# МАТЕМАТИКА

УДК 517.929.7

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

**А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева**

Самарский государственный технический университет
E-mail: julia.yakovleva@mail.ru

В работе исследуется корректная, по Адамару, постановка характеристической задачи для одного гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка с некратными характеристиками.

**Ключевые слова:** гиперболическое дифференциальное уравнение третьего порядка, некратные характеристики, характеристическая задача, корректность по Адамару.

**The Characteristic Problem for one Hyperbolic Differential Equation of the Third Order with Nonmultiple Characteristics**

**A. A. Andreev, J. O. Yakovleva**

In the paper we consider the well-posed characteristics problem for the one hyperbolic differential equation of the third order with the nonmultiple characteristics.

**Key words:** hyperbolic differential equation of the third order, nonmultiple characteristics, characteristic problem, Hadamard's well-posedness.

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

### 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Известно [1], что классическая задача Гурса для уравнения гиперболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными с граничными условиями на двух характеристиках из различных семейств всегда является корректной по Адамару.

Исследованию начально-краевых задач для гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными порядка выше второго в случае кратных характеристик посвящены работы многих авторов. Например, в монографии А. В. Бицадзе [2] приведена характеристическая задача для систем второго порядка с кратными характеристиками. В статье С. С. Харибегашвили [3] рассмотрена характеристическая задача для вырождающихся гиперболических систем второго порядка. М. Х. Шхануковым [4] исследованы локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболического уравнения третьего порядка. В статье А. П. Солдатова, М. Х. Шханукова [5] приведены краевые задачи с общим нелокальным условием для псевдопараболического уравнения высокого порядка. В [6] В. И. Жегаловым, Е. А. Уткиной также изучена характеристическая задача для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка. О. М. Джохадзе [7] рассмотрена общая характеристическая задача типа Гурса для гиперболического уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, а также сформулирована и исследована общая трехмерная характеристическая задача Гурса для линейных гиперболических уравнений третьего порядка с доминированными младшими членами [8]. О. С. Зикировым [9] исследована характеристическая задача Гурса для линейного гиперболического уравнения третьего порядка в прямоугольной области.

Характеристические задачи для систем и уравнений гиперболического типа в частных производных с некратными характеристиками изучены явно недостаточно. В монографии [2] приводятся примеры, показывающие, что для системы второго порядка с некратными характеристиками задача Гурса является некорректной по Адамару [10].

Целью нашей статьи является исследование корректности, по Адамару, характеристических задач для гиперболического уравнения от двух независимых переменных третьего порядка с некратными характеристиками.

В плоскости независимых переменных $x$, $y$ рассмотрим строго гиперболическое уравнение третьего порядка:

$$u_{xxy} - u_{xyy} = 0. \tag{1}$$

**Лемма.** *Общее решение уравнения* (1) *из класса трижды непрерывно дифференцируемых функций $C^3(\mathbb{R})$ представляется в виде суммы*

$$u(x,y) = f(x - C_1) + g(y - C_2) + h(x + y - C_3) \tag{2}$$

*любых трех функций $f, g$ и $h$ из класса $C^3(\mathbb{R})$ от аргументов $x - C_1$, $y - C_2$, $x + y - C_3$ соответственно, где $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные константы из $\mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Как известно, семейство линий $\varphi(x,y) = \mathrm{const}$ является характеристиками уравнения (1), если функция $\varphi$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) равносильно дифференциальному уравнению:

$$(dy)^2 dx + dy(dx)^2 = 0.$$

Его решениями являются семейства линий, определяемые формулами

$$x = C_1, \qquad y = C_2, \qquad x + y = C_3.$$

Уравнение (1) допускает следующую факторизацию:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(v(x,y)\right) = 0,$$

где $v(x,y) = u_x - u_y$.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка $u_x - u_y = F(x) + G(y)$ имеет вид

$$u(x,y) = h(x+y) + \int\limits_0^x F(t)dt + \int\limits_0^y G(s)\,ds.$$

Таким образом, получаем общее решение $u(x,y)$ в виде (2). Лемма доказана.

Без ограничений общности можно считать, что общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x,y) = f(x) + g(y) + h(x+y). \tag{4}$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий некорректность классической постановки задачи Гурса на плоскости, независимых переменных $x, y$ для уравнений гиперболического типа третьего порядка.

**Пример.** Однородное уравнение (1), удовлетворяющее однородным условиям на характеристиках

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad u(0,y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \qquad u(x,-x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

имеет нетривиальное решение:

$$u(x,y) = h(x+y) - h(x) - h(y), \qquad h(0) = 0, \tag{6}$$

где $h(t) \in C^3(\mathbb{R})$ — любая нечетная функция.

Таким образом, нетривиальное решение (6) уравнения (1) удовлетворяет однородным граничным условиям (5) на трех характеристиках из различных семейств. В приведенной постановке характеристическая задача является некорректной по Адамару.

## 2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НА ПЛОСКОСТИ

Возникает вопрос: какая характеристическая задача будет являться корректной? Для уравнения (1) рассмотрим общую характеристическую задачу $G1$.

Пусть $x \in I_c$, где $I_c$ имеет центральную симметрию, т. е. для любого $x \in I_c$ $2c - x \in I_c$, тогда для любой функции $f(x)$ справедливо

$$f_{Н}^{c} = \frac{f(x) - f(2c-x)}{2}, \qquad f_{Ч}^{c} = \frac{f(x) + f(2c-x)}{2}, \qquad f(x) = f_{Н}^{c} + f_{Ч}^{c}. \tag{7}$$

При $c = 0$ будем обозначать $f_Н$, $f_Ч$ соответственно.

**Задача G1.** *Найти решение* $u\,(x,\, y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *уравнения* (1)*, удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad u(0,y) = \beta(y), \quad y \in \mathbb{R}, \qquad u(x,-x) = \gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

*где* $\alpha(x), \beta(y), \gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$.

**Теорема 1.** *Если* $\gamma_Н = \alpha_Н - \beta_Н$*, где* $\alpha_Н$*,* $\beta_Н$*,* $\gamma_Н$ *— нечетные части функций* $\alpha(x)$*,* $\beta(x)$*,* $\gamma(x)$ *соответственно, то задача* $G1$ *корректна по Адамару.*

Определим функции $f, g$ и $h$ таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия (8), учитывая при этом условия согласования $f(0) + g(0) = \alpha(0) - h(0)$, получим:

$$\begin{gathered} f(x) = \alpha(x) - h(x) - g(0), \qquad x \in \mathbb{R}, \\ g(y) = \beta(y) - h(y) - f(o), \qquad y \in \mathbb{R}, \\ h(x) + h(-x) = \alpha(x) + \beta(-x) - \gamma(x) - \alpha(0) + 2h(0), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{9}$$

Тогда

$$h(-x) + h(x) = \alpha(-x) + \beta(x) - \gamma(-x) - \alpha(0) + 2h(0), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует

$$\gamma_Н = \alpha_Н - \beta_Н, \tag{11}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha_Ч(x) + \beta Ч(x) - \gamma Ч(x) - \alpha(0) + 2h(0)\right]. \tag{12}$$

Подставляя (9), (11) и (12) в (4), получим:

$$\begin{gathered} u(x,y) = \alpha(x) + \beta(y) - \frac{1}{2}\alpha(0) + \frac{1}{2}\left[\alpha_Ч(x+y) - \alpha_Ч(x) - \alpha_Ч(y)\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\beta_Ч(x+y) - \beta_Ч(x) - \beta_Ч(y)\right] - \frac{1}{2}\left[\gamma_Ч(x+y) - \gamma_Ч(x) - \gamma_Ч(y)\right]. \end{gathered} \tag{13}$$

Формула (13) есть искомая функция, записанная в явном виде и являющаяся решением характеристической задачи $G1$.

## 3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Рассмотрим общую характеристическую задачу $G2$ для уравнения (1) в области, ограниченной характеристиками.

**Задача G2.** *Найти решение* $u\,(x,\, y) \in C^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *уравнения* (1)*, удовлетворяющее условиям*

$$u(x,\,0) = \alpha(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad u(0,\,y) = \beta(y), \quad 0 \le y \le 1, \qquad u(x,\,1-x) = \gamma(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

*где* $\alpha(x), \beta(y), \gamma(x) \in C^3(\mathbb{R})$.

**Теорема 2.** *Если* $\gamma_Н^{\frac{1}{2}} = \alpha_Н^{\frac{1}{2}} - \beta_Н^{\frac{1}{2}}$*, где* $\alpha_Н^{\frac{1}{2}}$*,* $\beta_Н^{\frac{1}{2}}$*,* $\gamma_Н^{\frac{1}{2}}$ *— нечетные части функций* $\alpha(x)$*,* $\beta(x)$*,* $\gamma(x)$*, то задача* $G2$ *корректна по Адамару.*

Аналогично задаче $G1$ получим:

$$\begin{gathered} u(x,y) = \alpha(x) + \beta(y) - \frac{1}{2}\alpha(0) + \frac{1}{2}\left[\alpha_Ч^{\frac{1}{2}}(x+y) - \alpha_Ч^{\frac{1}{2}}(x) - \alpha_Ч^{\frac{1}{2}}(y)\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\beta_Ч^{\frac{1}{2}}(x+y) - \beta_Ч^{\frac{1}{2}}(x) - \beta_Ч^{\frac{1}{2}}(y)\right] - \frac{1}{2}\left[\gamma_Ч^{\frac{1}{2}}(x+y) - \gamma_Ч^{\frac{1}{2}}(x) - \gamma_Ч^{\frac{1}{2}}(y)\right]. \end{gathered} \tag{14}$$

Формула (14) есть искомая функция, записанная в явном виде и являющаяся решением характеристической задачи $G2$.

Нетрудно убедиться, что и в задаче $G1$ и в задаче $G2$ выбор характеристики, на которой задается видоизмененное условие, несущественен.

Отметим, что применение функциональных уравнений (7) с инволютивным сдвигом было предметом рассмотрения А. П. Хромова [11] и А. А. Андреева [12].

## Библиографический список


1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 831 с. [*Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. Vol. II : Partial differential equations. New York; London : Interscience Publishers, 1962. 830 p.]

2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М. : Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some classes of partial differentional equations. Moscow : Nauka, 1981. 448 p.]

3. *Харибегашвили С. С.* О разрешимости одной характеристической задачи для вырождающихся гиперболических систем второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 154–162. [*Kharibegashvili S. S.* Solvability of a characteristic problem for second-order degenerate hyperbolic systems // Differ. Equ. 1989. Vol. 25, № 1. P. 123–131.]

4. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений //Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 145–152. [*Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh.* About some boundary value problems for third order equations // Differ. Equ. 1983. Vol. 19, № 1. P. 145–152.]

5. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552. [*Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh.* Boundary value problems with A. A. Samarski‘s general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations // Soviet Math. Dokl. 1988. Vol. 36, № 3. P. 507–511.]

6. *Жегалов В. И., Уткина Е. А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. 1999. № 10 (449). С. 73–76. [*Zhegalov V. I., Utkina E. A.* Pseudoparabolic equation of the third order // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 1999. Vol. 43, № 10. P. 70–73.]

7. *Джохадзе О. М.* Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 4. С. 517–528. [*Dzhokhadze O. M.* Influence of lower terms on the well-posedness of characteristics problems for third-order hyperbolic equations // Math. Notes. 2003. Vol. 74, № 4. P. 491–501.]

8. *Джохадзе О. М.* О трехмерной обобщенной задаче Гурса для уравнения третьего порядка и связанные с ней общие двумерные интегральные уравнения вольтерры первого рода // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 2. С. 385–394. [*Dzhokhadze O. M.* About the three-dimensional Goursat problem for third order differentional equations and related general-dimensional Volterra integral equations of the first kind // Differ. Equ. 2006. Vol. 42, № 2. P. 385–394.]

9. *Зикиров О. С.* Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка // Современная математика и ее приложения. 2011. Т. 68. С. 101–120. [*Zikirov O. S.* Local and nonlocal boundary-value problems for third-order hyperbolic equations // J. Math. Sci. Vol. 175, № 1. P. 104—123.]

10. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М. : Физматлит, 1994. 544 с. [*Adamar J.* Problem Cauchy for linear hyperbolic partial differential equations. Moscow : Phismathlit, 1994. 544 p.]

11. *Хромов А. П.* Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 17–22. [*Khromov A. P.* The mixed problem for the differential equation with involution and potential of the special kind // Izv. Saratov. Univer. New Series. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2010. Vol. 10, iss. 4. P. 17–22.]

12. *Андреев А. А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом // Дифференциальные уравнения и их приложения : тр. 2-го Междунар. семинара. Самара : Изд-во Самар. ун-та, 1998. С. 5–18. [*Andreev A. A.* On the correctness of boundary value problems for some partial differential equations with a Carleman shift // Differential Equations and Their Applications : Proc. of the Second Intern. Seminar. Samara, 1998. P. 5–18.]

УДК 629.78

# ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Д. К. Андрейченко**[1], **К. П. Андрейченко**[2], **М. С. Комарова**[1]

[1] Саратовский государственный университет
E-mail: AndreichenkoDK@info.sgu.ru, welecat@gmail.com
[2] Саратовский государственный технический университет
E-mail: kp_andreichenko@renet.ru

Предложено новое доказательство некоторых теорем об устойчивости комбинированных динамических систем и развит метод их параметрического синтеза на примере задачи о программном развороте космического аппарата наблюдения.

**Ключевые слова:** комбинированные динамические системы, параметрический синтез, системы стабилизации.

**The Choice of Optimal Parameters for Combined Dynamical Systems**

**D. K. Andreichenko, K. P. Andreichenko, M. S. Komarova**

The new proof of some theorems of a stability for combined dynamical systems is offered, and the method of their parametrical synthesis on example of a program turn for the space vehicle of observation is developed.

**Key words:** combined dynamical systems, parametrical synthesis, stabilization systems.

## ВВЕДЕНИЕ

В данной работе исследуются управляемые комбинированные динамические системы (КДС), представляющие собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, динамически связанных через граничные условия и условия связи, при соответствующих начальных условиях (структурная схема приведена на рис. 1, *а*).

Здесь $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_y}$, $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{N_x}(t))^T$ — кусочно-непрерывная входная вектор-функция; $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{N_y}(t))^T$ — непрерывная выходная вектор-функция. Ряд теорем об устойчивости КДС ранее сформулирован и доказан в [1]. В статье [2] был предложен аналог метода $D$-разбиений для построения границ областей устойчивости управляемых КДС в пространстве параметров обратных связей, а в работе [3] — алгоритм параметрического синтеза, т. е. выбора значений параметров обратных связей, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов. Некоторые ограничения сугубо формального характера в применении эффективных с вычислительной точки зрения алгоритмов метода D-разбиений и параметрического синтеза были связаны с тем, что приведенное ранее в [1] доказательство теоремы об устойчивых, но не асимптотически, КДС требовало дополнительных ограничений на свойства выходных вектор-функций. Целью данной работы является устранение подобных ограничений и дальнейшее развитие алгоритмов параметрического синтеза управляемых КДС. В качестве приложения приведено решение задачи о программном развороте космического аппарата наблюдения.

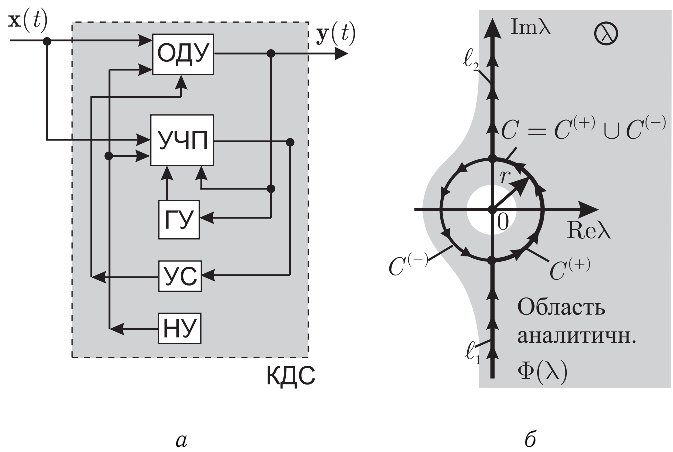



Рис. 1. *а* — структурная схема КДС; *б* — иллюстрация к доказательству теоремы

## 1. УСТОЙЧИВОСТЬ КДС

После линеаризации и выполнения одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени $f(t) \to \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}dt$ динамическая модель КДС сводится к матрице передаточных функций $\Phi(\lambda)$, причем

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{y}}(\lambda) = \Phi(\lambda)\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), \qquad \Phi(\lambda) = [\Phi_{kj}(\lambda)] = [Q_{kj}(\lambda)/D(\lambda)], \\ D(\bar{\lambda}) = \overline{D(\lambda)}, \qquad Q_{kj}(\bar{\lambda}) = \overline{Q_{kj}(\lambda)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N_y, \qquad j = 1, 2, \ldots, N_x.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь черта сверху означает комплексное сопряжение. Учет малой, но конечной диссипации энергии в математических моделях объектов с распределенными по пространству параметрами приводит к тому, что и характеристический квазимногочлен $D(\lambda)$, и возмущающие квазимногочлены $Q(\lambda)$ (индексы $k, j$ далее опущены) аналитичны при $\operatorname{Re}\lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$. Под обобщенными степенями квазимногочленов $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ будем понимать такие $n, m \in \mathbb{R}$, что при $\operatorname{Re}\lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-n} D(\lambda) = c_a, \qquad 0 < |c_a| < \infty, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-m} Q(\lambda) = c_b, \qquad 0 < |c_b| < \infty. \tag{2}$$

Поскольку уравнения движения элементов КДС с сосредоточенными по пространству параметрами содержат обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка по времени $t$

$$n > m + 1. \tag{3}$$

В работе [1] КДС, удовлетворяющие условиям (1)–(3), названы физически возможными. Там же были сформулированы и доказаны теоремы об устойчивом квазимногочлене, об асимптотически устойчивых и неустойчивых КДС. С вычислительной точки зрения исследование устойчивости сводилось к проверке выполнения условия

$$\underset{0\leqslant\omega<\infty}{\Delta} \arg D(i\omega) = n\pi/2. \tag{4}$$

Приведенная далее теорема, а также аналогичная ей теорема об устойчивых, но не асимптотических КДС (в смысле [1]), ранее были доказаны при значительных ограничениях. Ниже приводится доказательство, свободное от ограничений на поведение выходных функций КДС.

**Теорема.** *Пусть $\Phi(\lambda) = Q(\lambda)/D(\lambda)$ — передаточная функция физически возможной КДС, квазимногочлены $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ аналитичны при $\operatorname{Re}\lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$, все корни $D(\lambda)$, за исключением изолированного корня $\lambda = 0$, расположены в комплексной плоскости $(\lambda)$ слева от мнимой оси, и $Q(0) \neq 0$. Тогда: 1) если корень $\lambda = 0$ имеет кратность $k = 1$, то КДС устойчива, но не асимптотически; 2) если корень $\lambda = 0$ имеет кратность $k$ выше $1$, то КДС неустойчива.*

**Доказательство.** Из условия теоремы следует, что функция $\Phi(\lambda)$ имеет простой или кратный изолированный полюс $\lambda = 0$, и можно провести окружность $C$ с центром в точке $\lambda = 0$ (рис. 1, *б*) некоторого малого, но конечного радиуса $r$, целиком лежащую в области аналитичности функции $\Phi(\lambda)$. Пусть $C = C^{(+)} \cup C^{(-)}$, где $C^{(+)}$ и $C^{(-)}$ — полуокружности, лежащие в правой и левой полуплоскости соответственно. Путь интегрирования в интеграле Меллина для импульсной переходной функции $q(t)$ проходит правее всех особенностей функции $\Phi(\lambda)$, и в качестве такового можно взять $\ell_1 \cup C^{(+)} \cup \ell_2$, где $\ell_1$ и $\ell_2$ — лежащие на мнимой оси лучи $(-i\infty, -ir]$ и $[ir, \infty)$. Соответственно:

$$q(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_1\cup C^{(+)}\cup\ell_2} \Phi(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\ell_1}\Phi(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda + \int_{\ell_2}\Phi(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda - \int_{C^{(-)}}\Phi(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda + \oint_C \Phi(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right].$$

Так как КДС физически возможная, а квазимногочлены $D(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ аналитичны при $\operatorname{Re}\lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$, функция $\Phi(i\omega)$ абсолютно интегрируема на полубесконечных интервалах $-\infty < \omega \leqslant -r$ и $r \leqslant \omega < \infty$ и не имеет особенностей на указанных интервалах. Согласно теореме Римана [4, с. 281]

$$\int_{\ell_1}\Phi(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda = i\int_{-\infty}^{-r}\Phi(i\omega)e^{i\omega t}d\omega \underset{t\to\infty}{\to} 0, \qquad \int_{\ell_2}\Phi(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda = i\int_{r}^{\infty}\Phi(i\omega)e^{i\omega t}d\omega \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Так как производная $\Phi'(\lambda)$ существует и ограничена при $\lambda \in C^{(-)}$, то

$$\int_{C^{(-)}}\Phi(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda = \frac{1}{t}\left[\Phi(-ir)e^{-irt} - \Phi(ir)e^{irt} - \int_{C^{(-)}}\Phi'(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right] \underset{t\to\infty}{\to} 0,$$
$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \Phi(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda$$

и поведение $q(t)$ при $t \gg 1$ определяется вычетом в точке $\lambda = 0$, т. е. выражением

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \Phi(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}\left(\lambda^k\Phi(\lambda)e^{\lambda t}\right)\Big|_{\lambda=0}.$$

Следовательно, импульсная переходная функция $q(t)$ будет ограниченной лишь при кратности $k = 1$.

## 2. ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ УПРАВЛЯЕМЫХ КДС

Передаточные функции управляемых КДС (1) зависят от набора параметров обратных связей $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N_p}$, т. е. $\Phi = \Phi(\lambda, \mathbf{p})$, $D = D(\lambda, \mathbf{p})$. Как следует из [1] и доказанной выше теоремы, потеря устойчивости соответствует прохождению через мнимую ось $\operatorname{Re}\lambda = 0$ одного или нескольких корней квазимногочлена $D(\lambda, \mathbf{p})$, и уравнения возможных границ области устойчивости $\Omega_{st} \subset \mathbb{R}^{N_p}$ в пространстве параметров обратных связей суть

$$\operatorname{Re} D(i\omega, \mathbf{p}) = 0, \qquad \operatorname{Im} D(i\omega, \mathbf{p}) = 0, \qquad 0 \leqslant \omega < \infty. \tag{5}$$

Многообразие (5) (размерности $N_p - 1$) разделяет пространство параметров обратных связей на некоторое множество областей $\Omega_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Проверка принадлежности текущей области $\Omega_\nu$ области устойчивости $\Omega_{st}$ в пространстве параметров обратных связей выполняется на основе однократной проверки устойчивости КДС для некоторого фиксированного набора $\mathbf{p} \in \Omega_\nu$ при помощи теорем об устойчивости [1], т. е. при помощи (4). Задача параметрического синтеза, т. е. выбора значений параметров $\mathbf{p} \in \Omega_{st}$, обеспечивающих требуемое качество переходных процессов, сводится к задаче минимизации функции $F : \mathbb{R}^{N_p} \to \mathbb{R}$

$$F(\mathbf{p}) = \begin{cases} \left(\|R_A(0, \mathbf{p}_0)\|^{-2} + \|R_A(0, \mathbf{p})\|^{-2}\right) \times \\ \times \int\limits_0^\infty \sum\limits_{k=0}^{2} c_k \left\| d^k R_A(\omega, \mathbf{p})/d\omega^k - R_A(0, \mathbf{p}) d^k R_A^*(\omega)/d\omega^k \right\|^2 d\omega, & \mathbf{p} \in \Omega_{st}, \\ +\infty, \quad \mathbf{p} \notin \Omega_{st}, \end{cases}$$
$$R_A(\omega, \mathbf{p}) = [R_{A_{\nu j}}(\omega, \mathbf{p})], \qquad R_A^*(\omega) = \operatorname{diag}\{R_{A_j}^*(\omega)\},$$
$$R_{A_{\nu j}}(\omega, \mathbf{p}) = \begin{cases} \operatorname{Re}\Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p}), & A_j(\mathbf{p}) \neq 0, \\ \sqrt{1+\omega^2}\operatorname{Re}\left[\Phi_{\nu j}(i\omega, \mathbf{p})/(i\omega)\right], & A_j(\mathbf{p}) = 0, \end{cases} \tag{6}$$
$$R_{A_j}^*(\omega) = \begin{cases} (1-(t_0\omega)^2)/(1+(t_0\omega)^4), & A_j(\mathbf{p}) \neq 0, \\ \sqrt{1+\omega^2}(1-(t_0\omega)^2)/(1+(t_0\omega)^4), & A_j(\mathbf{p}) = 0, \end{cases}$$
$$A_j(\mathbf{p}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N_y} |\Phi_{\nu j}(0, \mathbf{p})|^2\right]^{1/2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N_y, \quad j = 1, 2, \ldots, N_x.$$

Здесь $\mathbf{p}_0 \in \Omega_{st}$ — начальные значения параметров обратных связей. Поскольку число $N_p$ параметров обратных связей относительно невелико (не более нескольких десятков), при минимизации функции (6) используется безградиентный метод Нелдера–Мида. Заметим, что при выполнении параметрического синтеза не требуется детальной информации о конфигурации области устойчивости, а достаточно лишь, чтобы начальные значения параметров обратных связей принадлежали области устойчивости: $\mathbf{p}_0 \in \Omega_{st}$.

## 3. ЗАДАЧА О ПРОГРАММНОМ РАЗВОРОТЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НАБЛЮДЕНИЯ

Рассмотрим далее упрощенную линеаризованную математическую модель газореактивной системы стабилизации спутника с упругодеформируемыми элементами конструкции. Расчетная схема для задачи о программном развороте спутника (космического аппарата наблюдения) представлена на рис. 2, *а*.

В данном случае входная вектор-функция $\mathbf{x}(t) = (L(t), \alpha_0(t))^T$ содержит две компоненты: возмущающий момент $L(t)$ и желаемый угол поворота спутника $\alpha_0(t)$, а выходная вектор-функция $\mathbf{y}(t) = \{\alpha(t)\}$ содержит одну компоненту — угол поворота спутника $\alpha(t)$. Газореактивная система создает управляющий момент, соответствующий пропорционально-интегрально-диффереciальному регулятору в системе управления:

$$M_c(t) = -p_1\dot{\alpha}(t-\tau) - p_2\alpha(t-\tau) - p_3\int_0^{t-\tau}(\alpha(\xi) - \alpha_0(\xi))d\xi.$$

Здесь $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ — набор параметров обратных связей; $\tau$ — характерное время запаздывания в газореактивных двигателях; точкой сверху обозначено дифференцирование по времени $t$. Модельные уравнения КДС в безразмерных переменных и параметрах аналогичны [2] и имеют вид

$$
\begin{gathered}
J_c\ddot{\alpha} = L + 2M_0 - 2aP_0 - p_1\dot{\alpha}(t-\tau) - p_2\alpha(t-\tau) - p_3\int_0^{t-\tau}(\alpha(\xi)-\alpha_0(\xi))\,d\xi,\\
J_1(\ddot{\alpha}+\ddot{\alpha}_1) = -M_1, \qquad m_1[\ddot{y}_1 + (1+a)\ddot{\alpha}] = P_1,\\
\ddot{u} + u'''' + \gamma\dot{u}'''' + (a+x)\ddot{\alpha} = 0, \qquad (\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x,\\
u(0,t) = 0, \qquad u'(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = y_1(t), \qquad u'(1,t) = \alpha_1(t),\\
M_0 = u''(0,t) + \gamma\dot{u}''(0,t), \qquad P_0 = u'''(0,t) + \gamma\dot{u}'''(0,t),\\
M_1 = u''(1,t) + \gamma\dot{u}''(1,t), \qquad P_1 = u'''(1,t) + \gamma\dot{u}'''(1,t),\\
-\tau \leqslant t \leqslant 0: \qquad \alpha(t) = \dot{\alpha}(t) = 0,\\
\alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = y_1(0) = \dot{y}_1(0) = u(x,0) = \dot{u}(x,0) = 0.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Здесь $u(x,t)$ — прогиб срединной линии стержня; $y_1(t)$ — смещение центра масс закрепленного тела; $P_0$, $M_0$, $P_1$ и $M_1$ — соответственно силы и момент сил реакции стержня в точках его заделки в спутнике; $m_1$ — характерная масса закрепленного тела; $J_c$, $J_1$ — характерные моменты инерции спутника и закрепленного тела. Первое уравнение в (7) является интегродифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом. Матрица передаточных функций $\Phi(\lambda,\mathbf{p}) = [\Phi_{11}(\lambda,\mathbf{p})\ \Phi_{21}(\lambda,\mathbf{p})]$ фактически представляет собой строчный вектор, а ее элементы, после выполнения в (7) одностороннего интегрального преобразования Лапласа по времени $t$, находятся аналогично [2].

При выполнении параметрического синтеза использовались формулы (6), а моделирование переходных процессов выполнялось на основе эффективного алгоритма численного обращения интегрального преобразования Лапласа [5]. Результаты моделирования переходных процессов для значений расчетных параметров $J_c = 0.07442$, $m_1 = 3$, $J_1 = 0.007$, $a = 0.05$, $\gamma = 0.01$, $\tau = 0.01$, $t_0 = 1$ приведены на рис. 2, *б* (до процедуры параметрического синтеза — штриховой линией, после — сплошной). В верхней части рис. 2, *б* показана реакция на входное возмущение, соответствующее возмущающему моменту в форме единичного скачка Хевисайда $L(t) = \mathbf{1}(t)$. Как видно, выполнение параметрического синтеза обеспечивает подавление ошибки системы стабилизации от входного возмущения $L(t)$. В нижней части рис. 2, *б* показана реакция на входное возмущение:

$$
\alpha_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0,\\ t, & 0 \leqslant t \leqslant 1,\\ 1, & t > 1. \end{cases}
\tag{8}
$$

Выполнение параметрического синтеза обеспечивает поворот спутника практически в соответствии с желаемым углом поворота (8) (показан на рис. 2, *б* пунктиром).

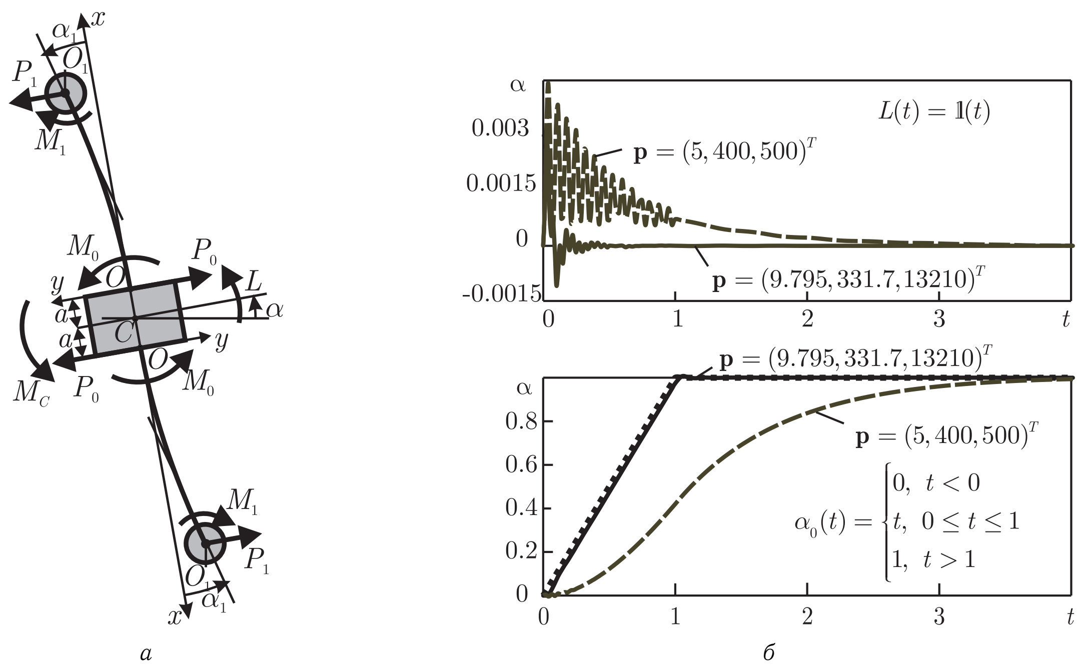



Рис. 2. *а* — расчетная схема; *б* — результаты параметрического синтеза

**Библиографический список**

1. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69. [*Andreichenko D. K., Andreichenko K. P.* On the theory of hybrid dynamical systems // J. of Computer and Systems Sciences Intern. 2000. Vol. 39, № 3. P. 383–398.]
2. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* К теории стабилизации спутников с упругими стержнями// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 6. С. 150–163. [*Andreichenko D. K., Andreichenko K. P.* On the theory of stabilization of satellites having elastic rods // J. of Computer and Systems Sciences Intern. 2004. Vol. 43, № 6. P. 973–986.]
3. *Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П.* Динамический анализ и выбор параметров модели гироскопического интегратора линейных ускорений с плавающей платформой// Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 76–89. [*Andreichenko D. K., Andreichenko K. P.* Dynamic analysis and choice of parameters of a model of gyroscopic integrator of linear accelerations with floating platform // J. of Computer and Systems Sciences Intern. 2008. Vol. 47, № 4. P. 570–583.]
4. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа : в 2 т. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. М. : Физматлит, 2005. 424 с. [*Kudryavtsev L. D.* A short course of mathematical analysis. Differential and integral calculus of several variables functions. Harmonic analysis. Moscow : Physmathlit, 2005. Vol. 2. 424 p.]
5. *Андрейченко Д. К.* Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 1030–1044. [*Andreichenko D. K.* An Efficient Algorithm for Numerical Inversion of the Laplace Transform// Comp. Math. and Math. Phys. 2000. Vol. 40, № 7. P. 987–999.]

УДК 517.958

# ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТРИЦЫ ПОТОКОВ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ГРАФЕ

**Ю. В. Афанасенкова, Ю. А. Гладышев**

Калужский государственный университет
им. К. Э. Циолковского
E-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

В работе дан конструктивный метод решения основных краевых задач для системы неоднородных дифференциальных уравнений на графе, удобный для использования ЭВМ. Система уравнений и условия согласования в вершинах выбраны, имея в виду приложение метода к теории переноса и другим проблемам неравновесной термодинамики.

**Ключевые слова:** граф, вершина, матрица потоков, внешний поток.

**On the Use of Streams in the Matrix Solution of Boundary Value Problems for the Graph**

**Yu. V. Afanasenkova, Yu. A. Gladyshev**

The paper presents a constructive method for solving the basic boundary value problems for systems of inhomogeneous differential equations on a graph, convenient to use on computer. The system of equations and matching conditions at the vertices are selected, taking into account the application of the method to the theory of transport and other issues of non-equilibrium thermodynamics.

**Key words:** graph, vertex matrix of flows, external flow.

Далее используется понятие геометрического графа, которое было введено Ю. В. Покорным с соавт. [1]. Однако используется не локальная (по ребру), а общая параметризация, когда выбрана единая, например, декартовая система координат. Это более удобно с точки зрения приложений. Примененный метод $P$-матрицы в принципе не связан с параметризацией графов и для его использования достаточно ориентированности графа.

Положим, что граф Γ включает $n$ вершин и $l$ ребер. Первоначально считаем, что граф не содержит петель и двух и более ребер, соединяющих одни и те же вершины.

В основу индексации положена нумерация вершин, на которую не положено каких-либо требований. Величина, отнесенная к вершине $i$ обозначена индексом в скобках вверху как $\varphi^{(i)}$, $\psi^{(i)}$. Величины, относящиеся к ребру с вершинами $i, j$, нумеруются двумя индексами в скобках, например, $P^{(i,j)}$. Если величина имеет какие-либо индексы вверху, то $(i, j)$ переносится вниз. Например, $X^{(n)}_{(i,j)}$.

Считаем, в силу конечного числа ребер, что не одно ребро не нормально к оси X. Граф ориентирован, поэтому можно ввести

**Определение 1.** Ребра, инцидентные вершине $i$ в введенной системе координат, можно разделить однозначно на *инцидентные слева* $\gamma_l$ и *справа* $\gamma_r$ (рис. 1).

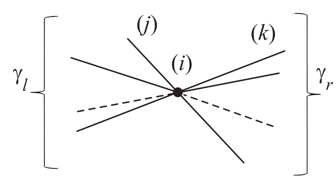



Рис. 1

Функция $F(x)$ на графе есть набор функций $f^{(i,j)}$, определенных на ребрах графа. Часто эти функции будем записывать в виде вектор-столбца, нумеруя одним индексом в соответствии с номером ребра. Далее функции будем часто обозначать греческими буквами $\varphi^{(i,j)}(x)$, $\psi^{(i,j)}(x)$ и т. д.

**Определение 2.** Функция $F$, определенная на графе $\Gamma$, называется *непрерывной в данной вершине* графа, если ее пределы, взятые по всем ребрам графа инцидентным этой вершине, равны $\lim \varphi^{(i)} = A$, где $i$ — номер любого ребра инцидентного данной вершине.

**Определение 3.** Функция $F$, определенная на графе $\Gamma$, называется *суммарно непрерывной в вершине* $i$, если сумма ее значений по ребрам, инцидентным слева, равна сумме ее значений по ребрам, инцидентным справа, $\sum\limits_{\gamma_l} f^{(i)} = \sum\limits_{\gamma_r} f^{(i)}$.

Легко показать, что это определение не зависит от направления оси X системы координат. В частном случае, если слева ребер нет, то сумма равна нулю.

Если слева и справа имеем одно ребро, то возвращаемся к обычному понятию непрерывности функции. Если функция $F$, определенная на графе $\Gamma$, на всех его вершинах суммарно непрерывна, то функция $F(x)$ называется *суммарно непрерывна на графе* $\Gamma$.

Предположим, что на каждом ребре задана пара дифференциальных операторов вида

$$D_1^{(i,j)} = a_1^{(i,j)}(x)\frac{d}{dx}, \qquad D_2^{(i,j)} = a_2^{(i,j)}(x)\,\frac{d}{dx}.$$

Здесь $a_1^{(i,j)}(x)$, $a_2^{(i,j)}(x)$ — непрерывные положительные на ребре функции переменной $x$.

Далее рассмотрим линейное пространство $C_G^{(1)}$ функций, непрерывных вдоль ребер и вершинах графа и имеющих суммарно непрерывную на вершинах графа $D_1$-производную.

Имея в виду приложение результатов работы в теории переноса, в дальнейшем функции на ребре будем называть потенциалами и обозначать $\varphi^{(i,j)}$. Набор потенциалов на графе соответственно обозначим $\Phi$. Потоком $J^{(i,j)}$ на ребре $(i,j)$ назовем $D_1$-производную на этом ребре:

$$J_{(x)}^{(i,j)} = -D_1^{(i,j)}\varphi^{(i,j)}. \tag{1}$$

В теории теплопроводности $\varphi^{(i,j)}$ — это температура вдоль ребра, а $J^{(i,j)}$ — поток тепла в данном сечении ребра. В процессе диффузии $\varphi^{(i,j)}$ — это концентрация вещества, а в теории течения тока — это потенциал электрического поля, а $J^{(i,j)}$ — ток в данном сечении. В приложениях ребра графа реализуются как стержни или пластины [2].

Пусть функция $\Phi$ такова, что ее компоненты удовлетворяют системе дифференциальных уравнений вида

$$D_2^{(i,j)} D_1^{(i,j)}\varphi^{(i,j)} - m_k^2\varphi^{(i,j)} = \psi^{(i,j)}(x). \tag{2}$$

Слагаемое $m_k^2\varphi^{(i,j)}$ определяет внешний обмен на каждом ребре. Константа $m_k$ определена для ребра номера $k$, определенного вершинами $i$, $j$, а функции $\psi^{(i,j)}(x)$, определяющие внешние условия, заданы.

Решение краевой задачи с краевыми условиями Дирихле для каждого ребра $(i,j)$ считаем известным и, например, представленным в виде [3]:

$$\varphi^{(i,j)} = (\varphi_1^{(i)} - w^{(i,j)}(x_i))\frac{\operatorname{sh} m_k X(x,x_j)}{\operatorname{sh} m_k X(x_i,x_j)} + (\varphi_2^{(j)} - w^{(i,j)}(x_j))\frac{\operatorname{sh} m_k X(x,x_i)}{\operatorname{sh} m_k X(x_j,x_i)} + w^{(i,j)}(x), \tag{3}$$

где $\varphi_1^{(i)}$, $\varphi_2^{(j)}$ — заданные значения потенциалов на концах ребра, $w^{(i,j)}(x)$ — любое решение неоднородного уравнения (2), а $\operatorname{sh} mX$ — ряды по обобщенным степеням Берса [3]. Использование аппарата обобщенных степеней не обязательно для построения матрицы потоков, так как единственное требование это существование решения (3), имеющего ноль в точке $x_i$ и отличную от нуля $D_1$-производную в этой точке.

Исходим из предложения, что $\varphi^{(i,j)}$ — решение краевой задачи с краевыми условиями Дирихле для каждого ребра и, следовательно, по [4] известна матрица потоков $P$, которая устанавливает связь потенциалов $\varphi$ и потоков на концах ребра $(i,j)$:

$$J_1^{(i,j)} = P_{11}^{(i,j)}\varphi_1^{(i)} + P_{12}^{(i,j)}\varphi_2^{(j)} + Q_1^{(i,j)}, \qquad J_2^{(i,j)} = P_{21}^{(i,j)}\varphi_1^{(i)} + P_{22}^{(i,j)}\varphi_2^{(j)} + Q_2^{(i,j)}. \tag{4}$$

Потоки $J_1^{(i,j)}$, $J_2^{(i,j)}$ справа в точке $j$ и слева в точке $i$ связаны с ориентацией графа. Потенциалы в $\varphi^{(i)}$, $\varphi^{(j)}$ в вершинах $i, j$, полученные как односторонние (справа и слева) пределы из внутренней области ребра $(i, j)$. Элементы матрицы по (1) определены как

$$\begin{aligned} P_{11}^{(i,j)} &= -\frac{m_k \operatorname{ch} m_k \tilde{X}(x_i, x_j)}{\operatorname{sh} m_k X(x_i, x_j)}, \qquad P_{12}^{(i,j)} = -\frac{m_k}{\operatorname{sh} m_k X(x_j, x_i)}, \\ P_{21}^{(i,j)} &= -\frac{m_k}{\operatorname{sh} m_k X(x_i, x_j)}, \qquad P_{22}^{(i,j)} = -\frac{m_k \operatorname{ch} m_k \tilde{X}(x_j, x_i)}{\operatorname{sh} m_k X(x_j, x_i)}, \end{aligned} \tag{5}$$

причем $k$ — номер ребра с вершинами $i, j$.

Дополнительные потоки, зависящие от $\psi^{(i,j)}$, определены в виде

$$\begin{aligned} Q_1^{(i,j)} &= -P_{11}^{(i,j)} w^{(i,j)}(i) - P_{12}^{(i,j)} w^{(i,j)}(i) + D_1^{(i,j)} w^{(i,j)}(i), \\ Q_2^{(i,j)} &= -P_{21}^{(i,j)} w^{(i,j)}(j) - P_{22}^{(i,j)} w^{(i,j)}(j) + D_1^{(i,j)} w^{(i,j)}(j). \end{aligned}$$

Напомним, что $w^{(j,i)}$ есть частное решение неоднородного уравнения (2) для каждого ребра.

Если $x_i < x_j$, то $P_{11}, P_{21}$ положительны, так как $\operatorname{sh} m_k X(x_i, x_j) < 0$, а $P_{12}, P_{22}$ отрицательны, определитель матрицы Р с элементами (5) отличен от нуля, если $x_i \neq x_j$ и равен 1.

Поставим краевую задачу с краевыми условиями Дирихле на графе, когда на граничных вершинах задано значение потенциала

$$\varphi^{(i)}(x_i) = \varphi_i^{(i)}, \qquad i \notin E, \qquad x_i \in \partial G. \tag{6}$$

Известно, что такая задача имеет единственное решение [1]. Если возможно найти потенциалы всех внутренних вершин, то учитывая выражение (3), потенциал будет определен в любой точке $G$.

Решение $\Phi$ поставленной краевой задачи (6) будем искать в пространстве непрерывных на графе функций, имеющих суммарно непрерывную $D_1$-производную: $\Phi \in C_G^{(1)}$. Используя введенные выше обозначения, условие на разрыв суммарной непрерывности $D_1$-производной для вершины номера $i$ запишем:

$$\sum_{j \in \gamma_l(i)} [P_{21}^{(j,i)} \Phi^{(j)} + P_{22}^{(j,i)} \Phi^{(i)} + Q_2^{(j,i)}] + J_2^{(i)} = \sum_{k \in \gamma_r(i)} [P_{11}^{(i,k)} \Phi^{(i)} + P_{12}^{(i,k)} \Phi^{(k)} + Q_1^{(i,k)}]. \tag{7}$$

Здесь $J_e^{(i)}$ — внешний поток, поступающий в $i$-ю вершину слева, а $l(i), r(i)$ — множество вершин, инцидентных $i$-й вершине слева и справа соответственно (см. рис. 1).

Назовем систему (7) основной системой соотношений для переноса на графе. Если все потенциалы заданы, то система соотношений определяет связь между потенциалами $\varphi^{(i)}$ и потоками, т. е. определяет матрицу $P$ для графа, все вершины которого имеют заданные потенциалы.

В зависимости от того, какая задача поставлена, т. е. от того, какие величины считать заданными, а какие искомыми, система (7) решает различные задачи [5].

Кроме известного деления вершин графа на внешние принадлежащие границе $\partial G$ графа и внутренние, введем еще два определения.

**Определение 4.** Вершина $i$, называется *определенной по потенциалу*, если по всем ребрам, инцидентным этой вершине, пределы со стороны ребер графа функции $\varphi^{(i,j)}$ равны, и значение этого предела задано:

$$\lim \varphi^{(i)} = \varphi_0^{(i)}(i). \tag{8}$$

**Определение 5.** Назовем вершину, *определенной по потоку*, если внешний поток $J_e^{(i)}$ задан. В частности, если поток $J_e^{(i)} = 0$, то вершина закрыта по потоку.

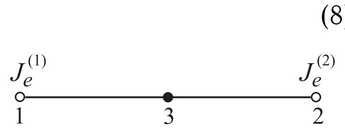


Рис. 2

Например, приведем простейший граф из двух ребер (рис. 2).

В этом примере граничные точки (1) и (2) определены по потенциалу, а точка (3) определена по потоку $J_e^{(3)} = 0$ и, следовательно, закрыта. Система уравнений (7) имеет вид для всех трех вершин

$$\begin{gathered} J_e^{(i)} = P_{11}^{(1,3)} \varphi^{(1)} + P_{12}^{(1,3)} \varphi^{(3)}, \\ P_{21}^{(1,3)} \varphi^{(1)} + P_{22}^{(1,3)} \varphi^{(3)} = P_{11}^{(3,2)} \varphi^{(3)} + P_{12}^{(3,2)} \varphi^{(3)}, \qquad P_{21}^{(3,2)} \varphi^{(3)} + P_{22}^{(3,2)} \varphi^{(2)} + J_e^{(2)} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Второе уравнение дает возможность определить потенциал $\varphi^{(3)}$. Таким образом, поставлено решение краевой задачи с краевыми условиями Дирихле. Одновременно получена матрица $P$ для системы двух соединённых ребер. Приведенный пример показывает метод решения краевой задачи (6) в общем случае. Проведем нумерацию вершин таким образом, чтобы первые номера определяли граничные точки, на которых потенциалы заданы, т. е. поставлена задача (4). Последние $s$ вершины считаем закрытыми по внешнему потоку $J_e^{(i)} = 0,\ i \geq n + s - s$.

Поскольку нумерация была проведена произвольно, можно полагать, что она учитывает порядок закрытия. Поскольку потенциалы были произвольны, то последние $s$ потенциалов $\varphi^{(n-s+1)}, \ldots, \varphi^{(n)}$ определятся из системы (8) через начальные по нумерации (заданные) потенциалы $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n-s)}$. Они будут функциями потенциалов открытых вершин, которые считаем заданными. Запишем на основе (1) систему для определения потенциалов закрытых вершин:

$$\sum_{j\in l(i), j\geq n-s+1} P_{21}^{(j,i)}\varphi^{(j)} + \left[\sum_{j\in l(i)} P_{22}^{(j,i)} - \sum_{k\in r(i)} P_{11}^{(i,k)}\right]\varphi^{(i)} - \sum_{\substack{k\in r,\\ k>n-s+1}} P_{12}^{(i,k)}\varphi^{(k)} =$$

$$= - \sum_{\substack{j\in l(i),\\ j\geq n-s+1}} P_{21}^{(j,i)}\varphi^{(i)} + \sum_{\substack{k\in r,\\ k>n-s+1}} P_{12}^{(i,k)}\varphi^{(k)} - \sum_{j\in l(i)} Q_2^{(j,i)} + \sum_{k\in r(i)} Q_1^{(i,k)}, \quad i = n-s+1, \ldots, n. \qquad (10)$$

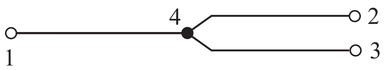


Рис. 3

Легко проверить, что из (10) получается результат первого примера, приведенный в (7).

Приведем пример контакта трех ребер в вершине, данный на рис. 3.

Запишем условия для всех четырех вершин, считая вершину 4 закрытой:

$$J_e^{(1)} = P_{11}^{(1,4)}\varphi^{(1)} + P_{12}^{(1,4)}\varphi^{(4)}, \qquad (11)$$

$$J_e^{(2)} + P_{21}^{(4,2)}\varphi^{(4)} + P_{22}^{(4,2)}\varphi^{(2)} = 0, \qquad (12)$$

$$J_e^{(3)} + P_{21}^{(4,3)}\varphi^{(4)} + P_{22}^{(4,3)}\varphi^{(3)} = 0, \qquad (13)$$

$$P_{21}^{(1,4)}\varphi^{(1)} + P_{22}^{(1,4)}\varphi^{(4)} = P_{11}^{(4,2)}\varphi^{(4)} + P_{12}^{(4,2)}\varphi^{(2)} + P_{11}^{(4,3)}\varphi^{(4)} + P_{11}^{(4,3)}\varphi^{(3)} = 0,$$

где $J_e^{(4)} = 0$.

Отсюда найдем $\varphi^{(4)}$:

$$\varphi^{(4)} = \frac{-P_{21}^{(1,4)}\varphi^{(1)} + P_{12}^{(4,2)}\varphi^{(2)} + P_{12}^{(4,3)}\varphi^{(3)}}{P_{22}^{(1,4)} - P_{11}^{(4,2)} - P_{11}^{(4,3)}}.$$

Подставим в (11)–(13) это выражение $\varphi^{(4)}$ и найдем матрицу

$$J_e^{(1)} = \left(P_{11}^{(1)} - \frac{P_{21}^{(1)}P_{12}^{(1)}}{\Delta}\right)\varphi^{(1)} + \frac{P_{12}^{(1)}P_{12}^{(2)}}{\Delta}\varphi^{(2)} + \frac{P_{12}^{(1)}P_{12}^{(3)}}{\Delta}\varphi^{(3)},$$

$$J_e^{(2)} = -\frac{P_{21}^{(2)}P_{21}^{(1)}}{\Delta}\varphi^{(1)} + \left(P_{22}^{(2)} + \frac{P_{21}^{(2)}P_{12}^{(2)}}{\Delta}\right)\varphi^{(2)} + \frac{P_{21}^{(3)}P_{12}^{(3)}}{\Delta}\varphi^{(3)},$$

$$J_e^{(3)} = -\frac{P_{21}^{(3)}P_{21}^{(1)}}{\Delta}\varphi^{(1)} - \frac{P_{21}^{(3)}P_{12}^{(3)}}{\Delta}\varphi(2) + \left(P_{22}^{(3)} + \frac{P_{21}^{(3)}P_{12}^{(3)}}{\Delta}\right)\varphi^{(3)},$$

где $\Delta = P_{22}^{(1,4)} - P_{11}^{(4,2)} - P_{11}^{(4,3)}$.

Закрывать вершины можно последовательно, начиная с $n$ вершины. После закрытия $n$-й вершины, причем эта операция всегда выполнима, так как выражение при $\varphi^{(n)}$ всегда отлично от нуля. Этот факт следует из свойств матрицы $P$ для одного ребра.

