h(Q(\lambda), Q(0)) \leq l\lambda$. Тогда верны равенства

$$\overline{\text{cone}} Q(0) = 0^+(D_H Q(0)(1)) = 0^+(D_B Q(0)(1)), \quad (8)$$

$$K_0 = b(D_H Q(0)(1)) = b(D_B Q(0)(1)), \quad (9)$$

где K_0 — нормальный конус (4).

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу (1), (2) справедливы равенства

$$D_H Q(0)(1) = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{Q(\lambda)}{\lambda}, \quad D_B Q(0)(1) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{Q(\lambda)}{\lambda}.$$

По условию леммы справедливы включения

$$\frac{Q(0)}{\lambda} \subset \frac{Q(\lambda)}{\lambda} + \overline{B_{l+\lambda}(0)}, \quad \frac{Q(\lambda)}{\lambda} \subset \frac{Q(0)}{\lambda} + \overline{B_{l+\lambda}(0)}, \quad \forall \lambda \in (0, 1), \quad (10)$$

откуда в пределе получаем:

$$\begin{cases} \overline{\text{cone}} Q(0) \subset \overline{D_H Q(0)(1) + B_l(0)}, \\ D_B Q(0)(1) \subset \overline{\text{cone } Q(0) + B_l(0)}. \end{cases} \quad (11)$$

Учитывая равенство $0^+(\overline{A+B}) = 0^+(A)$, если $A, B \in \text{co } \mathcal{F}(Y)$ и B ограниченное множество, и включение $0^+(A) \subset 0^+(B)$, если $A \subset B$ и $A, B \in \text{co } \mathcal{F}(Y)$, из выражений (11) получаем равенство (8).

Очевидно, что для конуса K_0 (см.(4)) справедливы равенства полярных конусов:

$$(\text{cone } Q(0))^0 = K_0, \quad (K_0)^0 = \overline{\text{cone}} Q(0). \quad (12)$$

Аналогично, переходя в равенстве (8) к полярным конусам и воспользовавшись равенствами (12) и равенством $\overline{b(A)} = (0^+(A))^0, \forall A \in \text{co } \mathcal{F}(Y)$ (см., например, [4]), получаем равенство замыканий множеств, входящих в выражение (9). Покажем, что замыкания в равенстве можно убрать. Так как конус K_0 замкнут, то достаточно доказать включение $K_0 \subset b(D_H Q(0)(1))$. Пусть $p \in K_0$, тогда в силу неравенств (7) и включений (10) получаем неравенства

$$s(p, D_H Q(0)(1)) \leq \liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} s(p, Q(\lambda)) \leq \liminf_{\lambda \downarrow 0} [\lambda^{-1} s(p, Q(0)) + (l + \lambda) \|p\|] = l \|p\|,$$

откуда следует, что $p \in b(D_H Q(0)(1))$. □

Определение 3. Пусть у функции $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1$ в точке $(x_0, y_0) \in X \times Y$ существует классическая производная по направлению $(u, 0) \in X \times Y$, т. е. $f'((x_0, y_0), (u, 0)) \doteq \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} (f(x_0 + \lambda u, y_0) - f(x_0, y_0))$. Тогда назовем ее *частной производной функции f в точке x_0 по направлению $u \in X$ при фиксированном $y_0 \in Y$* .

Для исследования частной производной в точках (x_0, y) при $y \in A$, где $A \subset Y$, определим функцию $o: (0, 1) \times A \rightarrow \mathbb{R}^1$ по формуле

$$o(\lambda, y) \doteq f(x_0 + \lambda u_0, y) - f(x_0, y) - \lambda f'((x_0, y), (u_0, 0)), \quad (13)$$

для которой по определению следует равенство $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} o(\lambda, y) = 0$.

Определение 4. Пусть заданы $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1, x_0 \in X, u_0 \in X$ и $A \subset Y$. Скажем, что частная производная $f'((x_0, y), (u_0, 0))$ равномерна по переменному y на A , если 1) $f'((x_0, y), (u_0, 0))$ существует для всех $y \in A$, 2) для функции (13) справедливо равенство $\lim_{\lambda \downarrow 0} (\sup_{y \in A} \lambda^{-1} |o(\lambda, y)|) = 0$.



Теорема 2. Пусть отображение $Q: [0, 1] \rightarrow \text{co}\mathcal{F}(Y)$ таково, что $0 \in Q(0)$ и существует число $l > 0$ такое, что для всех $\lambda \in [0, 1]$ справедливо $h(Q(\lambda), Q(0)) \leq l\lambda$. Пусть $K_0 \doteq \{p \in Y^* \mid s(p, Q(0)) = 0\}$, причем $K_0 \neq \{0\}$. На множестве $[0, 1] \times K_0$ определим функцию $f(\lambda, p) \doteq s(p, Q(\lambda))$. Пусть ее частная производная $p \rightarrow f'((0, p), (1, 0))$ равномерна по переменному p на множестве $K_0 \cap \overline{\partial B_1(0)}$, линейна и непрерывна на конусе K_0 . Тогда отображение Q дифференцируемо в точке $(0, 0) \in \text{graph } Q$ по направлению 1, т. е. $D_H Q(0, 0)(1) = D_B Q(0, 0)(1)$, и справедливо равенство $f'((0, p), (1, 0)) = s(p, D_B Q(0, 0)(1))$, $\forall p \in K_0$.

Доказательство. Для краткости введём обозначение

$$\alpha(p) \doteq f'((0, p), (1, 0)) = \lim_{\lambda \downarrow 0} s\left(p, \frac{Q(\lambda)}{\lambda}\right), \quad \forall p \in K_0. \quad (14)$$

При $p \notin K_0$ полагаем, что функция $\alpha(p)$ равна $+\infty$. В силу условий теоремы функция $\alpha: Y^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}^1}$ является ограниченной на $K_0 \cap \overline{B_1(0)}$, полунепрерывной снизу, положительно однородной и выпуклой (в силу линейности) функцией. Поэтому (см. [4]) существует непустое выпуклое замкнутое множество $M \subset Y$ такое, что

$$\alpha(p) = s(p, M), \quad \forall p \in Y^*. \quad (15)$$

В силу неравенства (7) получаем, что

$$\alpha(p) \geq s\left(p, \limsup_{\lambda \downarrow 0} (\lambda^{-1} Q(\lambda))\right), \quad \forall p \in Y^*,$$

т. е. $M \supset D_B Q(0, 0)(1)$. Определим функцию $o(\lambda, p)$ из равенства

$$f(\lambda, p) \doteq s(p, Q(\lambda)) = \lambda \alpha(p) + o(\lambda, p), \quad p \in K_0. \quad (16)$$

В силу условий теоремы (линейности и непрерывности $\alpha(p)$ на конусе K_0) и свойств опорных функций из равенства (16) получаем, что функция $p \rightarrow o(\lambda, p)$ непрерывна, положительно однородна и выпукла на замкнутом выпуклом конусе K_0 . При $p \notin K_0$ доопределим функцию $o(\lambda, p)$ равной $+\infty$. Следовательно, функция $p \rightarrow o(\lambda, p)$, $p \in Y^*$ также является опорной функцией некоторого выпуклого замкнутого (непустого) множества $B(\lambda)$. В силу равенств (12) и (16) получаем следующее включение:

$$\overline{Q(\lambda) + \text{cone } Q(0)} \supset \lambda M + B(\lambda). \quad (17)$$

Кроме того, из равенства (8) следует $D_H Q(0, 0)(1) + \overline{\text{cone } Q(0)} = D_H Q(0, 0)(1)$, откуда, поделив (17) на $\lambda > 0$, в нижнем пределе по $\lambda \downarrow 0$ получаем:

$$D_H Q(0, 0)(1) \supset M + B, \quad \text{где} \quad B \doteq \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{B(\lambda)}{\lambda}. \quad (18)$$

Покажем, что точка нуль принадлежит множеству B и поэтому из включения (18) получим включение $M \subset D_H Q(0, 0)(1)$, что и завершит доказательство теоремы. Так как по условию теоремы производная $f'((0, p), (1, 0))$ равномерна по переменному p на множестве $K_0 \cap \overline{\partial B_1(0)}$, то справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \left(\sup_{p \in K_0 \cap \overline{\partial B_1(0)}} \lambda^{-1} |o(\lambda, p)| \right) = 0,$$

которое означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для всех $\lambda \in (0, \delta)$ и всех $p \in K_0 \cap \overline{\partial B_1(0)}$ имеет место неравенство $\lambda^{-1} |o(\lambda, p)| < \varepsilon$, т. е. для всех $\lambda \in (0, \delta)$ непусто пересечение множеств вида $\lambda^{-1} B(\lambda) \cap B_\varepsilon(0)$, что влечёт включение $0 \in B$. \square

Лемма 3. Пусть число $l > 0$ и отображение $Q: [-1, 1] \rightarrow \text{co}\mathcal{F}(Y)$ таковы, что $0 \in Q(0)$, $h(Q(\lambda), Q(0)) \leq l|\lambda|$, $\forall \lambda \in [-1, 1]$. Пусть $K_0 \doteq \{p \in Y^* \mid s(p, Q(0)) = 0\}$, причем $K_0 \neq \{0\}$. Пусть у функции $f(\lambda, p) \doteq s(p, Q(\lambda))$ при каждом $p \in K_0$ существуют производные $f'((0, p), (1, 0))$ и $f'((0, p), (-1, 0))$, для которых справедливо равенство

$$f'((0, p), (1, 0)) = -f'((0, p), (-1, 0)), \quad \forall p \in K_0. \quad (19)$$

Тогда функция $\alpha(p) \doteq f'((0, p), (1, 0))$ линейна на конусе K_0 .



Доказательство. Из выпуклости опорной функции, т. е. неравенств

$$|\lambda|^{-1}s(\alpha p_1 + \beta p_2, Q(\lambda)) \leq |\lambda|^{-1}\alpha s(p_1, Q(\lambda)) + |\lambda|^{-1}\beta s(p_2, Q(\lambda)),$$

в пределе при $\lambda \rightarrow +0$ и при $\lambda \rightarrow -0$ получаем выпуклость функций $p \rightarrow \alpha(p)$ и $p \rightarrow f'((0, p), (-1, 0))$. Отсюда и из равенства (19) получаем линейность функции $\alpha(\cdot)$. \square

Лемма 4. Пусть отображение $F: X \rightarrow \text{co}\mathcal{F}(Y)$ удовлетворяет условию псевдолипицевости в точке $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \text{graph } F$ с константой $l > 0$. Определим конус $K_0 \doteq \{p \in Y^* | s(p, F(x_0)) - \langle p, y_0 \rangle = 0\}$ и пусть $\widetilde{K}_0 \doteq K_0 \cap \overline{\partial B_1(0)} \neq \emptyset$. Пусть существует $\varepsilon > 0$ такое, что при каждом $p \in \widetilde{K}_0$ функция $f(x, p) \doteq s(p, F(x))$ дифференцируема в смысле Фреше по x на множестве $B_\varepsilon(x_0)$, причём для любого $u \in \overline{\partial B_1(0)}$ функция $(x, p) \rightarrow \left\langle \frac{\partial f(x, p)}{\partial x}, u \right\rangle$ равномерно непрерывна на множестве $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \times \widetilde{K}_0$. Тогда функция $f(\cdot, \cdot)$ имеет частную производную $f'((x_0, p), (u, 0))$ по любому направлению $u \in X$, равномерную по p на множестве \widetilde{K}_0 .

Доказательство. Для доказательства леммы, т. е. проверки определения 1, достаточно доказать равенство

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \left\{ \sup_{p \in \widetilde{K}_0} \lambda^{-1} \left| f(x_0 + \lambda u, p) - f(x_0, p) - \lambda \left\langle \frac{\partial f(x_0, p)}{\partial x}, u \right\rangle \right| \right\} = 0. \quad (20)$$

В свою очередь, последнее равенство следует из теоремы о среднем, т. е. из следующего равенства при $\lambda \in (0, 1)$:

$$f(x_0 + \lambda u, p) - f(x_0, p) = \lambda \left\langle \frac{\partial f(x_0 + \theta(\lambda, p)u, p)}{\partial x}, u \right\rangle,$$

где $\theta(\lambda, p) \in [0, \lambda]$, и из равномерной непрерывности функции $(x, p) \rightarrow \left\langle \frac{\partial f(x, p)}{\partial x}, u \right\rangle$ на множестве $\overline{B_\varepsilon(x_0)} \times \widetilde{K}_0$. \square

Теорема 3. Пусть отображение $F: X \rightarrow \text{co}\mathcal{F}(Y)$ псевдолипицево около некоторой точки $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \text{graph } F$ с константой $l > 0$, и функция $f(x, p) \doteq s(p, F(x))$ удовлетворяет всем условиям леммы 4. Тогда

$$D_H F(z_0)(u) = D_B F(z_0)(u); \quad f'((x_0, p), (u, 0)) = s(p, D_B F(x_0, y_0)(u)), \quad \forall u \in X, p \in K_0. \quad (21)$$

Доказательство. Воспользуемся для произвольного фиксированного $u \in X$ заменой (3), (4), и преобразуем данные условия (например, (20)), после чего в силу теоремы 2, леммы 3 и леммы 4 получаем равенства (21), где $K_0 \doteq \{p \in Y^* | s(p, F(x_0)) - \langle p, y_0 \rangle = 0\}$. \square

Теорема 4. Пусть X рефлексивно, а Y гильбертово, и отображение $F: X \rightarrow \text{co}\mathcal{F}(Y)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда нижняя производная $D_H F(z_0)$ имеет выпуклый график.

Доказательство. Докажем выпуклость графика нижней производной, т. е. выпуклость касательного конуса $T_H(\text{graph } F; z_0)$.

Для любого $u \in X$ соответствующая ему функция $\alpha(\cdot)$ из (14) принимает вид

$$\alpha_u(p) = \begin{cases} \left\langle \frac{\partial s(p, F(x_0))}{\partial x}, u \right\rangle, & \text{при } p \in K_0; \\ +\infty, & \text{при } p \notin K_0. \end{cases} \quad (22)$$

При этом по лемме 3 каждая такая функция $\alpha_u(\cdot)$ линейна на конусе K_0 . Поэтому и функционал $\frac{\partial s(\cdot, F(x_0))}{\partial x}: K_0 \rightarrow X^*$ также является линейным по p оператором. В самом деле, в противном случае нашлись бы векторы $p_1, p_2 \in K_0$ такие, что функционал

$$g_0 \doteq \frac{\partial s(p_1 + p_2, F(x_0))}{\partial x} - \frac{\partial s(p_1, F(x_0))}{\partial x} - \frac{\partial s(p_2, F(x_0))}{\partial x} \quad (23)$$

не равен нулю. По теореме Хана–Банаха в рефлексивном пространстве X для $g_0 \in X^*$ найдется вектор $u_0 \in X$ такой, что $\langle g_0, u_0 \rangle = \|g_0\| \neq 0$. Тогда взяв в формуле (22) функцию $\alpha_u(\cdot)$ при $u = u_0$ и применив функционал g_0 (23) к вектору u_0 , получим для функции $\alpha_{u_0}(\cdot)$ равенство



$\|g_0\| = \alpha_{u_0}(p_1 + p_2) - \alpha_{u_0}(p_1) - \alpha_{u_0}(p_2) \neq 0$, что противоречит доказанной ранее линейности функции $\alpha_{u_0}(\cdot)$ на конусе K_0 .

Введём линейное подпространство $L \subset Y^*$ из равенства $L \doteq K_0 + (-K_0)$ и определим на нём оператор $A : L \rightarrow X^*$ по формуле

$$Ap \doteq \frac{\partial s(p_1, F(x_0))}{\partial x} - \frac{\partial s(p_2, F(x_0))}{\partial x} \quad \text{при } p_1, p_2 \in K_0, \quad p \doteq p_1 - p_2. \quad (24)$$

Из линейности оператора $\frac{\partial s(\cdot, F(x_0))}{\partial x} : K_0 \rightarrow X^*$ следует корректность этого определения, т. е. независимость от неоднозначности выбора векторов $p_1, p_2 \in K_0$ при задании $p \in L$, и его линейность на L . При этом для любого $p \in K_0$ справедливо равенство $Ap = \frac{\partial s(p, F(x_0))}{\partial x}$. Продолжим линейный оператор A с подпространства L на всё пространство Y^* любым допустимым образом, и пусть $A^* : X \rightarrow Y$ — сопряжённый к A линейный оператор. Покажем справедливость равенства

$$D_H F(z_0)(u) = A^*u + K_0^0, \quad \forall u \in X, \quad (25)$$

где K_0^0 — полярный конус к конусу K_0 . В силу (15), (22), (24) получаем цепочку равенств

$$s(p, A^*u + K_0^0) = \langle Ap, u \rangle + s(p, K_0^0) = \begin{cases} \langle Ap, u \rangle, & \text{при } p \in K_0, \\ +\infty, & \text{при } p \notin K_0, \end{cases} = \alpha_u(p),$$

что и означает равенство (25). Из равенства (25), очевидно, следует, что график производной, т. е. конус $T_H(\text{graph } F; z_0)$, выпукл. \square

3. КОНТРПРИМЕР

В заключение приведем пример (пример 3) липшицева многозначного отображения $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \rightarrow \text{co } \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, опорная функция которого всюду не имеет второй смешанной производной. Для этого в начале приведем вспомогательный пример (пример 2).

Пример 2. Пусть C — совершенное канторово множество на отрезке $[0; 1]$, а функция $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ — канторова лестница (см. определения в [8, гл. 6, §4]). Определим функцию $g(x) \doteq \int_0^x f(t)dt$ при $x \in [0; 1]$. Эта функция g является дифференцируемой и выпуклой функцией, так как ее производная $g'(x) = f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает на $[0; 1]$. График функции g является ломаной линией со счетным числом звеньев, причем для любой точки $x \in [0; 1] \setminus C$ существует интервал $(a; b)$ такой, что $x \in (a; b) \subset [0; 1] \setminus C$, и существует двоично рациональное число $(2k - 1)/2^n$, где $n \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{(1; 2^{n-1})}$, такое, что $g'(x) = (2k - 1)/2^n$ для всех $x \in (a; b)$. Можно посчитать, что $g(0) = g'(0) = 0$ и $g(1) = 1/2$, $g'(1) = 1$.

Поворачивая график функции g на угол $\pi/4$ и сдвигая его на точку $(1, 1/2)$, получаем другую выпуклую функцию $g_1 : \left[1; 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right] \rightarrow \left[\frac{1}{2}; \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right]$, т. е. удовлетворяющую формуле

$$\text{graph } g_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{graph } g + \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

Склеивая эти две функции, получаем функцию h по формуле $h(x) \doteq g(x)$ при $x \in [0; 1]$ и $h(x) \doteq g_1(x)$ при $x \in \left[1; 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$. По построению функция h непрерывна и выпукла на $\left[0, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$. Определим функции

$$h_1(x) = h(x) - \frac{3 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad \text{при } x \in \left[0; 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right],$$

$$h_1(x) = h_1(-x) \quad \text{при } x \in \left[-1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}; 0\right],$$



$$h_2(x) = -h_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \left[-1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}; 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right],$$

и множество $A \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left[-1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}; 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right], y \in [h_1(x); h_2(x)]\}$.

По построению множество A является выпуклым компактом на плоскости \mathbb{R}^2 , граница которого состоит из восьми частей сдвинутых, повернутых или симметрично отраженных графиков функции g . Рассмотрим опорные множества $A_p \doteq \{(x, y) \in A \mid \langle p, (x, y) \rangle = s(p, A)\}$ для любого $p \in \mathbb{R}^2, \|p\| = 1$. Пусть $\alpha \in (0, \pi/4)$ — угол наклона отрезка ломаной $h_1(x)$ при $x \in (a, b) \subset [0; 1] \setminus C$. Тогда вектор нормали к этому отрезку имеет вид $\tilde{p}(\alpha) = (\text{tg } \alpha; -1)$, причем значение $\text{tg } \alpha$ является двоично рациональным числом вида $\frac{2^k-1}{2^n}$, а опорное множество $A_{\tilde{p}(\alpha)}$ является этим отрезком. Очевидно верно и обратное, при любом $\alpha \in (0, \pi/4)$, для которого $\text{tg } \alpha$ является двоично рациональным числом, опорное множество $A_{\tilde{p}(\alpha)}$ является отрезком, а не точкой. Так как субдифференциал опорной функции в точке $p \neq 0$ равняется опорному множеству и для дифференцируемости в точке выпуклой функции необходимо, чтобы ее субдифференциал в данной точке являлся одноточечным множеством, то в точках $\tilde{p}(\alpha)$ опорная функция $p \rightarrow s(p, A)$ не дифференцируема. Множество таких точек $\tilde{p}(\alpha)/\|\tilde{p}(\alpha)\|$, очевидно, плотно на дуге окружности, состоящей из точек $p(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ при $\varphi \in (3\pi/2; 7\pi/4)$. Отсюда и в силу построения множества A получаем, что на единичной окружности существует счетное плотное множество, на котором опорная функция этого множества не дифференцируема.

Пример 3. Рассмотрим множество $A \in \text{co } \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, построенное в примере 2. Определим многозначное отображение $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \text{co } \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ по формуле

$$F(t) \doteq L(t)A, \quad \text{где} \quad L(t) \doteq \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Это отображение, очевидно, удовлетворяет условию Липшица. Обозначим через $f(t, p) \doteq s(p, F(t))$ его опорную функцию, где $p \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^1$. Очевидно равенство $f(t, p) = s(L(-t)p, A)$ и то, что $f(t, p)$ удовлетворяет как условию Липшица по p при любом $t \in \mathbb{R}^1$, так и условию Липшица по t при любом $p \in \mathbb{R}^2$. В силу положительной однородности опорной функции достаточно рассмотреть $p \in \partial B_1(0)$. Обозначим такие точки через $p = p(\varphi) \doteq (\cos \varphi, \sin \varphi)$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$. В частности, получаем, что $p(\varphi) = L(\varphi)p_0$, где $p_0 \doteq (1, 0)$. Поэтому справедливо равенство

$$f(t, p(\varphi)) = f(0, p(\varphi - t)) = s(p(\varphi - t), A). \quad (26)$$

Если при некотором $t_0 \in \mathbb{R}^1$ у функции $p \rightarrow f(t_0, p)$ существует производная в точке $p(\varphi_0)$, то в силу равенства (26) получаем, что эта производная является опорным множеством $A_{p(\varphi_0 - t_0)} \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p(\varphi_0 - t_0), (x, y) \rangle = s(p(\varphi_0 - t_0), A)\}$ ко множеству A в направлении $p(\varphi_0 - t_0)$, причем это множество обязано быть одноточечным. Для того, чтобы получить вторую смешанную производную по t от первой производной опорной функции по p в точке $(t_0, p(\varphi_0))$ необходимо, чтобы первая производная опорной функции по p существовала при всех $(t, p(\varphi_0))$, точнее, при всех t из некоторой окрестности точки t_0 . Но такой окрестности не существует, так как в любой окрестности точки t_0 , как показано в примере 2, среди множеств $A_{p(\varphi_0 - t)}$ найдутся неодноточечные опорные множества, и поэтому при таких t производной от опорной функции $p \rightarrow f(t, p)$ не существует в p_0 . В итоге показали, что для нашей опорной функции ее вторая смешанная производная по p и по t не существует ни в одной точке $(p, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00139а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Библиографический список

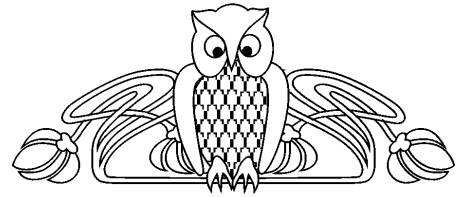
1. Aubin J.-P. Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions and differential inclusions // *Advances in Math. Suppl. Studies*. 1981. Vol. 7A. P. 160–272.
2. Половинкин Е. С. Теория многозначных отображений. М. : Изд-во МФТИ, 1983. 108 с. [*Polovinkin E. S. The theory of multi-valued mappings. Moscow : Moscow Institute of Physics and Technology, 1983. 108 p.*]



3. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 440 с. [Polovinkin E. S., Balashov M. V. Elements of convex and strongly convex analysis. Moscow : Fizmatlit, 2007. 440 p.]
4. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 472 с. [Rockafellar R. T. Convex analysis. Princeton, New Jersey : Princeton university press, 1970. 472 p.]
5. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с. [Pshenichny B. N. Convex analysis and extremal problems. Moscow : Nauka, 1980. 320 p.]
6. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-Valued Analysis. Boston; Basel; Berlin : Birkhäuser, 1990. 464 p.
7. Aubin J.-P. Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems // Math. of Oper. Res. 1984. Vol. 9. P. 87–111.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1975. 496 с. [Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow : Nauka, 1975. 496 p.]

УДК 517.927.25

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ КВАДРАТИЧНЫХ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА



В. С. Рыжлов

Саратовский государственный университет
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассматривается квадратичный сильно нерегулярный пучок обыкновенных дифференциальных операторов 2-го порядка с постоянными коэффициентами и с положительными корнями характеристического уравнения. Найдены суммы двукратных разложений в ряд по собственным функциям таких пучков и необходимые и достаточные условия сходимости указанных разложений к разлагаемой вектор-функции.

Ключевые слова: квадратичный пучок дифференциальных операторов, сильно нерегулярный пучок, двукратное разложение по собственным функциям.

Expansion in Eigenfunctions of Quadratic Strongly Irregular Pencils of Differential Operators of the Second Order

V. S. Rykhlov

We consider a quadratic strongly irregular pencil of 2-d order ordinary differential operators with constant coefficients and positive roots of the characteristic equation. Both the amounts of double expansions in a series in the derivative chains of such pencils and necessary and sufficient conditions for convergence of these expansions to the decomposed vector-valued function are found.

Key words: quadratic pencil of differential operators, strongly irregular pencil, two-fold expansion in the eigenfunctions.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Рассмотрим в пространстве $L_2[0, 1]$ квадратичный пучок $L(\lambda)$ обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка при $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \ell(y, \lambda) &:= y'' + p_1 \lambda y' + p_2 \lambda^2 y, & (1) \\ U_\nu(y, \lambda) &:= (\alpha_{\nu 1} y'(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y'(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2. & (2) \end{aligned}$$

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического многочлена (х.м.) пучка и пусть выполняется условие

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \quad (3)$$

Функции $y_i(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_i x)$, $i = 1, 2$, образуют фундаментальную систему решений (ф.с.р.) уравнения $\ell(x, \lambda) = 0$. Считаем далее при каждом $\nu = 1, 2$, что $\alpha_{\nu 1} \neq 0$ или $\beta_{\nu 1} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются.

Обозначим $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j, \lambda)/\lambda = \alpha_{\nu 1} \omega_j + \alpha_{\nu 2}$, $w_{\nu j} = e^{-\lambda \omega_j} U_{\nu 1}(y_j, \lambda)/\lambda = \beta_{\nu 1} \omega_j + \beta_{\nu 2}$, $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$, $\nu, j = 1, 2$; $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} = \det(V_s, V_k)$, $s, k = 1, 2$.

Характеристический определитель пучка $L(\lambda)$ тогда имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det(U_\nu(y_j, \lambda))_{\nu, j=1}^2 = \lambda^2 |V_1 + e^{\lambda \omega_1} W_1; V_2 + e^{\lambda \omega_2} W_2| = \\ &= \lambda^2 \left(a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda \omega_1} a_{1\bar{2}} + e^{\lambda \omega_2} a_{\bar{1}2} + e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2)} a_{12} \right) =: \lambda^2 \Delta_0(\lambda). \end{aligned}$$



Если $a_{1\bar{2}} \neq 0$ и $a_{12} \neq 0$, то пучок (1), (2) является регулярным по Биркгофу [1, с. 66–67] и его функция Грина имеет оценку $O(1/\lambda)$ вне кружков фиксированного радиуса около собственных значений (с.з.). Если же $a_{12} = 0$ или $a_{12} = a_{1\bar{2}} = 0$ или симметричный случай: $a_{1\bar{2}} = 0$ или $a_{1\bar{2}} = a_{12} = 0$, то функция Грина этого пучка имеет экспоненциальный рост в углах раствора больше или равного π . Такие пучки принято называть сильно нерегулярными (с.н.).

Рассмотрим задачу нахождения условий на параметры пучка (1), (2) и на вектор-функцию (в.-ф.) $f = (f_0, f_1)^T$, при которых имеет место двукратная разложимость f в биортогональный ряд Фурье по собственным функциям (с.ф.) этого пучка.

Эта задача интересна только для с.н. пучка (1), (2), так как в регулярном случае задача о разложении достаточно просто решается (см. [1, с. 124–129]).

Задачи о разложении для простейших с.н. дифференциальных операторов первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией были решены в [2]. В случае оператора первого порядка на разлагаемую функцию накладывались условия непрерывности, ограниченности вариации и выполнение двух простых функциональных соотношений. В случае же дифференциального оператора второго порядка на разлагаемую функцию, помимо условий гладкости на основном отрезке, накладывались условия аналитической продолжимости в некоторые треугольники и выполнение там функциональных соотношений.

В случае простейшего с.н. дифференциального оператора третьего порядка, когда корни $\{\omega_j\}$ характеристического уравнения лежат в вершинах правильного треугольника, задача о разложении решена в работе [3]. При этом на разлагаемую функцию накладывались условия аналитичности в некоторых многоугольниках комплексной плоскости и выполнение там некоторых функциональных соотношений.

2. ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ

Обозначим для краткости $\tau = \omega_2/\omega_1$, $\alpha_x = x/\tau$, $\beta_x = \tau x + \tau + 1$, $c_0 := -a_{1\bar{2}}/a_{12}$, $e_1 = a_{11}/a_{1\bar{2}}$, $e_2 = a_{2\bar{2}}/a_{12}$, $\gamma = 1/(\omega_2 - \omega_1)$, $d_x = d/dx$.

Рассмотрим задачу на с.з. $L(\lambda) = 0$ или подробно

$$y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y = 0, \quad U_j(y, \lambda) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

Пусть всюду далее выполняется условие

$$a_{12} = a_{1\bar{2}} = 0, \quad (5)$$

т.е. справедливо представление

$$\Delta_0(\lambda) = a_{1\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{12} (=:\Delta_0^-(\lambda)) = a_{12} e^{\lambda\omega_2} (1 - c_0 e^{-\lambda\omega_2}) = a_{12} e^{\lambda\omega_2} \Delta_0^+(\lambda), \quad (6)$$

и, следовательно, пучок (1), (2) является с.н.

Из (6) следует, что уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней $\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/\omega_2$, $k \in \mathbb{Z}$, где $d_0 := \ln_0 c_0$ (\ln_0 есть фиксированная ветвь натурального логарифма такая, что $\ln_0 1 = 0$). Обозначим $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых с.з. пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

Из формул для с.з. следует, что в комплексной плоскости существуют кусочно круговые контуры Γ_ν , отстоящие от чисел λ_k на расстояние не меньше некоторого фиксированного числа $\delta > 0$, между соседними контурами лежит ровно одно число λ_k и имеют место оценки $c_1 \nu < \text{дл. } \Gamma_\nu < c_2 \nu$, где c_1, c_2 есть некоторые фиксированные константы такие, что $0 < c_1 < c_2 < \infty$. Обозначим через Γ_ν^+ и Γ_ν^- части контура Γ_ν , лежащие в правой и левой комплексных полуплоскостях соответственно.

Линеаризуем задачу (4): положим $z_0 = y$, $z_1 = \lambda v_0$. Тогда получим задачу уже для линейного оператора \hat{L} , но в пространстве в.-ф. для $z = (z_0, z_1)^T$: $\hat{L}z = \lambda z$, где

$$\hat{L}z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2} d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2} d_x \end{pmatrix} z,$$



$$D_{\hat{L}} = \left\{ \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \mid z'_0, z_1 \in L_1[0, 1], \quad U_j(z) = \alpha_{j1}z'_0(0) + \alpha_{j0}z_1(0) + \beta_{j1}z'_0(1) + \beta_{j0}z_1(1), \quad j = 1, 2 \right\}.$$

Очевидно, с.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора \hat{L} совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ (см. [1, с. 102]) совпадает с системой с.в.-ф. оператора \hat{L} .

Хорошо известно, что $-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f d\lambda$, где $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda E)^{-1}$, есть частичная сумма разложений в.-ф. f в биортогональный ряд Фурье по собственным в.-ф. оператора \hat{L} , соответствующим тем с.з., которые попали внутрь контура Γ_ν . Пусть $(\hat{L} - \lambda E)^{-1}f = (z_0(x, \lambda; f), z_1(x, \lambda; f))^T$ и $I_{i\nu} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} z_i(x, \lambda; f) d\lambda$, $i = 0, 1$.

Лемма 1. Если $f'_0, f_1 \in L_1[0, 1]$, $\tilde{f}(x) := -p_2f_1(x) - p_1f'_0(x)$ и

$$f_0(0) = f_0(1) = f'_0(0) = f'_0(1) = f_1(0) = f_1(1) = 0, \quad (7)$$

то

$$z_0(x, \lambda; f) = \left(-\frac{a_{22}\gamma}{\lambda\Delta_0^-} \int_0^1 e^{\lambda(\omega_1x + \omega_2(1-t))} f_\lambda(t) dt + \frac{a_{11}\gamma}{\lambda\Delta_0^-} \int_0^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t) + \omega_2x)} f_\lambda(t) dt - \frac{a_{12}\gamma}{\lambda\Delta_0^-} \int_0^1 e^{\lambda(\omega_2x + \omega_2(1-t))} f_\lambda(t) dt \right) - \left(\frac{\gamma}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda\omega_1(x-t)} f_\lambda(t) dt - \frac{\gamma}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda\omega_2(x-t)} f_\lambda(t) dt \right), \quad (8)$$

$$z_1(x, \lambda; f) = \lambda z_0(x, \lambda; f) + f_0(x), \quad (9)$$

где

$$f_\lambda(x) := \tilde{f}(x) - \lambda p_2 f_0. \quad (10)$$

Доказательство. Обратим оператор $(\hat{L} - \lambda E)$. Для этого решим задачу $(\hat{L} - \lambda E)z = f$ относительно в.-ф. z или, подробнее, решим задачу

$$\begin{cases} z_1 - \lambda z_0 = f_0, \\ \frac{1}{p_2} z''_0 - \frac{p_1}{p_2} z'_1 - \lambda z_1 = f_1, \end{cases} \quad U_j(z) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Выражая z_1 из первого уравнения системы в (11) и подставляя во второе (здесь требуется гладкость функции f_0) с учетом предположений (7) для нахождения z_0 , получим следующую краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами с ф.с.р. $y_i(x, \lambda)$, $i = 1, 2$:

$$\ell(z_0, \lambda) = f_\lambda(x), \quad U_j(z_0, \lambda) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных находим общее решение дифференциального уравнения, затем находим неизвестные константы из краевых условий и в результате получаем (8). Формула (9) есть простое следствие первого соотношения в системе (11). \square

Пусть $K_\delta(\lambda_k)$ есть круги радиуса δ с центрами в λ_k и $\mathbb{C}_\delta = \mathbb{C} \setminus (\cup_{k \in \mathbb{Z}} K_\delta(\lambda_k))$. Обозначим через \mathbb{C}_δ^+ (\mathbb{C}_δ^-) части \mathbb{C}_δ , лежащие в правой (левой) полуплоскости.

Лемма 2. Существует такая положительная константа C_δ , что

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}_\delta^- : |\Delta_0^-(\lambda)| \geq C_\delta; \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_\delta^+ : |\Delta_0^+(\lambda)| \geq C_\delta. \quad (12)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\lambda \in \mathbb{C}_\delta^-$. Если $\operatorname{Re} \lambda \leq -N$, то из (6) получим $|\Delta_0^-(\lambda)| \geq |a_{12}|/2$ при N достаточно большом и таком, что $\Lambda \cap \{\lambda \mid \operatorname{Re} \lambda \leq -N\} = \emptyset$. Если же $-N \geq \operatorname{Re} \lambda \geq 0$, то пользуясь периодичностью $\Delta_0^-(\lambda)$ и тем фактом, что $\Delta_0^-(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \mathbb{C}_\delta^-$, аналогично [1, с. 74–84] получим $|\Delta_0^-(\lambda)| \geq C_{\delta, N} > 0$. Фиксируя N и объединяя две полученные оценки снизу, получим первое утверждение (12) леммы. Случай $\lambda \in \mathbb{C}_\delta^+$ рассматривается аналогично. \square



Лемма 3. Если $\gamma(x, t) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 t$ ($\gamma_2 \neq 0$) и $\gamma(x, t) \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \forall \lambda \in \Gamma_\nu^+(\Gamma_\nu^-)$ при $x \in [0, 1]$, $t \in [a(x), b(x)]$, где $a(x), b(x)$ — заданные линейные функции, $h \in L_p[0, 1]$, $p > 1$, $\chi_p(\nu) = \nu^{1/p}$ при $1 < p < \infty$ и $\chi_\infty(\nu) = \ln \nu$ при $p = \infty$, то

$$\left| -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+(\Gamma_\nu^-)} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} e^{\gamma(x,t)\lambda} h(t) dt \right) d\lambda \right| \leq C \|h\|_p \chi(\nu). \quad (13)$$

Доказательство. Обозначим $q = p/(p-1)$ и рассмотрим интеграл по Γ_ν^+ (интеграл по Γ_ν^- оценивается аналогично). Оценивая модуль интеграла в (13) через интеграл от модуля, применяя неравенство Гельдера к интегралу по t и делая вполне очевидные оценки и замену переменной, получим оценки

$$C \|h\|_p \left| \int_{\Gamma_\nu^+} \left(\frac{1 - \exp(\eta \operatorname{Re} \lambda)}{\operatorname{Re} \lambda} \right)^{1/q} |d\lambda| \right| \leq C \|h\|_p \int_0^{c_1 |\eta| \pi \nu / 2} \left(\frac{1 - \exp(-\xi)}{\xi} \right)^{1/q} d\xi \leq C \|h\|_p \chi_p(\nu),$$

где $\eta < 0$ есть число, выражающееся через параметры леммы. □

Отметим, что аналогичные оценки впервые использовались в [4].

Теорема 1. Если $f_0'', f_1' \in L_p[0, 1]$, $p > 1$, и выполняются условия (3), (5), (7), то

$$I_{0\nu}(f) = f_0(x) + \gamma \left(e_2 \omega_2 f_0(\alpha_x) - e_1 \omega_1 f_0(\beta_x) + \omega_1 f_0(x) \right) + \\ + \gamma p_2 \left(e_2 F_1(\alpha_x) - e_1 F_1(\beta_x) + F_1(x) \right) + o(1) \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty, \quad (14)$$

$$I_{1\nu}(f) = f_1(x) - \gamma \left(e_2 \omega_1 f_1(\alpha_x) - e_1 \omega_2 f_1(\beta_x) + \omega_2 f_1(x) \right) + \\ + \gamma \left(e_2 f_0'(\alpha_x) - e_1 f_0'(\beta_x) + f_0'(x) \right) + o(1) \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty, \quad (15)$$

где $F_1(x) = \int_0^x f_1(t) dt$ и $o(1) \Rightarrow 0$ по $x \in [0, 1]$. В формулах (14), (15) функции полагаются продолженными нулями, если аргументы выходят за отрезок $[0, 1]$.

Доказательство. Обозначим через $A_1(x, \lambda; f(\cdot, \lambda))$ и $a_1(x, \lambda; f(\cdot, \lambda))$ выражения, стоящие в первых и вторых больших круглых скобках справа от равенства в (8) соответственно. С учетом (10) получим представление

$$z_0(x, \lambda; f) = A_1(x, \lambda; \tilde{f}) - a_1(x, \lambda; \tilde{f}) - \lambda p_2 A_1(x, \lambda; f_0) + \lambda p_2 a_1(x, \lambda; f_0).$$

Здесь $\lambda p_2 a_1(x, \lambda; f_0)$ есть целая аналитическая функция, $a_1(x, \lambda; \tilde{f})$ есть аналитическая функция во всей комплексной плоскости за исключением точки $\lambda = 0$, в которой она имеет формально полюс первого порядка, а вычет равен нулю. Следовательно,

$$I_{0\nu}(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} A_1(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} a_1(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \lambda p_2 A_1(x, \lambda; f_0) d\lambda - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \lambda p_2 a_1(x, \lambda; f_0) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} A_1(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \lambda p_2 A_1(x, \lambda; f_0) d\lambda = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_\nu^+} + \int_{\Gamma_\nu^-} \right) A_1(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_\nu^+} + \int_{\Gamma_\nu^-} \right) \lambda p_2 A_1(x, \lambda; f_0) d\lambda = \sum_{j=1}^4 I_{0\nu}^j. \quad (16)$$

По условию $f_0, f_0' \in L_\infty[0, 1]$ и вещественные части показателей экспонент в $I_{0\nu}^2$ не положительны. Тогда по лемме 2 и 3 получим:

$$I_{0\nu}^2 = O(\chi_\infty(\nu)/\nu) = O(\ln \nu / \nu) = o(1) \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Чтобы подсчитать $I_{0\nu}^4$, преобразуем $\lambda p_2 A_1(x, \lambda; f_0)$, интегрируя по частям и используя условие (7). Будем иметь:

$$\lambda p_2 A_1(x, \lambda; f_0) = -\frac{a_{22} p_2 \gamma}{\lambda \omega_2 \Delta_0} \int_0^1 e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-t))} f_0'(t) dt + \frac{a_{11} p_2 \gamma}{\lambda \omega_1 \Delta_0} \int_0^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t) + \omega_2 x)} f_0'(t) dt -$$



$$-\frac{a_{12}p_2\gamma}{\lambda\omega_2\Delta_0} \int_0^1 e^{\lambda(\omega_2x+\omega_2(1-t))} f_0'(t) dt.$$

Отсюда аналогично (17) на основании лемм 2 и 3 получим:

$$I_{0\nu}^4 = O(\chi_\infty(\nu)/\nu) = o(1) \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Для подсчета $I_{0\nu}^1$ преобразуем $A_1(x, \lambda; \tilde{f})$. Используем представление $\Delta_0(\lambda)$ через $\Delta_0^+(\lambda)$ (см. (6)), умножаем коэффициенты перед интегралами на $1 = \Delta_0^+ + c_0e^{-\lambda\omega_2}$ и разбиваем каждый интеграл в соответствии с этим представлением. Кроме того, разбиваем интегралы на сумму интегралов по отрезкам, на которых показатели экспонент имеют знакоопределенную вещественную часть. Получим:

$$\begin{aligned} A_1(x, \lambda; \tilde{f}) = & \left(-\frac{e_2\gamma}{\lambda} \int_{\alpha_x}^1 e^{\lambda(\omega_1x-\omega_2t)} \tilde{f}(t) dt + \frac{e_1\gamma}{\lambda} \int_{\beta_x}^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t)+\omega_2(x-1))} \tilde{f} dt - \right. \\ & -\frac{\gamma}{\lambda} \int_x^1 e^{\lambda\omega_2(x-t)} \tilde{f}(t) dt + \frac{e_2c_0\gamma}{\lambda\Delta_0^+} \int_0^1 e^{\lambda(\omega_1x-\omega_2(1+t))} \tilde{f}(t) dt - \frac{e_2c_0\gamma}{\lambda\Delta_0^+} \int_0^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t)+\omega_2(x-2))} \tilde{f}(t) dt + \\ & \left. + \frac{c_0\gamma}{\lambda\Delta_0^+} \int_0^1 e^{\lambda\omega_2(x-t-1)} \tilde{f}(t) dt \right) + \left(-\frac{e_2\gamma}{\lambda} \int_0^{\alpha_x} e^{\lambda(\omega_1x-\omega_2t)} \tilde{f}(t) dt + \frac{e_1\gamma}{\lambda} \int_0^{\beta_x} e^{\lambda(\omega_1(1-t)+\omega_2(x-1))} \tilde{f} dt - \right. \\ & \left. -\frac{\gamma}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda\omega_2(x-t)} \tilde{f}(t) dt \right) = A_{11}(x, \lambda; \tilde{f}) + A_{12}(x, \lambda; \tilde{f}). \quad (19) \end{aligned}$$

Так как в интегралах в $A_{11}(x, \lambda; \tilde{f})$ показатели экспонент имеют неположительные вещественные части, то, как и до этого, на основании лемм 2 и 3 получим:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+} A_{11}(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda = o(1) \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Что касается слагаемого $A_{12}(x, \lambda; \tilde{f})$ в (19), то контурный интеграл от него можно преобразовать к виду

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+} A_{12}(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_\nu} - \int_{\Gamma_\nu^-} \right) A_{12}(x, \lambda; \tilde{f}) d\lambda.$$

Интеграл по Γ_ν считается как вычет в простом полюсе $\lambda = 0$. Интеграл по Γ_ν^- оценивается по лемме 3 аналогично предыдущему, так как на Γ_ν^- показатели экспонент имеют уже неположительные вещественные части. Тогда с учетом предположений (7) теоремы, соотношения (19) и формулы (20) в результате получим при $\nu \rightarrow \infty$:

$$I_{0\nu}^1 = -\gamma p_2 \left(e_2 F_1(\alpha_x) - e_1 F_1(\beta_x) + F_1(x) \right) - \gamma p_1 \left(e_2 f_0(\alpha_x) - e_1 f_0(\beta_x) + f_0(x) \right) + o(1). \quad (21)$$

Рассмотрим теперь слагаемое $I_{0\nu}^3$ в формуле (16). Оно отличается от слагаемого $I_{0\nu}^1$ тем, что отсутствует параметр λ в знаменателе. Но если провести в $I_{0\nu}^3$ внутри в интегралах по t один раз интегрирование по частям, воспользовавшись гладкостью f_0 и тем, что выполняются предположения (7), то получим контурный интеграл, который можно сосчитать совершенно аналогично интегралу $I_{0\nu}^1$. Проводя эти вычисления и опуская подробности, получим при $\nu \rightarrow \infty$:

$$I_{0\nu}^3 = -\gamma p_2 \left(\frac{e_2}{\omega_2} f_0(\alpha_x) + \frac{e_1}{\omega_1} f_0(\beta_x) + \frac{1}{\omega_2} f_0(x) \right) + o(1). \quad (22)$$

Подставляя (17), (18), (21) и (22) в (16), получим утверждение (14) теоремы.

Для получения формулы (15) сразу провести рассуждения, аналогичные тем, при помощи которых была получена формула (14), не представляется возможным из-за дополнительного множителя λ в числителе в подинтегральном выражении $I_{1\nu}$. Предварительно нужно во всех интегралах по переменной t , входящих в $z_1(x, \lambda; f)$, провести одно интегрирование по частям и воспользоваться условием (7) и соответствующей гладкостью функций f_0 и f_1 . А далее проводим рассуждения, полностью аналогичные предыдущим, и получаем формулу (15). \square



Следствие 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Для того, чтобы имели место формулы при $\nu \rightarrow \infty$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} v_0(x, \lambda; f) d\lambda = f_0(x) + o(1), \quad -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} v_1(x, \lambda; f) d\lambda = f_1(x) + o(1), \quad (23)$$

необходимо и достаточно, чтобы функции f_0, f_1 удовлетворяли системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(e_2 \omega_2 f_0(\alpha_x) - e_1 \omega_1 f_0(\beta_x) + \omega_1 f_0(x) \right) - p_2 \left(e_2 F_1(\alpha_x) - e_1 F_1(\beta_x) + F_1(x) \right) = 0, \\ \left(e_2 \omega_1 f_1(\alpha_x) - e_1 \omega_2 f_1(\beta_x) + \omega_2 f_1(x) \right) - \left(e_2 f_0'(\alpha_x) - e_1 f_0'(\beta_x) + f_0'(x) \right) = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение (ввиду нулевых начальных условиях получим эквивалентное уравнение) и анализируя полученную систему, без труда получим простое условие разложимости вектора $(f_0, f_1)^T$ по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$.

Теорема 2. Пусть выполняются предположения теоремы 1 и $e_2 = 0$ (это эквивалентно условию $a_{22} = 0$). Для того, чтобы имели место формулы (23), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение $f_0'(x) = \omega_2 f_1(x)$ для всех $x \in [0, 1]$.

Из полученных результатов видно, что когда корни х.м. лежат на одном луче, для разложимости функции в ряд по с.ф. пучка $L(\lambda)$ в с.н. случае так же, как и в случае оператора первого порядка, рассмотренного в [2], не требуется аналитичности разлагаемой функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).

Библиографический список

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. [Naimark M. A. Linear Differential Operators. Parts I. New York : Ungar Publ. Co., 1967; Naimark M. A. Linear Differential Operators. Parts II. New York : Ungar Publ. Co., 1968.]
2. Гуревич А. П., Хромов А. П. Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 1. С. 3–15. [Gurevich A. P., Khromov A. P. First and second order differentiation operators with weight functions of variable sign // Math. Notes. 1994. Vol. 56, iss.1. P. 653–661.]
3. Хромов А. П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182–193. [Khromov A. P. Expansion in eigenfunctions a boundary value problem of the third order // Issledovaniya po teorii operatorov. Ufa, 1988. P. 182–193.]
4. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405. [Hromov A. P. Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators // Math. USSR Sb. 1982. Vol. 42, iss. 3. P. 331–355.]

УДК 517.53/54

СЧЕТНОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ НЕ ГОМЕОМОРФНА НЕСЧЕТНОСВЯЗНОЙ

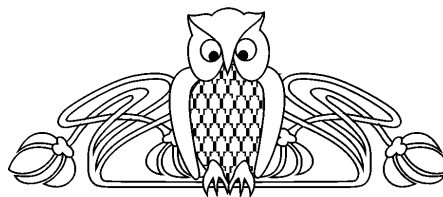
В. В. Старков

Петрозаводский государственный университет
E-mail: VstarV@list.ru

В 1923 году Керекьярто доказал, что счетносвязная область не гомеоморфна несчетносвязной. В этой заметке дано другое доказательство этого факта с использованием методов комплексного анализа.

Ключевые слова: гомеоморфизмы бесконечносвязных областей.

Под *континуумом*, как обычно, будем понимать связное замкнутое подмножество расширенной плоскости. Граничной компонентой области D называется каждый континуум $K \subset \partial D$, обладающий тем свойством, что любой континуум $K' \subset \partial D$, $K' \supset K$, совпадает с K .



A Countably Connected Domain is not Homeomorphic to an Uncountably Connected Domain

V. V. Starkov

In 1923 Kerékjártó proved, that a countably connected domain is not homeomorphic to an uncountably connected domain. We give another proof of this statement.

Key words: homeomorphism of multiply connected domains.



Определение. Область D называется *счетносвязной*, если ее граница ∂D является объединением счетного множества компонент. Если же ∂D невозможно представить в виде не более чем счетного множества попарно непересекающихся континуумов, то область D называется *несчетносвязной*.

Следующий результат принадлежит Керекьярто [1] (см. также [2, гл. 4, II]), но здесь будет дано другое его доказательство с использованием методов комплексного анализа. Потребность в этом результате нередко возникает в разных задачах (см., например, [3]).

Теорема. *Счетносвязная и несчетносвязная области в $\bar{\mathbb{C}}$ топологически не эквивалентны.*

Доказательство. 1. Пусть D — счетносвязная область. По теореме Поссея-Гретша [4, гл. 5, § 2] существует биголоморфное отображение F области D на область Ω , представляющую собой расширенную плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ с разрезами, параллельными вещественной оси (т.е. каждая компонента границы $\partial\Omega$ представляет собой отрезок, параллельный вещественной оси, или точку). Покажем, что Ω — счетносвязная область.

Обозначим \mathcal{I} проекцию множества $\partial\Omega$ на мнимую ось. Покажем, что \mathcal{I} не более чем счетно. Из открытости и связности Ω следует, что для любого $y \in \mathcal{I}$ на прямой $\{z : \text{Im } z = y\}$ существует интервал $\gamma_y \subset \Omega$, оканчивающийся в граничной точке области Ω . Обозначим $\Gamma_y = F^{-1}(\gamma_y) \subset D$. Каждая из кривых Γ_y имеет предельную точку из ∂D . Если \mathcal{I} несчетно, то существует граничная компонента B области D , на которой несчетное множество кривых Γ_y имеют предельные точки. Рассмотрим две из них: Γ_{y_1} и Γ_{y_2} , $y_1 \neq y_2$. Выберем точки $a, b \in \Omega$, расположенные на прямой $\{z : \text{Im } z = y_1\}$ по обе стороны интервала γ_{y_1} , и такие ε -окрестности U_a и U_b этих точек, что $U_a, U_b \subset \Omega$.

Рассмотрим открытый прямоугольник R_1 , ограниченный вертикальными прямыми, проходящими через точки a и b и горизонталями $\{z : \text{Im } z = y_1 - \varepsilon\}$, $\varepsilon < |y_1 - y_2|$, и $\{z : \text{Im } z = y_1\}$. Открытое множество $R_1 \cap \Omega$ распадается в объединение (не более чем счетное) областей B_j (см., например, [5, гл. 4, §4]): $R_1 \cap \Omega = \cup_j B_j$, $B_{j_1} \cap B_{j_2} = \emptyset$ при $j_1 \neq j_2$ (из дальнейшего будет ясно, что $R_1 \cap \Omega$ — область). Каждая из областей B_j в качестве граничных компонент или их фрагментов может иметь лишь разрезы (или их части) области Ω или фрагменты ∂R_1 . Поэтому и внешняя граница области B_j может быть разбита в объединение горизонтальных отрезков и фрагментов вертикалей границы ∂B_j . Пусть $\{z \in \mathbb{C} : \rho'_j < \text{Im } z < \rho''_j\}$ — минимальная горизонтальная полоса, содержащая B_j . Если этой полосе, кроме области B_j , принадлежали бы точки другой области B_k , то континуум, являющийся фрагментом внешней границы области B_j , разделял бы в $R_1 \cap \{z \in \mathbb{C} : \rho'_j < \text{Im } z < \rho''_j\}$ малые окрестности точек $a' = x' + iy' \in B_j$ и $a'' = x'' + iy' \in B_k$ в том смысле, что для любого вещественного η из малой окрестности нуля отрезок $[x' + i(y' + \eta), x'' + i(y' + \eta)]$ имел бы непустое пересечение с этим фрагментом внешней границы области B_j . Но ни один из связных фрагментов ∂B_j этим свойством не обладает (отрезок $[x' + i(y' + \eta), x'' + i(y' + \eta)]$ не может пересекать вертикального фрагмента ∂B_j , так как B_j и B_k из R_1). Следовательно, каждая область B_j лежит в полосе $\{z \in \mathbb{C} : \rho'_j < \text{Im } z < \rho''_j\}$, причем для разных областей B_j и B_k $(\rho'_j, \rho''_j) \cap (\rho'_k, \rho''_k) = \emptyset$.

Соединим простой кривой $L_1 \subset B_1$ точки $a_1 \in U_a \cap B_1$ и $b_1 \in U_b \cap B_1$. Заменяя в предыдущих рассуждениях прямоугольник R_1 на прямоугольник R_2 , ограниченный вертикальными прямыми, проходящими через a и b , и горизонталями $\{z : \text{Im } z = y_1\}$ и $\{z : \text{Im } z = y_1 + \varepsilon\}$, приходим к существованию простой кривой $L_2 \subset R_2 \cap \Omega$, соединяющей $a_2 \in U_a$ и $b_2 \in U_b$. Следовательно, существует простая замкнутая кривая $L \subset \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z - y_1| < \varepsilon\}$, содержащая в своей внутренности интервал γ_{y_1} вместе с компонентой границы $\partial\Omega$, к которой он примыкает.

Обозначим через G_1 плоскую область, ограниченную кривой L , $G_2 = \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{G}_1$. Тогда $\Gamma_{y_1} \subset \subset F^{-1}(G_1 \cap \Omega)$, $\Gamma_{y_2} \subset \subset F^{-1}(G_2 \cap \Omega)$. Поэтому предельные точки кривых Γ_{y_1} и Γ_{y_2} не могут принадлежать одной граничной компоненте B области D . Противоречие доказывает счетность множества \mathcal{I} .

2. Покажем теперь, что Ω — счетносвязная область. Если это не так, то существует $y_0 \in \mathcal{I}$, для которого на прямой $l = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = y_0\}$ имеется несчетное множество граничных компонент области Ω . Для каждой из таких компонент существует своя последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$, сходящаяся к некоторой точке этой компоненты. Тогда каждая последовательность $\zeta_n = F^{-1}(z_n) \in D$, $n \in \mathbb{N}$, имеет, по крайней мере, одну предельную точку на граничной компоненте области D . Из сделанного предположения о несчетносвязности области Ω вытекает, что таких различных последовательностей — $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — несчетное множество. Поэтому существует компонента



$B \subset \partial D$, которой принадлежат предельные точки несчетного множества построенных последовательностей $\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$. Рассмотрим две из них: $\{\zeta'_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\zeta''_n\}_{n=1}^\infty$.

Поскольку пределы последовательностей $z'_n = F(\zeta'_n)$ и $z''_n = F(\zeta''_n)$ принадлежат разным компонентам K' и K'' из $\partial\Omega$, лежащим на прямой l , то существует разделяющая их точка $a \in l \cap \Omega$. Теперь те же рассуждения, что и в первой части доказательства, позволяют построить простые замкнутые кривые $L' \subset \Omega$ и $L'' \subset \Omega$, ограничивающие области комплексной плоскости G'_1 и G''_1 , $G'_1 \cap G''_1 = \emptyset$. Причем $K' \subset G'_1, K'' \subset G''_1$. Следовательно,

$$\{\zeta'_n\}_{n=1}^\infty \subset F^{-1}(G'_1 \cap \Omega) \subset D, \quad \{\zeta''_n\}_{n=1}^\infty \subset F^{-1}(G''_1 \cap \Omega) \subset D,$$

начиная с некоторого номера n . Поэтому последовательности $\{\zeta'_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\zeta''_n\}_{n=1}^\infty$ не могут иметь предельных точек на одной и той же граничной компоненте B области D . Противоречие.

Таким образом, Ω — счетносвязная область.

3. Пусть теперь D — несчетносвязная область. Опять, по теореме Посселя–Гретша, биголоморфно отобразим ее на расширенную плоскость с разрезами, параллельными вещественной оси; это отображение обозначим снова F и обозначим $\Omega = F(D) (\ni \infty)$. Покажем, что Ω — несчетносвязная область.

Предположим противное, т. е. $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$, где K_j — различные граничные компоненты области Ω . Для каждой компоненты B_α границы области D (α пробегает некоторое множество мощности \mathfrak{c}) построим последовательность $\{\zeta_n^{(\alpha)}\}_{n=1}^\infty \subset D$, сходящуюся к $\zeta^{(\alpha)} \in B_\alpha$. Последовательность $z_n^{(\alpha)} = F(\zeta_n^{(\alpha)})$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предельную точку, по крайней мере, на одной компоненте границы области Ω . Из сделанного предположения счетносвязности Ω вытекает существование такой граничной компоненты $K \subset \partial\Omega$, на которой имеются предельные точки несчетного множества различных последовательностей $\{\zeta_n^{(\alpha)}\}_{n=1}^\infty$. Рассмотрим две из них: $\{\zeta'_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\zeta''_n\}_{n=1}^\infty$. Обозначим B' и B'' ($B' \neq B''$) граничные компоненты области D , которым принадлежат соответствующие пределы ζ' и ζ'' этих последовательностей, $\zeta' \in B', \zeta'' \in B''$. Выберем точки $a, b \in \Omega$, лежащие с K на одной горизонтальной прямой, но по разные стороны от K . Повторяя рассуждения из 1), построим замкнутую кривую $L_\varepsilon \subset \Omega$, лежащую в ε -окрестности компоненты K и содержащую K в своей внутренности.

Обозначим через G_ε ограниченную область комплексной плоскости с границей $\partial G_\varepsilon = L_\varepsilon$, тогда $\bar{\Phi}_\varepsilon = F^{-1}(G_\varepsilon \cap \Omega)$ — область, ее замыкание $\bar{\Phi}_\varepsilon$ — континуум, $\zeta' \in \bar{\Phi}_\varepsilon \ni \zeta''$. В качестве ε возьмем убывающую последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Тогда $\bar{\Phi}_{\varepsilon_n}$ — убывающая последовательность континуумов, следовательно [5, гл. 5, § 3], $\Phi = \bigcap_{n=1}^\infty \bar{\Phi}_{\varepsilon_n}$ — континуум, $\zeta' \in \Phi \ni \zeta''$. Поскольку при всех n множество $\bar{\Phi}_{\varepsilon_n}$ лежит в замыкании \bar{D} области D , то и $\Phi \subset \bar{D}$. Но $\Phi \cap D = \emptyset$, так как в противном случае для точки $z_0 \in D \cap \Phi$ ее образ

$$F(z_0) \in G_{\varepsilon_n} \cap \Omega \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

что невозможно, если $\varepsilon_n < \rho(F(z_0), K)$. Следовательно, $\Phi \subset \partial D$. Но тогда, в силу связности Φ , ζ' и ζ'' принадлежат одной граничной компоненте области D , а значит, $B' = B''$. Противоречие.

Таким образом, Ω — несчетносвязна.

4. Пусть теперь D_1 — счетносвязная область, а D — несчетносвязная. Обозначим Ω биголоморфный образ области D_1 , полученный применением теоремы Посселя–Гретша. В 2) доказана счетносвязность Ω . Если D_1 и D топологически эквивалентны, то топологически эквивалентны области Ω и D .

Обозначим через $F_0 : D \rightarrow \Omega$ соответствующий гомеоморфизм. Теперь повторим рассуждения п. 3), взяв в качестве биголоморфного отображения F — гомеоморфизм F_0 . Придем к противоречию с топологической эквивалентностью областей D_1 и D . Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научной деятельности и при поддержке РФФИ (проект 11-01-00952-а).



Библиографический список

1. Kerekjarto B. V. Vorlesungen über Topologie. Berlin : J. Springer, 1923. 270 p.
2. Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. М. : Наука, 1964. 228 с. [Stoilov S. Lectures on topological principles in the theory of analytic functions. Moscow : Nauka, 1964. 228 p.]
3. Старков В. В. Локально биголоморфные конечнолистные отображения ограниченных областей. // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 177–186. [Starkov V. V. Finitely valent locally biholomorphic mappings of bounded domains // Siberian Math. J. 2011. Vol. 52, № 1. P. 139–146.]
4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966. 628 с. [Goluzin G. M. Geometric theory of Functions of a complex variable. Providence, R.I. : Amer. Math. Soc., 1969.]
5. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М. : Наука, 1977. 368 с. [Alexandrov P. C. Introduction to set theory and general topology. Moscow : Nauka, 1977. 368 p.]

УДК 517.518.82

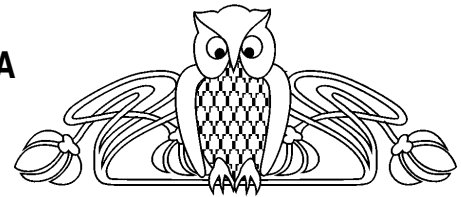
ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ МЕЙКСНЕРА И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Э. Ш. Султанов

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала
E-mail: emir.sultanov@gmail.com

В работе исследуется задача о приближении функций дискретными рядами по полиномам Мейкснера, ортогональным на равномерной сетке $\{0, 1, \dots\}$. Сконструированы новые ряды по этим полиномам, для которых в точке $x = 0$ частичные суммы совпадают с приближаемой функцией $f(x)$. Новые ряды образованы с помощью предельного перехода при $\alpha \rightarrow -1$ рядов Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha} m_k^{\alpha}(x)$ по полиномам Мейкснера.

Ключевые слова: полиномы Мейкснера, ряды Фурье, предельные ряды.



Limit Discrete Meixner Series and Their Approximative Properties

E. Sh. Sultanov

In this article the problem of function approximation by discrete series by Meixner polynomials orthogonal on uniform net $\{0, 1, \dots\}$ is investigated. We constructed new series by these polynomials for which partial sums coincide with input function $f(x)$ in $x = 0$. These new series were constructed by the passage to the limit of Fourier series $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha} m_k^{\alpha}(x)$ by Meixner polynomials when $\alpha \rightarrow -1$.

Key words: Meixner polynomials, Fourier series, limit series.

В задачах обработки сигналов часто встречается ситуация, когда требуется аппроксимировать дискретный сигнал, который с определенного момента является затухающим. При этом видится целесообразным осуществить его кусочную аппроксимацию с сохранением непрерывности восстановленного сигнала, а для этого необходимо, чтобы приближение в точке стыка совпадало с восстанавливаемой функцией. Для приближения затухающих сигналов наиболее подходящим является оператор частичных сумм Фурье по полиномам Мейкснера, однако он не обладает указанным свойством совпадения в точке стыка. Решая эту задачу, мы сконструировали оператор, основанный на новых так называемых предельных рядах по полиномам Мейкснера.

Для $0 < q < 1$, $\alpha > -1$ классические многочлены Мейкснера (J. Meixner) [1] можно определить следующим образом:

$$M_n^{\alpha}(x) = M_n^{\alpha}(x, q) = \binom{n + \alpha}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (-x)_k}{(\alpha + 1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k,$$

где $(a)_k = a(a + 1) \dots (a + k - 1)$. Они нормируются условием $M_n^{\alpha}(0, q) = \binom{n + \alpha}{n}$ и образуют ортогональную систему на сетке $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ с весом

$$\eta^{\alpha}(x) = \eta^{\alpha}(x, q) = (1 - q)^{\alpha + 1} q^x \frac{\Gamma(x + \alpha + 1)}{\Gamma(x + 1)},$$

т. е.

$$\sum_{j=0}^{\infty} M_k^{\alpha}(j, q) M_l^{\alpha}(j, q) \eta^{\alpha}(j) = \delta_{kl} h_k^{\alpha, q},$$

где $h_k^{\alpha, q} = \binom{k + \alpha}{k} q^{-k} \Gamma(\alpha + 1)$.



Соответствующие ортонормированные полиномы имеют вид

$$m_n^\alpha(x) = m_n^\alpha(x, q) = \{h_n^{\alpha, q}\}^{-1/2} M_n^\alpha(x, q), \quad n = 0, 1, \dots,$$

и тем самым

$$\sum_{j=0}^{\infty} m_k^\alpha(j) m_l^\alpha(j) \eta^\alpha(j) = \delta_{kl}.$$

Пусть на сетке Ω дана функция $f(x)$, для которой существуют следующие моменты:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) j^k \eta^\alpha(j) < \infty, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда для этой функции существуют коэффициенты Фурье–Мейкснера

$$f_k^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) m_k^\alpha(j) \eta^\alpha(j), \quad k = 0, 1, \dots$$

Поэтому мы можем функции $f(x)$ сопоставить ее ряд Фурье–Мейкснера:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha m_k^\alpha(x) \tag{1}$$

и частичные суммы Фурье–Мейкснера:

$$S_n^\alpha(f; x) = S_n^\alpha(f; x, q) = \sum_{k=0}^n f_k^\alpha m_k^\alpha(x). \tag{2}$$

В работах ряда авторов исследована задача о приближении функции $f(x)$ ее частичными суммами (2). При этом было замечено, что аппроксимативные свойства сумм $S_n^\alpha(f; x)$ в точке $x = 0$ улучшаются при приближении параметра α к -1 . Другими словами, было замечено, что $S_n^\alpha(f; 0) \rightarrow f(0)$ при $\alpha \rightarrow -1$, т. е. $S_n^{-1}(f; 0) = f(0)$. Что же представляют собой суммы $S_n^{-1}(f; x)$? Нам удалось доказать следующее.

Теорема 1. *Предельное положение ряда Фурье по полиномам Мейкснера (1) при $\alpha \rightarrow -1$ имеет вид*

$$f(x) = f(0) + x \sum_{k=0}^{\infty} m_k^1(x-1, q) g_k, \tag{3}$$

где $g_k = (1-q)^2 \sum_{j=0}^{\infty} q^j m_k^1(j, q) g(j+1)$, а $g(x) = f(x) - f(0)$.

Доказательство. Исследуем общий член ряда (1) $f_k^\alpha m_k^\alpha(x)$ при $\alpha \rightarrow -1$. Рассмотрим сначала первый член этого ряда $f_0^\alpha m_0^\alpha(x)$. Так как $M_0^\alpha(x) = 1$, а $h_0^{\alpha, q} = \Gamma(\alpha + 1)$, то

$$m_0^\alpha(x) = \{h_0^\alpha\}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha + 1)}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} m_0^\alpha(x) f_0^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha + 1)}} \sum_{j=0}^{\infty} f(j) \frac{(1-q)^{\alpha+1} q^j}{\sqrt{\Gamma(\alpha + 1)}} \frac{\Gamma(j + \alpha + 1)}{\Gamma(j + 1)} = \frac{(1-q)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=0}^{\infty} f(j) q^j \frac{\Gamma(j + \alpha + 1)}{\Gamma(j + 1)} = \\ &= (\alpha + 1) \frac{(1-q)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{j=0}^{\infty} f(j) q^j \frac{\Gamma(j + \alpha + 1)}{\Gamma(j + 1)}, \end{aligned}$$

или

$$m_0^\alpha(x) f_0^\alpha = f(0) + A^{\alpha, q}(\alpha + 1) \sum_{j=1}^{\infty} f(j) q^j \frac{\Gamma(j + \alpha + 1)}{\Gamma(j + 1)},$$



где $A^{\alpha, q} = \frac{(1-q)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}$. При $\alpha \rightarrow -1$ второе слагаемое будет стремиться к нулю (в силу того, что $\sum_{j=0}^{\infty} f(j)\eta^{\alpha}(j) < \infty$), следовательно, $f_0^{-1}m_0^{-1}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow -1} f_0^{\alpha}m_0^{\alpha}(x) = f(0)$.

Теперь рассмотрим $m_k^{\alpha}(x)f_k^{\alpha}$ при $k \geq 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} m_k^{\alpha}(x)f_k^{\alpha} &= m_k^{\alpha}(x) \sum_{j=0}^{\infty} f(j)m_k^{\alpha}(j)\eta(j) = (1-q)^{\alpha+1}m_k^{\alpha}(x) \sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)} m_k^{\alpha}(j)f(j) = \\ &= (1-q)^{\alpha+1} (h_k^{\alpha})^{-1} M_k^{\alpha}(x) \sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)} M_k^{\alpha}(j)f(j), \\ M_k^{\alpha}(j) &= \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{(-k)_l(-x)_l}{\Gamma(l+\alpha+1)l!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^l = \\ &= \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{l=1}^k \frac{(-k)_l(-x)_l}{\Gamma(l+\alpha+1)l!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^l \right], \end{aligned}$$

где $1/\Gamma(\alpha+1) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow -1$. Так как $m_k^{\alpha}(j)$ ортогонален ко всем многочленам $P_n(j)$, $n < k$, то

$$\begin{aligned} f_k^{\alpha}m_k^{\alpha}(x) &= (1-q)^{\alpha+1} \frac{M_k^{\alpha}(x)}{h_k^{\alpha, q}} \sum_{j=1}^{\infty} q^j \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)} M_k^{\alpha}(j)[f(j) - f(0)] = \\ &= (1-q)^{\alpha+1} \frac{M_k^{\alpha}(x)}{h_k^{\alpha, q}} \sum_{j=1}^{\infty} q^j \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)} [f(j) - f(0)] \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!} \sum_{l=1}^k \frac{(-k)_l(-x)_l}{\Gamma(l+\alpha+1)l!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^l. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\alpha \rightarrow -1$

$$h_k^{\alpha, q} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1)q^{-k} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!} q^{-k} \rightarrow \frac{q^{-k}}{k}.$$

Переходя к пределу при $\alpha \rightarrow -1$ для общего члена ряда (1), получим следующее:

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} f_k^{\alpha}m_k^{\alpha}(x) = kq^k M_k^{-1}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^j}{j} M_k^{-1}(j)[f(j) - f(0)].$$

Отсюда и из равенства [2, гл. 4, §5]

$$M_k^{-1}(x) = \frac{(k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{q} - 1\right) (-x)M_{k-1}^1(x-1) = \frac{q-1}{kq} xM_{k-1}^1(x-1)$$

получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -1} f_k^{\alpha}m_k^{\alpha}(x) &= \frac{(q-1)^2}{k} q^{k-1} xM_{k-1}^1(x-1) \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} M_{k-1}^1(j-1)[f(j) - f(0)] = \\ &= \frac{(q-1)^2}{k} q^{k-1} xM_{k-1}^1(x-1) \sum_{j=0}^{\infty} q^j M_{k-1}^1(j)[f(j+1) - f(0)]. \end{aligned}$$

Для $\alpha = 1$ весовая функция будет иметь вид $\eta^1(x) = (1-q)^2 q^x (x+1)$. По определению $h_k^{1, q} = (k+1)q^{-k}$, следовательно, $M_{k-1}^1(x) = \frac{k}{q^{k-1}} m_{k-1}^1(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -1} f_k^{\alpha}m_k^{\alpha}(x) &= xm_{k-1}^1(x-1) \sum_{j=0}^{\infty} (1-q)^2 q^j m_{k-1}^1(j)[f(j+1) - f(0)] = \\ &= xm_{k-1}^1(x-1) \sum_{j=0}^{\infty} \eta^1(j)m_{k-1}^1(j) \frac{g(j+1)}{j+1}. \end{aligned}$$



Обозначим $g(x) = f(x) - f(0)$, $\lim_{\alpha \rightarrow -1} f_k^\alpha m_k^\alpha(x) = x m_{k-1}^1(x-1) \sum_{j=0}^{\infty} \eta^1(j) m_{k-1}^1(j) \hat{g}(j)$, где $\hat{g}(x) = g(x+1)/(x+1)$. Тогда

$$\lim_{\alpha \rightarrow -1} f_k^\alpha m_k^\alpha(x) = x m_{k-1}^1(x-1) \hat{g}_{k-1}^1$$

и рассматриваемый ряд принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{-1,q} m_k^{-1,q}(x) &= f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} x m_{k-1}^{1,q}(x-1) \hat{g}_{k-1}^1 = \\ &= f(0) + x \sum_{k=0}^{\infty} m_k^1(x-1) \hat{g}_k^1 = f(0) + x \hat{g}(x-1) = f(0) + x \left(\frac{g(x)}{x} \right) = f(x). \end{aligned}$$

Ряд (3) назовем предельным по полиномам Мейкснера. Обозначим его частичную сумму следующим образом:

$$S_n^{-1}(f; x) = f(0) + x \sum_{k=0}^{n-1} m_k^1(x-1, q) g_k. \quad (4)$$

Отсюда видно, что для любого $n \geq 1$ $S_n^{-1}(f; 0) = f(0)$. Можно показать, что частичные суммы (4) предельного ряда (3) обладают в определенном смысле лучшими аппроксимативными свойствами по сравнению с частичными суммами $S_n^\alpha(f; x)$ ($\alpha > -1$) ряда Фурье–Мейкснера (1), но мы на этом здесь не останавливаемся.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191-а).

Библиографический список

1. Meixner J. Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Function // J. of the London Math. Soc. 1934. Vol. 9. P. 6–13.
2. Шарпудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Ма-

- хачкала : Дагестан. науч. центр РАН, 2004. 276 с. [Sharapudinov I. I. Mixed series of orthogonal polynomials. Theory and applications. Makhachkala : Dagestan Scientific Center of RAS, 2004. 276 p.]

УДК 517.51+517.98

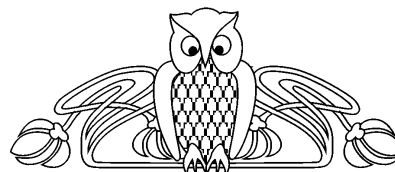
АФФИННЫЕ КВАНТОВЫЕ ФРЕЙМЫ И ИХ СПЕКТР

П. А. Терехин

Саратовский государственный университет
E-mail: TerekhinPA@info.sgu.ru

Задача квантования коэффициентов приближающих полиномов решается для аффинных фреймов. Рассматривается также задача о квантовании коэффициентов разложения по фрейму. Вводится понятие спектра квантового фрейма. Оценивается спектр семейства аффинных фреймов.

Ключевые слова: фрейм, аффинный фрейм, квантовый фрейм, спектр квантового фрейма.



Affine Quantum Frames and Their Spectrum

P. A. Terekhin

The problem of coefficients quantization for polynomials is solved for affine frames. The problem about coefficients quantization for frame decomposition is considered also. The notion of a spectrum of the quantum frame is introduced. The spectrum of family of affine frames is estimated.

Key words: frame, affine frame, quantum frame, spectrum of quantum frame.

1. ЗАДАЧА КВАНТОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть X — банахово пространство, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и удовлетворяющее следующему условию: система канонических ортов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует базис пространства X . Напомним, что $e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \dots$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Будем называть X модельным пространством.

Пусть, далее, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система элементов банахова пространства F . Следуя [1], будем говорить, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является квантовой (ε, δ, C) -сетью в пространстве F относительно модельного



пространства X , если существуют постоянные $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $C \geq 1$ такие, что для любого вектора $f \in F$ найдется конечный набор целых чисел $\{m_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{Z}$ такой, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n m_k \delta \varphi_k \right\|_F < \varepsilon, \quad \left\| \sum_{k=1}^n m_k \delta e_k \right\|_X \leq C \|f\|_F.$$

Заметим, что определение квантовой сети однородно по паре параметров (ε, δ) , т.е. для любого $\lambda > 0$ квантовая (ε, δ, C) -сеть будет квантовой $(\lambda\varepsilon, \lambda\delta, C)$ -сетью. В силу этого обстоятельства существует ε -аппроксимация любого вектора f для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ с линейной зависимостью $\delta = \delta(\varepsilon)$.

В работе [1] приведен ряд отрицательных результатов о невозможности построения квантовых сетей, во-первых, на основе базисов или полных минимальных систем в банаховых пространствах, не содержащих c_0 , и, во-вторых, на основе банаховых фреймов с рефлексивным модельным пространством.

В этом пункте настоящей работы строятся квантовые сети на основе аффинных фреймов. Необходимо отметить, что мы используем другое определение понятия фрейма в банаховом пространстве, отличное от работы [1]. Мотивация принятого нами определения и история вопроса имеется в работе автора [2].

Определение 1. Скажем, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ образует *фрейм* в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X , если существуют постоянные $0 < A \leq B \leq \infty$ такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in F^*$ числовая последовательность его коэффициентов Фурье $\{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет неравенствам

$$A \|g\|_{F^*} \leq \| \{ (g, \varphi_n) \}_{n=1}^\infty \|_{X^*} \leq B \|g\|_{F^*}.$$

Теперь перейдем к определению аффинного фрейма. Пусть функция $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет носитель $\text{supp } \varphi \subset [0, 1]$. Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ по *стандартному представлению* $n = 2^k + j$, где $k = 0, 1, \dots$ и $j = 0, \dots, 2^k - 1$, положим:

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = \varphi(2^k t - j).$$

Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ называется *аффинной системой функций*, или *системой сжатий и сдвигов*, порожденной функцией φ .

Предположим, что $\varphi \in L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, и $\int_0^1 \varphi(t) dt \neq 0$. Тогда выполняются фреймовые неравенства для всех $g \in L^q[0, 1]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (см. [3]):

$$A \|g\|_q \leq \sup_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=1}^{2^k-1} |(g, \varphi_{k,j})|^q \right)^{1/q} \leq B \|g\|_q$$

с постоянными $A = |\int_0^1 \varphi(t) dt|$ и $B = (\int_0^1 |\varphi(t)|^p dt)^{1/p}$. По определению 1 это означает, что аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ образует фрейм в пространстве $L^p[0, 1]$ относительно модельного пространства $X = \ell^{1,p}$, состоящего из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty = \{x_{k,j}\}_{k=0}^\infty_{j=0}^{2^k-1}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{1,p} = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} |x_{k,j}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Такую аффинную систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ назовем аффинным фреймом.

Теорема 1. *Всякий аффинный фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является квантовой сетью в пространстве $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, относительно модельного пространства $\ell^{1,p}$.*

Доказательство. Обозначим:

$$E_k(f) = \inf_{\{c_j\}_{j=0}^{2^k-1}} \left\| f - \sum_{j=0}^{2^k-1} c_j \varphi_{k,j} \right\|_p, \quad k = 0, 1, \dots,$$



как величину наилучшего приближения функции $f \in L^p[0, 1]$ линейными комбинациями элементов k -й пачки аффинной системы. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_k(f) = q_\varphi \|f\|_p$$

с положительной постоянной $q_\varphi < 1$ (см. [4, теорема 1.21] для $p = 2$, общий случай доказывается аналогично). Пусть $q_\varphi < q < q_0 < 1$ и $\|f\|_p \leq 1$. Тогда существует номер k и числа $\{c_j\}_{j=1}^{2^k-1}$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{2^k-1} c_j \varphi_{k,j} \right\|_p \leq q.$$

Положим $m_j = [c_j/\delta]$, $\delta > 0$. Будем иметь

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{2^k-1} m_j \delta \varphi_{k,j} \right\|_p \leq q + \delta \| \varphi \|_p, \quad \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} |m_j \delta|^p \right)^{1/p} \leq \frac{1+q}{\| \varphi \|_p} + \delta.$$

Выберем $\delta = \delta_0 = \frac{q_0 - q}{\| \varphi \|_p}$ и $C_0 = \frac{1+q_0}{\| \varphi \|_p}$. При $\|f\|_p \leq 1$ получим:

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{2^k-1} m_j \delta_0 \varphi_{k,j} \right\|_p \leq q_0, \quad \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} |m_j \delta_0|^p \right)^{1/p} \leq C_0.$$

Отсюда следует (см. [1, предл. 4.2]), что найдутся $C_1 < \infty$ и $\delta_1 > 0$, зависящие только от C_0, δ_0, q_0 и такие, что для всех $f \in L^p[0, 1]$ существует конечный набор целых чисел $\{m_{k,j}\}_{k=0}^K, j=0, \dots, 2^k-1$, для которого

$$\left\| f - \sum_{k=0}^K \sum_{j=0}^{2^k-1} m_{k,j} \delta_1 \varphi_{k,j} \right\|_p < 1, \quad \sum_{k=0}^K \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} |m_{k,j} \delta_1|^p \right)^{1/p} \leq C_1 \|f\|_p.$$

Последнее означает, что аффинный фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является квантовой $(1, \delta_1, C_1)$ -сетью. \square

2. КВАНТОВЫЕ ФРЕЙМЫ

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X в смысле определения 1.

Определение 2. Скажем, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — *квантовый фрейм*, если существуют $\lambda_n > 0, n \in \mathbb{N}$, такие, что для любого вектора $f \in F$ найдется последовательность целых чисел $\{m_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Z}$, для которой $\{\lambda_n m_n\}_{n=1}^\infty \in X$ и справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n m_n \varphi_n.$$

Множество всех таких последовательностей $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ назовем *спектром* квантового фрейма и будем обозначать $Sp(\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty)$. Наконец, если $\Phi = (\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty)$ — некоторое семейство фреймов, то его спектр $Sp(\Phi)$ определим как пересечение всех спектров фреймов $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$.

Понятно, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — квантовый фрейм в том и только том случае, когда $\{\lambda_n \varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — система представления с целыми коэффициентами. Однако нам удобнее считать систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ фиксированной.

В данном параграфе, не останавливаясь на общих свойствах квантовых фреймов и их спектров, оценим спектр семейства аффинных фреймов.

Обозначим через $\Phi_{aff}^p, 1 \leq p < \infty$, семейство всех аффинных фреймов $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $L^p[0, 1]$ относительно модельного пространства $\ell^{1,p}$.

Теорема 2. *Справедливо включение*

$$\left\{ \{\lambda_{k,j} > 0\}_{k=0}^\infty, j=0, \dots, 2^k-1 : \inf_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} \lambda_{k,j}^p \right)^{1/p} = 0 \right\} \subset Sp(\Phi_{aff}^p).$$



Доказательство. Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} \lambda_{k,j}^p \right)^{1/p} = 0$, что не ограничивает общности рассуждений ввиду возможности перехода к подпоследовательности $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$. Воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 1. Пусть $q_{\varphi} < q < q_0 < 1$ и $f \in L^p[0, 1]$. Тогда найдутся $\{c_{k,j}\}$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{k,j} \varphi_{k,j} \right\|_p \leq q \|f\|_p, \quad k \geq k_0.$$

Положим $m_{k,j} = [c_{k,j}/\lambda_{k,j}]$. При достаточно большом k получим:

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{2^k-1} \lambda_{k,j} m_{k,j} \varphi_{k,j} \right\|_p \leq q \|f\|_p + \|\varphi\|_p \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} \lambda_{k,j}^p \right)^{1/p} \leq q_0 \|f\|_p.$$

При этом

$$\left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} |\lambda_{k,j} m_{k,j}|^p \right)^{1/p} \leq \frac{1+q_0}{\|\varphi\|_p} \|f\|_p = C_0 \|f\|_p.$$

Используя полученные оценки, выполним процедуру итераций. Пусть $p_0 = 0$ и $r_0 = f$. Если p_{i-1} и r_{i-1} уже построены, то находим $p_i = \sum_{j=0}^{2^{k_i}-1} \lambda_{k_i,j} m_{k_i,j} \varphi_{k_i,j}$ так, чтобы $\|r_{i-1} - p_i\|_p \leq q_0 \|r_{i-1}\|_p$, что возможно при достаточно большом k_i . Положим $r_i = r_{i-1} - p_i$. Обозначим $s_n = \sum_{i=1}^n p_i$. Имеем:

$$f = r_0 = p_1 + r_1 = p_1 + p_2 + r_2 = \dots = p_1 + \dots + p_n + r_n.$$

По построению $\|r_i\|_p \leq q_0 \|r_{i-1}\|_p$, откуда $\|r_n\|_p \leq q_0^n \|f\|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^{k_i}-1} \lambda_{k_i,j} m_{k_i,j} \varphi_{k_i,j}.$$

При этом

$$\left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} |\lambda_{k_i,j} m_{k_i,j}|^p \right)^{1/p} \leq C_0 \|r_{i-1}\|_p \leq C_0 q_0^{i-1} \|f\|_p,$$

так что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} |\lambda_{k_i,j} m_{k_i,j}|^p \right)^{1/p} \leq \frac{C_0}{1-q_0} \|f\|_p < \infty.$$

После доопределения $m_{k,j} = 0$ при $k \neq k_i$ видим, что для последовательности целых чисел $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} = \{m_{k,j}\}_{k=0, j=0}^{\infty, 2^k-1} \subset \mathbb{Z}$ имеет место принадлежность $\{\lambda_n m_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{1,p}$ и справедливо представление

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} \lambda_{k,j} m_{k,j} \varphi_{k,j} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n m_n \varphi_n,$$

причем последний ряд также сходится (надо учесть, что функции внутри каждой пачки аффинной системы имеют непересекающиеся носители). \square

Теорема 2 показывает, что всякий аффинный фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является квантовым фреймом, а также дает достаточное условие принадлежности последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ его спектру. Нам неизвестно, является ли условие

$$\inf_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} \lambda_{k,j}^p \right)^{1/p} = 0$$



необходимым и можно ли вместо включения в утверждении теоремы 2 поставить знак равенства. Однако вообще отказаться от этого условия нельзя. Действительно, пусть $\lambda_{k,j} = \lambda$ для всех k и j . Тогда для порождающей аффинный фрейм функции $\varphi = \chi_{[0,1]}$ все частные суммы ряда

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} m_n \varphi_n$$

представляют собой ступенчатые функции, принимающие значения целых кратных чисел λ , которые не могут приблизить функцию $f(x) = \lambda/2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых (проект МД-1354.2013.1) и РФФИ (проект 10-01-00097).

Библиографический список

1. Casazza P. G., Dilworth S. J., Odell E., Schlumprecht Th., Zsak A. Coefficient quantization for frames in Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 348. P. 66–86.
2. Терехин П. А. Фреймы в банаховом пространстве // Функци. анализ и его прил. 2010. Т. 44, вып. 3. С. 50–62. [Terekhin P. A. Frames in Banach spaces // Funct. Anal. Appl. 2010. Vol. 44, № 3. P. 199–208.]
3. Терехин П. А. Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Математи- ка. 1999. № 8. С. 74–81. [Terekhin P. A. Inequalities for the components of summable functions and their representations by elements of a system of contractions and shifts // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 1999. Vol. 43, № 8. P. 70–77.]
4. Терехин П. А. Аффинные системы функций и фреймы в банаховом пространстве : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Саратов, 2010. 230 с. [Terekhin P. A. Affine systems of functions and frames in Banach space : Dissertation. Saratov, 2010. 230 p.]

УДК 517.518

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Р. Н. Фадеев

Саратовский государственный университет
E-mail: belal_templier@mail.ru

Доказаны две теоремы о равномерной сходимости и ограниченности частных сумм рядов по мультипликативным системам с обобщенно-монотонными коэффициентами.

Ключевые слова: мультипликативная система, равномерная сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

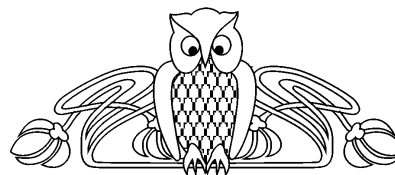
Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел таких, что $2 \leq p_n \leq N$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad x_n \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq x_n < p_n. \quad (1)$$

Разложение (1) будет единственным, если для $x = k/m_n$ брать разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq k_i < p_i. \quad (2)$$

Для $x \in [0, 1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (2) по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / m_j\right)$. Известно, что система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированна и полна в $L^1[0, 1)$. Кроме того, при $k < m_n$ функция



Uniform Convergence of the Series with Respect to Multiplicative Systems

R. N. Fadeev

Two theorems on uniform convergence and boundedness of partial sums for the series with generalized monotone coefficients with respect to multiplicative systems are proved.

Key words: multiplicative system, uniform convergence.



$\chi_k(x)$ постоянна на всех промежутках $[(i-1)/m_n, i/m_n)$, $1 \leq i \leq m_n$. Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, § 1.5]. Далее большую роль будет играть ядро Дирихле $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$. Мы будем изучать равномерную сходимость и обобщенную абсолютную сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x). \tag{3}$$

Следуя С. Ю. Тихонову [2], введем некоторые классы последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Последовательность $\{q_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ называется лакунарной, если $q_{k+1}/q_k \geq \lambda > 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть последовательность $1 = n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ представима в виде конечного числа лакунарных последовательностей, $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит классу $GM(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}, \{n_k\}_{k=1}^{\infty})$ если для любого $j \in \mathbb{N}$ и $m \in [n_j, n_{j+1})$ верно неравенство

$$|a_m| + \sum_{k=m}^{n_{j+1}-1} |a_k - a_{k+1}| \leq C\beta_m. \tag{4}$$

Объединение классов $GM(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}, \{n_k\}_{k=1}^{\infty})$ по всевозможным $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим через $GM(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty})$. В качестве примера отметим, что последовательности класса $RBVS$ (см. [3]) принадлежат классу $GM(\{a_k\}_{k=1}^{\infty})$. Если неравенство (4) заменить на $|a_m| + \sum_{k=n_j+1}^m |a_k - a_{k-1}| \leq C\beta_m$, $j \in \mathbb{N}$, $m \in (n_j, n_{j+1}]$, то аналогично определяются классы $GM^*(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}, \{n_k\}_{k=1}^{\infty})$ и $GM^*(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty})$.

Целью нашей работы является получение достаточных условий равномерной сходимости и равномерной ограниченности частных сумм рядов (3) с коэффициентами классов $GM(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty})$ и $GM^*(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty})$. Для класса $GM(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty})$ аналогичные результаты в тригонометрическом случае получены в [2].

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1 (см. [4, гл. 4, § 3]). Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда при $x \in [0, 1)$ верно неравенство $|D_n(x)| \leq \min(n, N/x)$.

Лемма 2. Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - a_{i+1}| < \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, тогда ряд (3) сходится на $(0, 1)$.

Доказательство. В случае $a_n \downarrow 0$ утверждение леммы установлено в [4, гл. 4, теорема 4.14]. В общем случае $a_n = b_n - c_n$, где $b_n \downarrow 0$ и $c_n \downarrow 0$ (см. [5, гл. X, § 1]).

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда $|D_n(x) - n| \leq 8N(n-1)^2x$.

Доказательство. Пусть $m_{j-1} \leq n < m_j$, $j \in \mathbb{N}$, тогда функция $D_n(x)$ постоянна на $[0, 1/m_j)$ и равна n , т.е. $|D_n(x) - n| = 0$ на $[0, 1/m_j)$. Для $x \in [1/m_j, 1)$ получаем $|D_n(x) - n| \leq 2n \leq 2nm_jx \leq 8N(n-1)^2x$.

Лемма 4 ([5, вводный материал, § 4]). Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ является объединением конечного числа лакунарных последовательностей, тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $\sum_{i=1}^m n_i \leq Cn_m$, $\sum_{i=m}^{\infty} 1/n_i \leq C/n_m$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in GM(\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty})$. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} k\beta_k = 0$ и ряд (3) сходится в точке $x = 0$, то он сходится равномерно на $[0, 1)$.

Доказательство. Пусть $b_k = \sup_{j \geq k} j\beta_j$, тогда $k\beta_k \leq b_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, b_k убывает и $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$.

Аналогично по $A_k = \sum_{j=k}^{\infty} a_j$ построим $d_k = \sup_{j \geq k} |A_k|$ такую, что $d_k \downarrow 0$ и $|A_k| \leq d_k$. Из неравенства (4) и леммы 4 получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} |a_k - a_{k+1}| \leq C_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_{n_j} n_j}{n_j} \leq C b_1 \sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j < \infty.$$



Применяя лемму 2, находим что ряд (3) сходится на $[0, 1)$. Определим $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(x)$ и $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x)$.

Применяя преобразование Абеля, получим:

$$f(x) - S_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \chi_k(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x) - a_n D_n(x) := I_1(x) + I_2(x),$$

где

$$|I_2| = |a_n D_n(x)| \leq n |a_n| \leq C_2 n \beta_n \leq C_2 b_n. \quad (5)$$

Из (5) следует равномерная сходимость I_2 к 0. Будем оценивать I_1 на $[1/(l+1), 1/l]$, $l \in \mathbb{N}$. Пусть $q \in \mathbb{N}$ таково, что $n_{q-1} < n \leq n_q$ (считаем $n_0 = 0$). Пусть сначала $l \leq n$, тогда в силу лемм 1 и 4 имеем:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq N x^{-1} \left(\sum_{k=q}^{\infty} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} |a_k - a_{k+1}| + \sum_{j=n}^{n_q-1} |a_k - a_{k+1}| \right) \leq \\ &\leq C_3 x^{-1} \left(\sum_{k=q}^{\infty} \frac{\beta_{n_k} n_k}{n_k} + \frac{\beta_n n}{n} \right) \leq C_3 (n+1) \left(b_{n_q} \sum_{k=q}^{\infty} \frac{1}{n_k} + \frac{b_n}{n} \right) \leq C_4 b_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $l > n$. Запишем I_1 как $\sum_{k=n}^{l-1} + \sum_{k=l}^{\infty} =: I_3 + I_4$. Аналогично неравенству (6) получаем, что $|I_4| \leq C_4 b_l \leq C_4 b_n$. Имеем:

$$I_3 = \sum_{k=n}^{l-1} (k+1) (a_k - a_{k+1}) + \sum_{k=n}^{l-1} (a_k - a_{k+1}) (D_{k+1}(x) - (k+1)) =: I_5 + I_6.$$

Тогда

$$|I_5| = \left| \sum_{k=n}^{l-1} a_k + (n+1)a_n - la_l \right| \leq |A_n - A_l| + C_3 n \beta_n + C_3 l \beta_l \leq 2d_n + 2C_3 b_n. \quad (7)$$

Докажем вспомогательное неравенство. Пусть $n_k \leq r \leq s \leq n_{k+1} - 1$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=r}^s j^2 |a_j - a_{j+1}| &\leq 2 \sum_{j=r}^s |a_j - a_{j+1}| \left(\sum_{m=r}^j m + r^2 \right) = 2 \sum_{m=r}^s m \sum_{j=m}^s |a_j - a_{j+1}| + \\ &+ 2r^2 \sum_{j=r}^s |a_j - a_{j+1}| \leq C_3 \left(\sum_{m=r}^s m \beta_m + r^2 \beta_r \right) \leq C_3 b_s (s+1). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $n_{t-1} < l \leq n_t$, $t \in \mathbb{N}$. Так как $l \geq n$, то $t \geq q$. Если $t = q$, то в силу леммы 3 и (8) получаем

$$|I_6| \leq 8N x \sum_{k=n}^l k^2 |a_k - a_{k+1}| \leq C_5 x b_l (l+1) \leq 2C_5 b_n.$$

При $q < t$ разобьем I_6 на три слагаемых: $I_7 = \sum_{k=n}^{n_q-1}$, $I_8 = \sum_{k=n_{t-1}}^l$ и $I_9 = \sum_{j=q}^{t-2} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}$ (см. (7)).

Аналогично неравенству (8) находим, что

$$|I_7| + |I_8| \leq C_6 x (b_n n_q + b_{n_{t-1}} (l+1)) \leq C_6 l^{-1} b_n (2l+2) \leq 4C_6 b_n.$$

Используя (8) и леммы 3, 4, получаем:

$$I_9 \leq C_3 x \sum_{j=q}^{t-2} b_{n_j} (n_j + n_{j+1}) \leq 2C_3 x b_{n_q} \sum_{j=1}^{t-1} n_j \leq C_7 x b_{n_q} n_{t-1} \leq C_7 b_n.$$



Объединяя полученные оценки, получаем $|f(x) - S_n(x)| \leq C_8(b_n + d_n)$, откуда следует утверждение теоремы 1. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in GM(\{\beta_k\}_{k=1}^\infty)$, последовательности $\{k\beta_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$, где $\alpha_k = \sum_{n=1}^k a_n$, $k \in \mathbb{N}$, ограничены, то последовательность частичных сумм ряда (3) равномерно ограничена.

Доказательство. Из (5) сразу получаем $|a_n D_n(x)| \leq C_1 b_n \leq C_2$, поэтому для доказательства утверждения теоремы необходимо показать ограниченность $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x)$. Пусть $x \in [1/(l+1), 1/l]$, $n_{q-1} < n \leq n_q$, $n_{t-1} < l \leq n_t$. Имеем:

$$\left| \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n (k+1) (a_k - a_{k+1}) \right| + C_3 x \sum_{k=1}^n k^2 |a_k - a_{k+1}| =: J_1 + J_2.$$

В силу (7) и ограниченности $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ получаем ограниченность J_1 . Пусть $l \geq n$, тогда в силу (8) и леммы 4 имеем:

$$\begin{aligned} J_2 &= C_3 x \left(\sum_{k=1}^{q-2} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} j^2 |a_j - a_{j+1}| + \sum_{k=n_{q-1}}^n k^2 |a_j - a_{j+1}| \right) \leq \\ &\leq C_4 x \left(\sum_{k=1}^{q-2} n_{k+1} b_{n_k} + (n+1) b_{n_{q-1}} \right) \leq C_5 x b_1 (n_{q-1} + n + 1) \leq C_5 2nl^{-1} b_1 \leq 2C_5 b_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть $l < n$, тогда запишем:

$$\left| \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^l (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x) \right| + \left| \sum_{k=l+1}^n (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x) \right| := J_3 + J_4.$$

Аналогично (9) получаем ограниченность J_3 . По леммам 1, 4 получаем:

$$\begin{aligned} J_4 &\leq N x^{-1} \sum_{k=l+1}^n |a_k - a_{k+1}| \leq N x^{-1} \left(\sum_{k=t}^q \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} |a_k - a_{k+1}| + \sum_{j=l+1}^{n_t-1} |a_k - a_{k+1}| \right) \leq \\ &\leq C_6 x^{-1} \left(\sum_{k=t}^q \frac{\beta_{n_k} n_k}{n_k} + \frac{\beta_{l+1} (l+1)}{l+1} \right) \leq C_7 (xl)^{-1} \leq 2C_7. \end{aligned}$$

Объединяя найденные оценки, получаем утверждение теоремы 2. Теорема доказана.

Аналогично теоремам 1 и 2 доказываются

Теорема 1'. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in GM^*(\{\beta_k\}_{k=1}^\infty)$. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} k\beta_k = 0$ и ряд (3) сходится в точке $x = 0$, то он сходится равномерно на $[0, 1)$.

Теорема 2'. Если $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in GM^*(\{\beta_k\}_{k=1}^\infty)$, последовательности $\{k\beta_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$, где $\alpha_k = \sum_{n=1}^k a_n$, $k \in \mathbb{N}$, ограничены, то последовательность частичных сумм ряда (3) равномерно ограничена.

Теорема 3. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in GM(\{\beta_k\}_{k=1}^\infty, \{n_k\}_{k=1}^\infty)$, последовательности $\{k\beta_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ ограничены, ряд $\sum_{j=1}^\infty \ln n_j / n_j$ сходится, тогда ряд

$$\sum_{j=1}^\infty \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \chi_k(x) \right| \quad (10)$$

сходится на $(0, 1)$ и его сумма принадлежит $L^1[0, 1)$.

Доказательство. В силу преобразования Абеля, леммы 1 и (4) имеем:

$$\left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \chi_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k - a_{k+1}) D_{k+1}(x) + a_{n_{j+1}} D_{n_{j+1}}(x) - a_{n_j} D_{n_j+1}(x) \right| \leq$$



$$\leq Nx^{-1} \left(|a_{n_{j+1}}| + |a_{n_j+1}| + \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} |a_k - a_{k+1}| \right) \leq \frac{C_1}{x} (\beta_{n_j} + \beta_{n_{j+1}}) \leq \frac{C_2}{xn_j}. \quad (11)$$

Поскольку по лемме 4 ряд $\sum_{j=1}^{\infty} 1/n_j$ сходится, то из (11) следует сходимость ряда (10) при $x \in (0, 1)$.

Далее,

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \chi_k(x) \right| dx = \int_0^{1/n_j} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \chi_k(x) \right| dx + \int_{1/n_j}^1 \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \chi_k(x) \right| dx =: I_{1j} + I_{2j}.$$

Согласно (11) находим, что

$$|I_{2j}| \leq C_2 n_j^{-1} \int_{1/n_j}^1 x^{-1} dx \leq C_2 \ln n_j / n_j. \quad (12)$$

С другой стороны, по теореме 2 из ограниченности $\{k\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ вытекает, что частные суммы $\sum_{k=1}^n a_k \chi_k(x)$ равномерно ограничены константой C_3 , поэтому

$$|I_{1j}| \leq \int_0^{1/n_j} C_3 dx \leq C_3 n_j^{-1}. \quad (13)$$

Из оценок (12) и (13) следует

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \chi_k(x) \right| dx \leq \sum_{j=1}^{\infty} (I_{1j} + I_{2j}) \leq C_4 \sum_{j=1}^{\infty} (\ln n_j + 1) / n_j < \infty.$$

Теорема 3 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. Голубов Б. И. Ефимов А. В. Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987. 344 с. [Golubov B., Efimov A., Skvortsov V. Walsh series and transforms. Dordrecht; Boston; London : Kluwer Academic Publishers, 1991.]
2. Тихонов С. Ю. О равномерной сходимости тригонометрического ряда // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 2. С. 304–310. [Tikhonov S. Yu. On the uniform convergence of trigonometric series // Math. Notes. 2007. Vol. 81, № 2. P. 268–274.]
3. Leindler L. On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Analysis Math. 2001. Vol. 1, № 4. P. 279–285.
4. Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с. [Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I. Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups. Baku : Elm Publisher, 1981. 180 p.]
5. Барн Н. К. Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с. [Bari N. K. Trigonometric Series. Moscow : Fizmatgiz, 1961. 936 p.]

УДК 517.984

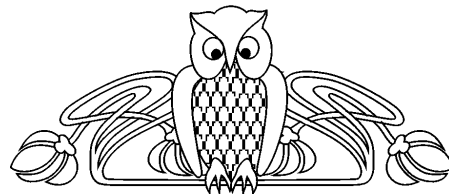
ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С НЕГЛАДКОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ

В. А. Халова, А. П. Хромов

Саратовский государственный университет
E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Для интегрального оператора с негладкой инволюцией установлена равномерность разложений по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Ключевые слова: интегральный оператор, инволюция, резольвента.



Integral Operators with Non-smooth Involution

V. A. Khalova, A. P. Khromov

The equiconvergence of expansions in eigen- and associated functions of integral operators with non-smooth involution and trigonometric Fourier series are established.

Key words: integrals operator, involution, resolvent.



Пусть A — оператор вида

$$Af = \int_0^{\vartheta(x)} A(\vartheta(x), t) f(t) dt, \quad (1)$$

где ядро $A(x, t)$ непрерывно по x и t вместе с производными $A_x, A_t, A_{xt}, A_{x^2t}, A_{xt^2}$ ($A_{x^s t^j} = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x, t)$) при $0 \leq t \leq x$ и $A(x, x) \equiv 1$,

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}x + 1, & x \in [0, \gamma], \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}(x-1), & x \in [\gamma, 1], \end{cases} \quad \gamma < 1/2.$$

Функция $\vartheta(x)$ непрерывна, монотонно убывает, $\vartheta(0) = 1, \vartheta(1) = 0, \vartheta^2(x) = \vartheta(\vartheta(x)) \equiv x$. Таким образом, $\vartheta(x)$ — инволюция, производная которой имеет разрыв в точке $x = \gamma$.