Обратим внимание, что метод дает возможность построения функции Грина, если рассматривать особенность решения (7), как разрыв суммарной непрерывности искомой функции, при этом $J_e^{(n)}$ задано, т. е. вершина определена по потоку. Первоначально поставленное условие об отсутствия двух и более ребер, соединяющих две вершины $j$ и $i$ легко снимаются, так как P-матрица таких ребер находится как сумма матриц этих параллельно включенных ребер. Так как объем сообщения ограничен, то все, даже более интересные, задачи с граничными условиями типа Неймана будут рассмотрены в другой статье. Отметим только, что их решения основаны на соотношениях (7).

**Библиографический список**

1. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : Физматлит, 2004. 272 с.[*Pokornyi Y. V., Penkin O. M., Pryadiev V. L., Borowski A. V., Lazarev K. P., Shabrov S. A.* Differential equations on geometric graphs. Moscow : Fizmatlit. 2004. 272 p.]

2. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Моделирование процесса теплопроводности в материале трубы при наличии внешнего и внутреннего продольного оребрения // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования «ПМТУММ-2012». Воронеж : Издат.-полиграф. центр ВГУ, 2012. С. 86–88. [*Gladyshev Y. A., Loshkareva E. A* Modeling of the thermal conductivity of the material in the pipe with an external and internal longitudinal fins // Recent developments in applied mathematics, control theory, and mathematical modeling «PMTUMM-2012». Voronezh, 2012. P. 86–88.]

3. *Гладышев Ю. А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложения. Калуга : КГУ, 2011. 201 с.[*Gladyshev Y. A.*The method of generalized degrees of Bers and its applications. Kaluga : KGU, 2011. 201 p.]

4. *Гладышев Ю. А., Афанасенкова Ю. В.* Об одном методе решения второй краевой задачи на графе // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зимней шк. Саратов : Научная книга, 2012. С. 48–49. [*Gladyshev Y. A., Afanasenkova Y. V.* A method for the second boundary value problem on a graph // Modern problems of functions theory and their applications : Proc. of the 16th Sarat. Winter School. Saratov, 2012. P. 48–49.]

5. *Гладышев Ю. А., Афанасенкова Ю. В.* Об использовании матрицы потоков и матрицы потенциалов при решении задач теории переноса // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зимней шк. Саратов : Научная книга, 2012. С. 49–51. [*Gladyshev Y. A., Afanasenkova Y. V.*On the use of the matrix of flows and the potential matrix in the solution of problems in the theory of transference // Modern problems of functions theory and their applications : Proc. of the 16th Sarat. Winter School. Saratov, 2012. P. 49–51.]

УДК 517.51

# НОВЫЕ ОЦЕНКИ ВЕЛИЧИН ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ

**Н. В. Байдакова**

Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: baidakova@imm.uran.ru

Рассматривается один из способов выбора условий интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике, порождающий непрерывную результирующую кусочно-полиномиальную функцию на триангулированной области. Получено усиление оценок сверху величин погрешности аппроксимации производных третьего порядка интерполируемой функции без снижения точности оценок величин погрешности аппроксимации функции и производных первого и второго порядков.

**Ключевые слова:** многомерная интерполяция, метод конечных элементов.

**New Estimates of the Error of Approximation of Derivatives under Interpolation of a Function on a Triangle by Polynomials of the Third Degree**

**N. V. Baidakova**

We consider a method of interpolation by polynomials of the third degree which gives continuity of the resulting piecewise polynomial function on the triangulated domain. We get improved estimates for the error of approximation of derivatives of order 3 and keep accuracy of other estimates.

**Key words:** multidimensional interpolation, finite element method.

Пусть функция $f$, определенная на триангулированной области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, принадлежит множеству $W^4M$ функций, непрерывных на $\Omega$ вместе со всеми своими частными производными до 4-го порядка включительно, у которых все производные 4-го порядка ограничены по модулю константой $M$. На каждом треугольнике из триангуляции для $f$ строится интерполяционный многочлен типа Биркгофа 3-й степени по совокупности переменных такой, чтобы результирующая кусочно-полиномиальная функция была непрерывна на $\Omega$. В силу того что речь идет о локальных методах построения кусочно-полиномиальной функции на $\Omega$, далее можно ограничиться рассмотрением одного треугольника триангуляции.

Пусть $T$ — произвольный треугольник, на котором интерполируется функция $f$; $a_i$ $(i = 1, 2, 3)$ — вершины $T$; $\alpha, \beta, \theta$ — углы при вершинах $a_1, a_2, a_3$ соответственно. Поместим треугольник $T$ в прямоугольную систему координат $Oxy$ таким образом, что для некоторых положительных $a, b, h$ координаты вершин будут записываться следующим образом: $a_1 = (a + b, 0)$, $a_2 = (0, 0)$, $a_3 = (a, h)$. Пусть $0 < \alpha \le \beta \le \theta$, откуда следует, что $a \le b$ и диаметр $T$ равен $a + b \triangleq H$. Через $\tau_{ij}$ будем обозначать единичные векторы, направленные от $a_i$ к $a_j$, через $D^s_{\xi_1 \dots \xi_s}$ — производную порядка $s$ по направлениям произвольных единичных векторов $\xi_1, \dots, \xi_s$. Положим $e(x, y) = f(x, y) - P_3(x, y)$, где $P_3$ — некоторый интерполяционный многочлен 3-й степени.

Договоримся далее писать, что для величин $g_1$ и $g_2$ имеет место отношение $g_1 \overset{(\gtrsim)}{\lesssim} g_2$, если существует константа $C > 0$ такая, что $g_1 \overset{(\ge)}{\le} C g_2$.

Для определения многочлена $P_3(x, y)$ на $T$ требуется задать 10 условий. Пусть 9 из них имеют следующий вид:

$$P_3(a_i) = f(a_i), \qquad \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial y}\,, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Эти условия обеспечивают непрерывность итоговой кусочно-полиномиальной функции на $\Omega$ и часто выбираются в методе конечных элементов. Остается одно условие, выбор которого разными авторами осуществляется по-разному (см., например, работы [1–5]). Например, в [1] в качестве этого условия берется равенство

$$\frac{\partial P_3(a_{23})}{\partial x} = \frac{\partial f(a_{23})}{\partial x}\,, \tag{2}$$

где $a_{23}$ — середина отрезка $a_2a_3$, а в [2] — условие

$$\frac{\partial^2 P_3(a_2)}{\partial \tau_{21} \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 f(a_2)}{\partial \tau_{21} \partial \tau_{23}}\,. \tag{3}$$

Условия (1), объединенные с условиями (2) или (3), позволили получить [1, 2] следующие оценки сверху величин погрешности аппроксимации функции и ее производных, не зависящие от синуса наименьшего угла треугольника $T$ в знаменателе:

$$\left| \frac{\partial^n e(x, y)}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| \lesssim M H^{4-n} (\sin \beta)^{-j}\,, \tag{4}$$

где $0 \le n \le 3$, $0 \le j \le n$, $(x, y) \in T$. Оценки (4) означают, что для любого $n = \overline{0, 3}$, любых $\xi_1, \dots, \xi_n$ и любой точки $(x, y) \in T$ имеет место оценка

$$\left| D^n_{\xi_1 \dots \xi_n} e(x, y) \right| \lesssim M H^{4-n} (\sin \beta)^{-n}\,. \tag{5}$$

В данной работе предлагается вместо условий (2) или (3) использовать следующее условие:

$$\frac{\partial^3 P_3(a_2)}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f(a_2)}{\partial y^3}\,, \tag{6}$$

которое позволяет усилить правую часть (5) следующим образом:

$$\left| D^n_{\xi_1 \dots \xi_n} e(x, y) \right| \lesssim M H^{4-n} (\sin \beta)^{-\min\{2, n\}}\,. \tag{7}$$

Вопрос интерполяции функции в соответствии с условиями (1), (6) уже рассматривался в [4], однако в знаменателях полученных там оценок сверху для производных второго и третьего порядков присутствует синус наименьшего угла треугольника.

**Теорема.** *Пусть многочлен* $P_3(x, y)$ *определяется условиями* (1), (6). *Тогда для любой точки* $(x, y) \in T$ *имеют место оценки*

$$\left| \frac{\partial^n e(x, y)}{\partial x^{n-j} \partial y^j} \right| \lesssim \begin{cases} M H^{4-n} & \text{при} \quad j = 0, \quad 0 \le n \le 3, \\ M H^{4-n} (\sin \beta)^{-1} & \text{при} \quad j = 1, \quad 1 \le n \le 3, \\ M H^{4-n} (\sin \beta \operatorname{tg} \beta)^{-1} & \text{при} \quad j = 2, 3, \quad 2 \le n \le 3. \end{cases} \tag{8}$$

Отметим, что оценки (7) являются очевидным следствием оценок (8).

**Доказательство.** Как и в работах [1, 2], используем разложение остатка $e(x,y)$ и его производных по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши:

$$\frac{\partial^n e(x,y)}{\partial x^{n-s}\partial y^s} = \sum_{i=s}^{3-n+s} \frac{1}{(i-s)!} y^{i-s} \sum_{k=0}^{3-n+s-i} \frac{\partial^{n-s+i+k} e(0,0)}{\partial x^{n-s+k}\partial y^i}\ \frac{x^k}{k!} +$$

$$+ \sum_{i=s}^{3-n+s} \frac{1}{(i-s)!} y^{i-s} \int_0^x \frac{(x-v)^{3-n+s-i}}{(3-n+s-i)!}\ \frac{\partial^4 f(v,0)}{\partial v^{4-i}\partial y^i}\,dv + \int_0^y \frac{(y-t)^{3-n}}{(3-n)!}\ \frac{\partial^4 f(x,t)}{\partial x^{n-s}\partial t^{4-n+s}}\,dt. \tag{9}$$

Для доказательства (8) достаточно оценить величины $\dfrac{\partial^n e(0,0)}{\partial x^{n-j}\partial y^j}$, $0 \le n \le 3$, $0 \le j \le n$. Так как значение погрешности интерполяции функции $e(x,y)$ и ее первых производных в точке $a_2 = (0,0)$ согласно условиям (1) равно нулю, остается оценить производные второго и третьего порядков. Далее через $C_i$ будем обозначать некоторые подходящие константы, через $\zeta_{ij}^s$ — некоторые внутренние точки отрезков $a_i a_j$.

**Лемма 1.** *Для $j = \overline{0,3}$ справедливы оценки*

$$\left|\frac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^{3-j}\partial y^j}\right| \lesssim \begin{cases} MH & \text{при} \quad j = 0,3 \\ MH\,(\sin\beta)^{-1} & \text{при} \quad j = 1, \\ MH\,(\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta)^{-1} & \text{при} \quad j = 2. \end{cases} \tag{10}$$

**Доказательство.** Пусть $j = 0$. Рассматривая $e(x,0)$ на отрезке $a_2a_1$ и используя формулы для оценки производных ошибки интерполяции в одномерном случае (см., например, [6]), получим неравенство $\left|\dfrac{\partial^3 e(0,0)}{\partial x^3}\right| \lesssim MH$. Для $j = 3$ оценки (10) являются следствием условия (6). Остается рассмотреть случаи $j = 1$ и $j = 2$.

Применяя последовательно формулы конечных приращений Лагранжа на $a_2a_3$ и производной остатка интерполяции на $a_3a_1$, получаем цепочку равенств

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial \tau_{31}^3} = \frac{\partial^3 e(a_3)}{\partial \tau_{31}^3} - \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^1)}{\partial \tau_{31}^3\partial\tau_{23}} \left(a^2+h^2\right)^{1/2} = C_1\ \frac{\partial^4 f(\zeta_{13}^1)}{\partial \tau_{31}^4}\ \frac{b}{\cos\alpha} - \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^1)}{\partial \tau_{31}^3\partial\tau_{23}} \left(a^2+h^2\right)^{1/2}. \tag{11}$$

С другой стороны, так как $\tau_{31} = (\cos\alpha, -\sin\alpha)$, производная по направлению $\tau_{31}$ в левой части (11) может быть представлена следующим образом:

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial \tau_{31}^3} = \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^3}\cos^3\alpha - 3\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2\partial y}\cos^2\alpha\sin\alpha + 3\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial y^2}\cos\alpha\sin^2\alpha - \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y^3}\sin^3\alpha. \tag{12}$$

Объединяя (11) и (12) и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^3} = C_2\ \frac{\partial^4 f(\zeta_{21}^1)}{\partial x^4}\ (a+b) \tag{13}$$

(используем формулу производной остатка интерполяции на отрезке $a_2a_1$), получаем равенство

$$-3\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2\partial y}\cos^2\alpha\sin\alpha + 3\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial y^2}\cos\alpha\sin^2\alpha - \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y^3}\sin^3\alpha = bm_1, \tag{14}$$

где

$$m_1 = C_1\ \frac{\partial^4 f(\zeta_{13}^1)}{\partial \tau_{31}^4}\ \frac{1}{\cos\alpha} - C_2\ \frac{\partial^4 f(\zeta_{21}^1)}{\partial x^4}\ \frac{(a+b)}{b}\cos^3\alpha - \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^1)}{\partial \tau_{31}^3\partial\tau_{23}}\ \frac{\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{b}.$$

Первое и второе слагаемые в $m_1$ определяются условиями (1) и не зависят от условий (2), (3) или (6), а модуль третьего для любой функции $f \in W^4M$ оценивается сверху величиной $M\left(a^2+h^2\right)^{1/2}/b$. Поэтому сумму первых двух слагаемых в $m_1$ можно оценить через сумму абсолютных величин третьего слагаемого в $m_1$ и левой части (14), используя для получения оценок сверху оценки (4) для условий (1), (2) или (1), (3). Тогда

$$|m_1| \lesssim MH\frac{\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{b} \lesssim MH\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\ . \tag{15}$$

С учетом (6) равенство (14) приводит к соотношению

$$-3\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2\partial y}\cos^2\alpha\sin\alpha+3\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial y^2}\cos\alpha\sin^2\alpha=bm_1. \tag{16}$$

Рассматривая $e(x,y)$ вдоль отрезка $a_2a_3$ и используя формулу производной остатка интерполяции и представление производной по направлению $\tau_{23}=(\cos\beta,\sin\beta)$ через частные производные по переменным $x$ и $y$, получим последовательность равенств

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial\tau_{23}^3}=C_3\ \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^2)}{\partial\tau_{23}^4}\ \left(a^2+h^2\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^3}\cos^3\beta+3\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2\partial y}\cos^2\beta\sin\beta+3\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial y^2}\cos\beta\sin^2\beta+\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial y^3}\sin^3\beta. \tag{17}$$

Из (17), (6) и (13) получим соотношение

$$3\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2\partial y}\cos^2\beta\sin\beta+3\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial y^2}\cos\beta\sin^2\beta=bm_2, \tag{18}$$

где

$$m_2=C_3\ \frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^2)}{\partial\tau_{23}^4}\ \frac{\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{b}-C_2\ \frac{\partial^4 f(\zeta_{21}^1)}{\partial x^4}\ \frac{a+b}{b}\ \cos^3\beta,$$

т. е.

$$|m_2|\lesssim M\frac{\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{b}+M\cos^3\beta. \tag{19}$$

Решим систему уравнений (16), (18) (автором использовались формулы Крамера):

$$\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2\partial y}=-\frac{b\left(m_1\cos\beta\sin^2\beta-m_2\cos\alpha\sin^2\alpha\right)}{3\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\sin(\alpha+\beta)},\qquad \frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial y^2}=\frac{b\left(m_1\cos^2\beta\sin\beta+m_2\cos^2\alpha\sin\alpha\right)}{3\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}.$$

С учетом (15) и (19) получаем оценки

$$\left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x^2\partial y}\right|\lesssim MH\left(\sin\beta\right)^{-1},\qquad \left|\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial y^2}\right|\lesssim MH\left(\sin\beta\operatorname{tg}\beta\right)^{-1}.$$

Лемма 1 доказана. □

**Лемма 2.** *Для* $j=\overline{0,2}$ *справедливы оценки*

$$\left|\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x^{2-j}\partial y^j}\right|\lesssim\begin{cases}MH^2 & \text{при}\quad j=0,\\ MH^2\left(\sin\beta\right)^{-1} & \text{при}\quad j=1,\\ MH^2\left(\sin\beta\operatorname{tg}\beta\right)^{-1} & \text{при}\quad j=2.\end{cases} \tag{20}$$

**Доказательство.** При $j=0$ так же, как в лемме 1, рассмотрим $e(x,0)$ на отрезке $a_2a_1$ и, используя формулы для оценки производной ошибки интерполяции в одномерном случае, получим

$$\left|\frac{\partial^2 e(0,0)}{\partial x^2}\right|\lesssim MH^2.$$

Для случая $j=1$ применим формулу Тейлора на отрезке $a_2a_3$ :

$$\frac{\partial e(a_3)}{\partial x}=\frac{\partial e(a_2)}{\partial x}+\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x\partial\tau_{23}}\ \left(a^2+h^2\right)^{1/2}+\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial\tau_{23}^2}\ \frac{\left(a^2+h^2\right)}{2}+\frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial x\partial\tau_{23}^3}\ \frac{\left(a^2+h^2\right)^{3/2}}{6}. \tag{21}$$

Левая часть и первое слагаемое в правой части (21) равны нулю в силу условий (1). Тогда

$$\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x\partial\tau_{23}}=\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2}\cos\beta+\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x\partial y}\sin\beta=m_3, \tag{22}$$

где

$$m_3=-\frac{\partial^3 e(a_2)}{\partial x\partial\tau_{23}^2}\ \frac{\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{2}-\frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial x\partial\tau_{23}^3}\ \frac{\left(a^2+h^2\right)}{6}\ . \tag{23}$$

Для оценки первого слагаемого правой части (23) представим производную по направлению $\tau_{23}=$ $=(\cos\beta,\sin\beta)$ через частные производные по переменным $x$, $y$ и воспользуемся оценками (10).

Таким образом, $|m_3| \lesssim MH\left(a^2+h^2\right)^{1/2}$. С учетом данной оценки из (20) при $j=0$ и (22) получаем, что

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_3)}{\partial x \partial y}\right| \lesssim MH^2 (\sin\beta)^{-1}.$$

Остается доказать (20) для $j=2$. Аналогично (17) получим последовательность равенств

$$\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial \tau_{23}^2} = C_4\,\frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial \tau_{23}^4}\,\left(a^2+h^2\right) = \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2}\cos^2\beta + 2\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial y}\cos\beta\sin\beta + \frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial y^2}\sin^2\beta,$$

откуда с учетом (20) для $j=0,1$ следует, что

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial y^2}\right| \le \left|C_4\,\frac{\partial^4 f(\zeta_{23}^3)}{\partial \tau_{23}^4}\,\frac{\left(a^2+h^2\right)}{\sin^2\beta}\right| + \left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x^2}\,\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}\right| + 2\left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial x \partial y}\,\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right| \lesssim$$

$$\lesssim M\left(\frac{a^2}{\sin^2\beta} + \frac{h^2}{\sin^2\beta} + \frac{H^2}{\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}\right). \tag{24}$$

Так как $\cos\beta \gtrsim \cos\left((\pi-\alpha)/2\right) = \sin(\alpha/2) \gtrsim \sin\alpha$, то

$$\frac{h^2}{ab} = \mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\beta\sin\alpha}{\cos\beta\cos\alpha} \lesssim \sin\beta,$$

$$\frac{a^2}{\sin^2\beta} + \frac{h^2}{\sin^2\beta} \lesssim \frac{a\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta} + \frac{ab\sin\beta}{\sin^2\beta} = \frac{a\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta} + \frac{hb}{\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta} \lesssim \frac{H^2}{\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Тогда (24) дает оценку

$$\left|\frac{\partial^2 e(a_2)}{\partial y^2}\right| \lesssim \frac{MH^2}{\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Лемма 2 доказана. □

Таким образом, доказана теорема (объединяем разложение (9), условия (1) при $i=2$, оценки (10) и (20)). □

Отметим, что вопрос оптимальности предложенных условий интерполяции и соответствующих оценок сверху остается открытым (см. оценки снизу в [7]).

*Работа выполнена в рамках программы Отделения математических наук РАН «Современные проблемы теоретической математики» при поддержке УрО РАН* (*проект* 12-Т-1-1003/4), *а также при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 11-01-00347).

### Библиографический список

1. *Subbotin Yu. N.* A New Cubic Element in the FEM // Proc. of the Steklov Institute of Math. 2005. Suppl. 2. P. S176–S187.

2. *Baidakova N. V.* A Method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle // Proc. of the Steklov Institute of Math. 2005. Suppl. 2. P. S49–S55.

3. *Ženišek A.* Maximum-angle condition and triangular finite elements of Hermite type // Math. Comp. 1995. Vol. 64, № 211. P. 929–941.

4. *Латыпова Н. В.* Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удмуртск. ун-та. Математика. 2003. С. 3–10. [*Latypova N. V.* Error of interpolation by piecewise cubic polynomial on triangle // Proc. Udmurt. University. Mathematics. 2003. P. 3–10.]

5. *Матвеева Ю. В.* Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2007. Т. 7. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 23–27. [*Matveeva J. V.* Method of Hermite Interpolation by Polynomials of the Third Degree on a Triangle Using Mixed Derivatives // Izv. Saratov. Univer. New Ser. 2007. Vol. 7. Ser. Math. Mech. Inform., iss. 1. P. 23–27.]

6. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений : в 2 т. Т. 1. М. : Физматгиз, 1962. [*Berezin I. S., Zhidkov N. P.* Computing Methods. Vol. 1. Oxford : Pergamon Press, 1965.]

7. *Байдакова Н. В.* Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 83–97. [*Baidakova N. V.* Influence of smoothness on the error of approximation of derivatives under local interpolation on triangulations // Proc. of the Steklov Institute of Math. 2012. Suppl. 1. P. S33–S47.]

УДК 517.51

# СОХРАНЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ СИМПЛЕКСА ПРИ КВАЗИИЗОМЕТРИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

**А. В. Болучевская**

Волгоградский государственный университет
E-mail: a.v.boluch@gmail.com

Статья посвящена проблеме сохранения ориентации симплекса при квазиизометричном отображении в $\mathbb{R}^n$. Данная проблема возникает в задачах построения расчетных сеток с помощью отображений различных классов. Найдены условия на отображение, обеспечивающие сохранение ориентации.

**Ключевые слова:** симплекс, ориентация, квазиизометричное отображение, триангуляция.

**On the Quasiisometric Mapping Preserving Simplex Orientation**

**A. V. Boluchevskaya**

The paper concerns simplex orientation preserving under the quasiisometric mapping. This problem arises from the problem of mesh generation using different kinds of mappings. We find the conditions for the quasiisometric mapping to be simplex orientation preserving.

**Key words:** simplex, orientation, quasiisometric mapping, triangulation.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При численном решении различных задач существует множество способов построения расчетных сеток. Один из таких способов — отображение некоторой стандартной сетки на заданную область. Однако при этом важно контролировать искажение исходных ячеек, чтобы не допустить их вырождения при отображении. Этот вопрос исследуется, например, в работах [1–7].

Для частного случая нерегулярных сеток — триангуляций — в [5–7] показано, что одним из наиболее важных условий сохранения триангуляции является сохранение ориентации каждого симплекса. В [6, 7] найдены условия на отображения некоторых классов, обеспечивающие сохранение ориентации треугольника на плоскости. Кроме того, в [7] поставлена задача нахождения аналогичных условий для сохранения ориентации симплексов в пространстве $\mathbb{R}^n$. Решению этой задачи для квазиизометричных отображений посвящена данная статья.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть задана область $D \subset \mathbb{R}^n$ и ориентированный симплекс $S \Subset D$, образованный точками $P_0, P_1, P_2, \dots P_n \in D$.

Для набора векторов $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ введем обозначение

$$\det(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \dots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \dots & \xi_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix},$$

где $\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in})$, $i = 1, \dots, n$.

Будем говорить, что симплекс $S$ имеет положительную ориентацию, если точки $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ заданы так, что

$$\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_n - P_0) > 0,$$

и отрицательную ориентацию, когда

$$\det(P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_n - P_0) < 0.$$

Пусть отображение $f\colon D \to D^*$, $D^* \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируемо п. в. и квазиизометрично [7], т. е. существуют такие положительные $L, l$, $l \le L$, что для любых $x, y \in D$ выполнено

$$l|x - y| \le |f(x) - f(y)| \le L|x - y|.$$

Пусть $f$ дифференцируемо в точке $P_0$. Через $J_f(P_0)$ обозначим якобиан $f$ в этой точке, через $\omega(t)$ — модуль непрерывности [8] дифференциала $f$, $d_m$ — длина максимальной стороны симплекса $S$ и $g(\tau) = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \omega(t)\,dt$, $\tau > 0$. Тогда выполнена следующая теорема.

**Теорема.** *Если якобиан отображения $f$ в точке $p_0$ симплекса $S$ удовлетворяет неравенству*

$$J_f(P_0) > \frac{L^n}{Vn!}\left(\left(1+\frac{g(d_m)}{L}\right)^n - 1\right)\prod_{i=1}^{n}|P_i - P_0|,$$

*где $V$ — объем симплекса $S$, то симплекс $S'$ с вершинами $P_0' = f(P_0)$, $P_1' = f(P_1)$, …, $P_n' = f(P_n)$ имеет ту же ориентацию, что и симплекс $S$.*

**Доказательство.** Предположим, что симплекс $S$ имеет положительную ориентацию.

Величина $\det(P_1-P_0, P_2-P_0, \dots, P_n-P_0)$ равна увеличенному в $n!$ раз ориентированному объему симплекса, натянутого на векторы $P_1-P_0, P_2-P_0, \dots, P_n-P_0$. Следовательно, если $V$ — объем симплекса $S$, то в силу его положительной ориентации получим:

$$n!\cdot V = \det(P_1-P_0, P_2-P_0, \dots, P_n-P_0).$$

Пусть $V'$ обозначает ориентированный объем симплекса $S'$. Необходимо показать, что $V' > 0$. Для вершин этого сиплекса имеем:

$$P_k' - P_0' = f(P_k) - f(P_0) = d_{P_0}f(P_k-P_0) + H(P_k), \quad k = 1,2,\dots,n,$$

где $H(P_k) = f(P_k) - f(P_0) - d_{P_0}f(P_k-P_0)$, $d_{P_0}f$ — дифференциал $f$ в точке $P_0$.

Тогда

$$\begin{gathered}
V' = \frac{1}{n!}\det\bigl(P_1'-P_0', P_2'-P_0', \dots, P_n'-P_0'\bigr) = \\
= \frac{1}{n!}\det\bigl(d_{P_0}f(P_1-P_0), d_{P_0}f(P_2-P_0), \dots, d_{P_0}f(P_n-P_0)\bigr) + \frac{1}{n!}\det\bigl(H(P_1),\dots,H(P_n)\bigr) + \\
+\frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n}\det\bigl(d_{P_0}f(P_1-P_0),\dots,d_{P_0}f(P_{i_1-1}-P_0), H(P_{i_1}), \\
d_{P_0}f(P_{i_1+1}-P_0),\dots,d_{P_0}f(P_n-P_0)\bigr) + \\
+\frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{n}\det\bigl(d_{P_0}f(P_1-P_0),\dots,d_{P_0}f(P_{i_1-1}-P_0), H(P_{i_1}), \\
d_{P_0}f(P_{i_1+1}-P_0),\dots,d_{P_0}f(P_{i_2-1}-P_0), H(P_{i_2}), d_{P_0}f(P_{i_2+1}-P_0),\dots, \\
d_{P_0}f(P_n-P_0)\bigr) + \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n-2}\sum_{i_2=i_1+1}^{n-1}\sum_{i_3=i_2+1}^{n}\det\bigl(d_{P_0}f(P_1-P_0),\dots,d_{P_0}f(P_{i_1-1}-P_0), H(P_{i_1}), \\
d_{P_0}f(P_{i_1+1}-P_0),\dots,d_{P_0}f(P_{i_2-1}-P_0), H(P_{i_2}), \\
d_{P_0}f(P_{i_2+1}-P_0),\dots,d_{P_0}f(P_{i_3-1}-P_0), H(P_{i_3}), d_{P_0}f(P_{i_3+1}-P_0),\dots, \\
d_{P_0}f(P_n-P_0)\bigr) + \dots + \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{2}\cdots\sum_{i_{n-2}=i_{n-3}+1}^{n-1}\sum_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{n}\det\bigl(d_{P_0}f(P_1-P_0),\dots,d_{P_0}f(P_{i_1-1}-P_0), \\
H(P_{i_1}),\dots,d_{P_0}f(P_{i_{n-1}-1}-P_0), H(P_{i_{n-1}}),\dots,d_{P_0}f(P_n-P_0)\bigr).
\end{gathered}$$

Отсюда в силу неравенства Адамара [9] для определителей получим:

$$\begin{gathered}
V' \ge VJ_f(P_0) - \frac{1}{n!}|H(P_1)|\cdot\ldots\cdot|H(P_n)| - \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n}|d_{P_0}f(P_1-P_0)|\cdot\ldots\cdot|d_{P_0}f(P_{i_1-1}-P_0)|\cdot|H(P_{i_1})|\times \\
\times|d_{P_0}f(P_{i_1+1}-P_0)|\cdot\ldots\cdot|d_{P_0}f(P_n-P_0)| - \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{n-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{n}|d_{P_0}f(P_1-P_0)|\cdot\ldots\cdot|d_{P_0}f(P_{i_1-1}-P_0)|\times \\
\times|H(P_{i_1})|\cdot|d_{P_0}f(P_{i_1+1}-P_0)|\cdot\ldots\cdot|d_{P_0}f(P_{i_2-1}-P_0)|\cdot|H(P_{i_2})|\cdot|d_{P_0}f(P_{i_2+1}-P_0)|\times\ldots \\
\times|d_{P_0}f(P_n-P_0)| - \ldots - \frac{1}{n!}\sum_{i_1=1}^{2}\ldots\sum_{i_{n-2}=i_{n-3}+1}^{n-1}\sum_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{n}|d_{P_0}f(P_1-P_0)|\cdot\ldots\cdot|H(P_{i_1})|\times\ldots \\
\times|H(P_{i_{n-1}})|\cdot\ldots\cdot|d_{P_0}f(P_n-P_0)|.
\end{gathered}$$

Из квазиизометричности $f$ имеем:

$$|d_{P_0} f(P_i - P_0)| = \left| \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(P_0 + \varepsilon(P_i - P_0)) - f(P_0)}{\varepsilon} \right| \le L|P_i - P_0|, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Кроме того, для всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполнено [6]

$$\frac{|H(P_i)|}{|P_i - P_0|} = \frac{|f(P_i) - f(P_0) - d_{P_0} f(P_i - P_0)|}{|P_i - P_0|} \le \frac{1}{|P_i - P_0|} \int\limits_0^{|P_i - P_0|} \omega(t)\, dt.$$

Ввиду монотонности функции $\omega(t)$:

$$\frac{|H(P_i)|}{|P_i - P_0|} \le g(d_m).$$

Используя полученные оценки, имеем:

$$V' \ge V J_f(P_0) - \frac{1}{n!} g^n(d_m) \prod_{i=1}^n |P_i - P_0| - \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^n L^{n-1} g(d_m) \prod_{i=1}^n |P_i - P_0| -$$

$$- \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n L^{n-2} g^2(d_m) \prod_{i=1}^n |P_i - P_0| - \dots -$$

$$- \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^{2} \dots \sum_{i_{n-2}=i_{n-3}+1}^{n-1} \sum_{i_{n-1}=i_{n-2}+1}^{n} L g^{n-1}(d_m) \prod_{i=1}^n |P_i - P_0| =$$

$$= V J_f(P_0) - \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n |P_i - P_0| \left( L^{n-1} g(d_m) \frac{n}{1!} + L^{n-2} g^2(d_m) \frac{n(n-1)}{2!} + \right.$$

$$\left. + L^{n-3} g^3(d_m) \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots + L g^{n-1}(d_m) \frac{n(n-1)\dots 2}{(n-1)!} + g^n(d_m) \right) =$$

$$= V J_f(P_0) - \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n |P_i - P_0| \sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} L^{n-i} g^i(d_m).$$

Отсюда,

$$V' \ge V J_f(P_0) - \frac{L^n}{n!} \left( \left( 1 + \frac{g(d_m)}{L} \right)^n - 1 \right) \prod_{i=1}^n |P_i - P_0|.$$

Из условия теоремы получаем, что $V' > 0$. □

**Замечание.** Если величина $\dfrac{V}{\prod\limits_{i=1}^n |P_i - P_0|}$ — отграничена от нуля, $J_f(P_0) > 0$, то при достаточно малых $d_m$ выполнено

$$V J_f(P_0) - \frac{L^n}{n!} \left( \left( 1 + \frac{g(d_m)}{L} \right)^n - 1 \right) \prod_{i=1}^n |P_i - P_0| > 0,$$

поскольку $\left( \left( 1 + \dfrac{g(\tau)}{L} \right)^n - 1 \right) \to 0$ при $\tau \to 0$.

**Следствие.** *Если для отображения $f$ выполнено неравенство*

$$\frac{V}{\prod\limits_{i=1}^n |P_i - P_0|} \ge \frac{1}{n!} \left( \frac{L}{l} \right)^n \left( \left( 1 + \frac{g(d_m)}{L} \right)^n - 1 \right),$$

*то симплекс $S'$ имеет ту же ориентацию, что и симплекс $S$.*

**Доказательство.** Заметим, что

$$\left| J_M^T(P_0) J_M(P_0) \right| = (J_f(P_0))^2 = \lambda_1(p_0) \cdot \ldots \cdot \lambda_n(p_0) \ge \lambda^n(p_0),$$

где $\lambda_1(p_0), \ldots, \lambda_n(p_0)$ — собственные числа оператора $J_M^T(P_0)J_M(P_0)$, $J_M(P_0)$ — матрица Якоби отображения $f$ в точке $p_0$, $\lambda(p_0) = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \{\lambda_i(p_0)\}$.

Оценим $\lambda(p_0)$. Выберем $x \in S$ и построим ориентированную спрямляемую кривую $\gamma(s)$ с параметром $s$, $0 \le s \le M$, где $M$ — длина кривой и $p_0 = \gamma(0), x = \gamma(M)$. Причем касательная к кривой в каждой точке коллинеарна собственному вектору с минимальным собственным значением оператора $J_M^T(\gamma(s))J_M(\gamma(s))$.

В силу квазиизометричности $f$ имеем:

$$l|x - p_0| \le |f(x) - f(p_0)| \le \int\limits_0^M \left|d_{\gamma(s)} f(\gamma'(s))\right| ds \le \left(\int\limits_0^M ds\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^M \left|d_{\gamma(s)} f(\gamma'(s))\right|^2 ds\right)^{1/2} \le$$

$$\le M^{1/2} \left(\int\limits_0^M \langle J_M^T(\gamma(s))J_M(\gamma(s))\gamma'(s), \gamma'(s)\rangle ds\right)^{1/2} = M^{1/2} \left(\int\limits_0^M \lambda(\gamma(s))|\gamma'(s)|^2 ds\right)^{1/2},$$

где $\lambda(\gamma(s))$ — минимальное из собственных чисел оператора $J_M^T(\gamma(s))J_M(\gamma(s))$.

Отсюда,

$$l\frac{|x - p_0|}{M} \le \left(\frac{1}{M}\int\limits_0^M \lambda(\gamma(s))\, ds\right)^{1/2}.$$

Если $x \to p_0$, то $\dfrac{|x - p_0|}{M} \to 1$, и $l \le \lambda^{1/2}(p_0)$. Тогда $(J_f(P_0))^2 \ge l^{2n}$ и из теоремы

$$V' \ge Vl^n - \frac{L^n}{n!}\left(\left(1 + \frac{g(d_m)}{L}\right)^n - 1\right)\prod_{i=1}^n |P_i - P_0|.$$

Отсюда получаем требуемое. □

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 11-01-97021-р_поволжье_а).

### Библиографический список

1. *Азаренок Б. Н.* О построении подвижных адаптивных пространственных сеток. М. : Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 2007. 50 с. [*Azarenok B. N.* On generation of dynamically adaptive spatial grids. Moscow, 2007. 50 p.]

2. *Миклюков В. М.* Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти-квазиконформные отображения. Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. 532 с. [*Miklukov V. M.* Geometric analysis. Differential forms, almost-solutions, almost-quasiconformal mappings. Volgograd, 2007. 532 p.]

3. *Ушакова О. В.* Условия невырожденности трехмерных ячеек. Формула для объема ячеек // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2001. Т. 41, № 6. С. 881–894. [*Ushakova O. V.* Nondegeneracy conditions for three-dimensional cells and a formula for the cell's volume // Comp. Math. and Math. Phys. 2001. Vol. 41, № 6. P. 832–845.]

4. *Бобылев Н. А., Иваненко С. А., Казунин А. В.* О кусочно-гладких гомеоморфных отображениях ограниченных областей и их приложения к теории сеток // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2003. Т. 43, № 6. С. 808–817. [*Bobylev N. A., Kazunin A. V., Ivanenko S. A.* Piecewise smooth homeomorphisms of bounded domains and their applications to the theory of grids // Comp. Math. and Math. Phys. 2003. Vol. 43, № 6. P. 772–781.]

5. *Прохорова М. В.* Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории сеток // Тр. ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 112–129. [*Prohorova M. V.* Homeomorphism problems arising in the grid theory // Trudy IMM UrO RAN. 2008. Vol. 14, № 1. P. 112–129]

6. *Клячин В. А.* О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». 2009. № 4. С. 169–182. [*Klyachin V. A.* On homeomorphisms preserving triangulation // Zapiski seminara «Sverhmedlennye processy». 2009. № 4. P. 169–182.]

7. *Миклюков В. М.* Введение в негладкий анализ. Волгоград : Изд-во ВолГУ, Лаб. «Сверхмедленные процессы», 2008. [*Miklukov V. M.* Introduction to non-smooth analysis. Volgograd, 2008. 424 p.]

8. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа : в 3 т. Т. 2. М. : Дрофа, 2004. 720 с. [*Kudryavcev L. D.* Mathematical analysis. Vol. 2. Moscow : Drofa, 2004. 720 p.]

9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 576 с. [*Gantmacher F. R.* The Theory of Matrices. AMS Chelsea Publishing : Reprinted by Amer. Math. Soc., 2000. 660 p.]

УДК 517.544

# О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

**Я. А. Васильев**

Смоленский государственный университет
E-mail: Vasiliev.Yaroslav.A@yandex.ru

В данной статье исследуется обобщенная краевая задача типа Римана в классе кусочно-бианалитических функций в случае произвольных односвязных областей. Рассмотрен общий метод решения рассматриваемой задачи и построена картина ее разрешимости.

**Ключевые слова:** кусочно-бианалитическая функция; обобщенная краевая задача типа Римана.

**About Solution the Generalized Boundary Value Problem of Riemann Type for Bianalytic Functions in Case of Any Simply Connected Domains**

**Ya. A. Vasiliev**

On this we investigate generalized boundary value problem of Riemann type in the class of sectionally bianalytic functions in case of any simply connected domains. The methods for solving the considered problem was developed and its decidability picture was constructed.

**Key words:** sectionally bianalytic function; generalized boundary problem of Riemann type.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $T^+$ — конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким контуром $L \in C^2_\mu$, а $T^-$ — область, дополняющая $T^+ \cup L$ до расширенной комплексной плоскости. Для определенности будем считать, что начало координат находится в $T^+$.

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все кусочно-бианалитические функции* $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ *класса* $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, $F^+(0) = 0$, $F^-(\infty) = 0$ *и удовлетворяющие на* $L$ *следующим краевым условиям:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} - G_1(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + \int_L A_1(t,\tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial x}d\tau + \int_L B_1(t,\tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial x}d\tau = g_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} - G_2(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + \int_L A_2(t,\tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial y}d\tau + \int_L B_2(t,\tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial y}d\tau = ig_2(t), \tag{2}$$

*где* $i$ *— мнимая единица,* $G_k(t)$, $g_k(t)$ $(k = 1,2)$ *— заданные на* $L$ *функции, причем* $G_k(t) \in H^{(3-k)}(L)$, $g_k(t) \in H^{(2)}(L)$, $G_k(t) \neq 0$ *на* $L$; $A_k(t,\tau)$, $B_k(t,\tau)$ *— заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу* $H_*^{(3-k)}(L \times L)$.

Сформулированную задачу ради краткости назовем *задачей* $\mathbf{GR_{1,2}}$, а соответствующую однородную задачу $(g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0)$ — *задачей* $\mathbf{GR^0_{1,2}}$.

Сразу отметим, что при $A_1(t,\tau) \equiv A_2(t,\tau) \equiv B_1(t,\tau) \equiv B_2(t,\tau) \equiv 0$ задача $\mathbf{GR_{1,2}}$ подробно исследована в монографии [1].

Кроме того, в случае, когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, задача $\mathbf{GR_{1,2}}$ была исследована в статьях [2, 3]. Но поскольку бианалитические функции не инвариантны относительно конформных отображений (см., например, [1]), то методы, разработанные в случае $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, не переносятся на случай произвольной области. Поэтому основной целью настоящей статьи является разработка конструктивного метода решения задачи $\mathbf{GR_{1,2}}$ в случае произвольных односвязных областей с гладкими границами.

## 2. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ $\mathbf{GR_{1,2}}$

Как известно (см., например, [1, с. 26, 27]), исчезающую на бесконечности кусочно-бианалитическую функцию $F(z)$ с линией скачков $L$ можно представить в виде

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi_k^+(z) \in A(T^+)$, $\varphi_k^-(z) \in A(T^-)$, $k = 0, 1$, причем

$$\prod\{\varphi_k^-, \infty\} \geq k+1, \qquad k = 0, 1 \tag{4}$$

(здесь $\prod\{\varphi_k^-, \infty\}$ означает порядок функции $\varphi_k^-(z)$ в точке $z = \infty$).

В силу представления (3) и соотношений $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\dfrac{\partial}{\partial y} = i\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ (см. [4, с. 304]) краевые условия (1) и (2) можно переписать соответственно в виде

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{t}\cdot\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} + \varphi_1^+(t) - G_1(t)\left[\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \bar{t}\cdot\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \varphi_1^-(t)\right] + \\ + \int_L A_1(t,\tau)\left[\frac{d\varphi_0^+(\tau)}{d\tau} + \bar{\tau}\cdot\frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau} + \varphi_1^+(\tau)\right]d\tau + \\ + \int_L B_1(t,\tau)\left[\frac{d\varphi_0^-(\tau)}{d\tau} + \bar{\tau}\cdot\frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau} + \varphi_1^-(\tau)\right]d\tau = g_1(t),\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{t}\cdot\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \varphi_1^+(t) - G_2(t)\left[\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \bar{t}\cdot\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \varphi_1^-(t)\right] + \\ + \int_L A_2(t,\tau)\left[\frac{d\varphi_0^+(\tau)}{d\tau} + \bar{\tau}\cdot\frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau} - \varphi_1^+(\tau)\right]d\tau + \\ + \int_L B_2(t,\tau)\left[\frac{d\varphi_0^-(\tau)}{d\tau} + \bar{\tau}\cdot\frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau} - \varphi_1^-(\tau)\right]d\tau = g_2(t),\end{gathered} \tag{6}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_0^+(z) = \frac{d\varphi_0^+(z)}{dz}, \qquad \Phi_0^-(z) = \frac{d\varphi_0^-(z)}{dz}, \qquad \tilde{\Phi}_0^-(z) = z\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz}, \tag{7}$$

$$\tilde{G}_1(t) = \frac{G_1(t)}{t}, \qquad \tilde{B}_1(t,\tau) = \frac{B_1(t,\tau)}{\tau}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}Q_0(t) = \bar{t}G_1(t)\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + G_1(t)\varphi_1^-(t) - \bar{t}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \varphi_1^+(t) - \int_L A_1(t,\tau)\left[\bar{\tau}\cdot\frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau} + \varphi_1^+(\tau)\right]d\tau - \\ - \int_L B_1(t,\tau)\left[\bar{\tau}\cdot\frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau} + \varphi_1^-(\tau)\right]d\tau + g_1(t).\end{gathered} \tag{9}$$

С учетом обозначений (7)–(9) краевое условие (5) можно записать так:

$$\Phi_0^+(t) - \tilde{G}_1(t)\cdot\tilde{\Phi}_0^-(t) + \int_L A_1(t,\tau)\Phi_0^+(\tau)d\tau + \int_L \tilde{B}_1(t,\tau)\tilde{\Phi}_0^-(\tau)d\tau = Q_0(t). \tag{10}$$

Поскольку $\varphi_0^+(z) \in A(T^+)$, $\varphi_0^-(z) \in A(T^-)$, то из равенств (7) следует, что $\Phi_0^+(z) \in A(T^+)$, $\tilde{\Phi}_0^-(z) \in A(T^-)$, причем в силу (4) $\prod\{\tilde{\Phi}_0^-, \infty\} \geq 1$. Кроме того, так как $G_1(t) \in H^{(2)}(L)$, $B_1(t,\tau) \in$ $\in H_*^{(2)}(L\times L)$, то из равенств (8) будем иметь: $\tilde{G}_1(t) \in H^{(2)}(L)$, $\tilde{B}_1(t,\tau) \in H_*^{(2)}(L\times L)$. А значит, учитывая, что $L \in C_\mu^2$, $g_1(t) \in H^{(1)}(L)$, $A_1(t,\tau) \in H_*^{(2)}(L\times L)$ и $F^\pm(z) \in A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, приходим к выводу, что $Q_0(t) \in H(L)$.

Предположим временно, что $Q_0(t)$ — известная функция. Тогда равенство (10) представляет собой краевое условие хорошо изученной (см., например, [1, 4]) *обобщенной скалярной краевой задачи Римана* относительно исчезающей на бесконечности кусочно-аналитической функции $\Phi_0(z) = \{\Phi_0^+(z),\ \tilde{\Phi}_0^-(z)\}$.

Обобщенную задачу Римана (10) будем решать методом, изложенным в монографии [1].

Пусть $\chi_1 = \operatorname{Ind} G_1(t)$ и $\tilde{\chi}_1 = \operatorname{Ind}\tilde{G}_1(t) = \chi_1 - 1$. Тогда, как известно, общее решение задачи (10) (в случае ее разрешимости) задается следующими формулами (см. [1, с. 48, 51]):

$$\Phi_0^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tau - z}d\tau + \int_L R_0^+(z,\tau)Q_0(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0}\beta_{0j}d_{0j}^+(z), \quad z \in T^+, \tag{11}$$

$$\tilde{\Phi}_0^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tilde{G}_1(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_0^-(z,\tau)Q_0(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0}\beta_{0j}d_{0j}^-(z), \qquad z \in T^-, \tag{12}$$

где $R_0^{\pm}(z,\tau)$, $d_{0j}^{\pm}(z)$ — вполне определенные функции, выражаемые через $G_1(t)$, $g_1(t)$; $\beta_{0j}$ ($j = 1,\ldots, l_0$) — произвольные комплексные постоянные;

$$l_0 = \begin{cases} \tilde\chi_1 + \nu_0 - r_0, & \tilde\chi_1 \geq 0,\\ \max(0, \nu_0 - |\tilde\chi_1|), & \tilde\chi_1 < 0,\end{cases}$$

а $\nu_0$ — число линейно независимых решений определенного однородного уравнения Фредгольма второго рода (см., например, [1, с. 47]), $r_0$ — ранг определенной матрицы (см., например, [1, с. 50–51]), причем $\nu_0 \geq r_0$ и $\beta_{01} = \beta_{02} = \ldots = \beta_{0l_0} = 0$ при $l_0 = 0$.

Поскольку $[\varphi_1^+(t)]^{(k)}$ и $[\varphi_1^-(t)]^{(k)}$, $k = 0,\ 1,$ — граничные значения аналитических соответственно в $T^+$ и $T^-$ функций $[\varphi_1^+(z)]^{(k)}$, $[\varphi_1^-(z)]^{(k)}$ (причем $[\varphi_1^-(z)]^{(k)}|_{z=\infty} = 0$), то, как известно (см., например, [1, с. 40]), на $L$ выполняются следующие равенства

$$[\varphi_1^{\pm}(t)]^{(k)} = \pm\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{[\varphi_1^{\pm}(\tau)]^{(k)}}{\tau - t}d\tau, \qquad t\in L \quad (k = 0,1). \tag{13}$$

Из (11) и (12), устремив $z$ к $t \in L$, с учетом обозначений (7)–(9), формул Сохоцкого–Племеля и формул перестановки Пуанкаре–Бертрана (см., например, [1, с. 28]) будем иметь:

$$\begin{gathered}\Phi_0^+(t) = \frac12 Q_0(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_L R_0^+(t,\tau)Q_0(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0}\beta_{0j}d_{0j}^+(t) =\\ = -\bar t\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \varphi_1^+(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\bar\tau\, G_1(\tau) - \bar t G_1(t)}{\tau - t} - B_{02}^+(t,\tau)\right]\frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau}d\tau +\\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{G_1(\tau) - G_1(t)}{\tau - t} - B_{01}^+(t,\tau)\right]\varphi_1^-(\tau)d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\bar\tau\ - \bar t}{\tau - t} + A_{02}^+(t,\tau)\right]\frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau}d\tau -\\ - \frac{1}{2\pi i}\int_L A_{01}^+(t,\tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \frac12 g_1(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g_1(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_L R_0^+(t,\tau)g_1(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0}\beta_{0j}d_{0j}^+(t),\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\tilde\Phi_0^-(t) = -\frac12\frac{Q_0(t)}{\tilde G_1(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{Q_0(\tau)}{\tilde G_1(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + \int_L R_0^-(t,\tau)Q_0(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0}\beta_{0j}d_{0j}^-(t) = -t\bar t\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} -\\ -t\varphi_1^-(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\tau\bar\tau\ - t\bar t}{\tau - t} - B_{02}^-(t,\tau)\right]\frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L B_{02}^-(t,\tau)\varphi_1^-(\tau)d\tau -\\ - \frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\left(\frac{\bar\tau}{\tilde G_1(\tau)}\ - \frac{\bar t}{\tilde G_1(t)}\right)\frac{1}{\tau - t} + A_{02}^-(t,\tau)\right]\frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau}d\tau -\\ - \frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\left(\frac{1}{\tilde G_1(\tau)}\ - \frac{1}{\tilde G_1(t)}\right)\frac{1}{\tau - t} + A_{01}^-(t,\tau)\right]\varphi_1^+(\tau)d\tau -\\ - \frac12\frac{g_1(t)}{\tilde G_1(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g_1(\tau)}{\tilde G_1(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + \int_L R_0^-(t,\tau)g_1(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0}\beta_{0j}d_{0j}^-(t),\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}A_{0k}^+(t,\tau) = \bar\tau^{k-1}\left\{\left[1 + R_{01}^+(t,\tau)\right]\int_L\frac{A_1(\tau_1,\tau)}{\tau_1 - t}d\tau_1 + \pi i\left[A_1(t,\tau) + 2R_0^+(t,\tau)\right]\right\},\\ B_{0k}^+(t,\tau) = \bar\tau^{k-1}\left\{\left[1 - R_{01}^+(t,\tau)\right]\int_L\frac{B_1(\tau_1,\tau)}{\tau_1 - t}d\tau_1 + \pi i\left[B_1(t,\tau) - 2G_1(\tau)R_0^+(t,\tau)\right]\right\},\\ A_{0k}^-(t,\tau) = \bar\tau^{k-1}\left\{\left[\frac{1}{\tilde G_1(\tau)} - R_{01}^-(t,\tau)\right]\int_L\frac{A_1(\tau_1,\tau)}{\tau_1 - t}d\tau_1 - \pi i\left[\frac{A_1(t,\tau)}{\tilde G_1(t)} - 2R_0^-(t,\tau)\right]\right\},\\ B_{0k}^-(t,\tau) = \bar\tau^{k-1}\left\{\left[\frac{1}{\tilde G_1(\tau)} - R_{01}^-(t,\tau)\right]\int_L\frac{B_1(\tau_1,\tau)}{\tau_1 - t}d\tau_1 - \pi i\left[\frac{B_1(t,\tau)}{\tilde G_1(t)} + 2G_1(\tau)R_0^-(t,\tau)\right]\right\},\\ R_{01}^{\pm}(t,\tau) = 2\pi i(\tau - t)R_0^{\pm}(t,\tau), \qquad k = 1,2.\end{gathered}$$

Ясно, что

$$\Phi_0^-(t) = t^{-1}\tilde\Phi_0^-(t). \tag{16}$$

Подставляя в (6) вместо $\dfrac{d\varphi_0^{\pm}(t)}{dt}$ найденные по формулам (14), (15) и (16) граничные значения кусочно-аналитической функции $\Phi_0^{\pm}(z) = \dfrac{d\varphi_0^{\pm}(z)}{dz}$, с учетом $\tilde{G}_1(t) \neq 0$ и после некоторых преобразований получаем краевое условие еще одной обобщенной задачи Римана нормального типа для определения исчезающей на бесконечности кусочно-аналитической функции $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \tilde{\varphi}_1^-(z)\}$:

$$\varphi_1^+(t) - \tilde{G}_2(t) \cdot \tilde{\varphi}_1^-(t) + \int_L A_{11}(t,\tau)\varphi_0^+(\tau)d\tau + \int_L B_{11}(t,\tau)\tilde{\varphi}_1^-(\tau)d\tau = Q_1(t), \tag{17}$$

где $\tilde{G}_2(t) = t^{-1}G_2(t)$, $\tilde{\varphi}_1^-(z) = z\varphi_1^-(z)$; $A_{11}(t,\tau)$, $B_{11}(t,\tau)$ — определенные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(1)}(L \times L)$, $Q_1(t)$ — вполне определенная функция из класса $H^{(1)}(L)$.