В статье [1] изучен оператор вида (1) в том случае, когда инволюция $\vartheta(x)$ есть произвольная трижды непрерывно дифференцируемая на $[0, 1]$ функция и $\vartheta'(x) < 0$. Для этого оператора установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$. В настоящей статье рассмотрен случай, когда $\vartheta'(x)$ разрывна при $x = \gamma$, что создает дополнительные трудности в получении теоремы равносходимости. Оказывается, в этом случае равносходимость будет иметь место лишь при $[\varepsilon, \gamma - \varepsilon]$ и $[\gamma + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

Введем непрерывную, монотонно возрастающую на отрезке $[0, 1]$ функцию:

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 2\gamma\tau, & \tau \leq 1/2, \\ 2(1-\gamma)\tau + 2\gamma - 1, & \tau \geq 1/2. \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда

$$\varphi^{-1}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\xi, & \xi \in [0, \gamma], \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\xi + 1 - 2\gamma], & \xi \in [\gamma, 1]. \end{cases} \quad (3)$$

Лемма 1. *Имеет место формула $\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(\tau))) = 1 - \tau$.*

Доказательство. В силу (2) имеем:

$$\begin{aligned} \vartheta(\varphi(\tau)) &= \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}\varphi(\tau) + 1, & \varphi(\tau) \in [0, \gamma], \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}(\varphi(\tau) - 1), & \varphi(\tau) \in [\gamma, 1] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}2\gamma\tau + 1, & \tau \leq 1/2, \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}[2(1-\gamma)\tau + 2\gamma - 1 - 1], & \tau \geq 1/2 \end{cases} = \begin{cases} 2(\gamma-1)\tau + 1, & \tau \leq 1/2, \\ 2\gamma(1-\tau), & \tau \geq 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая (3), получаем:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(\tau))) &= \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\vartheta(\varphi(\tau)), & \vartheta(\varphi(\tau)) \in [0, \gamma], \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\vartheta(\varphi(\tau)) + 1 - 2\gamma], & \vartheta(\varphi(\tau)) \in [\gamma, 1] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\vartheta(\varphi(\tau)), & \tau \geq 1/2, \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\vartheta(\varphi(\tau)) + 1 - 2\gamma], & \tau \leq 1/2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}[-2\gamma\tau + 2\gamma], & \tau \geq 1/2, \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[2(\gamma-1)\tau + 1 + 1 - 2\gamma], & \tau \leq 1/2 \end{cases} = 1 - \tau. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Положим $Tf = f(\varphi(x))$. Тогда $T^{-1}f = f(\varphi^{-1}(x))$.

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$A_1 f = T A T^{-1} f = \int_0^{1-x} A_1(1-x, t) f(t) dt,$$

где $A_1(x, t) = A(\varphi(x), \varphi(t))\varphi'(t)$.



Доказательство. Имеем

$$AT^{-1}f = \int_0^{\vartheta(x)} A(\vartheta(x), t)f(\varphi^{-1}(t)) dt. \quad (4)$$

Выполним в интеграле (4) замену переменных $\tau = \varphi^{-1}(t)$:

$$AT^{-1}f = \int_0^{\varphi^{-1}(\vartheta(x))} A(\vartheta(x), \varphi(\tau))\varphi'(\tau)f(\tau) d\tau.$$

Отсюда, учитывая лемму 1, получаем:

$$\begin{aligned} TAT^{-1}f &= \int_0^{\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(x)))} A(\vartheta(\varphi(x)), \varphi(\tau))\varphi'(\tau)f(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{1-x} A(\varphi(\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(x))))\varphi'(\tau)f(\tau) d\tau = \int_0^{1-x} A_1(1-x, t)f(t) dt. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. Если $y = R_{1,\lambda}f$, где $R_{1,\lambda} = (E - \lambda A_1)^{-1}A_1$, то

$$-(E + N) \left(\frac{1}{\varphi'(x)} y'(1-x) \right) - \lambda y(x) = f(x), \quad (5)$$

$$y(1) = 0, \quad (6)$$

где $(E + N) = (E + N_1)^{-1}$, $N_1 f = \int_0^x N_1(x, t)f(t) dt$ и $N_1(x, t) = \frac{1}{\varphi'(x)} A'_{1x}(x, t)$.

Доказательство. Пусть $y = R_{1,\lambda}f$. Тогда

$$y(x) - \lambda \int_0^{1-x} A_1(1-x, t)y(t) dt = \int_0^{1-x} A_1(1-x, t)f(t) dt. \quad (7)$$

Отсюда справедливость (6) очевидна. Далее, выполнив в (7) замену x на $1-x$ и продифференцировав полученное выражение по x , получим:

$$-y'(1-x) - \lambda \left[\varphi'(x)y(x) + \int_0^x A'_{1,x}(x, t)y(t) dt \right] = \varphi'(x)f(x) + \int_0^x A'_{1,x}(x, t)f(t) dt. \quad (8)$$

Разделив (8) почленно на $\varphi'(x)$ и применив оператор $(E + N)$, приходим к утверждению леммы. □

Действуя так же, как и в работе [2], получаем следующую теорему.

Теорема 1. Для любой $f(x) \in L[0, 1]$ имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [R_{1,\lambda} - R_{2,\lambda}]f d\lambda \right\|_{\infty} = 0,$$

где $R_{2,\lambda} = (E - \lambda A_2)^{-1}A_2$ и $A_2 f = \int_0^{1-x} \varphi'(t)f(t) dt$, $\|\cdot\|$ — норма в $L_{\infty}[0, 1]$.

Лемма 4. Если $y = R_{2,\lambda}f$, то $-\frac{1}{\varphi'(x)}y'(1-x) - \lambda y(x) = f(x)$, $y(1) = 0$.

Эта лемма очевидна.

Пусть $y = R_{2,\lambda}f$. Положим $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y(1/2 - x)$, $y_3(x) = y(1/2 + x)$, $y_4(x) = y(1 - x)$ при $x \leq 1/2$. Так как в силу (2) $\varphi'(x) = \begin{cases} a, & x \leq 1/2 \\ b, & x \geq 1/2 \end{cases}$, где $a = 2\gamma$, $b = 2(1 - \gamma)$, и $b > a > 0$, то вектор

$(y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x))^T$ (T — знак транспонирования) удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$y'_4(x) - \lambda a y_1(x) = a f_1(x), \quad -y'_1(x) - \lambda b y_4(x) = b f_4(x), \quad (9)$$



$$-y_3'(x) - \lambda a y_2(x) = a f_2(x), \quad y_2'(x) - \lambda b y_3(x) = b f_3(x), \quad (10)$$

$$y_3(1/2) = y_4(0) = 0, \quad (11)$$

$$y_1(1/2) = y_3(0), \quad y_2(0) = y_4(1/2), \quad (12)$$

Условия (12) являются условиями непрерывности $y(x)$ в точке $1/2$.

Обозначим $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/a \\ -1/b & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{b}{a}} i \\ \sqrt{\frac{a}{b}} i & 1 \end{pmatrix}$. Матрица Γ диагонализует матрицу B , т. е. $\Gamma^{-1} B \Gamma = D = \begin{pmatrix} \omega i & 0 \\ 0 & -\omega i \end{pmatrix}$, где $\omega = 1/\sqrt{ab}$.

Если в системе (9), представленной в виде $B(y_1', y_4')^T - \lambda(y_1, y_4)^T = (f_1, f_4)^T$, выполнить замену $(y_1, y_4)^T = \Gamma(z_1, z_4)^T$, то получим систему:

$$D(z_1', z_4')^T - \lambda(z_1, z_4)^T = \Gamma^{-1}(f_1, f_4)^T = (\Phi_1, \Phi_4)^T, \quad (13)$$

или

$$z_1' + \mu z_1 = \tilde{\Phi}_1, \quad z_4' - \mu z_4 = \tilde{\Phi}_4, \quad (14)$$

где $\mu = \lambda i/\omega$, $\tilde{\Phi}_1 = -\Phi_1 i/\omega$, $\tilde{\Phi}_4 = \Phi_4 i/\omega$. В дальнейшем будем считать, что $\text{Re } \mu \geq 0$.

Аналогично систему (10) можно записать в виде $-B(y_2', y_3')^T - \lambda(y_2, y_3)^T = (f_2, f_3)^T$. Выполнив замену $(y_2, y_3)^T = \Gamma(z_2, z_3)^T$, получим

$$z_2' - \mu z_2 = \tilde{\Phi}_2, \quad z_3' + \mu z_3 = \tilde{\Phi}_3, \quad (15)$$

где $\tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 i/\omega$, $\tilde{\Phi}_3 = -\Phi_3 i/\omega$.

Лемма 5. *Общее решение системы (14), (15) можно представить в виде*

$$z(x) = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T = g_\mu \tilde{\Phi} + V(x, \mu)c, \quad (16)$$

где $g_\mu \tilde{\Phi} = \int_0^{1/2} g(x, t, \mu) \tilde{\Phi}(t) dt$, $g(x, t, \mu) = \text{diag}(g_1(x, t, \mu), g_2(x, t, \mu), g_3(x, t, \mu), g_4(x, t, \mu))$, $g_1(x, t, \mu) = g_3(x, t, \mu) = \varepsilon(x, t)e^{-\mu(x-t)}$, $g_2(x, t, \mu) = g_4(x, t, \mu) = -\varepsilon(t, x)e^{\mu(x-t)}$, $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_4)^T$, $V(x, \mu) = \text{diag}(e^{-\mu x}, e^{\mu x}, e^{-\mu x}, e^{\mu x})$, $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$ — постоянный вектор.

Краевые условия (11), (12) принимают вид

$$U(z) = M_0 \tilde{\Gamma} z(0) + M_1 \tilde{\Gamma} z(1/2) = \tilde{M}_0 z(0) + \tilde{M}_1 z(1/2) = 0, \quad (17)$$

где

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{b}{a}} i \\ 0 & 1 & \sqrt{\frac{b}{a}} i & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{a}{b}} i & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{a}{b}} i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\det \Delta(\mu) = U(V(x, \mu))$. Определитель $\det \Delta(\mu)$ представляет собой экспоненциальный по μ многочлен с постоянными коэффициентами. При этом коэффициенты при экспонентах с максимальными и минимальными вещественными частями показателей отличны от нуля. В этом случае говорят, что краевые условия (17) регулярен по Биркоффу. Поэтому так же, как, например, в [2] получаем

Лемма 8. *Если $z(x, \mu) = R_{3,\mu} \tilde{\Phi}$ является решением системы (14), (15) с краевыми условиями (17) и $\det \Delta(\mu) \neq 0$, то*

$$R_{3,\mu} \tilde{\Phi} = g_\mu \tilde{\Phi} - V(x, \mu) \Delta^{-1}(\mu) U(g_\mu \tilde{\Phi}).$$

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$z_1' + \mu z_1 = \tilde{\Phi}_1, \quad z_2' - \mu z_2 = \tilde{\Phi}_2, \quad z_3' + \mu z_3 = \tilde{\Phi}_3, \quad z_4' - \mu z_4 = \tilde{\Phi}_4, \quad (18)$$



$$U_0(z) = z(0) - z(1/2) = 0. \tag{19}$$

Краевые условия (19) регулярны по Биркоффу. Аналогично лемме 8 имеем:

Лемма 9. Если $z(x, \mu) = R_{3,\mu}^0 \tilde{\Phi}$ есть решение системы (18), с условиями (19) и $\det \Delta_0(\mu) \neq 0$, то

$$R_{3,\mu}^0 \tilde{\Phi} = g_\mu \tilde{\Phi} - V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu \tilde{\Phi}),$$

где $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x, \mu))$.

Теорема 2. Для любой $f(x) \in L[0, 1]$ имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\mu|=r} [R_{3,\mu} \tilde{\Phi} - R_{3,\mu}^0 \tilde{\Phi}] d\mu \right\|_{C[\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где $\|\cdot\|_{C[\varepsilon, 1/2-\varepsilon]}$ — сумма норм компонент в пространстве $C[\varepsilon, 1/2 - \varepsilon]$.

Теорема 3. Для любой $f(x) \in L[0, 1]$ справедливо соотношение

$$S_{1,r}(f, x) = \begin{cases} \sigma_{r/|\omega|}(f_1, x) + o(1), & x \in [\varepsilon, 1/2 - \varepsilon], \\ \sigma_{r/|\omega|}(f_3, x - 1/2) + o(1), & x \in [1/2 + \varepsilon, 1 - \varepsilon], \end{cases}$$

где $S_{1,r}(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A_1 для тех λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x) \in L[0, 1/2]$ по собственным функциям оператора y' , $y(0) = y(1/2)$ (т.е. ряда Фурье по тригонометрической системе $\{e^{4k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{\infty}$), рассматриваемые на отрезке $[0, 1/2]$ и суммирование распространяется по тем k , для которых $|4k\pi| < r$, $o(1) \rightarrow 0$ равномерно по x на $[\varepsilon, 1/2 - \varepsilon] \cup [\varepsilon + 1/2, 1 - \varepsilon]$ и $0 < \varepsilon < 1/2$.

Доказательство. По лемме 4

$$R_{2,\lambda} f = \begin{cases} y_1(x), & x \in [0, 1/2], \\ y_3(x - 1/2), & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Но $y_1(x) = (\tilde{\Gamma}z(x))_1$, $y_3(x - 1/2) = (\tilde{\Gamma}z(x - 1/2))_3$. Следовательно,

$$y_1(x) = z_1(x) + \sqrt{\frac{b}{a}} iz_4(x), \quad y_3(x - 1/2) = \sqrt{\frac{a}{b}} iz_2(x - 1/2) + z_3(x - 1/2).$$

Пусть $z^0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0)^T$ — решение системы (18), (19). Тогда

$$z_1^0 = R_{-\mu}^0 \tilde{\Phi}_1, \quad z_2^0 = R_{\mu}^0 \tilde{\Phi}_2, \quad z_3^0 = R_{-\mu}^0 \tilde{\Phi}_3, \quad z_4^0 = R_{\mu}^0 \tilde{\Phi}_4,$$

где R_{λ}^0 — резольвента оператора y' , $y(0) = y(1/2)$. Так как $\sigma_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{\lambda}^0 f d\lambda$, то имеем:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r} z_j^0 d\mu = -\sigma_r(\tilde{\Phi}_j, x), \quad j = 1, 3, \quad -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r} z_j^0 d\mu = \sigma_r(\tilde{\Phi}_j, x), \quad j = 2, 4.$$

Поэтому по теореме 2 при $x \in [\varepsilon, 1/2 - \varepsilon]$ получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{2,\lambda} f d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} y_1(x) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} [z_1(x) + \sqrt{\frac{b}{a}} iz_4(x)] d\lambda = \\ & = -\frac{1-i\omega}{2\pi i} \int_{|\mu|=r/|\omega|} [z_1^0(x) + \sqrt{\frac{b}{a}} iz_4^0(x)] d\mu + o(1) = -i\omega \left[-\sigma_{r/|\omega|}(\tilde{\Phi}_1, x) + \sqrt{\frac{b}{a}} i\sigma_{r/|\omega|}(\tilde{\Phi}_4, x) \right] + o(1) = \\ & = -i\omega \left[\frac{i}{\omega} \sigma_{r/|\omega|}(\tilde{\Phi}_1, x) - \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{1}{\omega} \sigma_{r/|\omega|}(\tilde{\Phi}_4, x) \right] + o(1) = -i \left[i\sigma_{r/|\omega|} \left(\frac{1}{2} \left[f_1 - \sqrt{\frac{b}{a}} i f_4 \right], x \right) - \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{\frac{b}{a}} \sigma_{r/|\omega|} \left(\frac{1}{2} \left[-\sqrt{\frac{a}{b}} i f_1 + f_4 \right], x \right) \right] + o(1) = \sigma_{r/|\omega|}(f_1, x) + o(1). \end{aligned}$$



Аналогично при $x \in [\varepsilon + 1/2, 1 - \varepsilon]$ имеем $-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{2,\lambda} f d\lambda = \sigma_{r/|\omega|}(f_3, x - 1/2) + o(1)$. □

Так как $S_{1,r}(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{1,\lambda} f d\lambda$ и $R_\lambda = T^{-1}R_{1,\lambda}T$, то в силу теорем 1 и 3 справедлива

Теорема 4. Для любой $f(x) \in L[0, 1]$ имеют место соотношения

$$S_r(f, x) = \begin{cases} \sigma_{r/|\omega|} \left(g_1, \frac{x}{2\gamma} \right) + o(1), & x \in [\varepsilon, \gamma - \varepsilon], \\ \sigma_{r/|\omega|} \left(g_2, \frac{1}{2(1-\gamma)}(x + 1 - 2\gamma) \right) + o(1), & x \in [\gamma + \varepsilon, 1 - \varepsilon], \end{cases}$$

где $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$; $g_1(x) = f(2\gamma x)$, $g_2(x) = f(2(1-\gamma)x + \gamma)$, $o(1) \rightarrow 0$ равномерно по x при $[\varepsilon, \gamma - \varepsilon]$, $[\gamma + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00270).

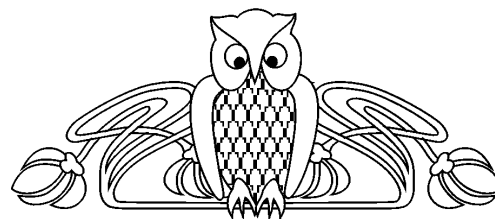
Библиографический список

1. Хромов А. П., Кувардина Л. П. О равномерности разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией // Изв. вузов. Математика. 2008. № 5. С. 67–76. [Kivardina L. P., Khromov A. P. The equiconvergence of expansions in eigenfunctions and associated functions of an integral operator with involution // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 2008. Vol. 52, № 5. P. 58–66.]
 2. Хромов А. П. О равномерности разложений по

собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции : Информ. бюл. 2006. Т. 6, № 1. С. 46–55. [Khromov A. P. The equiconvergence of expansions in eigenfunctions and associated functions of an integral operators with variable limits of integration (in Russian) // Integral Transforms and Special Functions. Inform. Byulleten. 2006. Vol. 6, № 1. P. 46–55.]

УДК 517.587

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В $L_{2\pi}^{p(x)}$ СРЕДНИМИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА



И. И. Шарапудинов

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала
 E-mail: sharapud@mail.ru

Рассматривается пространство Лебега $L_{2\pi}^{p(x)}$ с переменным показателем $p(x)$, состоящее из измеримых функций $f(x)$, для которых существует интеграл $\int_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)} dx$. Для

$f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ средние Валле–Пуссена $V_m^n(f, x)$ определим так $V_m^n(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m S_{n+l}(f, x)$, где $S_k(f, x)$ — частичная сумма Фурье функции $f(x)$ порядка k . Исследованы аппроксимативные свойства операторов $V_m^n(f) = V_m^n(f, x)$ в метрике пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$. В случае, когда 2π -периодический переменный показатель $p(x) \geq 1$ удовлетворяет условию Дини–Липшица, доказано, что при $m = n - 1$ и $m = n$ имеет место оценка $\|f - V_m^n(f)\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c_r(p)}{n^r} E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ где $E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ — наилучшее приближение функции $f^{(r)}(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n в метрике пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$.

Ключевые слова: пространства Лебега и Соболева с переменным показателем, приближение тригонометрическими полиномами, средние Валле–Пуссена.

Approximation of Smooth Functions in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by Vallee–Poussin Means

I. I. Sharapudinov

Variable exponent $p(x)$ Lebesgue spaces $L_{2\pi}^{p(x)}$ is considered. For $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ Vallee–Poussin means $V_m^n(f, x)$ can be defined as $V_m^n(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m S_{n+l}(f, x)$, where $S_k(f, x)$ — partial Fourier sum of $f(x)$ of order k . Approximative properties of operators $V_m^n(f) = V_m^n(f, x)$ are investigated in $L_{2\pi}^{p(x)}$. Let $p(x) \geq 1$ be 2π -periodical variable exponent that satisfies Dini–Lipschitz condition. When $m = n - 1$ and $m = n$ the following estimate is proved: $\|f - V_m^n(f)\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c_r(p)}{n^r} E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$, where $E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ is the best approximation of function $f^{(r)}(x)$ by trigonometric polynomials of order n in $L_{2\pi}^{p(x)}$.

Key words: variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces, approximation by trigonometric polynomials, Vallee–Poussin means.



ВВЕДЕНИЕ

Через $L^{p(x)}(E)$ обозначим пространство измеримых, по Лебегу, функций, определенных на измеримом множестве E и таких, что

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} dx < \infty,$$

где $p(x)$ — измеримая на E функция. Если $p(x) \geq 1$, $x \in E$ и существенно ограничена на E , то $L^{p(x)}(E)$ является [1] нормированным пространством с нормой:

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Теория и приложения пространств $L^{p(x)}(E)$ вызывает в последнее время усиливающийся интерес у специалистов самых различных областей. Не является исключением [2–10] и вопросы теории приближений в пространствах $L^{p(x)}(E)$. Пусть $p = p(x)$ — измеримая 2π -периодическая функция, $p_- = \inf\{p(x) : x \in \mathbb{R}\}$, $p^+ = \sup\{p(x) : x \in \mathbb{R}\}$, $1 \leq p_- \leq p^+ < \infty$, $L_{2\pi}^{p(x)}$ — пространство измеримых 2π -периодических функций, для которых $\int_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$. Полагая

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\},$$

мы превратим $L_{2\pi}^{p(x)}$ в банахово пространство.

Через $\mathcal{P}_{2\pi}$ обозначим множество всех 2π -периодических переменных показателей $p = p(x) \geq 1$, удовлетворяющих на периоде условию

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{2\pi}{|x - y|} \leq d \quad (x, y \in [0, 2\pi]).$$

Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$, $a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt$, $b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$,

$$S_n(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx.$$

Мы определим суммы Валле–Пуссена $V_m^n(f, x)$ с помощью равенства

$$V_m^n(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m S_{n+l}(f, x). \quad (1)$$

Далее, построим классы функций $W_{p(\cdot)}^r(M)$ по типу известных классов Соболева, а именно класс $W_{p(\cdot)}^r(M)$ состоит из r раз непрерывно дифференцируемых 2π -периодических функций $f(x)$, у которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $\|f^{(r)}\|_{p(\cdot)} \leq M$. Через $W_{p(\cdot)}^r$ обозначим объединение всех классов $W_{p(\cdot)}^r(M)$. $W_{p(\cdot)}^r(M)$ и $W_{p(\cdot)}^r = \bigcup_{M>0} W_{p(\cdot)}^r(M)$ принято называть соответственно классами и пространствами Соболева с переменным показателем $p(x)$. Для удобства будем считать, что $W_{p(\cdot)}^0 = L_{2\pi}^{p(x)}$.

Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f \in W_{p(\cdot)}^r$. В настоящей работе при $m = n - 1$ и $m = n$ установлена (теорема 1) следующая оценка: $\|f - V_m^n(f)\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c_r(p)}{n^r} E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ ($r \geq 0$), где $E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ — наилучшее приближение в $L_{2\pi}^{p(x)}$ функции $f^{(r)}(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n , а c_r , $c_r(p)$ здесь и далее — положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров.



1. НЕКОТОРЫЕ ВОСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Нам понадобятся следующие тождества:

$$\frac{1}{2} + \cos v + \dots + \cos nv = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})v}{2 \sin \frac{v}{2}}, \quad (2)$$

$$\cos v + \cos 3v + \dots + \cos(2n - 1)v = \frac{\sin 2nv}{2 \sin v}, \quad (3)$$

$$\sin v + \sin 2v + \dots + \sin nv = \frac{\sin \frac{nv}{2} \sin \frac{(n+1)v}{2}}{\sin \frac{v}{2}}, \quad (4)$$

$$\sin v + \sin 3v + \dots + \sin(2n - 1)v = \frac{\sin^2 nv}{\sin v} \quad (5)$$

и обозначения $g_s(t) = t^{-2s}$, $q_s(t) = t^{-2s+1}$, $\Delta\varphi(t) = \varphi(t+1) - \varphi(t)$, $\Delta^2\varphi(t) = \Delta(\Delta\varphi(t))$,

$$R_{r,n}(u) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(ku + \frac{\pi r}{2})}{k^r}, \quad (6)$$

$$\kappa_{r,m+1}^n(x) = (m+1)^{r-1} \sum_{l=0}^m R_{r,n+l}(x) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Рассмотрим некоторые свойства последовательности функций $\kappa_{r,n}^n(x)$ ($n=1,2,\dots$).

Лемма 1. *Имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned} \kappa_{2s,n}^n(u) = & (-1)^s n^{2s-1} \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(l+1)u}{2} \sin \frac{(k+1)u}{2} \cos(2n+k+l+2)\frac{u}{2}}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} \Delta^2 g_s(n+1+k+l) + \\ & + (-1)^s n^{2s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{nu}{2} \sin \frac{(k+1)u}{2} \cos(3n+k+l)\frac{u}{2}}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} \Delta g_s(2n+k), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{2s-1,n}^n(u) = & (-1)^s n^{2s-2} \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(l+1)u}{2} \sin \frac{(k+1)u}{2} \sin(2n+k+l+2)\frac{u}{2}}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} \Delta^2 q_s(n+1+k+l) + \\ & + (-1)^s n^{2s-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{nu}{2} \sin \frac{(k+1)u}{2} \sin(3n+k+l)\frac{u}{2}}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} \Delta q_s(2n+k). \end{aligned} \quad (9)$$

Доказательство. Из (6) и (7) имеем:

$$\kappa_{r,n}^n(u) = n^{r-1} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((n+1+l+k)u + \frac{\pi r}{2})}{(n+1+l+k)^r}.$$

Отсюда, воспользовавшись преобразованием Абеля, мы можем записать:

$$\kappa_{r,n}^n(u) = n^{r-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \left[\frac{1}{(n+1+k+l)^r} - \frac{1}{(n+2+k+l)^r} \right] v_{k,l}^n(u),$$

где

$$v_{k,l}^n(u) = \sum_{j=0}^k \cos \left((n+1+l+j)u + \frac{\pi r}{2} \right). \quad (10)$$

Рассмотрим два случая в зависимости от четности или нечетности числа r . Если $r = 2s$, то $\cos(\mu u + \frac{\pi r}{2}) = (-1)^s \cos \mu$, стало быть, (10) в силу (2) принимает вид

$$v_{k,l}^n(u) = (-1)^s \sum_{j=0}^k \cos(n+1+l+j)u = \frac{\sin(2(n+1+l+k)+1)\frac{u}{2} - \sin(2(n+l)+1)\frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}}.$$

Подставим это выражение в (10) и применим к внутренней сумме преобразование Абеля. Тогда после несложных элементарных преобразований мы приходим к равенству (8). Совершенно аналогично, пользуясь тождествами (2)–(5), доказывается также равенство (9). Лемма 1 доказана.



Лемма 2. Пусть $0 \leq k \leq l$. Тогда

$$\int_0^\pi \frac{|\sin \frac{k+1}{2} u \sin \frac{l+1}{2} u|}{\sin^2 \frac{u}{2}} du \leq 2(k+1) \left(2 + \ln \frac{l+1}{k+1} \right) + \frac{\pi}{3 - \pi^2/8}.$$

Несложное доказательство этой леммы мы опускаем.

Из лемм 1 и 2 без особого труда можно вывести следующие утверждения.

Лемма 3. Пусть $r \geq 1$. Тогда имеет место оценка

$$\int_{-\pi}^\pi |\kappa_{r,n}^n(u)| du \leq c_r.$$

Лемма 4. Для $r \geq 1$, $n^{-1/2} \leq u \leq 2\pi - n^{-1/2}$ имеет место неравенство $|\kappa_{r,n}^n(u)| \leq c_r$.

Лемма 5. Справедлива оценка

$$\max_u |\kappa_{r,n}^n(u)| \leq c_r n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ниже нам понадобится также один результат, установленный в работе автора [3].

Теорема D. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$ и для каждого вещественного $\lambda \geq 1$ задана измеримая существенно ограниченная 2π -периодическая функция (ядро) $\kappa_\lambda = \kappa_\lambda(t)$. Если имеют место оценки

а) $\int_{-\pi}^\pi |k_\lambda(x)| dx \leq c_1$;

б) $\sup_x |k_\lambda(x)| \leq c_2 \lambda^v$;

в) $|k_\lambda(x)| \leq c_3$ при $\lambda^{-\gamma} \leq |x| \leq \pi$,

где $v, \gamma, c_j > 0$ не зависят от λ , то семейство линейных операторов свертки $\mathcal{K}_\lambda(f) = \mathcal{K}_\lambda(f)(x) = \int_{-\pi}^\pi f(t) \kappa_\lambda(t-x) dt$, действующих в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$, равномерно ограничено в нем, т. е. найдется положительная постоянная $c(p)$, не зависящая от λ , для которой

$$\|\mathcal{K}_\lambda(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Лемма 6. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$,

$$\mathcal{K}_{r,n}(f) = \mathcal{K}_{r,n}(f)(x) = \int_{-\pi}^\pi f(t) \kappa_{r,n}^n(t-x) dt.$$

Тогда при $r \geq 1$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{K}_{r,n}(f)\|_{p(\cdot)} \leq c_r(p) \|f\|_{p(\cdot)}.$$

Доказательство. Из лемм 3–5 следует, что последовательность ядер $\kappa_{r,n}^n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) удовлетворяет условиям а)–в) теоремы D с параметрами $v = 1$, $\gamma = -1/2$. Поэтому утверждение леммы 6 является следствием теоремы D.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В $L_{2\pi}^{p(x)}$ СУММАМИ ВАЛЛЕ – ПУССЕНА

Перейдем к формулировке основного результата настоящей работы.

Теорема 1. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $r \geq 0$, $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r$. Тогда при $m = n - 1$ и $m = n$ имеет место неравенство

$$\|f - V_m^n(f)\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c_r(p)}{n^r} E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)} \quad (r \geq 0).$$

Доказательство. Пусть сначала $r \geq 1$, $m = n - 1$. Тогда если $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r$, то имеет место равенство

$$f(x) - S_{n+l}(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f^{(r)}(t) R_{r,n+l}(t-x) dt. \quad (11)$$



Из (1), (6), (7) и (11) имеем:

$$f(x) - V_{n-1}^n(f, x) = \frac{1}{\pi n^r} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t) \kappa_{r,n}^n(t-x) dt,$$

поэтому утверждение теоремы 1, относящееся к случаю $r \geq 1$ и $m = n - 1$, непосредственно вытекает из леммы 6. Доказательство теоремы 1 в случае $r \geq 1$ и $m = n$ ничем не отличается от рассмотренного случая. Поэтому нам остается рассмотреть случай $r = 0$. Но в этом случае из равенства (1) следует, что

$$V_m^n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \kappa_m^n(t-x) dt,$$

где

$$\kappa_m^n(u) = \frac{1}{2(m+1) \sin \frac{u}{2}} \sum_{l=0}^m \sin(2(n+l)+1) \frac{u}{2} = \frac{\sin^2(n+m+1) \frac{u}{2} - \sin^2 n \frac{u}{2}}{2(m+1) \sin^2 \frac{u}{2}}.$$

Отсюда нетрудно увидеть, что последовательность ядер $\kappa_m^n(u)$ ($n = 1, 2, \dots$) при $m = n - 1$ и $m = n$ удовлетворяет условиям теоремы D. Следовательно, справедлива оценка

$$\|V_m^n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|f\|_{p(\cdot)}. \quad (12)$$

Далее заметим, что для произвольного тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка n имеет место равенство

$$V_m^n(T_n, x) = T_n(x). \quad (13)$$

Утверждение теоремы 1, относящееся к случаю $r = 0$, вытекает из (12) и (13).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00191-а).

Библиографический список

1. Шарапудинов И. И. О топологии пространства $L^{p(x)}([0, 1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, вып. 4. С. 613–632. [Sharapudinov I. I. Topology of the space $L^{p(x)}([0, 1])$ // Math. Notes. 1979. Vol. 26, № 4. P. 796–806.]
2. Шарапудинов И. И. О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0, 1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 2(6). С. 275–283. [Sharapudinov I. I. On the basis property of the Haar system in the space $L^{p(x)}([0, 1])$ and the principle of localization in the mean // Math. USSR Sb. 1987. Vol. 58, № 1. P. 279–287.]
3. Шарапудинов И. И. О равномерной ограниченности в L^p ($p = p(x)$) некоторых семейств операторов свертки // Мат. заметки. 1996. Т. 59, вып. 2. С. 291–302. [Sharapudinov I. I. Uniform boundedness in L^p ($p = p(x)$) of some families of convolution operators // Math. Notes. 1996. Vol. 59, № 2. P. 205–212.]
4. Шарапудинов И. И. Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^p(x)$ // Analysis Math. 2007. Vol. 33, № 2. P. 135–153. [Sharapudinov I. I. Some problems of approximation theory in spaces $L^p(x)$ // Analysis Math. 2007. Vol. 33, № 2. P. 135–153.]
5. Шарапудинов И. И. О базисности системы полиномов Лежандра в пространстве $L^{p(x)}(-1, 1)$ переменным показателем $p(x)$ // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 1. С. 137–160. [Sharapudinov I. I. The basis property of the Legendre polynomials in the variable exponent Lebesgue space $L^{p(x)}(-1, 1)$ // Sb. Math. 2009. Vol. 200, № 1. P. 133–156.]
6. Guven A., Israfilov D. M. Trigonometric approximation in Generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ // J. of Math. Inequalities. 2010. Vol. 4, № 2. P. 285–299.
7. Akgün R. Polynomial approximation of function in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth // Georgian Math. J. 2011. Vol. 18. P. 203–235.
8. Akgün R. Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent // Ukrainian Math. J. 2011. Vol. 63, № 1. P. 3–23.
9. Akgün R., Kokilashvili V. On converse theorems of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces // Banach J. Math. Anal. 2011. Vol. 5, № 1. P. 70–82.
10. Шарапудинов И. И. Некоторые вопросы теории приближения функций тригонометрическими полиномами в $L_{2\pi}^{p(x)}$ // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2011. Т. 5. С. 108–117. [Sharapudinov I. I. Some problems in approximation theory by trigonometric polynomials in $L_{2\pi}^{p(x)}$ // Math. Forum (Itogi nauki. The South of Russia). 2011. Vol. 5. P. 108–117.]

МЕХАНИКА

УДК 539.3

АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА В ПЛАСТИНАХ

Р. В. Ардазишвили, М. В. Вильде, Л. Ю. Коссович

Саратовский государственный университет

E-mail: ardazishvili.roman@yandex.ru, mv_wilde@mail.ru, rector@sgu.ru

Исследуются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль кромки пластины (кромочные волны). Рассматриваются антисимметричные колебания пластины, поверхности которой свободны от напряжений. Для описания колебаний пластины применяются трехмерные уравнения теории упругости, что позволяет изучить кромочные волны высшего порядка. Выполнен асимптотический анализ задачи, показывающий, что в пластине существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. Получены асимптотики фазовых скоростей для больших значений волнового числа. Показано, что с увеличением волнового числа фазовые скорости всех кромочных волн высшего порядка стремятся к скорости волны Рэлея, а их коэффициенты затухания стремятся к нулю. Представлены численные результаты для первых четырех кромочных волн высшего порядка в широком частотном диапазоне.

Ключевые слова: поверхностные волны, кромочные волны, волна Рэлея, упругая пластина, асимптотические методы.

Antisymmetric Higher Order Edge Waves in Plates

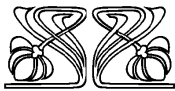
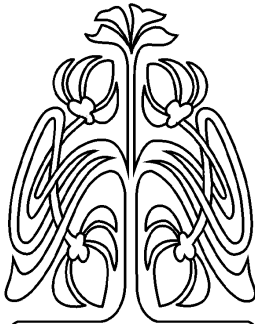
R. V. Ardazishvili, M. V. Wilde, L. Yu. Kossovich

This paper is concerned with the propagation of surface waves localized near the edge of plate (edge waves). Antisymmetric waves in a plate subject to traction free boundary conditions are considered. To study higher order edge waves three-dimensional equations of theory of elasticity are used. Asymptotic analysis is performed, which shows that there are an infinite spectrum of higher order edge waves. For the large values of wave number asymptotics of phase velocities are obtained. It is demonstrated that in the short-wave limit the phase velocities of all higher order edge waves tend to the velocities of Rayleigh wave, while the damping ratios tend to zero. Numerical results for first four higher order edge waves are presented in a wide frequency range.

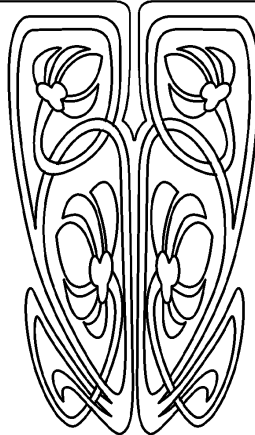
Key words: surface waves, edge waves, Rayleigh wave, elastic plate, asymptotic methods.

ВВЕДЕНИЕ

Кромочными волнами в [1] названы поверхностные волны, распространяющиеся вдоль свободной кромки полубесконечной пластины. До последнего времени эти волны, как правило, изучались на основе тех или иных двумерных теорий пластин. Для пластины, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, кромочная волна представляет собой классическую волну Рэлея [2] с заменой скорости распространения волн расширения на соответствующую скорость в пластинах. Кромочная волна при изгибных колебаниях пластины была впервые рассмотрена в [3], где для описания колебаний пластины применялась теория изгиба пластин Кирхгофа. Существование и единственность изгибной кромочной волны в анизотропных тонких пластинах изучались в [4]. Собственные колебания оболочек, связанные с кромочными волнами, рассмотрены в работах [5, 6].



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Двумерные теории пластин описывают только первую, или фундаментальную, кромочную волну в длинноволновом диапазоне. Если применить для описания колебаний пластины трехмерную теорию упругости, то окажется, что кроме этой волны существуют другие кромочные волны, которые можно назвать кромочными волнами высшего порядка. До последнего времени такие волны были практически не изучены. В работе [7] получено простое аналитическое решение для кромочных волн высшего порядка в случае перекрестных граничных условий на лицевых поверхностях пластины. В работах [8, 9] рассмотрены кромочные волны в пластине со свободными либо жестко защемленными лицевыми поверхностями для случая симметричных колебаний пластины.

В данной работе рассматриваются кромочные волны высшего порядка при антисимметричных колебаниях пластины со свободными лицевыми поверхностями.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим гармонические колебания упругой пластины, занимающей в декартовых координатах (x, y, z) область $0 \leq x < \infty, |y| \leq h, -\infty < z < \infty$ (рис. 1). Для описания колебаний пластины примем трёхмерные уравнения теории упругости. Введём безразмерные переменные по следующим формулам:

$$x = h\pi^{-1}\tilde{x}, \quad y = h\pi^{-1}\tilde{y}, \quad z = h\pi^{-1}\tilde{z}, \quad \mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\} = h\pi^{-1}\{\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z\}, \quad (1)$$

$$\tilde{\omega} = h\pi^{-1}\omega c_2^{-1}, \quad \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\} = E[2(1 + \nu)]^{-1}\{\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \tilde{\sigma}_z, \tilde{\sigma}_{xy}, \tilde{\sigma}_{xz}, \tilde{\sigma}_{yz}\},$$

где \mathbf{u} — вектор перемещения, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ — компоненты тензора напряжений, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, c_2 — скорость волны сдвига, ω — круговая частота. Временной множитель $e^{i\omega t}$ и знак « \sim », обозначающий безразмерные переменные, далее опущены. Запишем выражения перемещений через упругие потенциалы Ламе φ и ψ :

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi. \quad (2)$$

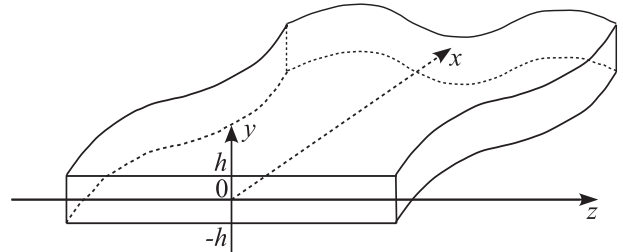


Рис. 1. Геометрия задачи

Выражения напряжений через потенциалы φ и ψ представлены в работе [9]. Уравнение (2) следует дополнить условием

$$\text{div } \psi = 0. \quad (3)$$

Условие (3) является достаточным для получения однозначного представления компонентов вектора перемещения в упругом теле в виде (2). Функции φ и ψ должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + \kappa^2 \omega^2 \varphi = 0, \quad \Delta \psi + \omega^2 \psi = 0, \quad (4)$$

где Δ — трёхмерный оператор Лапласа, $\kappa = \sqrt{(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)}$.

На лицевых поверхностях $y = \pm h$ мы будем ставить граничные условия свободного края:

$$\sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0. \quad (5)$$

Считаем, что напряжённо-деформированное состояние изменяется по переменной z по гармоническому закону. При $x = 0$ поставим следующие граничные условия:

$$\sigma_x = T_g(y) \cos sz, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (6)$$

где $T_g(y)$ — заданная функция переменной y , s — некоторое число. Резонансные частоты рассматриваемой задачи соответствуют собственным частотам однородной задачи с граничными условиями при $x = 0$:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (7)$$

при этом следует искать те решения однородной задачи, которые соответствуют принятому закону изменения НДС по переменной z и затухают при $x \rightarrow \infty$. На бесконечности ставится условие отсутствия источников энергии.



Решение однородной задачи (4), (5) можно представить в виде суммы двух кромочных волн, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль оси z . Для таких волн параметр s играет роль волнового числа. Таким образом, исследование зависимости от s собственных частот задачи (4), (5) или резонансных частот задачи (4), (5) равносильно исследованию дисперсии кромочных волн. Фазовая скорость кромочной волны определяется по формуле

$$c = \frac{\omega_0}{s}, \quad (8)$$

где ω_0 — собственная частота, или резонансная частота задачи (4), (5).

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРОМОЧНЫХ ВОЛН ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим однородную краевую задачу (4), (5), (7). Построим приближенные собственные формы для этой задачи, используя трёхмерную волну Рэлея. Для случая НДС, антисимметричного по переменной y , форма этой волны определяется потенциалами (см. [9])

$$\begin{aligned} \varphi &= -CK_R \frac{\gamma'}{\gamma} \sin(\gamma y) \cos(sz) \exp(-r_1^R x), \\ \psi_x &= 0, \\ \psi_y &= C \frac{s}{\gamma} \sin(\gamma y) \sin(sz) \exp(-r_2^R x), \\ \psi_z &= C \cos(\gamma y) \cos(sz) \exp(-r_2^R x), \end{aligned} \quad (9)$$

где $r_1^R = \sqrt{\gamma'^2 - \kappa^2 \omega^2}$, $r_2^R = \sqrt{\gamma'^2 - \omega^2}$, $\gamma' = \sqrt{\gamma^2 + s^2} = \vartheta \omega$, $K_R = \frac{2\vartheta \sqrt{\vartheta^2 - 1}}{2\vartheta^2 - 1}$, C — произвольная константа, ϑ — корень следующего уравнения:

$$[\vartheta^2 - 0.5]^2 - \vartheta^2 \sqrt{\vartheta^2 - \kappa^2} \sqrt{\vartheta^2 - 1} = 0. \quad (10)$$

Заметим, что $\vartheta = 1/c_R$, где c_R — скорость волны Рэлея, отнесённая к скорости волны сдвига. Решение, определяемое потенциалами (9), удовлетворяет однородным условиям (7). Примем, что значение параметра γ фиксировано, и запишем асимптотики при $s \rightarrow \infty$ для напряжений, входящих в граничные условия (5):

$$\begin{aligned} \sigma_y^R &= \frac{C}{\gamma} \left(\frac{K_R}{\vartheta^2} [s^3(1 - 2\kappa^2) + \gamma^2 s(1 + 2\vartheta^2 - 2\kappa^2)] e^{-s\tilde{r}_1^R x} - 2\gamma^2 s \frac{\vartheta_2}{\vartheta} e^{-s\tilde{r}_2^R x} \right) \times \\ &\quad \times \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \sin(\gamma y) \cos(sz), \\ \sigma_{xy}^R &= 2s^2 C \left(K_R \frac{\vartheta_1}{\vartheta} e^{-s\tilde{r}_1^R x} - \left(1 - \frac{1}{2\vartheta^2}\right) e^{-s\tilde{r}_2^R x} \right) \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \cos(\gamma y) \cos(sz), \\ \sigma_{yz}^R &= 2s^2 C \left(K_R e^{-s\tilde{r}_1^R x} - \frac{\vartheta_2}{\vartheta} e^{-s\tilde{r}_2^R x} \right) \left(1 + O\left(\frac{\gamma^2}{s^2}\right) \right) \cos(\gamma y) \sin(sz), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\tilde{r}_1^R = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{s^2}}$, $\tilde{r}_2^R = \frac{\vartheta_2}{\vartheta} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{s^2}}$.

Формулы (11) показывают, что при $s \rightarrow \infty$ наибольшим из напряжений, входящих в граничные условия на лицевых поверхностях, является напряжение σ_y^R . Чтобы удовлетворить всем граничным условиям однородной задачи с асимптотически малой погрешностью, достаточно положить

$$\gamma = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Таким образом, в качестве первого приближения собственной формы колебаний рассматриваемой пластины можно принять форму трёхмерной волны Рэлея. Подставляя (12) в выражение $\gamma' = \vartheta \omega$, связывающее частоту и волновое число в поверхностной волне, получим асимптотику собственных частот при $s \rightarrow \infty$:

$$\omega_n^{(\infty)} = \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + n^2}. \quad (13)$$



Формула (13) показывает, что в рассматриваемой пластине существует бесконечное счётное множество кромочных волн высшего порядка. Это соответствует бесконечному спектру частот краевого резонанса в полуполосе, исследованному в работе [9]. По отношению к волнам, рассматриваемым в данной работе, частоты, найденные в работе [9], соответствуют случаю $s = 0$, то есть представляют собой частоты запириания. В работе [9] для них были получены следующие приближенные формулы:

$$\omega_k \approx \omega_k^{(0)} = \frac{(k + \frac{1}{2}) \operatorname{Re} r_{2k-1}^{\text{st}}}{\sqrt{(\operatorname{Re} r_{2k-1}^{\text{st}})^2 + (k + \frac{1}{2})^2(\vartheta^2 - 1)}}, \quad (14)$$

где r_{2k-1}^{st} — предельные значения комплексных корней уравнения Рэлея–Лэмба при $\omega \rightarrow 0$:

$$r_{2k-1}^{\text{st}} \approx k + \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{arch}[(2k + \frac{1}{2})\pi]}{2\pi\sqrt{(2k + \frac{1}{2})^2\pi^2 - 1}} - \frac{i}{2\pi} \operatorname{arch}\left[\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Очевидно, что при малых s собственные частоты задачи (4), (5), (7) приближенно определяются формулой (14). Следовательно, при увеличении s от нуля до бесконечности должен произойти переход от собственных частот, определяемых формулой (14), к собственным частотам, определяемым формулой (13). На частотах (14) изменение формы волны Рэлея в направлении оси y характеризуется параметром γ , значение которого можно считать близким к величине $\gamma \approx k + 1/2$. Из формулы (13) следует, что при $s \rightarrow \infty$ параметр γ приближенно равен целому числу ($\gamma \approx n$). Это означает, что при увеличении волнового числа s форма кромочной волны эволюционирует от формы трёхмерной волны Рэлея с $\gamma \approx k + 1/2$ до формы той же волны с $\gamma \approx n$. Запишем приближенную формулу в переходной области:

$$\omega_k^{(1)} \approx \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + \left(k + \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (16)$$

В случае $\nu = 0$ асимптотически главными среди напряжений $\sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}$ станут напряжения σ_{xy}, σ_{yz} , так как коэффициент при s^3 в (11) обращается в ноль. Чтобы удовлетворить граничным условиям, положим $\gamma \approx n + 1/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Это даст следующую асимптотическую формулу для собственных частот:

$$\omega_n^{(\infty)} = \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (17)$$

Таким образом, для $\nu = 0$ приближенная формула в переходной области совпадает с асимптотикой при $s \rightarrow \infty$.

Подставляя (13), (17) в формулу (8), получим асимптотику фазовых скоростей кромочных волн высшего порядка при $s \rightarrow \infty$:

$$c_n^{(\infty)} = \begin{cases} c_R \sqrt{1 + \frac{n^2}{s^2}} & \text{при } \nu \neq 0, \\ c_R \sqrt{1 + \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{s^2}} & \text{при } \nu = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Из (18) следует, что если $s \rightarrow \infty$, то фазовые скорости кромочных волн высшего порядка стремятся к скорости волны Рэлея. Следовательно, дисперсионные кривые кромочных волн высшего порядка $c_n(s)$ сгущаются при $s \rightarrow \infty$ в окрестности прямой $c = c_R$.

Для подтверждения теоретических выводов численно были найдены частоты кромочных волн высшего порядка, соответствующие различным значениям волнового числа s . При численном исследовании удобно рассматривать задачу о вынужденных колебаниях (4)–(6). В этом случае резонансная частота соответствует частоте колебаний в кромочной волне, а ширина резонанса — коэффициенту затухания кромочной волны, связанному с демпфированием распространяющимися модами (см. [9]). Метод численного решения задачи основан на разложении по модам и описан в работе [9]. При поиске k -го резонанса прикладывалась нагрузка (6) при $T_g = \sin((k + 1/2)y)$. В процессе поиска



резонансных частот удобно использовать приближенные соотношения (13) и (16). Запишем их в виде общей формулы:

$$\omega_\gamma^{appr} = \frac{1}{\vartheta} \sqrt{s^2 + \gamma^2}, \quad (19)$$

где $\gamma = k = 1, 2, 3 \dots$ или $\gamma = k + 1/2 = 0.5, 1.5, 2.5 \dots$. При расчётах было обнаружено, что при $s \geq 0.3$ появляются резонансы, частоты которых выше, чем частота «нулевого» резонанса, связанного с фундаментальной кромочной волной, но ниже, чем частота резонанса, соответствующего первому резонансу в двухмерном случае ($s = 0$). С ростом s частота этих дополнительных резонансов растёт. Очевидно, что возникновение дополнительных резонансов — следствие появления кромочной волны высшего порядка, отсутствующей при $s = 0$. Присвоим полученной волне номер $k = 1/2$.

Появление этой волны можно объяснить следующим образом: при $s \rightarrow \infty$ возможна собственная форма, представляющая собой волну Рэлея с $\gamma = 1$, следовательно, должна существовать и волна, выходящая на асимптотику (13) при $n = 1$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты расчётов для значения коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$ приведены в таблице. Здесь ω_k^{num} и Γ_k^{num} — частота и ширина k -го резонанса, найденные численно, ω_k^{appr} — частота, найденная по формуле (19) при $\gamma = 1, 2, 3, 4$ для $k = 1/2, 1, 2, 3$ соответственно. Для $k = 1$ резонансная частота определялась как частота, на которой достигается максимум величины $|u_y(0, 0, 0)|$, а для $k = 1/2, 2, 3$ — как частота, на которой достигается максимум величины $|u_x(0, \pi/8, 0)|$. Амплитуда резонанса A_k^{num} — значение указанных величин на резонансной частоте. Ширина резонанса искалась как полусумма ширины слева и ширины справа, равных модулю разности между резонансной частотой и частотой, в которой достигается значение $A_k^{num}/\sqrt{2}$. В расчётах при $s \in (0.0, 10.0)$ использовалась 41 плоская мода и 21 антиплоская, $s \in (10.0, 20.0)$ — 81 плоская мода и 41 антиплоская.

s	ω_k^{num}	ω_k^{appr}	Γ_k^{num}	s	ω_k^{num}	ω_k^{appr}	Γ_k^{num}
$k = 0.5$				$k = 1$			
0.3	0.553	0.960	0.121	0.1	1.338	1.841	0.110
0.6	0.711	1.072	0.056	0.3	1.366	1.859	0.125
1.0	1.018	1.300	0.037	0.6	1.379	1.920	0.152
1.3	1.273	1.508	0.034	0.9	1.458	2.016	0.117
2.2	2.088	2.222	0.036	1.5	1.880	2.299	0.110
5.0	4.669	4.688	0.023	5.0	4.804	4.951	0.055
6.0	5.584	5.593	0.019	6.0	5.706	5.815	0.076
10.0	9.239	9.240	$4.474 \cdot 10^{-3}$	10.0	9.361	9.376	0.036
15.0	13.822	13.822	$1.211 \cdot 10^{-3}$	15.3	14.184	14.187	$9.316 \cdot 10^{-3}$
20.0	18.411	18.411	$6.056 \cdot 10^{-4}$	20.0	18.479	18.480	$5.017 \cdot 10^{-3}$
$k = 2$				$k = 3$			
0.1	2.076	2.760	0.175	0.1	3.095	3.679	0.119
0.3	2.098	2.772	0.165	0.3	3.108	3.688	0.121
0.6	2.170	2.813	0.128	0.6	3.150	3.719	0.125
0.9	2.279	2.880	0.103	0.9	3.214	3.770	0.130
1.7	2.688	3.170	0.087	1.5	3.400	3.928	0.120
3.3	3.776	4.100	0.055	2.8	4.074	4.489	0.078
5.8	5.793	6.004	0.049	4.5	5.216	5.536	0.063
10.0	9.501	9.599	0.075	10.0	9.739	9.902	0.055
15.0	14.048	14.064	0.035	15.0	14.206	14.273	0.071
20.0	18.591	18.594	0.021	20.0	18.745	18.752	0.035

На рис. 2 приведены графики для $\nu = 0.25$. На рис. 2, а показаны значения ширины резонансов Γ_k , а также фазовые скорости, рассчитанные по формуле $c_k = \omega_k^{num}/s$. Рис. 2, б иллюстрирует связь результатов численных экспериментов с результатами асимптотического анализа, полученными выше.