Пусть $\chi_2 = \operatorname{Ind} G_2(t)$ и $\tilde{\chi}_2 = \operatorname{Ind} \tilde{G}_2(t) = \chi_2 - 1$. Далее, решая краевую задачу (17), например, методом, изложенным в монографии [1], получаем ее общее решение в виде

$$\varphi_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_1(\tau)}{\tau - z}d\tau + \int_L R_{11}^+(z,\tau)Q_1(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_1}\beta_{1j}d_{1j}^+(z), z \in T^+, \tag{18}$$

$$\tilde{\varphi}_1^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_1(\tau)}{\tilde{G}_2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_{11}^-(z,\tau)Q_1(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_1}\beta_{1j}d_{1j}^-(z), z \in T^-, \tag{19}$$

где $R_{11}^{+}(z,\tau)$, $d_{1j}^{+}(z)$ — вполне определенные функции, выражаемые через $G_k(t)$, $g_k(t)$ $(k = 1,2)$; $\beta_{1j}$ $(j = 1,\ldots,l_1)$ — произвольные комплексные постоянные;

$$l_1 = \begin{cases} \tilde{\chi}_2 + \nu_1 - r_1, & \tilde{\chi}_2 \geq 0, \\ \max(0, \nu_1 - |\tilde{\chi}_2|, & \tilde{\chi}_2 < 0, \end{cases}$$

а $\nu_1$ — число линейно независимых решений определенного однородного уравнения Фредгольма второго рода (см., например, [1, с. 47]), $r_1$ — ранг определенной матрицы (см., например, [1, с. 50–51]), причем $\nu_1 \geq r_1$ и $\beta_{11} = \beta_{12} = \ldots = \beta_{1l_1} = 0$ при $l_1 = 0$.

А так как $\tilde{\varphi}_1^-(z) = z\varphi_1^-(z)$, то из (19), в свою очередь, получаем:

$$\varphi_1^-(z) = \frac{1}{z}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_1(\tau)}{\tilde{G}_2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_{11}^-(z,\tau)Q_1(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_1}\beta_{1j}d_{1j}^-(z)\right\}, z \in T^-, \tag{20}$$

Подставив в свободный член $Q_0(t)$ краевого условия (10) вместо $\varphi_1^{\pm}(t)$ и $\dfrac{d\varphi_1^{\pm}(t)}{dt}$ граничные значения функций $\varphi_1^+(z)$, $\varphi_1^-(z)$, определенных по формулам (18), (20), и их производных $\dfrac{d\varphi_1^{\pm}(z)}{dz}$, а затем, решив обобщенную скалярную задачу Римана (10), найдем функции $\dfrac{d\varphi_0^{\pm}(z)}{dz}$. Отсюда сами функции $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_0^-(z)$ определим так:

$$\varphi_0^+(z) = \int_{L^+} \Phi_0^+(\xi)d\xi, \qquad z \in T^+, \qquad \varphi_0^-(z) = \int_{L^-} \Phi_0^-(\xi)d\xi, \qquad z \in T^-,$$

где $L^+$ — произвольная гладкая кривая, принадлежащая односвязной области $T^+$ и соединяющая точки 0 и $z$; $L^-$ — произвольная гладкая кривая, принадлежащая односвязной области $T^-$ и соединяющая точки $\infty$ и $z$.

Наконец, по найденным функциям $\varphi_0^{\pm}(z)$ и $\varphi_1^{\pm}(z)$ искомые решения задачи $\mathbf{GR_{1,2}}$ определим по формуле

$$F(z) = \begin{cases} \int_{L^+} \Phi_0^+(\xi)d\xi + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ \int_{L^-} \Phi_0^-(\xi)d\xi + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-. \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, получен следующий результат.

**Теорема 2.1.** *Задача* $\mathbf{GR_{1,2}}$ *равносильна системе из двух обобщенных задач Римана* (17) *и* (10) *относительно неизвестных кусочно-аналитических функций* $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \tilde{\varphi}_1^-(z)\}$ *и*

$\Phi_0(z) = \{\Phi_0^+(z), \tilde{\Phi}_0^-(z)\}$ *соответственно, где* $\tilde{\varphi}_1^-(z) = z\varphi_1^-(z)$, $\Phi_0^{\pm}(z) = \dfrac{d\varphi_0^{\pm}(z)}{dz}$, $\tilde{\Phi}_0^-(z) = z\Phi_0^-(z)$. *При этом обобщенная задача Римана* (17) *не зависит от* $\Phi_0^{\pm}(z)$, *а в свободный член* $Q_0(t)$ *краевого условия обобщенной задачи Римана* (10) *входят граничные значения функций* $\varphi_1^{\pm}(z)$.

## 3. ИССЛЕДОВАНИЕ КАРТИНЫ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ $\mathbf{GR_{1,2}}$

Обозначим через $l$ число линейно независимых (над полем $\mathbf{C}$) решений соответствующей однородной задачи $\mathbf{GR^0_{1,2}}$, а через $p$ — число условий разрешимости неоднородной задачи $\mathbf{GR_{1,2}}$. Также пусть $p_0$ ($p_1$) — число условий разрешимости неоднородной задачи (10) (неоднородной задачи (17)), а через $l_0$ ($l_1$) — число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи (10) (однородной задачи (17)).

Хорошо известно (см., например, [1, 4]), что обобщенные скалярные задачи типа Римана (10) и (17) с фредгольмовыми ядрами являются нетеровыми, т. е. они нормально разрешимы (по Хаусдорфу), и числа $l_k$, $p_k$ ($k = 0, 1$) являются *конечными*.

Но согласно теореме 2.1 необходимые условия разрешимости задачи $\mathbf{GR_{1,2}}$ являются и достаточными (т. е. она нормально разрешима), а в силу формул (21) будем иметь: $l = l_0 + l_1$ и $p = p_0 + p_1$, т. е. $l$ и $p$ — конечные числа. Значит, задача $\mathbf{GR_{1,2}}$ также является нетеровой.

### Библиографический список


1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : СГПУ, 1998. 343 с. [*Rasulov K. M.* The Boundary Problems for Polyanalytic Functions and Some of Their Applications. Smolensk : SGPU, 1998. 343 p.]

2. *Васильев Я. А.* О решении обобщенной краевой задачи типа Римана для бианалических функций в круге // Современные проблемы науки. Смоленск : Принт-Экспресс, 2011. С. 26–32. [*Vasiliev Y. A.* About Solution the Generalized Boundary Problem of Riemann Type for Bianalytic Functions in the Unit Disc. Smolensk : Print-Express, 2011. P. 26–32.]

3. *Васильев Я. А., Расулов К.М.* Первая обобщенная краевая задача типа Римана для бианалических функций в круге // Изв. Смоленск. гос. ун-та. 2011. № 2. С. 119–129. [*Vasiliev Y. A., Rasulov K. M.* The Generalized Boundary Value Problem of Riemann Type for Bianalytic Functions in the Unit Disc // Izv. Smolensk. Gos. Un-ta. 2011. № 2. P. 119–129.]

4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с. [*Gahov F. D.* The Boundary Problems. Moscow : Nauka, 1977. 640 p.]


УДК 517.51

# ТОЖДЕСТВА ТИПА ТИТЧМАРША ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ХАРДИ И ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

**С. С. Волосивец**

Саратовский государственный университет
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

В работе доказывается теорема типа Титчмарша о преобразованиях Фурье обобщенных операторов Харди и Харди–Литтлвуда, зависящих от параметра $\alpha \in (1/2, 1]$.

**Ключевые слова:** оператор Харди, оператор Харди–Литтлвуда, теорема Титчмарша.

**Identities of Titchmarsh Type for Generalized Hardy and Hardy–Littlewood Operators**

**S. S. Volosivets**

A Titchmarsh-type theorem on Fourier transforms of Hardy and Hardy-Littlewood operators depending on parameter $\alpha \in (1/2, 1]$ is proved.

**Key words:** Hardy operator, Hardy–Littlewood operator, Titchmarsh theorem.

## ВВЕДЕНИЕ

В теории функций хорошо известны операторы Харди:

$$\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^{\infty} f(t)/t\,dt, \qquad x > 0, \tag{1}$$

и Харди–Литтлвуда:

$$\mathcal{B}(f)(x) = x^{-1}\int_0^x f(t)\,dt, \qquad x > 0. \tag{2}$$

Первый из них ограничен в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p < \infty$, а второй — в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \le \infty$ (см. [1, теоремы 327 и 328]). В [2, гл. 2, § 6] даны критерии ограниченности этих операторов в симметричных пространствах. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $F_c(f)(t) = (L^2) - \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^a f(x)\cos xt\,dx$. Тогда, как показал Е.Титчмарш [3, гл. 3, теорема 69], справедливы равенства

$$\mathcal{B}(F_c(f))(t) = F_c(\mathcal{H}(f))(t); \qquad \mathcal{H}(F_c(f))(t) = F_c(\mathcal{B}(f))(t). \tag{3}$$

п. в. на $\mathbb{R}_+$. Б. И. Голубов [4] доказал первое из равенств (0.3) для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p \le 2$, а второе — для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \le 2$. F. Moricz [5] уточнил доказательства из [4] и доказал аналоги (3) для обычного преобразования Фурье и функций, определенных на $\mathbb{R}$.

В нашей работе вводятся аналоги операторов (1) и (2):

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(x) = x^{\alpha-1}\int_x^\infty t^{-\alpha} f(t)\,dt, \qquad x>0, \qquad \alpha\in(0,1], \tag{4}$$

$$\mathcal{B}_\alpha(f)(x) = x^{-\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1} f(t)\,dt, \qquad x>0, \qquad \alpha\in(0,1]. \tag{5}$$

Они являются сопряженными друг к другу, $\mathcal{H}_\alpha$ действует в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 \le p < 1/(1-\alpha)$ (для $\alpha = 1$ полагаем $1/(1-\alpha) = \infty$), а $\mathcal{B}_\alpha$ действует в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $p > 1/\alpha$ (см. лемму 2). Их можно определять для функций, заданных на $\mathbb{R}$, при $x < 0$ формулами

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(x) = |x|^{\alpha-1}\int_{-\infty}^x |t|^{-\alpha} f(t)\,dt, \qquad \mathcal{B}_\alpha(f)(x) = |x|^{-\alpha}\int_x^0 |t|^{\alpha-1} f(t)\,dt. \tag{6}$$

При таком определении из четности $f$ следует четность $\mathcal{H}_\alpha(f)$ и $\mathcal{B}_\alpha(f)$, из нечетности $f$ следует нечетность $\mathcal{H}_\alpha(f)$ и $\mathcal{B}_\alpha(f)$.

Целью данной работы является доказательство аналогов равенств (3) для операторов (4) и (5) в случае $1/2 < \alpha \le 1$. В теоремах 1 и 2, соответствующих равенствам из теоремы Титчмарша, рассматриваются функции, заданные на $\mathbb{R}_+$, что позволяет сделать доказательства короче. Затем формулируется аналогичная теорема 3 для функций, заданных на $\mathbb{R}$.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p < \infty$, состоящие из измеримых функций $f(x)$, таких что $|f(x)|^p$ интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}_+$, рассматриваются с обычной нормой $\|f\|_p = (\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx)^{1/p}$. Если $f \in L^p[0,a]$ для всех $a > 0$, то $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ее косинус-преобразование Фурье задается формулой $F_c(f)(t) = \int_0^\infty f(x)\cos xt\,dx$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \le 2$, то $F_c(f)(t)$ определяется как предел $\int_0^a f(x)\cos xt\,dx$ в $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ при $a \to \infty$, где $1/p + 1/p' = 1$. При этом

$$\|F_c(f)\|_{p'} \le C(p)\|f\|_p. \tag{7}$$

По поводу корректности этого определения и неравенства (7) см. [3, гл. 4, теорема 74]. Аналогично вводится синус-преобразование Фурье $F_s(f)(t)$ и для него также верно неравенство (7).

**Лемма 1.** (см. [6, гл. 1, теорема (9.16)]). *Пусть $f(x) \ge 0$ на $\mathbb{R}_+$, $r > 1$, $s < r - 1$. Если $f^r(x)x^s \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, то $\{x^{-1}\Phi(x)\}^r x^s \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \{x^{-1}\Phi(x)\}^r x^s\,dx \le C(r,s)\int_{\mathbb{R}_+} f^r(x)x^s\,dx. \tag{8}$$

**Лемма 2.** *Пусть $0 < \alpha \le 1$. Тогда оператор $\mathcal{H}_\alpha(f)$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 \le p < 1/(1-\alpha)$, а оператор $\mathcal{B}_\alpha$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $p > 1/\alpha$. При $p > 1/\alpha$ и любых $b > 0$ верно неравенство*

$$\int_0^b |B_\alpha(f)(x)|^p\,dx \le C(p)\int_0^b |f(x)|^p\,dx. \tag{9}$$

**Доказательство.** Пусть $\varphi(t) = t^{\alpha-1}|f(t)|$. Тогда по неравенству Гельдера при $p > 1/\alpha$ получаем $\int_0^a \varphi(t)\,dt \le C_1\|f\|_p a^{\alpha-1/p} < \infty$. Это означает, что функция $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$ имеет смысл. Применим (8) для $s = (1-\alpha)p$ (неравенство $s < p - 1$ равносильно $\alpha > 1/p$):

$$\int_0^\infty \left|x^{-\alpha}\int_0^x \varphi(t)\,dt\right|^p dx \le \int_0^\infty x^s(x^{-1}\Phi(x))^p\,dx \le C_2\int_0^\infty x^s\varphi^p(x)dx = C_2\|f\|_p^p.$$

Заменим теперь $f(t)$ на $f_1(t) = f(t)X_{(0,b)}(t)$, где $X_E$ — индикатор множества $E$. Тогда

$$\int_0^b |\mathcal{B}_\alpha(f)(x)|^p\,dx = \int_0^b |\mathcal{B}_\alpha(f_1)(x)|^p\,dx \le C_2\|f_1\|_p^p = C_2\int_0^b |f(x)|^p\,dx,$$

что дает (9). Наконец, если $\mathcal{B}_\alpha$ непрерывен в $L^p(\mathbb{R}_+)$, то сопряженный к нему оператор $\mathcal{H}_\alpha$ непрерывен в сопряженном пространстве $L^r(\mathbb{R}_+)$, где $1/p+1/r=1$, т. е. для всех $r\in[1,1/(1-\alpha))$. Лемма доказана.

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Теорема 1.** *Пусть $1/2<\alpha\le 1$, $f\in L^p(\mathbb{R}_+)$, где $1/\alpha<p\le 2$. Тогда $\mathcal{B}_\alpha(F_c(f))(t) = F_c(\mathcal{H}_\alpha(f))(t)$ п. в. на $\mathbb{R}_+$. Аналогичный результат справедлив для синус-преобразования Фурье.*

**Доказательство.** По определению $F_c(f)\in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, $1/p+1/p'=1$. Так как $\alpha>1/p\ge 1/p'$, по лемме 2 $\mathcal{B}_\alpha(F_c(f))(t)$ существует как функция из $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, определенная в каждой точке $t>0$. Пусть теперь $f_a = fX_{(0,a)}$, $a>0$. Имеем при всех $t>0$

$$\lim_{a\to\infty}\mathcal{B}_\alpha(F_c(f_a))(t) = \mathcal{B}_\alpha(F_c(f))(t). \tag{10}$$

В самом деле, по неравенству Гельдера при фиксированном $t>0$

$$|\mathcal{B}_\alpha(F_c(f_a))(t) - \mathcal{B}_\alpha(F_c(f))(t)| \le C_1 t^{-\alpha}\|F_c(f_a)-F_c(f)\|_{p'}t^{\alpha-1/p'},$$

и норма в последнем выражении стремится к нулю при $a\to+\infty$. Далее

$$\mathcal{B}_\alpha(F_c(f_a))(t) = t^{-\alpha}\int_0^t\int_0^a f(u)\cos xu\,du\,x^{\alpha-1}\,dx = t^{-\alpha}\int_0^a\int_0^t x^{\alpha-1}\cos xu\,dx f(u)\,du.$$

Сделаем замену $y=xu/t$, $t>0$, во внутреннем интеграле:

$$\mathcal{B}_\alpha(F_c(f_a))(t) = \int_0^a\int_0^u y^{\alpha-1}\cos yt\,dy\,u^{-\alpha}f(u)\,du. \tag{11}$$

Так как $2<1/(1-\alpha)\le\infty$, то условие $p<1/(1-\alpha)$ выполнено и по лемме 2 $F_c(\mathcal{H}_\alpha(f))(t)$ существует как функция из $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, определенная п. в. Имеем:

$$F_c(\mathcal{H}_\alpha(f_a))(t) = \int_0^a x^{\alpha-1}\int_x^a u^{-\alpha}f(u)\,du\cos xt\,dx = \int_0^a\int_0^u x^{\alpha-1}\cos xt\,dx\,u^{-\alpha}f(u)du,$$

откуда

$$F_c(\mathcal{H}_\alpha(f_a))(t) = \mathcal{B}_\alpha(F_c(f_a))(t) \tag{12}$$

п. в. на $\mathbb{R}_+$. Здесь использован тот факт, что $\int_x^\infty f_a(t)\,dt=0$ при $x>a$, и теорема Фубини. Осталось показать, что

$$F_c(\mathcal{H}_\alpha(f))(t) = (L^{p'}) - \lim_{a\to\infty}F_c(\mathcal{H}_\alpha(f_a))(t). \tag{13}$$

По теореме Ф. Рисса существует $a_i\to\infty$ такая, что $F_c(\mathcal{H}_\alpha(f))(t) = \lim\limits_{i\to\infty}F_c(\mathcal{H}_\alpha(f_{a_i}))(t)$ п. в. на $\mathbb{R}_+$. Тогда из (10), (12), (13) и последнего замечания получим утверждение теоремы 1 для косинус-преобразования Фурье. Для доказательства (13) сначала запишем

$$\int_0^a\mathcal{H}_\alpha(f)(x)\cos xt\,dx = \left(\int_0^a\int_x^a + \int_0^a\int_a^\infty\right)x^{\alpha-1}\cos xt u^{-\alpha}f(u)\,du\,dx =$$
$$= \int_0^a\left(\int_0^u x^{\alpha-1}\cos xt\,dx\right)u^{-\alpha}f(u)\,du + \int_0^a x^{\alpha-1}\cos xt\,dx\cdot\int_a^\infty u^{-\alpha}f(u)\,du. \tag{14}$$

По неравенству Гельдера $\left|\int_a^\infty u^{-\alpha}f(u)\,du\right| \le \left(\int_a^\infty|f(u)|^p\,du\right)^{1/p}\left(\int_a^\infty u^{-\alpha p'}\,du\right)^{1/p'}$. Первый сомножитель правой части есть $o(1)$ при $a\to\infty$, а второй — $O(a^{(1-\alpha p')/p'})$. В итоге согласно (7) (норма слева берется по $t$) находим, что

$$\left\|\int_0^a x^{\alpha-1}\cos xt\,dx\int_a^\infty u^{-\alpha}f(u)du\right\|_{p'} = o(a^{1/p'-\alpha})\|x^{\alpha-1}X_{(0,a)}\|_p = o(1),\ a\to\infty. \tag{15}$$

Таким образом, в силу (14), (11), (12) и (15)

$$F_c(\mathcal{H}_\alpha(f))(t) = (L^{p'}) - \lim_{a\to\infty}\int_0^a \mathcal{H}_\alpha(f)(x)\cos xt\,dx =$$
$$= (L^{p'}) - \lim_{a\to\infty}\int_0^a\int_0^u x^{\alpha-1}\cos xt\,dx u^{-\alpha} f(u)\,du +$$
$$+(L^{p'}) - \lim_{a\to\infty}\int_0^a x^{\alpha-1}\cos xt\,dx\cdot\int_a^\infty u^{-\alpha}f(u)du = (L^{p'}) - \lim_{a\to\infty} F_c(\mathcal{H}_\alpha(f_a))(t).$$

Тем самым равенство (13) и утверждение теоремы 1 для косинус-преобразования Фурье доказаны. Утверждение теоремы 1 для синус-преобразования Фурье доказывается аналогично. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть $1/2 < \alpha \le 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, где $1/\alpha < p \le 2$. Тогда $\mathcal{H}_\alpha(F_c(f))(t) = F_c(\mathcal{B}_\alpha(f))(t)$ п. в. на $\mathbb{R}_+$. Аналогичный результат справедлив для синус-преобразований Фурье.*

**Доказательство.** По условию $F_c(f) \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ и неравенство $p' < 1/(1-\alpha)$ равносильно $p > 1/\alpha$, поэтому $\mathcal{H}_\alpha(F_c(f))(t)$ определена как функция из $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$. Изучим ее подробно. Зафиксируем $b > t > 0$ и по теореме Фубини получим:

$$\int_t^b F_c(f_a)(u)u^{-\alpha}\,du = \int_0^a\left(\int_t^b u^{-\alpha}\cos xu\,du\right)f(x)\,dx.$$

Согласно неравенству Гельдера аналогично доказательству (10) находим, что

$$\lim_{a\to\infty}\int_t^b F_c(f_a)(u)u^{-\alpha}\,du = \int_t^b F_c(f)(u)u^{-\alpha}\,du = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\int_t^b u^{-\alpha}\cos xu\,du\,dx. \tag{16}$$

Пусть $h_{\alpha,t,b}(x) = \int_t^b u^{-\alpha}\cos xu\,du$. По второй теореме о среднем имеем ($z \in [t,b]$):

$$|h_{\alpha,t,b}(x)| \le t^{-\alpha}\left|\int_t^z \cos xu\,du\right| + b^{-\alpha}\left|\int_z^b \cos xu\,du\right| \le 4t^{-\alpha}x^{-1}, \qquad t, x > 0. \tag{17}$$

В то же время при $tx \le 1$, $bx \ge 1$, $\alpha < 1$, в силу (17) находим, что

$$|h_{\alpha,t,b}(x)| \le \int_t^{1/x} u^{-\alpha}\,du + \left|\int_{1/x}^b u^{-\alpha}\cos xu\,du\right| \le C_1(\alpha)x^{\alpha-1}. \tag{18}$$

При $\alpha = 1$ получается логарифмическая оценка. Мы не разбираем этот случай подробно, так как это сделано в [5]. Пусть $h_{\alpha,t,}(x) := \lim\limits_{b\to\infty} h_{\alpha,t,b}(x) = \int_t^{\to\infty} u^{-\alpha}\cos xu\,du$, где стрелка в верхнем индексе означает, что интеграл несобственный, как в смысле Лебега, так и Римана. Ясно, что в (17) и (18) (при $tx \le 1$) можно заменить $h_{\alpha,t,b}(x)$ на $h_{\alpha,t}(x)$. Докажем теперь, что

$$\mathcal{H}_\alpha(F_c(f))(t) = t^{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}_+} f(x)h_{\alpha,t}(x)\,dx, \qquad t > 0. \tag{19}$$

Так как $u^{-q} \in L^1(t,\infty)$ при $t > 0$ и $q > 1$, то по неравенству Гельдера $F_c(f)(u)u^{-\alpha} \in L^1(t,\infty)$ при $\alpha > 1/p$. Отсюда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеет место равенство

$$\lim_{b\to\infty}\int_t^b F_c(f)(u)u^{-\alpha}\,du = \int_t^\infty F_c(f)(u)u^{-\alpha}\,du, \qquad t > 0. \tag{20}$$

С другой стороны, в силу оценок (17), (18) и неравенства Гельдера имеем:

$$\left|\int_{\mathbb{R}_+} f(x)h_{\alpha,t}(x)dx - \int_{\mathbb{R}_+} f(x)h_{\alpha,t,b}(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}_+} f(x)h_{\alpha,b}(x)dx\right| \le$$
$$\le \int_0^{1/b}|f(x)|C_1x^{\alpha-1}\,dx + \int_{1/b}^\infty 4b^{-\alpha}|f(x)|x^{-1}\,dx \le$$

$$\leq C_2 \left( \left( \int_0^{1/b} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} b^{1/p-\alpha} + b^{-\alpha} \left( \int_{1/b}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} (1/b)^{(1-p')/p'} \right) \leq C_3 b^{1/p-\alpha}. \qquad (21)$$

Поскольку $\alpha > 1/p$, левая часть (21) также стремится к нулю при $b \to \infty$. Благодаря (21) и неравенству (см. (17))

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+} f(x) h_{\alpha,t,b}(x) dx - \int_0^a f(x) h_{\alpha,t,b}(x) dx \right| \leq 4t^{-\alpha} \left( \int_a^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left( \int_a^{\infty} x^{-p'} \, dx \right)^{1/p'}$$

правая часть (19) равна $t^{\alpha-1} \lim\limits_{b\to\infty} \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^a f(x) \int_t^b u^{-\alpha} \cos xu \, du \, dx$. Однако в силу (20) и (16) левая часть (19) равна

$$t^{\alpha-1} \lim_{b\to\infty} \int_t^b F_c(f)(u) u^{-\alpha} \, du = t^{\alpha-1} \lim_{b\to\infty} \lim_{a\to\infty} \int_t^b \int_0^a f(x) u^{-\alpha} \cos xu \, du \, dx.$$

По теореме Фубини (19) доказано. С помощью замены переменной находим, что

$$h_{\alpha,t}(x) = \int_t^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos xu \, du = x^{\alpha-1} \int_{xt}^{\to\infty} v^{-\alpha} \cos v \, dv = (x/t)^{\alpha-1} \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du.$$

Подставляя в (19), получаем:

$$\mathcal{H}_\alpha(F_c(f))(t) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx. \qquad (22)$$

Теперь вернемся к $\mathcal{B}_\alpha$. По условию $\mathcal{B}_\alpha(f) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $F_c(\mathcal{B}_\alpha(f))$ существует как функция из $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, причем $F_c(\mathcal{B}_\alpha(f)) = (L^{p'}) - \lim\limits_{a\to\infty} F_c((\mathcal{B}_\alpha(f))_a)$. Запишем

$$F_c((\mathcal{B}_\alpha(f))_a)(t) = \int_0^a u^{-\alpha} \int_0^u x^{\alpha-1} f(x) \, dx \cos ut \, du = \int_0^a \int_x^a u^{-\alpha} \cos ut \, du \, x^{\alpha-1} f(x) \, dx.$$

Используя (17) и неравенство Гельдера, получаем:

$$\left| \int_0^a x^{\alpha-1} f(x) \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx - \int_0^a x^{\alpha-1} f(x) \int_x^a u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx \right| \leq$$

$$\leq |h_{\alpha,a}(t)| \left( \int_0^a |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} C_4 a^{\alpha-1/p} \leq C_5 t^{-1} \|f\|_p a^{-1/p}, \qquad (23)$$

т. е. левая часть (23) стремится к нулю при $a \to \infty$ и фиксированном $t > 0$.

В то же время в силу (17) и неравенства Гельдера имеем:

$$\left| \int_0^a x^{\alpha-1} f(x) \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx - \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) h_{\alpha,x}(t) \, dx \right| \leq C_6 t^{-1} \left( \int_a^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_a^{\infty} (x^{\alpha-1} x^{-\alpha})^{p'} \, dx \right)^{1/p'} \qquad (24)$$

и левая часть (24) есть $o(a^{-1/p})$. Из (22), (23) и (24) следует, что $\mathcal{H}_\alpha(F_c(f))(t) = \lim\limits_{a\to\infty} F_c((\mathcal{B}_\alpha(f))_a)(t)$ п. в. на $\mathbb{R}_+$, что завершает доказательство теоремы 2 в случае косинус-преобразования Фурье. Утверждение теоремы 2 для синус-преобразования Фурье доказывается аналогично.

Учитывая (6), из теорем 1 и 2 легко выводится

**Теорема 3.** *Пусть* $1/2 < \alpha \leq 1$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1/\alpha < p \leq 2$. *Тогда* $(\mathcal{H}_\alpha(f))\hat{}(t) = \mathcal{B}_\alpha(\hat{f})(t)$ *п. в. на* $\mathbb{R}$ *и* $(\mathcal{B}_\alpha(f))\hat{}(t) = \mathcal{H}_\alpha(\hat{f})(t)$ п. в. на $\mathbb{R}$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 10-01-00270).

**Библиографический список**

1. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с. [*Hardy G., Littlewood J., Polya G.* Inequalities. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1934. 328 p.]
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1978. 400 с. [*Krein S. G., Petunin Jг. I., Semenov E. M.* Interpolation of linear operators. Providence : Amer. Math. Soc., 1982. 375 p.]
3. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л. : Гостехиздат, 1948. 480 с. [*Titchmarsh E.* Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford : Clarendon Press, 1948. 404 p.]
4. *Голубов Б. И.* Об одной теореме Беллмана о коэффициентах Фурье // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 11. С. 31–40. [*Golubov B. I.* On a Bellman theorem on Fourier coefficients // Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics. 1995. Vol. 83, № 2. P. 321–330.]
5. *Moricz F.* The harmonic Cesaro and Copson operators on the spaces $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$ // Studia Math. 2002. Vol. 149, № 3. P. 267–279.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 616 с. [*Zygmund A.* Trigonometric series. Vol. 1. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1959. 320 p.]

УДК 517.982.22, 517.982.252+256, 519.615, 519.853.3

# МЕТОД ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА ДЛЯ СИЛЬНО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

**М. О. Голубев**

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный
E-mail: maksimkane@mail.ru

В работе рассматривается стандартный метод проекции градиента в случае, когда множество является $R$-сильно выпуклым, а функция выпукла, дифференцируема и имеет липшицев градиент. Доказано, что при некоторых естественных дополнительных условиях метод сходится со скоростью геометрической прогрессии.

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, метод проекции градиента, метрическая проекция, $R$-сильно выпуклое множество.

**Gradient Projection Algorithm for Strongly Convex Set**

**M. O. Golubev**

In our work we will discuss standard gradient projection algorithm, where a set is strongly convex of radius $R$ and a function is convex, differentiable and its gradient satisfies Lipschitz condition. We proved that under some natural additional conditions algorithm converges with the rate of a geometric progression.

**Key words:** Hilbert space, gradient projection algorithm, metric projection, strongly convex set of radius $R$.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство над вещественным полем скаляров, $(p, x)$ — скалярное произведение векторов $p, x \in \mathbb{H}$. Обозначим через $B_R(x) = \{y \in \mathbb{H} : \|y - x\| \le R\}$ замкнутый шар радиуса $R \ge 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{H}$. Расстояние от точки $x \in \mathbb{H}$ до множества $A \subset \mathbb{H}$ будем обозначать $\varrho(x, A) \doteq \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$. Метрической проекцией точки $x \in \mathbb{H}$ на множество $A \subset \mathbb{H}$ называется множество $P_A(x) = \{a \in A : \|x - a\| = \varrho(x, A)\}$. Опорная функция ко множеству $A$ определяется следующей формулой: $s(p, A) = \sup\limits_{x \in A}(p, x)$ для всех $p \in \mathbb{H}$. Нормальным конусом к выпуклому замкнутому множеству $A$ в точке $a \in A$ называется множество $N(A; a) = \{p \in \mathbb{H} : (p, a) \ge s(p, A)\}$. Диаметром множества $A$ называется число $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x, y \in A} \|x - y\|$. Границу множества $A$ обозначим через $\partial A$.

**Определение 1** [1, определение 3.1.1; 2, 3]. Непустое множество $A \subset \mathbb{H}$ называется *$R$-сильно выпуклым*, если оно может быть представлено в виде пересечения замкнутых шаров радиуса $R > 0$, т. е. $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x)$ для некоторого подмножества $X \subset \mathbb{H}$.

Рассмотрим задачу минимизации:

$$f(x) \to \min, \qquad x \in A \subset \mathbb{H}. \tag{1}$$

В данной работе мы обсудим стандартный метод проекции градиента:

$$x_{k+1} = P_A(x_k - \alpha_k f'(x_k)), \qquad x_1 \in \partial A, \qquad \alpha_k > 0. \tag{2}$$

Метод проекции градиента детально изложен в работах [4–7]. Известные случаи сходимости метода проекции градиента со скоростью геометрической прогрессии имеют место для замкнутого и выпуклого множества $A$ и сильно выпуклой с константой $\theta > 0$ функции $f$, градиент $f'$ которой удовлетворяет условию Липшица с константой $M > 0$, т. е. $\|f'(x_1) - f'(x_2)\| \le M\|x_1 - x_2\|$ для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{H}$. В работе [8] приведена следующая оценка скорости сходимости $\|x_{k+1} - x_*\| \le q\|x_k - x_*\|$, где $x_*$ — единственное решение задачи (1) и $q = \sqrt{1 - 4\theta\alpha + \alpha^2 M^2}$, а коэффициенты $\alpha_k$ выбираются с учетом условия $\alpha_k = \alpha$, а $\alpha \in (0, 4\theta/M^2)$. Мы планируем отказаться от сильной выпуклости функции $f$, но потребуем сильной выпуклости множества $A$.

Теорема 1 была анонсирована в тезисах конференций [9, 10].

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Предложение 1** [1, теорема 4.1.3]. *Замкнутое выпуклое множество $A \subset \mathbb{H}$ является $R$-сильно выпуклым множеством тогда и только тогда, когда оно представимо в виде*

$$A = \bigcap_{\|p\|=1} B_R(x_p - Rp),$$

*где для любого вектора $p \in \mathbb{H}$, $\|p\| = 1$ точка $x_p \in A$ однозначно определена из равенства $(p, x_p) = s(p, A)$.*

**Предложение 2** [1, лемма 2.2, гл. 6]. *Пусть множество $A \subset \mathbb{H}$ выпукло и замкнуто, функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ выпукла на $A$ и дифференцируема в точке $x_* \in A$.*

*Тогда $x_*$ является решением задачи* (1) *в том и только том случае, если*

$$x_* = P_A(x_* - \alpha f'(x_*)) \tag{3}$$

*при произвольном $\alpha > 0$.*

Хорошо известно, что для выпуклого и замкнутого множества $A \subset \mathbb{H}$ множество $P_A(x)$ одноточечно, т. е. $P_A(x) = \{a(x)\}$, и для любых точек $x_0, x_1 \in \mathbb{H}$ выполняется оценка $\|a_0 - a_1\| \le 1 \cdot \|x_0 - x_1\|$, где $\{a_i\} = P_A(x_i), i \in \{0, 1\}$.

Для выпуклого замкнутого множества $A \subset \mathbb{H}$ и вектора $p \in \mathbb{H}$ определим множество $A(p) = \{x \in A : (p, x) = s(p, A)\}$.

**Предложение 3** [1, теорема 3.1.3]. *Замкнутое выпуклое множество $A \subset \mathbb{H}$ является $R$-сильно выпуклым множеством тогда и только тогда, когда для любой пары единичных векторов $p, q \in \mathbb{H}$ и для точек $\{a(p)\} = A(p)$, $\{a(q)\} = A(q)$ выполняется следующее неравенство:*

$$\|a(p) - a(q)\| \le R\|p - q\|.$$

**Теорема 1.** *Пусть множество $A \subset \mathbb{H}$ является $R$-сильно выпуклым множеством. Тогда для любых точек $x_0, x_1 \in \mathbb{H}\backslash A$ выполнено неравенство*

$$\|a_0 - a_1\| \le \frac{R}{\sqrt{(R + \varrho_0)(R + \varrho_1)}} \cdot \sqrt{\|x_0 - x_1\|^2 - (\varrho_0 - \varrho_1)^2}, \tag{4}$$

*где $\{a_i\} = P_A(x_i), \varrho_i = \|x_i - a_i\|, i \in \{0, 1\}$.*

**Доказательство.** Из предложения 3 следует, что

$$\|a_0 - a_1\| \le R\left\|\frac{x_0 - a_0}{\varrho_0} - \frac{x_1 - a_1}{\varrho_1}\right\|.$$

После возведения данного неравенства в квадрат имеем:

$$\|a_0 - a_1\|^2 \le R^2\left(2 - \frac{2}{\varrho_0\varrho_1}(x_0 - a_0, x_1 - a_1)\right) =$$
$$= R^2\left(2 + \frac{\|a_0 - a_1\|^2 + \|x_0 - x_1\|^2 - \|a_0 - x_1\|^2 - \|a_1 - x_0\|^2}{\varrho_0\varrho_1}\right). \tag{5}$$

Из предложения 1 следует, что

$$A \subset B_R\left(a_0 - R\frac{x_0 - a_0}{\varrho_0}\right).$$

Пусть $y = a_0 - R\dfrac{x_0 - a_0}{\varrho_0}$. $\|y - a_1\| \le R$, так как $a_1 \in B_R(y)$. Заметим, что $\angle x_0a_0a_1 = \pi - \angle ya_0a_1$.

По теореме косинусов из треугольника $ya_0a_1$ следует

$$\cos\angle x_0a_0a_1 = -\cos\angle ya_0a_1 = -\frac{\|y-a_0\|^2 + \|a_0-a_1\|^2 - \|y-a_1\|^2}{2\|y-a_0\|\|a_0-a_1\|} =$$
$$= -\frac{R^2 + \|a_0-a_1\|^2 - \|y-a_1\|^2}{2R\|a_0-a_1\|} \le -\frac{\|a_0-a_1\|}{2R}.$$

По теореме косинусов из треугольника $x_0a_0a_1$ имеем:

$$\|a_1 - x_0\|^2 = \|a_0-a_1\|^2 + \|a_0-x_0\|^2 - 2\|a_0-a_1\|\|a_0-x_0\|\cos\angle x_0a_0a_1 \ge$$
$$\ge \|a_0-a_1\|^2 + \varrho_0^2 + \frac{\|a_0-a_1\|^2\varrho_0}{R}.$$

Аналогичным образом получаем неравенство

$$\|a_0 - x_1\|^2 \ge \|a_0-a_1\|^2 + \varrho_1^2 + \frac{\|a_0-a_1\|^2\varrho_1}{R}.$$

Из формулы (5) имеем:

$$\|a_0-a_1\|^2 \le R^2\left(2 + \frac{\|x_0-x_1\|^2 - \varrho_1^2 - \dfrac{\|a_0-a_1\|^2(\varrho_1+\varrho_0)}{R} - \|a_0-a_1\|^2 - \varrho_0^2}{\varrho_0\varrho_1}\right),$$

поэтому

$$\|a_0-a_1\|^2(R^2 + R(\varrho_0+\varrho_1) + \varrho_0\varrho_1) \le R^2(\|x_0-x_1\|^2 - (\varrho_0-\varrho_1)^2).$$

После преобразований получаем следующую оценку:

$$\|a_0-a_1\| \le \frac{R}{\sqrt{(R+\varrho_0)(R+\varrho_1)}} \cdot \sqrt{\|x_0-x_1\|^2 - (\varrho_0-\varrho_1)^2}. \qquad \square$$

**Замечание 1.** В работе [8] аналогичная оценка была получена для выпуклых множеств с $C^2$ гладкой границей.

**Замечание 2.** Заметим, что если $x_0 \in A$ (т. е. $\varrho_0 = 0$), то формула (4) остается верной. В этом случае $a_0 = P_A(x_0) = x_0$. В силу предложения 1

$$x_0 \in A \subset B_R\left(a_1 - R\frac{x_1-a_1}{\varrho_1}\right).$$

По аналогии с доказательством теоремы 1 имеем $\cos\angle x_0a_1x_1 \le -\dfrac{\|a_0-a_1\|}{2R}$. По теореме косинусов из треугольника $x_0a_1a_0$ получаем оценку

$$\|a_0-x_1\|^2 = \|a_1-x_1\|^2 + \|a_0-a_1\|^2 - 2\|a_1-x_1\|\|a_0-a_1\|\cos\angle x_0a_1x_1.$$

В силу того что $a_0 = x_0$, имеем:

$$\|x_0-x_1\|^2 = \|a_1-x_1\|^2 + \|a_0-a_1\|^2 - 2\|a_1-x_1\|\|a_0-a_1\|\cos\angle x_0a_1x_1 \ge$$
$$\ge \varrho_1^2 + \|a_0-a_1\|^2 + \frac{\|a_0-a_1\|^2\varrho_1}{R}. \tag{6}$$

Из формулы (6) следует, что

$$\|a_0-a_1\| \le \sqrt{\frac{R}{R+\varrho_1}} \cdot \sqrt{\|x_0-x_1\|^2 - \varrho_1^2}.$$

Последнее эквивалентно формуле (4) в случае, когда $x_0 = a_0$ и $\varrho_0 = 0$.

**Предложение 4.** [1, лемма 1.19.5]. *Пусть функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ выпукла и дифференцируема по Гато на $\mathbb{H}$. Тогда условие Липшица для градиента $f'$*

$$\|f'(x_1) - f'(x_2)\| \le M\|x_1 - x_2\|, \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{H},$$

*эквивалентно условию*

$$(f'(x_1) - f'(x_2), x_1 - x_2) \ge \frac{1}{M}\|f'(x_1) - f'(x_2)\|^2, \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{H}. \tag{7}$$

## 2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим задачу (1). Последовательность $x_k$ генерируется по правилу (2).

Предположим, что

1) непустое множество $A \subset \mathbb{H}$ является $R$-сильно выпуклым (т. е. $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x) \neq \emptyset$);

2) функция $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ является выпуклой, дифференцируемой, и градиент $f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $M > 0$: для любой пары точек $x_1, x_2 \in \mathbb{H}$ выполнено

$$\|f'(x_1) - f'(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|;$$

3) для всех $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $n(x_k) \in N(A, x_k)$, такой что выполняется неравенство $(n(x_k), f'(x_k)) \leq 0$ (т. е. $x_k - \alpha_k f'(x_k) \notin A$ для любого $\alpha_k > 0$);

4) решение задачи (1) $x_* \in \partial A$ единственно;

5) $t = \min\limits_{x \in \partial A} \|f'(x)\| > 0$.

Заметим, что условие 2) для выпуклой функции эквивалентно условию (7).

В случае, когда условие 3) не выполняется, мы имеем дело с безусловной минимизацией и следует использовать один из стандартных алгоритмов поиска безусловного минимума (см. например [7, теорема 1.2, теорема 2.1, гл. 5]).

**Теорема 2.** *1. Пусть выполнены условия 1)–5). Пусть $\alpha_k = \alpha \in (0, 2/M]$. Тогда последовательность $x_k$, генерируемая по правилу* (2)*, сходится к решению задачи* (1) *со скоростью геометрической прогрессии: $\|x_{k+1} - x_*\| \leq q\|x_k - x_*\|$, где $q = \dfrac{R}{\sqrt[4]{(R^2 + \alpha^2 t^2)(R + \alpha t)^2}}$;*

*2. Пусть выполнены условия 1)–4). Пусть $\alpha_k = \alpha \in (0, 2/M]$. Тогда последовательность $x_k$, генерируемая по правилу* (2)*, сходится к решению задачи* (1) *со скоростью: $\|x_{k+1} - x_*\| \leq q_k\|x_k - x_*\|$, где $q_k = \sqrt[4]{\dfrac{R^2}{R^2 + \alpha^2\|f'(x_k)\|^2}}$.*

**Доказательство.** Воспользуемся предложением 1. Шар $B_R(x_k - Rn(x_k))$ содержит множество $A$, где единичный вектор $n(x_k)$ из условия 3). Вектор $f'(x_k)$ по условию составляет тупой угол с вектором $n(x_k)$. Пусть $y_k \doteq x_k - \alpha f'(x_k), z_k \doteq x_k - Rn(x_k)$. Пусть $\varrho_{x_k} = \varrho(x_k - \alpha f'(x_k), A)$, $\varrho_{x_*} = \varrho(x_* - \alpha f'(x_*), A)$. Далее, применяя теорему косинусов для треугольника $x_k y_k z_k$, получаем: $\varrho_{x_k} \geq \sqrt{R^2 + \alpha^2\|f'(x_k)\|^2} - R$. Из формулы (3) следует, что $\varrho_{x_*} = \alpha\|f'(x_*)\|$.

Следуя формуле (4), определим для точек $x_k, x_* \in \partial A$ и чисел $R > 0$, $\alpha \in (0, 2/M]$ число

$$L_k = L(x_k, x_*, R, \alpha) = \frac{R}{\sqrt[4]{(R^2 + \alpha^2\|f'(x_k)\|^2)}\sqrt{(R + \alpha\|f'(x_*)\|)^2}}.$$

Воспользовавшись неравенством (4), имеем

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 = \|P_A(x_k - \alpha f'(x_k)) - P_A(x_* - \alpha f'(x_*))\|^2 \leq L_k^2\|(x_k - x_*) - (\alpha f'(x_k) - \alpha f'(x_*))\|^2 =$$
$$= L_k^2(\|x_k - x_*\|^2 - 2\alpha(x_k - x_*, f'(x_k) - f'(x_*)) + \alpha^2\|f'(x_k) - f'(x_*)\|^2).$$

Из (7) следует, что

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq L_k^2\left(\|x_k - x_*\|^2 + \left(\alpha^2 - 2\frac{\alpha}{M}\right)\|f'(x_k) - f'(x_*)\|^2\right).$$

Так как по условию теоремы $\alpha \in (0, 2/M]$, то $\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq L_k^2\|x_k - x_*\|^2$.

Отсюда получаем оценку

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \frac{R}{\sqrt[4]{(R^2 + \alpha^2\|f'(x_k)\|^2)}\sqrt{(R + \alpha\|f'(x_*)\|)^2}}\|x_k - x_*\|.$$

В случае 1) $q = \dfrac{R}{\sqrt[4]{(R^2 + \alpha^2 t^2)}\sqrt{(R + \alpha t)^2}}$. В случае 2) $q_k = \sqrt[4]{\dfrac{R^2}{R^2 + \alpha^2\|f'(x_k)\|^2}}$. □

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия 1)–2). Пусть $RM/t < 1$, где $t = \min\limits_{x \in \partial A}\|f'(x)\| > 0$.*

*Последовательность $x_k$ генерируется по правилу* (2) *с $\alpha_k = \alpha > 0$ для всех $k$.*

*Тогда:*

*1) при выборе* $\alpha \in (2R/t, 2/M]$ *последовательность* $x_k$ *сходится к решению задачи* (1) *со скоростью геометрической прогрессии:* $\|x_{k+1} - x_*\| \le q(\alpha)\|x_k - x_*\|$*, где* $q(\alpha) = \dfrac{R}{\alpha t - R}$*;*

*2) при выборе* $\alpha > 2/M$ *последовательность* $x_k$ *сходится к решению задачи* (1) *со скоростью геометрической прогрессии:* $\|x_{k+1} - x_*\| \le q(\alpha)\|x_k - x_*\|$*, где* $q(\alpha) = \dfrac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R}$*. Более того,* $q(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} RM/t < 1$.

**Доказательство.** Заметим, что с учетом выбора параметра $\alpha$ в случае 1) $\alpha > 2R/t$. В случае 2) из неравенства $RM/t < 1$ с учетом выбора параметра $\alpha$ выполняется неравенство $\alpha > 2R/t$. Таким образом, в обоих случаях верно:

$$\alpha > \frac{2R}{t}. \tag{8}$$

Рассмотрим произвольную точку $x \in \partial A$. Воспользуемся предложением 1. Существует вектор $n \in \mathbb{H}, \|n\| = 1$, $s(n, A) = (n, x)$ такой, что выполнено включение $A \subset B_R(x - Rn)$.

Пусть $z \doteq x - Rn$, $y \doteq x - \alpha f'(x)$. Из неравенства треугольника следует, что $\|y - z\| + \|z - x\| \ge \ge \|y - x\|$, отсюда $\|y - z\| \ge \alpha\|f'(x)\| - R > \dfrac{2R}{t}t - R = R$.

Таким образом, для любого $x \in \partial A$ выполнено включение $x - \alpha f'(x) \notin B_R(x - Rn)$, отсюда $x - \alpha f'(x) \notin A$.

Оценим для $x \in \partial A$ число $\varrho_x = \varrho(x - \alpha f'(x), A)$:

$$\varrho_x \ge \varrho(x - \alpha f'(x), B_R(x - Rn)) = \|y - z\| - R \ge \alpha\|f'(x)\| - 2R.$$

Таким образом, с учетом неравенства (8) $\varrho_x \ge \alpha t - 2R > 0$.

Пусть $x, y \in \partial A$. Введем отображение $B$ вида $Bx = P_A(x - \alpha f'(x))$. Для точек $x, y \in \partial A$ и чисел $R > 0$, $\alpha$ определим величину $L_{x,y} = L(x, y, R, \alpha) = \dfrac{R}{\sqrt{(R + \varrho_x)(R + \varrho_y)}}$, где $\varrho_x = \varrho(x - \alpha f'(x), A)$, $\varrho_y = \varrho(x - \alpha f'(x), A)$. Величина $\varrho_y$ оценивается аналогично $\varrho_x$, следовательно, $\varrho_y \ge \alpha t - 2R$. Таким образом, $L_{x,y} \le \dfrac{R}{\alpha t - R}$, учитывая неравенство $\alpha > \dfrac{2R}{t}$ имеем: $L_{x,y} < 1$

$$\begin{gathered}
\|Bx - By\|^2 = \|P_A(x - \alpha f'(x)) - P_A(y - \alpha f'(y))\|^2 \le \\
\le L_{x,y}^2\|x - \alpha f'(x) - (y - \alpha f'(y))\|^2 \le L_{x,y}^2\|(x - y) - \alpha(f'(x) - f'(y))\|^2 = \\
= L_{x,y}^2(\|x - y\|^2 + \alpha^2\|f'(x) - f'(y)\|^2 - 2\alpha(x - y, f'(x) - f'(y))), \\
\|Bx - By\|^2 \le L_{x,y}^2\left(\|x - y\|^2 + \alpha^2\|f'(x) - f'(y)\|^2 - \frac{2\alpha}{M}\|f'(x) - f'(y)\|^2\right).
\end{gathered} \tag{9}$$

В случае 1) выполнено $\alpha \in (2R/t, 2/M)$. Из неравенства (9) получаем оценку

$$\|Bx - By\| \le L_{x,y}\|x - y\| \le \frac{R}{\alpha t - R}\|x - y\|, \tag{10}$$

причем $\dfrac{R}{\alpha t - R} < 1$ в силу выбора числа $\alpha$.

В случае 2) выполнено неравенство $\alpha > 2/M$. Из неравенств (9) и (7) получаем оценку

$$\|Bx - By\| \le L_{x,y}(\alpha M - 1)\|x - y\| \le \frac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R}\|x - y\|. \tag{11}$$

С учетом условий $RM/t < 1$ и $\alpha > \dfrac{2}{M}$ следует $\dfrac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R} < 1$.

Таким образом отображение $B$ сжимающее. Множество $A$ является полным метрическим пространством. В силу принципа сжимающих отображений для процесса (2) имеем $x_n \to x_*$ при $n \to \infty$. Точка $x_*$ является неподвижной точкой отображения $B$. Из предложения 2 следует, что точка $x_*$ является решением задачи (1).

Из неравенств (10) и (11) следует оценка:

$$\|x_{k+1} - x_*\| = \|B(x_k) - B(x_*)\| \le q(\alpha)\|x_k - x_*\|.$$

В случае 1) $q(\alpha) = \dfrac{R}{\alpha t - R}$. В случае 2) $q(\alpha) = \dfrac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R}$. Причем легко видеть, что $\dfrac{R(\alpha M - 1)}{\alpha t - R} \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} \dfrac{RM}{t} < 1$. $\square$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 10-01-00139-а).

### Библиографический список


1. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 440 с. [*Polovinkin E. S. Balashov M. V.* Elements of convex and strongly convex analysis. Moscow : Fizmatlit, 2007. 440 p.]
2. *Поляк Б. Т.* Теоремы существования и сходимость минимизирующих последовательностей в задачах на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166, №2. С. 287–290. [*Polyak B. T.* Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremal problems with restrictions // Soviet Math. Dokl. 1966. Vol. 7. P. 72–75.]
3. *Поляк Б. Т., Левинтин Е. С.* Сходимость минимизирующих последовательностей в задачах на условный экстремум // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, №5. С. 997–1000. [*Polyak B. T., Levintin E. S.* Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems // Soviet Math. Dokl. 1966. Vol. 7. P. 764—767.]
4. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1980. 520 с. [*Vasilyev F. P.* Numerical methods for solving extremal problems. Moscow : Nauka, 1980. 520 p.]
5. *Нестеров Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. М. : МЦНМО, 2010. 279 с. [*Nesterov Yu. E.* Introduction to convex optimization. M. : MCCME, 2010. 279 p.]
6. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М. : Наука, 1983. 384 с. [*Polyak B. T.* Introduction to optimization. Moscow : Nauka, 1983. 384 p.]
7. *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. М. : Физматлит, 2005. 368 с. [*Sukharev A. G., Timokhov A. V., Fedorov V. V.* Course of optimization methods. Moscow : Fizmatlit, 2005. 368 p.]
8. *Abatzoglou T. J.* The Lipschitz continuity of the metric projection // J. of Approx. Theory. 1979. Vol. 26. P. 212–218.
9. *Балашов М. В., Голубев М. О.* Об условии Липшица для метрической проекции в гильбертовом пространстве // Тр. 54-й науч. конф. МФТИ. М. : МФТИ, 2011. Т. 1. С. 34. [*Balashov M. V. Golubev M. O.* Lipschitz condition for the metric projection in a Hilbert space // Proc. of the 54th Conf. of MIPT. Moscow : MIPT, 2011. Vol. 1. P. 34.]
10. *Голубев М. О.* Метрическая проекция в гильбертовом пространстве и сильная выпуклость // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зимней шк. Саратов : Научная книга, 2012. С. 55–56. [*Golubev M. O.* Metric projection in a Hilbert space and strong convexity // Modern problems of function theory and their applications : Proc. of the 16th Saratov Winter School. Saratov, 2012. P. 55–56.]


УДК 517.51

# АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ, СВЯЗАННЫХ С РЯДАМИ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА

**Н. В. Егошина**

Саратовский государственный университет
E-mail: saviour92@mail.ru

Две теоремы О. П. Гойяла, касающиеся абсолютной сходимости некоторых тригонометрических рядов, распространяются на случай систем Виленкина и $L^p$-модулей непрерывности.

**Ключевые слова:** мультипликативные системы, положительные коэффициенты Фурье–Виленкина, абсолютная сходимость.

**Absolute Convergence of Some Series, Connected with the Fourier–Vilenkin Series**

**N. V. Egoshina**

Two theorems of O. P. Goyal concerning absolute convergence of some trigonometric series are extended to the case of Vilenkin systems and $L^p$-modulus of continuity.

**Key words:** positive Fourier–Vilenkin coefficients, absolute convergence.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \ldots, p_j - 1\}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \ldots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{1}$$

Это разложение определяется однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k \in \mathbb{Z}$, брать разложение с конечным числом ненулевых $x_j$. Если $y \in [0,1)$ записано в виде (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}$, $z_j \in \mathbb{Z}_j$, где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$. Аналогично определяется операция $x \ominus y$, которая является обратной к операции $x \oplus y$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1},\ k_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{2}$$

Аналогично $x \ominus y$, $x \oplus y$, для $k, l \in \mathbb{Z}_+$ можно определить операции $k \oplus l$ и $k \ominus l$. Для чисел $x \in [0,1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (2) положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\right)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L[0,1)$ .

Из определения следует, что при $k < m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, функции $\chi_k(x)$ постоянны на $I_i^n = [(i-1)/m_n, i/m_n)$, $i = 1, \ldots, m_n$. Также известно, что при фиксированном $y \in [0,1)$ для почти всех $x \in [0,1)$ и всех $k \in \mathbb{Z}_+$ верно $\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y)$, а для всех $x \in [0,1)$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$ верны равенства $\chi_k(x)\chi_l(x) = \chi_{k\oplus l}(x)$, $\chi_k(x)\overline{\chi_l(x)} = \chi_{k\ominus l}(x)$. Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, § 1.5].

Для $f \in L^1[0,1)$ коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье задаются формулами $\hat{f}(i) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_i(t)}\,dt$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k$, $n \in \mathbb{N}$. Как обычно, пространство $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ и модуль непрерывности первого порядка задается в нем равенством $\omega(f,\delta)_p = \sup\limits_{0\le h\le\delta} \left(\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$. Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L[0,1) : \hat{f}(i) = 0, i \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Определим наилучшее приближение и дискретный модуль непрерывности для $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$,

$$E_n(f)_p = \inf\{\|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_n\}, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad \omega_n(f)_p = \sup_{h\in[0,1/m_n)} \|f(x\oplus h) - f(x)\|_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Известно, что эти величины связаны неравенствами А. В. Ефимова (см. [1, § 10.5]) $2^{-1}\omega_n(f)_p \le E_{m_n}(f)_p \le \omega_n(f)_p$. В случае равномерной метрики $E_n(f)_\infty$ определяется аналогично, тогда как $\omega_n(f)_\infty = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I_k^n, k \in \mathbb{Z}\cap[0,m_n)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_k(f)_\infty = 0$, то $f \in C^*[0,1)$. Для $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty} \downarrow 0$ пусть $H_p^\omega = \{f \in L^p[0,1) : \omega_n(f)_p \le C\omega_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Сверткой функций $f, g \in L^1[0,1)$ называется функция $h(x) = f * g(x) = \int_0^1 f(x\ominus t)g(t)\,dt$, которая существует п.в. на $[0,1)$ и также принадлежит $L^1[0,1)$. Известно, что $(f * g)\hat{}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Целью нашей работы является получение аналогов двух теорем О. П. Гойяла из [2] и [3] для систем Виленкина $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ (см. теоремы 1 и 2). Кроме того, теорема 2 для равномерного модуля непрерывности распространяется на случай пространства $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$.

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$. Легко видеть, что $S_n(f)(x) = f * D_n(x)$.

**Лемма 1.** 1) *$D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x)$, где $n \in \mathbb{Z}_+$ и $X_E$ — индикатор множества $E$.*

2) *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0,1)$. Тогда $|D_n(x)| \leqslant Nx^{-1}$, где $2 \leqslant p_n \leqslant N$. Отсюда следует, что $\|D_n\|_1 = O(\ln(n+1))$, $n \in \mathbb{N}$.*

Утверждение 1) леммы 1 установлено в [1, § 1.5], а утверждение 2) — в [4, с. 98–100].

**Лемма 2** (см. [5, лемма 10]). *Пусть $1 \le p < \infty$, $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty} \downarrow 0$ такова, что $\omega_n \le C\omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и*

$$\limsup_{n\to\infty} p_{n+1}(\omega_{n+1}/\omega_n)^p > 1. \tag{3}$$

*Тогда для $f \in H_p^\omega$ имеем $\int_0^{1/m_n} |f(t)|^p\,dt = O(\omega_n^p)$, $n \in \mathbb{N}$.*

**Замечание 1.** При $\omega_n = m_n^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, условие (3) выполнено при $\alpha p < 1$.

**Лемма 3.** (см. [1, §10.4, теорема 10.4.1) *Если* $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, *то при* $0 \le a, b \le 1$ *справедливо неравенство*

$$\int_a^b \int_a^b |f(x) - f(y)|^p \, dx \, dy \le 2 \int_0^{b-a} [\omega(f,t)_p]^p \, dt.$$

## 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Теорема 1.** *Пусть* $f \in L^1[0,1)$ *такова, что 1)* $\hat{f}(n) = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$; *2)* $\int_0^1 |t^{-1}(f(x \ominus t) - f(x))| \ln 2/t \, dt < \infty$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (S_n(f)(x) - f(x))/n$ *сходится абсолютно на* $[0,1)$.

**Доказательство.** Пусть $0 < \delta < \alpha$ (можно считать $\delta < 1$). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $k = k(n) \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $m_{k+1}^{-1} < n^{-\delta} \le m_k^{-1}$. Обозначим $f(x \ominus t) - f(x)$ через $\varphi_x(t)$. Используя равенство $S_n(f)(x) - f(x) = \int_0^1 \varphi_x(t) D_n(t) \, dt$, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(f)(x) - f(x)|}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \int_0^{1/m_{k(n)}} \varphi_x(t) D_n(t) \, dt \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \int_{1/m_{k(n)}}^1 \varphi_x(t) D_n(t) \, dt \right| =: I + J.$$

Сначала оценим $I$ с помощью леммы 1 и перестановки порядка суммирования:

$$I \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \int_0^{1/m_{k(n)}} |\varphi_x(t)||D_n(t)| \, dt \le N \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sum_{i=m_{k(n)}}^{\infty} \int_{1/(i+1)}^{1/i} |t^{-1} \varphi_x(t)| \, dt =$$

$$= N \sum_{i=1}^{\infty} \int_{1/(i+1)}^{1/i} |t^{-1} \varphi_x(t)| \, dt \sum_{m_{k(n)} \le i} n^{-1} \le N \sum_{i=1}^{\infty} \int_{1/(i+1)}^{1/i} |t^{-1} \varphi_x(t)| \, dt \sum_{1 \le n^\delta \le Ni} n^{-1} =$$

$$= O\left( \sum_{i=1}^{\infty} \int_{1/(i+1)}^{1/i} |t^{-1} \varphi_x(t)| \ln(i+1) \, dt \right) = O\left( \int_0^1 |t^{-1} \varphi_x(t)| \ln(2/t) \, dt \right).$$

Таким образом, $I$ конечно в силу условия 2) теоремы. Далее, пусть

$$\gamma_n(x) = \int_{1/m_{k(n)}}^1 \varphi_x(t) D_n(t) \, dt = \int_0^1 \varphi_x(t) X_{[1/m_k, 1)}(t) D_n(t) \, dt.$$

Тогда $X_{[1/m_k,1)} \in \mathcal{P}_{m_k}$, и поэтому произведение $X_{[1/m_k,1)}$ и $D_n$ при $n = jm_k + r$, $j \in \mathbb{N}$, $0 < r \le m_k$, принадлежит $\mathcal{P}_{(j+1)m_k}$. Считая для простоты $f(x) = 0$, получаем, что $\gamma_n(x)$ есть свертка $f$ и $D_n X_{[1/m_k,1)}$, откуда по формуле $(g * h)\hat{}(k) = \hat{g}(k)\hat{h}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, имеем:

$$\gamma_n(x) = \sum_{s=0}^{(j+1)m_k - 1} \hat{f}(s) \int_{1/m_{k(n)}}^1 D_n(t) \overline{\chi_s(t)} \, dt \, \chi_s(x).$$

Здесь и далее $n = jm_k + r$, $j$, $r$ — как выше. Тогда $D_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{j-1} \chi_{im_k}(t) D_{m_k}(t) + \chi_{jm_k}(t) D_r(t)$, причем $D_{m_k}(t) = 0$ на $[1/m_k, 1)$ по лемме 1. Поэтому

$$\gamma_n(x) = \sum_{s=0}^{(j+1)m_k - 1} \hat{f}(s) \int_{1/m_{k(n)}}^1 \chi_{jm_k} D_r(t) \overline{\chi_s(t)} \, dt \, \chi_s(x).$$

Если $s < jm_k$, то $jm_k \ominus s \ge m_k$, и тогда функция $\chi_{jm_k}(x) \overline{\chi_s(x)} = \chi_{jm_k \ominus s}(x)$ ортогональна $D_r(t) X_{[1/m_k,1)}(t)$. В итоге получаем

$$\gamma_n(x) = \sum_{s=jm_k}^{(j+1)m_k - 1} \hat{f}(s) \int_{1/m_{k(n)}}^1 \chi_{jm_k \ominus s} D_r(t) \, dt \, \chi_s(x). \tag{4}$$

В силу условия 1) имеем $|\hat{f}(s)| \le C_1 s^{-\alpha} \le 2^\alpha C_1 / n^\alpha$ при $jm_k \le s, n < (j+1)m_k$. Сумма из (4) содержит не более $m_k$ ненулевых слагаемых, поэтому в силу неравенства $m_k \le n^\delta$ и леммы 1 находим, что

$$|\gamma_n(x)| \le m_k 2^\alpha C_1 n^{-\alpha} \|D_r\|_1 \le C_2 n^{\delta - \alpha} \ln m_k \le C_2 \delta n^{\delta - \alpha} \ln n.$$

Теперь $J = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}|\gamma_n(x)| \le C_2\delta \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1+\delta-\alpha}\ln n < \infty$ и поскольку $I < \infty$, то получаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|S_n(f)(x)| < \infty$ при $f(x) = 0$. Если же $f(x) = a \ne 0$, то рассмотрим функцию $f_1(t) = f(t) - a$. Тогда $f_1(x) = 0$ и $|f(x \ominus t) - f(x)| = |f_1(x \ominus t) - f_1(x)|$, т. е. оба условия 1) и 2) выполнены для $f_1$ и утверждение теоремы доказано для нее. Так как $S_n(f)(x) - f(x) = S_n(f_1)(x)$, то теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть $f \in C^*[0,1)$, $\hat{f}(k) \ge 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{\gamma}\omega_n(f)_\infty$ сходится. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k) < \infty$.*

**Доказательство.** Легко видеть, что

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} \hat{f}(k) = \int_0^1 f(t)D_{m_n}(t)\,dt = m_n \int_0^{1/m_n} f(t)\,dt, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Тогда

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(k) = m_{n+1}\int_0^{1/m_{n+1}} f(t)\,dt - m_n \int_0^{1/m_n} f(t)\,dt =$$

$$= m_{n+1}\int_0^{1/m_{n+1}} \left( f(t) - m_n \int_0^{1/m_n} f(u)\,du \right) dt \le m_{n+1}m_n \int_0^{1/m_{n+1}} \int_0^{1/m_n} |f(t) - f(u)|\,du\,dt \le$$

$$\le N m_n^2 \int_0^{1/m_n} \int_0^{1/m_n} |f(t) - f(u)|\,du\,dt \le N m_n^2 m_n^{-2} \omega_n(f)_\infty = N\omega_n(f)_\infty. \tag{6}$$

Из (6) легко следует, что

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} k^{\gamma}\hat{f}(k) = O\left( m_n^{\gamma} \sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(k) \right) = O(m_n^{\gamma}\omega_n(f)_\infty). \tag{7}$$

Суммируя соотношения (7) по $n \in \mathbb{Z}_+$, получаем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k)$. Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Пусть $f, g \in C^*[0,1)$, причем $f$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Если 1) $\omega_n(g)_\infty \le C\omega_n(f)_\infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$; 2) $\hat{g}(k) \ge -\hat{f}(k)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k)$ также сходится.*

**Доказательство.** Рассмотрим $h = f + g$. Тогда $\omega_n(h)_\infty \le \omega_n(f)_\infty + \omega_n(g)_\infty \le (1 + C_1)\omega_n(f)_\infty$ и $\hat{h}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому функция $h$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{h}(k) < \infty$. Но $|\hat{g}(k)| \le |\hat{h}(k)| + |\hat{f}(k)|$, $k \in \mathbb{Z}_+$, откуда вытекает утверждение следствия.

**Следствие 2.** *Пусть $f \in C^*[0,1)$, $\hat{f}(k) \ge 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-1}E_n(f)_\infty$ сходится. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k) < \infty$.*

Доказательство следствия 2 вытекает из неравенства А. В. Ефимова и известных оценок для сумм рядов (см., например [6, лемма 6]).

**Замечание 2.** Согласно [4, с.95] для сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\hat{f}(k)|$ достаточными являются условия $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}E_n(f)_\infty < \infty$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{1/2}\omega_n(f)_\infty < \infty$. Теорема 2 и следствие 2 дают более слабое достаточное условие, но при $\hat{f}(k) \ge 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Теперь получим аналогичные теореме 2 утверждения для $L^p$-модулей непрерывности.

**Теорема 3.** 1. *Пусть $1 \le p < \infty$, $\gamma > -1/p$, для $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty} \downarrow 0$ выполнены условия леммы 2, $f \in L^p[0,1)$, $\hat{f}(k) \ge 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in H_p^{\omega}$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{\gamma+1/p}\omega_n$ сходится, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}\hat{f}(k) < \infty$;*

2. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\gamma > -1/p$, $f \in L^p[0,1)$, $\hat{f}(k) \ge 0$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{\gamma+1/p}\omega(f,1/m_n)_p$. *Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^\gamma \hat{f}(k) < \infty$.

**Доказательство.** 1. Аналогично (5) с помощью леммы 2 и неравенства Гёльдера получаем:

$$\sum_{k=m_{n-1}}^{m_n-1} k^\gamma \hat{f}(k) \le m_n^\gamma \sum_{k=0}^{m_n-1} \hat{f}(k) = m_n^{\gamma+1}\int_0^{1/m_n} f(t)\,dt \le$$

$$\le m_n^{1+\gamma}\left(\int_0^{1/m_n} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}(m_n^{-1})^{1-1/p} = O(m_n^{\gamma+1/p}\omega_n), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Суммируя соотношения (8) по $n \in \mathbb{N}$, получаем утверждение 1.

2. Аналогично (6) имеем благодаря лемме 3 и неравенству Гёльдера:

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} \hat{f}(k) \le N m_n^2 \int_0^{1/m_n}\int_0^{1/m_n} |f(t)-f(u)|\,du\,dt \le$$

$$\le N m_n^2 (m_n^{-2})^{1-1/p}\left(\int_0^{1/m_n}\int_0^{1/m_n} |f(t)-f(u)|^p\,du\,dt\right)^{1/p} \le$$

$$\le N m_n^{2/p} 2^{1/p}\left(\int_0^{1/m_n} \omega^p(f,t)_p\,dt\right)^{1/p} = O(\omega(f,1/m_n)_p m_n^{1/p}), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{9}$$

Из (9), как и ранее, следует, что

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} k^\gamma \hat{f}(k) = O(m_n^{\gamma+1/p}\omega(f,1/m_n)_p), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{10}$$

Суммируя (10) по $n \in \mathbb{Z}_+$, получаем утверждение 2) теоремы. Теорема доказана.

**Замечание 3.** Поскольку $\omega_n(f)_p$ и $\omega(f,1/m_n)_p$ в общем случае не сравнимы друг с другом, результаты частей 1 и 2 теоремы 3 независимы друг от друга.

**Следствие 3.** *Пусть* $f \in \mathrm{Lip}\,(\alpha,p)$, $0 < \alpha \le 1$, $1 \le p < \infty$, *т.е.* $\omega(f,\delta)_p = O(\delta^\alpha)$, *и* $\hat{f}(k) \ge 0$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^\gamma \hat{f}(k)$ *сходится при* $\gamma < \alpha - 1/p$.

## Библиографический список


1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987. 344 с. [*Golubov B. I., Yefimov A. V., Skvortsov V. A.* Walsh series and transforms. Moskow : Nauka, 1987. 344 pp.]
2. *Goyal O. P.* On the absolute convergence of a series associated with a Fourier series // Mat. vesnik. 1965. Vol. 2(17). P. 85–88.
3. *Goyal O. P.* On the absolute convergence of Fourier series // Mat. vesnik. 1965. Vol. 2(17). P. 88–91.
4. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с. [*Agayev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzhafarli G. M., Rubinshteyn A. I.* Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups. Baku : Elm, 1981. 180 pp.]
5. *Волосивец С. С.* Модифицированные операторы Харди и Харди–Литтлвуда и их поведение в различных пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 1. С. 29–52. [*Volosivets S. S.* Modified Hardy and Hardy-Littlewood operators and their behaviour in various spaces // Izvestiya : Mathematics. 2011. Vol. 75, № 1. P. 29–51.]
6. *Волосивец С. С.* Приближение функций ограниченной $p$-флуктуации полиномами по мультипликативным системам // Analysis Math. 1995. Vol. 21, no 1. P. 61–77. [*Volosivets S. S.* Approximation of Functions of bounded p-fluctuation by means of polynomials with respect to Multiplicative Systems // Analysis Math. 1995. Vol. 21, № 1. P. 61–77.]

УДК 517.518.126

# ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ В ОБОБЩЕННОМ $Q$-ИНТЕГРАЛЕ

**М. П. Ефимова**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: efimova.margarita@gmail.com

В работе получено достаточное условие замены переменной в обобщенном $Q$-интеграле в одномерном случае.

**Ключевые слова:** обобщенный $Q$-интеграл, замена переменной.

**Sufficient Condition for a Change of Variable in Generalized $Q$-integration**

**M. P. Efimova**

A sufficient condition for a change of variable in generalized $Q$-integration in one-dimensional case is proved.

**Key words:** generalized $Q$-integral, change of variable.

## ВВЕДЕНИЕ

В 1929 году в работе [1] E. C. Titchmarsh был определен $Q$-интеграл от функции.

**Определение 1.** Измеримая действительнозначная функция $f$ *$Q$-интегрируема* на отрезке $[a,b]$, если, полагая

$$[f(x)]_{n;0} = \begin{cases} f(x), \text{ при } |f(x)| \le n \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases}$$

имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b [f(x)]_{n;0}\,dx$ существует; этот предел назовем $Q$-интегралом от функции $f$ и обозначим $(Q)\int_a^b f(x)\,dx$.

Введенный интеграл не обладает свойством аддитивности по функциям. В той же работе было рассмотрено следующее сужение $Q$-интеграла:

**Определение 2.** Измеримая действительнозначная функция $f$ *$A$-интегрируема* на отрезке $[a,b]$, если она $Q$-интегрируема и выполнено условие: $\mu\{x \in [a,b] \mid |f(x)| > n\} = o(1/n)$ при $n \to \infty$, где $\mu$ — стандартная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Тогда $(A)\int_a^b f(x)\,dx = (Q)\int_a^b f(x)\,dx$.

Полученный $A$-интеграл аддитивен по функциям.

Его изучению посвящено множество работ (см. [2–5]). Основные результаты об $A$-интеграле содержатся в монографии [6].

Заметим, что исходный $Q$-интеграл E. C. Titchmarsh почти не исследовался в силу его неаддитивности. С другой стороны, свойства $Q$-интеграла также представляют некоторый интерес. Поэтому Т. П. Лукашенко предложил автору рассматривать другую, более естественную срезку. Полученный интеграл оказался обобщением исходного $Q$-интеграла и обладал рядом интересных свойств.

**Определение 3.** Измеримая действительнозначная функция $f$ *$Q$-интегрируема в обобщенном смысле* на отрезке $[a,b]$, если, полагая

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), \text{ при } |f(x)| \le n \\ n\,\mathrm{sgn} f(x), \text{ иначе,} \end{cases}$$

имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b [f(x)]_n\,dx$ существует; этот предел назовем *обобщенным $Q$-интегралом* от функции $f$ и обозначим $(Q_{\text{об}})\int_a^b f(x)\,dx$.

В работе [7] были получены некоторое условие аддитивности $Q_{\text{об}}$-интеграла и следующий аналог критерия Лебега (см. [8, теорема 17.4]):

**Теорема 1** [7]. *Пусть $(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство с мерой, $E$ измеримо, $\mu(E) < \infty$, и $f(x)$ измерима на $E$. Тогда $f(x) \in Q_{\text{об}}(E)$, если и только если сходится ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\mu(F_n^+(f)) - \mu(F_n^-(f))\right],$$

где $F_n^+(f) = \{x \in E \mid f(x) \ge n\}$, $F_n^-(f) = \{x \in E \mid f(x) \le -n\}$.

С этого момента через $\mu$ будем обозначать стандартную меру Лебега на $\mathbb{R}$. Будем называть $E \subseteq [\alpha, \beta]$ множеством полной меры, если $\mu([\alpha, \beta] \setminus E) = 0$.

Вопрос о замене переменной в $A$-интеграле исследовался в работе [9]. Полученный результат формулируется следующим образом:

**Теорема 2** [9]. *Если $\phi(t)$ абсолютно непрерывна, строго возрастает и отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, и некоторое множество $E \subseteq [\alpha, \beta]$ полной меры можно представить в виде $E = E_1 \cup E_2$ таким образом, чтобы для всех $t \in E_1$ выполнялось $0 < m \le \phi'(t) \le M < \infty$, а для всех $t \in E_2$ выполнялось $\phi'(t) = 0$, то для любой функции $f(x)$, $A$-интегрируемой на отрезке $[a, b]$, функция $f(\phi(t))\phi'(t)$ также $A$-интегрируема и выполняется равенство*

$$(A)\int_a^b f(x)\,dx = (A)\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

В настоящей работе получен аналогичный результат для $Q_{\text{об}}$-интеграла и доказана достаточность:

**Теорема 3.** *Пусть $\phi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ — абсолютно непрерывная и строго монотонная функция, $\phi([\alpha, \beta]) = [a, b]$. Тогда для того чтобы функция $f(\phi(t))|\phi'(t)|$ была $Q_{об}$-интегрируема на $[\alpha, \beta]$ и выполнялось равенство*

$$(Q_{об})\int_a^b f(x)\,dx = (Q_{об})\int_\alpha^\beta f(\phi(t))|\phi'(t)|dt \tag{1}$$

*для любой функции $f(x) \in Q_{об}([a, b])$, достаточно, чтобы некоторое множество $E \subseteq [\alpha, \beta]$ полной меры можно было представить в виде $E = E_1 \cup E_2$, $\phi'(t) = m$ при $t \in E_1$, $\phi'(t) = 0$ при $t \in E_2$, где $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — константа.*

Кроме того, в работе доказано, что для $Q_{\text{об}}$-интеграла определения через дискретную и непрерывную срезки эквивалентны (лемма 1). Приведен пример нелинейной функции $\phi(t)$, удовлетворяющей условию теоремы 3, а также пример, показывающий существенность условий, налагаемых на функцию $\phi(t)$.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим $F_n(f) = \{x \in [a, b] \mid |f(x)| \ge n\}$.

**Лемма 1.** *Пусть $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f(x)$ измерима на $[a, b]$. Тогда $f(x) \in Q_{об}([a, b])$, если и только если существует $\lim\limits_{s\to+\infty} \int_a^b [f(x)]_s\,dx$, где $s \in \mathbb{R}_+$.*

**Доказательство.** Пусть существует $\lim\limits_{s\to+\infty} \int_a^b [f(x)]_s\,dx$. Тогда существует и $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b [f(x)]_n\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. $f(x) \in Q_{\text{об}}([a, b])$.

Обратно, пусть $f(x) \in Q_{\text{об}}([a, b])$. Обозначим через $[s]$ целую часть $s$ и рассмотрим выражение $h_s(x) = [f(x)]_s - [f(x)]_{[s]}$. Нетрудно видеть, что $h_s(x) = 0$ при $x \notin F_{[s]}(f)$, $|h_s(x)| \le s - [s] \le 1$ при $x \in F_{[s]}(f)$. Через $\chi_n(x)$ обозначим характеристическую функцию множества $F_n(f)$, $n \ge 0$. Тогда $|h_s(x)| \le \chi_{[s]}(x)$. Следовательно,

$$\left|\int_a^b h_s(x)\,dx\right| \le \int_a^b |h_s(x)|\,dx \le \int_a^b \chi_{[s]}(x)\,dx = \mu(F_{[s]}(f)).$$

Но $\lim\limits_{s\to+\infty} \mu(F_{[s]}(f)) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(F_n(f)) = 0$, откуда $\lim\limits_{s\to+\infty} \int_a^b h_s(x)\,dx = 0$. Тем самым,

$$\lim_{s\to+\infty}\left(\int_a^b [f(x)]_s\,dx - \int_a^b [f(x)]_{[s]}\,dx\right) = \lim_{s\to+\infty}\int_a^b h_s(x)\,dx = 0.$$

Так как

$$\lim_{s\to+\infty}\int_a^b [f(x)]_{[s]}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b [f(x)]_n\,dx = (Q_{\text{об}})\int_a^b f(x)\,dx,$$

то существует $\lim\limits_{s\to+\infty} \int_a^b [f(x)]_s\,dx = (Q_{\text{об}}) \int_a^b f(x)\,dx$. □

**Доказательство основного результата.** Имеем:

$$(Q_{\text{об}})\int_a^b f(x)\,dx = [s \in \mathbb{R}, \text{по лемме } 1] = \lim_{s\to+\infty}\int_a^b [f(x)]_s\,dx =$$

$$= [\text{замена переменной в интеграле Лебега}] = \lim_{s\to+\infty}\int_\alpha^\beta [f(\phi(t))]_s|\phi'(t)|dt =$$

$$= \lim_{s\to+\infty}\left(\int_{E_1}[f(\phi(t))]_s\cdot|m|dt + \int_{E_2}[f(\phi(t))]_s\cdot 0dt\right) =$$

$$= \lim_{s\to+\infty}\int_{E_1}[f(\phi(t))|m|]_{s|m|}dt = \lim_{s\to+\infty}\int_{E_1}[f(\phi(t))|m|]_s dt = \lim_{s\to+\infty}\int_\alpha^\beta [f(\phi(t))|\phi'(t)|]_s dt.$$

Откуда $f(\phi(t))|\phi'(t)| \in Q_{\text{об}}([\alpha,\beta])$ и выполнено (1). □

**Пример 1.** Построим пример нелинейной функции $\phi(t)$ на $[0,1]$, абсолютно непрерывной, строго возрастающей и удовлетворяющей условию существования множеств $E_1$ и $E_2$, $E = E_1\cup E_2 \subseteq [0,1]$, $\mu([0,1]\setminus E) = 0$, $\phi'(t) = 1$ при $t\in E_1$, $\phi'(t) = 0$ при $t \in E_2$.

Занумеруем все рациональные числа, $r_n$ — $n$-е рациональное число. Положим $E_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Big(r_n - \frac{1}{2^{n+2}}, r_n + \frac{1}{2^{n+2}}\Big)$. Тогда $\mu(E_0\cap[a,b]) > 0$ для любого отрезка $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ ненулевой длины, и $\mu(E_0)\le 1/2$. Обозначим $E_1 = E_0\cap[0,1]$. Тогда $\mu(E_1) > 0$, $\mu([0,1]\setminus E_1) = 1-\mu(E_1)\ge 1/2 > 0$.

Пусть $\psi(s) = \chi_{E_1}(s)$ — характеристическая функция множества $E_1$, $\phi(t) = \int_0^t\psi(s)\,ds$. Отсюда, $\phi(t)$ абсолютно непрерывна. Тогда для любых $t_1 < t_2$ имеем $\phi(t_2)-\phi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\psi(s)\,ds = \mu([t_1,t_2]\cap E_1) > 0$. Значит, функция $\phi(t)$ строго возрастает.

Так как $\psi(s)$ суммируема, то $\dfrac{d}{dt}\int_0^t\psi(s)\,ds = \psi(t)$ почти всюду на $[0,1]$ (см. [10, гл. VI, § 3, теорема 1]). Тем самым, $\phi'(t) = \psi(t)$, $\phi'(t) = 1$ почти всюду на $E_1$, $\phi'(t) = 0$ почти всюду на $[0,1]\setminus E_1$.

Рассмотрим множества $\widetilde{E}_1 = \{t\in[0,1] \mid \phi'(t) = 1\}$, $\widetilde{E}_2 = \{t\in[0,1]\mid \phi'(t) = 0\}$. Тогда $\mu([0,1]\setminus(\widetilde{E}_1\cup\widetilde{E}_2)) = 0$. Нелинейность функции $\phi$ очевидна. □

**Пример 2.** Рассмотрим функции

$$g(x) = \begin{cases}\dfrac{n}{2}, & x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right],\\ 0, & x\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty),\end{cases}\qquad h(x) = g(x)-g(-x).$$

Пусть, кроме того, $\phi\colon [-1,1/2]\to[-1,1]$ задана следующим образом:

$$\phi(t) = \begin{cases} t, & t\le 0,\\ 2t, & t > 0.\end{cases}$$

Тогда $h(x)\in Q_{\text{об}}([-1,1])$, но $h(\phi(t))|\phi'(t)| \notin Q_{\text{об}}([-1,1/2])$.

Имеем $(Q_{\text{об}})\int_{-1}^1 h(x)\,dx = 0$. Отметим, что $\mu(\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)\ge n/2\}) = 1/\sqrt{n}$. Рассмотрим $F_n^\pm = F_n^\pm[h(\phi(t))\phi'(t)]$:

$$\mu(F_n^+) = \mu(F_n^+(h(2t)\cdot 2)) = \mu(\{t\in[-1,1]\mid 2h(2t)\ge n\}) = \frac{1}{2}\mu\left(\{t\in\mathbb{R}\mid h(t)\ge n/2\}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

$$\mu(F_n^-) = \mu(F_n^-(h(t))) = \mu\left(\{t\in[-1,1]\mid h(t)\le -2n/2\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

$\mu(F_n^+)-\mu(F_n^-) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, и $h(\phi(t))|\phi'(t)|\notin Q_{\text{об}}([-1,1/2])$ по теореме 2. □

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Т. П. Лукашенко за постановку задачи и ценные замечания.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 11-01-00321).

## Библиографический список

1. *Titchmarsh E. C.* On conjugate functions // Proc. London Math Soc. 1929. Vol. 29. P. 49–80.
2. *Ульянов П. Л.* Некоторые вопросы $A$-интегрирования // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102, № 6. С. 1077–1080. [*Ul'yanov P. L.* Certain Questions of $A$-Integration // Sov. Phys. Dokl. 1955. Vol. 102, № 6. P. 1077—1080.]

3. *Ульянов П. Л.* $A$-интеграл и его применение к теории тригонометрических рядов // УМН. 1955. Т. 10, № 1. С. 189–191 [*Ul'yanov P. L.* The $A$-Integral and its Application in the Theory of Trigonometric Series // UMN. 1955. Vol. 10, № 1. P. 189–191.]
4. *Ульянов П. Л.* $A$-интеграл и сопряженные функции // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. 1956. Т. VIII, вып. 181. С. 139–157. [*Ul'yanov P. L.* The $A$-Integral and Conjugate Functions // Uchen. Zap. Mosk. Gos. Univ. 1956. Vol. VIII, iss. 181. P. 139–157.]
5. *Лукашенко Т. П.* Об $A$-интегрируемости функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1982. № 6. С. 59–63. [*Lukashenko T. P.* On the $A$-Integrability of Functions // Vestn. Mosk. Gos. Univ. Ser. 1. Matem. Mekh. 1982. № 6. P. 59–63.]
6. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с. [*Bari N. K.* Trigonometric Series. Moscow : Fizmatgiz, 1961. 936 p.]
7. *Ефимова М. П.* О свойствах $Q$-интеграла // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 3. С. 340–350. [*Efimova M. P.* On the Properties of the $Q$-Integral // Math. Notes. 2011. Vol. 90, № 3. P. 322—332.]
8. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Мера и интеграл. М. : Факториал, 1998. 160 с. [*D'yachenko M. I., Ul'yanov P. L.* Measure and the Integral. Moscow : Faktorial, 1998. 160 p.]
9. *Бонди И. Л.* Замена переменной в $A$-интеграле // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. 1962. № 188. С. 3–21. [*Bondi I. L.* The Change of Variable in the $A$-Integral // Uchen. Zap. Mosk. Gos. Ped. Inst. 1962. № 188. P. 3–21.]
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд. М. : Наука, 1976. 543 с. [*Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Mineola; New York : Dover Publications, 1999.]

УДК 517.95 517.984

# О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КдФ

**М. Ю. Игнатьев**

Саратовский государственный университет
E-mail: IgnatievMU@info.sgu.ru

В работе рассматривается общее уравнение иерархии Кортевега-де Фриза (КдФ). Изучаются краевые задачи для данного уравнения с неоднородными граничными условиями специального вида. Построен широкий класс решений изучаемых задач. Построение основано на идеях метода обратной спектральной задачи.

**Ключевые слова:** иерархия КдФ, краевые задачи, интегрируемость, метод обратной задачи.

**On Solutions of Some Boundary Value Problems for General KdV Equation**

**M. Yu. Ignatyev**

This paper deals with the general equation of Korteweg-de Vries (KdV) hierarchy. A boundary-value problem with certain inhomogeneous boundary conditions is studied. We construct the wide class of solutions of the problem using the inverse spectral method.

**Key words:** KdV hierarchy, boundary–value problems, integrability, inverse spectral method.

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, что исследование краевых и смешанных задач для интегрируемых нелинейных уравнений сталкивается со значительными трудностями принципиального характера. Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в этой области в последние годы [1–4], в общем случае здесь не удается применить метода обратной спектральной задачи с той же эффективностью, как в случае задачи Коши на всей оси: процедура построения решения включает шаг, состоящий в решении нетривиальной существенно нелинейной задачи. Исключение составляют задачи с граничными условиями специального вида [5–7], которые часто называют интегрируемыми, или линеаризуемыми. В этом случае удается, используя идеи метода обратной задачи, построить широкие классы решений краевых задач [7, 8], в ряде случаев дать (полное или частичное) решение смешанных задач [1–3, 9], исследовать поведение решений на больших временах[4]. Отметим, что исследование краевых и смешанных задач существенным образом опирается на структуру матриц, входящих в представление нулевой кривизны для данного уравнения. Поэтому все полученные на данный момент результаты относятся к тому или иному конкретному интегрируемому уравнению и не могут быть непосредственно обобщены на какие-либо классы уравнений.

В настоящей работе подход, основанный на идеях метода обратной спектральной задачи, применяется к исследованию некоторых краевых задач для класса уравнений, являющегося подмножеством иерархии КдФ. Построен класс точных решений, включающий в себя, в частности, солитонные и конечнозонные решения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим общее уравнение КдФ (см., например, [10]):

$$\dot{q} = \sum_{\nu=0}^{s} C_\nu X_\nu(q). \tag{1}$$

Здесь $X_\nu(q)$ — многочлены относительно $q$ и ее производных, определяемые следующим образом:

$$X_\nu = -P'_{\nu+1}, \qquad P_1 = -\frac{1}{2}q, \qquad P'_{\nu+1} = HP_\nu, \qquad H = -\frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3} + 2q\frac{d}{dx} + q'.$$

Введем многочлены $\beta_n(x;q)$ относительно $q$ и ее производных по следующим рекуррентным формулам:

$$\beta_1 = q, \qquad \beta_{n+1} = -\beta'_n - \sum_{\nu=1}^{n-1} \beta_\nu \beta_{n-\nu}.$$

Определим $b_n(q) := \beta_n(0;q)$. Ясно, что $b_n(q)$ — многочлены относительно значений $q$ и ее производных при $x = 0$.

Объектом изучения в данной работе является краевая задача для уравнения (1) с граничными условиями:

$$b_n(q) = a_n, \qquad n = \overline{1, 2s-1}, \tag{2}$$

где $a_n$ — вещественные числа, которые определяются следующим образом.

Предположим, что все корни многочлена $\varphi(\rho) = -\frac{1}{2}\rho \sum\limits_{\nu=0}^{s} C_\nu \left(2\rho^2\right)^\nu$ чисто мнимые, иначе говоря, $\varphi$ может быть записан в следующем виде:

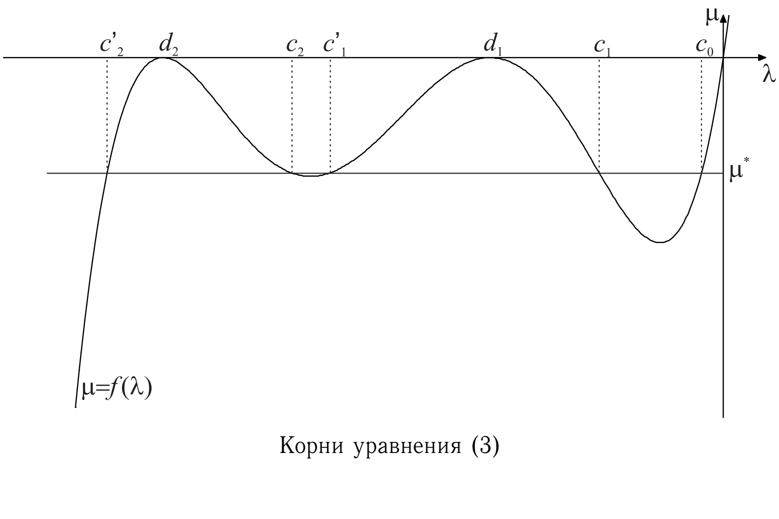
$$\varphi(\rho) = 4^s \rho \prod_{\nu=1}^{s} \left(\rho^2 - d_\nu\right),$$

где $d_n = -\delta_n^2$, $0 < \delta_1 < \ldots < \delta_s$. Введем многочлен $f(\lambda) := 16^s \lambda \prod\limits_{\nu=1}^{s} (\lambda - d_\nu)^2$ и рассмотрим уравнение

$$f(\lambda) = \mu. \tag{3}$$

Обозначим через $\mu^-$ точную нижнюю грань множества таких $\mu$, что все корни уравнения (3) вещественны. Пусть выбрано произвольное $\mu^* \in (\mu^-, 0)$. Рассмотрим (3) с $\mu = \mu^*$ и обозначим его корни $0 > c_0 > c_1 > c'_1 > \ldots > c_s > c'_s$ (рисунок). Заметим, что $f'(c_\nu) < 0$. Определим многочлен $g(\lambda) := 4^s \prod\limits_{\nu=1}^{s} (\lambda - c_\nu)$ и числа $a_n$ как коэффициенты следующего ряда Лорана:

$$i\frac{\varphi(\rho)}{g(\rho^2)} = i\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(2i\rho)^n}.$$




Корни уравнения (3)

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Напомним [11], что класс $B(\mu)$, $\mu \in (-\infty, 0)$, определяется как множество быстро убывающих на $\pm\infty$ вещественнозначных безотражательных потенциалов, все собственные значения которых лежат на $[\mu, 0)$. Класс $\overline{B(\mu)}$ определяется как замыкание $B(\mu)$ в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах вещественной оси, $\tilde{B} := \bigcup\limits_{\mu<0} \overline{B(\mu)}$. Отметим, что помимо безотражательных потенциалов (соответствующих солитонным решениям уравнений иерархии КдФ) класс $\mathbf{R} + \tilde{B}$ содержит также все конечнозонные потенциалы.

Для заданной вещественной функции $q(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, рассмотрим операторы Штурма–Лиувилля $L_\pm$, порожденные на полуосях $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ дифференциальным выражением $\ell y = -y'' + q(x)y$ и краевым условием $y(0) = 0$. Через $m_\pm(\lambda)$ обозначим функции Вейля–Титчмарша операторов $L_\pm$.

*Функцией Вейля–Марченко* назовем функцию, построенную следующим образом:

$$m(\rho) = \begin{cases} m_+(\rho^2), & \operatorname{Im}\rho > 0, \\ m_-(\rho^2), & \operatorname{Im}\rho < 0. \end{cases}$$

Известно [11], что для функций класса $\tilde{B}$ соответствующие функции Вейля–Марченко голоморфны вне некоторого отрезка мнимой оси. Более точно, заданная функция $m$ является функцией Вейля–Марченко для некоторой $q \in \overline{B(-\mu^2)}$ тогда и только тогда, когда она допускает представление

$$m(\rho) = i\rho + i\int_{-a}^{a} \frac{d\sigma(\xi)}{\rho - i\xi},$$

где $\sigma$ — неубывающая функция, $a \le \mu$ и $\int_{-a}^{a} d\sigma(\xi) \le \mu^2$.

## 3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

**Теорема 1.** *Пусть $Q$ — произвольная функция из класса $\overline{B(\mu_*)}$, $\mu_* \in (\mu^*, 0)$ и пусть $M(T, \cdot)$ — функция Вейля–Марченко для $Q_T(t) := Q(t + T)$. Далее, определим $w$ как решение задачи Коши:*

$$\dot{w} + w^2 = Q(t) - \mu^*, \qquad w(0) = w_0 \tag{4}$$

*с произвольной $w_0 \in (M(0, i\sqrt{|\mu^*|}), M(0, -i\sqrt{|\mu^*|}))$. Тогда функция $m(t, \cdot)$, определяемая равенством*

$$m(t, \rho) := \frac{M(t, \varphi(\rho)) - w(t)}{g(\rho^2)}, \tag{5}$$

*является функцией Вейля–Марченко для некоторой $q(\cdot, t) \in \tilde{B}$ и функция $q(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t \ge 0$, является решением краевой задачи* (1), (2) *на каждой из полуосей $x \in (-\infty, 0]$, $x \in [0, \infty)$.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и и Национального научного совета Тайваня* (*проекты* 10-01-00099, 10-01-92001-ННС).

### Библиографический список

1. *Fokas A. S.* Integrable Nonlinear Evolution Equations on the Half-Line // Comm. Math. Phys. 2002. Vol. 230. P. 1–39.

2. *Fokas A. S, Its A. R., Sung L. Y.* The Nonlinear Schroedinger Equation on the Half-Line // Nonlinearity. 2005. Vol. 18. P. 1771–1822.

3. *Boutet de Monvel A., Fokas A. S., Shepelsky D.* Integrable Nonlinear Evolution Equations on a Finite Interval // Comm. Math. Physics. 2006. Vol. 263, № 1. P. 1–133.

4. *Fokas A. S., Lenells J.* Explicit soliton asymptotics for the Korteweg–de Vries equation on the half-line // Nonlinearity. 2010. Vol. 23. P. 937–976.

5. *Склянин Е. К.* Граничные условия для интегрируемых уравнений // Функц. анализ и прил. 1987. Т. 21. С. 86—87. [*Sklyanin E.* Boundary conditions for integrable equations // Funct. Anal. Appl. 1987. Vol. 21. P. 86–87.]

6. *Adler V., Gurel B., Gurses M., Habibullin I.* Boundary conditions for integrable equations // J. Phys. A. 1997. Vol. 30, № 10. P. 3505–3513.

7. *Адлер В. Э., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б.* Краевая задача для уравнения КдФ на полуоси // Теорет. и мат. физ. 1997. Т. 110, № 1. С. 78–90. [*Adler V., Khabibullin I., Shabat A.* A boundary value problem for the KdV equation on a half-line // Theoret. and Math. Phys. 1997. Vol. 110, № 1. P. 78–90.]

8. *Ignatyev M. Yu.* On solutions of an integrable boundary–value problem for the KdV equation on the semi-axis. Preprint SM-DU-732. Duisburg, 2001. 18 p.

9. *Игнатьев М. Ю.* О решении одной смешанной задачи для уравнения КдФ на полуоси // Spectral and Evolution Problems : Proc. of the Twentieth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 20. Simferopol, 2010. P. 141–144. [*Ignatyev M.* On solution

of one initial boundary value problem for KdV equation on the semi-axis // Spectral and Evolution Problems : Proc. of the Twentieth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 20. Simferopol, 2010. P. 141–144.]

10. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М. : Наука, 1984. 240 с. [*Levitan B. M.* Inverse Sturm–Liouville Problems. Utrecht : VNU Sci. Press, 1987. 240 p.]

11. *Marchenko V. A.* 1991 The Cauchy problem for the KdV equation with non-decreasing initial data // What is integrability? Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1991. P. 273–318.

УДК 517.544

# О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ НА НЕГЛАДКОЙ ДУГЕ

**Б. А. Кац[1], С. Р. Миронова[2], А. Ю. Погодина[3]**

[1]Казанский (приволжский) федеральный университет
E-mail: katsboris877@gmail.com
[2]Казанский научно-исследовательский технический университет
E-mail: srmironova@yandex.ru
[3]Саратовский государственный технический университет
E-mail: apogodina@yandex.ru

Исследуется разрешимость краевой задачи о скачке на негладкой дуге в случае, когда скачок имеет особенность на одном из концов этой дуги.

**Ключевые слова:** негладкая дуга, интеграл типа Коши, задача о скачке.

**Solvability of the Jump Problem on Non-smooth Arc**

**B. A. Kats, S. R. Mironova, A. Yu. Pogodina**

We study solvability of the jump problem on non-smooth arc for the case, where the jump has a singularity at one of end points of the arc.

**Key words:** non-smooth arc, Cauchy type integral, jump problem.

Пусть $\Gamma$ есть простая жорданова дуга с началом в точке $O$ и концом в точке 1. Задача о скачке — это краевая задача о нахождении голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, имеющей в каждой точке $t \in \Gamma \setminus \{0,1\}$ предельные значения слева и справа $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ соответственно, связанные краевым условием:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in \Gamma \setminus \{0,1\}, \tag{1}$$

а также удовлетворяющей оценкам

$$|\Phi(z)| \le C|z|^{-\gamma}, \quad |\Phi(z)| \le C|z-1|^{-\gamma}, \tag{2}$$

где $\gamma = \gamma(\Phi) \in [0,1)$. Эта задача имеет большое значение в теории краевых задач (см., напр., [1, 2]).

В данной работе рассматривается случай, когда скачок $g$ имеет в точке 0 особенность порядка $p$, т. е. $|g(t)| \le C|t|^{-p}$, $0 < p < 1$, а вне любой окрестности начала координат удовлетворяет условию Гёльдера. В случае, когда дуга $\Gamma$ кусочно-гладкая, решение такой задачи дается интегралом типа Коши:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)dt}{t-z}, \tag{3}$$

причем в точке 0 функция $\Phi$ также имеет особенность порядка $p$.

Здесь мы покажем, что на негладкой дуге порядок этой особенности может возрасти и получим достаточное условие разрешимости задачи о скачке на негладкой дуге.

Пусть $A$ есть компактное множество на комплексной плоскости. Пространство Гёльдера $H_\nu(A)$, $\nu \in (0,1]$, состоит из заданных на $A$ функций $f$, для которых конечна величина

$$h_\nu(f,A) := \sup\{\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t'-t''|^\nu} : t', t'' \in A, t' \ne t''\}.$$

Для демонстрации феномена повышения порядка особенности интеграла типа Коши за счет негладкости контура мы построим следующее двупараметрическое семейство дуг. Фиксируем значения $\alpha \in (0,1)$ и $\beta > 1$ и положим $a_k = \zeta^{-1}(\alpha+1)k^{-\alpha-1}$, $x_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. Тогда $x_1 = 1$, $x_n \asymp n^{-\alpha}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ расходится. Далее, положим $x'_n = x_n - a_n^\beta$; очевидно, $x'_n > x_{n+1}$. Рассмотрим вертикальные отрезки $\sigma_n := \{z = x_n + iy : 0 \le y \le x'_n\}$ и $\sigma'_n := \{z = x'_n + iy : 0 \le y \le x'_n\}$, и горизонтальные отрезки $\rho_n := \{z = x + ix'_n : x'_n \le x \le x_n\}$ и $\rho'_n := \{z = x : x_{n+1} \le x \le x'_n\}$ (отрезки $\rho'_n$ лежат на действительной оси). Из всех этих отрезков составим зигзагообразную линию $\Gamma$; при её обходе от точки 1 к точке 0 прямолинейные отрезки проходятся в порядке $\sigma_1, \rho_1, \sigma'_1, \rho'_1, \sigma_2, \rho_2, \sigma'_2, \rho'_2, \dots$. В дальнейшем будем обходить её от 0 к 1.

Теперь определим на отрезке $[0,1]$ функцию $f(x)$, полагая $f(0) = 0$, $f(x_n) = 0$, $f(x'_n) = -a_n^\nu$; на отрезках $[x_{n+1}, x'_n]$ и $[x'_n, x_n]$ эта функция линейна. Нетрудно убедиться, что $f \in H_\nu([0,1])$. Положим $g(z) = |z|^{-p} f(x), z = x + iy$.

Если $I$ есть проходимый от 0 к 1 отрезок $[0,1]$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{g(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)dt}{t-z} = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_j} \frac{g(t)dt}{t-z},$$

где $R_j$ есть прямоугольник $R_j = \{z = x + iy : x'_j < x < x_j,\ 0 < y < x'_j\}$, и по формуле Грина

$$\frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{g(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)dt}{t-z} = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\pi}\iint_{R_j} \frac{\partial g}{\partial \overline{t}}\frac{dx_t dy_t}{t-z},$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$. Очевидно,

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{pf(x)}{\overline{z}|z|^p} + |z|^{-p}f'(x)\right),$$

причем первое слагаемое интегрируемо в конечной части плоскости при любом $p < 1$. Второе слагаемое в прямоугольнике $R_j$ не превосходит $(x'_j)^{-p} a_j^{\beta(\nu-1)}$. Поскольку площадь этого прямоугольника равна $x'_j a_j^\beta$, то это слагаемое интегрируемо, если сходится ряд

$$\sum_{j=1}^\infty a_j^{\beta\nu}(x'_j)^{1-p} < C\sum_{n=1}^\infty n^{-\beta\nu(\alpha+1)-\alpha(1-p)},$$

т. е. при

$$\beta\nu(\alpha+1) + \alpha(1-p) > 1. \tag{4}$$

Итак, при условии (4) интеграл типа Коши (3) сходится. Вопрос о его сходимости встает в связи с тем, что длина построенной нами кривой $\Gamma$ бесконечна.