На нём представлены четыре группы графиков, соответствующих каждой найденной волне. Каждая группа включает три графика, представляющих величину $\delta_R = \omega - c_R s$, где жирным линиям соответствует $\omega = \omega_k^{num}$ при $k = 0.5, \overline{1}, \overline{3}$ (численное решение), тонким линиям — $\omega = \omega_j^{appr}$ при $j = \overline{1}, \overline{4}$ (асимптотика на бесконечности), а штрихпунктирным — $\omega = \omega_{j-1/2}^{appr}$ при $j = \overline{1}, \overline{4}$ (аппроксимация в переходной области).

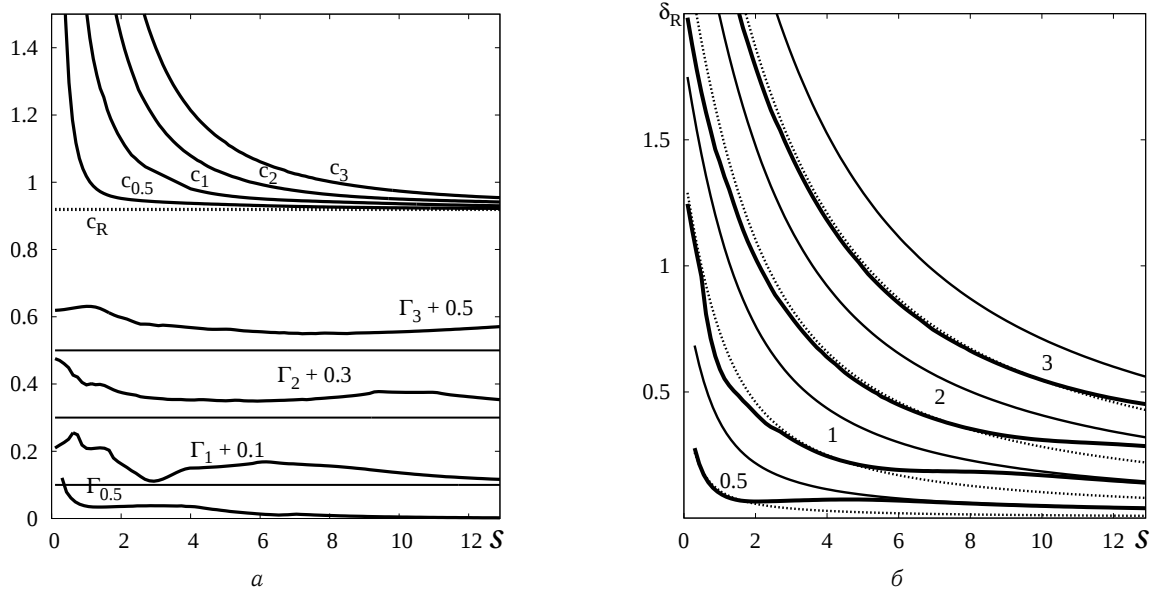


Рис. 2. Результаты расчётов для случая свободных боковых сторон: *a* — фазовые скорости и ширина резонансов кромочных волн высшего порядка, *b* — сравнение численных результатов с асимптотиками и приближенными формулами

На основании данных, представленных в таблице и на рис. 2, можно сделать следующие выводы.

1. Результаты численных экспериментов полностью согласуются с результатами теоретического исследования. Поведение частот при $s \rightarrow \infty$ с малой погрешностью описывается асимптотической формулой (13), фазовые скорости при $s \rightarrow \infty$ стремятся к скорости волны Рэлея. Найденная численно дополнительная волна, отсутствовавшая в двухмерном случае, также находит объяснение в асимптотическом анализе. В переходной области поведение частот с большой точностью описывается формулой (16).

2. Все кромочные волны демпфируются распространяющимися модами. При увеличении волнового числа s от нуля до бесконечности коэффициент затухания убывает, затем незначительно возрастает, затем вновь асимптотически убывает до нуля. Первая волна ($k = 1$) имеет особенность: при $s \in (0.4, 0.8)$ её коэффициент затухания демонстрирует резкое возрастание.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Асимптотическое и численное исследование, проведенное в данной работе, показывает, что кроме фундаментальной волны, исследованной в [3], в пластинах существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. Все они являются затухающими, но при больших значениях волнового числа затухание становится малым. С уменьшением длины волны фазовые скорости всех обнаруженных волн стремятся к скорости волны Рэлея, что показывает, что возникновение этих волн связано с накоплением энергии при отражении поверхностной волны Рэлея от лицевых поверхностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545-а).

Библиографический список

1. Белубекян М. В. Поверхностные волны в упругих средах // Проблемы механики деформируемого твердого тела / Институт механики НАН Армении. Ереван, 1997. С. 79–96. [Belubekyan M. V. Surface waves in elastic media // Problems of Mechanics of Deformed Solids / Institute of Mechanics, National Academy



- of Sciences of Armenia. Erevan, 1997. P. 79–96.]
2. Rayleigh J. On waves propagated along the surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. 1885. Vol. 17, № 253. P. 4–11.
 3. Коненков Ю. К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6, вып. 1. С. 124–126. [Konenkov Y. K. A Rayleigh-type flexural wave // Soviet Physics Acoustics. 1960. Vol. 6, iss. 1. P. 124–126.]
 4. Fu Y. B. Existence and uniqueness of edge waves in a generally anisotropic elastic plate // Q. J. Mech. Appl. Math. 2003. Vol. 56. P. 605–616.
 5. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. America. 2000. Vol. 107, № 3. P. 1383–1393.
 6. Kaplunov J. D., Wilde M. V. Edge and interfacial

vibrations in elastic shells of revolution // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). 2000. Vol. 51. P. 29–48.

7. Kaplunov J. D., Prikazchikov D. A., Rogerson G. A. On three-dimensional edge waves in semi-infinite isotropic plates subject to mixed face boundary conditions // J. Acoust. Soc. Am. 2005. № 118(5). P. 2975–2983.
8. Zernov V., Kaplunov J. D. Three-dimensional edge waves in plates // Proc. R. Soc. Lond. A. 2008. Vol. 464. P. 301–318.
9. Вильде М.В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М. : Физматлит, 2010. 280 с. [Wilde M. V., Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu. Edge and interfacial resonance phenomena in elastic bodies. Moscow : Fizmatlit, 2010. 280 p.]

УДК 534.121.1

ЯВНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КРАЕВЫХ И ИНТЕРФЕЙСНЫХ ВОЛН В ТОНКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ

Ю. Д. Каплунов¹, Е. Л. Коссович², Р. Р. Мухомодьяров²,
О. В. Сорокина²

¹Университет Брюнель, Лондон
E-mail: Julius.Kaplunov@brunel.ac.uk

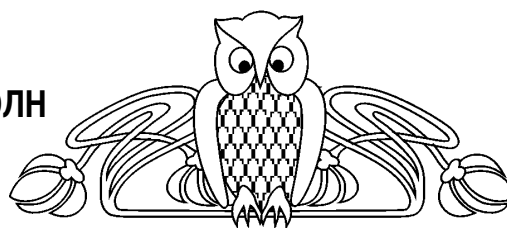
²Саратовский государственный университет
E-mail: kossovichel@info.sgu.ru, rinatm@mail.ru,
SorokinaOVA@yandex.ru

В статье приведены общие решения задач о колебаниях тонких изотропных полубесконечных пластин. Приведены основные принципы построения явных параболических эллиптических моделей, описывающих распространение краевых и интерфейсных изгибных волн. Построенные модели позволяют выделить вклад локализованных изгибных краевых и интерфейсных волн в общую деформацию пластин, вызванную приложенным на торце или в месте стыка нагружением. Также они отражают двойственную параболическую эллиптическую природу изгибных краевых и интерфейсных волн.

Ключевые слова: изотропия, прогиб, перерезывающая сила, изгибающий момент, явная параболическая эллиптическая модель.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что и поверхностные, и краевые волны скрыты в математических постановках исходных задач [1]. Сравнительно недавно была разработана новая методика анализа краевых изгибных волн, заключающаяся в построении явных моделей, описывающих локализованные волны и выделяющие их вклад в общую постановку задачи. Данные модели, отражающие двойственную гиперболически эллиптическую природу поверхностных волн, недавно были построены в работе [1] для упругих и пьезоупругих поверхностных волн (а именно волны Рэлея и Гуляева–Блюштейна). Данные модели состоят из эллиптического уравнения, описывающего затухание волны внутрь по направлению от поверхности и гиперболического уравнения, описывающего распространение волны на поверхности. Модели обеспечивают значительное упрощение постановки и решения задач, связанных с анализом распространения поверхностных волн. Построение таких моделей является сложной задачей, требующей знаний в асимптотическом анализе исследуемых деформаций, представлений о природе рас-



Explicit Models for Flexural Edge and Interfacial Waves in Thin Isotropic Plates

J. D. Kaplunov, E. L. Kossovich, R. R. Mukhomodyarov,
O. V. Sorokina

Exact solutions for problems of vibrations of isotropic thin elastic plates are presented in the work. Some basic principles of explicit dual parabolic-elliptic models for flexural edge and interfacial waves propagation are revealed. The obtained explicit models extract the contribution of the flexural wave into the full dynamic response. Also, these models reveal a dual parabolic-elliptic nature of the flexural edge and interfacial waves.

Key words: isotropy, deflection, shear force, bending moment, explicit dual parabolic-elliptic model.



пространения локализованных волн и др. Таким образом, целью данной работы является построение явных приближенных моделей, описывающих изгибные краевые и интерфейсные волны. Предлагается рассмотреть ряд случаев для изотропных пластин. Модели будут включать эллиптическое уравнение для описания затухания волны от торца и параболическое уравнение для торца. Таким образом, построенные модели будут отражать двойственную параболическую эллиптическую природу изгибных краевых волн.

1. ЯВНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КРАЕВЫХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим полубесконечную изотропную пластину, торец которой свободен от внешних нагрузок.

В рамках теории Кирхгофа изгиба тонких пластин уравнение, описывающее прогиб w такой пластины, имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где w — прогиб срединной плоскости, ρ — плотность материала пластины, h — полутолщина пластины, D — жесткость материала пластины.

Предполагая, что оси $0x$ и $0y$ расположены, как показано на рис. 1, будем рассматривать три типа граничных условий, включающих свободный от нагружения край, а также край, нагруженный внешним изгибающим моментом, перерезывающей силой или их комбинацией. В последнем случае, который соответствует сложному торцевому нагружению, возможно разделение исходной задачи. В силу линейности постановки задач в рамках теории Кирхгофа изгиба тонких пластин итоговое решение получается путем суперпозиции полученных компонент деформации.

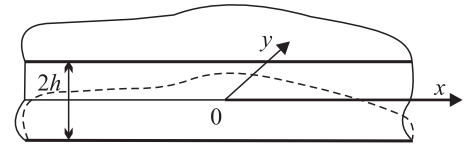


Рис. 1. Полубесконечная пластина, декартова система координат

В случае свободного края пластины имеем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad (2)$$

для случая нагружения изгибающим моментом получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_0(x, t)}{D}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad (3)$$

а для нагружения перерезывающей силой —

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{N_0}{D},$$

где ν — коэффициент Пуассона материала пластины, M_0 — изгибающий момент, приложенный к краю пластины, а N_0 — обобщенная перерезывающая сила Кирхгофа.

Решение задачи о свободных вибрациях тонкой полубесконечной изотропной пластины было подробно описано в работе [2]. Также в этой работе автор получил и решил знаменитое дисперсионное уравнение, решением которого является скорость новой локализованной волны, так называемой изгибной волны Коненкова.

Аналогично рассуждениям автора [2], используя задачу (1), (2), можно получить следующее уравнение:

$$1 - \nu^2 - c^4 + 2(1 - \nu)\sqrt{1 - c^4} = 0, \quad (4)$$

где $c = \frac{\sqrt{-is\lambda_0}}{p}$, $\lambda_0^2 = \frac{2\rho h^5}{T^2 D}$, p — параметр преобразования Фурье, примененного к пространственной координате y в уравнениях исследуемой задачи, s — частотный параметр из преобразования Лапласа по временной координате, T — характеристический отрезок времени, введенный для решения задачи в безразмерных переменных.



Решения уравнения (4) определяются аналитически и имеют следующий вид:

$$c_k^4 = (1 - \nu) \left[3\nu - 1 + 2\sqrt{2\nu^2 - 2\nu + 1} \right], \quad c_2^4 = (1 - \nu) \left[3\nu - 1 - 2\sqrt{2\nu^2 - 2\nu + 1} \right].$$

Корень c_k соответствует так называемой скорости краевой изгибной волны [2]. Отметим, что скорость волны Коненкова зависит от множества параметров, входящих в частотный параметр λ_0 , и, следовательно, будем называть c_k коэффициентом скорости краевой изгибной волны Коненкова.

Рассмотрим далее следующий случай простого краевого нагружения — изгибающий момент, приложенный к торцу пластины. В этом случае решается задача (1)–(3). Введем новые безразмерные переменные следующего вида:

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad W^* = \frac{w}{h}, \quad \tau = \frac{t}{T}.$$

Тогда решение для образа прогиба пластины $\hat{W}(\eta)$ имеет следующий вид

$$\hat{W}(\eta) = \frac{\hat{M}_0}{-is\lambda_0} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_1(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0}}{c}\alpha_c\eta} + \Delta_2(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0}}{c}\beta_c\eta}}{\Delta(c)} X(c), \quad (5)$$

где $\hat{M}_0(p, s)$ — образ безразмерного изгибающего момента, приложенного к краю пластины,

$$\Delta_1(c) = [(1 - \nu) - c^2] \sqrt{1 + c^2}, \quad \Delta_2(c) = -[(1 - \nu) + c^2] \sqrt{1 - c^2}, \quad \Delta(c) = (\beta_c - \alpha_c)(c^4 - c_2^4), \quad (6)$$

$$\alpha_c = \sqrt{1 - c^2}, \quad \beta_c = \sqrt{1 + c^2}, \quad X(c) = 1 - \nu^2 - c^4 - 2(1 - \nu)\sqrt{1 - c^4}. \quad (7)$$

Как было указано выше, целью данной работы является выделение вклада изгибной краевой волны Коненкова в общее решение задачи об изгибе тонкой полубесконечной изотропной пластины. Естественно предположить, что вклад волны обусловлен полюсами знаменателя $c = \pm c_k$. Таким образом, путем асимптотического анализа решения (5), можно построить следующую модель, явно описывающую основные закономерности распространения краевой волны. Она состоит из двух уравнений.

1. Параболическое уравнение. На торце пластины имеем параболическое уравнение, характеризующее распространение волны вдоль края:

$$c_k^4 \frac{\partial^4 w_e}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D} \frac{\partial^2 w_e}{\partial t^2} = Q_e^{(1)} \frac{1}{D} \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2}, \quad (8)$$

где $w_e(x, t)$ — краевой прогиб, связанный с краевой изгибной волной Коненкова и

$$Q_e^{(1)} = \frac{\Delta_1(c_k) + \Delta_2(c_k)}{\Delta(c_k)} X(c_k). \quad (9)$$

2. Эллиптическое уравнение. Для области вне торца пластины имеем следующее эллиптическое уравнение, которое характеризует затухание волны:

$$\frac{\partial^4 w_{in}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{in}}{\partial x^2 \partial y^2} + (1 - c_k^4) \frac{\partial^4 w_{in}}{\partial x^4} = 0, \quad (10)$$

где $w_{in}(x, y)$ — прогиб внутри пластины, вызванный краевой изгибной волной Коненкова. с краевыми условиями на торце:

$$w_{in}(x, 0) = w_e(x), \quad \frac{\partial^2 w_{in}}{\partial y^2} = -\nu \frac{\partial^2 w_e}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Построенная модель, очевидно, раскрывает двойственную параболическую эллиптическую природу краевой изгибной волны Коненкова. Данная модель отличается от гиперболической эллиптической природы модели для классической волны Рэлея, для которой на поверхности мы имеем гиперболическое уравнение вместо параболического на торце (см. [1, 3]). Анализ построенных моделей и эффективности выделения вклада изгибной краевой волны из общего решения задачи проводился для точечного изгибающего момента $M_0(x, t) = M_0 \delta(x) e^{-i\omega t}$. Были построены трехмерные профили для безразмерного прогиба, связанного с волной Коненкова, и для полного прогиба пластины (рис. 2).



Аналогичным образом находится решение задачи об изгибе тонкой изотропной пластины, вызванном приложенной к торцу перерезывающей силой. Решение и модель в данном случае строятся для угла поворота вертикального сечения пластины $v(x, y, t) = \partial w / \partial y$ относительно оси $0x$.

Решение задачи для образа угла поворота $\hat{V}(\eta)$ имеет вид

$$\hat{V}(\eta) = \frac{\hat{N}_0}{-is\lambda_0} \frac{c^2}{(c^4 - c_k^4)} \frac{\Delta_1(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0}}{c}\alpha_e\eta} + \Delta_2(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0}}{c}\beta_e\eta}}{\Delta(c)} X(c),$$

где $\Delta_1(c) = [(1 - \nu) + c^2] \sqrt{1 - c^2}$, $\Delta_2(c) = -[(1 - \nu) - c^2] \sqrt{1 + c^2}$.

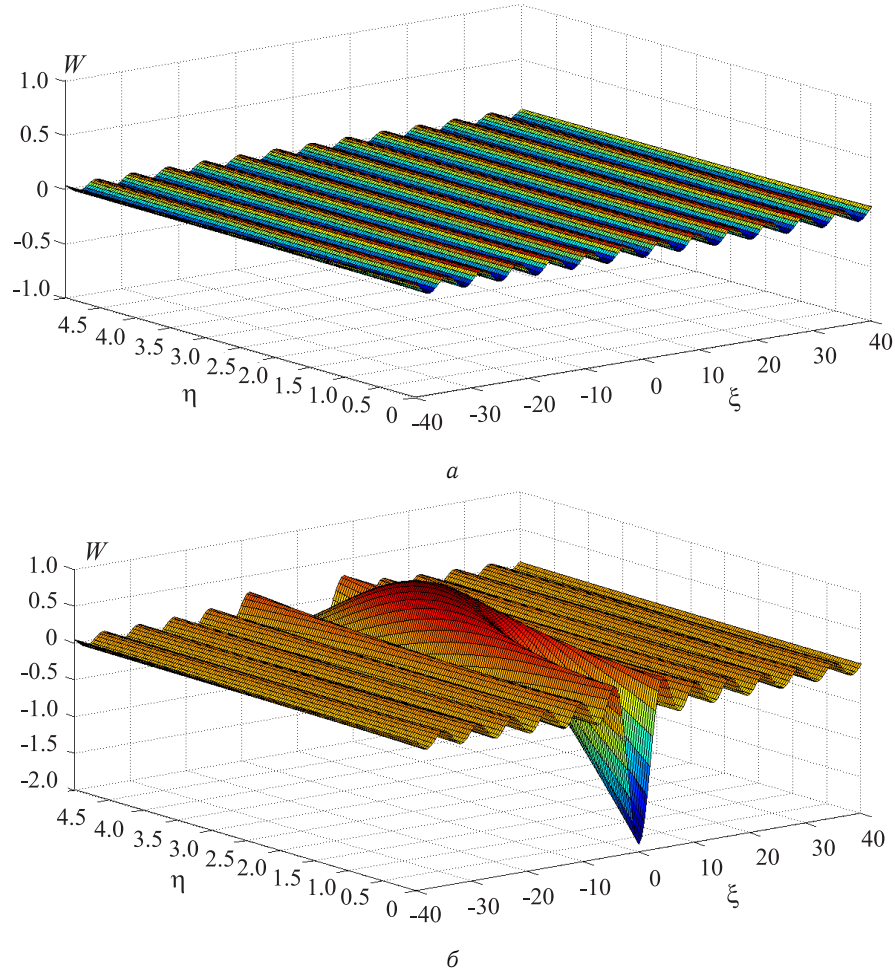


Рис. 2. Трехмерные профили: а – краевая изгибная волна Коненкова в изотропной пластине (связанная параболическая эллиптическая модель); б – полный прогиб изотропной пластины (точное решение)

Связанная параболическая эллиптическая модель:

1. Параболическое уравнение. На торце пластины имеем:

$$c_k^4 \frac{\partial^4 v_e(x, t)}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D} \frac{\partial^2 v_e}{\partial t^2} = Q_e^{(2)} \frac{1}{D} \frac{\partial^2 N_0}{\partial x^2},$$

где $v_e(x, t)$ – угол вращения на торце пластины и

$$Q_e^{(2)} = \frac{\Delta_1(c_k) + \Delta_2(c_k)}{\Delta(c_k)} X(c_k).$$

2. Эллиптическое уравнение. Для области вне торца пластины имеем следующее эллиптическое уравнение, которое характеризует затухание волн:

$$\frac{\partial^4 v_{int}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 v_{int}}{\partial x^2 \partial y^2} + (1 - c_k^4) \frac{\partial^4 v_{int}}{\partial x^4} = 0,$$



где $v_{int}(x, y)$ — угол поворота, ассоциируемый со вкладом краевой изгибной волны Коненкова внутри пластины, $v_{int}(x, 0) = v_e(x)$, $\frac{\partial^2 v_{int}}{\partial y^2} = -(2 - \nu) \frac{\partial^2 v_e}{\partial x^2}$.

Очевидно, что в этом случае построенные уравнения имеют ту же форму, что и ранее, см. (8)–(11). Характер вклада волны Коненкова в общее решение задачи также аналогичен приведенному выше. Анализ всех полученных результатов позволяет утверждать, что волна Коненкова вносит ключевой вклад в решение вблизи края пластины.

2. ЯВНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ ИНТЕРФЕЙСНЫХ ВОЛН ТИПА СТОУНЛИ

Рассмотрим теперь задачу об интерфейсных колебаниях двух тонких изотропных пластин при условии идеального контакта (рис. 3).

Уравнения движения для прогибов каждой из пластин записываются в виде

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} + \frac{2\rho_i h}{D_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2,$$

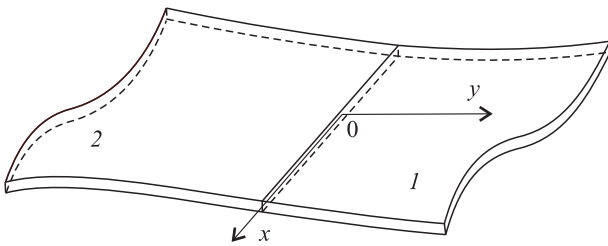


Рис. 3. Стык двух полубесконечных пластин

где ρ_i — плотности материала пластин 1 и 2, h — полутолщина пластин (считается, что толщина пластин одинакова) и D_i — изгибные жесткости.

Предполагая, что стык пластин $y = 0$ непрерывен и обе пластины закреплены жестко, т. е. выполняются следующие условия идеального контакта:

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2, & \frac{\partial w_1}{\partial y} &= \frac{\partial w_2}{\partial y}, \\ D_1 \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right] &= D_2 \left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right] + \Lambda, \\ D_1 \left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + (2 - \nu_1) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y} \right] &= D_2 \left[\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} + (2 - \nu_2) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2 \partial y} \right] + \Gamma, \end{aligned}$$

где ν_1 и ν_2 — коэффициенты Пуассона пластины 1 и 2, и

$$\Lambda = \begin{cases} 0, & M_0 = 0, \\ -M_0, & M_0 \neq 0, \end{cases} \quad \Gamma = \begin{cases} 0, & N_0 = 0, \\ -N_0, & N_0 \neq 0. \end{cases}$$

Общее решение данной задачи также находится в безразмерной форме для образов либо прогибов (для случая приложенного изгибающего момента), либо для углов поворота (для приложенной перерезывающей силы).

Ранее было получено дисперсионное уравнение, выражающее коэффициент скорости волны Коненкова для случая колебаний тонкой изотропной полубесконечной пластины со свободным торцом. Было показано, что полюс решения, отвечающий за вклад изгибной краевой волны, существует всегда независимо от свойств пластины. В данном случае задача усложняется тем, что в колебаниях участвует две пластины, не всегда с одинаковыми свойствами. Дисперсионное уравнение для скорости изгибной интерфейсной волны было впервые получено и проанализировано в работе [4].

В параметризации, представленной в данной работе, уравнение для коэффициента скорости изгибной интерфейсной волны имеет вид

$$\begin{aligned} & [(1+a)c^2 + d]^2 \sqrt{1-c^2} \sqrt{1+bc^2} + [(1+a)c^2 - d]^2 \sqrt{1+c^2} \sqrt{1-bc^2} - \\ & - [(1-a)c^2 + d]^2 \sqrt{1-c^2} \sqrt{1-bc^2} - [(1-a)c^2 - d]^2 \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+bc^2} - \\ & - 4a \left[\sqrt{1-c^4} + \sqrt{1-b^2 c^4} \right] c^4 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $a = \alpha\beta$, $b = \alpha/\beta$, $d = (1 - \nu_1) - (1 - \nu_2)\beta^2$, $\alpha = \sqrt{\rho_2/\rho_1}$, $\beta = \sqrt{\hat{D}_2/\hat{D}_1}$, $c = \sqrt{-is\lambda_1/p}$.



Безразмерные переменные и функции выражаются через соответствующие размерные величины следующим образом:

$$x = h\xi, \quad y = h\eta, \quad w_i = hW_i^*, \quad D_i = D\hat{D}_i, \quad t = T\tau,$$

где T — типичный масштаб времени и D — типичная жесткость (роль которой во многих задачах может исполнять D_1). Очевидно, что уравнение (12) не решается аналитически. Численно были определены некоторые области, в которых решение этого уравнения существует. Это области, где выполняются соотношения $\frac{\alpha^2}{\beta^2} < 1$ и $\frac{\alpha^2}{\beta^2} < \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}$, или $\frac{\alpha^2}{\beta^2} > 1$ и $\frac{\alpha^2}{\beta^2} > \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}$. Когда параметр β оказывается таким, что $\beta^2 = \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}$ (что соответствует $d = 0$), уравнение (12) не имеет решений. Это можно проверить с помощью асимптотического анализа этого уравнения, рассматривая случай когда $c \rightarrow 0$.

Общие решения задач об интерфейсных колебаниях двух полубесконечных изотропных пластин представлены для образов прогиба $\hat{W}_i(\eta)$ и угла поворота $\hat{V}_i(\eta)$, $i = 1, 2$.

В случае приложенного на стыке пластин изгибающего момента решение выглядит следующим образом:

$$\hat{W}_1(\eta) = \frac{\hat{M}_0}{\hat{D}_1^2(-is\lambda_1^2)} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_1(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\alpha_1(c)|\eta|} + \Delta_2(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\beta_1(c)|\eta|}}{\Delta'(c_k^4)},$$

$$\hat{W}_2(\eta) = \frac{\hat{M}_0}{\hat{D}_1^2(-is\lambda_1^2)} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_3(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\alpha_2(c)|\eta|} + \Delta_4(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\beta_2(c)|\eta|}}{\Delta'(c_k^4)},$$

где c_k — решение уравнения (12), $\alpha_1(c) = \sqrt{1-c^2}$, $\beta_1(c) = \sqrt{1+c^2}$, $\alpha_2(c) = \sqrt{1-bc^2}$, $\beta_2(c) = \sqrt{1+bc^2}$,

$$\Delta_{1,2}(c) = \pm\beta^2 \left[\pm(\sqrt{1\pm c^2} \mp \sqrt{1\mp bc^2})\sqrt{1\pm bc^2}((\nu_2-1) \pm bc^2) + (\pm\sqrt{1\pm bc^2} \mp \sqrt{1\pm c^2}) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{1\mp bc^2}((\nu_2-1) \mp bc^2) \right] \pm (\sqrt{1-bc^2} - \sqrt{1+bc^2})\sqrt{1\pm c^2}((\nu_1-1) \pm c^2),$$

$$\Delta_{3,4}(c) = \pm(\sqrt{1-c^2} - \sqrt{1\pm bc^2})\sqrt{1+c^2}((\nu_1-1) + c^2) + (\sqrt{1\pm c^2} \mp \sqrt{1\pm bc^2}) \times \\ \times \sqrt{1-c^2}((\nu_1-1) - c^2) \pm \beta^2(\sqrt{1-c^2} - \sqrt{1+c^2})\sqrt{1\pm bc^2}((\nu_2-1) \pm bc^2)$$

и

$$\Delta'(c_k^4) = \frac{1}{4c_k^2} \left[((1+a)c_k^2 + d)A + ((1+a)c_k^2 - d)B - ((1-a)c_k^2 + d)C - ((1-a)c_k^2 - d)D \right] - \\ - 4a(\sqrt{1-c_k^4} + \sqrt{1-b^2c_k^4}) + 2ac_k^4 \left[\frac{1}{\sqrt{1-c_k^4}} + \frac{b^2}{\sqrt{1-b^2c_k^4}} \right],$$

где

$$A, B = 4(1+a)\sqrt{1\mp c_k^2}\sqrt{1\pm bc_k^2} + ((1+a)c_k^2 \pm d) \left(-\frac{\sqrt{1\pm bc_k^2}}{\sqrt{1\mp c_k^2}} + b\frac{\sqrt{1\mp c_k^2}}{\sqrt{1\pm bc_k^2}} \right),$$

$$C, D = 4(1-a)\sqrt{1\mp c_k^2}\sqrt{1\pm bc_k^2} - ((1-a)c_k^2 \pm d) \left(\frac{\sqrt{1\mp bc_k^2}}{\sqrt{1\mp c_k^2}} + b\frac{\sqrt{1\mp c_k^2}}{\sqrt{1\mp bc_k^2}} \right).$$

Общее решение для случая приложенной на торце перерезывающей силы имеет вид:

$$\hat{V}_1(\eta) = \frac{\hat{N}_0}{\hat{D}_1^2(-is\lambda_1^2)} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_5(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\alpha_1(c)|\eta|} + \Delta_6(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\beta_1(c)|\eta|}}{\Delta'(c_k^4)},$$

$$\hat{V}_2(\eta) = \frac{\hat{N}_0}{\hat{D}_1^2(-is\lambda_1^2)} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_7(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\alpha_2(c)|\eta|} + \Delta_8(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\beta_2(c)|\eta|}}{\Delta'(c_k^4)},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{5,6}(c) &= \mp \sqrt{1 \mp c^2} \left[\beta^2 \left((\sqrt{1 \pm c^2} - \sqrt{1 - bc^2})((1 - \nu_2) + bc^2) + \right. \right. \\ &+ \left. (\sqrt{1 + bc^2} - \sqrt{1 \pm c^2})((1 - \nu_2) - bc^2) \right) + (\sqrt{1 - bc^2} - \sqrt{1 + bc^2})((1 - \nu_1) \pm c^2) \Big], \\ \Delta_{7,8}(c) &= \sqrt{1 \mp bc^2} \left[\pm \beta^2 (\sqrt{1 - c^2} - \sqrt{1 + c^2})((1 - \nu_2) \pm bc^2) + \right. \\ &+ \left. (\sqrt{1 \pm bc^2} - \sqrt{1 - c^2})((1 - \nu_1) + c^2) + (\sqrt{1 + c^2} - \sqrt{1 \pm bc^2})((1 - \nu_1) - c^2) \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, выделяя вклад изгибной интерфейсной волны в общие решения задач, строятся модели, описывающие распространение такой волны в зоне стыка пластин.

1. Случай приложенного на стыке пластин изгибающего момента.

Уравнение для прогиба на стыке пластин имеет вид

$$c_k^4 \frac{\partial^2 w_{e,i}}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D_1} \frac{\partial^2 w_{e,i}}{\partial t^2} = \frac{1}{D_1} Q_{e,i}^{(1)} \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2},$$

где

$$Q_{e,1}^{(1)} = \frac{\Delta_1(c_k) + \Delta_2(c_k)}{\Delta'(c_k^4)}, \quad Q_{e,2}^{(1)} = \frac{\Delta_3(c_k) + \Delta_4(c_k)}{\Delta'(c_k^4)}.$$

Здесь, прогибы $w_{e,i}(x, t)$ пластин с номером i ($i = 1, 2$) вызваны вкладом интерфейсной изгибной волны типа Стоунли.

Для области вне стыка пластин имеем следующие эллиптические уравнения, которые характеризуют затухание волны:

$$\frac{\partial^4 w_{in,i}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{in,i}}{\partial x^2 \partial y^2} + (1 - \gamma c_k^4) \frac{\partial^4 w_{in,i}}{\partial x^4} = 0,$$

где $w_{in,i}(x, y)$ — прогиб пластины с номером i ($i = 1, 2$), вызванный затухающей интерфейсной волной типа Стоунли, $\gamma = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ \rho_2/\rho_1, & i = 2. \end{cases}$ Интерфейсные условия для $w_{in,i}(x, y)$, ($i = 1, 2$) принимают следующий вид:

$$w_{in,i}(x, 0) = w_{e,i}(x), \quad \frac{\partial^2 w_{in,i}}{\partial y^2} = -\nu_i \frac{\partial^2 w_{e,i}}{\partial x^2}.$$

2. Случай приложенной на стыке перерезывающей силы.

Уравнение для прогиба на стыке пластин имеет вид

$$\begin{aligned} c_k^4 \frac{\partial^2 v_{e,i}}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D_1} \frac{\partial^2 v_{e,i}}{\partial t^2} &= \frac{1}{D_1} Q_{e,i}^{(2)} \frac{\partial^2 N_0}{\partial x^2}, \\ Q_{e,1}^{(2)} &= \frac{\Delta_5(c_k) + \Delta_6(c_k)}{\Delta'(c_k^4)}, \quad Q_{e,2}^{(2)} = \frac{\Delta_7(c_k) + \Delta_8(c_k)}{\Delta'(c_k^4)}. \end{aligned}$$

Для области вне стыка пластин также строятся эллиптические уравнения:

$$\frac{\partial^4 v_{in,i}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 v_{in,i}}{\partial x^2 \partial y^2} + (1 - \gamma c_k^4) \frac{\partial^4 v_{in,i}}{\partial x^4} = 0,$$

где $v_{in,i}(x, y)$ — угол поворота пластины с номером i ($i = 1, 2$). Условия контакта для $v_{in,i}(x, y)$ имеют вид

$$v_{in,i}(x, 0) = v_{e,i}(x), \quad \frac{\partial^2 v_{in,i}}{\partial y^2} = -(2 - \nu_i) \frac{\partial^2 v_{e,i}}{\partial x^2}.$$

Сравнение полученных результатов проводится аналогично. Рассматривается задача, в которой на стык пластин приложен точечный изгибающий момент $M_0(x, t) = M_0 \delta(x) e^{-i\omega t}$. Коэффициенты Пуассона принимаются равными $\nu_1 = 0.4$, $\nu_2 = 0.3$. Результаты представлены на рис. 4.

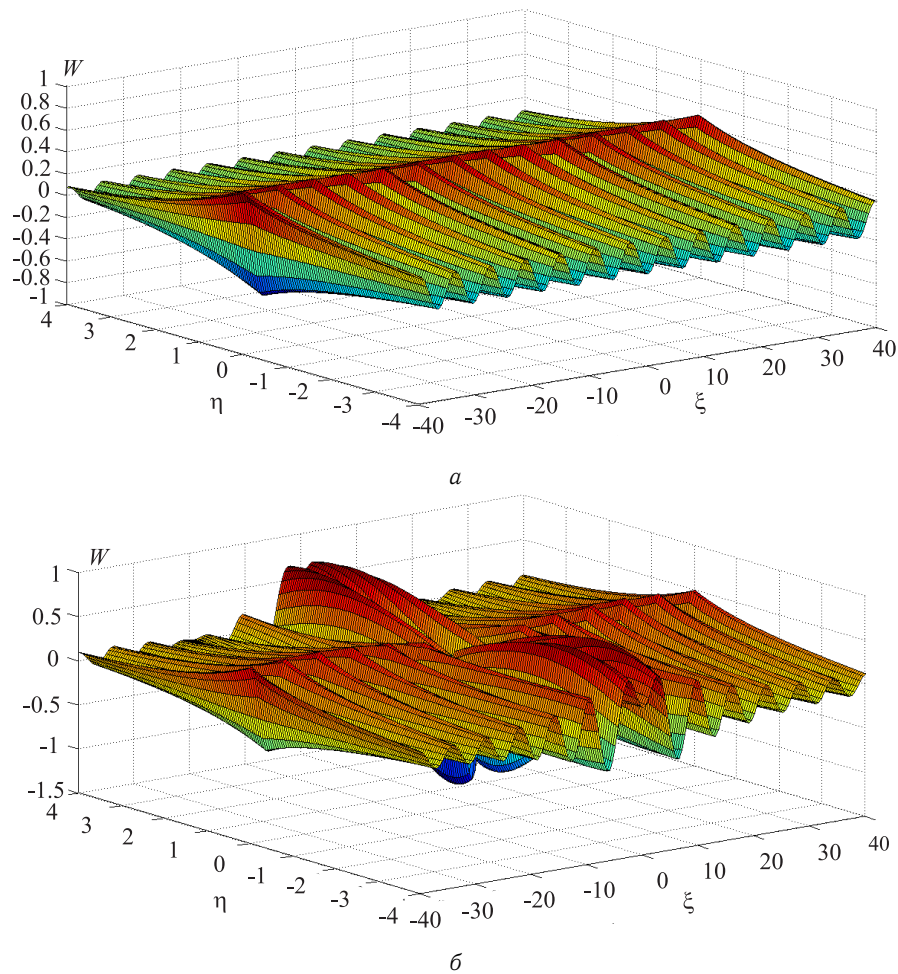


Рис. 4. Трехмерные профили: *a* – интерфейсная изгибная волна типа Стоунли (связанная параболическая эллиптическая модель); *б* – полный прогиб (точное решение)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен анализ задач о колебании тонких изотропных полубесконечных пластин. Рассматривались случаи со свободным краем пластин, приложенными к нему нагрузками, а также исследовались интерфейсные колебания. Для всех вышеописанных задач были получены точные решения в терминах интегральных преобразований, а также построены явные связанные параболически эллиптические модели, выделяющие вклад локализованных изгибных краевых и интерфейсных волн. Такие модели позволяют изучать распространение волн без нахождения общего решения задач об изгибных деформациях пластин, что значительно упрощает процесс обработки данных об основных характеристиках указанных волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545-а).

Библиографический список

1. Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D. Explicit models for elastic and piezoelectric surface waves // IMA J. of Appl. Math. 2006. Vol. 71. P. 768–782.
2. Коненков Ю. К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6, вып. 1. С. 124–126. [Konenkov Yu. K. A Rayleigh-Type Flexural Wave // Soviet Physics. Acoustics. 1960. Vol. 6, iss. 1. P. 122–123.]
3. Lord Rayleigh On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. of the London Math. Soc. 1885. Vol. 17, № 253. P. 4–11.
4. Зильбергейт А. С, Суслова И. Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинах // Акустический журнал. 1983. Т. 29, вып. 2. С. 186–191. [Zilbergleit A. S., Suslova I. B. Contact Flexural Waves in Thin Plates // Soviet Physics. Acoustics. 1983. Vol. 29, iss. 2. P. 108–111.]



УДК 534.121.1

ЯВНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КРАЕВЫХ ВОЛН В ТОНКИХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ

Е. Л. Коссович

Саратовский государственный университет
E-mail: kossovichel@info.sgu.ru

В работе приведен анализ распространения изгибных краевых волн в тонких пластинах. Решены задачи о колебании полубесконечных пластин, сделанных из ортотропных материалов. Анализ особенностей распространения краевых изгибных волн проведен с использованием явных параболических эллиптических моделей, выделяющих вклад таких волн в общую деформацию пластины.

Ключевые слова: ортотропия, прогиб, перерезывающая сила, изгибающий момент, явная параболическая эллиптическая модель.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что локализованные краевые изгибные волны возникают не только в тонких изотропных пластинах [1], но и в случае анизотропии материала [2–4]. Поведение таких волн оказывается менее тривиальным по сравнению с их изотропным аналогом. Выделение вклада таких волн в общее решение задачи зачастую является наиболее оптимальным способом исследования основных закономерностей их возникновения и распространения. Однако одной из наибольших сложностей является тот факт, что краевые изгибные волны не входят явно в постановку задач о колебаниях пластин. Таким образом, для выделения вклада локализованных краевых волн необходимо проводить сложный асимптотический анализ получаемых общих решений задачи и на этой основе строить новые уравнения, которые будут нацелены исключительно на описание исследуемого явления. Построение таких явных моделей, выделяющих вклад краевых изгибных волн в общий прогиб тонких ортотропных пластин, и является целью данной работы.

1. ЯВНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КРАЕВЫХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим колебания свободного торца полубесконечной ортотропной пластины, конфигурация которой представлена на рис. 1.

Будем считать, что основные направления ортотропных свойств пластины совпадают с осями Ox , Oy . Тогда уравнение, описывающее прогиб w такой пластины, имеет вид

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

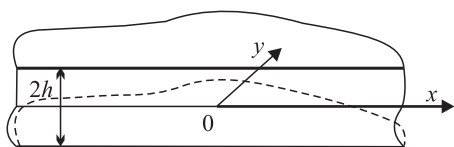
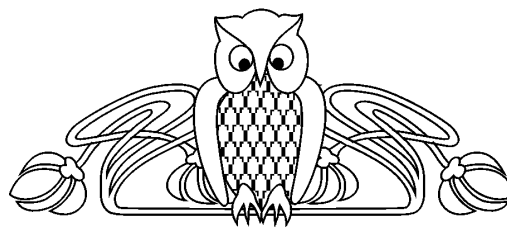


Рис. 1. Полубесконечная пластина, декартова система координат

где h — полутолщина пластины, ρ — плотность материала пластины, w — прогиб срединной плоскости, D — жесткость материала пластины, а изгибные жесткости D_x , D_y , D_1 , и D_{xy} должны удовлетворять основополагающим неравенствам

$$D_{xy} > 0, \quad D_x + D_y > 0, \quad D_x D_y - D_1^2 > 0.$$

В данной работе рассматривается три типа краевых условий, включающих свободный торец, а также край, нагруженный внешним изгибающим моментом, перерезывающей силой, или их комбинацией. В последнем случае удобно рассматривать комбинацию внешних усилий как суперпозицию



Explicit Models for Flexural Edge Waves in Thin Orthotropic Plates

E. L. Kossovich

Analysis of flexural edge wave propagation in thin plates is presented. Several problems of semi-infinite plates vibrations are solved. These plates are assumed to be orthotropic. Some basic features of flexural edge wave propagation are found using the constructed explicit parabolic-elliptic models. They extract the localized wave contribution into the overall solution.

Key words: orthotropy, deflection, shear force, bending moment, explicit dual parabolic-elliptic model.



решений, полученных для каждого из простых случаев. Таким образом, выделяем три типа краевых условий.

Для свободного от нагрузок края имеем:

$$D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_1 + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

для случая приложенного к торцу изгибающего момента краевые условия имеют вид

$$D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M_0(x, t), \quad D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_1 + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad (2)$$

а для нагружения перерезывающей силой получаем:

$$D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_1 + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -N_0,$$

где M_0 — изгибающий момент, приложенный к краю пластины, а N_0 — обобщенная перерезывающая сила Кирхгофа.

Для ортотропной пластины дисперсионное уравнение, решением которого является скорость краевой изгибной волны, получается способом, аналогичным описанному в [1]. Оно имеет вид

$$(\hat{D}_x \hat{D}_y - \hat{D}_1^2) - \hat{D}_y c^4 + 4\hat{D}_{xy} \sqrt{\hat{D}_x \hat{D}_y - \hat{D}_y c^4} = 0, \quad (3)$$

где $c = \sqrt{-is\lambda_0/p}$, p — параметр преобразования Фурье, примененного к пространственной координате y в уравнениях исследуемой задачи, s — частотный параметр из преобразования Лапласа по временной координате,

$$\lambda_0^2 = \frac{2\rho h^5}{T^2 D},$$

где T — характеристический отрезок времени, введенный для решения задачи в безразмерных переменных, а D — характерная жесткость материала.

При получении уравнения (3) вводились следующие безразмерные параметры и переменные:

$$x = h\xi, \quad y = h\eta, \quad t = T\tau, \quad w = hW^*, \\ D_x = D\hat{D}_x, \quad D_y = D\hat{D}_y, \quad D_1 = D\hat{D}_1, \quad D_{xy} = D\hat{D}_{xy}.$$

Решения уравнения (3) имеют вид

$$c_k = \left(\hat{D}_x \hat{D}_y - (\sqrt{\hat{D}_1^2 + 4\hat{D}_{xy}^2} - 2\hat{D}_{xy})^2 \right)^{1/4}, \quad c_2 = \left(\hat{D}_x \hat{D}_y - (\sqrt{\hat{D}_1^2 + 4\hat{D}_{xy}^2} + 2\hat{D}_{xy})^2 \right)^{1/4}. \quad (4)$$

Здесь c_k соответствует коэффициенту скорости изгибной краевой волны для случая ортотропной пластины, а c_2 — второй корень уравнения, не имеющий физического смысла. Из равенств (4) видно, что коэффициент скорости изгибной краевой волны зависит от четырех жесткостей D_x , D_y , D_1 и D_{xy} .

Исследуем закономерности возникновения и распространения краевой изгибной волны в случае, когда свободный торец пластины нагружен изгибающим моментом. В этом случае решается задача (1), (2). Решение для образа прогиба $\hat{W}(\eta)$ имеет следующий вид:

$$\hat{W}(\eta) = \frac{\hat{M}_0}{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_1(c) e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}}}{c} \alpha_c \eta} + \Delta_2(c) e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}}}{c} \beta_c \eta}}{\Delta(c)} X(c), \quad (5)$$

где $\hat{M}_0(p, s)$ — образ безразмерного изгибающего момента, приложенного к краю пластины,

$$\alpha_c = \frac{1}{\sqrt{\hat{D}_y}} \sqrt{\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy} - \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4}}, \quad (6)$$

$$\beta_c = \frac{1}{\sqrt{\hat{D}_y}} \sqrt{\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy} + \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4}}, \quad (7)$$

$$\Delta_1(c) = - \left[2\hat{D}_{xy} - \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4} \right] \beta_c, \quad (8)$$

$$\Delta_2(c) = \left[2\hat{D}_{xy} + \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4} \right] \alpha_c, \quad (9)$$

$$\Delta(c) = (\beta_c - \alpha_c)(c^4 - c_2^4), \quad (10)$$

$$X(c) = (\hat{D}_x \hat{D}_y - \hat{D}_1^2) - c^4 - 4\hat{D}_{xy} \sqrt{\hat{D}_x \hat{D}_y - c^4}. \quad (11)$$

В случае приложенной к торцу тонкой ортотропной пластины перерезывающей силы решение задачи строится для угла поворота вертикального сечения пластины $v(x, y, t) = \partial w / \partial y$ относительно оси Ox .

Общее решение задачи для образа угла поворота $\hat{V}(\eta)$ записывается в виде

$$\hat{V}(\eta) = \frac{\hat{M}_0}{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_1(c) e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}}}{c} \alpha_c \eta} + \Delta_2(c) e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}}}{c} \beta_c \eta}}{\Delta(c)} X(c), \quad (12)$$

где

$$\Delta_3(c) = - \left[2\hat{D}_{xy} + \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4} \right] \alpha_c,$$

$$\Delta_4(c) = \left[2\hat{D}_{xy} - \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4} \right] \beta_c.$$

Вклад краевой изгибной волны обусловлен вкладом полюсов знаменателя $c = \pm c_k$ в общее решение задачи о прогибе. Путем асимптотического анализа решений (5)–(12) можно построить следующие модели, явно описывающие основные закономерности распространения краевой волны. Для каждого из случаев краевого нагружения модель будет состоять из двух уравнений: параболического уравнения, описывающего распространение волны вдоль края пластины, и эллиптического, характеризующего ее затухание вглубь.

В случае приложенного к краю пластины изгибающего момента имеем следующее уравнение для прогиба на торце пластины:

$$\frac{c_k^{*4}}{D_y^2} \frac{\partial^4 w_e}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D_y} \frac{\partial^2 w_e}{\partial t^2} = Q_e^{(1)*} \frac{1}{D_y} \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2},$$

где $w_e(x, t)$ — краевой прогиб, связанный с краевой изгибной волной Коненкова,

$$Q_e^{(1)*} = \frac{\Delta_1(c_k^*) + \Delta_2(c_k^*)}{\Delta(c_k^*)},$$

$$c_k^* = \left(D_x D_y - (\sqrt{D_1^2 + 4D_{xy}^2} - 2D_{xy})^2 \right)^{1/4}, \quad c_2^* = \left(D_x D_y - (\sqrt{D_1^2 + 4D_{xy}^2} + 2D_{xy})^2 \right)^{1/4},$$

$$\Delta_1(c_k^*) = - \left[2D_{xy} - \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}} \right] \beta_c(c_k^*),$$

$$\Delta_2(c_k^*) = \left[2D_{xy} + \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}} \right] \alpha_c(c_k^*),$$

$$\Delta(c_k^*) = (\beta_c(c_k^*) - \alpha_c(c_k^*))(c_k^{*4} - c_2^{*4}),$$

$$\alpha_c(c_k^*) = \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{D_1 + 2D_{xy} - \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}}},$$

$$\beta_c(c_k^*) = \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{D_1 + 2D_{xy} + \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}}}.$$



Для области вне торца соответствующая модель описывается следующим уравнением:

$$\left(D_x - \frac{c_k^{*4}}{D_y}\right) \frac{\partial^4 w_{in}}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w_{in}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_{in}}{\partial y^4} = 0,$$

где $w_{in}(x, y)$ — прогиб внутри пластины, вызванный краевой изгибной волной Коненкова, с краевыми условиями на торце

$$w_{in}(x, 0) = w_e(x), \quad D_y \frac{\partial^2 w_{in}}{\partial y^2} = -D_1 \frac{\partial^2 w_e}{\partial x^2}.$$

В случае приложенной к краю перерезывающей силы уравнение, описывающее поведение на торце пластины, имеет вид

$$\frac{c_k^{*4}}{D_y^2} \frac{\partial^4 v_e}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D_y} \frac{\partial^2 v_e}{\partial t^2} = Q_e^{(2)*} \frac{1}{D_y} \frac{\partial^2 N_0}{\partial x^2},$$

где $v_e(x, t)$ — угол поворота на торце пластины и $Q_e^{(2)*} = \frac{\Delta_3(c_k^*) + \Delta_4(c_k^*)}{\Delta(c_k^*)}$,

$$\Delta_3(c_k^*) = - \left[2D_{xy} + \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}} \right] \alpha_c(c_k^*),$$

$$\Delta_4(c_k^*) = \left[2D_{xy} - \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}} \right] \beta_c(c_k^*),$$

Для области вне торца пластины соответствующее уравнение записывается следующим образом:

$$\left(D_x - \frac{c_k^{*4}}{D_y}\right) \frac{\partial^4 v_{in}}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 v_{in}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 v_{in}}{\partial y^4} = 0,$$

где $v_{in}(x, y)$ — угол поворота, вызванный вкладом краевой изгибной волны внутри пластины. Соответствующие краевые условия на торце имеют вид

$$v_{in}(x, 0) = v_e(x), \quad D_y \frac{\partial^2 v_{in}}{\partial y^2} = -(D_1 + 4D_{xy}) \frac{\partial^2 v_e}{\partial x^2}.$$

Построенная модель, очевидно, раскрывает двойственную параболическую эллиптическую природу краевой изгибной волны, распространяющейся в тонких изотропных пластинах.

Анализ и сравнение решений с выделенным вкладом краевой волны с точными решениями задач о прогибе тонкой ортотропной полубесконечной пластины под воздействием приложенных торцевых нагрузок позволяет утверждать, что краевая волна вносит ключевой вклад в общий прогиб торца пластины. Также при помощи построенных моделей можно определить такие соотношения материальных параметров (например, жесткостей), при которых либо краевая волна будет вносить максимальный вклад в общий прогиб, либо пренебрежимо малый по сравнению с изгибом, вызванным приложенной нагрузкой. Примеры всех указанных случаев можно увидеть на рис. 2 и рис. 3.

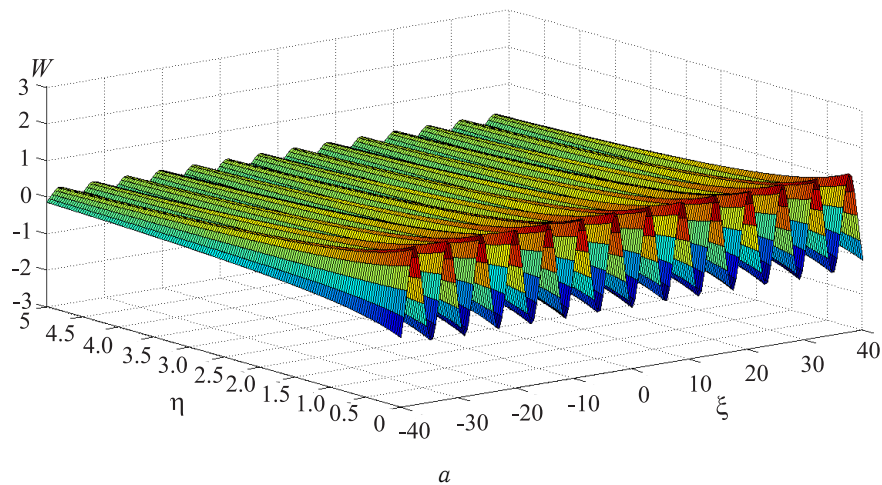


Рис. 2. Трехмерные профили краевой изгибной волны Коненкова в ортотропной пластине (связанная параболическая эллиптическая модель): а — $\hat{D}_1 = 0.99$

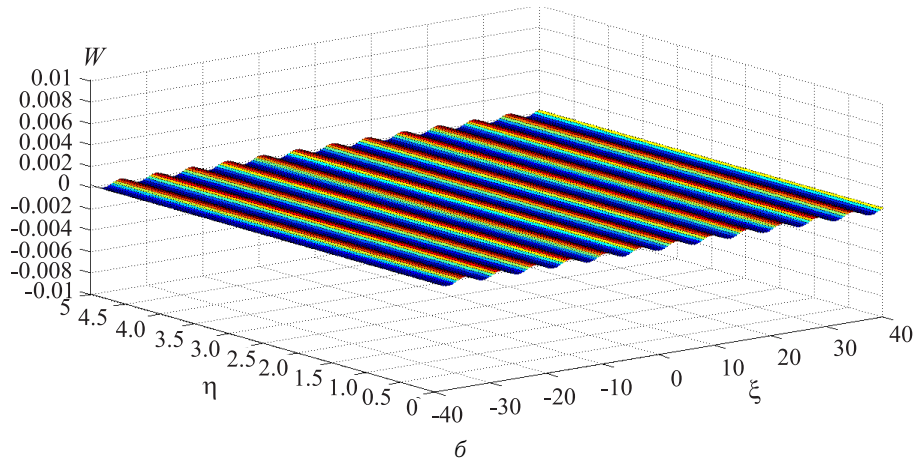


Рис. 2. Окончание. б — $\hat{D}_{xy} = 5$

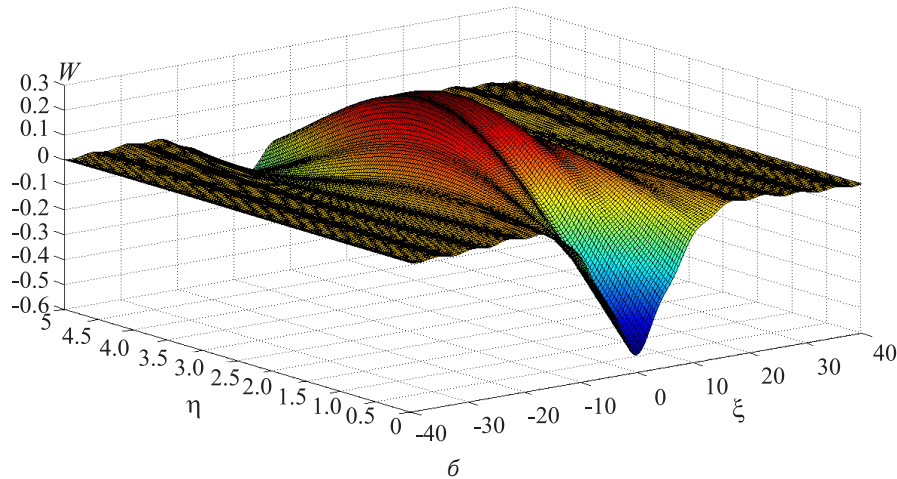
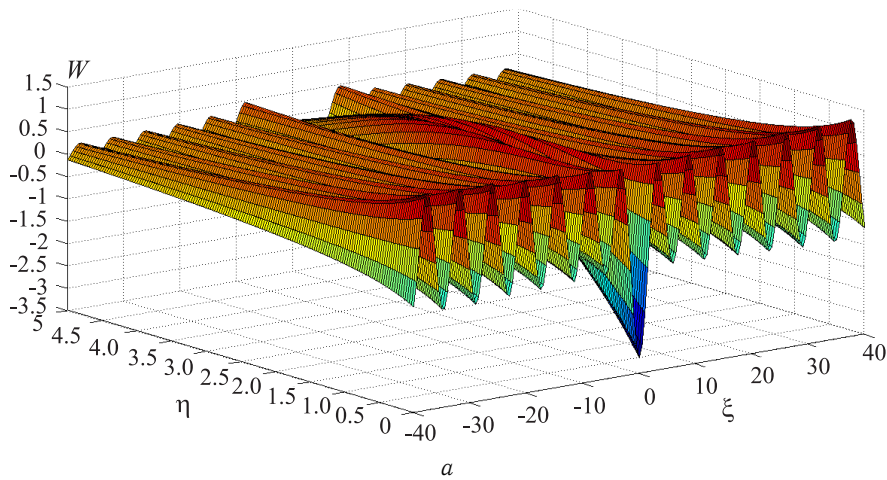


Рис. 3. Трехмерные профили полного прогиба ортотропной пластины (точное решение): а — $\hat{D}_1 = 0.99$; б — $\hat{D}_{xy} = 5$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены решения задач о прогибе тонких ортотропных полубесконечных пластин. Рассматривались случаи как со свободным краем пластин, так и с приложенными к нему нагрузками. Для всех рассмотренных задач были также построены связанные параболические эллиптические модели, выделяющие вклад локализованных изгибных краевых волн. Решение уравнений таких моделей значительно упрощает процесс определения основных характеристик распространения краевых волн в ортотропных тонких пластинах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545-а).

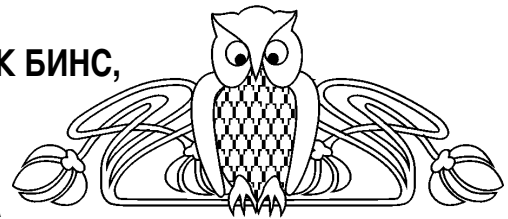


Библиографический список

1. Коненков Ю. К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6, вып. 1. С. 124–126. [Konenkov Yu. K. A Rayleigh-Type Flexural Wave // Soviet Phys. Acoustics. 1960. Vol. 6, iss. 1. P. 122–123.]
2. Norris A. N. Flexural edge waves // J. of Sound and Vibration. 1994. Vol. 171. P. 571–573.
3. Thompson I., Abrahams I. D., Norris A. N. On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates // J. Acoust. Soc. America. 2002. Vol. 112. P. 1756–1765.
4. Zakharov D. D., Becker W. Rayleigh type bending waves in anisotropic media // J. Sound and Vibration. 2003. Vol. 261. P. 805–818.

УДК 629

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОШИБОК БИНС, ФУНКЦИОНИРУЮЩЕЙ В НОРМАЛЬНОЙ ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ, ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ ВДОЛЬ ЭКВАТОРА С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ НА ПОСТОЯННОЙ ВЫСОТЕ



М. Ю. Логинов¹, М. Г. Ткаченко², Ю. Н. Челноков³

¹ Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов
E-mail: mike.loginov@gmail.com

² Автономный университет Мехико
E-mail: mich@xanum.uam.mx

³ Саратовский государственный университет
E-mail: chelnokovYuN@gmail.com

Analytical Solution of Linear Differential Error Equations of Strapdown Inertial Navigation System, Functioning in the Normal Geographic Reference Frame, for the Case of an Object, Following the Geographical Equator

M. Yu. Loginov, M. G. Tkachenko, Yu. N. Chelnokov

Analytical solution of linear differential error equations of the strapdown inertial navigation system, functioning in the normal geographic reference frame, for the object, following the Earth equator with constant speed and on the constant height, is derived. The solution is represented in the form, which is convenient for the analysis. The roots of the auxiliary equation are derived in the explicit form. Obtained results can be used, for example, for analysis of the accuracy of strapdown inertial navigation system.

В работе получено в явном виде аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений ошибок бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), функционирующей в нормальной географической системе координат, для случая движения с постоянной скоростью и на постоянной высоте вдоль земного экватора. Решение представлено в удобном для исследования виде, описывает влияние неточного задания начальных условий интегрирования на точность нахождения параметров навигации и справедливо в случае отсутствия инструментальных погрешностей гироскопов и акселерометров. Полученное решение может быть использовано при анализе точности работы БИНС.

Key words: inertial navigation, strapdown inertial navigation systems, strapdown INS errors, analytical solution of error equations, equator.

Ключевые слова: инерциальная навигация, бесплатформенные инерциальные навигационные системы, ошибки БИНС, аналитическое решение уравнений ошибок, экватор.

ВВЕДЕНИЕ

При построении алгоритмов функционирования БИНС используются так называемые уравнения идеальной работы БИНС, т.е. дифференциальные и функциональные соотношения, связывающие проекции векторов кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости объекта, измеряемые чувствительными элементами БИНС (при условии их идеального функционирования), с навигационными параметрами (координатами местонахождения и проекциями скорости) и параметрами ориентации. Возможны различные варианты таких уравнений [1–4]. В данной работе используются уравнения идеального функционирования БИНС в нормальной географической системе координат (НГСК), в которых в качестве промежуточных кинематических параметров ориентации используются параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) [4–10]. Эти уравнения используются в настоящее время для построения высокоточных алгоритмов функционирования современных отечественных БИНС, построенных на волоконно-оптических или лазерных гироскопах и кварцевых акселерометрах.

В работе [11] для этих уравнений выведены полные и линеаризованные дифференциальные урав-



нения ошибок, которые позволяют изучать влияние на работу БИНС погрешностей чувствительных элементов (акселерометров и гироскопов), ошибок начального задания параметров ориентации и навигации, а также законов движения объекта. Для аналитического исследования, как правило, используются линеаризованные дифференциальные уравнения ошибок БИНС. В некоторых частных случаях движения объекта становится возможным найти аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений ошибок. В работе [1] В. Д. Андреевым построены аналитические решения линейных дифференциальных уравнений ошибок определения декартовых координат объекта в инерциальной системе координат для случаев, когда объект неподвижен в инерциальной системе координат; движется с постоянной в инерциальной системе координат скоростью в неподвижной относительно инерциальной системы координат плоскости, проходящей через центр Земли; движется с постоянной скоростью по параллели. Последний случай включает в себя, как частные, случай неподвижного по отношению к Земле объекта (рассмотренный В. Д. Андреевым в приближённой постановке) и случай движения объекта с постоянной скоростью вдоль экватора. Решение, построенное в последнем случае с использованием преобразования Карсона–Хевисайда, по мнению В. Д. Андреева, громоздко и трудно обозримо. Более того, для корней характеристического уравнения интегрируемых уравнений ошибок, которые входят в построенное решение, в работе [1] не получены явные выражения через коэффициенты исходной системы.

Отметим, что аналитические решения дифференциальных уравнений ошибок для частных случаев движения объекта позволяют установить свойства уравнений функционирования БИНС, а также аналитически оценить влияние неточного задания начальных условий интегрирования и инструментальных погрешностей БИНС на точность нахождения параметров ориентации и навигации.

В данной работе подробно рассматривается построение аналитического решения линеаризованных дифференциальных уравнений ошибок БИНС [11] для случая движения объекта вдоль земного экватора с постоянной скоростью на постоянной высоте при отсутствии погрешностей гироскопов (измерителей угловой скорости) и акселерометров. Таким образом, полученное решение позволяет установить свойства уравнений функционирования БИНС в данном конкретном случае движения, а также аналитически оценить влияние неточного задания начальных условий интегрирования на точность нахождения параметров навигации. Решение справедливо в случае отсутствия инструментальных погрешностей гироскопов и акселерометров, представлено в удобном для исследования виде, а для корней характеристического уравнения интегрируемых уравнений ошибок получены явные выражения.

1. ИСХОДНАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается задача инерциальной ориентации и навигации объекта в географической опорной системе координат, решаемая с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы, имеющей в своем составе 3 ньютометра и пространственный измеритель абсолютной угловой скорости, жестко закрепленные на борту объекта, и бортовой вычислитель. Считается, что в задаче инерциальной навигации входит определение ориентации объекта относительно географического сопровождающего трехгранника (параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), а также углов ориентации объекта: географического курса, углов рыскания, тангажа и крена), проекций линейной скорости движения объекта относительно Земли на оси географического сопровождающего трехгранника, криволинейных географических координат местоположения объекта. В качестве исходной информации для решения этой задачи принимаются проекции векторов кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости объекта на связанные с ним оси (или приращения интегралов от них), формируемые чувствительными элементами БИНС.

При рассмотрении задач ориентации и навигации объекта используются следующие системы координат:

$O_1 X_1^* X_2^* X_3^* (X^*)$ — геоцентрическая инерциальная система координат с началом в центре масс Земли, принимаемой за эллипсоид вращения. Ось X_1^* направлена по полярной оси Земли (вдоль вектора u угловой скорости вращения Земли); оси X_2^* , X_3^* расположены в плоскости экватора и не участвуют в суточном вращении Земли;

$O_1 \eta_1 \eta_2 \eta_3 (\eta)$ — геоцентрическая система координат, жестко связанная с Землёй. Ось η_1 направ-

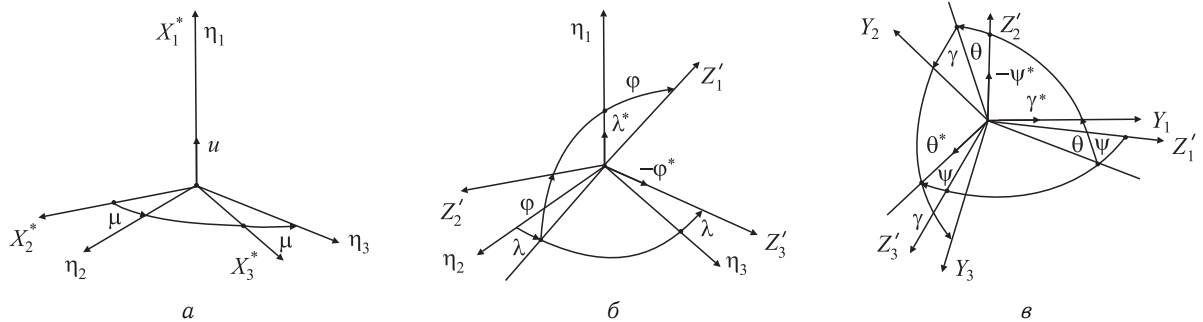


лена по оси X_1^* ; оси η_2, η_3 расположены в плоскости экватора, причём ось η_2 совпадает с линией пересечения плоскости экватора и гринвичского меридиана;

$O_2 Z'_1 Z'_2 Z'_3 (Z')$ — нормальная географическая система координат (или НГСК), начало O_2 которой совпадает с одной из точек объекта (точкой местоположения чувствительных масс ньютонометра). Ось Z'_2 направлена по географической вертикали вверх, ось Z'_1 — вдоль касательной к меридиану h -эллипсоида на север, ось Z'_3 — вдоль касательной к параллели на восток;

$O_2 Y_1 Y_2 Y_3 (Y)$ — связанная с объектом система координат. Ось Y_1 направлена по продольной оси объекта, ось Y_2 — по нормальной, а ось Y_3 — по поперечной.

Все введённые системы координат являются правыми. Схемы поворотов координатных трёхгранников приведены на рисунке. Здесь $\mu = \mu_0 + ut$ (μ — значение угла разворота системы координат η относительно X^* , μ_0 — значение этого угла в начальный момент времени, u — угловая скорость вращения Земли, t — время); λ, φ — географическая долгота и широта местонахождения объекта; ψ — географический курс объекта; ϑ, γ — углы тангажа и крена.



Схемы поворотов координатных трёхгранников: а — для систем координат X^* и η ; б — для систем координат η и Z' ; в — для систем координат Z' и Y

Взаимная ориентация введённых координатных трёхгранников задаётся параметрами Эйлера в соответствии со схемой поворотов

$$X^* \xrightarrow[\lambda_j]{\omega} Y \sim X^* \xrightarrow[\nu_j]{\omega} Z' \xrightarrow[\varkappa_j]{\omega} Y,$$

где λ_j и \varkappa_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию объекта (трёхгранника Y) относительно трёхгранников X^* и Z' соответственно; ν_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию НГСК относительно инерциальной системы координат X^* ; ω — вектор абсолютной угловой скорости вращения объекта (системы координат Y).

Рассмотрим исходную систему уравнений инерциальной ориентации и навигации объекта относительно нормальной географической системы координат, являющихся уравнениями идеального функционирования БИНС в НГСК [4, 6–8, 10]:

$$\begin{aligned} \dot{v}_N &= a_N + \omega_E v_H - (u_H + \omega_H) v_E, \\ \dot{v}_H &= a_H - \omega_E v_N + (u_N + \omega_N) v_E - g, \\ \dot{v}_E &= a_E + (u_H + \omega_H) v_N - (u_N + \omega_N) v_H; \\ 2\dot{\varkappa} &= n_\omega \varkappa - n_\varkappa \omega_{Z'} = (n_\omega - m_{\omega_{Z'}}) \varkappa, \\ \varkappa &= (\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3), \quad \omega_{Z'} = (0, \omega_N, \omega_H, \omega_E); \\ \dot{\lambda} &= v_E / (R_1 \cos \varphi), \quad \dot{\varphi} = v_N / R_2, \quad \dot{H} = v_H / \alpha; \\ \omega_N &= u_N + v_E / R_1, \quad \omega_H = u_H + (v_E \operatorname{tg} \varphi) / R_1, \quad \omega_E = -v_N / R_2, \\ u_N &= u \cos \varphi, \quad u_H = u \sin \varphi; \\ R_1 &= (\bar{a} + H) / \alpha, \quad R_2 = (\bar{a} + H) (1 - e^2) / \alpha^3, \quad \alpha = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}; \\ \operatorname{tg} \psi &= -\frac{\varkappa_0 \varkappa_2 - \varkappa_1 \varkappa_3}{\varkappa_0^2 + \varkappa_1^2 - 0,5}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\varkappa_0 \varkappa_1 - \varkappa_2 \varkappa_3}{\varkappa_0^2 + \varkappa_2^2 - 0,5}, \quad \sin \vartheta = 2 (\varkappa_1 \varkappa_2 + \varkappa_0 \varkappa_3); \end{aligned}$$



$$a_{Z'} = n_{\varkappa}^T m_{\varkappa} a, \quad a_{Z'} = (0, a_N, a_H, a_E), \quad a = (0, a_1, a_2, a_3);$$

$$g = g_{eo} \tilde{a}^2 (1 + \delta \sin^2 \varphi) / (\tilde{a} + H)^2.$$

Здесь v_k ($k = N, H, E$) — проекции относительной скорости объекта (скорости точки O_2 системы координат Y относительно земной поверхности) на оси НГСК; a_i ($i = 1, 2, 3$) и a_k ($k = N, H, E$) — проекции вектора кажущегося ускорения (ускорения, измеряемого пространственным ньютонометром) на объектовые оси и на оси НГСК; ω_i ($i = 1, 2, 3$) и ω_k ($k = N, H, E$) — проекции векторов абсолютных угловых скоростей вращения объекта и НГСК на объектовые оси и на оси НГСК; H — высота местонахождения объекта; $n_{\varkappa}, m_{\varkappa}, n_{\omega}, m_{\omega_{Z'}}$ — кватернионные матрицы типов n и m [4] (см. ниже); g — модуль ускорения силы тяжести, $u = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость суточного вращения Земли, $e^2 = 0,006692$ — квадрат первого эксцентриситета, $\tilde{a} = 6378245 \text{ м}$ — большая полуось земного эллипсоида вращения Красовского, $g_{eo} = 9,78049 \text{ м/с}^2$, $\delta = 5,317 \cdot 10^{-3}$.

Используемые в описанных выше соотношениях кватернионные матрицы n и m типов имеют следующий вид (для любого кватерниона l):

$$n(l) = \begin{pmatrix} l_0 & -l_1 & -l_2 & -l_3 \\ l_1 & l_0 & l_3 & -l_2 \\ l_2 & -l_3 & l_0 & l_1 \\ l_3 & l_2 & -l_1 & l_0 \end{pmatrix}, \quad m(l) = \begin{pmatrix} l_0 & -l_1 & -l_2 & -l_3 \\ l_1 & l_0 & -l_3 & l_2 \\ l_2 & l_3 & l_0 & -l_1 \\ l_3 & -l_2 & l_1 & l_0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы n_{ω} и $m_{\omega_{Z'}}$ выглядят так:

$$n_{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_{\omega_{Z'}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_N & -\omega_H & -\omega_E \\ \omega_N & 0 & -\omega_E & \omega_H \\ \omega_H & \omega_E & 0 & -\omega_N \\ \omega_E & -\omega_H & \omega_N & 0 \end{pmatrix}.$$

2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОШИБОК

Введём замену переменных следующим образом:

$$v_p = v_p^* + \Delta v_p \quad (p = N, H, E),$$

$$H = H^* + \Delta H, \quad \lambda = \lambda^* + \Delta \lambda, \quad \varphi = \varphi^* + \Delta \varphi,$$

$$\varkappa = \varkappa^* + \Delta \varkappa,$$

$$\varkappa^* = (\varkappa_0^*, \varkappa_1^*, \varkappa_2^*, \varkappa_3^*)^T, \quad \Delta \varkappa = (\Delta \varkappa_0, \Delta \varkappa_1, \Delta \varkappa_2, \Delta \varkappa_3)^T,$$

$$C_{\varkappa ij} = C_{\varkappa ij}^* + \Delta C_{\varkappa ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$a_i = a_i^* + \Delta a_i, \quad \omega_i = \omega_i^* + \Delta \omega_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

В этих соотношениях величины с верхним индексом «*» обозначают точные (невозмущённые) значения параметров, а величины со знаком Δ — отклонения параметров от их точных значений. Таким образом, Δv_p ($p = N, H, E$) — ошибки определения проекций относительной скорости объекта на оси НГСК; $\Delta H, \Delta \lambda, \Delta \varphi$ — ошибки определения высоты, долготы и широты объекта; $\Delta \varkappa_k$ ($k = 0, 1, 2, 3$) и $\Delta C_{\varkappa ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) — ошибки определения ориентации объекта относительно НГСК в параметрах Родрига–Гамильтона и направляющих косинусах; $\Delta a_i, \Delta \omega_i$ ($i = 1, 2, 3$) — инструментальные погрешности акселерометров и гироскопов соответственно.

Система линейных дифференциальных уравнений ошибок определения географических координат и проекций относительной скорости объекта может быть записана в матричном виде следующим образом [11]:

$$\Delta \dot{X} = A \Delta X + B, \tag{1}$$



где

$$\begin{aligned} \Delta \dot{X} &= \left(\Delta \dot{v}_N, \Delta \dot{v}_H, \Delta \dot{v}_E, \Delta \dot{H}, \Delta \dot{\varphi}, \Delta \dot{\lambda} \right)^T, \quad \Delta X = \left(\Delta v_N, \Delta v_H, \Delta v_E, \Delta H, \Delta \varphi, \Delta \lambda \right)^T, \\ B &= (O_1, O_2, O_3, 0, 0, 0)^T, \quad O_i = \sum_{j=1}^3 C_{\varkappa ij}^* \Delta a_j + \sum_{j=1}^3 Q_{ij} a_j^*, \quad Q = C_\nu^* \Delta C_\lambda^T. \end{aligned} \quad (2)$$

В этих соотношениях C_ν^* — матрица невозмущённых значений направляющих косинусов, характеризующих ориентацию НГСК относительно инерциальной системы координат X^* , ΔC_λ — матрица направляющих косинусов, описывающая ошибку определения ориентации объекта относительно инерциальной системы координат X^* , а элементы a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) матрицы A выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{v_H^*}{R_2^*}, \quad a_{12} = \omega_E^*, \quad a_{13} = -2\omega_H^*, \quad a_{14} = \frac{(\omega_H^* - u_H^*)v_E^* - \omega_E^*v_H^*}{\tilde{a} + H^*}, \\ a_{15} &= -a_H^* - 2u_N^*v_E^* - \frac{(\omega_N^* - u_N^*)v_E^*}{\cos^2 \varphi^*} + \frac{(v_E^*)^2 e^2 \sin^2 \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*} + 3\frac{v_N^*v_H^*e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^*(1 - e^2)}, \\ a_{16} &= -a_E^* \sin \varphi^*, \quad a_{21} = -2\omega_E^*, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = 2\omega_N^*, \\ a_{24} &= \frac{\omega_E^*v_N^* - (\omega_N^* - u_N^*)v_E^* + 2g^*}{(\tilde{a} + H^*)}, \\ a_{25} &= a_N^* - 2u_H^*v_E^* - \frac{2g_{eo}\tilde{a}^2 \delta \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)^2} - 3\frac{(v_N^*)^2 e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^*(1 - e^2)} - \frac{(v_E^*)^2 e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*}, \\ a_{26} &= a_E^* \cos \varphi^*, \quad a_{31} = u_H^* + \omega_H^*, \quad a_{32} = -u_N^* - \omega_N^*, \\ a_{33} &= \frac{v_N^* \operatorname{tg} \varphi^* - v_H^*}{R_1^*}, \quad a_{34} = \frac{(\omega_N^* - u_N^*)v_H^* - (\omega_H^* - u_H^*)v_N^*}{\tilde{a} + H^*}, \\ a_{35} &= 2u_N^*v_N^* + 2u_H^*v_H^* + \frac{(\omega_N^* - u_N^*)v_N^*}{\cos^2 \varphi^*} + \frac{v_E^*e^2 \sin \varphi^* (v_H^* \cos \varphi^* - v_N^* \sin \varphi^*)}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*}, \\ a_{36} &= a_N^* \sin \varphi^* - a_H^* \cos \varphi^*, \quad a_{41} = 0, \quad a_{42} = 1/\alpha^*, \quad a_{43} = 0, \quad a_{44} = 0, \\ a_{45} &= v_H^*e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^* / (\alpha^*)^3, \quad a_{46} = 0, \quad a_{51} = 1/R_2^*, \quad a_{52} = 0, \quad a_{53} = 0, \\ a_{54} &= -\frac{v_N^*}{R_2^*(\tilde{a} + H^*)}, \quad a_{55} = -3\frac{v_N^*e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^*(1 - e^2)}, \quad a_{56} = 0, \quad a_{61} = 0, \quad a_{62} = 0, \\ a_{63} &= \frac{1}{R_1^* \cos \varphi^*}, \quad a_{64} = -\frac{v_E^*}{R_1^* \cos \varphi^* (\tilde{a} + H^*)}, \quad a_{65} = \frac{v_E^* \sin \varphi^*}{R_1^* \cos^2 \varphi^*} - \frac{v_E^*e^2 \sin \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*}, \quad a_{66} = 0. \end{aligned}$$

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЙ ОШИБОК

При выводе изучаемых дифференциальных уравнений ошибок используется следующее матричное соотношение [11]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta a_N \\ \Delta a_H \\ \Delta a_E \end{pmatrix} &= \Delta \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix} + \Delta \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \varphi^* \\ 0 & 0 & \cos \varphi^* \\ \sin \varphi^* & \cos \varphi^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix} + \\ &+ (C_\varkappa^*)^T \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{pmatrix} + C_\nu^* \Delta C_\lambda^T \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где C_\varkappa^* — матрица направляющих косинусов, описывающая точную (невозмущённую) ориентацию объекта относительно НГСК. Соотношение (3) описывает погрешности Δa_N , Δa_H , Δa_E определения проекций кажущегося ускорения объекта на оси НГСК. Они используются при построении уравнений



ошибок определения проекций Δv_N , Δv_H , Δv_E относительной скорости объекта. Отметим, что неоднородная часть B в уравнениях (1) появляется из третьего и четвертого слагаемых в правой части соотношения (3).

Будем считать, что инструментальные погрешности гироскопов и акселерометров отсутствуют, т.е. $\Delta a_j = 0$, $\Delta \omega_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$). Тогда третье слагаемое в правой части (3) обращается в нуль. Кроме того, учтём, что

$$\Delta C_\lambda^T \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix} = \Delta C_\lambda^T C_\varkappa^* \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix}, \quad C_\varkappa^* = C_\lambda^* (C_\nu^*)^T,$$

где C_λ^* — матрица направляющих косинусов, описывающая точную (невозмущённую) ориентацию объекта относительно инерциальной системы координат X^* . С учётом этого соотношения, четвёртый член в правой части соотношения (3) примет вид

$$C_\nu^* \Delta C_\lambda^T C_\lambda^* (C_\nu^*)^T \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Линейные дифференциальные уравнения ошибок определения ориентации объекта в инерциальной системе координат имеют аналитическое решение, из которого при отсутствии погрешностей гироскопов следует [1, 4]:

$$\Delta C_\lambda(t) = C_\lambda^*(t) (C_\lambda^*(t_0))^T \Delta C_\lambda(t_0). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим:

$$C_\nu^* \Delta C_\lambda^T(t_0) C_\lambda^*(t_0) (C_\lambda^*)^T C_\lambda^* (C_\nu^*) \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix} = C_\nu^* \Delta C_\lambda^T(t_0) C_\lambda^*(t_0) (C_\nu^*)^T \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Матрица направляющих косинусов C_ν^* , описывающая точную ориентацию НГСК относительно инерциальной системы координат X^* , для случая движения объекта по экватору выглядит следующим образом:

$$C_\nu^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda_a^* & \sin \lambda_a^* \\ 0 & -\sin \lambda_a^* & \cos \lambda_a^* \end{pmatrix}, \quad \lambda_a^* = \mu + ut + \lambda^*. \quad (7)$$

Учитывая (7), а также условие $a_N^* = a_E^* = 0$, справедливое в случае движения объекта вдоль экватора, из (6) получаем новый вектор-столбец:

$$b = a_H^* \begin{bmatrix} \lambda_{12} \cos \lambda_a^* + \lambda_{13} \sin \lambda_a^* \\ \lambda_{22} \cos^2 \lambda_a^* + (\lambda_{32} + \lambda_{23}) \cos \lambda_a^* \sin \lambda_a^* + \lambda_{33} \sin^2 \lambda_a^* \\ \lambda_{32} \cos^2 \lambda_a^* + (\lambda_{33} - \lambda_{22}) \cos \lambda_a^* \sin \lambda_a^* - \lambda_{23} \sin^2 \lambda_a^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где λ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — элементы матрицы $\Delta C_\lambda^T(t_0) C_\lambda^*(t_0)$.

Таким образом, в случае движения объекта вдоль экватора при отсутствии инструментальных погрешностей гироскопов и акселерометров вместо соотношений (1)–(2) получаем уравнения

$$\Delta \dot{X} = A \Delta X + b, \quad (9)$$

где вектор-столбец b описывается соотношением (8) и отражает влияние неточного задания начальной ориентации объекта в инерциальной системе координат на вектор ΔX ошибок определения параметров навигации.



4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

При невозмущённом движении объекта вдоль экватора с постоянной скоростью v_E^* на постоянной высоте H^* , при условии, что Земля — сфера, т.е. $\alpha = 1$ и $e^2 = 0$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi^* = 0, \quad a_N^* = a_E^* = 0, \quad a_H^* = g^* - 2uv_E^* - (v_E^*)^2/R_1^*, \quad \omega_N^* = u + v_E^*/R_1^*, \\ \omega_H^* = \omega_E^* = 0, \quad v_N^* = v_H^* = 0, \quad R_1^* = \bar{a} + H^*, \quad g^* = g_{eo}\bar{a}^2/(\bar{a} + H^*). \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, рассмотрим однородную систему, соответствующую линейной неоднородной системе (9) дифференциальных уравнений ошибок определения проекций относительной скорости объекта и его криволинейных координат:

$$\Delta \dot{X} = A \Delta X, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta X = (\Delta v_N, \Delta v_H, \Delta v_E, \Delta H, \Delta \varphi, \Delta \lambda)^T, \\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -g^* & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_N^* & a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & -2u - v_E^*/R_1^* & 0 & 0 & 0 & -a_H^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/R_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_1^* & -v_E^*/(R_1^*)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ a_{24} = 2g^*/R_1^* - (v_E^*/R_1^*)^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим обычную систему линейных уравнений:

$$(A - \beta E) e = 0, \quad (11)$$

где β — число (вещественное или комплексное), $e = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)^T$. Из системы (11) найдём возможные значения β и соответствующие им собственные векторы e . Перепишем систему (11) в скалярном виде:

$$\begin{aligned} -\beta\alpha_1 - g^*\alpha_5 &= 0, \\ -\beta\alpha_2 + 2\omega_N^*\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 &= 0, \\ -(2u + v_E^*/R_1^*)\alpha_2 - \beta\alpha_3 - a_H^*\alpha_6 &= 0, \\ \alpha_2 - \beta\alpha_4 &= 0, \\ \alpha_1/R_1^* - \beta\alpha_5 &= 0, \\ \alpha_3/R_1^* - \alpha_4 v_E^*/(R_1^*)^2 - \beta\alpha_6 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из первого и пятого уравнений системы (12) находим

$$\alpha_1 = -\alpha_5 g^*/\beta, \quad \alpha_1 = R_1^* \beta \alpha_5.$$

Следовательно, имеются две возможности:

(а) $R_1^* \beta = -g^*/\beta$, откуда $\beta_{1,2} = \pm \sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i$ (i — мнимая единица);

(б) $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$, и собственные значения β следует определять из второго, третьего, четвёртого и шестого уравнений системы (12).

В случае (а) можно положить $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_5 = 1$, и из равенства $\alpha_1 = R_1^* \beta \alpha_5$ получим $\alpha_1 = \pm R_1^* \sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i$. Таким образом, найдены два собственных вектора:

$$e_1 = \left(\sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i; 0; 0; 0; 1; 0 \right), \quad e_2 = \left(-\sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i; 0; 0; 0; 1; 0 \right),$$



соответствующих собственным значениям $\beta_1 = \sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i$ и $\beta_2 = -\sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i$.

Рассмотрим случай (б). Из четвёртого уравнения системы (12) находим $\alpha_2 = \beta\alpha_4$ и полученное значение для α_2 подставляем во второе, третье и шестое уравнения системы (12). Получаем:

$$\begin{aligned} 2\omega_N^* \alpha_3 + (a_{24} - \beta^2) \alpha_4 &= 0, \\ -(2u + v_E^*/R_1^*) \beta \alpha_4 - \beta \alpha_3 - a_H^* \alpha_6 &= 0, \\ \alpha_3/R_1^* - \alpha_4 v_E^*/(R_1^*)^2 - \beta \alpha_6 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из первого уравнения системы (13) находим

$$\alpha_3 = (\beta^2 - a_{24}) \alpha_4 / 2\omega_N^*. \quad (14)$$

Подставляя полученное значение α_3 во второе и третье уравнения системы (13), находим:

$$\alpha_6 = -\frac{\beta}{a_H^*} \left(2u + \frac{v_E^*}{R_1^*} + \frac{\beta^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} \right) \alpha_4, \quad \alpha_6 = \frac{1}{R_1^* \beta} \left(\frac{\beta^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} - \frac{v_E^*}{R_1^*} \right) \alpha_4. \quad (15)$$

Для совместимости двух последних уравнений необходимо, чтобы

$$-\frac{\beta}{a_H^*} \left(2u + \frac{v_E^*}{R_1^*} + \frac{\beta^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} \right) = \frac{1}{R_1^* \beta} \left(\frac{\beta^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} - \frac{v_E^*}{R_1^*} \right).$$

Отсюда после несложных преобразований получаем биквадратное относительно β уравнение:

$$\beta^4 + \beta^2 [2\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) - a_{24} + a_H^*/R_1^*] - (a_{24} + 2\omega_N^* v_E^*/R_1^*) a_H^*/R_1^* = 0.$$

Можно показать, что в широком диапазоне высот H^* и скоростей v_E^* полученное уравнение имеет два действительных и два чисто мнимых корня. Это условие перестаёт выполняться при достижении некоторой максимальной скорости $(v_E^*)^{\max}$ (т.е. при $|v_E^*| > (v_E^*)^{\max}$), которая на нулевой высоте равна $(v_E^*)^{\max} \approx 7440$ м/с и с ростом высоты убывает по закону, близкому к линейному. Так, для высоты $H^* = 100$ км максимальная скорость приблизительно равна $(v_E^*)^{\max} \approx 7370$ м/с, а для высоты $H^* = 1000$ км $(v_E^*)^{\max} \approx 6820$ м/с.

Пусть β_3 и β_4 — вещественные корни, а β_5 и β_6 — чисто мнимые. Тогда

$$\begin{aligned} \beta_3 &= -\beta_4 = \sqrt{\rho_1}, & \beta_5 &= -\beta_6 = \sqrt{\rho_2}, \\ \rho_1 &= -\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) + (a_{24} - a_H^*/R_1^*)/2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[(2\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) - a_{24} + a_H^*/R_1^*)^2 + 4a_H^* (a_{24} + 2\omega_N^* v_E^*/R_1^*)/R_1^* \right]^{1/2}, \\ \rho_2 &= -\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) + (a_{24} - a_H^*/R_1^*)/2 - \\ &- \frac{1}{2} \left[(2\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) - a_{24} + a_H^*/R_1^*)^2 + 4a_H^* (a_{24} + 2\omega_N^* v_E^*/R_1^*)/R_1^* \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Найдём собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям. Из соотношений (14), (15) и четвёртого уравнения системы (12) находим при $\alpha_4 = 1$

$$\alpha_2^{(i)} = \beta_i, \quad \alpha_3^{(i)} = (\beta_i^2 - a_{24})/2\omega_N^*, \quad \alpha_6^{(i)} = -\beta_i \left(2u + v_E^*/R_1^* + \alpha_3^{(i)} \right) / a_H^*,$$

где $i = 3, 4, 5, 6$. Отметим, что $\alpha_3^{(4)} = \alpha_3^{(3)}$, $\alpha_6^{(4)} = -\alpha_6^{(3)}$, $\alpha_3^{(5)} = \alpha_3^{(6)}$ и $\alpha_6^{(5)} = -\alpha_6^{(6)}$. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 &= \left(0; \beta_3; \alpha_3^{(3)}; 1; 0; \alpha_6^{(3)} \right), & \mathbf{e}_4 &= \left(0; -\beta_3; \alpha_3^{(3)}; 1; 0; -\alpha_6^{(3)} \right), \\ \mathbf{e}_5 &= \left(0; \beta_5; \alpha_3^{(5)}; 1; 0; \alpha_6^{(5)} \right), & \mathbf{e}_6 &= \left(0; -\beta_5; \alpha_3^{(5)}; 1; 0; -\alpha_6^{(5)} \right). \end{aligned}$$

Фундаментальная система решений уравнения (10) имеет вид

$$W(t) = (\mathbf{e}_1 e^{\beta_1 t}, \mathbf{e}_2 e^{\beta_2 t}, \mathbf{e}_3 e^{\beta_3 t}, \mathbf{e}_4 e^{\beta_4 t}, \mathbf{e}_5 e^{\beta_5 t}, \mathbf{e}_6 e^{\beta_6 t}),$$

где \mathbf{e}_i ($i = 1, \dots, 6$) — векторы-столбцы.



Обозначим $\alpha_6^{(5)} = \tilde{\nu}i$, $\beta_1 = \tilde{\omega}i$, $\beta_5 = \tilde{\mu}i$, где $\tilde{\nu}$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\mu}$ — действительные числа, причём $\tilde{\omega} = \sqrt{g^*/R_1^*}$. Тогда, в соответствии с теорией дифференциальных уравнений, общее решение линейной однородной системы (10) запишется в виде

$$\Delta X(t) = W(t) C', \quad C' = (C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, C'_5, C'_6)^T,$$

или в скалярной записи в виде

$$\begin{aligned} \Delta v_N &= \sqrt{g^* R_1^*} [C_2 \cos \tilde{\omega}t - C_1 \sin \tilde{\omega}t], \\ \Delta v_H &= \beta_3 [C_3 e^{\beta_3 t} - C_4 e^{-\beta_3 t}] + \tilde{\mu} [C_6 \cos(\tilde{\mu}t) - C_5 \sin(\tilde{\mu}t)], \\ \Delta v_E &= \alpha_3^{(3)} [C_3 e^{\beta_3 t} + C_4 e^{-\beta_3 t}] + \alpha_3^{(5)} [C_5 \cos(\tilde{\mu}t) + C_6 \sin(\tilde{\mu}t)], \\ \Delta H &= C_3 e^{\beta_3 t} + C_4 e^{-\beta_3 t} + C_5 \cos(\tilde{\mu}t) + C_6 \sin(\tilde{\mu}t), \\ \Delta \varphi &= C_1 \cos(\tilde{\omega}t) + C_2 \sin(\tilde{\omega}t), \\ \Delta \lambda &= \alpha_6^{(3)} [C_3 e^{\beta_3 t} - C_4 e^{-\beta_3 t}] + \tilde{\nu} [C_6 \cos(\tilde{\mu}t) - C_5 \sin(\tilde{\mu}t)], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \sqrt{\rho_1}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{g^*/R_1^*}, \quad \tilde{\mu} = \sqrt{-\rho_2}, \quad \tilde{\nu} = -\sqrt{-\rho} \left(2u + v_E^*/R_1^* + \alpha_3^{(5)} \right) / a_H^*, \\ \alpha_3^{(3)} &= \frac{(\beta_3)^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} = \frac{\rho_1 - a_{24}}{2\omega_N^*}, \quad \alpha_3^{(5)} = \frac{(\beta_5)^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} = \frac{\rho_2 - a_{24}}{2\omega_N^*}, \\ \alpha_6^{(3)} &= -\beta_3 \left(2u + v_E^*/R_1^* + \alpha_3^{(3)} \right) / a_H^* = -\sqrt{\rho_1} \left(2u + v_E^*/R_1^* + \alpha_3^{(3)} \right) / a_H^*, \\ a_{24} &= 2g^*/R_1^* - (v_E^*/R_1^*)^2, \\ \rho_1 &= -\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) + (a_{24} - a_H^*/R_1^*)/2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[(2\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) - a_{24} + a_H^*/R_1^*)^2 + 4a_H^* (a_{24} + 2\omega_N^* v_E^*/R_1^*)/R_1^* \right]^{1/2}, \\ \rho_2 &= -\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) + (a_{24} - a_H^*/R_1^*)/2 - \\ &- \frac{1}{2} \left[(2\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) - a_{24} + a_H^*/R_1^*)^2 + 4a_H^* (a_{24} + 2\omega_N^* v_E^*/R_1^*)/R_1^* \right]^{1/2}, \\ a_H^* &= g^* - 2uv_E^* - (v_E^*)^2/R_1^*, \end{aligned} \quad (17)$$

а C_i ($i = 1, \dots, 6$) — постоянные интегрирования, связанные с константами C'_i соотношениями

$$\begin{aligned} C_1 &= C'_1 + C'_2, \quad C_2 = i(C'_1 - C'_2), \quad C_3 = C'_3, \\ C_4 &= C'_4, \quad C_5 = C'_5 + C'_6, \quad C_6 = i(C'_5 - C'_6). \end{aligned}$$

Обозначим начальные условия интегрирования линейной однородной системы (10) через Δv_N^0 , Δv_H^0 , Δv_E^0 , ΔH^0 , $\Delta \varphi^0$ и $\Delta \lambda^0$. При $t = 0$ из системы (16) находим:

$$\begin{aligned} \Delta v_N^0 &= C_2 \sqrt{g^* R_1^*}, \quad \Delta v_H^0 = \beta_3 (C_3 - C_4) + \tilde{\mu} C_6, \quad \Delta v_E^0 = \alpha_3^{(3)} (C_3 + C_4) + \alpha_3^{(5)} C_5, \\ \Delta H^0 &= C_3 + C_4 + C_5, \quad \Delta \varphi^0 = C_1, \quad \Delta \lambda^0 = \alpha_6^{(3)} (C_3 - C_4) + \tilde{\nu} C_6. \end{aligned}$$

Из полученной системы находим константы C_i ($i = 1, \dots, 6$):

$$\begin{aligned} C_1 &= \Delta \varphi^0, \quad C_2 = \Delta v_N^0 / \sqrt{g^* R_1^*}, \quad C_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v_E^0 - \Delta H^0 \alpha_3^{(5)}}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} + \frac{\tilde{\mu} \Delta \lambda^0 - \tilde{\nu} \Delta v_H^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right), \\ C_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v_E^0 - \Delta H^0 \alpha_3^{(5)}}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} - \frac{\tilde{\mu} \Delta \lambda^0 - \tilde{\nu} \Delta v_H^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right), \quad C_5 = \frac{\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}}, \end{aligned}$$

$$C_6 = \frac{\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3}.$$

Перепишем решение (16) в виде

$$\begin{aligned} \Delta v_N &= a_{\Delta v_N} \sin(\tilde{\omega} t + \varepsilon_{\Delta v_N}), \\ \Delta v_H &= \beta_3 (C_3 e^{\beta_3 t} - C_4 e^{-\beta_3 t}) + a_{\Delta v_H} \sin(\tilde{\mu} t + \varepsilon_{\Delta v_H}), \\ \Delta v_E &= \alpha_3^{(3)} (C_3 e^{\beta_3 t} + C_4 e^{-\beta_3 t}) + a_{\Delta v_E} \sin(\tilde{\mu} t + \varepsilon_{\Delta v_E}), \\ \Delta H &= C_3 e^{\beta_3 t} + C_4 e^{-\beta_3 t} + a_{\Delta H} \sin(\tilde{\mu} t + \varepsilon_{\Delta H}), \\ \Delta \varphi &= a_{\Delta \varphi} \sin(\tilde{\omega} t + \varepsilon_{\Delta \varphi}), \\ \Delta \lambda &= \alpha_6^{(3)} (C_3 e^{\beta_3 t} - C_4 e^{-\beta_3 t}) + a_{\Delta \lambda} \sin(\tilde{\mu} t + \varepsilon_{\Delta \lambda}), \end{aligned} \tag{18}$$

где $a_{\Delta v_N}, a_{\Delta v_H}, a_{\Delta v_E}, a_{\Delta H}, a_{\Delta \varphi}, a_{\Delta \lambda}$ — амплитуды гармонических колебаний; $\varepsilon_{\Delta v_N}, \varepsilon_{\Delta v_H}, \varepsilon_{\Delta v_E}, \varepsilon_{\Delta H}, \varepsilon_{\Delta \varphi}, \varepsilon_{\Delta \lambda}$ — начальные фазы этих колебаний; $\tilde{\omega}, \tilde{\mu}$ — собственные (круговые) частоты колебаний.

Частоты колебаний определяются согласно формулам (17). Амплитуды и начальные фазы колебаний определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} a_{\Delta v_N} &= \sqrt{g^* R_1^*} (C_1^2 + C_2^2)^{1/2} = \left[g^* R_1^* (\Delta \varphi^0)^2 + (\Delta v_N^0)^2 \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta v_N} &= -C_2/C_1 = -\Delta v_N^0 / (\Delta \varphi^0 \sqrt{g^* R_1^*}); \\ a_{\Delta v_H} &= \tilde{\mu} [C_5^2 + C_6^2]^{1/2} = \tilde{\mu} \left[\left(\frac{\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta v_H} &= -\frac{C_6}{C_5} = \frac{(\beta_3 \Delta \lambda^0 - \alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0) (\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)})}{(\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3) (\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0)}; \\ a_{\Delta v_E} &= \alpha_3^{(5)} [C_5^2 + C_6^2]^{1/2} = \alpha_3^{(5)} \left[\left(\frac{\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta v_E} &= \frac{C_5}{C_6} = \frac{(\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0) (\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3)}{(\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}) (\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0)}; \\ a_{\Delta H} &= [C_5^2 + C_6^2]^{1/2} = \left[\left(\frac{\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta H} &= \frac{C_5}{C_6} = \frac{(\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0) (\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3)}{(\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}) (\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0)}; \\ a_{\Delta \varphi} &= [C_1^2 + C_2^2]^{1/2} = \left[(\Delta \varphi^0)^2 + (\Delta v_N^0)^2 / (g^* R_1^*) \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta \varphi} &= C_1/C_2 = \sqrt{g^* R_1^*} \Delta \varphi^0 / \Delta v_N^0; \\ a_{\Delta \lambda} &= \tilde{\nu} [C_5^2 + C_6^2]^{1/2} = \tilde{\nu} \left[\left(\frac{\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta \lambda} &= -\frac{C_6}{C_5} = \frac{(\beta_3 \Delta \lambda^0 - \alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0) (\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)})}{(\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3) (\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Подставим значения констант C_i ($i = 1, \dots, 6$) в соотношения (16) и запишем полученное решение дифференциальных уравнений ошибок в матричном виде:

$$\Delta X(t) = P(t) \Delta X^0, \tag{20}$$



где

$$\Delta X(t) = (\Delta v_N, \Delta v_H, \Delta v_E, \Delta H, \Delta \varphi, \Delta \lambda)^T, \quad \Delta X^0 = (\Delta v_N^0, \Delta v_H^0, \Delta v_E^0, \Delta H^0, \Delta \varphi^0, \Delta \lambda^0)^T, \quad (21)$$

а $P(t)$ — квадратная матрица 6×6 , элементы p_{ij} ($i, j = 1, \dots, 6$) которой имеют вид

$$\begin{aligned} p_{11} &= \cos(\tilde{\omega}t), & p_{12} &= 0, & p_{13} &= 0, & p_{14} &= 0, & p_{15} &= -\sqrt{g^* R_1^*} \sin(\tilde{\omega}t), & p_{16} &= 0, \\ p_{21} &= 0, & p_{22} &= \left[\beta_3 \tilde{\nu} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} \right) \right], \\ p_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\beta_3 (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) + \tilde{\mu} \sin(\tilde{\mu}t)}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}}, & p_{24} &= -\frac{1}{2} \frac{\beta_3 \alpha_3^{(5)} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) + \tilde{\mu} \alpha_3^{(3)} \sin(\tilde{\mu}t)}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}}, \\ p_{25} &= 0, & p_{26} &= - \left[\beta_3 \tilde{\mu} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - \beta_3 \tilde{\mu} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} \right) \right], & p_{31} &= 0, \\ p_{32} &= \left[\tilde{\nu} \alpha_3^{(3)} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) - 2 \alpha_3^{(5)} \alpha_6^{(3)} \sin(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} \right) \right], \\ p_{33} &= \left[\alpha_3^{(3)} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \alpha_3^{(5)} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)} \right) \right], \\ p_{34} &= - \left[\alpha_3^{(3)} \alpha_3^{(5)} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \alpha_3^{(3)} \alpha_3^{(5)} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)} \right) \right], & p_{35} &= 0, \\ p_{36} &= - \left[\tilde{\mu} \alpha_3^{(3)} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) - 2 \beta_3 \alpha_3^{(5)} \sin(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} \right) \right], & p_{41} &= 0, \\ p_{42} &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{\nu} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) - 2 \alpha_6^{(3)} \sin(\tilde{\mu}t)}{\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)}}, & p_{43} &= \frac{1}{2} \frac{(e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \cos(\tilde{\mu}t)}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}}, \\ p_{44} &= - \left[\alpha_3^{(5)} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \alpha_3^{(3)} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)} \right) \right], & p_{45} &= 0, \\ p_{46} &= - \left[\tilde{\mu} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) - 2 \beta_3 \sin(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} \right) \right], & p_{51} &= \sin(\tilde{\omega}t) / \sqrt{g^* R_1^*}, \\ p_{52} &= 0, & p_{53} &= 0, & p_{54} &= 0, & p_{55} &= \cos(\tilde{\omega}t), & p_{56} &= 0, & p_{61} &= 0, \\ p_{62} &= \left[\tilde{\nu} \alpha_6^{(3)} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \tilde{\nu} \alpha_6^{(3)} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} \right) \right], \\ p_{63} &= \left[\alpha_6^{(3)} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) + 2 \tilde{\nu} \sin(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)} \right) \right], \\ p_{64} &= - \left[\alpha_6^{(3)} \alpha_3^{(5)} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) + 2 \tilde{\nu} \alpha_3^{(3)} \sin(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)} \right) \right], & p_{65} &= 0, \\ p_{66} &= - \left[\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \beta_3 \tilde{\nu} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 \left(\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, (20) представляет собой общее решение однородного линейного матричного дифференциального уравнения ошибок (10) для случая движения объекта вдоль экватора с постоянной скоростью на постоянной высоте.