Пусть теперь $\xi$ — малое положительное число. Оценим снизу вещественную часть величины

$$\Psi(z) := \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{\pi}\iint_{R_j} \frac{|t|^{-p}f'(x_t)dx_t dy_t}{t-z}$$

при $z = -\xi$. Нетрудно показать, что при $t \in R_j$, $j = 1, 2, \dots$, мы имеем $\operatorname{Re}\dfrac{1}{t+\xi} \ge \dfrac{1}{2(x_t+\xi)}$ и отсюда

$$\operatorname{Re}\Psi(-\xi) \ge \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^\infty a_j^{\beta(\nu-1)}\iint_{R_j}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{p/2}(x+\xi)}.$$

Далее, внутри угла $x > y > 0$ имеем $|z| < \sqrt{2}x$ и отсюда

$$\operatorname{Re}\Psi(-\xi) \ge \frac{1}{2^{1+p/2}\pi}\sum_{j=1}^\infty a_j^{\beta(\nu-1)}\iint_{R_j}\frac{dxdy}{x^p(x+\xi)} = \frac{1}{2^{1+p/2}\pi}\sum_{j=1}^\infty a_j^{\beta(\nu-1)}x'_j\int_{x'_j}^{x_j}\frac{dx}{x^p(x+\xi)}.$$

Действуя аналогично (см., напр., [3]), получаем, что при $\alpha(1-p) - (\alpha+1)\beta(1-\nu) < 1$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\Psi(-\xi) \ge C\xi^{-p-\delta}, \qquad \delta = \alpha^{-1}(1 + (\alpha+1)\beta(1-\nu)).$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{I}\frac{g(t)dt}{t-z}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p}{2\pi}\iint_{R_j}\frac{f(x_t)}{\overline{t}|t|^p}\frac{dx_t dy_t}{t-z}-\Psi(z),$$

причем первое и второе слагаемые правой части имеют в точке 0 особенности порядка $p$ (для первого слагаемого этот результат можно найти в [1, 2], а для второго это нетрудно получить с помощью известных интегральных неравенств, см., напр., [4]), то интеграл типа Коши (3) имеет в этой точке особенность порядка не ниже $p+\delta$. Легко убедиться, что этот порядок может превосходить единицу, и в этом случае задача о скачке (1) не имеет решений в классе функций, удовлетворяющих условию (2). Тем самым доказана

**Теорема 1.** *Существует негладкая дуга $\Gamma$ с началом в точке 0 и концом в точке 1 и заданная на ней функция $g(t)$ с особенностью порядка $p$ в начальной точке кривой, удовлетворяющая условию Гёльдера в остальных её точках, для которых задача о скачке* (1) *не имеет решений в классе функций, удовлетворяющих условию* (2).

В связи с этим возникает потребность в достаточных условиях разрешимости этой задачи. Сейчас мы приведем одно такое условие. Опишем сначала класс кривых, к которому оно применимо.

Простую жорданову дугу $\Gamma$ с началом в точке 0 и концом в точке 1 мы относим к классу $Z_0$, если существует гладкая дуга $\Gamma'$ с теми же началом и концом такая, что симметрическая разность $\Gamma\triangle\Gamma'$ представляет собой счетное семейство замкнутых кусочно-гладких кривых, ограничивающих попарно не пересекающиеся области с единственной точкой сгущения в начале координат.

Кроме того, нам понадобится так называемая размерность Минковского (она же box dimension) кривой $\Gamma$. Её определение можно найти, например, в [5].

**Теорема 2.** *Пусть дуга $\Gamma$ имеет размерность Минковского $d<2$ и принадлежит классу $Z_0$, а заданная на ней функция $g(t)$ представима в виде $g(t)=|t|^{-p}f(t)$, где $f\in H_\nu(\Gamma)$, $p<1$ и $\nu>d/2$. Тогда задача о скачке* (1) *имеет решение в классе функций, удовлетворяющих условию* (2).

**Доказательство.** Доказательство в целом аналогично доказательству разрешимости задачи о скачке на замкнутой неспрямляемой кривой в работе [3]. $\square$

### Библиографический список


1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с. [*Gakhov F.* Boundary value problems. Oxford : Permagon Press, 1966.]
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1962. 600 с. [*Muskhelishvili N. I.* Singular Integral Equations / ed. by J. R. M. Radok. Leyden : Noordhoff Intern. Publish., 1977.]
3. *Кац Б. А.* Задача Римана на замкнутой жордановой кривой // Изв. вузов. Математика. 1983. № 4. С. 68–80. [*Kats B. A.* The Riemann problem on a closed Jordan curve // Soviet Math. (Izv. VUZ. Matematika). 1983. Vol. 27, № 4. P. 83–98.]
4. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические фукции. М. : Наука, 1988. 509 с. [*Vekua I. N.* Generalized Analytic Functions. Oxford : Pergamon Press, 1962.]
5. *Федер Е.* Фракталы. М. : Мир, 1991. 282 с. [*Feder J.* Fractals. New York : Plenum Press, 1988.]


УДК 517.956.3

# ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

**Е. А. Козлова**

Самарский государственный технический университет
E-mail: leni2006@mail.ru

Рассмотрена задача граничного управления для системы уравнений гиперболического типа. С помощью метода Римана построены управляющие функции, переводящие объект, описываемый системой, из заданного начального состояния в финальное.

**Ключевые слова:** граничное управление, система уравнений гиперболического типа, метод Римана.

**Boundary Control Problem for the Hyperbolic System**

**E. A. Kozlova**

A boundary control problem for the hyperbolic system was considered. The control functions transferring the object described by this system from the given initial state to the final state were constructed using the Riemann method.

**Key words:** boundary control, hyperbolic system, Riemann method.

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач современной теории управления является задача управления поведением объектов, изменение состояния которых описывается с помощью уравнений с частными производными. Цель управления состоит в том, чтобы перевести изучаемый объект из одного известного состояния в другое, влияя на некоторые его параметры. Впервые подобные задачи были сформулированы в работах А. Г. Бутковского [1] и J.-L. Lions [2].

В качестве управляющей функции может быть использована правая часть уравнения или системы уравнений (см., например, [3]). Далее будем рассматривать граничное управление, т. е. управление посредством граничных условий. В последние годы появились работы В. А. Ильина и Е. И. Моисеева, посвященные исследованию задач граничного управления для уравнения колебаний струны (в частности, [4–7]), в которых были получены в явном виде управляющие функции, переводящие струну из заданного начального состояния в заданное финальное состояние за определенное время. При этом рассматривались различные типы граничных управлений. Были исследованы задачи для уравнений колебаний неоднородной струны [8], радиально-симметричной мембраны [9], телеграфного уравнения [10].

Задачи, поставленные для уравнения колебаний струны, были обобщены на случай системы уравнений А. А. Андреевым и С. В. Лексиной в [11, 12].

Настоящая работа посвящена задаче граничного управления для системы уравнений с частными производными вида

$$u_{tt} - Au_{xx} + Cu = 0, \tag{1}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots, u_n(x,t))^T$ — вектор-функция, $A$, $C$ — постоянные квадратные матрицы порядка $n$, для которых верно $AC = CA$. Рассмотрим случай, когда матрица $A$ имеет различные положительные собственные значения $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ и выполняется условие $\lambda_1^2 > \ldots > \lambda_n^2$.

Пусть в прямоугольнике $Q = [0,l] \times [0,T]$ при $T > l/\lambda_n$ задана система (1) и выполняются следующие начальные условия:

$$u(x,0) = \varphi^0(x), \qquad u_t(x,0) = \psi^0(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и финальные условия:

$$u(x,T) = \varphi^1(x), \qquad u_t(x,T) = \psi^1(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Найти граничные управления:

$$\mu(t) = u(0,t), \qquad \nu(t) = u(l,t), \qquad 0 \le t \le T.$$

Здесь $\varphi^0(x)$, $\psi^0(x)$, $\varphi^1(x)$, $\psi^1(x)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ — вектор-функции размерности $n$, $\varphi_k^i(x) \in C^2[0,l]$, $\psi_k^i(x) \in C^1[0,l]$, $(i = 0,1)$; $\mu_k(t), \nu_k(t) \in C[0,T]$, $k = \overline{1,n}$.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Известно [13], что существует невырожденная матрица $S$ такая, что

$$S^{-1}AS = J_A,$$

где $J_A = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2\}$ — жорданова нормальная форма матрицы $A$. Матрица перехода $S$ составляется из собственных векторов матрицы $A$.

Матрицы $A$ и $C$ коммутируют, собственные значения $A$ различны, поэтому $C$ является простой и имеет тот же набор собственных векторов, что и $A$ [13]. Таким образом, обе рассматриваемые матрицы приводятся к жордановой нормальной форме с помощью одного преобразования подобия: $S^{-1}CS = J_C$. Отметим, что $J_C = \mathrm{diag}\,\{\mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_n\}$.

Выполним замену $w(x,t) = S^{-1}u(x,t)$, которая приведет систему (1) к виду

$$w_{tt} - J_A w_{xx} + J_C w = 0, \tag{4}$$

начальные и финальные условия сведутся к

$$w(x,0) = S^{-1}\varphi^0(x) = \tilde{\varphi}^0(x), \qquad w_t(x,0) = S^{-1}\psi^0(x) = \tilde{\psi}^0(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{5}$$

и
$$w(x,T)=S^{-1}\varphi^1(x)=\tilde\varphi^1(x),\qquad w_t(x,T)=S^{-1}\psi^1(x)=\tilde\psi^1(x),\qquad 0\le x\le l,\tag{6}$$
соответственно, а граничные управления примут вид
$$\tilde\mu(t)=w(0,t)=S^{-1}\mu(t),\qquad \tilde\nu(t)=w(l,t)=S^{-1}\nu(t),\qquad 0\le t\le T.$$

Из (4)–(6) для $k$-й компоненты вектор-функции $w(x,t)$ получаем задачу управления в области $Q$, состоящую из уравнения
$$(w_k)_{tt}-\lambda_k^2(w_k)_{xx}+c_kw_k=0,\tag{7}$$
начальных условий:
$$w_k(x,0)=\tilde\varphi_k^0(x),\qquad (w_k)_t(x,0)=\tilde\psi_k^0(x),\qquad 0\le x\le l,\tag{8}$$
и финальных условий:
$$w_k(x,T)=\tilde\varphi_k^1(x),\qquad (w_k)_t(x,T)=\tilde\psi_k^1(x),\qquad 0\le x\le l.\tag{9}$$

Уравнение (7) является уравнением гиперболического типа второго порядка и имеет два семейства характеристик $x+\lambda_kt=C_1$ и $x-\lambda_kt=C_2$ [14].

Характеристики $x-\lambda_kt=l-\lambda_kT$ и $x+\lambda_kt=\lambda_kT$ разбивают прямоугольник $Q$ на четыре области:
$$\Delta_k^1=\Big\{l-\lambda_k(T-t)\le x\le\lambda_k(T-t),\ 0\le x\le l,\ 0\le t\le T-\frac{l}{2\lambda_k}\Big\},$$
$$\Delta_k^2=\Big\{T+\frac{x-l}{\lambda_k}\le t\le T-\frac{x}{\lambda_k},\ 0\le x\le l/2\Big\},$$
$$\Delta_k^3=\Big\{\lambda_k(T-t)\le x\le l-\lambda_k(T-t),\ T-\frac{l}{2\lambda_k}\le t\le T\Big\},$$
$$\Delta_k^4=\Big\{T-\frac{x}{\lambda_k}\le t\le T+\frac{x-l}{\lambda_k},\ l/2\le x\le l\Big\}.$$

Для построения решения задачи (7)–(9) расширим промежуток задания функций $\tilde\varphi_k^0(x)$, $\tilde\psi_k^0(x)$ до отрезка $[l-\lambda_kT,\lambda_kT]$ и положим $\Delta_k^1=\{l-\lambda_k(T-t)\le x\le\lambda_k(T-t),0\le t\le T-l/(2\lambda_k)\}$. Теперь в области $\Delta_k^1$ функция $w_k(x,t)$, как решение задачи Коши, определена начальными условиями (8):
$$w_k(x,t)=\frac{\tilde\varphi_k^0(x+\lambda_kt)+\tilde\varphi_k^0(x-\lambda_kt)}{2}-\frac{c_kt}{4\lambda_k}\int\limits_{x-\lambda_kt}^{x+\lambda_kt}{}_0F_1\left(2;\frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((x-z)^2-\lambda_k^2t^2\right)\right)\tilde\varphi_k^0(z)\,dz+$$
$$+\frac{1}{2\lambda_k}\int\limits_{x-\lambda_kt}^{x+\lambda_kt}{}_0F_1\left(1;\frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((x-z)^2-\lambda_k^2t^2\right)\right)\tilde\psi_k^0(z)\,dz,\tag{10}$$
а в области $\Delta_k^3$ — финальными условиями (9):
$$w_k(x,t)=\frac{\tilde\varphi_k^1(x+\lambda_k(T-t))+\tilde\varphi_k^1(x-\lambda_k(T-t))}{2}-$$
$$-\frac{c_k(T-t)}{4\lambda_k}\int\limits_{x-\lambda_k(T-t)}^{x+\lambda_k(T-t)}{}_0F_1\left(2;\frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((x-z)^2-\lambda_k^2(T-t)^2\right)\right)\tilde\varphi_k^1(z)\,dz-$$
$$-\frac{1}{2\lambda_k}\int\limits_{x-\lambda_k(T-t)}^{x+\lambda_k(T-t)}{}_0F_1\left(1;\frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((x-z)^2-\lambda_k^2(T-t)^2\right)\right)\tilde\psi_k^1(z)\,dz.\tag{11}$$

Здесь ${}_0F_1(\alpha;\sigma)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [15]. Решения построены методом Римана [14].

Поскольку точка $(l/2,T-l/(2\lambda_k))$ принадлежит одновременно $\Delta_k^1$ и $\Delta_k^3$, продолжения $\tilde\varphi_k^0(x)$, $\tilde\psi_k^0(x)$ необходимо выбирать таким образом, чтобы решения двух задач Коши в данной точке совпадали.

Введем константы $a_k^{00} = l - \lambda_k T$, $a_k^{10} = 0$, $a_k^{01} = \lambda_k T$, $a_k^{11} = l$ и функции

$$r_k^{ij}(x) = \frac{\tilde{\varphi}_k^i(2x - a_k^{ij}) + \tilde{\varphi}_k^i(a_k^{ij})}{2} - \frac{c_k(x - a_k^{ij})}{4\lambda_k^2} \int\limits_{a_k^{ij}}^{2x - a_k^{ij}} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(z - a_k^{ij})(z - 2x + a_k^{ij})\right) \tilde{\varphi}_k^i(z)\, dz +$$

$$+ \frac{(-1)^{i+j}}{2\lambda_k} \int\limits_{a_k^{ij}}^{2x - a_k^{ij}} {}_0F_1\left(1; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(z - a_k^{ij})(z - 2x + a_k^{ij})\right) \tilde{\psi}_k^i(z)\, dz,$$

$$v_k^{ij}(x, \tau) = r_k^{ij}\left(\frac{x + \tau + l}{2}\right) + \frac{c_k(x - \tau - l)}{4\lambda_k^2} \int\limits_0^{x+\tau} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(z - x - \tau)(\tau - x + l)\right) r_k^{ij}\left(\frac{z + l}{2}\right) dz,$$

Обозначим $b_k(x, t) = {}_0F_1\left(1; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(x - \lambda_k(T - t))(x + \lambda_k(T - t) - l)\right)$.

В областях $\Delta_k^2$ и $\Delta_k^4$ получаем две задачи с данными на характеристиках, решения которых имеют следующий вид:

$$w_k(x, t) = v_k^{00}(x, -\lambda_k(T - t)) + v_k^{10}(x, \lambda_k(T - t) - l) - b_k r_k^{00}(l/2) \qquad \text{для} \quad \Delta_k^2 \tag{12}$$

и

$$w_k(x, t) = v_k^{01}(x, \lambda_k(T - t) - l) + v_k^{11}(x, -\lambda_k(T - t)) - b_k r_k^{11}(l/2) \qquad \text{для} \quad \Delta_k^4. \tag{13}$$

Тогда управляющие функции $\tilde{\mu}_k(t) = w_k(0, t)$ и $\tilde{\nu}_k(t) = w_k(l, t)$ определяются из (10), (11)

$$\tilde{\mu}_k(t) = \frac{\tilde{\varphi}_k^0(\lambda_k t) + \tilde{\varphi}_k^0(-\lambda_k t)}{2} - \frac{c_k t}{4\lambda_k} \int\limits_{-\lambda_k t}^{\lambda_k t} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left(z^2 - \lambda_k^2 t^2\right)\right) \tilde{\varphi}_k^0(z)\, dz +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda_k} \int\limits_{-\lambda_k t}^{\lambda_k t} {}_0F_1\left(1; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left(z^2 - \lambda_k^2 t^2\right)\right) \tilde{\psi}_k^0(z)\, dz, \tag{14}$$

$$\tilde{\nu}_k(t) = \frac{\tilde{\varphi}_k^0(l + \lambda_k t) + \tilde{\varphi}_k^0(l - \lambda_k t)}{2} - \frac{c_k t}{4\lambda_k} \int\limits_{l-\lambda_k t}^{l+\lambda_k t} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((l - z)^2 - \lambda_k^2 t^2\right)\right) \tilde{\varphi}_k^0(z)\, dz +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda_k} \int\limits_{l-\lambda_k t}^{l+\lambda_k t} {}_0F_1\left(1; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((l - z)^2 - \lambda_k^2 t^2\right)\right) \tilde{\psi}_k^0(z)\, dz \tag{15}$$

при $0 \le t < T - l/\lambda_k$ и из (12), (13)

$$\tilde{\mu}_k(t) = r_k^{00}\left(\frac{l - \lambda_k(T - t)}{2}\right) + r_k^{10}\left(\frac{\lambda_k(T - t)}{2}\right) - b_k(0, t) r_k^{00}\left(\frac{l}{2}\right) +$$

$$+ \frac{c_k(\lambda_k(T - t) - l)}{4\lambda_k^2} \int\limits_0^{-\lambda_k(T-t)} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(z + \lambda_k(T - t))(l - \lambda_k(T - t))\right) r_k^{00}\left(\frac{z + l}{2}\right) dz -$$

$$- \frac{c_k(\lambda_k(T - t))}{4\lambda_k^2} \int\limits_0^{\lambda_k(T-t)-l} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k}(z - \lambda_k(T - t) + l)(T - t)\right) r_k^{10}\left(\frac{z + l}{2}\right) dz, \tag{16}$$

$$\tilde{\nu}_k(t) = r_k^{01}\left(\frac{l + \lambda_k(T - t)}{2}\right) + r_k^{11}\left(\frac{2l - \lambda_k(T - t)}{2}\right) - b_k(l, t) r_k^{11}\left(\frac{l}{2}\right) -$$

$$- \frac{c_k(\lambda_k(T - t) - l)}{4\lambda_k^2} \int\limits_0^{\lambda_k(T-t)} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(z - \lambda_k(T - t))(\lambda_k(T - t) - l)\right) r_k^{01}\left(\frac{z + l}{2}\right) dz -$$

$$-\frac{c_k(\lambda_k(T-t))}{4\lambda_k^2}\int\limits_0^{l-\lambda_k(T-t)} {}_0F_1\left(2;\frac{c_k}{4\lambda_k}(z+\lambda_k(T-t)-l)(t-T)\right) r_k^{11}\left(\frac{z+l}{2}\right)dz \tag{17}$$

при $T-l/\lambda_k \le t \le T$.

Пусть матрица перехода $S=(s_{ij})_{i,j=1}^n$. Тогда

$$u_k(x,t)=(s_{k1}\dots s_{kn})(w_1(x,t)\dots w_n(x,t))^T,$$
$$\mu_k(t)=(s_{k1}\dots s_{kn})(\tilde\mu_1(t)\dots\tilde\mu_n(t))^T, \qquad \nu_k(t)=(s_{k1}\dots s_{kn})(\tilde\nu_1(t)\dots\tilde\nu_n(t))^T. \tag{18}$$

Формулы (14)–(18) позволяют определить все компоненты искомых вектор-функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$.

В рассмотренном случае $T>l/\lambda_n$ задача (1)–(3) не имеет единственного решения, т. е. функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ определяются неоднозначно и зависят от выбора продолжений начальных условий (2) на отрезок $[l-\lambda_kT,\lambda_kT]$.

Для значений $n=1$, $\lambda_1=1$, $T=l$ полученное решение согласуется с результатами В. А. Ильина и Е. И. Моисеева.

## Библиографический список


1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М. : Наука, 1965. 476 с. [*Butkovskiy A. G.* Distributed Control Systems. New York : American Elsevier Pub. Co., 1969. 446 p.]

2. *Lions J.-L.* Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équalions aux dérivées partielles. Paris : Dunod Gauthier-Villars, 1968. 426 p.

3. *Агошков В. И.* Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М. : Ин-т выч. мат. РАН, 2003. 256 с. [*Agoshkov V. I.* Optimal control methods and the method of adjoint equations in problems of mathematical physics. Moscow : Inst. Vych. Mat. RAN, 2003. 256 p.]

4. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528. [*Il'in V. A.* Two-endpoint boundary control of vibrations described by a finite-energy generalized solution of the wave equation // Differ. Equ. 2000. Vol. 36, № 11. P. 1659–1675.]

5. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний струны на двух концах при условии существования конечной энергии // Докл. АН. 2001. Т. 376, № 3. С. 295–299. [*Il'in V. A.* Boundary control of the string oscillation process at two ends under conditions of the existence of a finite energy // Dokl. Math. 2001. Vol. 63, № 1. P. 38–41.]

6. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничного управления колебаниями струны упругой силой // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 12. С. 1699–1711. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* Optimization of the boundary control of string vibrations by an elastic force on an arbitrary sufficiently large time interval // Differ. Equ. 2006. Vol. 42, № 12. P. 1775–1786.]

7. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация граничных управлений смещением на двух концах струны за произвольный достаточно большой промежуток времени // Докл. АН. 2007. Т. 417, № 2. С. 160–166. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* Optimization of boundary controls by displacements at two ends of a string during an arbitrary sufficiently large time interval // Dokl. Math. 2007. Vol. 76, № 3. P. 828–834.]

8. *Боровских А. В.* Формулы граничного управления неоднородной струной. I // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 1. С. 64–89. [*Borovskikh A. V.* Formulas of boundary control of an inhomogeneous string. I // Differ. Equ. 2007. Vol. 43, № 1. P. 69–95.]

9. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Граничное управление радиально-симметричными колебаниями круглой мембраны // Докл. АН 2003. Т. 393, № 6. С. 730–734. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* A boundary control of radially symmetric oscillations of a round membrane // Dokl. Math. 2003. Vol. 68, № 3. P. 421–425.]

10. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // Докл. АН. 2004. Т. 394, № 2. С. 154–158. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* A boundary control at two ends by a process described by the telegraph equation // Dokl. Math. 2004. Vol. 69, № 1. P. 33–37.]

11. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Задача граничного управления для системы волновых уравнений // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16) С. 5–10. [*Andreev A. A., Leksina S. V.* The boundary control problem for the system of wave equations // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2008. № 1(16). P. 5–10.]

12. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Задача граничного управления в условиях первой краевой задачи для системы гиперболического типа второго порядка // Дифференциальные уравнения 2011. Т. 47, № 6. С. 843–849. [*Andreev A. A., Leksina S. V.* Boundary control problem for the first boundary value problem for a second-order system of hyperbolic type // Differ. Equ. 2011. Vol. 47, № 6. P. 848–854.]

13. *Lancaster P.* Theory of matrices. New York : Acad. Press, 1969. 316 p.

14. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М. : Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some Classes of Partial Differential Equations. New York : Gordon and Breach Science Publishers, 1988.]

15. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. *H. Bateman*. New York; Toronto; London : McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 p.

УДК 517.518.82

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО МНОГОЧЛЕНАМИ БЕРНШТЕЙНА

**И. А. Козлова**

Калужский государственный университет им. К.Э.Циолковского
E-mail: irena1983.83@mail.ru

В настоящей работе рассматривается функция Больцано $f(x)$, которая является непрерывной и недифференцируемой. Данная функция определяется как предел последовательности ломаных и для ее построения используются вспомогательные функции, представляющие собой ломаные. В работе получена оценка модуля непрерывности функции Больцано. Из полученной оценки следует, что данная функция принадлежит классу Липшица порядка $1/2$ с константой $M = 6$, т. е. $f(x) \in 6\,\mathrm{Lip}\,1/2$. Для функции Больцано при $a = 1$ и $h = 1$ построена последовательность многочленов Бернштейна и получена оценка погрешности приближения функции Больцано многочленами Бернштейна.

**Ключевые слова:** функция Больцано, модуль непрерывности, многочлены Бернштейна, оценка погрешности приближения.

## Approximation of Boltsano Function by Means of Bernstein Polynomials

**I. A. Kozlova**

In given work is considered Boltsano function $f(x)$, which can be represented in rows. Boltsano function is continuous and not differentiable. It is received the estimation of the module of continuity of Boltsano function. From the estimation of the module of continuity follows that function $f(x)$ belongs to the Lipschitz class $\mathrm{Lip}\,1/2$ with the constant 6, i.e. $f(x) \in 6\,\mathrm{Lip}\,1/2$. For the Boltsano function for $a = 1$ and $h = 1$ it is presented the sequence of Bernstein polynomials and it is proved the estimation of the error of approximation for Boltsano function by means of Bernstein polynomials.

**Key words:** Boltsano function, module of continuity, Bernstein polynomials, estimation the error of approximation.

## 1. МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО

Функция Больцано $f(x)$ строится следующим образом [1]. Определяются вспомогательные функции $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$. Графиком функции $f_0(x)$ является отрезок $OA_4$, где $O(0;0)$, $A_4(a;h)$. Заменим отрезок $OA_4$ ломаной $OA_1A_2A_3A_4$ так, что точки $A_1$, $A_2$, $A_3$ имеют координаты

$$A_1\,(a/4, -h/2)\,, \quad A_2\,(a/2, 0)\,, \quad A_3\,(3a/4, h/2)\,.$$

Функцию, имеющую график $OA_1A_2A_3A_4$, обозначим через $f_1(x)$. По функции $f_1(x)$ строим функцию $f_2(x)$, аналогично заменив каждый из отрезков $OA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$ соответствующими ломаными (рис. 1).

Повторим эту операцию $n$ раз, придем к функции $f_n(x)$. Определим функцию Больцано $f(x)$ вначале в точках вида

$$x = ka/4^n, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 4^n, \tag{1}$$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $k$ — целое, полагая $f(x) = f_n(x)$. Нам остается еще определить $f(x)$ для значений $x$, отличных от точек вида (1). Это можно сделать, полагая $f(x) = \lim\limits_{t \to x} f(t)$, где $t$ — точки вида (1).

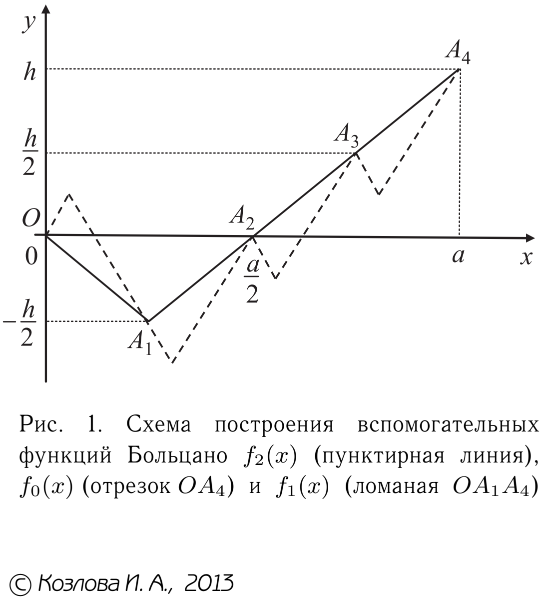



Рис. 1. Схема построения вспомогательных функций Больцано $f_2(x)$ (пунктирная линия), $f_0(x)$ (отрезок $OA_4$) и $f_1(x)$ (ломаная $OA_1A_4$)

Теперь $f(x)$ определена во всем отрезке $[0, a]$ и является непрерывной функцией в этом промежутке.

В дальнейшем будем рассматривать функцию Больцано при $h = 1$ и $a = 1$.

От геометрического способа задания функции Больцано перейдем к аналитическому. Для этого используем разложение аргумента $x$ в 4-ичную дробь: $b/c = (0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots)_4$. Разряды этой дроби находятся по известному алгоритму теории чисел:

$$a_n = \left[\frac{4^n \cdot b}{c}\right] - 4 \cdot \left[\frac{4^{n-1} \cdot b}{c}\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа $x$. Для $x = (0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots)_4$ находим значение функции $f(x)$ по формуле

$$f(x) = \frac{a_1'}{2} + \frac{a_2'}{2^2} + \ldots + \frac{a_n'}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n'}{2^n},$$

где

$$a_n' = \begin{cases} 0, & \text{если } a_n \text{ – четное}, \\ (-1)^{k_n}(a_k - 2), & \text{если } a_n \text{ – нечетное}, \end{cases}$$

$k_n$ — число нулей среди предыдущих разрядов $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$.

**Теорема 1.** *Модуль непрерывности функции Больцано удовлетворяет неравенству:*

$$\frac{3}{2}\sqrt{\delta} \leqslant \omega(f;\delta) \leqslant 6\sqrt{\delta}.$$

**Доказательство.** Из аналитического способа задания функции Больцано находим, что

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f((0,111\ldots1\ldots)_4) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^n} - \ldots = -1,$$

$f(x) = -1$ — является абсолютным минимумом функции Больцано,

$$f\left(\frac{1}{12}\right) = f((0,011\ldots1\ldots)_4) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{2},$$

$f(x) = 1/2$ — максимум функции Больцано на отрезке $[0;3/4]$. Тогда получаем, что для $\delta = 1/3 - 1/12 = 1/4$ модуль непрерывности $\omega(f;1/4) = 1/2 - (-1) = 3/2$, как наибольшее колебание функции на отрезке длины $1/4$. Аналогично, можно получить, что $f(1/48) = -1/4$ и, следовательно, $\omega\left(f;1/4^2\right) = 3/2^2$. Тогда $\omega\left(f;1/4^k\right) = 3/2^k$. Таким образом, получаем, что для $1/4^{n+1} \leqslant \delta < 1/4^n$ модуль непрерывности будет

$$\omega(f;\delta) \leqslant \omega\left(f;\frac{1}{4^n}\right) = \frac{3}{2^n} = 6\sqrt{\frac{1}{4^{n+1}}} \leqslant 6\sqrt{\delta}, \tag{2}$$

и мы получили оценку сверху модуля непрерывности функции $f(x)$. Оценка снизу модуля непрерывности для данной функции имеет следующий вид:

$$\omega(f;\delta) \geqslant \omega\left(f;\frac{1}{4^{n+1}}\right) = \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{4^n}} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{\delta}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что модуль непрерывности функции Больцано находится в следующих пределах:

$$\frac{3}{2}\sqrt{\delta} \leqslant \omega(f;\delta) \leqslant 6\sqrt{\delta}.$$

Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Функция Больцано $f(x)$ принадлежит классу Липшица порядка $1/2$ с константой $M = 6$, т. е. $f(x) \in 6\,\mathrm{Lip}\,\frac{1}{2}$.*

По результатам оценки модуля непрерывности с помощью теоремы Джексона может быть определен порядок наилучшего равномерного приближения функции Больцано алгебраическими полиномами.

**Теорема Джексона.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ многочленами степени не выше $n$ удовлетворяет неравенству* [2]:

$$E_n(x) \leqslant 2\omega\left(f, \frac{b-a}{n+1}\right).$$

Если функция $f(x) \in M\,\mathrm{Lip}\,\alpha$ на отрезке $[0;1]$, то из теоремы Джексона следует:

$$E_n(x) \leqslant \frac{2M}{(n+1)^{\alpha}}.$$

**Следствие 2.** *Наилучшее равномерное приближение функции Больцано многочленами степени не выше $n$ удовлетворяет неравенству*

$$E_n(x) \leqslant \frac{12}{\sqrt{n+1}}.$$

## 2. МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО

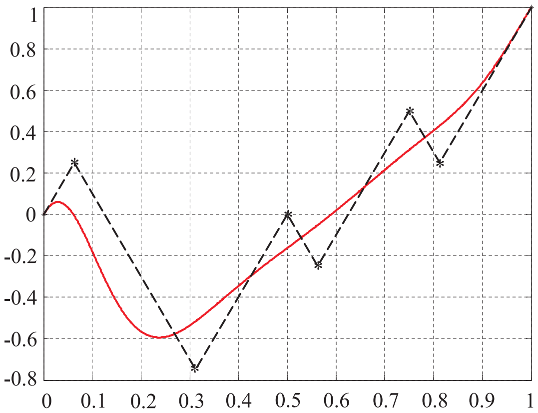



Рис. 2. Функция Больцано $f_2(x)$ (пунктирная линия), многочлен Бернштейна $B_{16}(f;x)$

Для функции Больцано $f(x)$ (рис. 2) при $a = 1$ и $h = 1$ строятся многочлены Бернштейна

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\,(k/n)\, C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

В результате получается следующая последовательность многочленов Бернштейна:

$$B_2(f;x) = x^2,$$
$$B_3(f;x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x,$$
$$B_4(f;x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x,$$
$$B_5(f;x) = \frac{4x^5}{3} - \frac{22x^4}{3} + \frac{32x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} - x,$$
$$B_6(f;x) = 60x^5 - 14x^6 - 90x^4 + 60x^3 - 15x^2,$$
$$B_7(f;x) = \frac{44x^7}{9} - \frac{56x^6}{3} + \frac{124x^5}{3} - \frac{170x^4}{3} + \frac{130x^3}{3} - 14x^2 + \frac{7x}{9},$$
$$B_8(f;x) = 25x^8 - 80x^7 + 84x^6 - 70x^4 + 56x^3 - 14x^2,$$
$$B_9(f;x) = 320x^8 - 44x^9 - 848x^7 + 1120x^6 - 784x^5 + 252x^4 - 16x^2 + x,$$
$$B_{10}(f;x) = \frac{2272x^9}{3} - \frac{476x^{10}}{3} - 1434x^8 + 1368x^7 - 700x^6 + 252x^5 - 168x^4 + 120x^3 - 39x^2 + \frac{10x}{3}, \ldots$$

**Теорема 2.** *Если $f(x) \in M\,\mathrm{Lip}\,\frac{1}{2}$ на отрезке $[0;1]$, то*

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{2}n^{1/4}}.$$

**Доказательство.** Используем тождества

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, f(x) \not\equiv 1,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{4n},$$

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Если $f(x) \in M\,\mathrm{Lip}\,\frac{1}{2}$ на отрезке $[0;1]$, то

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant M \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\left|\frac{k}{n} - x\right|} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

В силу неравенства Коши $\sum\limits_{k=0}^{n}|a_kb_k| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n}b_k^2}$ получаем:

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\left|\frac{k}{n}-x\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2}.$$

Применяя второй раз неравенство Коши, получим:

$$|B_n(x)-f(x)| \leqslant M\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/4}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/4} =$$

$$= M\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/4} = M\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{1/4} \leqslant M\left(\frac{1}{4n}\right)^{1/4} = \frac{M}{\sqrt{2}n^{1/4}}.$$

Теорема доказана.

**Следствие 2.** *Для функции Больцано при всех $x\in[0;1]$ имеет место неравенство*

$$|B_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{6}{\sqrt{2}n^{1/4}}.$$

#### Библиографический список


1. *Бржечка Б. Ф.* О функции Больцано // УМН. 1949. Т. 4, № 2. С. 15–20. [*Brzhechka B. F.* About the function of Bolzano // Russ. Math. Surv. 1949. Vol. 4, № 2. P. 329–346.]

2. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций, книга 1. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 231 с. [*Privalov A. A.* Theory interpolate functions, book 1. Saratov : Izd-vo Saratov. un-ta, 1990. 231 p.]


УДК 517.984

# О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМ ЯДРОМ

**В. В. Корнев**

Саратовский государственный университет
E-mail: KornevVV@info.sgu.ru

Для интегральных операторов со скачком ядра на диагонали найдены необходимые и достаточные условия их обратимости. Установлено условие, обеспечивающее равносходимость рядов Фурье по собственным функциям этих операторов и тригонометрических рядов Фурье.

**Ключевые слова:** интегральный оператор, собственные функции, ряды Фурье, равносходимость.

**On Convergence of Expansions in Eigen Functions of Integral Operators with Discontinuous Kernel**

**V. V. Kornev**

For integral operators with a jump of its kernel on the diagonal it will be found necessary and sufficient conditions of invertibility. Conditions providing equiconvergence of expansions in eigen functions of these operators and trigonometric Fourier series are established.

**Key words:** integral operator, eigen functions, Fourier series, equiconvergence.

Рассмотрим в пространстве $L[0,1]$ интегральный оператор:

$$Af = \int_0^{1-x} A_1(1-x,t)f(t)\,dt + \int_{1-x}^{1} A_2(1-x,t)f(t)\,dt, \quad 0\le x\le 1, \tag{1}$$

где функции $A_1(x,t)$ и $A_2(x,t)$ непрерывны вместе с частными производными до 2-го порядка включительно в треугольниках $x\ge t$ и $x\le t$ соответственно, причем выполняется тождество

$$A_1(x,x)-A_2(x,x)\equiv 1.$$

Проведем спектральное исследование таких операторов с использованием изложенных в [1] результатов по интегральным операторам с ядрами, разрывными на ломаных. Вид (1) оператора $A$ позволяет получить более конкретные результаты.

Введем операторы

$$Bf = \int\limits_0^x A_1(x,t)f(t)\,dt + \int\limits_x^1 A_2(x,t)f(t)\,dt, \qquad B_x f = \int\limits_0^x \frac{\partial A_1(x,t)}{\partial x} f(t)\,dt + \int\limits_x^1 \frac{\partial A_2(x,t)}{\partial x} f(t)\,dt.$$

Отметим, что

$$\frac{d}{dx}Bf = f(x) + B_x f. \tag{2}$$

**Теорема 1.** *Для обратимости оператора $A$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

*1) число $-1$ не является собственным значением оператора $B_x$;*

*2) число $-1$ является собственным значением оператора $B_x$, его геометрическая кратность равна $1$ и $B\varphi \neq 0$, где $\varphi(x)$ — соответствующая собственная функция оператора $B_x$.*

**Доказательство.** Оператор $A$ можно представить в виде произведения $A = SB$, где $Sf = f(1-x)$. Очевидно, $A$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $B$, и

$$A^{-1} = B^{-1}S. \tag{3}$$

Пусть $B^{-1}$ существует. Докажем, что выполняется либо условие 1), либо условие 2). Предположим противное: число $-1$ является собственным значением оператора $B_x$ и существуют линейно независимые собственные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, соответствующие этому собственному значению. Из (2) следует, что $B\varphi_i = c_i$, где $c_i$ — ненулевые константы, $i = 1, 2$. Но тогда $B(c_2\varphi_1(x) - c_1\varphi_2(x)) \equiv 0$, что противоречит обратимости оператора $B$.

Докажем достаточность условия 1) или 2). Пусть выполняется условие 1). Предположим, что $Bf = 0$. Тогда из (2) следует, что $f(x) = 0$. Следовательно, $B^{-1}$ существует. Пусть теперь выполняется условие 2). Предположим, что $Bf = 0$ и $f \neq 0$. На основании (2) заключаем, что $f$ — собственная функция $B_x$, соответствующая собственному значению $-1$. Но тогда $f(x) = c\varphi(x)$, $c \neq 0$ и $Bf = cB\varphi \neq 0$, а это противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть операторы $A$ и $A^*$ обратимы. Тогда при выполнении условия*

$$\overline{A_1(0,t)} \pm i\overline{A_2(1,t)} \notin R_{A^*} \tag{4}$$

*($R_{A^*}$ — область значений интегрального оператора $A^*$, ядро которого сопряжено с ядром оператора $A$) для любой функции $f \in L[0,1]$ и любого $\delta \in (0, 1/2)$ справедливо соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\delta \le x \le 1-\delta} |S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)| = 0, \tag{5}$$

*где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора $A$, соответствующим характеристическим значениям, модуль которых меньше $r$; $\sigma_r(f,x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе $\{e^{i2k\pi x}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для тех $k$, для которых $|2k\pi| < r$.*

**Доказательство.** В основе доказательства лежит формула

$$S_r(f,x) - \sigma_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda f - R_{0\lambda} f)\,d\lambda,$$

где $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$; $E$ — единичная матрица; $R_{0\lambda}$ — решение краевой задачи $y'(x) - \lambda y(x) = f(x)$, $y(0) = y(1)$; окружность $|\lambda| = r$ не содержит чисел $i2\pi k$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ и собственных значений оператора $A^{-1}$.

Для доказательства формулы (5) необходимо исследовать асимптотику резольвенты $R_\lambda$ при $\lambda \to \infty$ (для $R_{0\lambda}f$ вывод точных формул тривиален). Обозначим $y(x) = (E - \lambda A)^{-1}Af$. Тогда $y(x) - \lambda Ay = Af$, откуда получаем

$$A^{-1}y - \lambda y(x) = f(x). \tag{6}$$

Из работы [2] следует, что оператор $B^{-1}$ задан на множестве абсолютно непрерывных функций $y(x)$, определяемом условием

$$by(0) + ay(1) + \int\limits_0^1 \psi(1-t)y(t)\,dt = 0, \tag{7}$$

и действует по формуле

$$B^{-1}y = y'(x) + p(x)y(x) + p_1(x)y(0) + p_0(x)y(1) + \int\limits_0^x N_1(x,t)y(t)\,dt + \int\limits_x^1 N_2(x,t)y(t)\,dt, \tag{8}$$

где $a$, $b$ — числа, $\psi(x)$, $p(x)$, $p_0(x)$, $p_1(x)$ — непрерывные функции;

$$|a| + |b| + \max_{0\le t\le 1} |\psi(t)| \ne 0; \tag{9}$$

функции $N_1(x,t)$ и $N(x,t)$ непрерывны вместе с частными производными $\dfrac{\partial N_i}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial N_i}{\partial t}$ $(i = 1, 2)$ в треугольниках $x \ge t$ и $x \le t$ соответственно.

На основании (3) и (8) формулу (6) можно записать в виде

$$\begin{gathered} -y'(1-x) + p(x)y(1-x) + p_0(x)y(0) + p_1(x)y(1) + \\ + \int\limits_0^x N_1(x,t)y(1-t)\,dt + \int\limits_x^1 N_2(x,t)y(1-t)\,dt - \lambda y(x) = f(x). \end{gathered} \tag{10}$$

Заменим в (10) $x$ на $1-x$, получим

$$\begin{gathered} -y'(x) + p(1-x)y(x) + p_0(1-x)y(1) + p_1(1-x)y(0) + \\ + \int\limits_0^{1-x} N_1(1-x,t)y(1-t)\,dt + \int\limits_{1-x}^1 N_2(1-x,t)y(1-t)\,dt - \lambda y(1-x) = f(1-x). \end{gathered} \tag{11}$$

Обозначим $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y(1-x)$, $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$. В этих обозначениях формулы (10), (11) можно записать в векторной форме:

$$Y'(x) + P(x)Y(x) + P_0Y(0) + P_1(x)Y(1) + NY = \lambda DY(x) + F(x), \tag{12}$$

где матрицы $P(x)$, $P_0(x)$, $P_1(x)$, оператор $N$ и вектор $F(x)$ определяются очевидным образом, $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Для диагонализации матрицы $D$ выполним замену $Y(x) = \Gamma Z(X)$, $\Gamma = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Система (12) перейдет в систему

$$\begin{gathered} Z'(x) + \Gamma^{-1}P(x)\Gamma Z(x) + \Gamma^{-1}P_0(x)\Gamma Z(0) + \Gamma^{-1}P_1(x)\Gamma Z(1) + \Gamma^{-1}N(\Gamma Z) = \\ = \lambda \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z(x) + \Gamma^{-1}F(x). \end{gathered} \tag{13}$$

Краевое условие (7) относительно $Z(x)$ примет вид

$$M_0Z(0) + M_1Z(1) + M(\Gamma Z) = 0, \tag{14}$$

где $MY = \Big(\int\limits_0^1 \psi(t)y_1(t)\,dt, \int\limits_0^1 \psi(1-t)y_2(t)\,dt\Big)^T$, $M_0 = \begin{pmatrix} ia & -ia \\ b & b \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} ib & -ib \\ a & a \end{pmatrix}$.

Система (13)–(14) вполне аналогична системе (68)–(69) из [1] и исследование асимптотики ее решений проводится тем же методом. Основным моментом в доказательстве равносходимости (5) является условие регулярности (79) из [1]. Используя обозначение работы [1], выведем это условие в нашем случае.

После замены $Z(x) = H(x,\lambda)V(x)$, где $H(x,\lambda) = H_0(x) - \lambda^{-1}H_1(x)$, $H_0(x) = \mathrm{diag}\,(h_1(x), h_2(x))$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ — положительные функции, краевые условия (14) примут вид

$$M_{0\lambda}V(0) + M_{1\lambda}V(1) + M(\Gamma H(x,\lambda)V(x)) = 0,$$

где $M_{0\lambda} = M_0H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1H(1,\lambda)$. Как следует из леммы 17 [1], асимптотика характеристического определителя $\det\Delta(\lambda)$ совпадает с асимптотикой определителя:

$$\det\Delta_0(\lambda) = \det(M_{0\lambda}V(0,\lambda) + M_{1\lambda}V(1,\lambda)),$$

где $V(x,\lambda) = \mathrm{diag}\,(e^{i\lambda x}, e^{-i\lambda x})$. В свою очередь, асимптотика этого определителя совпадает с асимптотикой определителя

$$\det(M_0H_0(0)V(0,\lambda) + M_1H_0(1)V(1,\lambda)) = i\big[h_1(1)h_2(0)(a^2+b^2)e^{i\lambda} + \\ +2ab(h_1(0)h_2(0) + h_1(1)h_2(1)) + h_1(0)h_2(1)(a^2+b^2)e^{-i\lambda}\big].$$

Коэффициенты при $e^{i\lambda}$ и $e^{-i\lambda}$ играют роль чисел $\theta_0$ и $\theta_5$ из условия (79) [1]: $\theta_0\theta_5 \neq 0$. Следовательно, в нашем случае условием регулярности будет условие

$$a^2 + b^2 \neq 0. \tag{15}$$

В остальном доказательство формулы (5) следует доказательству теоремы 12 [1] и следствия из нее.

Осталось показать, что условия теоремы обеспечивают выполнение условия (15). Обозначим $y(x) = Af$. Тогда в силу (7) выполняется соотношение

$$ay(0) + by(1) + \int_0^1 \psi(t)y(t)\,dt = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\int_0^1 (aA_1(1,t) + bA_2(0,t) + \overline{A^*\overline{\psi}})f(t)\,dt = 0.$$

Отсюда в силу произвольности $f(t)$ получаем

$$aA_1(1,t) + bA_2(0,t) + \overline{A^*\overline{\psi}} \equiv 0. \tag{16}$$

Из (16) следует, что $a$ и $b$ не могут одновременно обращаться в ноль. В самом деле, если $a = b = 0$, то $A^*\overline{\psi} = 0$, а этого не может быть, так как в силу (9) $\psi(t) \not\equiv 0$ и $A^*$ обратим.

Предположим теперь, что $a^2 + b^2 = 0$. На основании предыдущего рассуждения $ab \neq 0$. Как видно из (7), не уменьшая общности можно считать, что $a = 1$. Но тогда $b = \pm i$ и из (16) получаем, что в этом случае $\overline{A_1(1,t)} \mp i\overline{A_2(0,t)} \in R_{A^*}$, что и требовалось доказать.

**Замечание.** Условие обратимости $A^*$ является необходимым для того, чтобы равносходимость имела место, так как оно равносильно условию, что $R_A$ всюду плотно в $L[0,1]$. Оператор $A^*$ относится к классу (1) и его можно исследовать с помощью теоремы 1. Что касается условия (4), его проверка сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В частном случае, когда $c_1A_1(1,t) + c_2A_2(0,t) \equiv 0$, проверка регулярности тривиальна, так как в этом случае $a = c_1$, $b = c_2$, $\psi(t) \equiv 0$ и $A^*$ обратим.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 10-01-00270).

### Библиографический список

1. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142. [*Khromov A. P.* Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines // Sb. Math. 2006. Vol. 197, iss. 11. P. 1669–1696.]

2. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405. [*Hromov A. P.* Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators // Math. USSR Sb. 1982. Vol. 42, iss. 3. P. 331–355.]

УДК 517.984

# О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ РИССА РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА ЛОМАНЫХ ЛИНИЯХ

**О. А. Королева**

Саратовский государственный университет
E-mail: korolevaoart@yandex.ru.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости обобщенных средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям (с. п. ф.) интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат.

**Ключевые слова:** резольвента, характеристические числа, собственные и присоединенные функции, обобщенные средние Рисса.

**On Convergence of Riesz Means of the Expansions in Eigen and Associated Functions of Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines**

**O. A. Koroleva**

This paper deals with necessary and sufficient conditions of uniform convergence of generalized Riesz means for expansions in eigen and associated functions of an integral operator whose kernel suffers jumps at the sides of the square inscribed in the unit square.

**Key words:** resolvent, characteristic number, eigenfunctions and associated functions, generalized Riesz means.

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A(x,t)\,f(t)\,dt. \tag{1}$$

Обозначим: $A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\, 0 \le x \le 1/2\}$, $A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le t \le 1,\, 0 \le x \le 1/2\}$, $A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x,\, 1/2 \le x \le 1\}$, $A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1,\, 1/2 \le x \le 1\}$, $A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le t \le 1/2 + x,\, 0 \le x \le 1/2\}$ и $\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x,\, 1/2 \le x \le 1\}$.

Предположим, что $A_i(x,t)$, $i = 1,\dots,5$ непрерывно дифференцируемые в своих областях, причем $A_5(x, 1/2 - x + 0) - A_1(x, 1/2 - x - 0) = a$, $A_5(x, 1/2 + x - 0) - A_2(x, 1/2 + x + 0) = b$, $A_5(x, -1/2 + x + 0) - A_3(x, -1/2 + x - 0) = c$, $A_5(x, 3/2 - x - 0) - A_4(x, 3/2 - x + 0) = d$, где $a$, $b$, $c$, $d$ — постоянные.

Частный случай оператора (1) впервые рассматривался в [1].

Рассмотрим следующий оператор:

$$z = Bg = \int_0^{1/2} B(x,t)g(t)\,dt, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{2}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & A(x,1/2-t) & A(x,1/2+t) & 0 \\ A(1/2-x,t) & 0 & 0 & A(1/2-x,1-t) \\ A(1/2+x,t) & 0 & 0 & A(1/2+x,1-t) \\ 0 & A(1-x,1/2-t) & A(1-x,1/2+t) & 0 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 1.** *Если $y = Af$, то $z = Bg$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1/2 - x)$, $z_3(x) = y(1/2 + x)$, $z_4(x) = y(1 - x)$, $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f(1/2 - x)$, $g_3(x) = f(1/2 + x)$, $g_4(x) = f(1 - x)$. Обратно: если $z = Bg$ и $g_1(x) = g_2(1/2 - x)$, $g_3(x) = g_4(1/2 - x)$, то $z_1(x) = z_2(1/2 - x)$, $z_3(x) = z_4(1/2 - x)$ и $y = Af$, где $f(x) = g_1(x)$, при $x \in [0, 1/2]$; $f(x) = g_3(-1/2 + x)$, при $x \in [1/2, 1]$ и $y(x) = z_1(x)$, при $x \in [0, 1/2]$; $y(x) = z_3(-1/2 + x)$, при $x \in [1/2, 1]$.*

**Доказательство.** Представлено в статье [2].

**Замечание.** Представление типа (2) не единственно. Наше же представление хорошо тем, что компоненты матрицы $B(x,t)$ терпят разрывы лишь на линии $t = x$.

В статье [2] также доказаны необходимые и достаточные условия существования оператора $B^{-1}$. В дальнейшем будем предполагать, что $B^{-1}$ существует.