Анализ построенного решения показывает, что ошибки по широте и северной составляющей скорости, обусловленные неточным заданием начальных условий $\Delta v_N^0, \Delta v_H^0, \Delta v_E^0, \Delta H^0, \Delta \varphi^0, \Delta \lambda^0$ интегрирования дифференциальных уравнений функционирования БИНС, носят гармонический (колебательный) характер с частотой $\tilde{\omega} = \sqrt{g^*/R_1^*}$, а ошибки по долготе, высоте, вертикальной и восточной составляющим относительной скорости представляют собой композиции гармонических колебаний с частотой $\tilde{\mu} = \sqrt{-\rho_2}$ и экспоненциальных составляющих. Последние состоят из нарастающих во времени (так как $\beta_3 > 0$) компонент, содержащих множитель $C_3 e^{\beta_3 t}$, и затухающих во времени компонент, содержащих множитель $C_4 e^{-\beta_3 t}$. Таким образом, из (16) видно, что собственное движение устойчиво по переменным $\Delta \varphi$ и Δv_N , но неустойчиво по переменным $\Delta \lambda, \Delta H, \Delta v_H$ и Δv_E .

Получим решение неоднородного дифференциального матричного уравнения (9), которое состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Это решение записывается следующим образом:

$$\Delta X(t) = P(t) \Delta X^0 + \int_0^t P(t - \tau) b(\tau) d\tau. \quad (23)$$



Здесь $\Delta X(t)$ — вектор-столбец, составленный из погрешностей определения проекций относительной скорости и криволинейных координат объекта; ΔX^0 — вектор-столбец, составленный из погрешностей задания начальных условий интегрирования. Векторы-столбцы $\Delta X(t)$ и ΔX^0 определены согласно соотношениям (21). Элементы матрицы P задаются соотношениями (22), а вектор-столбец b определён соотношением (8). Вместо вектора-столбца b можно также использовать вектор-столбец B , описываемый соотношением (2).

Первое слагаемое в правой части (23) определяет собой, как уже отмечалось, ошибки определения проекций относительной скорости и криволинейных координат местоположения объекта, обусловленные неточным заданием начальных координат и проекций скорости объекта, а второе слагаемое — ошибки определения этих величин, обусловленные неточным заданием начальной ориентации объекта в инерциальной системе координат.

Интеграл в правой части (23) может быть вычислен и выражен через элементарные функции, однако полученное аналитическое решение в этом случае приобретает громоздкий вид. Тем не менее выражения для ошибок определения северной составляющей относительной скорости и широты могут быть записаны достаточно компактно при условии $\mu_0 = 0$, т.е. когда в начальный момент времени оси геоцентрической системы координат η и инерциальной системы координат X^* совпадают. Эти выражения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta v_N(t) &= \cos(\tilde{\omega}t)\Delta v_N^0 - \sqrt{g^*R_1^*} \sin(\tilde{\omega}t)\Delta\varphi^0 + \\ &+ \frac{a_H^*\lambda_{12} [-2\omega_N^* \sin(\omega_N^*t + \lambda_0^*) + (\tilde{\omega} + \omega_N^*) \sin(\tilde{\omega}t + \lambda_0^*) + (\tilde{\omega} - \omega_N^*) \sin(\tilde{\omega}t - \lambda_0^*)]}{2 [\tilde{\omega}^2 - (\omega_N^*)^2]} + \\ &+ \frac{a_H^*\lambda_{13} [2\omega_N^* \cos(\omega_N^*t + \lambda_0^*) + (\tilde{\omega} - \omega_N^*) \cos(\tilde{\omega}t - \lambda_0^*) - (\tilde{\omega} + \omega_N^*) \cos(\tilde{\omega}t + \lambda_0^*)]}{2 [\tilde{\omega}^2 - (\omega_N^*)^2]}, \\ \Delta\varphi(t) &= \frac{\sin(\tilde{\omega}t)}{\sqrt{g^*R_1^*}}\Delta v_N^0 + \cos(\tilde{\omega}t)\Delta\varphi^0 + \\ &+ \frac{a_H^*\lambda_{12} \{ \tilde{\omega} \cos \lambda_0^* [\cos(\omega_N^*t) - \cos(\tilde{\omega}t)] - \sin \lambda_0^* [\tilde{\omega} \sin(\omega_N^*t) - \omega_N^* \sin(\tilde{\omega}t)] \}}{\sqrt{g^*R_1^*} [\tilde{\omega}^2 - (\omega_N^*)^2]} + \\ &+ \frac{a_H^*\lambda_{13} \{ \cos \lambda_0^* [\tilde{\omega} \sin(\omega_N^*t) - \omega_N^* \sin(\tilde{\omega}t)] + \tilde{\omega} \sin \lambda_0^* [\cos(\omega_N^*t) - \cos(\tilde{\omega}t)] \}}{\sqrt{g^*R_1^*} [\tilde{\omega}^2 - (\omega_N^*)^2]}, \end{aligned}$$

где λ_0^* — точное значение долготы объекта в начальный момент времени. Видно, что приведённые погрешности представляют собой композиции гармонических колебаний с частотами $\tilde{\omega} = \sqrt{g^*/R_1^*}$ и $\omega_N^* = u + v_E^*/R_1^*$. При этом $\tilde{\omega}$ близка к частоте Шулера, а ω_N^* совпадает с угловой скоростью u суточного вращения Земли при $v_E^* = 0$ и близко к ней при $v_E^* > 0$.

Для проверки корректности полученного общего решения было получено численное решение $\Delta X^{\text{num}}(t)$ однородной линейной системы дифференциальных уравнений (10) для интервала времени $t \in [0, 7200]$ с] при следующих параметрах невозмущённого движения и начальных условиях:

$$\begin{aligned} v_E^* &= 600 \text{ м/с}, & H^* &= 10000 \text{ м}, & \Delta v_N^0 &= \Delta v_H^0 = \Delta v_E^0 = 0,01 \text{ м/с}, \\ \Delta H^0 &= 1 \text{ м}, & \Delta\varphi^0 &= \Delta\lambda^0 = 1,57 \cdot 10^{-7} \text{ рад} & & (1 \text{ м в линейной мере}). \end{aligned} \quad (24)$$

При этом использовался программный пакет MATLAB с максимально возможными настройками точности численного интегрирования.

Далее для тех же начальных условий и параметров невозмущённого движения для каждого момента времени с помощью формул (20)–(22) были вычислены погрешности $\Delta X^{\text{an}}(t)$ и найдена разность $\Delta X^{\text{num}} - \Delta X^{\text{an}}$. Таким образом, для каждого момента времени было получено расхождение между численным и аналитическим значением погрешности определения каждого из шести параметров навигации.

Описанные вычисления были также проведены для других параметров невозмущённого движения объекта, а именно: $v_E^* = 10 \text{ м/с}$, $H^* = 0$.



Аналогичная проверка была проведена для полного аналитического решения. Для этого численно интегрировались уравнения (9) и полученные результаты сравнивались с результатами вычисления погрешностей по соотношению (23), в котором интеграл в правой части был вычислен и представлен через элементарные функции.

Анализ полученных результатов показал, что погрешности, полученные с помощью аналитического решения, с высокой точностью совпадают с погрешностями, получаемыми с помощью численного интегрирования линейных уравнений ошибок. Максимальное расхождение между численным и аналитическим решениями проявляется при вычислении вертикальной составляющей относительной скорости Δv_H при условиях (24) и составляет $[\Delta v_H^{num} - \Delta v_H^{an}]_{t=7200} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ м/с. Расхождения при вычислении других погрешностей на 3–16 порядков меньше. Это даёт основания утверждать, что найденное решение является корректным и может быть использовано для аналитического нахождения погрешностей функционирования БИНС.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим движение объекта вдоль земного экватора на высоте $H^* = 10000$ м с постоянной скоростью $v_E^* = 600$ м/с. Таким объектом может быть, например, истребитель. Для этого объекта с помощью соотношений (17) найдём величины β_3 , $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\mu}$, а также определим периоды $T_{\tilde{\omega}}$ и $T_{\tilde{\mu}}$:

$$\beta_3 = 0,0017323 \text{ с}^{-1}, \quad \tilde{\omega} = 0,0012354 \text{ с}^{-1}, \quad \tilde{\mu} = 0,0012413 \text{ с}^{-1},$$

$$T_{\tilde{\omega}} = 2\pi/\tilde{\omega} \approx 5086 \text{ с} \approx 84,8 \text{ мин}, \quad T_{\tilde{\mu}} = 2\pi/\tilde{\mu} \approx 5062 \text{ с} \approx 84,6 \text{ мин}.$$

Видно, что оба периода близки к периоду Шулера, равному 84,4 мин.

Будем считать, что отсутствуют погрешности чувствительных элементов БИНС (гироскопов и акселерометров), а также погрешности начального задания ориентации объекта в инерциальной системе координат. В этом случае интеграл в правой части (23) обращается в нуль.

Рассмотрим три комбинации начальных условий интегрирования системы (10), представленные в табл. 1 (в табл. 1–3 для угловых величин без скобок приведено значение в радианах, в круглых скобках — в градусах, в квадратных скобках — соответствующее отклонение в линейной мере по дуге малого круга радиуса $R \cos \varphi^*$, где $R = \tilde{a} + H^* = 6388245$ м, $\varphi^* = 0$).

Таблица 1

Наборы начальных условий интегрирования системы (10)

№	Δv_N^0	Δv_H^0	Δv_E^0	ΔH^0 , м	$\Delta \varphi^0$, рад (°) [м]	$\Delta \lambda^0$, рад (°) [м]
I	0	0	0	1	0	0
II	0	0	0	0	$1,57 \cdot 10^{-7}$ ($8,97 \cdot 10^{-6}$) [1]	0
III	0	0	0	0	0	$1,57 \cdot 10^{-7}$ ($8,97 \cdot 10^{-6}$) [1]

Для приведённых комбинаций найдём, используя полученные выше соотношения, погрешности определения относительной скорости и координат объекта через 1 ч движения, а также амплитуды и начальные фазы гармонических колебаний (см. (18)). Полученные результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2

Погрешности определения относительной скорости и координат истребителя

Параметр	I	II	III
$\Delta v_N(3600)$, м/с	0	$1,2 \cdot 10^{-3}$	0
$a_{\Delta v_N}$, м/с	—	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	—
$\varepsilon_{\Delta v_N}$	—	0	—
$\Delta v_H(3600)$, м/с	0,45	0	-0,03



Окончание табл. 2

Параметр	I	II	III
$a_{\Delta v_H}$, м/с	$1,17 \cdot 10^{-5}$	—	$1,11 \cdot 10^{-4}$
$\varepsilon_{\Delta v_H}$	0	—	$\pi/2$
$\Delta v_E(3600)$, м/с	-0,03	0	$3,3 \cdot 10^{-3}$
$a_{\Delta v_E}$, м/с	$1,3 \cdot 10^{-4}$	—	$-1,2 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon_{\Delta v_E}$	$\pi/2$	—	0
$\Delta H(3600)$, м	258	0	-16
$a_{\Delta H}$, м	$-9,4 \cdot 10^{-3}$	—	0,09
$\varepsilon_{\Delta H}$	$\pi/2$	—	0
$\Delta \varphi(3600)$, рад (°) [м]	0	$-4,11 \cdot 10^{-8}$ $(-2,36 \cdot 10^{-6})$ [0,26]	0
$a_{\Delta \varphi}$, рад (°) [м]	—	$1,57 \cdot 10^{-7}$ $(9 \cdot 10^{-6})$ [1]	—
$\varepsilon_{\Delta \varphi}$	—	$\pi/2$	—
$\Delta \lambda(3600)$, рад (°) [м]	$-5 \cdot 10^{-6}$ $(-2,98 \cdot 10^{-4})$ [33]	0	$2,91 \cdot 10^{-7}$ $(1,67 \cdot 10^{-5})$ [1,87]
$a_{\Delta \lambda}$, рад (°) [м]	$1,64 \cdot 10^{-8}$ $(9,42 \cdot 10^{-7})$ [0,11]	—	$1,57 \cdot 10^{-7}$ $(8,92 \cdot 10^{-6})$ [0,99]
$\varepsilon_{\Delta \lambda}$	0	—	$\pi/2$

Также рассмотрим движение объекта вдоль экватора на нулевой (над уровнем моря) высоте со скоростью $v_E^* = 10$ м/с. Таким объектом может быть морской корабль. С помощью соотношений (17) найдём величины β_3 , $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\mu}$, а также определим периоды $T_{\tilde{\omega}}$ и $T_{\tilde{\mu}}$:

$$\beta_3 = 0,0017471 \text{ с}^{-1}, \quad \tilde{\omega} = 0,0012383 \text{ с}^{-1}, \quad \tilde{\mu} = 0,0012412 \text{ с}^{-1},$$

$$T_{\tilde{\omega}} = 2\pi/\tilde{\omega} \approx 5074 \text{ с} \approx 84,6 \text{ мин}, \quad T_{\tilde{\mu}} = 2\pi/\tilde{\mu} \approx 5062 \text{ с} \approx 84,4 \text{ мин}.$$

По-прежнему считаем, что погрешности чувствительных элементов БИНС отсутствуют, а ориентация определяется идеально (т.е. отсутствуют погрешности гироскопов и погрешности начального задания ориентации). В этом случае интеграл в правой части (23) обращается в нуль.

Используя три описанные выше комбинации начальных условий, найдём для такого корабля погрешности определения относительной скорости и координат, а также амплитуды и начальные фазы гармонических колебаний (см. (18)). Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3

Погрешности определения относительной скорости и координат корабля

Параметр	I	II	III
$\Delta v_N(3600)$, м/с	0	$1,2 \cdot 10^{-3}$	0
$a_{\Delta v_N}$, м/с	—	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	—
$\varepsilon_{\Delta v_N}$	—	0	—
$\Delta v_H(3600)$, м/с	0,47	0	$-1,3 \cdot 10^{-3}$
$a_{\Delta v_H}$, м/с	$3,93 \cdot 10^{-6}$	—	$4,98 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon_{\Delta v_H}$	0	—	$\pi/2$
$\Delta v_E(3600)$, м/с	-0,03	0	$2 \cdot 10^{-3}$
$a_{\Delta v_E}$, м/с	$9,79 \cdot 10^{-5}$	—	$-1,2 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon_{\Delta v_E}$	$\pi/2$	—	0
$\Delta H(3600)$, м	270	0	-7,72
$a_{\Delta H}$, м	$-3 \cdot 10^{-3}$	—	0,04



Окончание табл. 3

Параметр	I	II	III
$\varepsilon_{\Delta H}$	$\pi/2$	—	0
$\Delta\varphi(3600)$, рад (°) [м]	0	$-3,95 \cdot 10^{-8}$ $(-2,26 \cdot 10^{-6})$ [0,25]	0
$a_{\Delta\varphi}$, рад (°) [м]	—	$1,57 \cdot 10^{-7}$ $(9 \cdot 10^{-6})$ [1]	—
$\varepsilon_{\Delta\varphi}$	—	$\pi/2$	—
$\Delta\lambda(3600)$, рад (°) [м]	$-2,42 \cdot 10^{-6}$ $(-1,39 \cdot 10^{-6})$ [15]	0	$3,04 \cdot 10^{-8}$ $(1,74 \cdot 10^{-6})$ [0,19]
$a_{\Delta\lambda}$, рад (°) [м]	$1,24 \cdot 10^{-8}$ $(7,08 \cdot 10^{-7})$ [0,08]	—	$1,57 \cdot 10^{-7}$ $(8,98 \cdot 10^{-6})$ [1]
$\varepsilon_{\Delta\lambda}$	0	—	$\pi/2$

Подчеркнём, что погрешности определения навигационных величин вычислены через 1 ч движения и могут быть меньше максимальных погрешностей, имеющих место внутри интервала движения, за счёт колебательных составляющих в этих погрешностях, имеющих периоды, близкие к периоду Шулера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено аналитическое решение линеаризованных дифференциальных уравнений ошибок БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат, описывающее влияние неточного задания начальных условий интегрирования дифференциальных уравнений БИНС (погрешностей начальной выставки БИНС) на точность определения навигационных параметров для случая движения объекта вдоль земного экватора с постоянной скоростью на постоянной высоте. При этом найдены точные явные выражения для корней характеристического уравнения.

Анализ построенного решения показывает, что ошибки по широте и северной составляющей скорости, обусловленные неточным заданием начальных условий $\Delta v_N^0, \Delta v_H^0, \Delta v_E^0, \Delta H^0, \Delta\varphi^0, \Delta\lambda^0$ интегрирования дифференциальных уравнений функционирования БИНС, носят гармонический (колебательный) характер с частотой $\tilde{\omega} = \sqrt{g^*/R_1^*}$, а ошибки по долготе, высоте, вертикальной и восточной составляющим относительной скорости представляют собой композиции гармонических колебаний с частотой $\tilde{\mu} = \sqrt{-\rho_2}$ и экспоненциальных составляющих. Последние состоят из нарастающих во времени (так как $\beta_3 > 0$) компонент, содержащих множитель $C_3 e^{\beta_3 t}$ и затухающих во времени компонент, содержащих множитель $C_4 e^{-\beta_3 t}$. Таким образом, из (16) видно, что собственное движение устойчиво по переменным $\Delta\varphi$ и Δv_N , но неустойчиво по переменным $\Delta\lambda, \Delta H, \Delta v_H$ и Δv_E .

Библиографический список

1. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М. : Физматгиз, 1966. 579 с. [Andreev V. D. Theory of Inertial Navigation. Autonomous Systems. Moscow : Fizmatgiz, 1966. 579 p.]
2. Бромберг П. В. Теория инерциальных систем навигации. М. : Наука, 1979. 296 с. [Bromberg P. V. Theory of Inertial Navigation Systems. Moscow : Nauka, 1979. 296 p.]
3. Захарин М. И. Кинематика инерциальных систем навигации. М. : Машиностроение, 1968. 236 с. [Zakharin M. I. Kinematics of Inertial Navigation Systems. Moscow : Mashinostroenie, 1968. 236 p.]
4. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твёрдого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : Физматлит, 2006. 512 с. [Chelnokov Yu. N. Quaternion and Bi-quaternion Models and Methods of Mechanics of Solid Bodies and Applications. Geometry and Kinematics of Motion. Moscow : Fizmatlit, 2006. 512 p.]
5. Челнокова Л. А., Челноков Ю. Н. Моделирование работы бесплатформенной инерциальной навигационной системы, определяющей ориентацию объекта в ортодромической и географической системах координат, на универсальных ЭВМ / Саратов. политехн. ин-т. Саратов.



тов, 1988. 21 с. Деп. в ВИНТИ 11.05.88, № 3763-В88. [Chelnokova L. A., Chelnokov Yu. N. Computer Modelling of the Strapdown INS, Which Determines the Orientation of an Object in the Orthodromic and Geographical Frames / Saratov Polytechnic Institute, 1988. 21 p.]

6. Челнокова Л. А., Челноков Ю. Н. Моделирование работы БИНС на универсальных ЭВМ / Саратов. политехн. ин-т. Саратов, 1989. 15 с. Деп. в ВИНТИ 13.06.89, № 3909-В89. [Chelnokova L. A., Chelnokov Yu. N. Computer Modelling of the Strapdown INS / Saratov Polytechnic Institute, 1989. 15 p.]

7. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные методы в задачах механики твёрдого тела и материальных систем : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1987. 36 с. [Chelnokov Yu. N. Quaternion and Bi-quaternion Methods in the Problems of Solid Body Mechanics and Material Systems : Abstract of dissertation. Moscow, 1987. 36 p.]

8. Челноков Ю. Н., Петров С. В. О задачах ориентации и навигации объекта в географической и ортодромической системах координат. Деп. в ВИМИ 27.05.88, Д07701. 21 с. [Chelnokov Yu. N., Petrov S. V. On the Problems of Orientation and Navigation of an Object

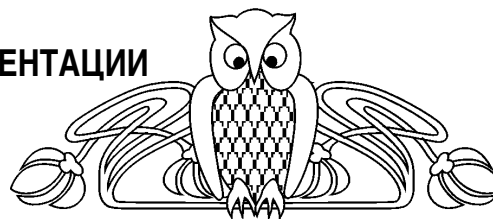
in Geographical and Orthodromic Frames. 1988. 21 p.] 9. Челноков Ю. Н., Челнокова Л. А., Ланденюк И. В. Алгоритм идеальной работы системы ориентации для подвижного объекта // Вопросы авиационной науки и техники : сб. тр. М., 1988. Вып. 10. С. 17–24. [Chelnokov Yu. N., Chelnokova L. A., Landenok I. V. Algorithm of Ideal Functioning of Orientation System for a Moving Object // Problems of Aviation. Moscow, 1988. Iss. 10. P. 17–24.]

10. Челноков Ю. Н. Инерциальная ориентация и навигация движущихся объектов : учеб. пособие для студ. мех.-мат. фак. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2002. 64 с. [Chelnokov Yu. N. Inertial Orientation and Navigation for Moving Objects : Study Guide. Saratov, 2002. 64 p.]

11. Челноков Ю. Н., Логинов М. Ю. Дифференциальные уравнения ошибок корректируемой БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 10. С. 64–72. [Chelnokov Yu. N., Loginov M. Yu. Differential Error Equation of a Corrected INS, Functioning in a Normal Geographical Frame // Mechatronics, Automation, Control. 2009. № 10. P. 64–72.]

УДК 629

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ



И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков

Саратовский государственный университет
E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

С помощью принципа максимума Понтрягина и кватернионных уравнений решается задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Функционал, определяющий качество процесса управления, равен взвешенной сумме времени переориентации орбиты КА и импульса управления за время переориентации орбиты или затрат энергии. Сформулированы дифференциальные краевые задачи переориентации орбиты КА. Приведены законы оптимального управления, условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Построены примеры численного решения задачи.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, оптимальное управление, кватернион.

Solution of a Problem of Spacecraft's Orbit Optimal Reorientation Using Quaternion Equations of Orbital System of Coordinates Orientation

I. A. Pankratov, Ya. G. Sapunkov, Yu. N. Chelnokov

The problem of optimal reorientation of the spacecraft's orbit is solved with the help of the Pontryagin maximum principle and quaternion equations. Control (thrust vector, orthogonal to the orbital plane) is limited in magnitude. Functional, which determines a quality of control process, is weighted sum of time and impulse (or square) of control. We have formulated a differential boundary problems of reorientation of spacecraft's orbit. Optimal control laws, transversality conditions, not containing Lagrange multipliers, examples of numerical solution of the problem are given.

Key words: spacecraft, orbit, optimal control, quaternion.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Будем считать, что вектор ускорения u от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления



движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Движение центра масс КА будем рассматривать в инерциальной системе координат X – геоцентрической экваториальной системе координат $OX_1X_2X_3(X)$ с началом в центре O притяжения Земли. Ось OX_3 этой системы координат направлена вдоль оси суточного вращения Земли, оси OX_1 и OX_2 лежат в плоскости экватора Земли, ось OX_1 направлена в точку весеннего равноденствия для Земли, ось OX_2 дополняет систему до правой тройки векторов.

Введем также в рассмотрение систему координат ξ , связанную с плоскостью и перицентром орбиты КА. Начало этой системы координат находится в центре O , ось ξ_1 направлена вдоль радиуса-вектора перицентра орбиты, ось ξ_3 перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора c момента скорости центра масс КА, а ось ξ_2 образует правую тройку с осями ξ_1 и ξ_3 . Ориентация системы координат ξ в инерциальной системе координат X характеризует собой ориентацию орбиты КА в инерциальном пространстве и задается тремя угловыми оскулирующими элементами орбиты: долготой восходящего узла Ω_u , наклоном орбиты I и угловым расстоянием перицентра от узла ω_π .

В работах [1–4] изучалась задача переориентации орбиты КА с использованием дифференциальных уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона), имеющих вид [5–7]:

$$2 \frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda \circ u \frac{r}{c} (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2), \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const},$$

где $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3$ – кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); Λ_j ($j = \overline{0,3}$) – параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбиты КА (системы координат ξ) в инерциальной системе координат X ; \circ – символ кватернионного умножения; r – модуль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА; φ – истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите); $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; c – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ центра масс КА); p и e – параметр и эксцентриситет орбиты; u – проекция вектора ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА).

Наряду с уравнениями (1) ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера Λ_j для решения задачи переориентации орбиты КА могут быть использованы уравнения ориентации орбитальной системы координат η в параметрах Эйлера λ_j , имеющие вид [6, 8, 9]:

$$2 \frac{d\lambda}{dt} = \lambda \circ \omega_\eta, \quad \omega_\eta = u \frac{r}{c} \mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2} \mathbf{i}_3, \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const}, \quad (3)$$

где $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3$ – кватернион ориентации орбитальной системы координат η в инерциальной системе координат X (ось η_1 этой системы координат направлена вдоль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА, а ось η_3 перпендикулярна плоскости орбиты (параллельна оси ξ_3)). Кватернион λ связан с кватернионом Λ ориентации орбиты КА соотношением

$$\lambda = \Lambda \circ \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right);$$

ω_η – отображение вектора ω на базис η , где λ_j , $j = \overline{0,3}$ – параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбитальной системы координат; $\omega_1, \omega_2 = 0$, ω_3 – проекции вектора ω мгновенной абсолютной угловой скорости орбитальной системы координат на ее же координатные оси.



Параметры λ_j связаны с угловыми переменными $\Omega_u, I, \omega_\pi, \varphi$ соотношениями:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{I}{2} \cos \left(\frac{\Omega_u + \omega_\pi + \varphi}{2} \right), & \lambda_1 &= \sin \frac{I}{2} \cos \left(\frac{\Omega_u - \omega_\pi - \varphi}{2} \right), \\ \lambda_2 &= \sin \frac{I}{2} \sin \left(\frac{\Omega_u + \omega_\pi + \varphi}{2} \right), & \lambda_3 &= \cos \frac{I}{2} \sin \left(\frac{\Omega_u - \omega_\pi - \varphi}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Использование уравнений (2), описывающих ориентацию орбитальной системы координат, для решения задачи переориентации орбиты имеет свои преимущества перед использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты (1). Так, уравнение (2) является при $r = \text{const}$ (в случае круговой орбиты) и $u = \text{const}$ линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, в то время как уравнение (1) в этом случае является линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Поэтому уравнение (2) более удобно и эффективно в сравнении с уравнением (1) с аналитической точки зрения. (Аналитическое решение уравнений ориентации круговой орбиты (1) для случая постоянного управления было найдено в [10].)

Настоящая статья развивает исследования задачи оптимальной переориентации орбиты КА с помощью кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат, начатые в [11]. При этом, в отличие от работ [1–3], удалось построить эффективные алгоритмы и программы численного решения задачи для широкого диапазона изменения параметров ориентации орбит КА и коэффициентов функционалов качества.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Требуется определить ограниченное по модулю управление u :

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max} < \infty, \quad u = \pm |u| \quad (5)$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями (2), (3), из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \lambda(0) = \lambda^{(0)} = \Lambda^0 \circ \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (6)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ?, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad \lambda(t^*) = \pm \Lambda^* \circ \left(\cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) \quad (7)$$

и минимизирующее функционал $J_1 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt$ или функционал $J_2 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|) dt$, $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0$.

При $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ имеем задачу переориентации орбиты, оптимальную в смысле быстродействия; при $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ минимум функционала J_2 означает минимум характеристической скорости [12].

Фигурирующая в краевых условиях кватернионная переменная Λ характеризует ориентацию орбиты КА, а переменная φ — положение КА на орбите. Величины $c, p, e, \varphi_0, \Lambda^0$ и Λ^* заданы (начальное и конечное значения кватерниона Λ могут быть найдены через заданные значения угловых элементов орбиты Ω_u, I, ω_π по формулам, аналогичным (4)). Подлежат определению оптимальный закон управления $u = u(t)$ и величины t^*, φ^* .

Четыре компоненты Λ_j кватерниона Λ удовлетворяют условию $\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 1$, поэтому краевое кватернионное условие (7), эквивалентное четырем скалярным, заменим на условие

$$\text{vect} \left[\tilde{\lambda}(t^*) \circ \Lambda^* \circ \left(\cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) \right] = 0, \quad (8)$$

эквивалентное трем скалярным (в (8) и далее верхняя волна означает сопряженный кватернион). Такая замена повышает эффективность численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА.



3. ЗАКОНЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума [13]. Для этого введем дополнительные переменные $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i}_1 + \mu_2 \mathbf{i}_2 + \mu_3 \mathbf{i}_3$ и χ , сопряженные по отношению к фазовым переменным $\boldsymbol{\lambda}$ и φ . Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = -\sigma + \frac{1}{2} \left[\frac{r}{c} \nu_1 u + \frac{c}{r^2} (\nu_3 + 2\chi) \right],$$

где ν_1, ν_3 – компоненты кватерниона $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu}$; для функционала J_1 $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 u^2$, для функционала J_2 $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 |u|$, в случае быстрогодействия $\sigma = 1$.

Система уравнений для сопряженных переменных примет вид

$$2 \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad (9)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = \left[\frac{1}{r} (\nu_3 + 2\chi) \nu_1 u - \frac{r^2}{2c^2} \nu_1 u \right] \frac{dr}{dt}. \quad (10)$$

Отметим, что сопряженное уравнение (9) совпадает по своей форме с фазовым уравнением (1), поскольку кватернионное уравнение (1) обладает свойством самосопряженности.

Законы оптимального управления (т. е. законы управления, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности) находятся из условий максимума функции H по переменной u с учетом наложенного ограничения (5) и имеют вид

1) в случае $\sigma = 1$ (быстродействия)

$$u^o = u_{\max} \operatorname{sign} \nu_1; \quad (11)$$

2) случае $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 u^2$

$$u^o = \begin{cases} \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} \nu_1, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1| \leq u_{\max}, \\ u_{\max} \operatorname{sign} \nu_1, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1| > u_{\max}; \end{cases} \quad (12)$$

3) в случае $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 |u|$

$$u^o = \begin{cases} u_{\max} \operatorname{sign} \nu_1, & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1| - 1 \geq 0, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1| - 1 < 0, \\ u = u_{\text{особ}} \in [-u_{\max}, u_{\max}], & \text{если } \frac{1}{2\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1| - 1 \equiv 0. \end{cases} \quad (13)$$

Случай особого управления $u_{\text{особ}}$, когда $r|\nu_1| \equiv 2\alpha_2 c$ на некотором промежутке времени $[t_*; t_{**}]$ в работе не рассматривается.

4. УСЛОВИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

Вводя неопределенные множители Лагранжа A_1, A_2, A_3 , получим условия трансверсальности, соответствующие многообразию конечных состояний (8):

$$\text{при } t = t^* \quad \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A} = A_1 \mathbf{i}_1 + A_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \mathbf{i}_3, \quad \chi + \frac{A_3}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 0. \quad (14)$$

Из (14) получаем следующие условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа:

$$\Lambda_0^* \mu_0 + \Lambda_1^* \mu_1 + \Lambda_2^* \mu_2 + \Lambda_3^* \mu_3 = 0, \quad 2\chi + (\Lambda_0^* \mu_3 - \Lambda_1^* \mu_2 + \Lambda_2^* \mu_1 - \Lambda_3^* \mu_0) \cos \frac{\varphi}{2} = 0. \quad (15)$$

Вместо условий (15) могут быть использованы другие формы условий трансверсальности, получаемые из (14) и имеющие вид

$$\text{при } t = t^* \quad \nu_0 \cos \frac{\varphi}{2} - \nu_3 \sin \frac{\varphi}{2} = 0, \quad 2\chi + \left[\nu_3 \cos \frac{\varphi}{2} + \nu_0 \sin \frac{\varphi}{2} \right] \cos \frac{\varphi}{2} = 0 \quad (16)$$



или вид

$$\text{при } t = t^* \quad 2\chi + \nu_3 = 0, \quad \nu_0 \cos \frac{\varphi}{2} + 2\chi \sin \frac{\varphi}{2} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (2), (3), (9), (10), (11) (или (12), или (13)) десятого порядка и восемью краевыми условиями (6), (8), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (15) (или (16) или (17)) и равенством

$$H^o|_{t^*} = H^o(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \chi, u^o)|_{t^*} = 0, \quad (18)$$

имеющим место для оптимального управления u^o и оптимальной траектории.

5. УРАВНЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для численного решения краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА запишем уравнения этой задачи в безразмерных переменных. Фазовые λ_j и сопряженные μ_j переменные являются безразмерными. Безразмерные переменные r^b , t^b и управление u^b связаны с размерными переменными r , t и управлением u соотношениями: $r = Rr^b$, $u = u_{\max}u^b$, $t = Tt^b$, где R — характерное расстояние (величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА); V , T — характерные скорость и время соответственно, определяемые соотношениями: $V = c/R$, $T = R^2/c$.

Отметим, что при переходе к безразмерным переменным в уравнениях для фазовых и сопряженных переменных появляется характерный безразмерный параметр $N = u_{\max}R^3/c^2$.

Отметим также, что при численном решении более удобно оставлять в качестве независимой переменной время t , не переходя к новой независимой переменной, — истинной аномалии φ . Дело в том, что в случае перехода к истинной аномалии усложняется условие, налагаемое на гамильтониан в конце движения, так как вместо задачи с подвижным правым концом необходимо будет решать задачу с «перемещающимся» многообразием на правом конце траектории [14].

Таким образом, система фазовых уравнений в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt^b} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda} \circ (Nr^bu^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3), \quad \frac{d\varphi}{dt^b} = \frac{1}{(r^b)^2}, \quad r^b = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}. \quad (19)$$

Начальные условия интегрирования этой системы

$$t^b = 0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)} = \mathbf{\Lambda}^0 \circ \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (20)$$

являются заданными.

Для правого конца траектории КА имеем условия

$$t^b = ?, \quad \varphi = \varphi^* = ?, \quad \text{vect} \left[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t^*) \circ \mathbf{\Lambda}^* \circ \left(\cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2} \right) \right] = 0, \quad (21)$$

где $\mathbf{\Lambda}^*$ — заданная кватернионная величина.

Ограничение по управлению в безразмерном виде $|u^b| \leq 1$.

Система сопряженных уравнений в безразмерных переменных имеет вид:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt^b} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu} \circ (Nr^bu^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3). \quad (22)$$

Отметим, что безразмерное уравнение для переменной χ было исключено из рассмотрения, так как значение переменной χ необходимо знать лишь в конечный момент времени для проверки условия (18), наложенного на гамильтониан. Это значение можно найти из условий трансверсальности.

Таким образом, в безразмерных переменных задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (19), (22) восьмого порядка и семью краевыми условиями (20), (21), которые необходимо дополнить первым из условий трансверсальности (15) и равенством гамильтониана нулю в конце движения. При этом законы оптимального управления аналогичны (11) (или (12), или (13)). (В дальнейшем верхние индексы у безразмерных переменных опускаются.)



6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Задачи оптимального управления решались для функционалов J_1 и J_2 . Алгоритмы численного решения задач реализуют комбинацию метода Рунге–Кутты 4-го порядка точности и двух методов решения краевых задач: модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска.

Величины, характеризующие форму, размеры орбиты КА, начальное и конечное положения КА на орбите, начальную и конечную ориентации орбиты КА, полагались равными [15] (a_{or} — полуось орбиты):

$$a_{or} = 25500000 \text{ м}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N = 0.35;$$

для начального положения КА ($\varphi_0 = 3.940323$ рад):

$$\begin{aligned} \Lambda_0^0 &= 0.679417, & \Lambda_1^0 &= -0.245862, & \Lambda_2^0 &= -0.539909, & \Lambda_3^0 &= -0.353860; \\ \lambda_0^0 &= 0.061834, & \lambda_1^0 &= -0.451574, & \lambda_2^0 &= 0.457446, & \lambda_3^0 &= 0.763545; \end{aligned}$$

для конечного положения КА: вариант 1 (малое отличие в ориентациях орбит КА):

$$\Lambda_0^* = 0.678275, \quad \Lambda_1^* = -0.268667, \quad \Lambda_2^* = -0.577802, \quad \Lambda_3^* = -0.366116;$$

вариант 2 (большое отличие в ориентациях орбит КА):

$$\Lambda_0^* = -0.440542, \quad \Lambda_1^* = -0.522476, \quad \Lambda_2^* = -0.125336, \quad \Lambda_3^* = -0.719189.$$

Значения выбранных масштабирующих множителей равны: $R = 26000000$ м, $V = 2751.405874$ м/с, $T = 9449.714506$ с. Указанные значения этих величин отвечают значениям декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА, приведенным в [16].

Ориентации начальной и конечной орбит КА характеризуются параметрами Эйлера Λ_j^0 и Λ_j^* , $j = \overline{0, 3}$. Если в варианте 1 эти значения близки (отличие ориентаций орбит по долготе восходящего узла, наклону, угловому расстоянию перицентра от узла составляет единицы градусов: $\Delta\Omega_u = \Omega_u(t_0) - \Omega_u(t^*) = -3.30^\circ$, $\Delta I = I(t_0) - I(t^*) = -1.51^\circ$, $\Delta\omega_\pi = \omega_\pi(t_0) - \omega_\pi(t^*) = -1.59^\circ$), то в варианте 2 они существенно отличаются (отличие ориентаций орбит в угловой мере составляет десятки градусов: $\Delta\Omega_u = -32.00^\circ$, $\Delta I = -117.57^\circ$, $\Delta\omega_\pi = 39.96^\circ$).

На рис. 1–4 приведены законы изменения фазовых сопряженных переменных и управления для случая быстрогодействия ($e = 0$), случая минимизации характеристической скорости ($e = 0.25$) для варианта 2 и случая минимизации функционала J_1 ($e = 0.5$, $\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 4.2$) для вариантов 1 и 2.

Отметим, что длительность процесса переориентации орбиты КА и значения минимизируемых функционалов совпадают с результатами, полученными в [4]. При этом отличаются начальные значения и законы изменения сопряженных переменных.

Отметим также, что длительность второго — пятого участков активного движения КА в случае быстрогодействия близки друг к другу.

В ходе численного решения задачи было установлено, что диапазоны изменения фазовых и сопряженных переменных, описывающих ориентацию орбиты КА, меньше диапазонов изменения переменных, описывающих ориентацию орбитальной системы координат. Наилучшую сходимость обеспечивают условия трансверсальности (17).

Полученные в статье результаты показывают полезность аналитического и численного исследования задачи оптимальной переориентации орбиты КА с двух точек зрения: в параметрах Эйлера Λ_j и λ_j . В частности, вид уравнений линии переключения управления в случае использования переменных λ_j намного проще и наглядней.

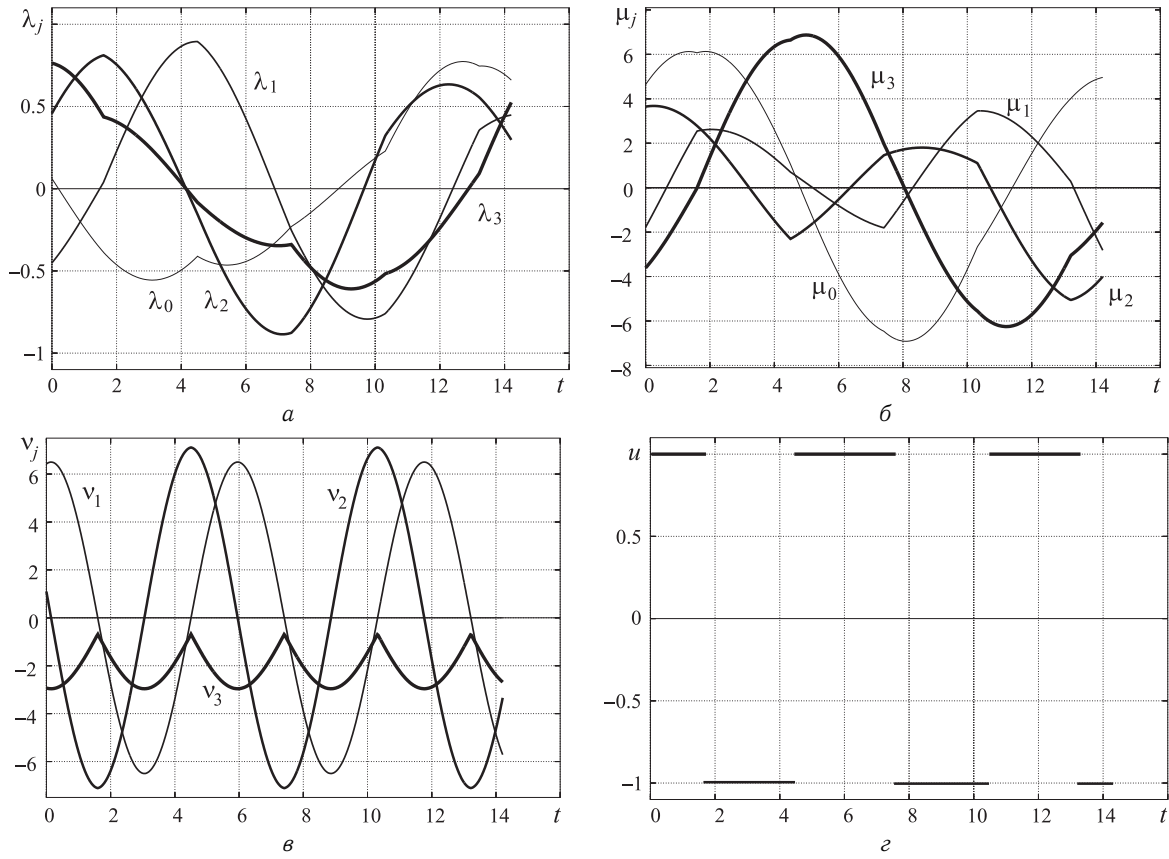


Рис. 1. Круговая орбита, вариант 2, быстродействие

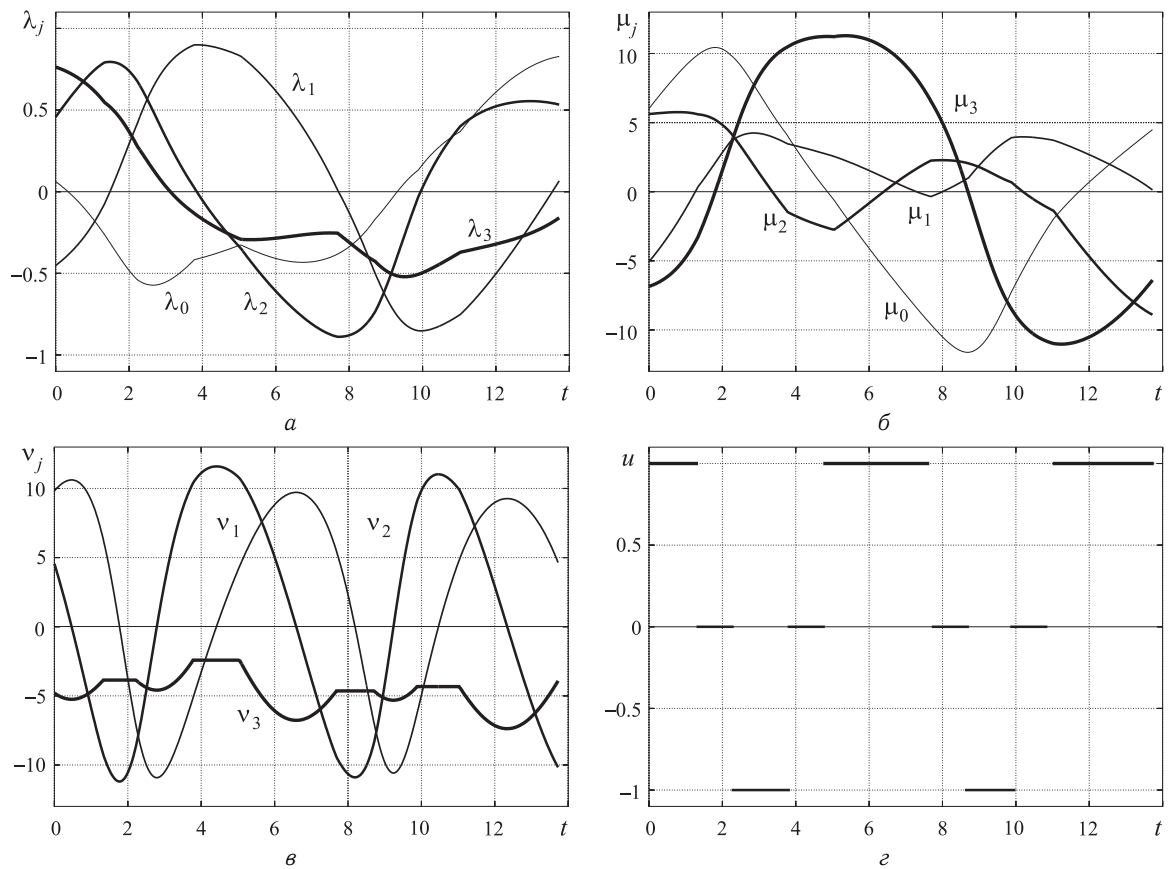


Рис. 2. Эллиптическая орбита ($e = 0.25$), вариант 2, $\int_0^{t^*} |u| dt \rightarrow \min$

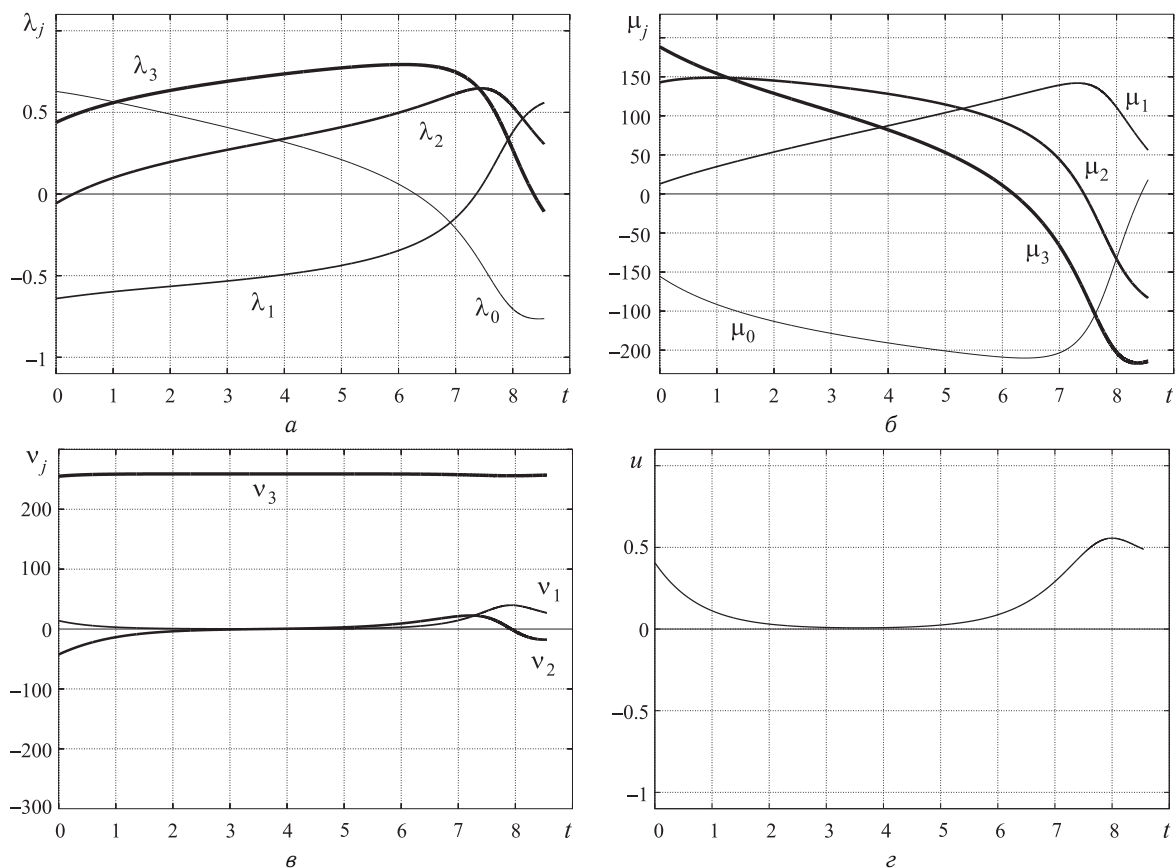


Рис. 3. Эллиптическая орбита ($e = 0.5$), вариант 1, $\int_0^{t^*} (1 + 4.2u^2) dt \rightarrow \min$

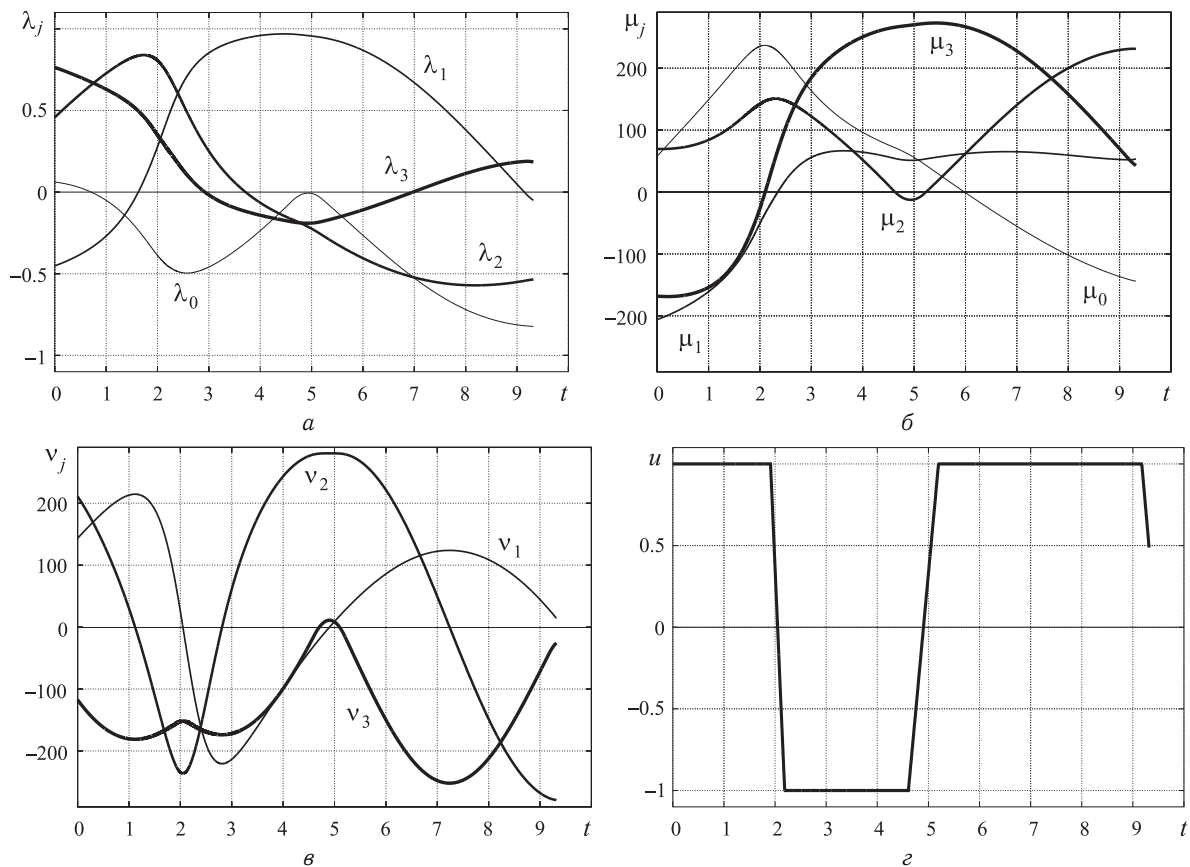


Рис. 4. Эллиптическая орбита ($e = 0.5$), вариант 2, $\int_0^{t^*} (1 + 4.2u^2) dt \rightarrow \min$



Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00165).

Библиографический список

1. Ненахов С. В., Челноков Ю. Н. Кватернионное решение задачи оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата // Бортовые интегрированные комплексы и современные проблемы управления : сб. тр. междунар. конф. М. : МАИ, 1997. С. 59–60. [Nenakhov S. V., Chelnokov Yu. N. Quaternion solution of a task of an optimal control of spacecraft's orbit's orientation // Onboard integrated systems and modern problems of control : Sbornik. Moscow : MAI, 1997. P. 59–60.]
2. Сергеев Д. А., Челноков Ю. Н. Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Проблемы точной механики и управления: сб. науч. тр./ИПТМУ РАН. Саратов, 2002. С. 64–75. [Sergeev D. A., Chelnokov Yu. N. Optimal control of spacecraft's orbit's orientation // Problems of precise mechanics and control : Sbornik. Saratov, 2002. P. 64–75.]
3. Афанасьева Ю. В., Челноков Ю. Н. Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 153–155. [Afanas'eva Yu. V., Chelnokov Yu. N. Optimal control of spacecraft's orbit's orientation // Mathematics. Mechanics : Sbornik. Saratov, 2005. Iss. 7. P. 153–155.]
4. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 87–95. [Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. About a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation // Izv. Saratov. Univer. New Ser. 2012. Vol. 12. Ser. Math. Mech. Inform., iss. 3. P. 87–95.]
5. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // Космические исследования. 1993. Т. 31, вып. 3. С. 3–15. [Chelnokov Yu. N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // Cosmic Research. 1993. Vol. 31, № 3. P. 409–418.]
6. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. II // Космические исследования. 2003. Т. 41, вып. 1. С. 92–107. [Chelnokov Yu. N. The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: II // Cosmic Research. 2003. Vol. 41, № 1. P. 85–99.]
7. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М. : Физматлит, 2006. 512 с. [Chelnokov Yu. N. Quaternion and biquaternion models and methods of mechanics of solids and their applications. Moscow : Fizmatlit, 2006. 512 p.]
8. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 6. С. 759–770. [Chelnokov Yu. N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I // Cosmic Research. 1992. Vol. 30, № 6. P. 612–621.]
9. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I // Космические исследования. 2001. Т. 39, вып. 5. С. 502–517. [Chelnokov Yu. N. The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: I // Cosmic Research. 2001. Vol. 39, № 5. P. 470–484.]
10. Панкратов И. А., Челноков Ю. Н. Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2011. Т. 11. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 84–89. [Pankratov I. A., Chelnokov Yu. N. Analytical solution of differential equations of circular spacecraft's orbit orientation // Izv. Saratov. Univer. New Ser. 2011. Vol. 11. Ser. Math. Mech. Inform., iss. 1. P. 84–89.]
11. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234. [Chelnokov Yu. N. Optimal reorientation of spacecraft's orbit through thrust orthogonal to the plane of orbit // Mathematics. Mechanics : Sbornik. Saratov, 2006. Iss. 8. P. 231–234.]
12. Абалякин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М. : Наука, 1976. 864 с. [Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebennikov E. A., Demin V. G., Ryabov Yu. A. Reference guide on celestial mechanics and astrodynamics. Moscow : Nauka, 1976. 864 p.]
13. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с. [Pontryagin L. S., Boltyanskiy V. G., Gamkrelidze R. V., Mischenko E. F. The mathematical theory of optimal processes. Moscow : Nauka, 1983. 393 p.]
14. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М. : Наука, 1971. 424 с. [Moiseev N. N. Numerical methods in the theory of optimal systems. Moscow : Nauka, 1971. 424 p.]
15. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. III // Космические исследования. 2003. Т. 41, вып. 5. С. 488–505. [Chelnokov Yu. N. The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: III // Cosmic Research. 2003. Vol. 41, № 5. P. 460–477.]
16. Бордовицына Т. В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М. : Наука, 1984. 136 с. [Bordovitzyna T. V. Modern numerical methods in problems of celestial mechanics. Moscow : Nauka, 1984. 136 p.]



ИНФОРМАТИКА

УДК 512.572

О МНОГООБРАЗИЯХ ГРУППОИДОВ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Д. А. Бредихин

Саратовский государственный технический университет
E-mail: bredikhin@mail.ru

В работе находятся базисы тождеств многообразий, порожденных классами группоидов бинарных отношений.

Ключевые слова: тождества, многообразия, группоиды, бинарные отношения.

On Varieties of Groupoids of Binary Relations

D. A. Bredikhin

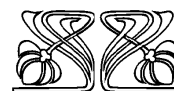
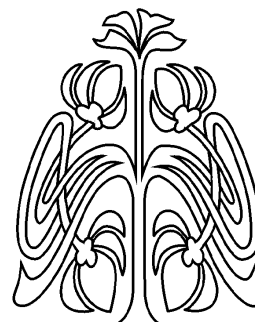
In the paper, the bases of identities of varieties generated by classes of groupoids of the binary relations are found.

Key words: identities, varieties, groupoids, binary relations.

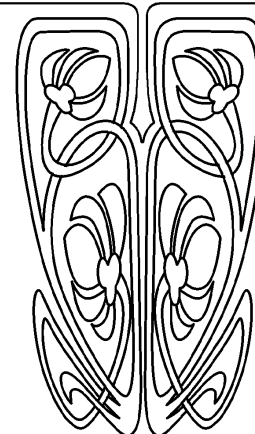
ВВЕДЕНИЕ

Множество бинарных отношений Φ , замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω) , называемую *алгеброй отношений*. Всякая алгебра отношений может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения \subset . Теория алгебр отношений является существенной составной частью современной общей алгебры и алгебраической логики. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в статьях А. Тарского [1, 2]. Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются логическими. Логические операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Операция называется диофантовой [3] (в другой терминологии — примитивно-положительной [4]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования. Диофантовы операции допускают описание с помощью графов [3, 4]. Эквациональные и квазиэквациональные теории алгебр отношений с диофантовыми операциями описаны в статьях Д. А. Бредихина [5, 6].

Предметом нашего рассмотрения будут алгебры отношений с одной бинарной диофантовой операцией, т. е. группоиды бинарных отношений. Рассмотрение бинарных операций над отношениями играет в алгебраической логике предикатов роль, аналогичную роли бинарных булевых функций в пропозициональной логике высказываний. Поэтому естествен интерес к алгебраическим свойствам указанных операций, в частности, к свойствам, выражаемым тождествами. Это



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





приводит к необходимости изучения многообразий, порожденных различными классами группоидов бинарных отношений. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в работах [7, 8].

1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр) изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω . Пусть $\text{Var}\{\Omega\}$ ($\text{Var}\{\Omega, \subset\}$) — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$).

Сосредоточим свое внимание на следующей диофантовой операции над бинарными отношениями, задаваемой формулой

$$\rho * \sigma = \{(x, y) : (\exists z, w) (x, z) \in \rho \wedge (w, z) \in \sigma\}.$$

Группоидом называется алгебра (A, \cdot) с одной бинарной операцией. Упорядоченным группоидом (A, \cdot, \leq) назовем группоид с заданным на множестве A отношением порядка, согласованным с операцией группоида. Полурешеточно упорядоченный группоид — это алгебра (A, \cdot, \vee) типа (2, 2), где (A, \cdot) — группоид, (A, \vee) — верхняя полурешетка, каноническое отношение порядка которой согласовано с операцией группоида. Алгебры отношений вида $(\Phi, *)$, $(\Phi, *, \subset)$ и $(\Phi, *, \cup)$ образуют соответственно группоид, упорядоченный группоид и полурешеточно упорядоченный группоид бинарных отношений.

Теорема 1. *Группоид (A, \cdot) принадлежит многообразию $\text{Var}\{*\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:*

$$(xy)x = xy, \tag{1}$$

$$(xy)y = xy, \tag{2}$$

$$(xy)^2 = xy, \tag{3}$$

$$x^2y = xy^2 = x^2y^2, \tag{4}$$

$$x^2(yz) = x^2(zy), \tag{5}$$

$$(x^2y)z = (x^2z)y, \tag{6}$$

$$(xy^2)z = x(y^2z). \tag{7}$$

Теорема 2. *Упорядоченный группоид (A, \cdot, \leq) принадлежит многообразию $\text{Var}\{*, \subset\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(7) и тождествам:*

$$x \leq x^2, \tag{8}$$

$$xy \leq x^2. \tag{9}$$

Теорема 3. *Полурешеточно упорядоченный группоид (A, \cdot, \vee) принадлежит многообразию $\text{Var}\{*, \cup\}$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам (1)–(7) и тождествам:*

$$x(y \vee z) = xy \vee xz, \tag{10}$$

$$(x \vee y)z = xz \vee yz, \tag{11}$$

$$x \vee x^2 = x^2, \tag{12}$$

$$xy \vee x^2 = x^2. \tag{13}$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теорем основывается на результатах работы [5]. Разобьем его на ряд последовательных шагов.

Шаг 1. Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении, и сформулируем необходимый результат из работы [5].

Пусть $\text{Rel}(U)$ — множество всех бинарных отношений на U . Всякая формула $\phi(z_0, z_1, r_1, \dots, r_m)$ логики предикатов первого порядка с равенством, содержащая m бинарных предикатных символов



r_1, \dots, r_m и две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1 , определяет m -арную операцию F_φ на $\text{Rel}(U)$:

$$F_\varphi(R_1, \dots, R_m) = \{(x, y) \in U \times U : \varphi(x, y, R_1, \dots, R_m)\},$$

где $\varphi(x, y, R_1, \dots, R_m)$ означает, что формула φ выполняется, если z_0, z_1 интерпретируются как x, y и r_1, \dots, r_m интерпретируются как отношения R_1, \dots, R_m из $\text{Rel}(U)$.

Операция над бинарными отношениями называется диофантовой [3] (в другой терминологии примитивно-позитивной [4]), если она может быть определена формулой, содержащей в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Диофантовы операции могут быть описаны с помощью графов [3, 4].

Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару $G = (V, E)$, где $V = V(G)$ — конечное множество, называемое множеством вершин, и $E = E(G) \subset V \times N \times V$ — тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины u в вершину v , помеченным меткой k , и графически изображать следующим образом: $u \cdot \xrightarrow{k} \cdot v$. Мы также будем говорить, что вершины u и v инцидентны ребру (u, k, v) .

Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, т. е. систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V, E) — помеченный граф; $in = in(G)$ и $out = out(G)$ — две выделенные вершины (не обязательно различные), называемые входом и выходом двухполюсника, соответственно.

Понятие изоморфизма помеченных графов и двухполюсников определяется естественным образом. В дальнейшем все графы будут рассматриваться с точностью до изоморфизма. Мы также будем отождествлять двухполюсники, различающиеся лишь числом изолированных вершин, отличных от его входа и выхода.

Пусть $F = F_\varphi$ — диофантова операция, задаваемая формулой φ . С этой операцией может быть ассоциирован двухполюсник $G = G(F) = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ — множество всех индексов индивидуальных переменных, входящих в формулу φ ; $in(G) = 0$, $out(G) = 1$; $(i, k, j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в φ ; если формула $z_i = z_j$ входит в φ , то вершины i и j отождествляются.

Заметим, что двухполюсник, соответствующий операции $*$, задается следующим образом:

$$in = \cdot \xrightarrow{1} \cdot \xleftarrow{2} \cdot = out.$$

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ ($k = 1, \dots, m$) — двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник $G(G_1, \dots, G_m)$, определяемый следующим образом [4]: возьмем двухполюсник G и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник G_k , отождествляя при этом вершину in_k с вершиной u и вершину out_k с вершиной v .

Рассмотрим множество $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \dots, F_{\varphi_n}\}$ диофантовых операций над отношениями, и пусть $A = (A, f_1, \dots, f_n)$ — универсальная алгебра соответствующего типа. Положим $G_1 = G(\varphi_1), \dots, G_n = G(\varphi_n)$.

Для всякого терма p алгебры A определим следующим индуктивным образом двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in(p), out(p))$:

- 1) если $p = x_k$, то $G(p)$ представляет собой двухполюсник вида $in \cdot \xrightarrow{k} \cdot out$;
- 2) если $p = f_k(p_1, \dots, p_m)$, то $G(p)$ есть композиция $G_k(G(p_1), \dots, G(p_m))$.

Обозначим через $\text{pr}(E)$ множество всех вершин помеченного графа, которые инцидентны хотя бы одному ребру. Пусть даны два помеченных графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$. Отображение $f : \text{pr}(E_2) \rightarrow \text{pr}(E_1)$ называется гомоморфизмом G_2 в G_1 , если $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ — двухполюсники. Отображение $f : V_2 \rightarrow V_1$ называется гомоморфизмом из G_2 в G_1 , если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$.



Мы будем писать $G_1 \prec G_2$, если существует гомоморфизм из G_2 в G_1 , и $G_1 \cong G_2$, если $G_1 \prec G_2$ и $G_2 \prec G_1$.

Обозначим через $Eq\{\Omega\}$ ($Eq\{\Omega, \subset\}$) эквациональную теорию класса $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) и сформулируем основной результат работы [5].

Тожество $p = q$ ($p \leq q$) принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega\}$ ($Eq\{\Omega, \subset\}$) тогда и только тогда, когда $G(p) \cong G(q)$ ($G(p) \prec G(q)$).

Шаг 2. Рассмотрим счетное множество индивидуальных переменных $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Напомним, что термы группоида определяются следующим индуктивным образом: всякая индивидуальная переменная является термом; если p_1 и p_2 — термы, то выражение $(p_1 p_2)$ является термом, называемым произведением термов p_1 и p_2 . В дальнейшем внешние скобки в записи термов как правило будут опускаться. Множество Ξ всех термов относительно операции произведения термов образует счетно порожденную свободную алгебру в классе всех группоидов.

Обозначим через Σ (Σ^{\leq}) эквациональную теорию класса группоидов (упорядоченных группоидов), удовлетворяющих тождествам (1)–(7) ((1)–(9)). Для термов p_1 и p_2 из Ξ будем писать $p_1 \cong p_2$ ($p_1 \prec p_2$), когда тождество $p_1 = p_2$ ($p_1 \leq p_2$) принадлежит Σ (Σ^{\leq}). Отношение \cong является отношением конгруэнции группоида Ξ , а фактор группоид Ξ / \cong является свободным счетно порожденным группоидом в многообразии, задаваемым тождествами (1)–(7). Класс отношения эквивалентности, содержащий терм p , обозначим через $[p]$. Фактор группоид Ξ / \cong , упорядоченный отношением \leq , задаваемый следующим образом: $[p] \leq [q] \Leftrightarrow p \prec q$, является свободным счетно порожденным упорядоченным группоидом в многообразии, задаваемый тождествами (1)–(9).

Пусть (A, \cdot) — группоид, удовлетворяющий тождествам (1)–(7). Тогда он удовлетворяет тождеству

$$(x(yz))t = x((yz)t). \quad (14)$$

Действительно, используя тождества (3) и (7), получаем:

$$(x(yz))t = (x(yz)^2)t = x((yz)^2t) = x((yz)t).$$

Замечание 1. Из тождества (14) следует, что подгруппоид (A^2, \cdot) , где $A^2 = \{ab : a, b \in A\}$, является полугруппой и, следовательно, скобки, указывающие порядок выполнения действий в произведении элементов из A^2 , могут быть расставлены произвольным образом или просто опущены. В дальнейшем мы будем пользоваться этим свойством без особых упоминаний.

Обозначим через Λ множество всех термов вида $(x_i x_j)$.

Лемма 1. *Для любого терма $p \in \Xi$, отличного от индивидуальной переменной, существуют такие термы p_1, p_2, \dots, p_n из Λ ($n \geq 1$), что $[p] = [p_1][p_2] \dots [p_n]$.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией. Утверждение очевидно для $p \in \Lambda$. Далее рассмотрим следующие возможные случаи.

Пусть $p = x_k$ и $q = q_1 q_2 \dots q_m$, где $q_1, q_2, \dots, q_m \in \Lambda$. Тогда используя тождества (3), (4), (14), получаем:

$$\begin{aligned} [x_k q] &= [x_k]([q_1][q_2] \dots [q_m]) = ([x_k][q_1])([q_2] \dots [q_m]) = ([x_k][q_1]^2)([q_2] \dots [q_m]) = \\ &= ([x_k]^2[q_1])([q_2] \dots [q_m]) = ([x_k x_k][q_1])([q_2] \dots [q_m]) = [x_k x_k][q_1][q_2] \dots [q_m]. \end{aligned}$$

Пусть $p = p_1 p_2 \dots p_n$, где $p_1, p_2, \dots, p_n \in \Lambda$ и $q = x_k$. Тогда используя тождества (3, 4, 13), получаем

$$\begin{aligned} [p x_k] &= ([p_1][p_2] \dots [p_n])[x_k] = ([p_1][p_2] \dots [p_{n-1}])([p_n])[x_k] = \\ &= ([p_1][p_2] \dots [p_{n-1}])([p_n]^2[x_k]) = ([p_1][p_2] \dots [p_{n-1}])([p_n][x_k]^2) = [p_1][p_2] \dots [p_{n-1}][p_n][x_k x_k]. \end{aligned}$$

Пусть $p = p_1 p_2 \dots p_n$, где $p_1, p_2, \dots, p_n \in \Lambda$ и $q = q_1 q_2 \dots q_m$, где $q_1, q_2, \dots, q_m \in \Lambda$. Тогда используя замечание 1, получаем:

$$[p q] = ([p_1][p_2] \dots [p_n])([q_1][q_2] \dots [q_m]) = [p_1][p_2] \dots [p_n][q_1][q_2] \dots [q_m]. \quad \square$$



Шаг 3. Двухполюсник $G(p) = (V(p), E(p), in(p), out(p))$ для $p = p_1 p_2 \dots p_n$, где $p_1, p_2, \dots, p_n \in \Lambda$, согласно определению может быть построен следующим образом.

Пусть $p \in \Lambda$, т. е. $p = x_i x_j$. Тогда $V(p) = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, $E(p) = \{(v_0, i, v_1), (v_2, j, v_1)\}$, и $in(p) = v_0$, $out(p) = v_3$:

$$in = \cdot \xrightarrow{i} \cdot \xleftarrow{j} \cdot = out.$$

Пусть $p = p_1 p_2 \dots p_n$, где $p_1, p_2, \dots, p_n \in \Lambda$. Мы будем предполагать, что множества Vp_1, Vp_2, \dots, Vp_n попарно не пересекаются. Тогда $V(p) = V(p_1) \cup pr(E(p_1)) \cup \dots \cup pr(E(p_n))$, $E(p) = E(p_1) \cup E(p_2) \cup \dots \cup E(p_n)$ и $in(p) = in(p_1)$, $out(p) = v$, где v — новая вершина, отличная от вершин двухполюсников $G(p_1), G(p_2), \dots, G(p_n)$. Заметим, что в этом случае $G(p)$ содержит $n + 1$ компоненту связности.

Следующие три леммы непосредственно вытекают из строения соответствующих графов и определения гомоморфизма.

Лемма 2. Пусть $p \in \Lambda \cup \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, $q = x_k$ и $G(p) \prec G(q)$. Тогда $p = q$.

Лемма 3. Пусть $p = x_i$, $q = x_k x_l$, $E(p) \prec E(q)$. Тогда $i = k = l$, т. е. $q = p^2$.

Лемма 4. Пусть $p = x_i x_j$, $q = x_k x_l$, $E(p) \prec E(q)$ и f — гомоморфизм из $E(q)$ в $E(p)$. Тогда возможен один из следующих случаев: а) $i = k$ и $j = l$; б) $i = l$ и $j = k$; в) $i = k = l$; г) $j = k = l$. Если при этом $f(in(q)) = in(p)$, то возможны лишь случаи а) и в).

Лемма 5. Пусть $p = x_i x_j$, $q = x_k x_l$, $E(p) \prec E(q)$. Тогда $[pq] = [p]$.

Доказательство. Рассмотрим случаи, обозначенные в лемме 4. В случае а), используя тождество (3), имеем $[pq] = [x_i x_j][x_i x_j] = [x_i x_j]^2 = [x_i x_j] = [p]$.

В случае б), используя тождества (3), (5), имеем:

$$[pq] = [x_i x_j][x_j x_i] = [x_i x_j]^2([x_j][x_i]) = [x_i x_j]^2([x_i][x_j]) = [x_i x_j][x_i x_j] = [x_i x_j]^2 = [x_i x_j] = [p].$$

В случае в), используя тождества (1), (3), имеем:

$$[pq] = [x_i x_j][x_i x_i] = [x_i x_j][x_i]^2 = [x_i x_j]^2[x_i] = [x_i x_j][x_i] = [x_i x_j] = [p].$$

В случае г), используя тождества (2), (3), имеем:

$$[pq] = [x_i x_j][x_j x_j] = [x_i x_j][x_j]^2 = [x_i x_j]^2[x_j] = [x_i x_j][x_j] = [x_i x_j] = [p]. \quad \square$$

Лемма 6. Пусть $p = x_i x_j$, $q = x_k x_l$, $E(p) \prec E(q)$ и $f(in(q)) = in(p)$, где f — гомоморфизм из $E(q)$ в $E(p)$. Тогда $[p] \leq [q]$.

Доказательство. Если $p = x_i x_j$, то рассмотрим случаи а) и в), обозначенные в лемме 4. В случае а) имеем $[p] = [q]$. В случае в), используя тождества (8), получаем:

$$[p] = [x_i x_j] \leq [x_i]^2 = [q].$$

Лемма 7. Пусть $p = x_i x_j$, $q = x_k x_l$, $G(p) \cong G(q)$ и $f_1(in(q)) = in(p)$, $f_2(in(p)) = in(q)$, где f_1 — гомоморфизм из $E(q)$ в $E(p)$ и f_2 — гомоморфизм из $E(p)$ в $E(q)$. Тогда $[p] = [q]$.

Доказательство. Действительно, согласно лемме 4 это возможно лишь в случаях, когда $i = l$ и $j = k$ или $i = l = j = k$, следовательно, $p = q$. \square

Шаг 4. Легко проверить, что операции $*$ удовлетворяют тождествам (1)–(9). Отсюда следует, что $\Sigma \subset Eq\{*\}$ и $\Sigma^{\leq} \subset Eq\{*, \subset\}$. Таким образом, для доказательства теорем 1, 2 достаточно показать, что всякое тождество $p = q$ ($p \leq q$) из $Eq\{*\}$ ($Eq\{*, \subset\}$) принадлежит Σ (Σ^{\leq}).

Согласно лемме 1 мы можем предположить, что $p, q \in \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ или $p = p_1 p_2 \dots p_n$, где $p_1, p_2, \dots, p_n \in \Lambda$ и $q = q_1 q_2 \dots q_m$, где $q_1, q_2, \dots, q_m \in \Lambda$.

Предположим, что тождество $p \leq q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{*, \subset\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из работы [5] имеем $G(p) \prec G(q)$, т. е. существует гомоморфизм f из $G(q)$ в $G(p)$.



Если $q = x_k$, то согласно лемме 2 имеем $p = q$. Если $p = x_i$ и $q = q_1q_2 \dots q_m$, то $E(p) \prec E(q_k)$ для всякого $k = 1, \dots, m$. Отсюда по лемме 3 $q_k = p^2$ и, используя тождества (3), (8), получаем $p \leq p^2 = q$.

Предположим теперь, что $p = p_1p_2 \dots p_n$ и $q = q_1q_2 \dots q_m$. Ясно, что гомоморфизм f будет отображать всякую компоненту связности графа $E(q)$ в компоненту связности графа $E(p)$, следовательно, существует отображение ϕ из $\{1, \dots, m\}$ в $\{1, \dots, n\}$ такое, что $f(G(q_k)) \subset G(p_{\phi(k)})$ для всякого $k = 1, \dots, m$, следовательно, согласно лемме 5 имеем:

$$[p_{\phi(k)}][q_k] = [p_{\phi(k)}].$$

Учитывая, что $f(\text{in}(q_1)) = f(\text{in}(q)) = \text{in}(p) = \text{in}(p_1)$, имеем $\phi(1) = 1$. Отсюда согласно лемме 6 $[p_1] \leq [q_1]$. Таким образом, используя тождества (3), (6), (9), получаем:

$$[p] = [p_1][p_2] \dots [p_n] = [p_1][q_2] \dots [q_m][p_2] \dots [p_n] \leq [p_1][q_2] \dots [q_m] \leq [q_1][q_2] \dots [q_m] = [q].$$

Таким образом, во всех возможных случаях тождество $p \leq q$ принадлежит эквациональной теории Σ , что завершает доказательство теоремы 2.

Предположим теперь, что тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории $E_q\{*\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из [5] имеем $G(p) \cong G(q)$, т. е. $G(p) \prec G(q)$ и $G(q) \prec G(p)$, следовательно, существуют гомоморфизмы f_1 из $E(q)$ в $E(p)$ и f_2 из $E(p)$ в $E(q)$.

Если $p = x_i$ или $q = x_k$, то согласно лемме 2 имеем $p = q$.

Предположим теперь, что $p = p_1p_2 \dots p_n$ и $q = q_1q_2 \dots q_m$. Поскольку всякая компонента связности графа $E(q)$ при гомоморфизме f_1 будет отображаться в компоненту связности графа $E(p)$ и всякая компонента связности графа $E(p)$ при гомоморфизме f_2 будет отображаться в компоненту связности графа $E(q)$, существуют отображения ϕ из $\{1, \dots, m\}$ в $\{1, \dots, n\}$ и φ из $\{1, \dots, n\}$ в $\{1, \dots, m\}$ такие, что $f(G(q_k)) \subset G(p_{\phi(k)})$ для $k = 1, \dots, m$ и $f(G(p_k)) \subset G(q_{\varphi(k)})$ для $k = 1, \dots, n$. Следовательно, согласно лемме 5 имеем $[p_{\phi(k)}][q_k] = [p_{\phi(k)}]$ и $[q_{\varphi(k)}][p_k] = [q_{\varphi(k)}]$. Учитывая, что $f_1(\text{in}(q_1)) = f_1(\text{in}(q)) = \text{in}(p) = \text{in}(p_1)$ и $f_2(\text{in}(p_1)) = f_2(\text{in}(p)) = \text{in}(q) = \text{in}(q_1)$, имеем $\phi(1) = 1$ и $\varphi(1) = 1$. Отсюда согласно лемме 7 имеем $[p_1] = [q_1]$. Таким образом, используя тождества (3), (6), получаем $[p] = [p_1][p_2] \dots [p_n] = [p_1][q_2] \dots [q_m][p_2] \dots [p_n]$ и $[q] = [q_1][q_2] \dots [q_m] = [q_1][p_2] \dots [p_n][q_2] \dots [q_m]$. Отсюда, учитывая, что $[p_1] = [q_1]$, и, используя тождество (3), (6), получаем $[p] = [q]$.

Таким образом во всех возможных случаях тождество $p = q$ принадлежит эквациональной теории Σ , что завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 3 непосредственно вытекает из теоремы 2 и следствия 5 работы [5].

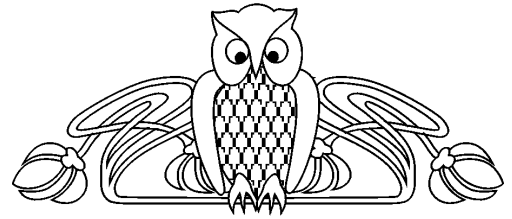
Библиографический список

1. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 4. P. 73–89.
2. Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. Vol. 18. P. 188–189.
3. Бредихин Д. А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. АН. 1998. Т. 360. С. 594–595. [Bredikhin D. A. Relation algebras with diophantine operations // Doklady Mathematics. 1998. Vol. 57, № 3. P. 435–436.]
4. Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
5. Бредихин Д. А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 3. С. 23–30. [Bredikhin D. A. The equational theory of algebras of relations with positive operations // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 1993. Vol. 37, № 3. P. 21–28.]
6. Бредихин Д. А. О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41. [Bredikhin D. A. On quasi-identities of relation algebras with diophantine operations // Siberian Math. J. 1997. Vol. 38, № 1. P. 23–33.]
7. Bredikhin D. A. On relation algebras with general superpositions // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1994. Vol. 54. P. 11–124.
8. Bredikhin D. A. Varieties of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44. P. 87–192.



УДК 681.3.06, 681.322

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ



А. Н. Савин¹, И. В. Дружинин², А. А. Ерофтьев¹

¹Саратовский государственный университет
E-mail: savinan@info.sgu.ru, eroftiev.andrey@gmail.com

²Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана
E-mail: druzhininiv@gmail.com

The Application of a Genetic Algorithm to Global Optimization Problem Solving on Parallel and Distributed Computing Systems

A. N. Savin, I. V. Druzhinin, A. A. Eroftiev

This article presents the results of the adaptation of method of searching the global minimum of multiextremal criterion function of multiple variables with constraints based on genetic algorithm for parallel and distributed computing systems. Two variants of genetic algorithm parallelization are proposed. The reliability and performance of parallel versions of an algorithm, depending on its parameters and the number of nodes in parallel computer system is investigated. The reliability of finding the global minimum of criterion function in a small amount of time with proposed parallel variants of genetic algorithm is represented.

Key words: global optimization, genetic algorithm, multiextreme criterion function, parallel computing system.

Представлены результаты адаптации метода нахождения глобального минимума многоэкстремальной целевой функции многих переменных с ограничениями с помощью генетического алгоритма для систем параллельных и распределённых вычислений. Предложены два варианта распараллеливания генетического алгоритма. Исследована зависимость надёжности и производительности параллельных версий алгоритма от их параметров и количества узлов параллельной вычислительной системы. Показано, что предложенные параллельные варианты генетического алгоритма позволяют за небольшое время надёжно находить глобальный минимум целевой функции.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, генетический алгоритм, многоэкстремальная целевая функция, параллельные вычислительные системы.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при разработке новых материалов и устройств часто требуется решать оптимизационные задачи [1], которые, как известно, сводятся к поиску экстремумов целевой функции (ЦФ) различными методами [2]. Наличие всевозможных ограничений на оптимизируемые параметры и многоэкстремальность ЦФ, как правило, приводит к большим вычислительным затратам и соответственно к невозможности нахождения решения за приемлемое время при использовании одного компьютера [1].

Данная проблема может быть решена при применении современных параллельных и распределённых вычислительных систем (ВС) в сочетании с использованием эффективных распараллеленных алгоритмов оптимизации.

В данной работе была поставлена задача изучения возможности распараллеливания алгоритма нахождения глобального минимума многоэкстремальной ЦФ многих переменных с ограничениями типа равенств, основанного на использовании генетических алгоритмов (ГА) [3].

1. ОБЩИЙ ВИД ЗАДАЧИ ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА ПРИ НАЛИЧИИ ЯВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Поиск глобального минимума функции $f : R^n$ при наличии явных ограничений осуществляется на некотором собственном подмножестве Ω метрического пространства R^n :

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min, x \in \Omega, \Omega \subset R^n, \quad (1)$$

где подмножество Ω определяется ограничениями типа равенств:

$$q(x) = 0, \quad \text{где } q : R^n. \quad (2)$$

Пусть имеется некоторое множество X , состоящее из элементов x , принадлежащих подмножеству $\Omega \subset R^n$, и на нём определена скалярная функция $f(x)$. Говорят, что $f(x)$ имеет локальный минимум



в точке x^* , если существует некоторая конечная ϵ -окрестность этой точки, в которой выполняется условие

$$f(x^*) < f(x), \quad \|x - x^*\| \leq \epsilon.$$

У функции может быть много локальных минимумов. Если выполняется неравенство $f(x^*) < f(x)$, $x \in X$, где $x \neq x^*$ — любая точка множества X , то говорят о глобальном минимуме функции $f(x)$ [4].

2. ПОИСК ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Поиск глобального минимума функции (1) при наличии ограничений (2) на варьируемые параметры может быть осуществлён с помощью генетических алгоритмов (ГА) [3].

ГА представляют собой модель процесса эволюции в природе. В них используются аналоги механизмов генетического наследования и естественного отбора.

Эволюционная теория утверждает, что каждый биологический вид целенаправленно развивается и изменяется для того, чтобы наилучшим образом приспособиться к окружающей среде. Основным механизмом эволюции — это естественный отбор. Его суть состоит в том, что более приспособленные особи имеют больше возможностей для выживания и размножения и, следовательно, приносят больше потомства, чем плохо приспособленные особи. При этом благодаря передаче генетической информации (генетическому наследованию) потомки наследуют от родителей основные их качества. Таким образом, потомки сильных индивидуумов также будут относительно хорошо приспособленными, а их доля в общей массе особей будет возрастать. После смены нескольких десятков или сотен поколений средняя приспособленность особей данного вида заметно возрастает. В теории ГА используется биологическая терминология в упрощенном виде:

- хромосома — вектор чисел;
- ген — бит хромосомы;
- популяция — совокупность особей.

В качестве критерия жизнеспособности особи выступает функция приспособленности F — отображение совокупности хромосом особи на множество вещественных чисел. Точное выражение для функции приспособленности составляется индивидуально для каждой задачи.

В этом случае элементы x подмножества Ω в (1) можно рассматривать как особи некоторой популяции точек n -мерного пространства, а значения функции $f(x)$ в этих точках можно рассматривать как значение функции приспособленности $F = -f(x)$.

Основные шаги работы классического ГА можно записать в следующем виде:

1. Генерация начальной популяции из k особей.
2. Вычисление функции приспособленности каждой особи и отброс наименее приспособленных особей.
3. Выбор среди оставшихся особей двух родителей.
4. Применение к родительским хромосомам оператора скрещивания с вероятностью p_c ; при отсутствии скрещивания дочерние хромосомы равны родительским.
5. Применение к полученным дочерним хромосомам оператора мутации с вероятностью p_m ; в отсутствие мутации хромосомы не изменяются.
6. Повторение шагов 3–5, пока популяция вновь не будет содержать k особей.
7. Повторение шагов 1–6 до тех пор, пока не будет достигнут критерий окончания процесса.

Скрещивание (кроссовер) — это операция, при которой две хромосомы обмениваются своими частями. В модели, описываемой ГА, кроссовер выполняет оператор скрещивания C . Существует несколько алгоритмов оператора скрещивания [3], самые простые из них — одно- и многоточечный.

В одноточечном варианте происходит разрыв двух родительских хромосом в случайной позиции, после чего они обмениваются полученными участками. При многоточечном кроссовере хромосомы обмениваются участками, полученными в результате нескольких разрывов.

Мутацией называется случайное изменение одного или нескольких генов хромосомы.

В качестве критерия окончания алгоритма могут выступать 2 условия:

- достижение заданного максимального количества итераций (поколений);
- схождение популяции.



Схождением популяции называется такое ее состояние, когда все особи популяции практически одинаковы и находятся в области некоторого экстремума.

ГА контролируется следующими параметрами:

- объемом популяции k ;
- вероятностью мутации p_m ;
- вероятностью скрещивания p_c ;
- числом новых особей на каждом этапе развития популяции m ;
- максимальным числом итераций алгоритма N ;
- при использовании критерия сходимости популяции — точностью схождения ϵ .

В данной работе требовалось исследовать применение ГА на параллельных ВС к нахождению глобальных экстремумов многоэкстремальных функций нескольких переменных в условиях наличия явных и неявных ограничений.

3. АДАПТАЦИЯ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Существует несколько вариантов использования ГА на параллельных ВС. В работе [5] было предложено два варианта:

1. На i -м этапе получения потомков с помощью разделения на $m/2$ процессов основного потока выполнения каждый процесс проводит скрещивание двух особей, затем при вычислении функции приспособленности каждый узел ВС отыскивает значения F_i (функция приспособленности на i -м этапе) для порождённых на нём особей.
2. Параллельное развитие нескольких популяций на узлах ВС с последующим выбором наилучшего результата.

Второй вариант является приемлемым в случае легко вычисляемых целевых функций (ЦФ), когда потери на пересылках данных в коммуникационной среде параллельной ВС могут быть сравнимы со временем вычисления функции приспособленности F . Также одновременная эволюция нескольких популяций может компенсировать возможное схождение популяции к локальному экстремуму.

В первом случае было предложено осуществлять скрещивание и вычисление значений функции приспособленности, а следовательно, и ЦФ (1), одновременно на нескольких машинах (клиентская часть алгоритма) и проверять условие сходимости на выделенной машине (серверная часть алгоритма).

Блок-схема первого параллельного варианта ГА представлена на рис. 1. Пунктиром выделена часть алгоритма, выполняемая на клиентских машинах. По достижении условия сходимости или заданного количества итераций в серверной части осуществляется выбор решения с наибольшим значением функции приспособленности, что соответствует наименьшему значению ЦФ, что должно обеспечивать глобальность найденного минимума.

Так как вычисление значений функции приспособленности F , а значит, и ЦФ производится одновременно на $m/2$ вычислительных узлах, то при использовании $m/2$ клиентских машин можно уменьшить временные затраты при поиске глобального минимума примерно в $m/2$ раз. Более точное значение коэффициента ускорения S можно получить из закона Амдала:

$$S = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}},$$

где α — доля вычислений, выполняемая в последовательной части, p — количество рабочих узлов в параллельной системе.

В начале работы алгоритма производится k вычислений функции приспособленности F , составляющие последовательную часть вычислений. Учитывая, что на каждой итерации алгоритма на каждом из $m/2$ вычислительных узлов выполняется два вычисления функции приспособленности, при общем числе итераций I получим $2\frac{m}{2}I = mI$ вычислений в параллельной части.

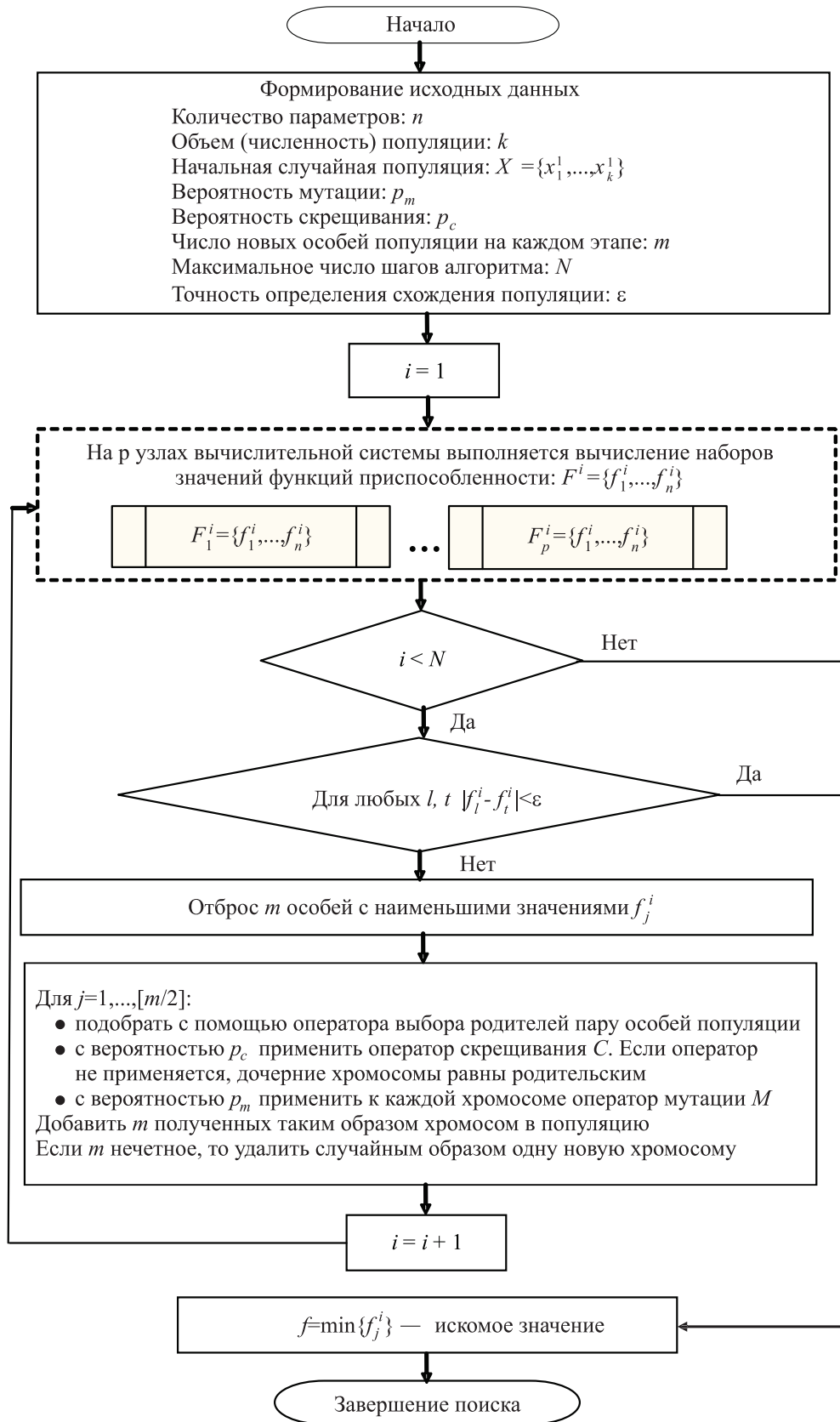


Рис. 1. Блок-схема первого варианта параллельного ГА, используемого для поиска глобального экстремума ЦФ



Таким образом, коэффициент ускорения вычислений без учета затрат на пересылку данных между вычислительными узлами равен

$$S = \frac{mI + k}{2I + k}. \quad (3)$$

Второй вариант параллельной реализации ГА предполагает одновременный запуск алгоритма на p вычислительных узлах. По окончании работы алгоритма на всех рабочих узлах параллельной ВС производится сбор данных о полученных значениях экстремума и выбор наибольшего значения функции приспособленности F , соответствующего глобальному минимуму ЦФ.

Блок-схема второго варианта распараллеливания ГА приведена на рис. 2. Пунктиром выделена часть алгоритма, выполняемая на клиентских машинах.

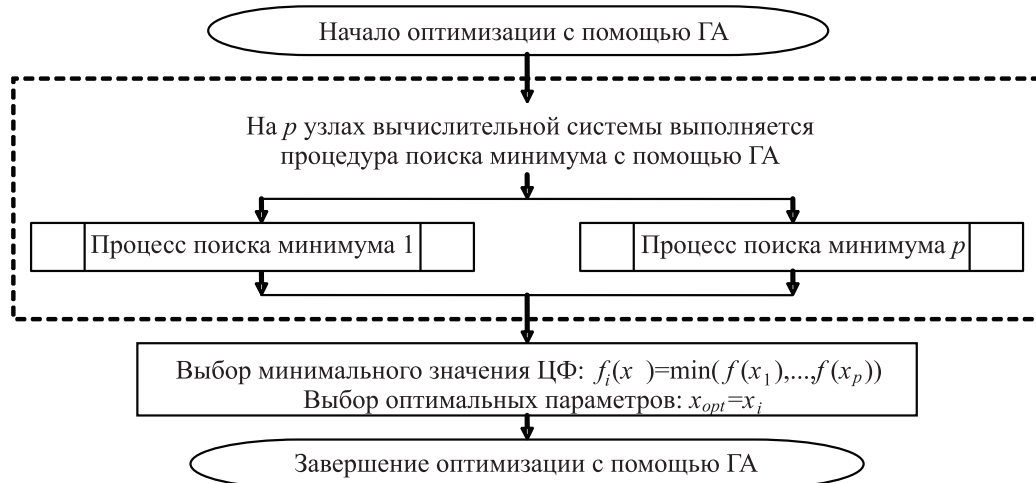


Рис. 2. Блок-схема второго варианта параллельного ГА, используемого для поиска глобального экстремума ЦФ

Каждый процесс поиска минимума, запускаемый на рабочем узле ВС, представляет собой классическую реализацию ГА. Параметры алгоритма при этом задаются одинаковыми для всех процессов.

Такой способ поиска с помощью ГА должен обеспечивать надёжное нахождение глобального минимума ЦФ за счёт многократного повторения поиска в заданной ограниченной области.

При этом, так как многократный процесс поиска минимума осуществляется одновременно на соответствующем числе узлов, то затраченное на выполнение всего параллельного алгоритма время приблизительно должно равняться времени выполнения одного процесса и практически не должно зависеть от числа процессов. Соответственно при использовании p рабочих узлов можно уменьшить временные затраты при поиске глобального минимума примерно в p раз.

Для тестирования предложенных параллельных вариантов классического генетического алгоритма оптимизации разработана программа на языке программирования C++.

4. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВАРИАНТОВ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Оценка надёжности и эффективности распараллеленного алгоритма оптимизации методом имитации отжига по схеме больцмановского тушения осуществлялась на многоэкстремальных ЦФ при количестве параметров оптимизации n , равном 4, 6 и 8:

- число параметров оптимизации $n = 4$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{j=1}^4 \{x_j^2 - 0.1 \cos(18x_j)\}, \quad (4)$$

где $-0.5 < x_j < 1$, $j = 1, \dots, 4$, $f_{\min} = -0.4$ при $x_j = 0$, $j = 1, \dots, 4$;



- число параметров оптимизации $n = 6$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \sum_{j=1}^6 \{x_j^2 - 0.1 \cos(18x_j)\}, \quad (5)$$

где $-0.5 < x_j < 1, j = 1, \dots, 6, f_{\min} = -0.6$ при $x_j = 0, j = 1, \dots, 6$;

- число параметров оптимизации $n = 8$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \sum_{j=1}^8 \{x_j^2 - 0.1 \cos(18x_j)\}, \quad (6)$$

где $-0.5 < x_j < 1, j = 1, \dots, 8, f_{\min} = -0.8$ при $x_j = 0, j = 1, \dots, 8$.

Процесс поиска глобального минимума завершился при выполнении следующих условий: при сходимости популяции, которое оценивалось по максимальному расстоянию между значениями функции приспособленности — $\max_k(|\Delta F|) \leq 0.00001$ или по достижении максимального количества итераций алгоритма — $N = 10000$.

Для оценки производительности разработанного приложения использовалось количество вычислений ЦФ, так как основное время при поиске глобального минимума с помощью ГА затрачивается на получение её значений.

Статистическая достоверность полученных данных обеспечивалась усреднением по результатам 100 запусков процесса поиска глобального минимума при каждом сочетании параметров.

Тестирование первого варианта параллельного ГА для функций (4), (5) и (6) осуществлялось при различном числе узлов параллельной ВС p . Также исследовалось влияние объема популяции k , числа новых особей на каждом этапе развития популяции m , вероятности скрещивания p_c и вероятности мутации p_m на процесс поиска глобального минимума. Пределы изменения этих параметров представлены в табл. 1.

Таблица 1

Диапазоны изменения параметров ГА в численном эксперименте

	k	m	p_c	p_m
min	10	2	0.1	0.05
max	100	16	1.0	0.1

На рис. 3–6 приведены усредненные по итогам 100 запусков ВС результаты тестирования первого варианта параллельного ГА.

На рис. 3 приведены зависимости найденных минимальных значений ЦФ с указанием 95% доверительного интервала (a – b) и числа вычислений ЦФ (4), (5), (6) (ε) от размера популяции k . При этом остальные исследуемые параметры алгоритма фиксировались ($m = 16, p_c = 0.75, p_m = 0.1$).

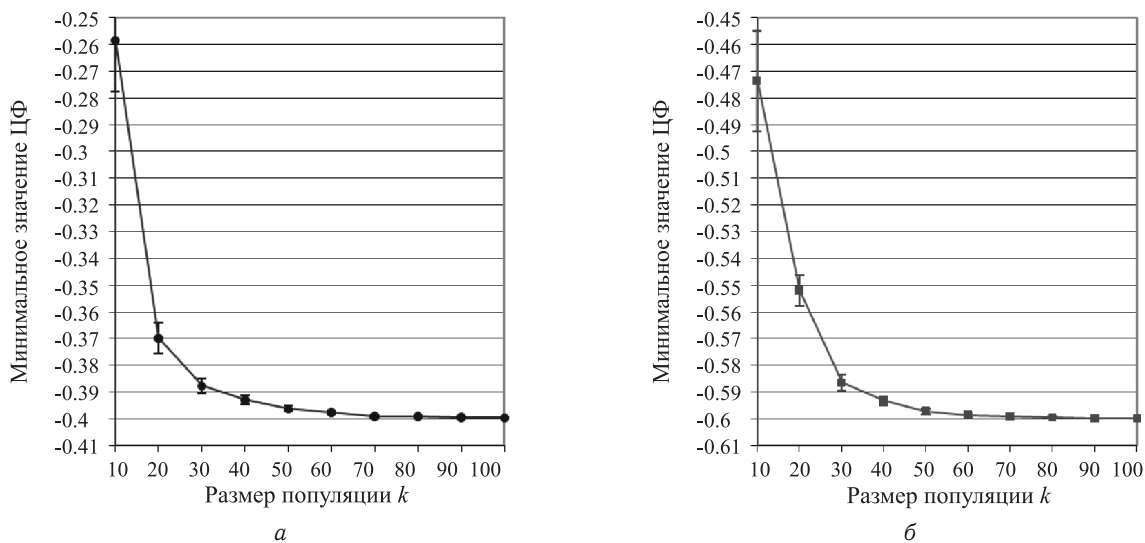
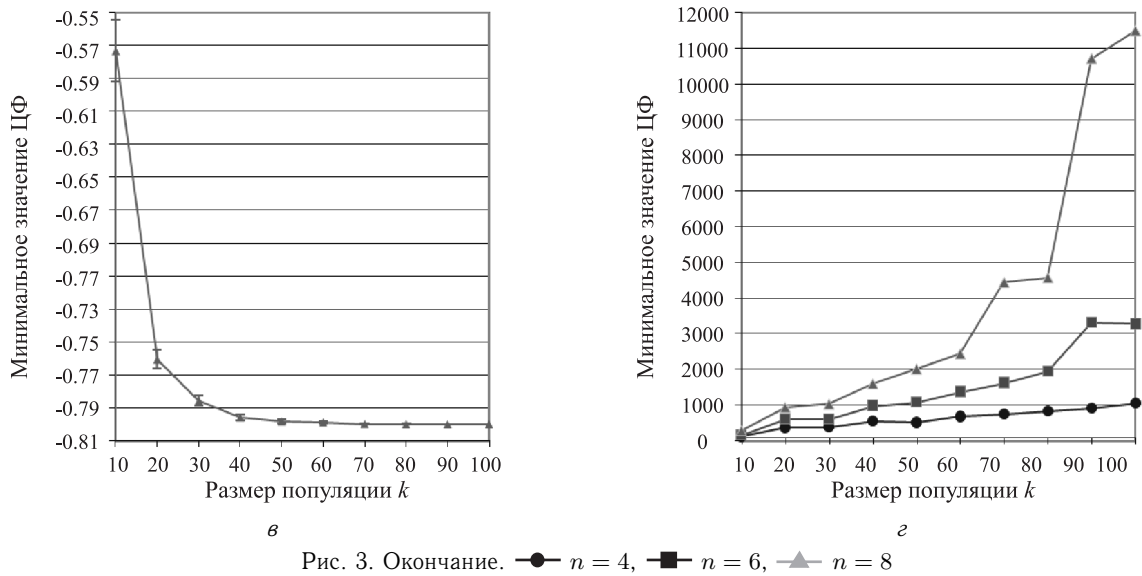


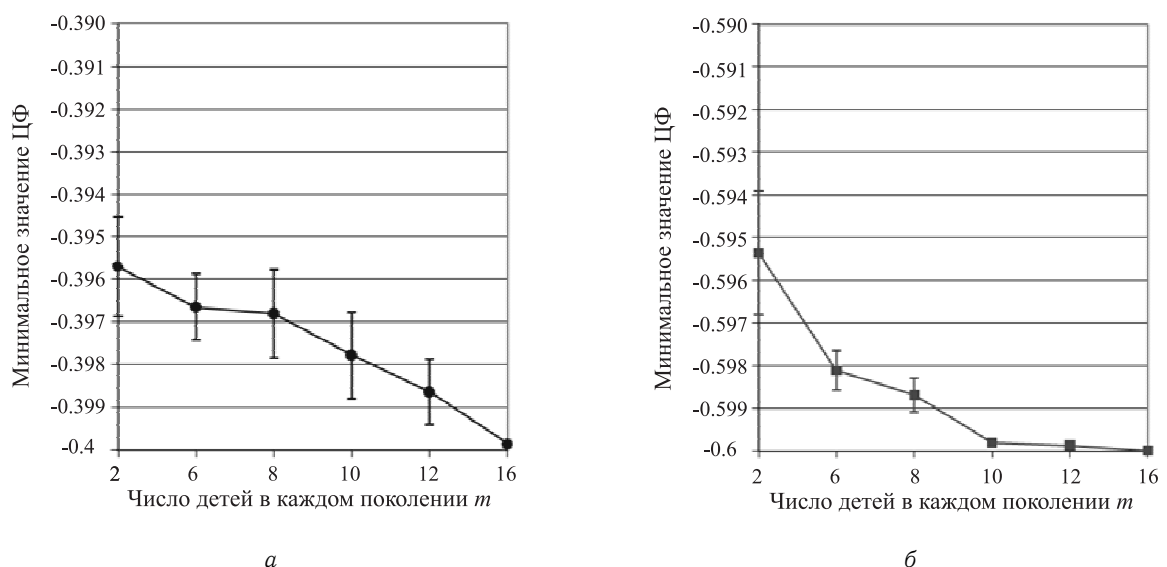
Рис. 3. Зависимость найденного минимального значения ЦФ от размера популяции k и количества параметров оптимизации n : ● — $n = 4$, ■ — $n = 6$



Как видно, увеличение размера популяции k с 10 до 100 приводит к значительному повышению точности нахождения глобального минимума, но при этом быстро растет количество вычислений ЦФ. Оптимальным, с точки зрения точности и времени вычислений, является диапазон значений $k \in [50, 60]$. Коэффициент ускорения, рассчитанный по (3) для середины оптимального диапазона k , составил 7.41, 7.7 и 7.83 для ЦФ (4), (5) и (6) соответственно.

На рис. 4 приведены зависимости найденных минимальных значений ЦФ с указанием 95% доверительного интервала (a – b) и числа вычислений ЦФ (4), (5), (6) (z) от числа детей в каждом поколении m . При этом остальные исследуемые параметры алгоритма имели следующие значения: $k = 50$, $p_c = 0.75$, $p_m = 0.1$.

Из рис. 4 следует, что увеличение числа детей в каждом поколении m с 2 до 16 приводит к значительному повышению точности нахождения глобального минимума. При этом количество вычислений ЦФ имеет минимум в диапазоне значений $m \in [6, 8]$ при удовлетворительной точности для всех исследованных ЦФ. Коэффициент ускорения, рассчитанный по (3) для середины оптимального диапазона m , составил 3.28, 3.39 и 3.45 для ЦФ (4), (5) и (6) соответственно.