**Теорема 2.** *Для оператора* $B^{-1}$ *справедливо представление*

$$B^{-1}z(x) = Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(1/2) + a_3(x)z(x) + \int_0^{1/2} a(x,t)z(t)\,dt, \tag{3}$$

$$Sz(0) + Tz(1/2) + \int_0^{1/2} a(t)z(t)\,dt = 0. \tag{4}$$

*где* $a_i(x)$, $i = \overline{1,3}$, $a_3'(x)$, $a(x)$ *— непрерывные матрицы–функции, каждая компонента матрицы a(x,t) имеет такой же характер гладкости, что и компоненты* $B_x(x,t)$, $S = E + \int_0^{1/2} B(0,t)a_1(t)\,dt$, $T = \int_0^{1/2} B(0,t)a_2(t)\,dt$ *— постоянные матрицы* $4\times 4$. Доказательство повторяет доказательство теоремы 10 в [1].

**1.** Получим интегродифференциальную систему для резольвенты $R_\lambda = (E-\lambda A)^{-1}A$ оператора $A$. Пусть $z = (E-\lambda B)^{-1}Bg$. Тогда $z - \lambda Bz = Bg$. Отсюда по теореме 2 из (3), (4) получаем:

$$Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(1/2) + a_3(x)z(x) + \tilde{N}z - \lambda z(x) = g(x), \tag{5}$$

$$Sz(0) + Tz(1/2) + \int_0^{1/2} a(t)z(t)\,dt = 0, \tag{6}$$

где $\tilde{N}z = \int_0^{1/2} a(x,t)z(t)\,dt$.

**Теорема 3.** *Если* $R_\lambda$ *существует, то* $R_\lambda f = v(x)$, *где*

$$v(x) = z_1(x) \quad \textit{при} \quad x\in[0,1/2], \qquad v(x) = z_3(x-1/2), \quad \textit{при} \quad x\in[1/2,1], \tag{7}$$

$z_1$, $z_3$ *— первая и третья компоненты вектора* $z(x)$, *удовлетворяющего системе* (5), (6). *Обратно, если* $\lambda$ *таково, что однородная краевая задача для* (5), (6) *имеет только нулевое решение, то* $R_\lambda$ *существует и определяется по формуле* (7).

Доказательство повторяет лемму 1 из [3].

Рассмотрим систему (5), (6). Минимальный многочлен матрицы $Q = P^{-1}$ совпадает с характеристическим многочленом и равен $\lambda^4 - \lambda^2(d^2 - 2bc + a^2) + (bc - ad)^2$. Значит, выполняется

**Лемма 1.** *При условии* $d \ne a, (d+a)^2 - 4bc \ne 0$ *матрица* $Q$ *подобна диагональной* $D = \mathrm{diag}\,(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$, *причём* $\omega_3 = -\omega_2, \omega_4 = -\omega_1, \omega_1 \ne \omega_2$. *Пусть матрица* $\Gamma$ *такая, что* $\Gamma^{-1}P^{-1}\Gamma = D$. *Выполним в* (5), (6) *замену* $z = \Gamma\tilde{z}$, *получим:*

$$\tilde{z}'(x) + P_1(x)\tilde{z}(0) + P_2(x)\tilde{z}\,(1/2) + P_3(x)\tilde{z}(x) + N\tilde{z}(x) - \lambda D\tilde{z}(x) = m(x), \tag{8}$$

$$M_0\Gamma\tilde{z}(0) + M_1\Gamma\tilde{z}(1/2) + \Gamma\int_0^{1/2} \Omega(t)\tilde{z}(t)\,dt = 0, \tag{9}$$

*где* $P_i(x) = D\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma$, $N = D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma$, $m(x) = D\Gamma^{-1}g(x)$, $\Omega(t) = a(t)\Gamma$, $M_0 = S\Gamma$, $M_1 = T\Gamma$.

В дальнейшем при изучении системы (8), (9) затруднения вызывает матрица $P_3(x)$. Поэтому дадим её дальнейшее преобразование.

**Лемма 2.** *Существует матрица — функция* $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ *с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц* $H_0(x)$, $H_1(x)$, *причем* $H_0(x)$ *невырождена при всех* $x$ *и диагональная, такая, что преобразование* $\tilde{z} = H(x,\lambda)v$ *приводит систему* (8), (9) *к виду*

$$v'(x) + P_1(x,\lambda)v(0) + P_2(x,\lambda)v(1/2) + P_3(x,\lambda)v(x) + N_\lambda v(x) - \lambda Dv(x) = m(x,\lambda),$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1/2) + \int_0^{1/2} \Omega(t,\lambda)v(t)dt,$$

*где* $P_1(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_1(x)H(0,\lambda)$, $P_2(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_2(x)H(1/2,\lambda)$, $P_3(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda) \times \times [H_2'(x) + P_3(x)H_2(x)]$, $N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda)$, $M_{0\lambda} = M_0H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1H(1/2,\lambda)$, $\Omega(t,\lambda) = \Omega(t)H(t,\lambda)$, $m(x,t) = H^{-1}(x,\lambda)m(x)$.

Доказательство такое же, как и лемма 16 в [1].

Рассмотрим систему

$$u'(x) = \lambda Du(x) + m(x), \tag{10}$$

$$U_0(w) = M_0H_0(0)u(0) + M_1H_0(1/2)u(1/2) + \int\limits_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)u(t)\,dt = 0, \tag{11}$$

Будем считать, что $\operatorname{Re}\lambda\omega_1 \ge \operatorname{Re}\lambda\omega_2 > 0$. Для решения $u(x,\lambda) = R_{0\lambda}m$ системы (10), (11) имеют место формула (25) и оценки (28) в [2].

**2.** Приступим к получению основного результата.

Пусть $g(\lambda,r)$ удовлетворяет следующим требованиям:

1) $g(\lambda,r)$ непрерывна по $\lambda$ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по $\lambda$ в $|\lambda| < r$ при любых $r > 0$;

2) существует $C > 0$ такая, что $|g(\lambda,r)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$;

3) $g(\lambda,r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном $\lambda$;

4) существует $\beta > 0$ такое, что $g(\lambda,r) = \begin{cases} O\left((\pi/2-\varphi)^\beta\right), & 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ O\left((\varphi - \frac{3\pi}{2})^\beta\right), & \frac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$, где $\varphi = arg\lambda\omega_2$.

В качестве обобщённых средних Рисса будем брать интегралы

$$J_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f\,d\lambda,$$

где $R_\lambda f = (E-\lambda A)^{-1}Af$ — резольвента Фредгольма.

**Теорема 4 (формула остаточного члена).** *Пусть* $f(x)$ *— непрерывная функция на* $[0,1/2]$, $f_0(x)$ *— непрерывно-дифференцируемая функция на* $[0,1/2]$, *принадлежащая области значения оператора. Тогда, если на окружности* $|\lambda| = r$ *нет собственных значений оператора* $A$, *то*

$$f(x) - J_r(f,x) = f(x) - f_0(x) + (1 - g(o,r))f_0(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{R_\lambda\varphi_0}{\lambda}\,d\lambda - J_r(f-f_0,x),$$

*где* $f_0 = A\varphi_0$

**Доказательство.** По тождеству Гильберта имеем:

$$\frac{f_0}{\lambda} + R_\lambda f_0 = \frac{1}{\lambda}R_\lambda\varphi_0.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{f_0(x)}{\lambda}\,d\lambda + \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f_0\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda}g(\lambda,r)R_\lambda\varphi_0\,d\lambda. \tag{12}$$

Первый интеграл равен $f_0(x)g(0,\lambda)$. Тогда (12) примет вид

$$f_0(x)g(0,\lambda) + J_r(f_0,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda}g(\lambda,r)R_\lambda\varphi_0\,d\lambda.$$

Значит для произвольного $f(x) \in C[0,1]$:

$$f(x) - J_r(f,x) = f(x) - J_r(f,x) - f_0(x) + f_0(x) - J_r(f_0,x) + J_r(f_0,x) =$$
$$= [f(x) - f_0(x)] - J_r(f-f_0,x) + f_0(x)[1-g(0,r)] + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda}g(\lambda,r)R_\lambda\varphi_0\,d\lambda.$$

Теорема доказана.

**Лемма 3.** *Пусть* $f = (f_1(x), \dots, f_4(x))^T$, $f_i(x) \in C[0, 1/2]$. *При достаточно больших* $\lambda$ *справедлива оценка:*

$$I = \int\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \, \|R_{0\lambda} f\|_{C_{[0,1/2]}} \, |d\lambda| = \|f\|_{C_{[0,1/2]}} O(1)$$

**Доказательство** Воспользуемся оценками (28) из [2]:

$$I = \|f\|_{C_{[0,1/2]}} \left[ O\left( \int\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \left( \frac{1 - e^{-|\operatorname{Re}\lambda\omega_1|}}{|\operatorname{Re}\lambda\omega_1|} \right) |d\lambda| + \int\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \left( \frac{1 - e^{-|\operatorname{Re}\lambda\omega_2|}}{|\operatorname{Re}\lambda\omega_2|} \right) |d\lambda| \right) + \right.$$

$$\left. + O\left( \int\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \left( \frac{1 - e^{-|\operatorname{Re}\lambda\omega_3|}}{|\operatorname{Re}\lambda\omega_3|} \right) |d\lambda| + \int\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \left( \frac{1 - e^{-|\operatorname{Re}\lambda\omega_4|}}{|\operatorname{Re}\lambda\omega_4|} \right) |d\lambda| \right) \right] =$$

$$= \|f\|_{C_{[0,1/2]}} O\left(I_1 + I_2 + I_3 + I_4\right).$$

Рассмотрим $I_2$. Сделаем замену $\lambda\omega_2 = re^{i\varphi}$. Тогда $d\lambda = \dfrac{1}{\omega_2} rie^{i\varphi} d\varphi$ $(\operatorname{Re}\lambda\omega_2 \geq 0)$ $|d\lambda| = \dfrac{1}{|\omega_2|} r\, d\varphi$, т. е.

$$I_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |g(\lambda, r)| \left( \frac{1 - e^{-r\cos\varphi}}{|r\cos\varphi|} \right) \frac{r}{|\omega_2|} \, |d\varphi| = \frac{1}{\omega_2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |g(\lambda, r)| \left( \frac{1 - e^{-r\cos\varphi}}{\cos\varphi} \right) d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{1}{\omega_2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |g(\lambda, r)| \, \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi.$$

Разбив интеграл на два интеграла, получаем нужную оценку.

Аналогично оцениваются и остальные интегралы. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть вектор-функция* $f(x) \in C[0, 1/2]$ *удовлетворяет* (6). *Тогда для любого* $\epsilon > 0$ *существует вектор-функция* $f_0(x) \in C^1[0, 1/2]$, *удовлетворяющая* (6) *такая, что* $\|f(x) - f_0(x)\|_\infty < \epsilon$.

**Доказательство.** Перейдём от $f(x)$ и $f_0(x)$ к скалярным функциям $F(x)$ и $F_0(x)$ по формулам

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [0, 1/2], \\ f_2(1/2 - x), & x \in [1/2, 1], \\ f_3(3/2 - x), & x \in [1, 3/2], \\ f_4(2 - x), & x \in [3/2, 2], \end{cases}$$

аналогично определим $F_0(x)$. Это скалярные функции, $F$ — непрерывная, а $F_0$ — непрерывно дифференцируема, кроме, быть может, точек с абсциссами $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3/2$, $x_4 = 2$. Утверждение леммы становится следствием соответствующего результата для скалярного случая. Лемма доказана.

**3.** Имеет место следующая теорема.

**Теорема 5.** *Соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) + J_r(f, x)\|_{C[0,1]} = 0$$

*имеет место тогда и только тогда, когда а)* $f(x) \in C[0, 1]$, *б)* $(f(x), f(1/2+x), f(1/2-x), f(1-x))^T$ *удовлетворяет* (6).

Утверждение теоремы получается из теоремы 3 и лемм 3, 4, так же, как и в [4].

**Теорема 6.** *Соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) + J_r(f, x)\|_{C[0,1]} = 0$$

*имеет место тогда и только тогда, когда* $f(x) \in \overline{\Delta}_A$, *где* $\overline{\Delta}_A$ *— замыкание области значений оператора* $A$.

**Доказательство.** Необходимость очевидна, так как $J_r(f,x)$ состоит из с.п.ф. оператора $A$, которые принадлежат области значений оператора $A$. Достаточность следует из теоремы 4 и леммы 4.

**Следствие.** $\overline{\Delta}_A$ *состоит из функций, удовлетворяющих условиям а) и б) из теоремы* 5.

### Библиографический список


1. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142. [*Khromov A. P.* Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines // Sb. Math.. 2006. Vol. 197, № 11. P. 1669–1696.]
2. *Королева О.А., Хромов А.П.* Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 33–50. [*Koroleva O. A., Khromov A. P.* Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines (in Russian) // Izv. Saratov. Univer. New Series. 2012. Vol. 12. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics, iss. 1. P. 33–50.]
3. *Корнев В. В.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50. [*Kornev V. V.* Equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals // Sb. Math. 2001. Vol. 192, № 10. P. 1451—1469.]
4. *Гуревич А. П., Хромов А. П.* Суммируемость по Риссу спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 6. С. 809–814. [*Gurevich A. P., Khromov A. P.* Riesz summability of spectral expansions for a class of integral operators // Differ. Equ. 2001. Vol. 37, № 6. P. 849–855.]


УДК 517.54

# ФУНКЦИЯ КЁНИГСА И ДРОБНОЕ ИТЕРИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ

**О. С. Кудрявцева**

Волжский гуманитарный институт (филиал)
Волгоградского государственного университета
E-mail: Kudryavceva@vgi.volsu.ru

Исследуется проблема дробного итерирования аналитических в единичном круге функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами. Предполагается существование внутренней и граничной неподвижных точек. Решение приводится в терминах функции Кёнигса.

**Ключевые слова:** дробные итерации, однопараметрическая полугруппа, инфинитезимальная образующая, функция Кёнигса, неподвижные точки.

**Koenigs Function and Fractional Iteration of Functions Analytic in the Unit Disk with Real Coefficients and Fixed Points**

**O. S. Kudryavtseva**

The present paper deals with the problem of fractional iteration of functions analytic in the unit disk, with real Taylor's coefficients. It is assumed that there exist interior and boundary fixed points. The solution is given in terms of the Koenigs function.

**Key words:** fractional iterates, one-parameter semigroup, infinitesimal generator, Koenigs function, fixed points.

Пусть $\mathfrak{P}$ — совокупность всех голоморфных отображений $f$ единичного круга $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<1\}$ в себя. Тогда $\mathfrak{P}$ представляет собой топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости, роль единицы в которой играет тождественное преобразование $f(z)\equiv z$. Заметим, что $\mathfrak{P}$ содержит подгруппу $\mathfrak{I}$ дробно-линейных преобразований единичного круга $\mathbb{D}$ на себя.

В силу согласованности областей определения и значений функции $f\in\mathfrak{P}$ определены её натуральные итерации: $f^0(z)\equiv z$, $f^1(z)=f(z)$ и $f^n(z)=f\circ f^{n-1}(z)$ при $n=2,3,\ldots$. Если же существует семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ аналитических в $\mathbb{D}$ функций, удовлетворяющих условиям:

1) $f^0(z)\equiv z$, $f^1(z)=f(z)$,

2) $f^{t+s}(z)=f^t\circ f^s(z)$ при $s,t\geqslant 0$,

3) $f^t(z)\to z$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $t\to 0$,

то говорят, что определены дробные итерации функции $f$. Отображение $t\mapsto f^t$ является непрерывным гомоморфизмом, действующим из аддитивной полугруппы $\mathbb{R}^+=\{t\in\mathbb{R}\colon t\geqslant 0\}$ в полугруппу $\mathfrak{P}$, и называется однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}$.

Всякая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ дифференцируема по $t$ (см. [1]) и характеризуется своей инфинитезимальной образующей:

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z)\bigg|_{t=0} = v(z)$$

посредством дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = v(f^t(z)) \tag{1}$$

с начальным условием $f^t(z)|_{t=0} = z$.

Функции $f^t, t \geqslant 0$, имеют общее множество неподвижных точек (см., напр., [2]), среди которых выделяется так называемая точка Данжуа–Вольфа, в терминах которой формулируется общий вид инфинитезимальных образующих однопараметрических полугрупп в $\mathfrak{P}$, известный как формула Берксона–Порты (см. [1]).

Вопрос существования дробных итераций и их описания составляет задачу дробного итерирования. Существуют различные постановки этой задачи, но при этом часто требуется, чтобы все итерации наследовали те же свойства, что и исходная функция. Отметим, что общая задача дробного итерирования имеет длительную и богатую историю. Изначально она рассматривалась для функций, которые аналитичны либо в окрестности неподвижной точки [3, 4], либо во всей комплексной плоскости, исключая счётное множество точек [5, 6]. Случай итерирования функций, аналитических в некоторой области, получил развитие позже и он существенно отличается от предыдущих двух (см. [7, 8]).

Пусть функция $f \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{I},\ f(0) = 0$ и $f'(0) \neq 0$. Если последовательность натуральных итераций такой функции определённым образом поднормировать, то известно (см., напр., [9, гл. VI, § 44]), что существует предел

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z)}{(f'(0))^n},$$

который представляет собой непостоянную аналитическую в единичном круге $\mathbb{D}$ функцию. Этот предел называется функцией Кёнигса. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1}(z)}{(f'(0))^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n\left(f(z)\right)}{f'(0)\ (f'(0))^n} = \frac{1}{f'(0)} F(f(z)),$$

то функция Кёнигса есть решение функционального уравнения Шрёдера:

$$F(f(z)) = f'(0)F(z)$$

и, кроме того, является единственным решением этого уравнения в классе аналитических в $\mathbb{D}$ функций с нормировкой $F(0) = 0, F'(0) = 1$. Очевидно, что и все натуральные итерации $f^n$, $n = 2, 3, \ldots$, функции $f$ имеют ту же самую функцию Кёнигса $F$.

Допустим теперь, что существуют дробные итерации функции $f$. В силу единственности решения задачи Коши (1) функции $f^t$, $t > 0$, однолистны в $\mathbb{D}$ и, следовательно, $(f^t)'(0) \neq 0$ (здесь и далее запись $(f^t)'(0)$ означает производную функции $f^t(z)$ по переменной $z$, вычисленную в точке $z = 0$). Поэтому можно определить функцию Кёнигса $F$ следующим образом:

$$F(z) = \lim_{t\to\infty} \frac{f^t(z)}{(f^t)'(0)},$$

и она будет общей для всех $f^t$, $t > 0$. Непостоянная функция $F$ как предел последовательности однолистных функций также является однолистной и

$$F\left(f^t(z)\right) = \left(f^t\right)'(0)\, F(z), \tag{2}$$

т. е. функцию Кёнигса $F$ можно использовать для получения итераций функции $f$ посредством функционального уравнения Шрёдера.

В [10] получено описание класса функций Кёнигса, которые связаны с дробным итерированием функций $f \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{I}$, $f(0) = 0$. Вопрос выделения из этого класса функций Кёнигса, подкласса функций Кёнигса, которые соответствуют функциям $f \in \mathfrak{P}$, сохраняющим начало координат, имеющим вещественные коэффициенты разложения в ряд Маклорена и дробные итерации которых удовлетворяют этим же свойствам, рассматривался в [11]. В данной работе детализируется результат из [11] в случае, когда существует дополнительная неподвижная точка (в силу принципа гиперболической метрики она может лежать только на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$), в которой дробные итерации имеют конечные угловые производные. Ключевым результатом в исследовании является аналог формулы Берксона–Порты инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D}$ в себя в случае, когда имеются две неподвижные точки (см. [10]).

Обозначим через $\mathfrak{P}_r[0;1]$ совокупность функций $f \in \mathfrak{P}$, удовлетворяющих условиям: $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, и существуют угловые пределы $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = 1$, $\lim\limits_{z\to 1} f'(z) = f'(1) < \infty$.

Через $\mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$ будем обозначать совокупность функций $f \in \mathfrak{P}_r[0;1]$, для которых существует семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0} \subset \mathfrak{P}_r[0;1]$, удовлетворяющее условиям 1)–3), т. е. $\mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$ — это совокупность функций $f \in \mathfrak{P}_r[0;1]$, допускающих дробное итерирование в классе $\mathfrak{P}_r[0;1]$.

Пусть $v$ — инфинитезимальная образующая однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$. Получим равенство, связывающее функцию Кёнигса $F$ однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$ и её инфинитезимальную образующую $v$.

Дифференцируя (1) по $z$ и полагая $z = 0$, получаем дифференциальное уравнение $\dfrac{d}{dt}\,(f^t)'(0) = v'(0)\,(f^t)'(0)$ с начальным условием $(f^t)'(0)\Big|_{t=0} = 1$, интегрирование которого по $t$ приводит к равенству $(f^t)'(0) = e^{v'(0)t}$. Таким образом, уравнение (2) можно записать в виде $F\left(f^t(z)\right) = e^{v'(0)t}\,F(z)$. Дифференцируя последнее равенство по $t$ и полагая $t = 0$, получаем соотношение, связывающее функцию Кёнигса $F$ и инфинитезимальную образующую $v$

$$F'(z)\,v(z) = v'(0)\,F(z). \tag{3}$$

В силу аналога формулы Берксона–Порты (см. [10]), а также с учётом вещественности коэффициентов функций из $\mathfrak{P}_r[0;1]$, инфинитезимальную образующую $v$ однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$ можно представить в виде

$$v(z) = \frac{-\alpha z}{\dfrac{1+z}{1-z} + g(z)}\,, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$, функция $g$ голоморфна в единичном круге $\mathbb{D}$, имеет неотрицательную вещественную часть и производные $g^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Следующая теорема даёт интегральное представление класса функций Кёнигса, соответствующих функциям $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$.

**Теорема.** *Пусть $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$, тогда её функция Кёнигса $F$ имеет вид*

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^{2\lambda}}\,\exp\left\{(1-\lambda)\int\limits_{[-1,1]} \ln\frac{1}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x)\right\} \tag{5}$$

*с некоторым $\lambda \in (0,1]$ и вероятностной мерой $\mu$ на $[-1,1]$. При этом под степенной функцией и логарифмом понимаются ветви, принимающие значения $1$ и $0$ соответственно при $z = 0$.*

*Обратно, всякая функция $F$ вида (5) является функцией Кёнигса для функций $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$, определяемых из равенства $f(z) = F^{-1}\left(\beta\,F(z)\right),\ 0 < \beta < 1$.*

**Доказательство.** Пусть $t \mapsto f^t$ — однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}_r[0;1]$ и $F$ — её функция Кёнигса. Покажем, что функция $F$ допускает представление (5) с некоторым $\lambda \in (0,1]$ и вероятностной мерой $\mu$ на $[-1,1]$.

Как уже отмечалось выше, инфинитезимальная образующая $v$ однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$ имеет вид (4).

Рассмотрим сначала частный случай. Если предположить, что найдётся точка $z_0 \in \mathbb{D}$ такая, что $\operatorname{Re} g(z_0) = 0$, то в силу принципа открытости аналитических функций функция $g$ тождественно равна мнимой константе. Но поскольку $g(0) \in \mathbb{R}$, то $g(z) \equiv 0$. Очевидно, что задаче Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = \frac{-\alpha\, f^t(z)\,(1 - f^t(z))}{(1 + f^t(z))},$$

$$f^t(z)|_{t=0} = z$$

удовлетворяет частный интеграл $\dfrac{f^t(z)}{(1-f^t(z))^2} = e^{-\alpha t}\dfrac{z}{(1-z)^2}$, который, являясь функциональным уравнением Шрёдера, определяет функцию Кёнигса $F$ рассматриваемой однопараметрической полугруппы: $F(z) = z/(1-z)^2$. Значит, при сделанном предположении функцией Кёнигса однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$ является известная функция Кёбе.

Пусть теперь $\operatorname{Re} g(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$, тогда функцию $g$ можно представить в виде $g(z) = g(0)\,p(z)$, где $g(0) > 0$, $p \in C_r$. Под классом $C_r$ понимается совокупность аналитических в $\mathbb{D}$ функций $p$, удовлетворяющих условиям: $\operatorname{Re} p(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$, $p(0) = 1$, и производные $p^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Так как функция Кёнигса $F$ однолистна в единичном круге $\mathbb{D}$ и $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, то функция $F(z)/z$ не обращается в нуль в $\mathbb{D}$ и можно выделить однозначную ветвь логарифма $\ln(F(z)/z)$, которая обращается в нуль при $z = 0$. Из равенств (3), (4) получаем

$$\frac{d}{dz}\ln\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z}\left(\frac{z\,v'(0)}{v(z)} - 1\right) = \frac{2z/(1-z) + g(0)\,(p(z)-1)}{z\,(1+g(0))}\,.$$

Воспользуемся теперь интегральным представлением функций $p \in C_r$:

$$p(z) = \int\limits_{[-1,1]} \frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x)\,,$$

где $\mu$ — вероятностная мера на $[-1,1]$, которое следует из интегрального представления класса $T_r$ типично вещественных в единичном круге $\mathbb{D}$ функций (см., напр., [12, гл. XI, § 9, п. 5]) и теоремы Рогозинского (см., напр., [13, ch. 2, § 2.8, theorem 2.20]), устанавливающей взаимно однозначное соответствие между функциями $\varphi \in T_r$ и $p \in C_r$. Тогда дифференциальное соотношение для функции Кёнигса можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{d}{dz}\ln\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{(1+g(0))\,(1-z)} + \frac{2g(0)}{1+g(0)}\int\limits_{[-1,1]} \frac{x-z}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x).$$

Интегрируя это равенство по $z$ и учитывая выбор ветви логарифма, получаем:

$$\ln\frac{F(z)}{z} = \ln\frac{1}{(1-z)^{2/(1+g(0))}} + \frac{g(0)}{1+g(0)}\int\limits_{[-1,1]} \ln\frac{1}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x).$$

Обозначая $\lambda = 1/(1+g(0))$, $\lambda \in (0,1)$, и потенцируя последнее равенство, приходим к формуле (5) для функции Кёнигса. Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности покажем, что при любой вероятностной мере $\mu$ на $[-1,1]$ формула (5) определяет функцию Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$. Дифференцируя равенство (5), получаем:

$$z\,\frac{F'(z)}{F(z)} = 1 + 2\lambda\,\frac{z}{1-z} + 2(1-\lambda)\int\limits_{[-1,1]} \frac{(x-z)z}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x).$$

Выделяя в следующих выражениях ядро Шварца и ядро функций класса $C_r$,

$$\frac{z}{1-z} = \frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{(x-z)z}{1-2xz+z^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1-z^2}{1-2xz+z^2} - \frac{1}{2}\,,$$

получаем

$$z\,\frac{F'(z)}{F(z)} = \lambda\,\frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda)\int\limits_{[-1,1]} \frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x).$$

Следовательно, $\operatorname{Re}\{z\,F'(z)/F(z)\} > 0$ при $z \in \mathbb{D}$. Это означает (см., напр., [14, ch. 2, § 2.2, theorem 2.5]), что функция $F$ является звёздообразной в единичном круге $\mathbb{D}$, т. е. она однолистна в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ на область, которая с каждой точкой $F(z)$, $z \in \mathbb{D}$, содержит отрезок

$\{w(t) = t\,F(z)\colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Это свойство функции $F$ позволяет определить семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0}$ следующим образом:

$$f^t(z) = F^{-1}\left(e^{-t}\,F(z)\right).$$

Непосредственно из (5) следует, что $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ и производные $F^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 2,3,\dots$, поэтому $f^t \in \mathfrak{P}_r[0]$ при всех $t \geqslant 0$, т. е. функции $f^t \in \mathfrak{P}$, сохраняют начало координат и имеют вещественные коэффициенты разложения в ряд Маклорена. Кроме того, отображение $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}_r[0]$, поскольку условия 1), 3) выполнены и для любых $s, t \geqslant 0$ имеем:

$$f^{t+s}(z) = F^{-1}\left(e^{-(t+s)}F(z)\right) = F^{-1}\left(e^{-t}e^{-s}F(z)\right) = F^{-1}\left(e^{-t}F\circ F^{-1}\left(e^{-s}F(z)\right)\right) =$$
$$= F^{-1}\left(e^{-t}F\left(f^s(z)\right)\right) = f^t \circ f^s(z).$$

Покажем теперь, что отображение $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}_r[0;1]$. Инфинитезимальная образующая $v$ однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в терминах функции $F$ записывается в виде

$$v(z) = \left.\frac{\partial}{\partial t}F^{-1}\left(e^{-t}\,F(z)\right)\right|_{t=0} = -\,\frac{F(z)}{F'(z)}\,.$$

Однако вычисления, проведённые выше, показывают, что

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \lambda\left(\frac{1+z}{1-z} + g(z)\right),$$

где $\lambda \in (0,1]$, $g$ — голоморфная в единичном круге $\mathbb{D}$ функция с неотрицательной вещественной частью и производными $g^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 0,1,\dots$ Следовательно, инфинитезимальная образующая $v$ соответствует виду (4), а это означает, что $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}_r[0;1]$, а $F$ является её функцией Кёнигса. Теорема доказана. $\square$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 12-01-00434-а).

### Библиографический список

1. *Berkson E., Porta H.* Semigroups of analytic functions and composition operators // Michigan Math. J. 1978. Vol. 25, № 1. P. 101–115.
2. *Contreras M. D., Díaz-Madrigal S., Pommerenke Ch.* Fixed points and boundary behaviour of the Koenigs function // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2004. Vol. 29, № 2. P. 471–488.
3. *Schröeder E.* Über itierte Funktionen // Math. Ann. J. 1871. Vol. 3. P. 296–322.
4. *Königs G.* Recherches sur les intégrales des certaines equations fonctionelles // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1884. Vol. 1(3). P. 3–41.
5. *Baker I. N.* Fractional iteration near a fixpoint of multiplier 1 // J. Australian Math. Soc. 1964. Vol. 4, № 2. P. 143–148.
6. *Karlin S., McGregor J.* Embedding iterates of analytic functions with two fixed points into continuous groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132, № 1. P. 137–145.
7. *Cowen C. C.* Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 265, № 1. P. 69–95.
8. *Горяйнов В. В.* Дробные итерации аналитических в единичном круге функций с заданными неподвижными точками // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 9. С. 1281–1299. [*Goryainov V. V.* Fractional iterates of functions analytic in the unit disk, with given fixed points // Math. USSR Sb. 1993. Vol. 74, № 1. P. 29—46.]
9. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М. : ГИТТЛ, 1957. 235 с. [*Valiron G.* Analytic Functions. Moscow : Gostekhizdat, 1957. 235 p.]
10. *Горяйнов В. В., Кудрявцева О. С.* Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 7. С. 43–74. [*Goryainov V. V., Kudryavtseva O. S.* One-parameter semigroups of analytic functions, fixed points and the Koenigs function // Sb. Math. 2011. Vol. 202, № 7. P. 971—1000.]
11. *Кудрявцева О. С.* Дробное итерирование аналитических в единичном круге функций с вещественными коэффициентами // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Физика. 2011. № 2(15). С. 50–62. [*Kudryavtseva O. S.* Fractional iteration of functions analytic in the unit disk, with real coefficients // Vestn. Volgograd. Gos. Un-ta. Ser. 1. Mathematics. Physics. 2011. № 2(15). P. 50–62.]
12. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966. 628 с. [*Goluzin G. M.* Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Providence, R. I. : Amer. Math. Soc., 1969. 676 p.]
13. *Duren P. L.* Univalent functions. New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo : Springer-Verlag, 1983. 383 p.
14. *Pommerenke Ch.* Univalent functions. Göttingen : Vandenhoeck and Ruprecht, 1975. 376 p.

УДК 517.51

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПРЕОБРАЗОВАННЫМИ РЯДАМИ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА ПО НОРМЕ ГЕЛЬДЕРА

**Т. В. Лихачева**

Саратовский государственный университет
E-mail: iofinat@mail.ru

Используя осцилляции строк матрицы $A$, мы получаем оценку приближения в метрике Гельдера линейными средними рядов Фурье–Виленкина, порожденными $A$.

**Ключевые слова:** система Виленкина, пространство Гельдера, линейные средние.

**The Approximation of Functions by Transformed Fourier–Vilenkin Series in the Hölder Norm**

**T. V. Likhacheva**

Using the oscillations of rows from matrix $A$, we obtain an estimate for the degree of approximation in Hölder metric by linear means of Fourier–Vilenkin series generated by $A$.

**Key words:** Vilenkin system, Hölder space, linear means.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такова, что $2 \le p_n \le N$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \qquad x_n \in \mathbb{Z}_+, \qquad 0 \le x_n < p_n. \tag{1}$$

Разложение будет единственным, если для $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k < m_l$, брать разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Рассмотрим абелеву группу $G(\mathbf{P})$ последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, с операцией $\oplus_G$ покоординатного сложения по модулю $p_n$. Определим отображения $g : [0,1) \to G(\mathbf{P})$ и $\lambda : G(\mathbf{P}) \to [0,1)$ формулами $g(x) = (x_1, x_2, \dots)$, где $x$ представлен в виде (1) и $\lambda(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i/m_i$, где $\mathbf{x} \in G(\mathbf{P})$. Тогда для $x, y \in [0,1)$ можно ввести $x \oplus y := \lambda(g(x) \oplus_G g(y))$, если $\mathbf{z} = g(x) \oplus_G g(y)$ не удовлетворяет равенству $z_i = p_i - 1$ для всех $i \ge i_0$. Аналогично определяются $x \ominus y$ и, для всех $x, y \in [0,1)$, обобщенное расстояние $\rho(x,y) = \lambda(g(x) \ominus g(y))$ .

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде $k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le k_i < p_i$. Для $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / m_j\right)$. Известно, что система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированна и полна в $L^1[0,1)$. Кроме того, для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и почти всех $y \in [0,1)$ при фиксированном $x \in [0,1)$ верны равенства $\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y)$, $\chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}$. Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, § 1.5].

Коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье для $f \in L^1[0,1)$ по системе Виленкина $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ задаются формулами $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_k(x)}\,dx$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Далее важную роль имеет представление $S_n(f)(x) = \int\limits_0^1 f(x \ominus t) D_n(t)\,dt$, где $D_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(t)$, $n \in \mathbb{N}$.

Будем рассматривать пространства $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, измеримых интегрируемых в $p$-й степени функций с нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$. В нем можно ввести модуль непрерывности: $\omega^*(f,\delta)_p = \sup\limits_{0<h<\delta} \|f(x \ominus h) - f(x)\|_p$. По определению, $\omega^*(f,\delta)_\infty = \sup\{|f(x) - f(y)| : \rho(x,y) < \delta\}$ и пространство $C^*[0,1) = \{f \in B[0,1) : \lim\limits_{t\to 0} \omega^*(f,t) = 0\}$ обобщенно непрерывных функций снабжено нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$.

Если $\omega(\delta)$ непрерывна и возрастает на $[0,1)$, причем $\omega(0) = 0$, то $\omega(\delta) \in \Omega$. Если при этом $\int_0^\delta t^{-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,1)$, то $\omega$ принадлежит классу Бари $B$, а если $\delta \int_\delta^1 t^{-2}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,1)$, то $\omega$ принадлежит классу Бари–Стечкина $B_1$ (см. [2]). Для $\omega(\delta) \in \Omega$ пространство $H_p^\omega[0,1)$ состоит из $f \in L^p[0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ или $f \in C^*[0,1)$ $(p = \infty)$ таких, что $\omega^*(f,\delta)_p \le C\omega(\delta)$, где $C$ зависит только от $f$. Пространство $H_p^\omega[0,1)$ с нормой

$\|f\|_{p,\omega} = \|f\|_p + \sup\limits_{0<h<1} \omega^*(f,h)_p/\omega(h)$ является банаховыми. Можно показать, что эта норма эквивалентна следующей: $\|f\|_{p,\omega} = \|f\|_p + \sup\limits_{0<h<1} \|f(\cdot) - f(\cdot \ominus h)\|_p/\omega(h)$.

Пусть $A = \{a_{nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$ — бесконечная матрица, удовлетворяющая условиям

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 1, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Матрица $A$ задает метод суммирования формулой $T_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n,k} S_{k+1}(f)(x)$. Будем использовать также обозначения $\tau_n(f) = f - T_n(f)$, $K_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n,k} D_{k+1}(t)$ и $\psi(n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{n,k} - a_{n,k+1}|$. Целью нашей работы является получение оценок $\|\tau_n(f)\|_{p,\nu}$ для $f \in H_p^{\omega}$, где $\nu, \omega \in \Omega$ таковы, что $\nu(t) = O(\omega^{\gamma}(t))$ для всех $t \in (0,1)$, $\gamma \in (0,1)$ фиксировано. Основной результат работы является аналогом и частичным обобщением теоремы 1 из [3], где рассматривались классы $Lip(\alpha)$ и линейные средние тригонометрического ряда Фурье.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

**Лемма 1** (см. [4]). *Пусть $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$ ($p = \infty$), $\varphi(x,t) := f(x \ominus t) - f(x)$. Тогда $\|\varphi(\cdot \ominus h, t) - \varphi(\cdot, t)\|_p \le 2\omega^*(f,t)_p$, $\|\varphi(\cdot \ominus h, t) - \varphi(\cdot, t)\|_p \le 2\omega^*(f,t)_p$ при всех $h, t \in [0,1)$.*

**Лемма 2.** *Пусть $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$, $F_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} D_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы неравенства*

$$|D_n(x)| \le N x^{-1}, \qquad |nF_n(x)| \le C(N) x^{-2}, \qquad x \in (0,1), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Первое неравенство леммы 2 см. в [5, гл. 4, § 3], второе неравенство доказано в [4].

**Лемма 3.** *Пусть для матрицы $A$, удовлетворяющей условиям* (2) *и* (3), *существует возрастающая последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такая, что*

$$\sum_{k=\mu_n}^{\infty} (k+1)|a_{nk}| = O(\mu_n), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

*Тогда $K_n(t) = O(\mu_n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

**Доказательство.** Поскольку $|D_{k+1}(t)| \le k+1$ при всех $t \in [0,1)$, то в силу условий (2) и (4) находим, что

$$|K_n(t)| \le \left| \sum_{k=0}^{\mu_n - 1} a_{nk} D_{k+1}(t) \right| + \left| \sum_{k=\mu_n}^{\infty} a_{nk} D_{k+1}(t) \right| \le \mu_n \sum_{k=0}^{\mu_n - 1} |a_{nk}| + \sum_{k=\mu_n}^{\infty} |a_{nk}|(k+1) \le C_1 \mu_n.$$

Лемма доказана.

**Теорема.** *Пусть матрица $A = \{a_{nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям* (2) *и* (3) *и существует строго возрастающая последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, для которой выполнено условие* (4). *Если $\omega \in B \cap B_1$, $\nu \in \Omega$ и $\omega^{\gamma}(t)/\nu(t)$ ограничена на $(0,1)$ при некотором $\gamma \in (0,1)$, то для $f \in H_p^{\omega}$, $1 \le p \le \infty$, справедливо неравенство*

$$\|f - T_n(f)\|_{p,\nu} = O\left(\omega^{1-\gamma}(\lambda_n^{-1})[(1 + \ln(\mu_n/\lambda_n))^{\gamma} + \psi(n)\lambda_n]\right),$$

*где $\psi(n)$ определено во введении, а $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ строго возрастает и $\lambda_n \le \mu_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

**Доказательство.** Из условия (2) и леммы 2 мы выводим абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} D_{k+1}(t)$ к сумме $K_n(t)$ при всех $t \in (0,1)$. Из леммы 2 вытекает также оценка

$$|K_n(t)| = O(t^{-1}), \qquad 0 < t < 1. \tag{5}$$

Если $f \in H_p^\omega$, $1 \le p \le \infty$, где $\omega \in B$, то для $\varphi(x,t) = f(x \ominus t) - f(x)$ в силу обобщенного неравенства Минковского и (5) имеем:

$$\| \int_0^1 \varphi(\cdot,t) K_n(t)\,dt\|_p \le \int_0^1 \|\varphi(\cdot,t)\|_p |K_n(t)|\,dt \le C_1 \int_0^1 t^{-1}\omega(t)\,dt < \infty. \tag{6}$$

Поэтому в силу (3)

$$T_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \int_0^1 \varphi(x,t) D_{k+1}(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(x,t) K_n(t)\,dt,$$

где последнее равенство справедливо благодаря (6) и теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Для $\tau_n(f) = f - T_n(f)$ имеем:

$$\|\tau_n(f)(\cdot) - \tau_n(f)(\cdot \ominus h)\|_p \le \int_0^1 \|\varphi(\cdot,t) - \varphi(\cdot \ominus h,t)\|_p |K_n(t)|\,dt = \int_0^{1/\lambda_n} + \int_{1/\lambda_n}^1 =: I_1 + I_2$$

Применяя оценку (5), лемму 1 и условие $\omega \in B$, мы находим, что

$$I_1 = \int_0^{1/\lambda_n} \|\varphi(\cdot,t) - \varphi(\cdot \ominus h,t)\|_p |K_n(t)|\,dt = O\left(\int_0^{1/\lambda_n} t^{-1}\omega(t)\,dt\right) = O(\omega(1/\lambda_n)). \tag{7}$$

С другой стороны, используя преобразование Абеля и лемму 2, получаем:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} D_{k+1}(t)\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} (a_{nk} - a_{n,k+1})(k+1) F_{k+1}(t)\right| = O(\psi(n) t^{-2}), \tag{8}$$

откуда благодаря лемме 1 и условию $\omega \in B_1$ имеем:

$$I_2 = \int_{1/\lambda_n}^1 \|\varphi(\cdot,t) - \varphi(\cdot \ominus h,t)\|_p |K_n(t)|\,dt = O\left(\psi(n) \int_{1/\lambda_n}^1 t^{-2}\omega(t)\,dt\right) = O(\psi(n)\lambda_n \omega(1/\lambda_n)). \tag{9}$$

Теперь пусть

$$I_1 = \left(\int_0^{1/\mu_n} + \int_{1/\mu_n}^{1/\lambda_n}\right) \|\varphi(\cdot,t) - \varphi(\cdot \ominus h,t)\|_p |K_n(t)|\,dt =: I_{11} + I_{12}.$$

Используя лемму 1 и лемму 3, получаем $I_{11} = O\left(\omega(h) \int_0^{1/\mu_n} |K_n(t)|\,dt\right) = O(\omega(h))$, $h \in (0,1)$. С другой стороны, в силу (5) и леммы 1 имеем $I_{12} = O\left(\omega(h) \int_{1/\mu_n}^{1/\lambda_n} t^{-1}\,dt\right) =$
$= O(\omega(h) \ln(\mu_n/\lambda_n))$, $h \in (0,1)$. Из этих оценок вытекает, что

$$I_1 = O(\omega(h)(1 + \ln(\mu_n/\lambda_n))), \qquad h \in (0,1). \tag{10}$$

Используя оценку (8) и условие $\omega \in B_1$, заключаем, что

$$I_2 = O\left(\omega(h) \int_{1/\lambda_n}^1 |K_n(t)|\,dt\right) = O\left(\omega(h)\psi(n) \int_{1/\lambda_n}^1 t^{-2}\,dt\right) = O(\omega(h)\psi(n)\lambda_n). \tag{11}$$

Объединяя оценки (7) и (10), получаем $I_1 = I_1^\gamma I_1^{1-\gamma} = O(\omega^\gamma(h)(1 + \ln(\mu_n/\lambda_n))^\gamma \omega^{1-\gamma}(1/\lambda_n))$, соответственно из (9) и (11) следует, что

$$I_2 = I_2^\gamma I_2^{1-\gamma} = O([\psi(n)\lambda_n \omega(1/\lambda_n)]^{1-\gamma} [\omega(h)\psi(n)\lambda_n]^\gamma) = O(\psi(n)\lambda_n \omega^\gamma(h) \omega^{1-\gamma}(1/\lambda_n)).$$

В силу условия $\omega^\gamma(t) = O(\nu(t))$, $t \in (0,1)$, имеем

$$\sup_{0<h<1} \|\tau_n(\cdot) - \tau_n(\cdot \ominus h)\|_p / \nu(h) = O(\omega^{1-\gamma}(1/\lambda_n)[(1 + \ln(\mu_n/\lambda_n))^\gamma + \psi(n)\lambda_n]). \tag{12}$$

Аналогично (7) и (9) находим благодаря условию $\omega \in B \cap B_1$:

$$\|\tau_n(f)\|_p \le \int_0^1 \|f(\cdot \ominus t) - f(\cdot)\|_p |K_n(t)|\, dt = O\left(\int_0^{1/\lambda_n} t^{-1}\omega(t)\, dt + \psi(n)\int_{1/\lambda_n}^1 t^{-2}\omega(t)\, dt\right) =$$
$$= O((1+\psi(n)\lambda_n)\omega(1/\lambda_n)) = O(\omega^{1-\gamma}(1/\lambda_n)[(1+\ln(\mu_n/\lambda_n))^\gamma + \psi(n)\lambda_n]), \qquad (13)$$

поскольку $\omega(t) \le \omega^\gamma(1)\omega^{1-\gamma}(t)$ при всех $t \in (0,1]$. Из (12) и (13) вытекает неравенство теоремы. Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Пусть $1 \le p \le \infty$ и $A, \omega, \nu$ удовлетворяют условиям теоремы, $f \in H_p^\omega$. Тогда $\|f - T_n(f)\|_{p,\nu} = O(\omega^{1-\gamma}(1/\mu_n)(1+\psi(n)\mu_n))$, $n \in \mathbb{N}$.*

**Следствие 2.** *Пусть $1 \le p \le \infty$ и $A$ удовлетворяет условию теоремы, $\omega(t) = t^\alpha$, $\nu(t) = t^\beta$, $0 < \beta < \alpha$, $f \in H_p^\omega$. Тогда при $n \in \mathbb{N}$*

$$\|f - T_n(f)\|_{p,\nu} = \begin{cases} O(\mu_n^{\beta-\alpha}(1+\psi(n)\mu_n)), & \alpha < 1; \\ O(\mu_n^{\beta-1} + \psi(n)\mu_n^\beta(\ln \mu_n)^{1-\beta}), & \alpha = 1; \\ O(\mu_n^{\beta-\alpha} + \psi(n)\mu_n^{\beta/\alpha}), & \alpha > 1. \end{cases}$$

**Доказательство.** При $\alpha < 1$ результат следствия 2 вытекает из следствия 1. Аналогично (9) имеем

$$I_2 = O\left(\psi(n)\int_{1/\mu_n}^1 t^{-2}t^\alpha\, dt\right) = \begin{cases} O(\psi(n)\ln(\mu_n)), & \alpha = 1; \\ O(\psi(n)), & \alpha > 1. \end{cases}$$

Используя оценки (7), (10) и (11) при $\lambda_n = \mu_n$ и $\omega(t) = t^\alpha \in B$, получаем

$$I_1 = I_1^{\beta/\alpha} I_1^{1-\beta/\alpha} = O(h^\beta(\mu_n^{-\alpha})^{1-\beta/\alpha}) = O(h^\beta\mu_n^{\beta-\alpha}). \qquad (14)$$

и

$$I_2 = I_2^{\beta/\alpha} I_2^{1-\beta/\alpha} = \begin{cases} O(h^\beta\psi(n)\mu_n^\beta(\ln\mu_n)^{1-\beta}), & \alpha = 1; \\ O(h^\beta\psi(n)\mu_n^{\beta/\alpha}), & \alpha > 1. \end{cases} \qquad (15)$$

Из (14) и (15) выводим

$$\sup_{0<h<1} \|\tau_n(f)(\cdot \ominus h) - \tau_n(f)(\cdot)\|_p / h^\beta = \begin{cases} O(\mu_n^{\beta-\alpha} + \psi(n)\mu_n^\beta(\ln\mu_n)^{1-\beta}), & \alpha = 1; \\ O(\mu_n^{\beta-\alpha} + \psi(n)\mu_n^{\beta/\alpha}), & \alpha > 1. \end{cases} \qquad (16)$$

Аналогично теореме показывается, что $\|\tau_n(f)\|_p$ мажорируется правой частью (16). Объединяя эти оценки, получаем результат следствия. Следствие 2 доказано.

В качестве примера нетреугольной матрицы $A$, к которой применимы результаты теоремы, рассмотрим отложенные средние (см. [6]). Пусть $\{q_n\}_{n=1}^\infty, \{r_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ таковы, что $q_n < r_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$. Тогда

$$T_n(f) = \sum_{i=q_n+1}^{r_n} S_i(f)/(r_n - q_n), \qquad (17)$$

т. е. $a_{nk} = 1/(r_n - q_n)$ при $q_n \le k < r_n$ и $a_{nk} = 0$ при остальных $k$. Пусть $\mu_n = r_n$, $\lambda_n = r_n - q_n$. Тогда условие (4) выполнено и

$$\psi(n) = \sum_{k=0}^\infty |a_{nk} - a_{n,k+1}| = \sum_{k=q_n-1}^{r_n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = |a_{n,q_n}| + |a_{n,r_n-1}| = \frac{2}{r_n - q_n}\,.$$

**Следствие 3.** *Пусть $\omega, \nu \in \Omega$ удовлетворяют условиям теоремы, $1 \le p \le \infty$, $f \in H_p^\omega$. Если $T_n(f)$ задается формулой (17), то*

$$\|f - T_n(f)\|_{p,\nu} = O\left(\omega^{1-\gamma}(1/r_n)\left[1 + \frac{r_n}{r_n - q_n}\right]\right).$$

*В частности, если $q_n \le \delta r_n$, $\delta \in (0,1)$, то $\|f - T_n(f)\|_{p,\nu} = O(\omega^{1-\gamma}(1/r_n))$.*

Для доказательства надо заметить, что $\ln(\mu_n/\lambda_n) = \ln(r_n/(r_n - q_n)) = O(r_n/(r_n - q_n)) = O(\psi(n)\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Автор выражает благодарность С. С. Волосивцу за постановку задачи и ценные обсуждения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 10-01-00097-а) *и гранта Президента РФ* (*проект* НШ-4383.2010.1).

### Библиографический список

1. *Голубов Б. И. Ефимов А. В. Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987. 344 с. [*Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A.* Walsh Series and Transforms : Theory and Applications. Moscow : Nauka, 1987. 344 p.]

2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. М. : ГИТТЛ, 1956. Т. 5. С. 483–522. [*Bari N. K., Stechkin S. B.* Best approximations and differential properties of two conjugate functions // Trudy Moskov. Mat. Obshch. 1956. Vol. 5. P. 483–522.]

3. *Das G., Ghosh T., Ray B. K.* Degree of approximation of functions by their Fourier series in the generalized Hölder metric // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 1996. Vol. 106, № 2. P. 139–153.

4. *Iofina T. V., Volosivets S. S.* On the degree of approximation by means of Fourier–Vilenkin series in Hölder and $L^p$ norm // East J. Approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 143-158.

5. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с. [*Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzhafarli G. M., Rubinshtein A. I.* Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups. Baku : Elm, 1981. 180 p.]

6. *Agnew R. P.* On deferred Cesaro means // Ann. Math. 1932. Vol. 33, № 2. P. 413–421.

УДК 517.51

# СХОДИМОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ–ХААРА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ $L^{p(x,y)}$

**М. Г. Магомед-Касумов**

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Махачкала
E-mail: rasuldev@gmail.com

В статье доказывается сходимость прямоугольных частичных сумм Фурье по ортогональной системе Хаара в пространствах Лебега с переменным показателем.

**Ключевые слова:** двумерная система Хаара, пространство Лебега с переменным показателем, условие Дини–Липшица, сходимость, прямоугольные частичные суммы.

**Convergence of Fourier–Haar Rectangular Sums in Lebesgue Spaces with Variable Exponent $L^{p(x,y)}$**

**M. G. Magomed-Kasumov**

Convergence of Fourier–Haar rectangular partial sums in Lebesgue spaces with variable exponent is proved in this paper.

**Key words:** two-dimensional Haar system, Lebesgue spaces with variable exponent, Dini–Lipschitz condition, convergence, rectangular partial sums.