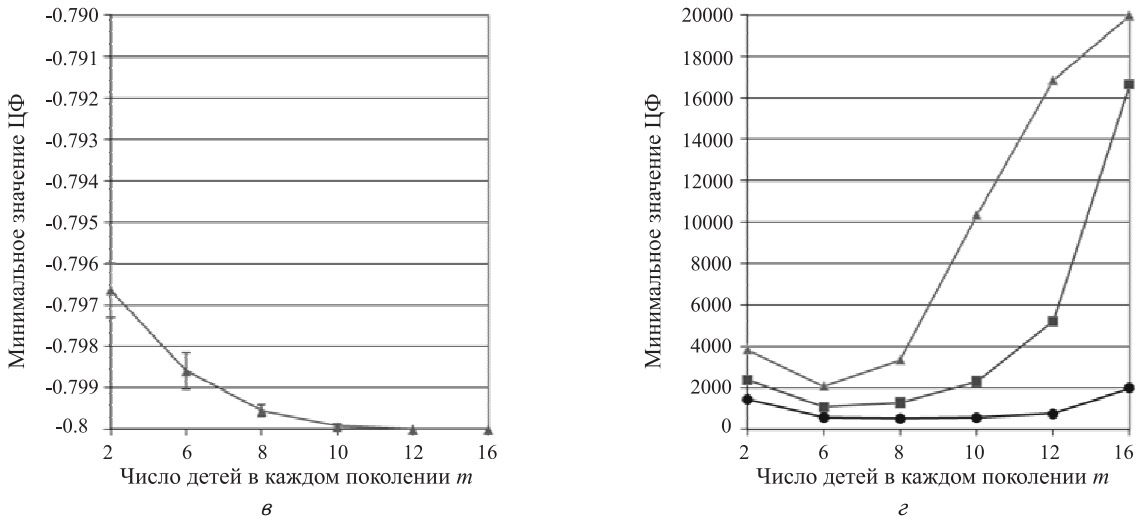


Рис. 4. Окончание. ● $n = 4$, ■ $n = 6$, ▲ $n = 8$

На рис. 5 приведены зависимости найденных минимальных значений ЦФ с указанием 95% доверительного интервала (а-в) и числа вычислений ЦФ (4), (5) и (6) (г) от вероятности применения кроссовера p_c . При этом остальные исследуемые параметры алгоритма фиксировались ($k = 50$, $m = 10$, $p_m = 0.05$).

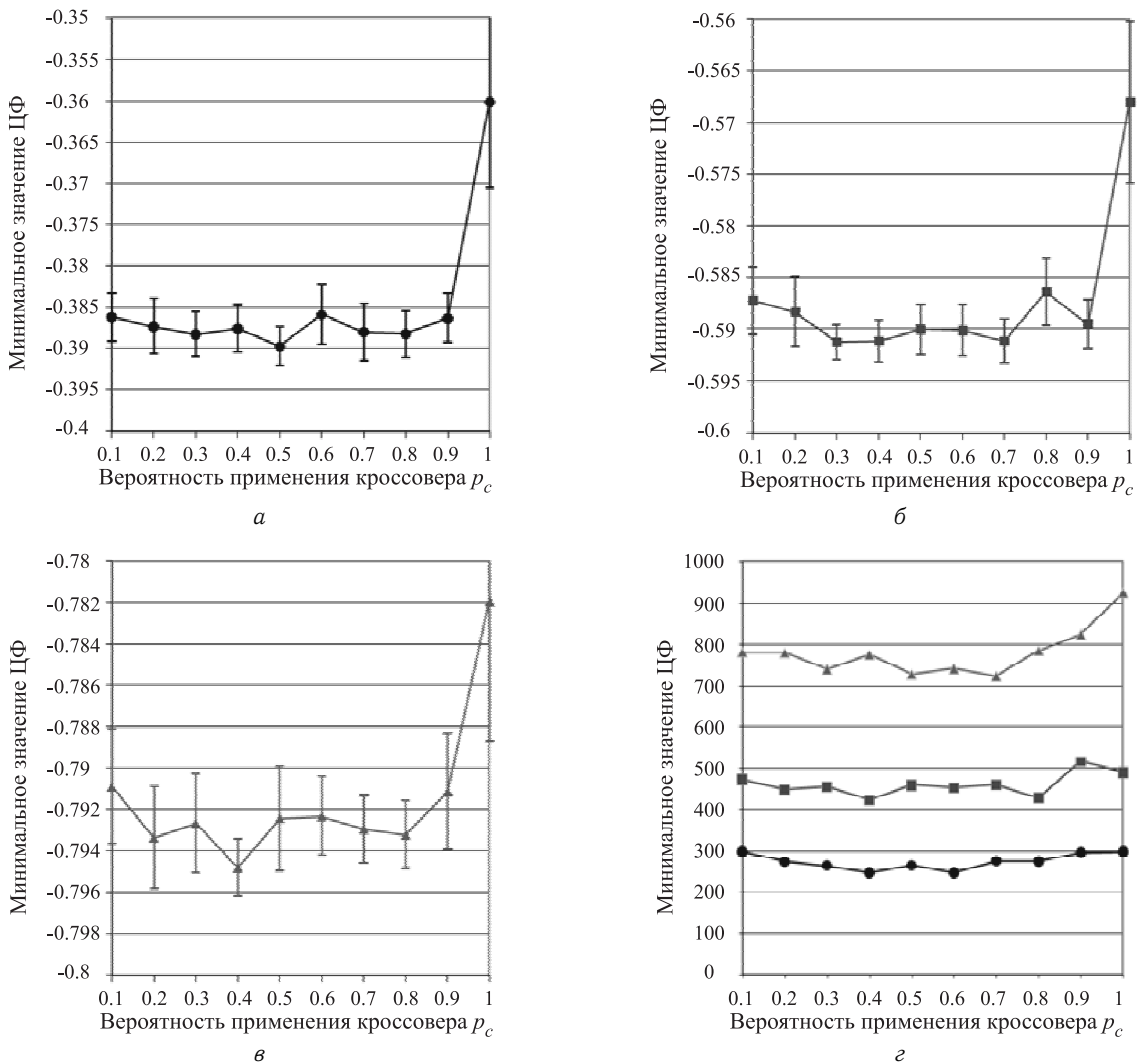


Рис. 5. Зависимость найденного минимального значения ЦФ от вероятности применения кроссовера p_c и количества параметров оптимизации n : ● $n = 4$, ■ $n = 6$, ▲ $n = 8$



Из рис. 5 видно, что точность нахождения глобального минимума максимальна в диапазоне значений $p_c \in [0.3, 0.7]$. Число вычислений ЦФ также минимально при этих значениях p_c для всех рассмотренных ЦФ. Коэффициент ускорения, рассчитанный по (3) для середины оптимального диапазона p_c , составил 4.35, 4.6 и 4.74 для ЦФ (4), (5) и (6) соответственно.

На рис. 6 приведены зависимости найденных минимальных значений ЦФ с указанием 95% доверительного интервала (a – $в$) и числа вычислений ЦФ (4), (5), (6) ($г$) от вероятности мутации p_m . При этом остальные исследуемые параметры алгоритма имели значения: $k = 50$, $m = 10$, $p_c = 0.75$.

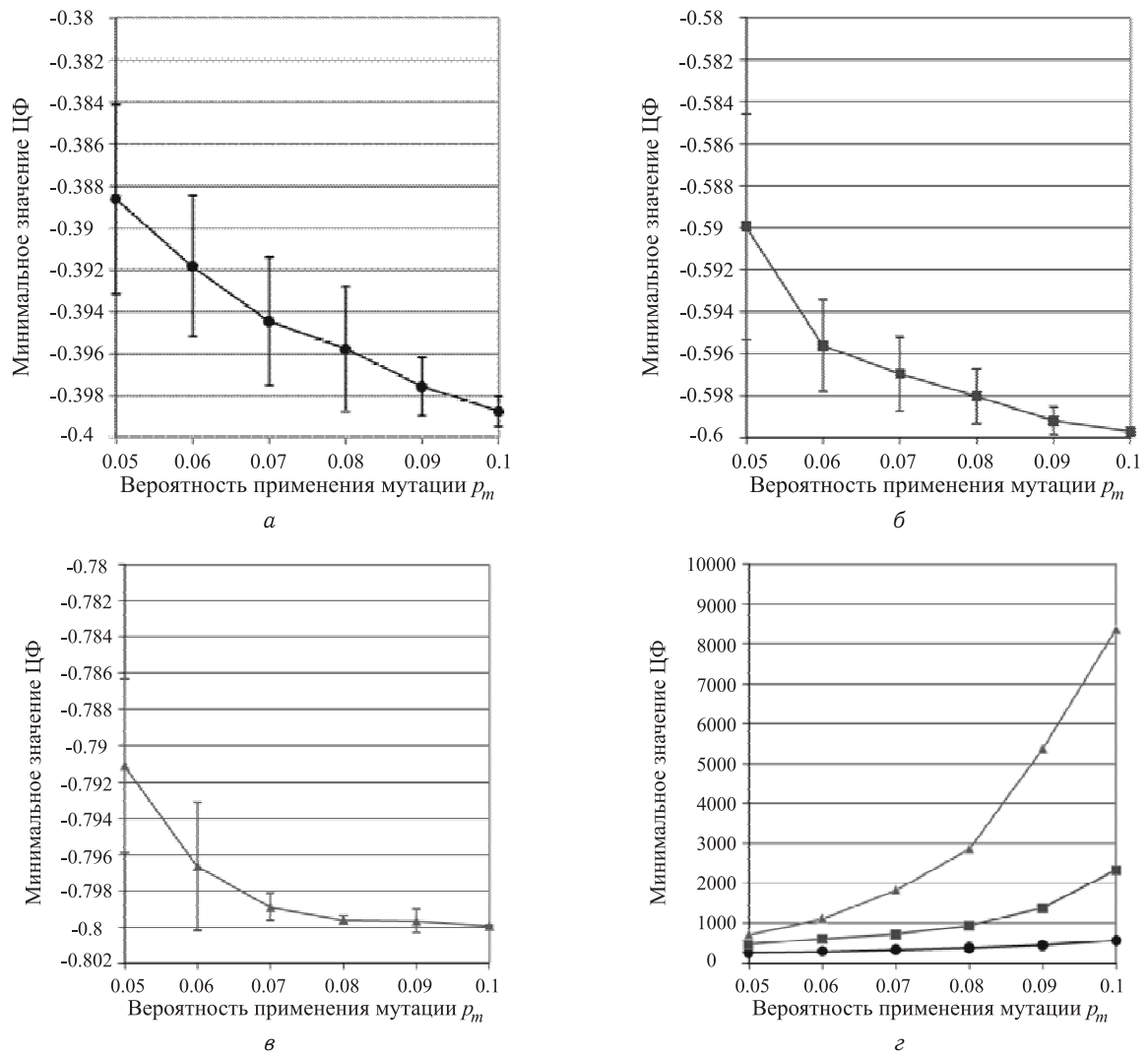


Рис. 6. Зависимость найденного минимального значения ЦФ от вероятности применения мутации p_m и количества параметров оптимизации n : ● $n = 4$, ■ $n = 6$, ▲ $n = 8$

Как видно из рис. 6, увеличение вероятности применения оператора мутации p_m с 0.05 до 0.1 приводит к значительному повышению точности нахождения глобального минимума, но при этом быстро растет количество вычислений. Оптимальным, с точки зрения точности и времени вычислений, является диапазон значений $p_m \in [0.06, 0.07]$. Коэффициент ускорения, рассчитанный по (3) для середины оптимального диапазона p_m , составил 4.46, 4.72 и 4.86 для ЦФ (4), (5) и (6) соответственно.

Таким образом, в результате численного эксперимента были определены оптимальные диапазоны параметров первого варианта распараллеливания ГА, обеспечивающие высокую точность при приемлемом времени поиска глобального минимума ЦФ (4), (5) и (6) (табл. 2).

Оценка эффективности второго варианта параллельного ГА для функций (4), (5) и (6) осуществлялась путем про-

Таблица 2
Оптимальные диапазоны изменения параметров параллельного ГА

	k	m	p_c	p_m
min	50	6	0.3	0.06
max	60	8	0.7	0.07



ведения серии экспериментов при различном числе узлов параллельной ВС p и фиксированных значениях остальных параметров: $k = 50, m = 10, p_c = 0.75, p_m = 0.05$.

Как видно из результатов тестирования (рис. 7), с ростом числа узлов ВС p с 1 до 30 наблюдается уменьшение доверительного интервала в 7.89, 5.64 и 7.87 раз соответственно для ЦФ (4), (5) и (6), что говорит о значительном повышении надежности нахождения глобального минимума. При этом число вычислений ЦФ, а значит, и время работы параллельной ВС, практически не изменяется и составляет в среднем 257, 450, 740 для ЦФ (4), (5), (6) соответственно.

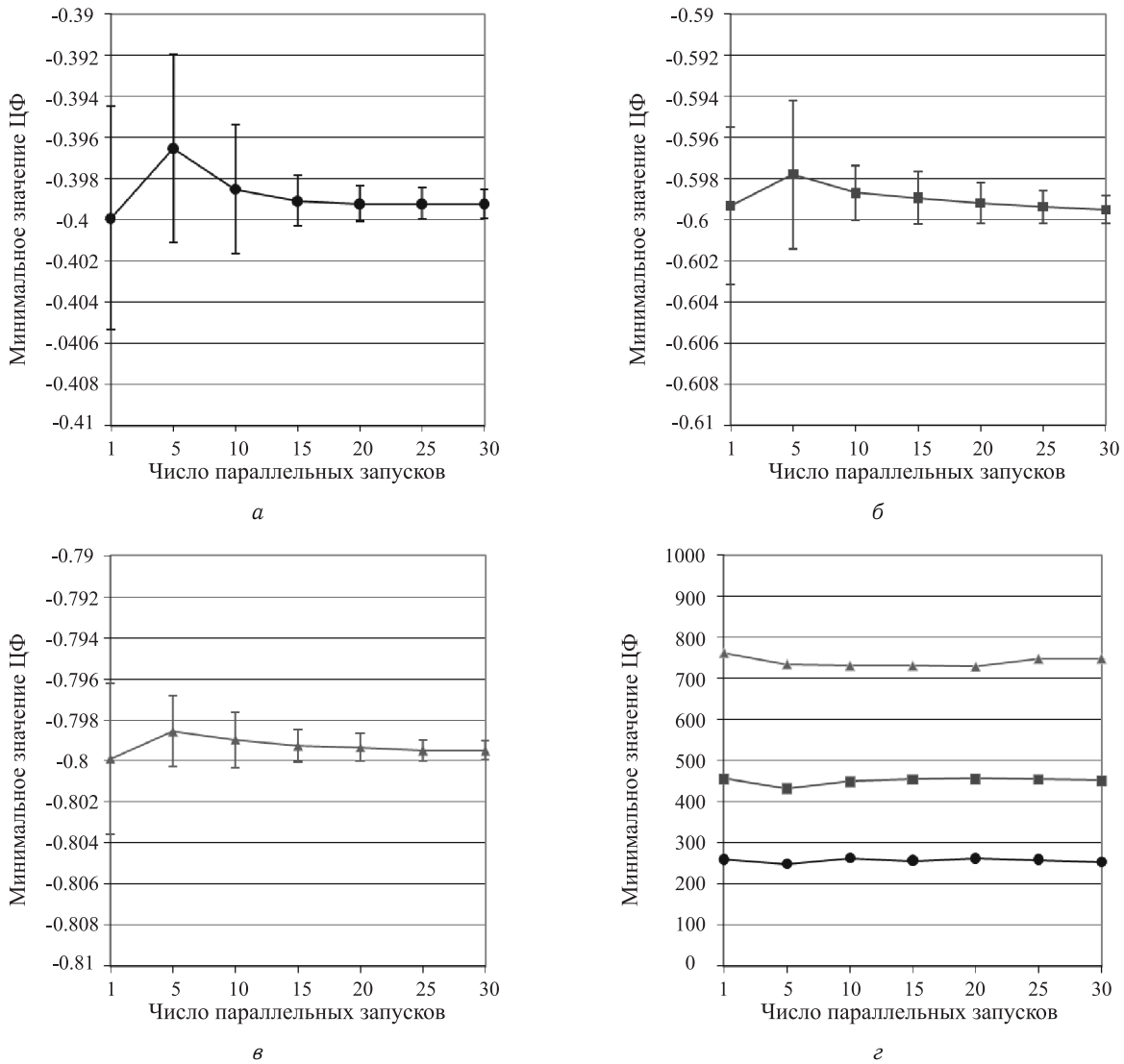


Рис. 7. Зависимость найденного минимального значения ЦФ от количества параллельных запусков параметров оптимизации n : ● — $n = 4$, ■ — $n = 6$, ▲ — $n = 8$

Следовательно, вариант распараллеливания ГА путём множественного запуска на параллельной ВС обеспечивает значительное увеличение вероятности нахождения глобального экстремума за счёт более полного исследования области факторного пространства ЦФ. При этом время выполнения параллельного алгоритма, пропорциональное числу вычислений ЦФ, практически не зависит от числа узлов ВС p и примерно равно времени выполнения алгоритма на одном узле ВС при одинаковых n .

ВЫВОДЫ

В работе предложены два варианта распараллеливания генетических алгоритмов оптимизации для случаев сложных и простых ЦФ.

Первый вариант распараллеливания ГА основан на одновременном вычислении на нескольких узлах ВС изменяемых точек в факторном пространстве. В результате численного эксперимента были



определены оптимальные диапазоны параметров первого варианта распараллеливания ГА, обеспечивающие небольшое время поиска глобального минимума ЦФ и высокую надёжность его нахождения при выполнении на параллельной ВС.

Тестирование второго варианта распараллеливания ГА, основанного на множественном запуске на параллельной ВС, показало значительное увеличение вероятности нахождения глобального экстремума за счёт более полного исследования области факторного пространства ЦФ. Время выполнения параллельного алгоритма при этом практически не зависело от числа узлов ВС и примерно равнялось времени выполнения алгоритма на одном узле ВС.

Таким образом, предложенные варианты распараллеливания генетического алгоритма оптимизации могут эффективно применяться для решения задач поиска как глобального минимума многоэкстремальной ЦФ при наличии ограничений на варьируемые параметры (первый вариант), так и его области (второй вариант).

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Министерства образования и науки РФ «Подготовка и переподготовка профильных специалистов на базе центров образования и разработок в сфере информационных технологий в Южном и Северо-Кавказском федеральных округах» (государственный контракт № 07.Р20.11.0029).

Библиографический список

1. Орлянская И. В. Современные подходы к построению методов глобальной оптимизации // Электронный журнал «Исследовано в России». С. 2097–2108. URL : <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/189.pdf> (дата обращения : 2.12.2011). [Orlyanskaya I. V. Modern approaches to global optimization methods building // Online magazine «Issledovano v Rossii». P. 2097–2108. URL : <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/189.pdf> (last checked : 2.12.2012).]
2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М. : Радио и связь, 1988. 127 с. [Brian D. Bunday Basic Optimisation Methods. London : Edward Arnold, 1984. 128 p.]
3. Панченко Т. В. Генетические алгоритмы : учеб.-метод. пособие / под ред. Ю. Ю. Тарасевича / Астрахан. ун-т. Астрахань, 2007. 87 с. [Panchenko T. V. Genetic algorithms : the methodical manual / Ed. by Yu. Yu. Tarasevich / Astrakhan. Univer. Astrakhan, 2007. 87 p.]
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с. [Kalitkin N. N. Numerical methods. Moscow : Nauka, 1978. 512 p.]
5. Eroftiev A. A., Timofeeva N. E., Savin A. N. Parallel Computing in Application to Global Optimization Problem Solving // Grid and Visualization Systems : MIPRO, 2011 Proc. of the 34th Intern. Convention. Zagreb, Croatia : DENONA, 2011. P. 185–190.

УДК 501.1

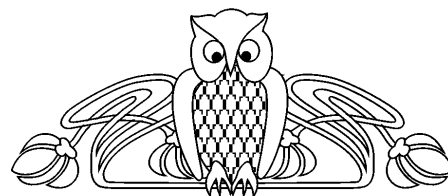
ГЛАВНЫЕ ИДЕАЛЫ В ПОЛУРЕШЕТКЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЦЕПИ

Е. О. Фомина

Саратовский государственный университет
E-mail: janekao@mail.ru

Показано, что главные идеалы, порождаемые однотипными конгруэнциями цепи, изоморфны как решетки. Подсчитано количество элементов, атомов и коатомов в главном идеале порождаемой данной конгруэнцией цепи.

Ключевые слова: цепь, конгруэнция, полурешетка, главный идеал, атом, коатом.



Principal Ideals in the Congruence Semilattice of a Path

E. O. Fomina

It is proven that principal ideals generated by congruences of a path having the same type are isomorphic lattices. The number of elements, atoms and coatoms is found for the principal ideal generated by a given congruence of a path.

Key words: path, congruence, semilattice, principal ideal, lattice, atom, coatom.

Ориентированным графом (далее орграфом) называется пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество, а α — отношение на V . Множество V называется множеством вершин, отношение α — отношение смежности, а пары, входящие в α , — дуги орграфа G . Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершина v смежна с вершиной u . Основные понятия приводятся в соответствии с [1].

Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V . Факторграфом ор-



графа G по эквивалентности ε называется оргграф $G/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где V/ε — множество классов эквивалентности ε , а $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) : (\exists u_1 \in \varepsilon(v_1), \exists u_2 \in \varepsilon(v_2))((u_1, u_2) \in \alpha)\}$.

Пусть K — некоторый класс оргграфов. Конгруэнцией K -графа G называется такое отношение эквивалентности θ на V , что факторграф G/θ является K -графом.

В качестве класса K возьмем класс неориентированных графов.

Под неориентированным графом (или, для краткости, графом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин V . В неориентированном графе пара встречных дуг $(u, v)(v, u)$ рассматривается как один элемент графа, называемый ребром $\{u, v\}$. Вершины u и v по определению инцидентны ребру $\{u, v\}$.

Известна следующая задача о факторизации: можно ли для заданного графа сказать, является ли он факторграфом другого заданного графа? Эта задача является NP-полной.

В [2] показано, что каждый связный граф является факторграфом подходящей цепи.

Множество вершин графа называется независимым, если любые две вершины из этого множества несмежны. Очевидно, что отношение эквивалентности θ на множестве вершин графа $G = (V, \alpha)$ тогда и только тогда будет конгруэнцией этого графа, когда каждый θ -класс образует в G независимое подмножество.

Отношение ω на множестве S называется отношением порядка, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично: ω — порядок на $S \iff \Delta \subseteq \omega \ \& \ \omega \circ \omega \subseteq \omega \ \& \ \omega \cap \omega^{-1} \subseteq \Delta$, где Δ — тождественное отношение на S .

Пусть S — непустое множество и ω — отношение порядка на нем. Пара (S, ω) называется упорядоченным множеством. В дальнейшем произвольное упорядоченное множество будем обозначать как (S, \leq) .

Пусть P_m — неориентированная m -реберная цепь и пусть в цепи P_m вершины пронумерованы натуральными числами $0, 1, 2, \dots, m$. Обозначим совокупность всех конгруэнций цепи P_m через $Con P_m$. Пара $(Con P_m, \subseteq)$ будет упорядоченным множеством, так как множество всех конгруэнций цепи P_m упорядочено по включению.

Наименьшим элементом упорядоченного множества (S, \leq) называется элемент s , удовлетворяющий в (S, \leq) тождественному неравенству $s \leq x$. Наибольший элемент определяется в (S, \leq) тождественным неравенством: $x \leq s$.

Пусть S^* — некоторое подмножество упорядоченного множества (S, \leq) . Элемент $a \in S$ называется нижней гранью подмножества S^* , если $a \leq x$ для всех $x \in S^*$ и верхней гранью для S^* , если $a \geq x$ для всех $x \in S^*$. Под наибольшей нижней гранью подмножества S^* в упорядоченном множестве (S, \leq) понимается наибольший (если он существует) элемент в множестве всех нижних граней для S^* . Аналогично определяется верхняя грань и наименьшая верхняя грань подмножества S^* ; это наименьший элемент (если он существует) в множестве всех верхних граней для S^* . Очевидно, что любое подмножество $S^* \subseteq S$ имеет не более одной наибольшей нижней грани и не более одной наименьшей верхней грани. Эти элементы обозначают соответственно $\inf S^*$ (инфимум) и $\sup S^*$ (супремум) и называют также точными (нижней и верхней соответственно) гранями подмножества S^* . Под нижней полурешеткой понимается упорядоченное множество, в котором для любых двух элементов x, y существует $\inf(x, y)$.

Упорядоченное множество (S, \leq) называется решеткой, если каждое его конечное подмножество имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани. Известно, что конечная нижняя полурешетка с наибольшим элементом является решеткой.

Так как для любых двух элементов θ_1 и θ_2 в упорядоченном множестве $(Con P_m, \subseteq)$ существует $\inf(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 \cap \theta_2$, то $(Con P_m, \subseteq)$ — нижняя полурешетка.

Пусть u и v — любые две несмежные вершины цепи $Con P_m$. Главной конгруэнцией, порожденной парой u, v , называется наименьшая конгруэнция $\theta(u, v)$, отождествляющая вершины u и v . Очевидно, что такие конгруэнции являются атомами в полурешетке $(Con P_m, \subseteq)$, так как не существует такой конгруэнции θ^* , что $\Delta \subset \theta^* \subset \theta(u, v)$.

Рассмотрим экстремальные элементы в полурешетке всех конгруэнций цепи P_m . Наименьшим элементом ее является тождественная конгруэнция Δ . Наибольшего элемента в $(Con P_m, \subseteq)$ при $m \geq 3$ нет. Возьмем, например, главные конгруэнции $\theta(0, 2)$ и $\theta(0, 3)$, которые есть у любой цепи P_m



при $m \geq 3$. У этих конгруэнций нет общей верхней грани: если θ содержит $\theta(0, 2)$ и $\theta(0, 3)$, то в силу транзитивности $(2, 3) \in \theta$, что невозможно, так как вершины 2 и 3 смежные в P_m . В $(Con P_m, \subseteq)$ при $m > 2$ будет более одной максимальной конгруэнции. Таким образом, наибольшего элемента в таких упорядоченных множествах не будет.

Говорят, что в упорядоченном множестве (S, \leq) элемент b является верхним соседом элемента a , если $a < b$ и не существует $x \in S$ такого, что $a < x < b$, при этом говорят, что a — нижний сосед для b . Верхние соседи наименьшего элемента называются атомами упорядоченного множества S . Нижние соседи наибольшего элемента называются коатомами упорядоченного множества S .

Главным идеалом, порожденным конгруэнцией θ , называется подмножество полурешетки $(Con P_m, \subseteq)$, образуемое всеми конгруэнциями θ^* такими, что $\theta^* \subseteq \theta$. Очевидно, что главный идеал является решеткой.

Введем понятие «тип конгруэнции».

Типом конгруэнции называется последовательность мощностей классов конгруэнции, записанная в порядке убывания. Обозначим тип конгруэнции θ как $t(\theta)$.

Пример 1. Конгруэнции $\{0, 2, 4\}\{1, 3\}\{5\}$ и $\{0, 2, 5\}\{1, 4\}\{3\}$ цепи P_5 имеют один тип $(3, 2, 1)$, а конгруэнция $\{0\}\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}\{5\}$ цепи P_5 имеет тип $(1, 1, 1, 1, 1)$.

Изоморфизмом между двумя решетками S и T называется взаимно однозначное соответствие $\varphi : S \rightarrow T$ между ними, которое удовлетворяет следующим двум условиям для любых $x, y \in S$:

- 1) из $x \leq y$ следует, что $\varphi(x) \leq \varphi(y)$;
- 2) из $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ следует, что $x \leq y$.

Изоморфность решеток S и T будем обозначать как $S \cong T$.

Теорема 1. Главные идеалы, порожденные конгруэнциями одного типа в полурешетке $(Con P_m, \subseteq)$, являются изоморфными решетками.

Доказательство. Возьмем главные идеалы $Id \theta_1$ и $Id \theta_2$ в полурешетке $(Con P_m, \subseteq)$, порожденные однотипными конгруэнциями θ_1 и θ_2 соответственно. Покажем, что $Id \theta_1 \cong Id \theta_2$.

Рассмотрим конгруэнции θ_1 и θ_2 . Так как θ_1 и θ_2 — конгруэнции одного типа, то количество их классов будет одинаково. Запишем классы конгруэнций в порядке убывания по количеству элементов в каждом классе, а сами элементы в каждом классе запишем в порядке их возрастания. Таким способом выстроим последовательность вершин цепи в порядке их следования в каждой конгруэнции. Для θ_1 получим u_0, u_1, \dots, u_m , а для θ_2 получим v_0, v_1, \dots, v_m . Очевидно, что каждая последовательность перечисляет в некотором порядке все вершины цепи P_m . Определим биекцию на множестве вершин цепи, полагая $\varphi(u_i) = v_i, i = 0, 1, \dots, m$.

Возьмем конгруэнцию $\theta \in Id \theta_1$, т.е. $\theta \subseteq \theta_1$. Произведем замену каждого элемента u_i в каждом классе конгруэнции θ на $\varphi(u_i), i = 0, 1, \dots, m$. Получим $\varphi(\theta)$ — некоторый набор подмножеств множества вершин цепи P_m . Так как φ — биекция и в θ задействованы все вершины цепи P_m , то и $\varphi(\theta)$ содержит все вершины цепи P_m , значит $\varphi(\theta)$ — классы, образующие покрытие множества вершин V . Если классы перекрываются, то $\varphi(u) = \varphi(v)$ для некоторых $u, v \in V$, но тогда $u = v$, что невозможно. Таким образом, $\varphi(\theta)$ будет разбиением множества V . Из некоторого класса разбиения $\varphi(\theta)$ возьмем вершины $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$, тогда $(\varphi(u), \varphi(v)) \in \varphi(\theta) \Rightarrow (u, v) \in \theta \Rightarrow (u, v) \in \theta_1 \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \theta_2 \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \notin \alpha$ (α — отношение смежности в цепи P_m). Следовательно, $\varphi(\theta)$ — разбиение на множестве вершин цепи P_m , все классы которого будут независимыми, т.е. $\varphi(\theta)$ — конгруэнция на множестве вершин цепи P_m .

Покажем, что $\varphi(\theta) \in Id \theta_2$, для этого установим тот факт, что любой класс конгруэнции $\varphi(\theta)$ входит в состав некоторого класса конгруэнции θ_2 . Ранее было показано, что любые $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$, находящиеся в одном классе конгруэнции $\varphi(\theta)$, попадут в один класс конгруэнции θ_2 , т.е. $(\varphi(u), \varphi(v)) \in \varphi(\theta) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in \theta_2$. Таким образом, получаем, что любой класс $\varphi(\theta)$ является подклассом некоторого класса конгруэнции θ_2 , следовательно, $\varphi(\theta) \in Id \theta_2$.

С помощью φ установлено взаимно однозначное соответствие между главными идеалами $Id \theta_1$ и $Id \theta_2$. В дальнейшем под φ будем понимать $\varphi : Id \theta_1 \rightarrow Id \theta_2$. Из приведенных выше рассуждений следует, что это соответствие сохраняет порядок, т.е. если $\theta^* \subseteq \theta$, то $\varphi(\theta^*) \subseteq \varphi(\theta)$, и обратно. В результате получим, что φ — изоморфизм. \square



Пример 2. На рис. 1 и рис. 2 представлены изоморфные решетки, порожденные конгруэнциями $\{0, 2, 4\}\{1, 3\}\{5\}$ и $\{0, 2, 5\}\{1, 4\}\{3\}$ цепи P_5 одного типа (3,2,1). На рис. 3 изображена решетка, порожденная произвольной конгруэнцией типа (3,2,1).

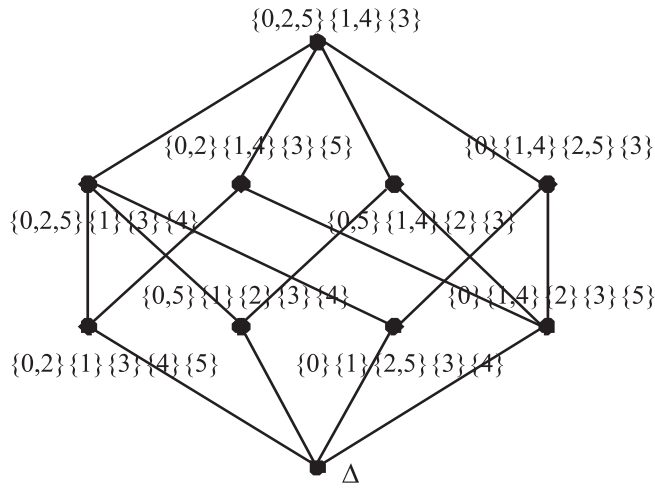


Рис. 1

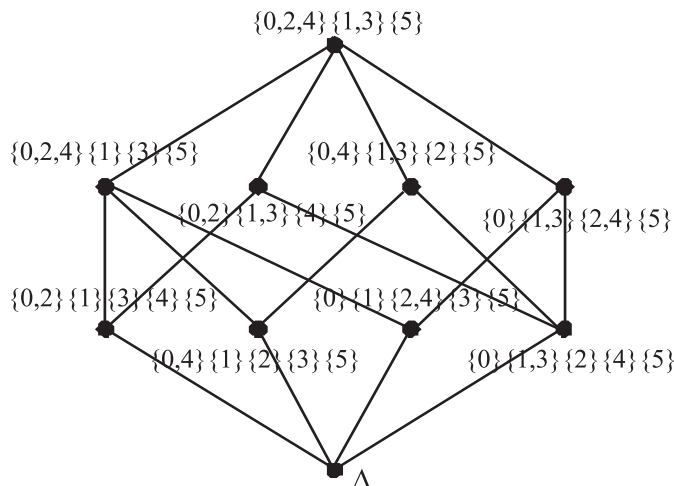


Рис. 2

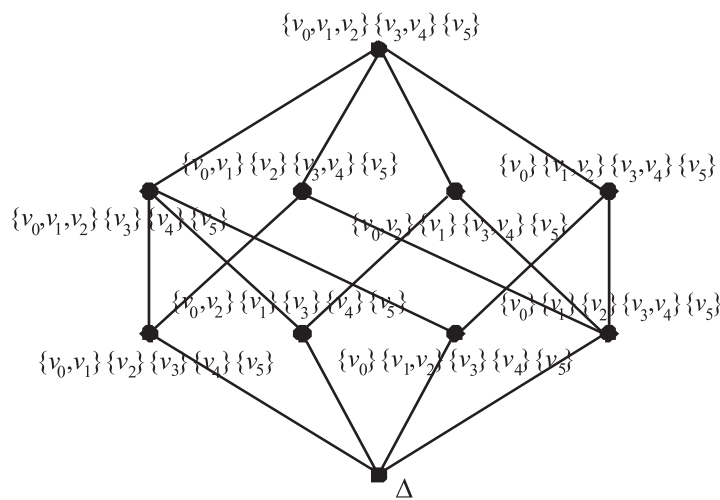


Рис. 3



Определим числа Белла и числа Стирлинга. Числом Белла $B(n)$ называется количество всех разбиений n -элементного множества. Числом Стирлинга второго рода $s_2(n, k)$ называется количество всех разбиений с k классами на n -элементном множестве.

Подсчитаем общее количество элементов решетки $\text{Id } \theta$, порожденной конгруэнцией θ . Пусть конгруэнция θ имеет тип (t_1, t_2, \dots, t_n) . Элементами решетки $\text{Id } \theta$ будут всевозможные конгруэнции θ^* такие, что любой класс конгруэнции θ^* входит в состав некоторого класса конгруэнции θ .

Пусть $\theta^* \in \text{Id } \theta$. Так как любой класс конгруэнции θ^* входит в состав некоторого класса конгруэнции θ , то конгруэнция θ^* будет подразбиением конгруэнции θ .

Таким образом, необходимо подсчитать всевозможные разбиения классов конгруэнции θ . Так как нам известна мощность каждого класса конгруэнции θ , а количество разбиений n -элементного множества — это число Белла B_n , то общее количество элементов решетки $\text{Id } \theta$, порожденной конгруэнцией θ типа (t_1, t_2, \dots, t_n) , можно подсчитать по формуле: $B(t_1) \cdot B(t_2) \cdot \dots \cdot B(t_n)$.

Найдем количество коатомов в главном идеале $\text{Id } \theta$, порожденном конгруэнцией θ типа (t_1, t_2, \dots, t_n) . Конгруэнция θ имеет n классов и будет наибольшим элементом в решетке $\text{Id } \theta$. Так как коатомы являются нижними соседями наибольшего элемента, то конгруэнция, являющаяся коатомом, имеет $n + 1$ классов.

Возьмем произвольный класс конгруэнции θ , разобьем его на два класса. Получим новую конгруэнцию θ^* с $n + 1$ классами. Найдем все возможные разбиения на два класса произвольного θ -класса мощности t , их количество будет $s_2(t, 2)$. Таким образом, возьмем каждый класс конгруэнции θ , и найдем его всевозможные разбиения на два класса, каждое такое разбиение будет коатомом. Таким образом, общее количество коатомов можно посчитать по формуле $s_2(t_1, 2) + s_2(t_2, 2) + \dots + s_2(t_n, 2)$.

Подсчитаем количество атомов в главном идеале $\text{Id } \theta$, порожденном конгруэнцией θ типа (t_1, t_2, \dots, t_n) . Атомами являются верхние соседи наименьшего элемента, т.е. это главные конгруэнции.

Пусть $\theta^* \in \text{Id } \theta$ будет главной конгруэнцией. Согласно определению главной конгруэнции, очевидно, что один из классов конгруэнции θ^* будет иметь мощность 2, все остальные мощность 1. Так как $\theta^* \in \text{Id } \theta$, то любой класс конгруэнции θ^* входит в состав некоторого класса конгруэнции θ , значит, конгруэнция θ^* будет подразбиением конгруэнции θ . Таким образом, найдем всевозможные пары элементов каждого класса конгруэнции θ . Учитывая мощность каждого класса конгруэнции θ количество всех атомов главного идеала $\text{Id } \theta$ можно посчитать по формуле: $C_{t_1}^2 + C_{t_2}^2 + \dots + C_{t_n}^2$.

Пример 3. Подсчитаем количество элементов, коатомов и атомов в главных идеалах $\text{Id}(\{0, 2, 4\}\{1, 3\}\{5\})$ и $\text{Id}(\{0, 2, 5\}\{1, 4\}\{3\})$ цепи P_5 из примера 2. В силу их изоморфности достаточно подсчитать для одного главного идеала. Главный идеал $\text{Id}(\{0, 2, 4\}\{1, 3\}\{5\})$ цепи P_5 имеет тип $(3, 2, 1)$. Найдем общее количество элементов решетки $\text{Id}(\{0, 2, 4\}\{1, 3\}\{5\})$ для цепи P_5 : $B(3) \cdot B(2) \cdot B(1) = 5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$. Подсчитаем общее количество коатомов главного идеала $\text{Id}(\{0, 2, 4\}\{1, 3\}\{5\})$ для цепи P_5 : $s_2(3, 2) + s_2(2, 2) + s_2(1, 2) = 3 + 1 + 0 = 4$. Найдем количество атомов в главном идеале $\text{Id}(\{0, 2, 4\}\{1, 3\}\{5\})$ для цепи P_5 : $C_3^2 + C_2^2 + C_1^2 = 3 + 1 + 0 = 4$.

Библиографический список

1. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука; Физматлит, 1997. [Bogomolov A. M., Salii V. N. Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems. Moscow : Nauka; Fizmatlit, 1997.]
2. Карманова Е. О. О конгруэнциях цепей // Прикладная дискретная математика. 2011. № 2 (12). С. 96–100. [Karmanova E. O. On congruences of path // Prikl. Diskr. Mat. 2011. № 2 (12). P. 96–100.]

ХРОНИКА НАУЧНОЙ ЖИЗНИ

I МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И МЕМБРАН В МЕХАНИКЕ И БИОЛОГИИ: ОТ МАКРО- ДО НАНОРАЗМЕРНЫХ СТРУКТУР» (SMT in MB – 2013)

Уважаемые коллеги!

Приглашаем принять участие в работе I Международной конференции «Теории оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур» (SMT in MB – 2013), которая пройдет с 16 по 20 сентября 2013 года в Белорусском государственном университете (БГУ), г. Минск, Беларусь.

Конференция проводится при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований. Организацию и информационную поддержку будет осуществлять Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, Белорусский национальный технический университет и Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (Россия).

Оргкомитет конференции:

Абламейко С. В. — академик НАН Беларуси, ректор БГУ (Минск, Беларусь) — сопредседатель;

Морозов Н. Ф. — академик РАН (Санкт-Петербург, Россия) — сопредседатель;

Коссович Л.Ю. — ректор Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия) — сопредседатель;

Журавков М. А. — первый проректор БГУ (Минск, Беларусь) — зам. председателя;

Михасев Г. И. — зав. кафедрой био- и наномеханики БГУ (Минск, Беларусь) — зам. председателя, координатор;

Босяков С. М. — доцент БГУ (Минск, Беларусь) — ученый секретарь.

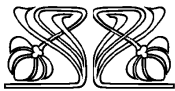
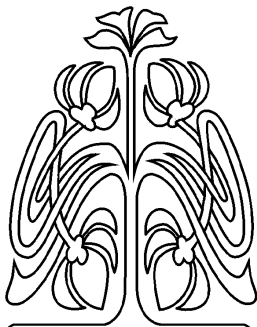
Члены оргкомитета (Беларусь):

Босаков С. В., Василевич Ю. В., Витязь П. А., Дюжев А. А., Доста А. Д., Медведев Д. Г., Миклашевич И. А., Плескачевский Ю. М., Поклонский Н. А., Старовойтов Э. И., Черенкевич С. А., Чигарев А. В., Чижик С. А., Юрчук Н. И.

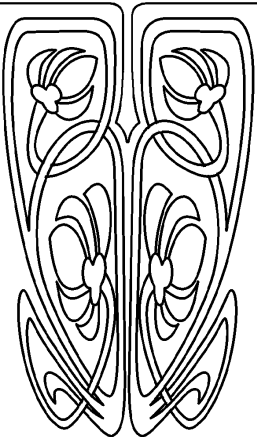
Международный программный комитет:

Altenbach Н. (Германия) — председатель;

Aghalovyan L. A. (Армения), Andrianov I. V. (Германия), Бауэр С. М. (Россия), Ватульян А. О. (Россия), Eremeyev V. A. (Германия, Россия), Elishakoff I. (США), Ganghoffer J.-F. (Франция), Gu Yu (Китай), Индейцев Д. А. (Россия), Иванова Е. А. (Россия), Karlunov J. (Великобритания), Кириллова И. В. (Россия), Kienzler R. (Германия), Кубенко В. Д. (Украина), Куликов Г. М. (Россия), Луговой П. З. (Украина), Mishuris G. (Великобритания), Podio-Guidugli P. (Ита-



ПРИЛОЖЕНИЯ





лия), Pietraszkiewicz W. (Польша), Семенов Б. Н. (Россия), Sargsyan S. (Армения), Sugawara M. (Япония), Sorokin S. (Дания), Тарлаковский Д. В. (Россия), Товстик П. Е. (Россия).

Научные направления конференции:

1. Математические проблемы теорий тонких оболочек и мембран.
2. Связанные поля в теории пластин и оболочек.
3. Тонкостенные элементы в моделировании биомеханических систем.
4. Неклассические теории оболочек, пластин и стержней в моделировании микро- и наноразмерных структур и объектов.
5. Механика мембран и пленок и их приложения в биологии и медицине.
6. Приложения теорий балок, пластин и оболочек в промышленности.
7. Композитные тонкостенные конструкции.
8. Численные и экспериментальные методы исследования тонкостенных элементов и конструкций.
9. Математическое и численное моделирование биомеханических систем.
10. Образовательные аспекты в биомеханике и наномеханике.

В ходе конференции будет работать выставка инновационных разработок в области биомеханики, наномеханики и нанотехнологий Белорусского государственного университета, Национальной академии наук Беларуси и Саратовского государственного университета.

К началу работы конференции готовится к изданию сборник тезисов на русском или английском языках. После завершения работы конференции расширенные варианты лучших работ, отобранных Международным программным комитетом и написанных на английском языке, будут рекомендованы для опубликования в отдельном томе в издательстве «Springer» серия «Advanced Structures Materials». Другие работы, отобранные Оргкомитетом конференции, будут рекомендованы для опубликования в специальных выпусках журналов: «Механика машин, механизмов и материалов» (Беларусь), «Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1: Физика. Математика. Информатика» (Беларусь), «Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика» (Россия).

Важные даты:

- Предварительная регистрация и подача тезисов — 31 марта 2013
 - Уведомление о принятии тезисов, второе информационное сообщение — 1 мая 2013
 - Ранняя оплата организационных взносов — 31 июня 2013
 - Окончательная регистрация, начало работы конференции — 16 сентября 2013 года
- Дополнительная информация о конференции размещена на сайте <http://www.nanoshells.by>

Адрес и контактные телефоны Оргкомитета:
Организационный комитет конференции «SMT in MB – 2013»,
Механико-математический факультет,
Белорусский государственный университет,
Проспект Независимости, д. 4, 220030, Минск, Беларусь.
E-mail: nanoshells@bsu.by
Телефоны: +375(17)2095570, +375(17)2095345
Факс: +375(17)2095249



СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ардазшвили Роман Вячеславович, инженер отдела биомеханики ОНИ наноструктур и биосистем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: ardazishvili.roman@yandex.ru

Бредихин Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирование, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А. E-mail: bredikhin@mail.ru

Вахитова Екатерина Васильевна, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет. E-mail: algebraist@yandex.ru

Вахитова Светлана Рифовна, соискатель кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет. E-mail: algebraist@yandex.ru

Вильде Мария Владимировна, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела биомеханики ОНИ наноструктур и биосистем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: mv_wilde@mail.ru

Дружинин Игорь Вячеславович, аспирант кафедры информационной безопасности, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана. E-mail: druzhininiv@gmail.com

Ерофтиев Андрей Александрович, аспирант кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и систем, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. E-mail: erofatiev.andrey@gmail.com

Калужина Наталья Сергеевна, ассистент кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет. E-mail: kaluzhina_n_s@mail.ru

Каплунов Юлий Давидович, доктор физико-математических наук, профессор, департамент математических наук, факультет информационно-вычислительных систем и математики, университет Брюнель, Лондон, Великобритания. E-mail: Julius.Kaplunov@brunel.ac.uk

Коссович Елена Леонидовна, младший научный сотрудник отдела математического моделирования ОНИ наноструктур и биосистем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, E-mail: kossovichel@info.sgu.ru

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физико-математических наук, ректор, заведующий кафедрой математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. Email: rector@sgu.ru

Логинов Михаил Юрьевич, младший научный сотрудник

лаборатории механики, навигации и управления движением, Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов. E-mail: heetseeker@mail.ru

Мухомодьяров Ринат Равильевич, кандидат физико-математических наук, начальник отдела компьютерного моделирования и прототипирования ОНИ наноструктур и биосистем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, E-mail: rinatm@mail.ru

Панкратов Илья Алексеевич, кандидат технических наук, ассистент кафедры вычислительного эксперимента в механике, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный. E-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

Рыхлов Виктор Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Савин Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. E-mail: savinan@info.sgu.ru

Сапунков Яков Григорьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительного эксперимента в механике, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru

Сорокина Ольга Валентиновна, старший преподаватель кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. Email: SorokinaOVA@yandex.ru

Старков Виктор Васильевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, Петрозаводский государственный университет. E-mail: VstarV@list.ru

Султанов Эмир Шерифович, младший научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр Российской академии наук, Махачкала. E-mail: emir.sultanov@gmail.com

Терехин Павел Александрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: TerekhinPA@info.sgu.ru



Ткаченко Михаил Гелиевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, Автономный университет Мехико. E-mail: mich@xanum.uam.mx

Фадеев Роман Николаевич, аспирант кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: belal_templier@mail.ru

Фомина Евгения Олеговна, аспирантка кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: Janekao@mail.ru

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru

Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Челноков Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительного эксперимента в механике, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. E-mail: ChelnokovYuN@info.sgu.ru

Шарапудинов Идрис Идрисович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела функционального анализа Южного математического института Владикавказского научного центра РАН и правительства РСО-А; заведующий отделом математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала. E-mail: sharapud@mail.ru



INFORMATION ABOUT AUTHORS

Ardazishvili Roman Vyacheslavovich, Senior Technician in Educational Research Institute of Nanostructures and Biosystems, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: ardazishvili.roman@yandex.ru

Bredikhin Dmitry Aleksandrovich, Doctor of Science, Professor of the Chair of Mathematics and Modeling, Saratov State Technical University. E-mail: bredikhin@mail.ru

Chelnokov Yuriy Nikolaevich, Doctor of Science, Full Professor of the Chair of Computational Experiment in Mechanics, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: ChelnokovYuN@info.sgu.ru

Druzhinin Igor Vyacheslavovich, Post-Graduate Student of the Chair of Information Security, Moscow State Technical University named after N. E. Bauman. E-mail: druzhininiv@gmail.com

Eroftiev Andrey Aleksandrovich, Post-Graduate Student of the Chair of Mathematical Software of Computing Systems, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: eroftiev.andrey@gmail.com

Fadeev Roman Nikolaevich, Post-Graduate Student of the Chair of Function Theory and Approximation, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: belal_templier@mail.ru

Fomina Evgenia Olegovna, Post-Graduate Student of the Chair of Theoretical Foundations of Computer Security and Cryptography, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: Janekao@mail.ru

Kaluzhina Natalya Sergeevna, Assistant of the Chair of Mathematical Methods of Operations Research, Voronezh State University. E-mail: kaluzhina_n_s@mail.ru

Kaplunov Julius Davidovich, Doctor of Science, Professor of the Department of Mathematical Sciences, Brunel University, London, United Kingdom. E-mail: Julius.Kaplunov@brunel.ac.uk

Khalova Victoria Anatolievna, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Differential Equations and Applied Mathematics, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru

Khromov Avgust Petrovich, Doctor of Sciences, Head of the Chair of Differential Equations and Applied Mathematics, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Kossovich Elena Leonidovna, Junior Scientist of Mathematical Modeling Department, Educational-Research Institute of Nanostructures and Biosystems, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: kossovichel@info.sgu.ru

Kossovich Leonid Yurievich, Doctor of Science, Rector, Head of the Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: rector@sgu.ru

Loginov Mikhail Yurievich, Junior Research Associate of the Laboratory of Mechanics, Mathematics and Motion Control, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, Saratov. E-mail: heetseeker@mail.ru

Mukhomodyarov Rinat Ravilyevich, Candidate of Sciences, Head of the Computer Modeling and Prototyping Department, Educational-Research Institute of Nanostructures and Biosystems, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: rinatm@mail.ru

Pankratov Ilya Alekseevich, Candidate of Science, Assistant Professor of the Chair of Computational Experiment in Mechanics, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru

Polovinkin Evgeny Sergeevich, Doctor of Science, Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudny. E-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

Rykhlov Victor Sergeevich, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Differential Equations and Applied Mathematics, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Savin Alexandr Nikolaevich, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Discrete Mathematics and Information Technologies, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: savinan@info.sgu.ru

Sapunkov Yakov Grigorievich, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Computational Experiment in Mechanics, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru

Sharapudinov Idris Idrisovich, Doctor of Science, Professor, Chief Scientific Worker of Department of Functional Analysis of Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Center of RAS and RSO-A Government; Supervisor of Department of Mathematics and Computer Science of Daghestan Scientific Center of RAS, Makhachkala. E-mail: sharapud@mail.ru

Sorokina Olga Valentinovna, Senior Lecturer of the Chair of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: SorokinaOVA@yandex.ru

Starkov Victor Vasilevich, Doctor of Sciences, Head of the Chair of Mathematical Analysis, Petrozavodsk State University. E-mail: VstarV@list.ru



Sultanov Emir Sherifovich, Junior Research Scientist of Department of Mathematics and Computer Science, Dagestan Scientific Center of RAS, Makhachkala. E-mail: emir.sultanov@gmail.com

Terekhin Pavel Aleksandrovich, Doctor of Science, Head of the Chair of Function Theory and Approximation, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: TerekhinPA@info.sgu.ru

Tkachenko Mikhail Gelievich, Doctor of Sciences, Professor of the Chair of Mathematics, Autonomous University of Mexico. E-mail: mich@xanum.uam.mx.

Vakhitova Ekaterina Vasil'evna, Candidate of Sciences, Professor of the Chair of Digital Technologies, Voronezh State University. E-mail: algebraist@yandex.ru

Vakhitova Svetlana Rifovna, Applicant of the Chair of Digital Technologies, Voronezh State University. E-mail: algebraist@yandex.ru

Wilde Maria Vladimirovna, Doctor of Science, Senior Researcher in Educational Research Institute of Nanostructures and Biosystems, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: mv_wilde@mail.ru