## ВВЕДЕНИЕ

Пространства Лебега с переменным показателем $L^{p(x)}(E)$ в последние годы вызывают усиливающийся интерес у специалистов из самых различных областей. Систематическое исследование топологии указанных пространств впервые было дано в работе И. И. Шарапудинова [1]. В частности, в ней было показано, что если $1 \leq p(x) \leq \overline{p}(E) < \infty$, то топология пространства $L_\mu^{p(x)}(E)$ нормируема и одну из эквивалентных норм можно определить, полагая для $f \in L_\mu^{p(x)}(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf\{\alpha > 0 : \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} \mu(dx) \leq 1\}.$$

В другой работе [2] того же автора был рассмотрен вопрос о базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}(0,1)$, где было показано, что система Хаара является базисом в $L^{p(x)}(0,1)$ тогда и только тогда, когда переменный показатель $p(x)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица:

$$|p(x)-p(y)|\left|\ln\frac{1}{|x-y|}\right|\le c.$$

В настоящей работе этот результат переносится на случай двух переменных.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Через $D_{NM}$ будем обозначать $N{\cdot}M$-мерное пространство кусочно-постоянных функций, определенных на квадрате $E=[0,1]^2$, вида

$$D_{NM}=\left\{f(x,y)=c_{ij},\ (x,y)\in\left(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\right)\times\left(\frac{j-1}{M},\frac{j}{M}\right),\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M}\right\}.$$

Значения на сторонах и в вершинах прямоугольников $\left(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\right)\times\left(\frac{j-1}{M},\frac{j}{M}\right)$ будем считать равными среднему арифметическому значений функции в прилегающих прямоугольниках.

Как известно [3], функции Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определяются на отрезке [0,1] следующим образом:

$$\chi_1(x)=1,\qquad \chi_n(x)=\begin{cases}0, & x\notin\overline{\Delta}_n,\\ 2^{k/2}, & x\in\Delta_n^+,\\ -2^{k/2}, & x\in\Delta_n^-,\end{cases}$$

где $n=2^k+i$, $k=0,1,\ldots$, $i=1,\ldots,2^k$, а $\Delta_n$ — это двоичный интервал вида $\Delta_n=\Delta_k^i=\left(\frac{i-1}{2^k},\frac{i}{2^k}\right)$, $\overline{\Delta}_n$ — замыкание интервала $\Delta_n$, а $\Delta_n^+$, $\Delta_n^-$ — соответственно правая и левая половины интервала $\Delta_n$.

Двумерные функции Хаара определим на квадрате $E=[0,1]^2$ с помощью равенств:

$$\chi_{nm}(x,y)=\chi_n(x)\chi_m(y),\qquad (x,y)\in E,\qquad n=2^k+i,\qquad m=2^l+j.$$

Значения на сторонах и в вершинах четырех прямоугольников $\Delta_n^{\pm}\times\Delta_m^{\pm}, \Delta_n^{\pm}\times\Delta_m^{\mp}$ определим так, чтобы функции $\chi_{nm}(x,y)\in D_{2^{k+1},2^{l+1}}$.

Ставится задача об исследовании сходимости прямоугольных частичных сумм:

$$S_{NM}(f,x,y)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}c_{nm}\chi_{nm}(x,y),\quad c_{nm}=\iint\limits_{[0,1]^2}f(x,y)\chi_{nm}(x,y)\,dx\,dy,$$

в метрике пространства $L^{p(x,y)}(E)$, определяемой следующей нормой:

$$\|f\|_{p(\cdot)}=\inf\{\alpha>0:\int_0^1\int_0^1\left|\frac{f(x,y)}{\alpha}\right|^{p(x,y)}dx\,dy\le 1\}.$$

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Через $\lambda_{N1},\ \lambda_{N2},\ldots,\lambda_{NN}$ будем обозначать интервалы постоянства системы функций $\chi_1(x),\ldots,\chi_N(x)$ [4, с. 17]. Если $N=2^k+i$, то

$$|\lambda_{Ns}|=\begin{cases}1/2^{k+1}, & 1\le s\le 2i,\\ 1/2^k, & 2i+1\le s\le N.\end{cases}$$

Как известно [4, с. 21], для одномерных частичных сумм Фурье–Хаара справедлива формула

$$S_N(f,x)=\frac{1}{|\lambda_{Ns}|}\int\limits_{\lambda_{Ns}}f(t)dt,\quad x\in\lambda_{Ns}.$$

Используя эту формулу, совершенно элементарно можно вывести аналогичное представление и для двумерного случая:

$$S_{NM}(f,x,y)=\frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|}\int\limits_{\lambda_{Ns}}\int\limits_{\lambda_{Mq}} f(u,v)\,du\,dv,\qquad (x,y)\in\lambda_{Ns}\times\lambda_{Mq}. \tag{1}$$

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.** *Если $N=2^k,\ M=2^l$, то линейная оболочка функций $\{\chi_{nm}\}_{n=1,m=1}^{N,M}$ совпадает с $D_{NM}$, т. е.*

$$G_{2^k,2^l}:=\left\{f(x,y)\,\middle|\,f(x,y)=\sum_{n=1}^{2^k}\sum_{m=1}^{2^l}a_{nm}\chi_{nm}(x,y)\right\}=D_{2^k,2^l}.$$

**Доказательство.** Из определения функций Хаара следует, что $G_{2^k,2^l}\subset D_{2^k,2^l}$. Так как $\{\chi_{nm}\}_{n=1,m=1}^{N,M}$ — линейно независимая система, то размерность $G_{2^k,2^l}$ не меньше $2^k\cdot 2^l$. $\square$

Лемма, приведенная в работе [2] для отрезка $[0,1]$, непосредственно переносится и на случай квадрата $E=[0,1]^2$ (здесь и далее $\overline{f}(E):=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x)$).

**Лемма.** *Пусть $p(x,y)$ и $q(x,y)$ — функции, заданные на $E$ и такие, что $1\le p(x,y)\le q(x,y)\le\le\overline{q}(E)<\infty$. Тогда для любой функции $f\in L^{q(x,y)}(E)$ имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E)\le r_{p,q}\|f\|_{q(\cdot)}(E),$$

*где $r_{p,q}\le 2$.*

В дальнейшем нам также понадобится следующее неравенство, доказательство которого имеется, например, в [5, с. 182].

**Утверждение 2.** *Пусть на некотором множестве $D$ задана интегрируемая функция $p(x)>0$, причем $\int\limits_D p(x)\,dx=1$. Пусть на $D$ задана также функция $\varphi(x)$ такая, что $\varphi''(x)>0$. Тогда для любой интегрируемой функции $f(x)$ справедливо неравенство*

$$\varphi\left(\int\limits_D f(x)p(x)\,dx\right)\le\int\limits_D\varphi(f)p(x)\,dx.$$

*В частности, для любого $\gamma\ge 1$*

$$\left|\int f(x)p(x)\,dx\right|^\gamma\le\left(\int|f(x)|p(x)\,dx\right)^\gamma\le\int|f(x)|^\gamma p(x)\,dx.$$

Прежде чем перейти к основному результату, приведем определения модуля непрерывности и условия Дини–Липшица для случая функций двух переменных.

Модуль непрерывности для функции $p(x,y)$, заданной на множестве $E$, определяется следующим образом:

$$\omega(p,E,\delta)=\sup\{|p(A)-p(B)|:\ A,B\in E,\ \rho(A,B)\le\delta\}.$$

Говорят, что функция $p(x,y)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица порядка $\alpha\ge 0$, если

$$\omega(p,E,\delta)\Bigl(\ln\frac{1}{\delta}\Bigr)^\alpha\le c\qquad(0<\delta\le 1),$$

где $c=c(E,p,\alpha)$, $\alpha\ge 0$.

## 3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

**Теорема.** *Для того чтобы для любой функции $f\in L^{p(x,y)}(E)$ прямоугольные частичные суммы*

$$S_{NM}(f,x,y)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}c_{nm}\chi_{nm}(x,y)$$

*сходились в пространстве $L^{p(x,y)}$ к функции $f(x,y)$ при $N, M \to \infty (N \asymp M)$, необходимо и достаточно, чтобы показатель $p(x,y)$ удовлетворял условию Дини–Липшица порядка $\alpha \geq 1$.*

**Доказательство.** *Достаточность.* Как известно [6, с. 215], для сходимости последовательности линейных операторов $S_{NM}(f)$ к тождественному оператору $I(f) = f$ достаточно выполнения следующих условий:

1) линейные операторы $S_{NM}(f)$ равномерно ограничены на единичном шаре $\|f\|_p \leq 1$ пространства $L^{p(x,y)}(E)$, т. е.

$$\sup_{N,M} \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|S_{NM}(f)\|_p < \infty; \tag{2}$$

2) $S_{NM}(f) \to I(f)$ для любого $f \in \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ всюду плотно в $L^{p(x,y)}(E)$.

Условие 2) следует из утверждения 1 и того факта, что множество $\mathfrak{D} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \bigcup\limits_{l=0}^{\infty} D_{2^k,2^l}$ всюду плотно в $L^{p(x,y)}(E)$.

Покажем равномерную ограниченность. Пусть $f \in L^{p(x,y)}(E)$ и

$$\|f\|_p \leq 1. \tag{3}$$

Обозначим через $M_{sq} = (x_s, y_q)$ точку минимума функции $p(x,y)$ на $\overline{\lambda_{Ns} \times \lambda_{Mq}}$, где $\overline{G}$ означает замыкание множества $G$. Тогда в силу (1) имеем:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |S_{NM}(f,x,y)|^{p(x,y)}\, dx\, dy = \sum_{s=1}^{N} \sum_{q=1}^{M} \int\limits_{\lambda_{Ns}} \int\limits_{\lambda_{Mq}} |S_{NM}(f,x,y)|^{p(x,y)}\, dx\, dy = \\
= \sum_{s=1}^{N} \sum_{q=1}^{M} \int\limits_{\lambda_{Ns}} \int\limits_{\lambda_{Mq}} \underbrace{\Big| \frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \int\limits_{\lambda_{Ns}} \int\limits_{\lambda_{Mq}} f(u,v)\, du\, dv \Big|}_{\mathfrak{I}_{sq}}{}^{p(x,y)-p(M_{sq})+p(M_{sq})} dx\, dy = \\
= \sum_{s=1}^{N} \sum_{q=1}^{M} \int\limits_{\lambda_{Ns}} \int\limits_{\lambda_{Mq}} |\mathfrak{I}_{sq}|^{p(x,y)-p(M_{sq})+p(M_{sq})}\, dx\, dy.
\end{aligned} \tag{4}$$

Применяя лемму и неравенство (3), выводим следующее соотношение

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{I}_{sq}|^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq \Big( \frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})} \Big( \int\limits_{\lambda_{Ns}} \int\limits_{\lambda_{Mq}} |f(u,v)| du dv \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq \\
\leq \Big( \frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})} \cdot C_0 \cdot \|f\|_p^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq C_0 \Big( \frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})}.
\end{aligned}$$

Так как $p(x,y)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица, то при $\alpha \geq 1$ получим:

$$\Big( \frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq \Big( \frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{\frac{C}{\ln \frac{1}{\sqrt{|\lambda_{Ns}|^2 + |\lambda_{Mq}|^2}}}}.$$

Из того, что $N \asymp M$, следует

$$C_1 |\lambda_{Mq}| \leq |\lambda_{Ns}| \leq C_2 |\lambda_{Mq}|, \quad 0 < C_1 \leq C_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{I}_{sq}|^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq C_0 \Big( \frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq \\
\leq C_0 \Big( \frac{1}{C_1 |\lambda_{Mq}|^2} \Big)^{\frac{C}{\ln \frac{1}{|\lambda_{Mq}| \sqrt{C_2^2+1}}}} = C_0 \Big( \frac{1}{\widetilde{C_1} |\lambda_{Mq}|} \Big)^{\frac{2C}{\ln \frac{1}{\widetilde{C_2} |\lambda_{Mq}|}}} = O(1).
\end{aligned}$$

Для $|\mathfrak{J}_{sq}|^{p(M_{sq})}$ с помощью утверждения 2 получим

$$|\mathfrak{J}_{sq}|^{p(M_{sq})} = \Big|\frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|}\int\limits_{\lambda_{Ns}}\int\limits_{\lambda_{Mq}} f(u,v)dudv\Big|^{p(M_{sq})} \le \frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|}\int\limits_{\lambda_{Ns}}\int\limits_{\lambda_{Mq}} |f(u,v)|^{p(M_{sq})}dudv.$$

Используя соотношения, полученные для $|\mathfrak{J}_{sq}|^{p(u,v)-p(M_{sq})}$ и $|\mathfrak{J}_{sq}|^{p(M_{sq})}$, из (4) имеем

$$\mathfrak{J} = O(1)\sum_{s=1}^{N}\sum_{q=1}^{M}\int\limits_{\lambda_{Ns}}\int\limits_{\lambda_{Mq}} |f(u,v)|^{p(M_{sq})}dudv. \tag{5}$$

Обозначим через $h(u,v)$ такую ступенчатую функцию, что $h(u,v) = p(M_{sq})$ при $(u,v)\in\lambda_{Ns}\times\lambda_{Mq}$. Поскольку $h(u,v)\le p(u,v)$, то из (3) и (5) с помощью леммы находим

$$\mathfrak{J} = O(1)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |f(u,v)|^{h(u,v)}\,du\,dv = O(1)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|\frac{f(u,v)}{\|f\|_h}\right|^{h(u,v)}\cdot\|f\|_h^{h(u,v)}\,du\,dv \le$$

$$\le O(1)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|\frac{f(u,v)}{\|f\|_h}\right|^{h(u,v)}\cdot 2^{h(u,v)}\|f\|_p^{h(u,v)}\,du\,dv \le$$

$$\le O(1)\cdot 2^{\overline{p}}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|\frac{f(u,v)}{\|f\|_h}\right|^{h(u,v)}\,du\,dv = O(1)\cdot 2^{\overline{p}}. \tag{6}$$

Неравенство (6) эквивалентно неравенству (2).

*Необходимость.* Покажем, что в классе функций, удовлетворяющих условию Дини–Липшица порядка $0<\alpha<1$, найдется такая функция $\widetilde{p}_\alpha(u,v)$, что для некоторой $\widetilde{f}\in L^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}$ прямоугольные частичные суммы не будут сходиться к этой функции. Для этого обобщим функции $p_\alpha(t)$ и $f(t)$, приведенные в работе [2, доказательство теоремы 1], на случай двух переменных следующим образом:

$$\widetilde{p}_\alpha(u,v) = p_\alpha(u), \qquad (u,v)\in E, \tag{7}$$

$$\widetilde{f}(u,v) = f(u), \qquad (u,v)\in E. \tag{8}$$

Легко убедиться, что $\widetilde{p}_\alpha(u,v)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица порядка $\alpha$. Далее, так как $\int\limits_0^1 |f(u)|^{p_\alpha(u)}\,dt < \infty$ (см. [2, доказательство теоремы 1]) и

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |\widetilde{f}(u,v)|^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}\,du\,dv = \int\limits_0^1 |f(u)|^{p_\alpha(u)}\,du\cdot\int\limits_0^1 dv = \int\limits_0^1 |f(u)|^{p_\alpha(u)}\,du,$$

то $\widetilde{f}\in L^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}$.

Покажем теперь, что прямоугольные частичные суммы Фурье–Хаара функции $\widetilde{f}$ не ограничены в топологии пространства $L^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}(E)$. Рассмотрим подпоследовательность $S_{2^{2n+1},M}(\widetilde{f})$. В силу (1),(7) и (8) имеем при $(u,v)\in\lambda_{2^{2n+1},s}\times\lambda_{Mq}$

$$S_{2^{2n+1},M}(\widetilde{f},u,v) = 2^{2n+1}\frac{1}{|\lambda_{Mq}|}\int\limits_{\lambda_{2^{2n+1},s}}\int\limits_{\lambda_{Mq}}\widetilde{f}(u,v)\,du\,dv = 2^{2n+1}\int\limits_{\lambda_{2^{2n+1},s}} f(u)\,du. \tag{9}$$

Последнее выражение в равенствах (9) представляет собой значение на интервале $\lambda_{2^{2n+1},s}$ одномерной частичной суммы Фурье–Хаара $Q_{2^{2n+1}}(f,u)$ для функции $f$. Повторяя далее рассуждения, проведенные в работе [2, доказательство теоремы 1], придем к соотношению

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |S_{2^{2n+1},M}(\widetilde{f},u,v)|^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}\,du\,dv\to\infty \qquad (n\to\infty),$$

а это и означает, что прямоугольные частичные суммы $S_{NM}(\widetilde{f})$ не сходятся в пространстве $L^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}(E)$ к функции $\widetilde{f}$. $\square$

Автор благодарит И. И. Шарапудинова за постановку задачи.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 10-01-00191-а).

**Библиографический список**

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632. [*Sharapudinov I. I.* Topology of the space $L^{p(x)}([0,1])$ // Math. Notes. 1979. Vol. 26, № 4. P. 796–806.]
2. *Шарапудинов И. И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 2(6). С. 275–283. [*Sharapudinov I. I.* On the basis property of the Haar system in the space $L^{p(x)}([0,1])$ and the principle of localization in the mean // Math. USSR Sb. 1986. Vol. 58, № 1. P. 279–287.]
3. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : АФЦ, 1999. 560 с. [*Kashin B. S., Saakyan A. A.* Orthogonal series. Moscow : AFC, 1999. 560 p.]
4. *Соболь И. М.* Многомерные квадратные формулы и функции Хаара. М. : Наука, 1969. 288 с. [*Sobol I. M.* Multidimensional quadratic Haar formulas and functions. Moscow : Nauka, 1969. 288 p.]
5. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 456 с. [*Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. Cambridge : University Press, 1934. 329 p.]
6. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. М. : Наука, 1967. 416 с. [*Vulih B. Z.* Introduction to functional analysis. Moscow : Nauka, 1967. 416 p.]

УДК 517.51

# ИНТЕРПОЛЯЦИЯ БИРКГОФА ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ УПОРЯДОЧЕННОЙ $\Lambda$-ВАРИАЦИИ

**В. В. Новиков**

Саратовский государственный университет
E-mail: vvnovikov@yandex.ru

В терминах обобщенной упорядоченной $\Lambda$-вариации получено достаточное условие равномерной сходимости на всей числовой прямой интерполяционного процесса Лагранжа и (0,2,3)-интерполяционного процесса Биркгофа.

**Ключевые слова:** интерполяция Лагранжа, интерполяция Биркгофа, лакунарная интерполяция, упорядоченная $\Lambda$-вариация.

**On Birkhoff Interpolation of Functions of Ordered $\Lambda$-bounded Variation**

**V. V. Novikov**

A sufficient condition for the uniform convergence of Lagrange and (0,2,3) Birkhoff interpolation on the whole real line is obtained. The condition is in terms of ordered $\Lambda$-bounded variation.

**Key words:** Lagrange interpolation, Birkhoff interpolation, lacunary interpolation, ordered $\Lambda$-variation.

## ВВЕДЕНИЕ

**Определение 1.** Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_k} = +\infty$. Говорят, что $f$ есть *функция ограниченной* $\Lambda$*–вариации* (обозначение: $f \in \Lambda BV$), если

$$\sup_{\Pi} \sum_k \frac{|f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})|}{\lambda_k} < +\infty, \tag{1}$$

где верхняя грань берется по всем системам $\Pi$ непересекающихся интервалов вида

$$I_k := (t_{2k-1}, t_{2k}) \subset [-\pi, \pi], \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{2}$$

**Определение 2.** Функция $f$ называется *функцией ограниченной упорядоченной* $\Lambda$*–вариации* (обозначение: $f \in O\Lambda BV$), если выполнено (1), причем супремум берется по всевозможным системам неналегающих интервалов (2) таких, что $I_k < I_{k+1}, k = 1, 2, \dots$, или $I_k > I_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ (запись $I_k < I_{k+1}$ или $I_k > I_{k+1}$ означает, что $I_k$ расположен левее, соответственно правее, чем $I_{k+1}$).

При $\Lambda = \{k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующие классы обозначаются $HBV$ и $OHBV$ (*гармоническая вариация*).

Приведенные определения были предложены в 70-х гг. прошлого века Ватерманом (D. Waterman) [1–4]. Роль введенных им классов функций демонстрирует, в частности, следующий результат. Пусть $C_{2\pi}$ — пространство действительных непрерывных на всей числовой прямой $2\pi$-периодических функций с равномерной нормой.

**Теорема 1** [1]. *Если $f \in C_{2\pi} \cap HBV$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f$ сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$. Если же $\Lambda BV \supseteq HBV$, причем $\Lambda BV \neq HBV$, то найдется функция $f \in C_{2\pi} \cap \Lambda BV$, ряд Фурье которой расходится, по крайней мере, в одной точке.*

Очевидно, что $\Lambda BV \subseteq O\Lambda BV$. В статье [3] Ватерман поставил вопрос, является ли это включение строгим? Утвердительный ответ, сначала для случая гармонической вариации, был получен в работе [5]. Позднее также положительный ответ был дан в [6] для случая произвольной последовательности $\Lambda$.

Вопросы сходимости ряда Фурье функций класса $O\Lambda BV$ рассматривались в заметке [7].

Хорошо известен факт, что между частичными суммами ряда Фурье и интерполяционными многочленами Лагранжа существует глубокая аналогия. В связи с этим результаты, полученные для рядов Фурье функций из классов обобщенной ограниченной вариации позже переносились на случай интерполирования. Приведем следующий характерный результат в этом направлении.

**Теорема 2** [8]. *Пусть $\alpha, \beta \in (-1, 1/2)$, $q = \max\{-1/2; \alpha; \beta\}$ и пусть $L_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами в нулях ортогонального многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Если*

$$f \in C[-1,1] \cap \Lambda BV, \tag{3}$$

*причем*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{q-1/2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1/\lambda_k\right)^{-1} < +\infty, \tag{4}$$

*то*

$$\lim_{n\to\infty} \|f(\cdot) - L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\|_{C[-1,1]} = 0, \tag{5}$$

*и, обратно, из условий* (3) *и* (5) *следует* (4).

В настоящей заметке рассматривается вопрос о сходимости интерполяционного процесса Лагранжа, а также одного специального интерполяционного процесса Биркгофа для функций из класса $f \in C_{2\pi} \cap O\Lambda BV$.

## 1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обозначим через $L_n(f,x)$, $n = 1, 2, \ldots$, тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа функции $f \in C_{2\pi}$ с узлами $\{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1)\}_{k=-n}^{n}$, а через $Q_n(f,x)$, $n = 1, 2, \ldots$, $(0,2,3)$-интерполяционный полином Биркгофа такой, что

$$Q_n(f, x_{k,n}) = f(x_{k,n}), \qquad Q_n''(f, x_{k,n}) = Q_n'''(f, x_{k,n}) = 0, \qquad k = \overline{-n, n}.$$

Отметим, что вопросы существования, единственности и явного представления для интерполяции Биркгофа, как правило, весьма непросты и в различных частных случаях решаются по-разному (см., например, [9]). Для полинома $Q_n(f,x)$ существование и единственность были доказаны среди прочего в работе [10].

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть последовательность $\Lambda$ такова, что $\lambda_k/k \to 0$ монотонно при $k \to \infty$. Тогда для любой функции $f \in C_{2\pi} \cap O\Lambda BV$ последовательности многочленов $\{L_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Q_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся к $f$ равномерно на всей числовой прямой.*

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Введем некоторые обозначения. Для $f \in C_{2\pi}$ и $n \geq 3$ положим

$$T_{n,p}^*(f) = \sum_{k=-[n/2]}^{[n/2]}{}' \left|\frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{\varphi(2k+1,n,p)}\right|, \qquad p = -n-1, \ldots, n, \qquad T_n^*(f) = \max_{-n-1\leq p\leq n} T_{n,p}^*(f),$$

где
$$\varphi(m,n,p)=\begin{cases} p-m, & \text{если } |p-m|\le 3([n/2]+1),\\ 2n-(p-m), & \text{если } p-m>3([n/2]+1),\\ -2n-(p-m), & \text{если } p-m<-3([n/2]+1).\end{cases}$$

Здесь штрих у знака суммы указывает на отсутствие (не более двух) слагаемых, у которых индекс $k$ является решением уравнения $\varphi(2k+1,n,p)=0$; кроме того, будем считать, что $x_{n+1,n}=\pi$, $x_{-n-1,n}=-\pi$. Нам понадобятся следующие леммы.

**Лемма 1** [11]. *Условие $T_n^*(f)\to 0$ при $n\to\infty$ влечет равномерную на $\mathbb{R}$ сходимость к $f$ полиномов $\{L_n(f,x)\}$.*

**Лемма 2** [12]. *Пусть $f\in C_{2\pi}$. Тогда существует абсолютная постоянная $C$ и функция $\mu_n(x)\in C_{2\pi}$, $|\mu_n(x)|<C$, не зависящая от $f$, такая, что*
$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-Q_n(f,x)-\mu_n(x)(f(x)-L_n(f,x))]=0$$
*равномерно на $\mathbb{R}$.*

**Доказательство теоремы 3.** Зафиксируем последовательность $\Lambda$, удовлетворяющую условию теоремы, функцию $f\in C_{2\pi}\cap O\Lambda BV$ и обозначим $a(k)=k/\lambda_k$. Пусть $V(\Lambda,f)$ — верхняя грань (1), фигурирующая в определении упорядоченной $\Lambda$–вариации функции $f$ на отрезке $[-\pi,\pi]$. Выберем неубывающую последовательность номеров $\{m_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}m_n=\infty$ и
$$A_n:=\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{m_n}\frac{1}{\lambda_k}\to 0,\ n\to\infty. \qquad (6)$$
Здесь $\omega(f,\delta)$ — обычный модуль непрерывности функции $f$. Тогда нетрудно проверить, что равномерно по всем $p$ выполняется оценка
$$T_{n,p}^*(f)\le C_1A_n+\frac{C_2}{a(m_n)}V(\Lambda,f), \qquad (7)$$
где $C_1,C_2$ — некоторые абсолютные константы. Поскольку $a(m_n)\to\infty$ при $n\to\infty$, из (6), (7) и леммы 1 следует, что
$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-L_n(f,x)]=0 \qquad (8)$$
равномерно по $x\in\mathbb{R}$. Равномерная сходимость последовательности $\{Q_n(f,x)\}$ следует теперь из (8) и леммы 2. □

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект* НШ-4383.2010.1).

## Библиографический список

1. *Waterman D.* On convergence of Fourier Series of functions of generalized bounded variation // Studia Math. 1972. Vol. 44. P. 107–117.
2. *Waterman D.* On $\Lambda$-bounded variation // Studia Math. 1976. Vol. 57. P. 33–45.
3. *Waterman D.* $\Lambda$-bounded variation: recent results and unsolved problems // Real Anal. Exchange. 1978–1979. Vol. 4. P. 69–75.
4. *Waterman D.* Fourier series of functions of $\Lambda$-bounded variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 74. P. 119–123.
5. *Belna C. L.* On ordered harmonic bounded variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 80. P. 441–444.
6. *Prus-Wisniowski F.* On ordered $\Lambda$-bounded variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 109. P. 375–383.
7. *Waterman D.* On the note of C. L. Belna // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 109. P. 375–383.
8. *Kvernadze G.* Uniform Convergence of Lagrange Interpolation Based on the Jacobi Nodes // J. Approx. Theory. 1996. Vol. 87. P. 179–193.
9. *Lorentz G. G., Jetter K., Riemenshcneider S. D.* Birkhoff interpolation. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley, 1983. 237 p.
10. *Sharma A., Varma A. K.* Trigonometric interpolation (0,2,3) case // Ann. Polon. Math. 1968. Vol. 21. P. 51–58.
11. *Привалов А. А.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 228–243. [*Privalov A. A.* Uniform convergence of Lagrange interpolation processes // Math. Notes. 1986. Vol. 39, № 2. P. 124-–133.]
12. *Varma A. K.,Vertesi P.* Equiconvergence of Some Lacunary Trigonometric Interpolation Polynomials // J. Approx. Theory. 1987. Vol. 50. P. 185–191.

УДК 517.983.2

# ОБ УСЛОВИИ s-РЕГУЛЯРНОСТИ Н. П. КУПЦОВА

**В. П. Скляров**

Саратовский государственный университет
E-mail: sklyarovvp@sgu.ru

Исследуется условие $s$-регулярности для оператора $Qy = -y''(x) + x^2y(x)$ в пространствах $L^p(-\infty, \infty)$.

**Ключевые слова:** многочлены и функции Эрмита, $s$-регулярность.

**The Condition of N. P. Kuptsov s-regularity**

**V. P. Sklyarov**

We investigate the condition of $s$-regularity for the operator $Qy = -y''(x) + x^2y(x)$ in the spaces $L^p(-\infty, \infty)$.

**Key words:** polynomials and Hermite functions, $s$-regularity.

Предполагается, что линейный оператор $Q$ действует из банахова пространства $X$ в $X$, $R_\lambda(Q) = \big(Q - \lambda E\big)^{-1}$. Следующее понятие было введено Н. П. Купцовым [1, с. 137] в 1968 г.

**Определение.** Оператор $Q$ будем называть *s-регулярным*, если при некотором натуральном $s$ существует действительное число $\theta$ такое, что

$$\left\| R_\lambda\left(e^{i\theta}Q^s\right)\right\| \le \frac{C}{|\mathrm{Im}\lambda|},$$

где $C$ не зависит от $\lambda$.

Пусть $Qy = -y''(x) + x^2y(x)$, а в роли пространства $X$ выступает $L^p(-\infty, \infty)$ с нормой

$$\|f\|_{L^p(-\infty,\infty)} = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}, \qquad p \ge 1.$$

В 1976 г. Н. П. Купцовым был поставлен вопрос о $s$-регулярности оператора $Q$ в пространстве $C_0(-\infty, \infty)$. Ответ оказался отрицательным [2]. Ниже исследуется $s$-регулярность оператора $Q$ в пространствах $L^p(-\infty, \infty)$.

Известно [3, с. 114], что ортонормированную систему функций этого оператора образуют функции Эрмита, определяемые равенством

$$\varphi_\nu(x) = \frac{\rho(x) H_\nu(x)}{\sqrt{2^\nu \nu! \sqrt{\pi}}}.$$

Здесь $H_\nu(x)$ — полином Эрмита:

$$H_\nu(x) = (-1)^\nu e^{x^2} \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(e^{-x^2}\right), \qquad \rho(x) = e^{-x^2/2}.$$

Собственные числа оператора задает последовательность $\lambda_\nu = 2\nu + 1$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, следовательно, $Q\varphi_\nu = \lambda_\nu \varphi_\nu$.

Нетрудно заметить, что при $p = 2$ имеем $R_\lambda f = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{a_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\, \varphi_\nu(x)$, где $a_\nu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi_\nu(x)\, dx$. Все собственные значения $\lambda_\nu$ вещественные, поэтому легко получаем оценку

$$\|R_\lambda f\|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu^2}{|\lambda_\nu - \lambda|^2} \le \frac{1}{|\,\mathrm{Im}\,\lambda|^2}\, \|f\|^2.$$

Таким образом, в пространстве $L^2_{(-\infty,\infty)}$ рассматриваемый оператор 1-регулярен.

Пусть $S_n f = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x)$, известно [1, с. 151, следствие 2.1.1], что в этом случае наличие $s$-регулярности влечет порядковое равенство $\|S_n\| = O(\ln(n+1))$, а в [4, p. 189, theorem 2] было доказано: существует натуральная подпоследовательность $n_k$ такая, что

$$\|S_{n_k}\|_{L^p_{(-\infty,\infty)}} \ge C_1 \begin{cases} (n_k)^{\frac{2}{3p} - \frac{1}{2}}, & 1 \le p \le 4/3, \\ 1, & 4/3 \le p \le 4, \\ (n_k)^{\frac{1}{6} - \frac{2}{3p}}, & 4 < p \le \infty. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, если $p \notin [4/3, 4]$, то оператор $Q$ не может быть $s$-регулярным при любом $s$. Одновременно с этим справедливо утверждение.

**Теорема.** *Если $p \in (4/3, 4)$, то при любом натуральном $s$ оператор $Qy = -y'' + x^2 y$ будет $s$-регулярным в пространстве $L^p(-\infty, \infty)$.*

**Доказательство.** В [5] было доказано, что в этом случае нормы операторов $S_n f = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu(f)\, \varphi_\nu(x)$ ограничены числом, не зависящим от $n$. Поскольку область определения $D_Q$ всюду плотна в $L^p_{(-\infty,\infty)}$, то на $D_Q$ резольвента оператора $Q^s$ будет задаваться равенством

$$R_\lambda(Q^s) f = (Q^s - \lambda E)^{-1} f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu^s - \lambda}\, \varphi_\nu(x).$$

Применив преобразование Абеля в правой части, получим

$$R_\lambda(Q^s) f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{(\lambda_{\nu+1}^s - \lambda)(\lambda_\nu^s - \lambda)}\, S_\nu f.$$

Последнее представление резольвенты влечет оценку

$$\|R_\lambda(Q^s) f\| \le C_2\, \|f\| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\left|(\lambda_{\nu+1}^s - \lambda)\,(\lambda_\nu^s - \lambda)\right|}.$$

Пусть $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$, $\operatorname{Im}\lambda = \beta \ne 0$ и $\alpha \in [\lambda_{\nu_\alpha}^s, \lambda_{\nu_\alpha+1}^s)$, тогда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\left|(\lambda_{\nu+1}^s - \lambda)\,(\lambda_\nu^s - \lambda)\right|} = \sum_{\nu=0}^{\nu_\alpha-1} + \frac{\lambda_{\nu_\alpha+1}^s - \lambda_{\nu_\alpha}^s}{\left|(\lambda_{\nu_\alpha+1}^s - \lambda)\,(\lambda_{\nu_\alpha}^s - \lambda)\right|} + \sum_{\nu=\nu_\alpha+1}^{\infty} := I_1 + I_2 + I_3.$$

Независимо от того в левой или правой половине промежутка $[\lambda_{\nu_\alpha}^s, \lambda_{\nu_\alpha+1}^s)$ оказывается $\alpha$, справедливо неравенство $I_2 \le 2/|\beta|$, а для каждой из сумм имеем:

$$I_1 \le \sum_{\nu=0}^{\nu_\alpha-1} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\left|\lambda_{\nu+1}^s - \lambda\right|^2}, \qquad I_3 \le \sum_{\nu=\nu_\alpha+1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\left|\lambda_\nu^s - \lambda\right|^2}.$$

Поскольку $\lambda_\nu = 2\nu + 1$, то теорема Лагранжа дает равенства $\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s = 2s(\xi_\nu)^{(s-1)}$, где $\xi_\nu \in (\lambda_{\nu+1}, \lambda_\nu)$, поэтому

$$\frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\lambda_\nu^s - \lambda_{\nu-1}^s} \ge 1.$$

С другой стороны, $\lambda_{\nu+1} = \lambda_\nu + 2$, следовательно,

$$\frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\lambda_\nu^s - \lambda_{\nu-1}^s} = \left[\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}}\right]^s \frac{\left(1 + \frac{2}{\lambda_\nu}\right)^s - 1}{\left(1 + \frac{2}{\lambda_{\nu-1}}\right)^s - 1} \le \left[1 + \frac{1}{\nu - \frac{1}{2}}\right]^s \le 3^s.$$

Отсюда приходим к двухсторонней оценке:

$$1 \le \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\lambda_\nu^s - \lambda_{\nu-1}^s} \le 3^s.$$

Возвращаясь к величинам $I_1$, $I_3$, заключаем

$$I_1 \le \sum_{\nu=0}^{\nu_\alpha-1} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\lambda_{\nu+2}^s - \lambda_{\nu+1}^s} \cdot \frac{\lambda_{\nu+2}^s - \lambda_{\nu+1}^s}{\left|\lambda_{\nu+1}^s - \lambda\right|^2} \le \int\limits_0^{\lambda_{\nu_\alpha}} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2},$$

$$I_3 \le \sum_{\nu=\nu_\alpha+1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\lambda_\nu^s - \lambda_{\nu-1}^s} \cdot \frac{\lambda_\nu^s - \lambda_{\nu-1}^s}{\left|\lambda_\nu^s - \lambda\right|^2} \le 3^s \int\limits_{\lambda_{\nu_\alpha}}^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Таким образом,

$$I_1 + I_3 \le 2\cdot 3^s \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}. \le 2\cdot 3^s \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+\beta^2} = \frac{4\pi\cdot 3^s}{|\beta|}.$$

Теорема доказана. □

**Следствие.** *Оператор* $Qy = -y'' + x^2y$ *будет* $s$*-регулярным при любом натуральном* $s$ *в пространстве* $L^p_{(-\infty,\infty)}$ *тогда и только тогда, когда* $p \in (4/3, 4)$.

**Доказательство.** Выше уже отмечалось, что при $p \notin [4/3, 4]$ оператор $Q$ не может быть $s$-регулярным, поэтому для доказательства следствия достаточно убедиться в отсутствии $s$-регулярности при $p = 4/3, 4$.

Предположив противное, с помощью [1, с. 140, лемма 2.4] заключаем, что нормы операторов $\operatorname*{res}\limits_{\lambda=\lambda_\nu} R_\lambda$ должны быть ограничены величиной, не зависящей от номера собственного значения. Легко заметить, что при любом $f \in L^p(-\infty,\infty)$ имеет место оценка

$$\left\| \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_n} R_\lambda \right\|_{L^p_{(-\infty,\infty)}\to L^p_{(-\infty,\infty)}} \ge \frac{\|\varphi_n\|_{L^p_{(-\infty,\infty)}} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\varphi_n(s)\,ds \right|}{\|f\|_{L^p_{(-\infty,\infty)}}}. \qquad (1)$$

Естественно, величина правой части в неравенстве (1) существенно зависит от выбора элемента $f$. Воспользуемся асимптотическим соотношением для $L^p$-нормы функции Эрмита из [4, p. 190, (2.6)]

$$\|\varphi_n\|_{L^p_{(-\infty,\infty)}} \sim \begin{cases} n^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{4}}, & 1 \le p < 4, \\ n^{-\frac{1}{8}}(\ln(n))^{\frac{1}{4}}, & p = 4, \\ n^{-\frac{1}{6p}-\frac{1}{12}}, & 4 < p \le \infty. \end{cases}$$

Знак $f(n) \sim g(n)$ здесь означает наличие двусторонней оценки $Ag(n) \le f(n) \le Bg(n)$, в которой величины $A$, $B$ не зависят от $n$. Очевидно, одновременно с этим справедливо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(s)|^p\,ds \sim \begin{cases} n^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}}, & 1 \le p < 4, \\ n^{-\frac{1}{2}}\ln(n), & p = 4, \\ n^{-\frac{1}{6}-\frac{p}{12}}, & 4 < p \le \infty. \end{cases}$$

Вернемся к (1), положив $p = 4/3$ и $f(x) = \varphi_n^3(x)$, это влечет цепочку неравенств:

$$\left\| \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_n} R_\lambda \right\|_{L^{\frac{4}{3}}_{(-\infty,\infty)}\to L^{\frac{4}{3}}_{(-\infty,\infty)}} \ge C_3 \frac{n^{\frac{1}{8}}\cdot n^{-\frac{1}{2}}\cdot \ln(n)}{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(s)|^4\,ds\right]^{\frac{3}{4}}} \ge C_4 \frac{n^{\frac{1}{8}}\cdot n^{-\frac{1}{2}}\cdot \ln(n)}{\left[n^{-\frac{1}{2}}\cdot \ln(n)\right]^{\frac{3}{4}}} = C_4\cdot \ln^{\frac{1}{4}}(n). \qquad (2)$$

При $p = 4$ полагаем $f(x) = \varphi_n^{\frac{1}{3}}(x)$ и получаем

$$\left\| \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_n} R_\lambda \right\|_{L^4_{(-\infty,\infty)}\to L^4_{(-\infty,\infty)}} \ge C_5 \frac{n^{-\frac{1}{8}}\cdot [\cdot\ln(n)]^{\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(s)|^{\frac{4}{3}}\,ds\right]^{\frac{1}{4}}} \ge C_6 \frac{n^{-\frac{1}{8}}\cdot [\cdot\ln(n)]^{\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}{\left[n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}} = C_6\cdot \ln^{\frac{1}{4}}(n). \qquad (3)$$

Отсюда следует, что нормы операторов $\operatorname*{res}\limits_{\lambda=\lambda_\nu} R_\lambda$ не могут быть ограничены величиной, не зависящей от номера собственного значения. Полученное противоречие доказывает следствие. □

## Библиографический список

1. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // УМН. 1968. Т. 23, № 4(142). С. 117–178. [*Kuptsov N. P.* Direct and converse theorems of approximation theory and semigroups of operators // Russ. Math. Surv. 1968. Vol. 23, № 4. P. 115–177.]

2. *Скляров В. П.* Еще раз о равномерных приближениях функциями Эрмита // Дифференциальные уравнения и теория функций : науч. сб. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1980. Вып. 3. С. 105—113. [*Sklyarov V. P.* Again on uniform approximation of Hermite functions // Differencial'nie uravneniya i teoriya funkcii : nauch. sb. Saratov, 1980. Iss. 3. P. 105–113.]

3. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М. : ГИФМЛ, 1962. 500 с. [*Szegö, Gábor*, Orthogonal polynomials. American Mathematical Society (AMS). Colloquium Publ. 23. New York : AMS, 1959. Vol. VIII. 421 p.]

4. *Markett C.* Norm estimates for $(C,\delta)$ means of Hermite expansions and bounds for $\delta_{eff}$ // Acta Math. Hung. 1984. Vol. 43. P. 187–198.

5. *Askey R., Wainger S.* Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Math. 1965. Vol. 87. P. 695–708.

УДК 517.538.52+517.538.53

# ЭРМИТОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДВУХ ЭКСПОНЕНТ

**А. П. Старовойтов**

Гомельский государственный университет
E-mail: svoitov@gsu.by

Для системы, состоящей из функций $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$, изучаются асимптотические свойства её аппроксимаций Эрмита–Паде $\{\pi^j_{n,\,m}(z;\, e^{\lambda_j\,\xi})\}^2_{j=1}$. В частности, для любого $z$ при $n \to \infty$ найдена асимптотика поведения разностей $e^{\lambda_j\, z} - \pi^j_{n,\,m}(z;\, e^{\lambda_j\,\xi})$, $j = 1, 2$. Полученные результаты дополняют аналогичные исследования Эрмита, Паде, Перрона, Д. Браесса, А. И. Аптекарева и других авторов.

**Ключевые слова:** совершенная система функций, совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита–Паде, асимптотические равенства, интегралы Эрмита.

**Hermitian Approximation of Two Exponents**

**A. P. Starovoitov**

We study the asymptotic properties of Hermite–Pade approximants $\{\pi^j_{n,\,m}(z;\, e^{\lambda_j\,\xi})\}^2_{j=1}$ for a system consisting of functions $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$. In particular, we determine asymptotic behavior of differences $e^{\lambda_j\, z} - \pi^j_{n,\,m}(z;\, e^{\lambda_j\,\xi})$ for $j = 1, 2$ and $n \to \infty$ for any complex number $z$. The obtained results supplement research of Pade, Perron, D. Braess and A. I. Aptekarev dealing with study of the convergence of joinnt Pade approximants for systems of exponents.

**Key words:** perffect system of functions, joint Pade approximant, Hermite–Pade approximants, asymptotic equality, Hermite integrals.

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим набор

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^j_k z^k, \qquad j = 1, 2, \ldots, r \tag{1}$$

голоморфных в нуле функций, или формальных степенных рядов. Зафиксируем произвольные целые неотрицатетельные числа $n, m_1, m_2, \ldots, m_r$. Обозначим $\sum\limits_{j=1}^{r} m_j = m$, $n_j = n + m - m_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Известно [1], что при $j = 1, 2, \ldots, r$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P^j_{n_j}$, $\deg Q_m \leqslant m$, $\deg P^j_{n_j} \leqslant n_j$, для которых

$$R^j_{n,\,m}(z) = Q_m(z) f_j(z) - P^j_{n_j}(z) = A_j z^{n+m+1} + \ldots \tag{2}$$

Если $r = 1$, то согласно теореме Паде [2, теорема 1.1.1] многочлены $Q_m(z)$, $P^1_n(z)$ определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,\,m}(z, f_1) = P^1_n(z)/Q_m(z)$, которую называют аппроксимацией Паде для $f_1(z)$. При $r \geqslant 2$ дроби $\pi^j_{n,\,m}(z) = \pi^j_{n_j,\,m}(z, f_j) = P^j_{n_j}(z)/Q_m(z)$, $j = 1, 2, \ldots, r$ условиями (2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi^j_{n,\,m}\}^r_{j=1}$ его элементы называют совместными аппроксимациями Паде (аппроксимациями Эрмита–Паде) для системы функций (1). Единственность, в частности, имеет место для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем см. в [1, 3–7]). Совершенной, в частности, является система экспонент $f_j(z) = e^{\lambda_j z}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, где $\{\lambda_j\}^r_{j=1}$ — различные комплексные числа [1, теорема 2.1]. Без формального определения этот факт был установлен Ш. Эрмитом (C. Hermite) [8].

Для одной экспоненты $e^z$, т. е. при $r = 1$, явные выражения для числителя и знаменателя $\pi_{n,\,m}(z; e^{\xi})$ получил Паде (H. Pade) [9]. Опираясь на полученные представления, он доказал, что при $n/m \to \gamma$, $0 \leqslant \gamma \leqslant +\infty$, на компактах $\mathbb{C}$ дроби $\pi_{n,\,m}(z; e^{\xi})$ равномерно сходятся к $e^z$. О. Перон

(O. Perron) [10] обобщил результаты о сходимости $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к $e^z$, доказав ее при $n+m\to\infty$. Основываясь на результатах численного эксперемента Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z-\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$. Гипотеза Г. Мейнардуса была доказана Д. Браессом (D. Braess) [11] (подробнее см. [12]): для любого комплексного $z$ при $n+m\to\infty$

$$e^z-\pi_{n,m}(z;e^{\xi})=\frac{(-1)^m\,n!\;m!\;e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!\;(n+m+1)!}\,z^{n+m+1}(1+o(1)). \tag{3}$$

При доказательстве асимптотического равенства (3) Д. Браесс существенно опирается на интегральные представления числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$, полученные О. Перроном [10]:

$$P_n^1(z;e^{\xi})=\int_0^{\infty}t^m\,(t+z)^n\,e^{-t}\,dt,\qquad Q_m(z;e^{\xi})=\int_0^{\infty}t^n\,(t-z)^m\,e^{-t}\,dt.$$

Позже выяснилось (см., например, [1, 13]), что явный вид числителей и знаменателей аппроксимаций Паде для $e^z$ и, более того, для совместных аппроксимаций Паде к набору экспонент $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^{r}$, фактически, был известен Эрмиту задолго до Паде и О. Перрона. Именно при доказательстве трансцендентности числа $e$ Эрмит (см. [8, 14]) ввел в рассмотрение интегралы

$$\begin{aligned}
M&=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{\infty}\left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}\,dx,\\
M_j&=\frac{1}{(p-1)!}\int_j^{\infty}\left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}\,dx,\\
\varepsilon_j&=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{j}\left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}\,dx,
\end{aligned}\tag{4}$$

которые при некотором простом числе $p$ дают удобные приближения к набору $\{e^j\}_{j=1}^{r}$:

$$e^j-M_j/M=\varepsilon_j/M,\qquad j=1,2,\dots,r.$$

Интегралы Эрмита (4) после небольших преобразований (см. [1, 13]) приводят к решению системы (2) для набора экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{r}$:

$$\begin{aligned}
Q_m(z)&=\frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\infty}\left[x^n\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}\,dx,\\
P_{n_j}^{j}(z)&=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^{\infty}\left[x^n\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda)^{m_i}\right]e^{-zx}\,dx,\\
R_{n,m}^{j}(z)&=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j}\left[x^n\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}\,dx.
\end{aligned}\tag{5}$$

В первых двух интегралах (5) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в $+\infty$ и $\operatorname{Re} z>0$. При $\operatorname{Re} z\leqslant 0$ значения $Q_m(z)$, $P_{n_j}^{j}(z)$ находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем $R_{n,m}^{j}(z)$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и $\lambda_j$.

Е. М. Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы экспонент. Её решение было получено А. И. Аптекаревым [13], который доказал, что при $n+m\to\infty$ для любого $j=1,2,\dots,r$ $\pi_{n_j,m}^{j}(z;e^{\lambda_j\xi})$ сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ к $e^{\lambda_j z}$. Для этого в [13] была установлена асимптотика интеграла Эрмита, определяющего в равенствах (5) $Q_m(z)$ — знаменатель совместных аппроксимаций Паде: для любого $z\in\mathbb{C}$ при $n+m\to\infty$

$$Q_m(z)=\exp\left\{-\frac{\sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_j m_j}{n+m}\,z\right\}(1+o(1)). \tag{6}$$

В данной работе при некоторых ограничениях на $m$ и $n \to \infty$ для систем из двух экспонент $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$ установлены асимптотические равенства для интегралов Эрмита, определяющих в (5) функции $R^j_{n,m}(z)$, $j = 1, 2$. Это позволило получить аналоги результата Д. Браесса для совместных аппроксимаций Паде к набору из двух экспонент. Отметим, что в диагональном случае для системы двух марковских функций асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде найдена В. А. Калягиным [15] (см. также работу [6], в которой, в частности, имеются подробные ссылки).

## АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ

**Лемма.** *Пусть $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^2$ — набор из двух экспонент с произвольными различными комплексными числами $\lambda_1$, $\lambda_2$. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty} m^2(n)/n = 0$, то для любого комплексного числа $|z| \leqslant M$ равномерно по всем $m$, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, при $n \to \infty$*

$$R^1_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{n!\, m_1!\, (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2}\, \lambda_1^{n+m_1+1}\, e^{\lambda_1 m_1 z/(n+m_1)}}{(n+m)!\, (n+m_1+1)!}\, z^{n+m+1}\, (1+o(1))\,, \tag{7}$$

$$R^2_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{n!\, m_2!\, (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1}\, \lambda_2^{n+m_2+1}\, e^{\lambda_2 m_2 z/(n+m_2)}}{(n+m)!(n+m_2+1)!}\, z^{n+m+1}\, (1+o(1))\,. \tag{8}$$

**Доказательство.** В интеграле

$$I_1(z) = \int_0^{\lambda_1} x^n\, (x-\lambda_1)^{m_1} (x-\lambda_2)^{m_2} e^{z\,(\lambda_1 - x)}\, dx$$

сделаем замену $x = \lambda_1 t$. В результате получим

$$I_1(z) = \lambda_1^{n+m_1+1} \int_0^1 t^n\, (t-1)^{m_1}\, (\lambda_1 t - \lambda_2)^{m_2}\, e^{z\,\lambda_1(1-t)}\, dt\,.$$

Перейдем здесь к новой переменной интегрирования $u = 1 - t$. Тогда

$$I_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \int_0^1 (1-u)^n\, u^{m_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2} e^{\lambda_1 z u}\, du\,.$$

Исследуем асимптотику поведения следующего интеграла при $n \to \infty$

$$J_1^0 = \int_0^1 (1-u)^n\, u^{m_1} \left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2} du.$$

Для этого подынтегральное выражение преобразуем с помощью формулы бинома Ньютона, а затем воспользуемся свойствами бета-функции Эйлера:

$$J_1^0 = \sum_{k=0}^{m_2} C^k_{m_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^k \int_0^1 (1-u)^n\, u^{m_1+k}\, du \; =$$

$$= \frac{n!\, m_1!}{(n+m_1+1)!} \left[1 + \sum_{k=1}^{m_2} C^k_{m_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^k \frac{(m_1+1)(m_1+2)\cdots(m_1+k)}{(n+m_1+2)\cdots(n+m_1+k+1)}\right].$$

Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{m_2} C^k_{m_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^k \frac{(m_1+1)(m_1+2)\cdots(m_1+k)}{(n+m_1+2)\cdots(n+m_1+k+1)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_2} C^k_{m_2} \left|\frac{\lambda_1 m}{(\lambda_2 - \lambda_1)(n+m+1)}\right|^k = \left[1 + \frac{|\lambda_1| m}{|\lambda_2 - \lambda_1|(n+m+1)}\right]^{m_2} - 1,$$

то, учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} m^2/n = 0$, правая часть последнего соотношения убывает к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$J_1^0 = \frac{n!\, m_1!}{(n+m_1+1)!}\, (1+o(1))\;. \tag{9}$$

Аналогично показывается, что при $p = 1, 2, \dots$ и $n \to \infty$

$$J_1^p = \int_0^1 (1-u)^n\, u^{m_1+p} \left(1 + \frac{\lambda_1\, u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2} du = \frac{n!\,(m_1+p)!}{(n+m_1+p+1)!}\,(1+o(1))\,. \tag{10}$$

Подберем теперь $u_0$ так, чтобы $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0$. Тогда при $n \to \infty$

$$u_0 = J_1^1/J_1^0 = (m_1/(n+m_1))\,(1+o(1))\,. \tag{11}$$

Следовательно, при достаточно больших $n$ $u_0 \in [0,\, 1]$. По формуле Тейлора:

$$e^{\lambda_1 u z} = e^{\lambda_1 u_0 z} e^{\lambda_1 (u-u_0) z} = e^{\lambda_1 u_0 z}\left(1 + \lambda_1 z(u-u_0) + \frac{(\lambda_1 z)^2 (u-u_0)^2}{2!} + \dots\right) =$$
$$= e^{\lambda_1 u_0 z} + \lambda_1 z(u-u_0)\, e^{\lambda_1 u_0 z} + \rho_u(z),$$

где при $|z| \leqslant M$ и $u \in [0,\, 1]$

$$|\rho_u(z)| \leqslant M_1 |u-u_0|^2 \left\{\frac{(|\lambda_1| M)^2}{2!} + \dots + \frac{(|\lambda_1| M)^n}{n!} + \dots\right\} \leqslant M_2 (u-u_0)^2. \tag{12}$$

Учитывая выбор $u_0$, равенства (9) и (11), получим, что при $n \to \infty$

$$I_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \left\{\frac{n!\, m_1!}{(n+m_1+1)!}\; e^{\frac{\lambda_1 m_1}{n+m_1} z}\,(1+o(1)) + A\rho_u(z)\right\},$$

где при достаточно больших $n$

$$|A\rho_u(z)| \leqslant \int_0^1 (1-u)^n\, u^{m_1} \left(1 + \frac{|\lambda_1|\, u}{|\lambda_2 - \lambda_1|}\right)^{m_2} |\rho_u(z)|\, du \leqslant$$
$$\leqslant 2M_1 \left\{\frac{n!\,(m_1+2)!}{(n+m_1+3)!} + \frac{2m_1}{n+m_1} \cdot \frac{n!\,(m_1+1)!}{(n+m_1+2)!} + \left(\frac{m_1}{n+m_1}\right)^2 \frac{n!\, m_1!}{(n+m_1+1)!}\right\}.$$

При получении последнего неравенства воспользовались неравенством (12), равенствами (9)–(11), учитывая при этом, что правая часть в (9) и (10) не зависит от $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Из двух последних соотношений окончательно получаем, что при $n \to \infty$

$$I_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \frac{n!\, m_1!}{(n+m_1+1)!}\, e^{\frac{\lambda_1 m_1}{n+m_1} z}\,(1+o(1))\,.$$

Равенство (7) доказано. Доказательство (8) — аналогично. Лемма доказана. □

**Теорема 1.** *Пусть* $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^2$ *— набор из двух экспонент с произвольными различными комплексными числами* $\lambda_1$, $\lambda_2$. *Тогда если* $\lim\limits_{n\to\infty} m^2(n)/n = 0$, *то для любого комплексного числа* $z$ *равномерно по всем* $m$, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, *при* $n \to \infty$

$$e^{\lambda_1 z} - \pi^1_{n_1,\, m}(z;\, e^{\lambda_1 \xi}) =$$
$$= (-1)^m \frac{n! m_1! (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \lambda_1^{n+m_1+1} z^{n+m+1}}{(n+m)!(n+m_1+1)!}\, e^{\frac{\lambda_1 m_1}{n+m_1} z} e^{\frac{\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2}{n+m} z}\,(1+o(1))\,, \tag{13}$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi^2_{n_2,\, m}(z;\, e^{\lambda_2 \xi}) =$$
$$= (-1)^m \frac{n!\, m_2!\, (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1} \lambda_2^{n+m_2+1} z^{n+m+1}}{(n+m)!(n+m_2+1)!}\, e^{\frac{\lambda_2 m_2}{n+m_2} z} e^{\frac{\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2}{n+m} z}\,(1+o(1))\,. \tag{14}$$

**Доказательство.** Утверждения теоремы 1 очевидным образом вытекают из равенств (7), (8) и (6). Теорема 1 доказана. □

По определению $m = m_1 + m_2$, где $m_1$, $m_2$ — целые неотрицательные числа. Анализируя доказательство леммы 1, нетрудно заметить, что при $m \to \infty$ и ограниченности одного из слагаемых $m_j$ утверждение теоремы можно усилить.

**Теорема 2.** *Пусть* $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^2$ *— набор из двух экспонент с произвольными различными комплексными числами* $\lambda_1$, $\lambda_2$, $m = m_1 + m_2$ *и* $m_2$ *— ограничено. Тогда для любого комплексного* *числа $z$: 1) асимптотическое равенство* (13) *справедливо равномерно по всем $m$, $0 \leqslant m \leqslant m_1(n)$, где $m_1(n) = o(n)$, при $n \to \infty$; 2) асимптотическое равенство* (14) *справедливо равномерно по всем $m$, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, где $m(n) = o(\sqrt{n})$, при $n \to \infty$.*

В простейшей ситуации из теоремы 1 получаем

**Следствие.** *Пусть $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, $m = m_1$, $m_2 = 0$. Тогда для любого комплексного числа $z$ равномерно по всем $m$, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, где $m(n) = o(\sqrt{n})$, при $n \to \infty$*

$$e^z - \pi^1_{n,m}(z;\, e^{\xi}) = \frac{(-1)^m\ n!\,m!\ e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!\ (n+m+1)!}\ z^{n+m+1}\ (1+o(1))\,, \tag{15}$$
$$e^{2z} - \pi^2_{n+m,m}(z;\, e^{2\xi}) = \frac{2^{n+1}\, e^{mz/(n+m)}}{(n+m)!\ (n+1)!}\ z^{n+m+1}\,(1+o(1))\,.$$

В силу единственности аппроксимации Паде отсюда и из (3) следует, что $\pi^1_{n,m}(z;\, e^{\xi})$ — совместная аппроксимация Паде для набора экспонент $\left\{e^z,\, e^{2z}\right\}$ совпадает с аппроксимацией Паде $\pi_{n,m}(z;\, e^{\xi})$ функции $e^z$. Согласно теореме Д. Браесса асимптотическое равенство (15) верно при $n+m \to \infty$, что согласуется с первым утверждением теоремы 2. Можно показать, что при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ и $n = m_1 = m_2$ равенства (13), (14) не сохраняются. Поэтому ограничения на рост $m$ в теореме 1, вообще говоря, необходимы.

### Библиографический список


1. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. : Наука, 1988. 256 с. [*Nikishin E. M., Sorokin V. N.* Rational approximations and orthogonality. Moscow : Nauka, 1988. 256 p.]

2. *Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М. : Мир, 1986. 502 с. [*Baker G. A. Jr., Graves-Morris P.* Pade approximants. Extensions and applications : Encyclopedia Math. Appl. Vol. 13, 14. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley, 1981. 540 p.]

3. *Mahler K.* Perfect systems // Compositio mathematica. 1968. Vol. 19, № 2. P. 95–166.

4. *Jager H. A.* A multidimensional generalization of the Pade table // Proc. Nederl. Acad. Wetensh. Ser. A. 1964. Vol. 67. P. 192–249.

5. *Никишин Е. Н.* О системе марковских функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. 1979. № 4. С. 60–63. [*Nikishin E. M.* A system of Markov functions // Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Math. Mech. 1979. № 4. P. 60–63.]

6. *Аптекарев А. И., Лысов В. Г.* Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде // Мат. сб. 2010. Т. 201, вып. 2. С. 29–78. [*Aptekarev A. I., Lysov V. G.* Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite–Pade // Sb. Math. 2010. Vol. 201, № 2. P. 183–234.]

7. *Аптекарев А. И., Буслаев В. И., Мартинес-Финкельштейн А., Суетин С. П.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены // УМН. 2011. Т. 66, № 6(402). С. 37–122. [*Aptekarev A. I., Buslaev V. I., Martinez-Finkelshtein A., Suetin S. P.* Pade approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials // Russ. Math. Surv. 2011. Vol. 66, № 6. P. 1049–1131.]

8. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // C. R. Akad. Sci.(Paris). 1873. Vol. 77. P. 18–293.

9. *Pade H.* Memoire sur les developpement en fractions continues de la fonction exponential // Ann Sci. Ecole Normale Sup. (3). 1899. Vol. 16 P. 394–426.

10. *Perron O.* Lehre von den Kettenbruchen. Stuttgart : Teubner. 1957. 316 p.

11. *Braess D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of $e^x$, II // J. Approx. Theory. 1984. Vol. 40, № 4. P. 375–379.

12. *Petrusherv P. P., Popov V. A.* Rational approximation of real function. Cambridge : University Press, 1987. 401 p.

13. *Аптекарев А. И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1981. № 1. С. 68–74. [*Aptekarev A. I.* Convergence of rational approximations to a set of exponents// Moscow Univ. Math. Bull. 1981. Vol. 36, № 1. P. 81–86.]

14. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей : в 2 т. Т. I. Арифметика. Алгебра. Анализ. М. : Наука, 1987. 432 с. [*Klein F.* Elementary mathematics from the point of view of the highest. Vol. I. Arithmetic. Algebra. Analysis. Moscow : Nauka, 1987. 432 p.]

15. *Калягин В. А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности // Мат. сб. 1979. Т. 110(152). С. 609–627. [*Kaljagin V. A.* On a class of polynomials defined by two orthogonality relations // Math. USSR Sb. 1981. Vol. 38, № 4. P. 563–580.]

УДК 517.518.4

# О СВОЙСТВАХ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ ЧЛЕНОВ РЯДА $\sum \frac{1}{k}\sin kx$

**С. А. Теляковский**

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
Email: sergeyAltel@yandex.ru

Получено необходимое и достаточное условие интегрируемости со степенным весом суммы модулей блоков исследуемого ряда.

**Ключевые слова:** блоки членов ряда, степенной вес.

**On Properties of the Moduli of Blocks of the Terms of the Series $\sum \frac{1}{k}\sin kx$**

**S. A. Telyakovskii**

A necessary and sufficient condition is obtained ensuring the integrability with the power weight of the sum of the moduli of blocks of the terms of series under investigation.

**Key words:** blocks of the terms a series, power weight.

Доклад автора на 16 Саратовской зимней школе, прочитанный в январе 2012 года, был посвящён свойствам рядов из абсолютных величин блоков членов ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx, \tag{1}$$

играющего важную роль при изучении функций ограниченной вариации.

Пусть $\Lambda$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел $1 = n_1 < n_2 < \ldots$, для которой сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_j}.$$

С помощью последовательности $\Lambda$ строится ряд из модулей блоков членов ряда (1)

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Bigl|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{1}{k}\sin kx\Bigr|. \tag{2}$$

Ряд (2) сходится при всех $x$ и его сумма, которую обозначим $g_\Lambda(x)$, непрерывна на $(0,\pi]$.

В настоящей статье приводится доказательство одного результата, представленного в докладе. Остальные утверждения доклада обоснованы в [1].

**Теорема.** *При $\gamma\in(0,1)$ интеграл*

$$\int_0^{\pi} g_\Lambda(x)\,\frac{dx}{x^\gamma} \tag{3}$$

*сходится в том и только том случае, когда сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_{j+1}}\bigl(n_{j+1}-n_j\bigr)^{\gamma}. \tag{4}$$

Доказательство теоремы по схеме рассуждений из работы Р. М. Тригуб [2] опирается на следующее предложение.

**Лемма.** *Если $1\leqslant\alpha\leqslant\beta$ и $\gamma\in(0,1)$, то для интеграла*

$$I = I(\alpha,\beta;\gamma) := \int_0^{\pi}|\sin\alpha x|\cdot|\sin\beta x|\,\frac{dx}{x^{1+\gamma}}$$

*справедливы оценки*

$$c_1(\gamma)\alpha^\gamma \leqslant I(\alpha,\beta;\gamma) \leqslant c_2(\gamma)\alpha^\gamma, \tag{5}$$

*где положительные величины $c_1(\gamma)$ и $c_2(\gamma)$ зависят только от $\gamma$.*

**Доказательство леммы** Удобно записать интеграл $I$ следующим образом:

$$I = \alpha^\gamma \int\limits_0^{\alpha\pi} |\sin x| \cdot \left|\sin \frac{\beta}{\alpha} x\right| \frac{dx}{x^{1+\gamma}}.$$

Правая оценка (5) устанавливается легко:

$$I < \alpha^\gamma \int\limits_0^{\infty} |\sin x| \frac{dx}{x^{1+\gamma}} < \alpha^\gamma \left( \int\limits_0^1 \sin x \frac{dx}{x^{1+\gamma}} + \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\gamma}} \right) < \alpha^\gamma \left( \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\gamma} + \frac{1}{\gamma} \right) = \alpha^\gamma \left( \frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{\gamma} \right).$$

Для оценки интеграла $I$ снизу уменьшим промежуток интегрирования и воспользуемся тем, что

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x, \qquad 0 < x \leqslant 1.$$

Тогда получим:

$$I > \alpha^\gamma \int\limits_{\pi\alpha/(4\beta)}^{1} |\sin x| \cdot \left|\sin \frac{\beta}{\alpha} x\right| \frac{dx}{x^{1+\gamma}} > \frac{2}{\pi} \alpha^\gamma \int\limits_{\pi\alpha/(4\beta)}^{1} \left|\sin \frac{\beta}{\alpha} x\right| \frac{dx}{x^\gamma} = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\beta^{1-\gamma}} \int\limits_{\pi/4}^{\beta/\alpha} |\sin x| \frac{dx}{x^\gamma}.$$

Далее,

$$\int\limits_{\pi/4}^{\beta/\alpha} |\sin x| \frac{dx}{x^\gamma} > \int\limits_{\pi/4}^{\beta/\alpha} \sin^2 x \frac{dx}{x^\gamma} = \frac{1}{2} \int\limits_{\pi/4}^{\beta/\alpha} (1 - \cos 2x) \frac{dx}{x^\gamma} = \frac{1}{2^{2-\gamma}} \int\limits_{\pi/2}^{2\beta/\alpha} (1 - \cos x) \frac{dx}{x^\gamma}.$$

Покажем, что значение интеграла

$$\int\limits_{\pi/2}^{2\beta/\alpha} (-\cos x) \frac{dx}{x^\gamma} \tag{6}$$

положительно. Для этого разобьём промежуток $[\pi/2, 2\beta/\alpha]$ на отрезки длины $2\pi$

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi\right], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Длина последнего отрезка при этом будет, вообще говоря, меньше $2\pi$.

На интервалах

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right)$$

значения косинуса отрицательны. Поэтому

$$- \int\limits_{(\pi/2)+2k\pi}^{(\pi/2)+2(k+1)\pi} \cos x \frac{dx}{x^\gamma} = - \int\limits_{(\pi/2)+2k\pi}^{(\pi/2)+(2k+1)\pi} \cos x \frac{dx}{x^\gamma} - \int\limits_{(\pi/2)+2k\pi}^{(\pi/2)+(2k+1)\pi} \cos(x+\pi) \frac{dx}{(x+\pi)^\gamma} =$$

$$= - \int\limits_{(\pi/2)+2k\pi}^{(\pi/2)+(2k+1)\pi} \cos x \left( \frac{1}{x^\gamma} - \frac{1}{(x+\pi)^\gamma} \right) dx > 0.$$

Таким образом оцениваются части интеграла (6) по всем отрезкам указанного разбиения промежутка интегрирования, в том числе и по последнему отрезку.

Значит,

$$\int\limits_{\pi/4}^{\beta/\alpha} |\sin x| \frac{dx}{x^\gamma} > \frac{1}{2^{2-\gamma}} \int\limits_{\pi/2}^{2\beta/\alpha} \frac{dx}{x^\gamma} = \frac{1}{2^{2-\gamma}(1-\gamma)} \left[ \left(\frac{2\beta}{\alpha}\right)^{1-\gamma} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\gamma} \right] = \frac{1}{2(1-\gamma)} \left[ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1-\gamma} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1-\gamma} \right].$$

Так как $\beta \geqslant \alpha$, имеем

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1-\gamma} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1-\gamma} \geqslant \left[1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1-\gamma}\right]\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1-\gamma}.$$

Из приведенных оценок получаем

$$I > \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\beta^{1-\gamma}}\frac{1}{1-\gamma}\left[1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1-\gamma}\right]\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1-\gamma}$$

и лемма доказана.

**Доказательство теоремы.** Проведя преобразование Абеля, находим:

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{1}{k}\sin kx = \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left[\left(\overline{D}_k(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x)\right) + \frac{1}{n_{j+1}}\left(\overline{D}_{n_{j+1}-1}(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x)\right)\right], \qquad (7)$$

где $\overline{D}_k(x)$ – сопряжённое ядро Дирихле порядка $k$.

Так как

$$\overline{D}_k(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x) = \frac{1}{\sin(x/2)}\sin\frac{k-n_j+1}{2}x \cdot \sin\frac{k+n_j}{2}x,$$

то с помощью правой оценки (5) получаем

$$\int\limits_0^{\pi}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left(\overline{D}_k(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x)\right)\right|\frac{dx}{x^{\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant c_3(\gamma)\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left(k-n_j+1\right)^{\gamma} < c_3(\gamma)\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{1}{(k+1)^{2-\gamma}}.$$

где $c_3(\gamma)$ зависит только от $\gamma$.

Поэтому используя (7), видим, что для каждого $N$

$$\left|\int\limits_0^{\pi}\sum_{j=1}^{N}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{1}{k}\sin kx\right|\frac{dx}{x^{\gamma}} - \int\limits_0^{\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_{j+1}}\left|\overline{D}_{n_{j+1}-1}(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x)\right|\frac{dx}{x^{\gamma}}\right| <$$

$$< c_3(\gamma)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{2-\gamma}} < \infty. \qquad (8)$$

Из (8) вытекает утверждение теоремы, так как согласно (5) интеграл

$$\int\limits_0^{\pi}\left|\overline{D}_{n_{j+1}-1}(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x)\right|\frac{dx}{x^{\gamma}}$$

имеет точный порядок $\left(n_{j+1} - n_j\right)^{\gamma}$.

Заметим, наконец, что если положить $m_j = \min\left(n_j, n_{j+1} - n_j\right)$, то приведенное в конце работы [2] рассуждение О. И. Кузнецовой показывает, что ряды (4) и

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_j}m_j^{\gamma} \qquad (9)$$

сходятся или расходятся одновременно.

В [1] доказано, что сходимость ряда (9) является достаточным условием сходимости интеграла (3).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 11-01-00417).

**Библиографический список**

1. *Теляковский С. А.* О свойствах блоков членов ряда $\sum \frac{1}{k}\sin kx$ // Украинский мат. журн. 2012. Т. 64, № 5. С. 713–718. [*Telyakovskii S. A.* On properties of blocks of the series $\sum \frac{1}{k}\sin kx$ // Ukrainian Math. J. 2012. Vol. 64. P. 713–718.]

2. *Trigub R. M.* A note on the paper of Telyakovskii «Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation» // East J. on Approx. 2007. Vol. 13, № 1. P. 1–6.


УДК 517.97

# МЕТОД ГЛОБАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ


**Е. А. Трушкова**

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: katerinatr@mail.ru



Представлена новая модификация метода глобального улучшения управления на базе известного метода В. Ф. Кротова для задач управления гамильтоновыми системами одного класса. Проведены расчеты по управлению квантовой динамической системой, представляющей известную модель вращения плоской молекулы.


**Ключевые слова:** гамильтонова система, оптимальное управление, метод глобального улучшения.

**Global Improvement Method for Hamiltonian Systems with Controllable Coefficients**

**E. A. Trushkova**


The new modification of global improvement control method for one class of Hamiltonian systems that is based on the Krotov method is presented. The calculations for a quantum dynamical system representing the well studied example of the rotation of a planar molecule are given.


**Key words:** Hamiltonian system, optimal control, global improvement method.

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Широкий и актуальный класс задач изменения квантового состояния атомов и молекул под действием управляемого внешнего поля сводится к задаче оптимального управления гамильтоновой системой с управляемыми коэффициентами (см., например, [1]). А именно уравнение Шрёдингера после разложения волновой функции и соответствующих операторов по полной системе собственных функций заменяется конечномерной аппроксимацией — динамической системой с управлением, в которой роль фазовых координат играют коэффициенты разложения волновой функции. Дальнейшее рассмотрение действительной и мнимой части фазовых координат приводит к задаче управления гамильтоновой системой.

Рассмотрим задачу управления гамильтоновой системой:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = A\left(u(t)\right)x(t), \qquad t \in [t_I, t_F],\\ x(t_I) = x_I, \qquad x \in R^{2n}, \qquad u : [t_I, t_F] \to R^p, \qquad u(\cdot) \in U(m, u_{low}, u_{up}),\\ J(x,u) = F\left(x(t_F)\right) = \left(x(t_F) - x^*\right)^T\left(x(t_F) - x^*\right) \to \min,\end{gathered} \tag{1}$$

где $x(t)$ — кусочно дифференцируема, $U(m, u_{low}, u_{up})$ — множество функций, принимающих постоянное значение на полуотрезках $[t_I + ih, t_I + (i+1)h)$, $i = \overline{0, m-1}$, $h = (t_F - t_I)/m$ и подчиняющихся ограничениям $u_{low} \le u(t) \le u_{up}$ (неравенства понимаются как покоординатные),

$$A\left(u(t)\right) = \begin{pmatrix} 0 & P(u(t)) \\ -P(u(t)) & 0 \end{pmatrix},$$

$P(u)$ — симметрическая матрица, непрерывная по $u$, $x^* \in R^{2n}$ — заданная точка. Нетрудно видеть, что данная задача является задачей наилучшего попадания в заданную точку.

Система имеет динамический инвариант $S = \sum\limits_{i=1}^{2n} x_i^2(t_I) = \sum\limits_{i=1}^{2n} x_i^2(t)$, следовательно, исходный квадратичный функционал качества перепишется в линейном виде $F(x(t_F)) = \left(x(t_F) - x^*\right)^T \times \left(x(t_F) - x^*\right) = S + x^{*T}x^* - 2x^{*T}x(t_F)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $x^{*T}x^* = S$, поэтому целевой функционал окончательно примет вид

$$F(x(t_F)) = 2S - 2x^{*T}x(t_F).$$

Введем в рассмотрение дискретную задачу управления:

$$\begin{gathered} y(t+h) = f\left(t, y(t), u(t)\right), \qquad t \in \{t_I, t_I + h, \ldots, t_F - h\}, \\ y(t_I) = x_I, \qquad y \in R^{2n}, \qquad u \in U(t, m, u_{low}, u_{up}) \subset R^p, \qquad F\left(x(t_F)\right) \to \min, \end{gathered} \tag{2}$$

где $f(t, y(t), u(t))$ — решение задачи Коши

$$\dot{z}(\tau) = A\left(u(t)\right) z(\tau), \qquad \tau \in [t, t+h], \qquad z(t) = y(t), \tag{3}$$

взятое в точке $\tau = t + h$.

Поставим задачу улучшения управления для исходной системы: пусть имеется допустимая пара $(x^I, u^I)$ задачи (1), требуется найти допустимую пару $(x^{II}, u^{II}))$ задачи (1) такую, чтобы выполнялось неравенство $F\left(x^{II}(t_F)\right) \le F\left(x^I(t_F)\right)$. Для системы (2) аналогично: пусть имеется допустимая пара $(y^I, u^I)$ задачи (2), требуется найти допустимую пару $(y^{II}, u^{II}))$ задачи (2) такую, чтобы выполнялось неравенство $F\left(y^{II}(t_F)\right) \le F\left(y^I(t_F)\right)$.

Заметим, что множества допустимых управлений для задач (1) и (2) совпадают и, кроме того, для каждого допустимого управления $\bar{u}(t)$ значения функционала качества на соответствующих траекториях $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ совпадают, т. е. верно равенство $F\left(\bar{x}(t_F)\right) = F\left(\bar{y}(t_F)\right)$. Следовательно, задачи улучшения управления для (1) и (2) эквивалентны.

## 2. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ГЛОБАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ

Для решения поставленной задачи улучшения управления будем использовать метод глобального улучшения [2, 3], а именно соотношения метода для линейной по $x$ динамической системы с линейным функционалом качества из [4].

Глобальный метод улучшения для задачи (2) состоит из следующих шагов.

1. Имеем начальный допустимый процесс $(y^I(t), u^I(t))$.
2. Ищем функцию $\varphi(t, y)$ из соотношений

$$\varphi(t, y) = \varphi\left(t + h, f\left(t, y, u^I(t)\right)\right), \qquad t \in \{t_I, t_I + h, \ldots, t_F - h\}, \qquad \varphi(t_F, y) = 2S - F(y). \tag{4}$$

3. Строим функцию

$$\widetilde{u}(t, y) = \arg\max_{u \in U} \left(\varphi\left(t + h, f(t, y, u)\right)\right), \qquad t \in \{t_I, t_I + h, \ldots, t_F - h\}.$$

4. Находим улучшенный допустимый процесс из соотношений

$$y(t+h) = f\left(t, y(t), \widetilde{u}(t, y(t))\right), \qquad t \in \{t_I, t_I + h, \ldots, t_F - h\}, \qquad y(t_I) = x_I.$$

При программной реализации второго шага метода на задачах большой размерности возникают трудности. Следующая теорема позволяет осуществить второй шаг более эффективно, так как сводит его к решению одной задачи Коши.

**Теорема 1.** *Функция $\varphi(t, y) = \psi^T(t) y$, где $\psi(t)$ — решение задачи Коши*

$$\dot{\psi}(t) = A\left(u^I(t)\right)\psi(t), \qquad t \in [t_I, t_F], \qquad \psi(t_F) = 2x^*,$$

*разрешает соотношения* (4).

**Доказательство.** Для указанной в условии теоремы функции $\varphi(t, y)$ проверим выполнение последнего из соотношений (4). Имеем:

$$\varphi(t_F, y) = \psi^T(t_F) y = 2x^{*T} y = 2S - \left(2S - 2x^{*T} y\right) = 2S - F(y),$$

следовательно, проверяемое соотношение верно.

Рассмотрим соотношения (4) при $t = t_F - h$:

$$\varphi(t_F - h, y) = \varphi\left(t_F, f\left(t_F - h, y, u^I(t_F - h)\right)\right). \tag{5}$$

Используя (3), преобразуем правую часть равенства (5):

$$\varphi\left(t_F, f\left(t_F-h, y, u^I(t_F-h)\right)\right)=\psi^T(t_F) f\left(t_F-h, y, u^I(t_F-h)\right)=\psi^T(t_F) M(t_F) y,$$

где $M(t_F)=e^{A\left(u^I(t_F-h)\right)h}$ — значение при $\tau=t_F$ фундаментальной матрицы решений задачи Коши

$$\dot z(\tau)=A\left(u^I(t_F-h)\right)z(\tau), \qquad \tau\in[t_F-h, t_F], \qquad z(t_F-h)=y,$$

обращающейся при $\tau=t_F-h$ в единичную матрицу.

По условию теоремы и в силу рассматриваемого класса управлений $U(t, m, u_{low}, u_{up})$ на отрезке $[t_F-h, t_F]$ функция $\psi(t)$ является решением задачи Коши:

$$\dot z(\tau)=A\left(u^I(t_F-h)\right)z(\tau), \qquad \tau\in[t_F-h, t_F], \qquad z(t_F)=\psi(t_F),$$

поэтому левая часть (5) примет вид

$$\varphi(t_F-h, y)=\psi^T(t_F-h)y=\psi^T(t_F)\left(M^T(t_F)\right)^{-1}y.$$

В силу свойств матричной экспоненты и справедливости равенства $A=-A^T$ можем записать

$$M(t_F)=e^{A\left(u^I(t_F-h)\right)h}=e^{-A^T\left(u^I(t_F-h)\right)h}=\left(M^T(t_F)\right)^{-1},$$

следовательно, левая и правая части доказываемого равенства совпадают.

Для полного доказательства теоремы достаточно рассмотреть аналогичным образом соотношения (4) последовательно при $t=t_F-2h, \ldots, 0$. □

### 3. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КВАНТОВОЙ СИСТЕМОЙ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

Рассмотрим известный пример вращения плоской молекулы [1]. Состояние системы в момент времени $t$ описывается точкой $\psi(t)\in L^2(\Omega,\mathbb{C})$, где $\Omega$ — одномерный тор. Уравнение Шрёдингера записывается в виде

$$i\frac{\delta\psi}{\delta t}(t,\theta)=-\Delta\psi(t,\theta)+u(t)\cos\theta\psi(t,\theta), \tag{6}$$

где $\Delta$— оператор Лапласа–Бельтрами на $\Omega$. Самосопряженный оператор $\Delta$ имеет чисто дискретный спектр $\{k^2,\, k\in\mathbb{N}\}$. Все его собственные значения имеют кратность 2, а собственное значение 0 — простое. Собственное значение 0 соответствует постоянным функциям, а собственное значение $k^2$ при $k>0$ соответствует двум собственным функциям $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(k\theta)$ и $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(k\theta)$. Гильбертово пространство $H=L^2(\Omega,\mathbb{C})$ разбивается на два подпространства $H_e$ и $H_o$ — пространства четных и нечетных функций из $H$ соответственно. Пространства $H_e$ и $H_o$ устойчивы под действием динамики (6).

Наша цель — в подпространстве $H_o$ перевести волновую функцию $\psi(t,\theta)$ из первого собственного подпространства (соответствующего собственному значению 1) во второе (соответствующее собственному значению 4).

Перепишем уравнение (6) в виде

$$\frac{\delta\psi}{\delta t}(t,\theta)=i\Delta\psi(t,\theta)-iu(t)\cos\theta\psi(t,\theta), \tag{7}$$

разложим по собственным функциям $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(k\theta)$ волновую функцию:

$$\psi(t,\theta)=\sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(k\theta),$$

а также операторы $i\Delta$ и $-iu(t)\cos\theta$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{dz}{dt}=(A+u(t)B)z.$$

Аппроксимации Галеркина порядка $N$ для $A$, $B$ запишутся в виде

$$A^{(N)} = -\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (N-1)^2 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N^2 i \end{pmatrix}, \qquad B^{(N)} = -i\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая конечномерная аппроксимация последнего уравнения запишется как

$$\frac{dz}{dt} = (A^{(N)} + u(t)B^{(N)})z, \qquad z \in \mathbb{C}^N.$$

После выделения в этом уравнении вещественной и мнимой части ($z = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^N$, $x = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2N}$) получаем управляемую гамильтонову систему рассматриваемого выше класса систем:

$$\dot{x}(t) = A\left(u(t)\right) x(t),$$

где $P(u) = i\left(A^{(N)} + B^{(N)}u\right)$.

В [1] показано, что при замене исходной системы ее аппроксимацией Галеркина порядка $N = 22$ ошибка будет меньше $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-6}$, если $\|u(t)\|_{L^1} \le 13/3$. Применим вышеописанную модификацию метода глобального улучшения к задаче

$$\dot{x}(t) = A\left(u(t)\right) x(t), \qquad t \in [0, 20],$$
$$x(0) = (1, 0, \dots, 0)^T, \qquad x \in R^{2N}, \qquad N = 22, \qquad u \in [-1/3, 1/3],$$

с функционалом наилучшего попадания в точку $x^* = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$ (что соответствует выводу модуля второй компоненты $z_2(t)$ на единицу). Результаты расчетов по улучшению начального управления $u^I = 0$ для каждой четной из 10 итераций представлены в следующей таблице.

| Номер итерации | $F\left(x(t_F)\right)$ | $\lvert z_2(t_F)\rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 0 |
| 2 | 0.00013 | 0.999993 |
| 4 | $1.6{\cdot}10^{-5}$ | 0.999994 |
| 6 | $5.5{\cdot}10^{-6}$ | 0.999995 |
| 8 | $5.1{\cdot}10^{-6}$ | 0.999995 |
| 10 | $5.1{\cdot}10^{-6}$ | 0.999995 |

Рис. 1 представляет найденное управление, рис. 2 — соответствующую динамику модуля второй компоненты $z_2(t)$. Интересным оказался тот факт, что найденное управление сильно напоминает предложенную в [3] (без привлечения теории оптимального управления) функцию управления $u(t) = \cos(3t)/q$, где $q$ выбиралось из условия $\|u(t)\|_{L^1} \le 13/3$ на рассматриваемом отрезке времени $[0, t_F]$.

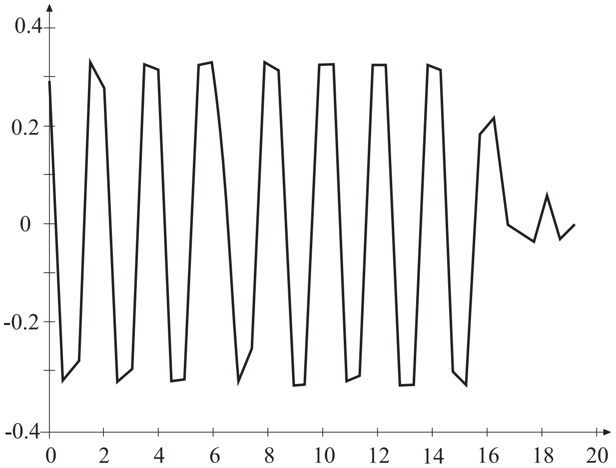



Рис. 1. Полученное управление при начальном $u^I(t) = 0$

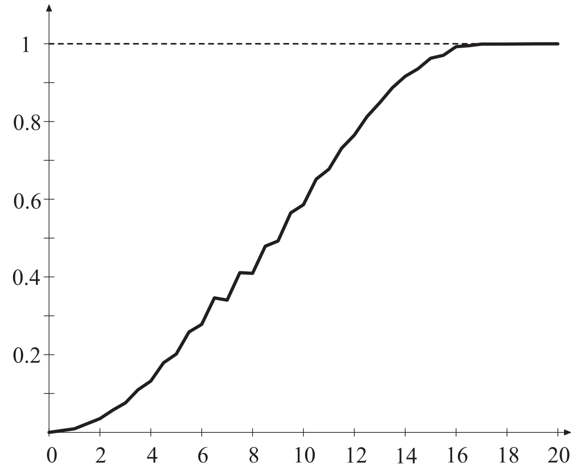



Рис. 2. Динамика $|z_2(t)|$ при найденном управлении

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная новая модификации метода глобального улучшения управления позволяет проводить расчеты по улучшению управления для задач большой размерности. Проведенные тестовые вычислительные эксперименты, в том числе для задачи управления квантовой системой с дискретным спектром, с помощью программной реализации разработанного метода на языке программирования C++, позволяют сделать вывод об эффективности метода для рассматриваемого класса задач управления гамильтоновыми системами с переменными коэффициентами.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 12-01-00256).

### Библиографический список

1. *Boussaid N., Caponigro M., Chambrion T.* Periodic control laws for bilinear quantum system with discrete spectrum. 2011. URL : http://arXiv.org/pdf/1111.4550v1.
2. *Кротов В. Ф., Фельдман И. Н.* Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 160–168. [*Krotov V. F., Feldman I. N.* Iterative method for solving optimal control problems // Izv. AS USSR. Techn. Cybern. 1983. № 2. P. 160–168.]
3. *Кротов В. Ф., Булатов А. В., Батурина О. В.* Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // Автомат. и телемех. 2011. № 6. С. 64–78. [*Krotov V. F., Bulatov A. V., Baturina O. V.* Optimization of linear systems with controllable coefficients // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, iss. 6. P. 1199–1212.]
4. *Трушкова Е. А.* Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автомат. и телемех. 2011. № 6. С. 151–159. [*Trushkova E. A.* Global control improvement algorithms // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, iss. 6. P. 1282–1290.]

УДК 591.65

# О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СЕМЕЙСТВА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ЛАГРАНЖА

**И. А. Шакиров**

Набережночелнинский институт социально-педагогических технологий и ресурсов
E-mail: iskander@tatngpi.ru

Для семейства интерполяционных полиномов Лагранжа, определенных в четном числе узлов, получены различные явные (безмодульные) виды функций Лебега. Последние разбиты на непересекающиеся классы, которые затем последовательно исследованы с использованием элементов дифференциального исчисления. Установлена взаимосвязь между функциями, а также константами Лебега из этих классов.

**Ключевые слова:** тригонометрические полиномы Лагранжа, обобщенное ядро Дирихле, функции и константы Лебега.

**About the Fundamental Characteristics of the Lagrange Interpolation Polynomials Family**

**I. A. Shakirov**

For the Lagrange interpolation polynomials family, determined in the even number of nodes, it is obtained various explicit (unmodulus) forms of the Lebesque functions. They are divided into uncrossing classes, which are consecutively studied using the elements of differential calculus then. The interdependence is established between the functions, as so as between the Lebesque constants from these classes.

**Key words:** Lagrange trigonometric polynomials, generalized Dirichlet kernel, Lebesque functions and constants.

## ВВЕДЕНИЕ

В математической литературе до сих пор не проведено исследование аппроксимативных возможностей семейства интерполяционных полиномов Лагранжа [1]

$$\Phi_n(x,t,\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x(t_k)D_n^*(t_k-t) + \alpha\sin nt, \qquad D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{2\,\mathrm{tg}(u/2)}, \tag{1}$$

в зависимости от поведения параметра $\alpha$ ($\alpha \in R$), в частности, в классическом пространстве непрерывных $2\pi$-периодических функций $C_{2\pi} = C[0,2\pi]$. Такая возможность появилась после моноядерного описания [2] полиномов (1) в виде

$$\Phi_n^c(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x(t_k)D_n^c(t_k-t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k)D_n^c(t_k-t), \qquad c \in R, \quad t \in [0,2\pi], \tag{2}$$

где $D_n^c(u) = \dfrac{1}{2}\sin nu\left(\operatorname{ctg}\dfrac{u}{2} - c\right)$ — обобщенное ядро Дирихле (при $c = 0$ выполняется равенство $D_n^0(u) = D_n^*(u)$); параметры $\alpha$, $c$ связаны соотношением $\alpha = \dfrac{c}{2n}\sum\limits_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x(t_k)$; $x(t) \in C_{2\pi}$ — заданная функция, интерполируемая в четном числе равномерно распределенных на отрезке $[0, 2\pi]$ узлов

$$t_k = t_k(n) = \pi k/n, \qquad k = \overline{0, 2n-1} \vee k = \overline{1, 2n}, \qquad n \in N. \tag{3}$$

Нахождению верхних и нижних оценок для функций и констант Лебега в различных функциональных пространствах, а также исследованию асимптотического поведения неограниченно возрастающих констант посвящено множество работ (см. монографии И. П. Натансона [3], Н. П. Корнейчука [4], В. К. Дзядыка [5], С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина [6], К. И. Бабенко [7] и др.). Используя содержащуюся в них методологию получения и исследования фундаментальных характеристик интерполяционных процессов, в работе [2] получены соответствующие $\Phi_n^c(x,t)$ модульные выражения функций Лебега:

$$\lambda_n^c(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}|D_n^c(t_k - t)| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^c(t_k - t)|, \qquad c \in R, \qquad t \in \tilde{T} = [0, \pi/n]. \tag{4}$$

Заметим, что при значении параметра $c = 0$ в (2) и (4) имеем общеизвестный полином, имеющий минимальную норму в пространстве суммируемых с квадратом функций, и соответствующие ему фундаментальные характеристики:

$$\Phi_n^*(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}x(t_k)D_n^*(t_k - t), \qquad \lambda_n^*(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^*(t_k - t)|, \qquad \lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi.$$

Здесь неизвестными оставались безмодульный вид функции

$$\lambda_n^*(t) = \frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right),$$

многие ее свойства [8]. В связи с этим в работе [5, с.43] не было полной строгости в доказательстве формулы для константы $\lambda_n^*$, точнее говоря, не установлено выполнение достаточного условия экстремума в рассматриваемой стационарной точке.

Ниже функции (4) предварительно разбиты (для удобства изучения) на три непересекающихся класса $\Phi^0 = \{\lambda_n^*(t)|\, \lambda_n^*(t) \equiv \lambda_n^0(t),\ c = 0\}$, $\Phi^+ = \{\lambda_n^c(t)|\, c > 0\}$, $\Phi^- = \{\lambda_n^{-c}(t)|\, c > 0\}$, которые затем подробно исследованы ($\Phi^0$ исследован в [8]), используя при этом различные безмодульные виды этих функций и аппарат дифференциального исчисления. Далее, между графиками двух функций $\lambda_n^c(t) \in \Phi^+$ и $\lambda_n^{-c}(t) \in \Phi^-$ ($c$ — произвольно фиксированное неотрицательное число) установлена тесная взаимосвязь, которая позволила существенно сократить объем проделанной в п. 2 технической работы при изучении класса $\Phi^-$.

## 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА $\Phi^+$

Необходимым условием для исследования функций из класса $\Phi^+$ является исключение модулей из состава обобщенного ядра Дирихле в формуле (4), используя при этом более тонкие свойства ядра $D_n^c(u)$ ($c > 0$, $u \in [0, 2\pi]$) и входящих в него функций. С целью получения более простых явных видов функций $\lambda_n^c(t)$ предварительно введем условие согласования параметров $n \ge 2$ и $c > 0$:

$$n^* = \frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c \qquad \left(n^* = n^*(n,c) = \left[\frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c\right], \quad [z]\text{— целая часть } z\right). \tag{5}$$

Заметим, что условие (5) определяет индекс одного из внутренних узлов интерполяции из множества (3), т.е.

$$t_{n^*} = 2\operatorname{arcctg} c \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ctg}(t_{n^*}/2) = c, \qquad c > 0, \quad n \ge 2. \tag{6}$$

Эта равносильность имеет место, например, при выполнении равенства $c = \operatorname{ctg}(\pi/2m)$ ($m$ — произвольный делитель числа $n \ge 2$); при этом соотношения (5) и (6) эквивалентны.

**Теорема 1.** *При выполнении условия* (5) *функции Лебега* $\lambda_n^c(t) \in \Phi^+$ $(n \geq 2)$, *определенные в узлах* (3), *на общем периоде* $\tilde{T} = [0, \pi/n]$ *представимы в явных видах:*

$$\lambda_n^c(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n-n^*)\right] \tag{7}$$

*или*

$$\lambda_n^c(t) = \lambda_n^*(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right), \tag{8}$$

*являются строго возрастающими в промежутке* $[0, t_n^0)$ *и строго убывающими в* $(t_n^0, \pi/n]$ *функциями, в точках* $t_n^0 = t_n^0(c) \in (0, \pi/2n)$ *достигают своих максимальных значений* $\lambda_n^c = \max\limits_{t\in[0,\pi/n]} \lambda_n^c(t) = \max\limits_{t\in[0,\pi/2n]} \lambda_n^c(t) = \lambda_n^c(t_n^0)$ *и имеют область значений* $[1, \lambda_n^c]$; *являются выпуклыми на периоде* $\tilde{T}$ *при выполнении дополнительных условий согласования параметров* $n$ *и* $c$ *вида*

$$\left(\left[\frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c\right] = \frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c\right) \wedge (c < n/2), \qquad c > 0, \quad n \geq 2. \tag{9}$$

**Доказательство.** Предварительно отметим, что при $n = 1$ и выполнении условия (9) получим $\lambda_1^c(t) = \lambda_1^*(t) = 1$ при всех $t \in \tilde{T}$.

Упростим функцию Лебега (4), используя условие (5) и поведения графиков функций $y = \sin nu$, $y = \left|\operatorname{ctg}\frac{u}{2} - c\right|$ $(u \in [0, 2\pi])$ при сдвигах их аргументов вида $u = t_k - t$ $(t \in \tilde{T},\ t_k = \pi k/n,\ k = \overline{1, 2n})$:

$$\lambda_n^c(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left|\sin n(t_k - t)\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right)\right| = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left|\sin(\pi k - nt)\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right)\right| =$$
$$= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}|\sin nt|\left|\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right| = \frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right)\operatorname{sign}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right) =$$
$$= \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right) + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(-\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} + c\right) + \sum_{k=n+1}^{2n}\left(-\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} + c\right)\right] =$$
$$= \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n-n^*)\right].$$

Таким образом, доказана справедливость формулы (7), когда между вполне определенным узлом интерполяции из множества (3) и положительной постоянной $c$ имеется зависимость вида (6).

Далее преобразуем выражение (7):

$$\lambda_n^c(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n-n^*)\right] =$$
$$= \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n} 2\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} + \sum_{k=n^*+1}^{n} 2c\right] =$$
$$= \lambda_n^*(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right), \qquad t \in \tilde{T}.$$

Первая составляющая последней суммы достаточно полно изучена в работе [8]. По аналогичной схеме исследуем (более простую, чем $\lambda_n^*(t)$) ее вторую составляющую

$$\psi_n(t) \equiv b_n(t)\sin nt = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right)\right]\sin nt, \quad t \in \tilde{T} = [0, \pi/2n] \cup (\pi/2n, \pi/n].$$

Для ее производных $\psi_n'(t) = b_n'(t)\sin nt + n\cos nt b_n(t)$ $(t \in \tilde{T})$ и $\psi_n''(t) = b_n''(t)\sin nt + 2n\cos nt b_n'(t) - n^2 \sin nt b_n(t)$ $(t \in \tilde{T})$

– на отрезке $[0, \pi/2n]$ верны соотношения

$$\psi_n(t) > 0 \quad \forall\, t \in \left(0, \frac{\pi}{2n}\right], \quad \psi_n(0) = 0, \quad \psi_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi\right) > 0,$$

$$\psi_n'(0) = \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{k}{2n}\pi\right) > 0, \quad \psi_n'\left(\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{2k-1}{4n}\pi < 0,$$

$$\psi_n''(t) < 0 \quad \forall\, t \in [0, \pi/2n]\,;$$

— на второй составляющей $(\pi/2n, \pi/n]$ основного периода $\tilde{T}$ имеем:

$$\psi_n(t) > 0 \quad \forall\, t \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right), \quad \psi_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0, \quad \psi_n'(t) < 0 \quad \forall\, t \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right],$$

$$\psi_n''(0) = -\sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi k}{2n} < 0, \quad \psi_n''\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{k-1}{2n}\pi > 0.$$

Результаты второй части теоремы получаются теперь после дополнительных расчетов и рассуждений, если использовать при этом формулу (8), условия (5) и (9), известные и установленные выше свойства функций $\lambda_n^*(t)$, $\psi_n(t)$ $(t \in \tilde{T})$, а также следующие соотношения:

$$(\lambda_n^c)'(0) > 0, \quad (\lambda_n^c)'\left(\frac{\pi}{2n}\right) < 0, \quad (\lambda_n^c)'\left(\frac{\pi}{n}\right) < 0,$$

$$(\lambda_n^c)''(0) < 0, \quad (\lambda_n^c)''\left(\frac{\pi}{2n}\right) < 0, \quad (\lambda_n^c)''\left(\frac{\pi}{n}\right) < 0,$$

где последнее неравенство имеет место лишь при выполнении условия (9).

## 2. О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА $\Phi^-$

Исследование поведения функций Лебега из класса $\Phi^-$ проведем по следующей схеме:

1) произвольную функцию из $\Phi^-$ предварительно выразим через функцию, принадлежащую классу $\Phi^+$;

2) на основе установленной взаимосвязи между функциями из классов $\Phi^-$ и $\Phi^+$, а также известных свойств $\lambda_n^c(t) \in \Phi^+$ (см. теорему 1), без больших усилий получим выводы о поведении функций $\lambda_n^{-c}(t) \in \Phi^-$;

3) затем, используя результаты пунктов 1), 2) и теоремы 1, определим явный вид функций $\lambda_n^{-c}(t) \in \Phi^-$.

**Теорема 2.** *Для функций $\lambda_n^{-c}(t) \in \Phi^-$, $\lambda_n^c(t) \in \Phi^+$ и соответствующих им констант Лебега $\lambda_n^{-c}$, $\lambda_n^c$ справедливы соотношения*

$$\lambda_n^{-c}(t) = \lambda_n^c\left(\frac{\pi}{n} - t\right), \quad t \in \tilde{T}, \quad \lambda_n^{-c} = \lambda_n^c \quad \forall\, c > 0,\ n \geq 2; \tag{10}$$

*а для функций из класса $\Phi^-$ верны представления*

$$\lambda_n^{-c}(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n - n^*)\right], \qquad t \in \tilde{T}, \tag{11}$$

$$\lambda_n^{-c}(t) = \lambda_n^*(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2}\right), \qquad t_k = \pi k/n, \quad n \geq 2. \tag{12}$$

**Доказательство.** 1. Предварительно установим зависимости, существующие между обобщенными ядрами Дирихле $D_n^{\pm c}(u)$, определяющими функции Лебега из классов $\Phi^{\pm}$:

$$D_n^c(u) = D_n^c(2\pi + u), \qquad D_n^{-c}(u) = \frac{\sin nu}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{u}{2} + c\right),$$

$$D_n^{-c}(u) = \frac{\sin n(-u)}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{-u}{2} - c\right) = D_n^{-c}(u) \quad \Rightarrow \quad D_n^{-c}(u) = D_n^{c}(2\pi - u).$$

Используя последнее равенство, после некоторых преобразований получим справедливость первой части формулы (10):

$$\lambda_n^{-c}(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^{-c}(t_k - t)| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^{c}(2\pi - (t_k - t)| =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left|D_n^{c}\left(t_{2n+1-k} - \left(\frac{\pi}{n} - t\right)\right)\right| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{2n}\left|D_n^{c}\left(t_j - \left(\frac{\pi}{n} - t\right)\right)\right| = \lambda_n^{c}\left(\frac{\pi}{n} - t\right).$$

2. Теперь можем утверждать, что графики двух произвольно выбранных функций $\lambda_n^{-c}(t)$, $\lambda_n^{c}(t)$ $(c > 0)$ из соответствующих классов $\Phi^{\pm}$ являются зеркальными отображениями друг друга относительно прямой $t - \pi/2n = 0$, проходящей через центр их общего периода $\tilde{T}$, параллельно оси ординат. При этом соответствующие им константы Лебега $\lambda_n^{-c}$ и $\lambda_n^{c}$ естественно равны, что и завершает доказательство второй части формулы (10). Следовательно, учитывая установленную выше симметричность графиков функций $\lambda_n^{-c}(t)$ и $\lambda_n^{c}(t)$, все утверждения предыдущей теоремы с несущественными поправками переносятся на рассматриваемый здесь случай; при этом явные виды $\lambda_n^{-c}(t)$, $\lambda_n^{c}(t)$ $(c > 0)$ будут различными.

3. Используя формулы (7) и (10), установим явный вид функции $\lambda_n^{-c}(t) \in \Lambda^{-}$:

$$\lambda_n^{-c}(t) = \lambda_n^{c}\left(\frac{\pi}{n} - t\right) = \frac{\sin n(\pi/n - t)}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + (\pi/n - t)}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - (\pi/n - t)}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + (\pi/n - t)}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - (\pi/n - t)}{2}\right) + 2c(n - n^*)\right] =$$

$$= \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n - n^*)\right].$$

Итак, справедливость формулы (11) доказана. Проведя несложные преобразования в (11), получим формулу (12):

$$\lambda_n^{-c}(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n^*+1}^{n} 2c\right] = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2\sum_{k=n^*+1}^{n} c\right] = \lambda_n^{*}(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2}\right).$$

**Примечание.** Если в условиях теорем 1 и 2 положим $c = 0$, то получим функцию $\lambda_n^{*}(t) \in \Phi^{0}$. При этом результаты теорем относительно данной функции полностью согласуются с известными результатами работ [2] и [8].

## Библиографический список

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 2. М. : Мир, 1965. [*Zygmund A.* Trigonometric series. Vol. 2. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1968.]

2. *Шакиров И. А.* О тригонометрическом интерполяционном полиноме Лагранжа, имеющем минимальную норму как оператор из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ // Изв. вузов. Математика. 2010. № 10. С. 60–68. [*Shakirov I. A.* The Lagrange trigonometric interpolation polynomial with the minimal norm considered as an operator from $C_{2\pi}$ to $C_{2\pi}$ // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 2010. Vol. 54, № 10. P. 52–59.]

3. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М. : Гостехиздат, 1949. [*Natanson I. P.* Constructive function theory. Vol. 1–3. New York : F. Ungar Publishing Co., 1964–1965.]

4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории

приближения. М. : Наука, 1987. [*Korneichuk N. P.* Exact Constants in Approximation Theory. Moscow : Nauka,1987.]

5. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наук. думка, 1988. [*Dzyadyk V. K.* Approximation methods for solving differential and integral equations. Kiev : Naukova Dumka, 1988.]

6. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М. : Наука, 1976. [*Stechkin S. B., Subbotin Yu. N.* Splines in Computational Mathematics. Moscow : Nauka, 1976.]

7. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002. [*Babenko K. I.* Fundamentals of Numerical Analysis. Moscow; Izhevsk : NIC Regular and chaotic dynamics, 2002.]

8. *Шакиров И. А.* Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 80–88. [*Shakirov I. A.* A complete description of the Lebesgue functions for classical lagrange interpolation polynomials // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 2011. Vol. 55, № 10. P. 70–77.]

УДК 517.518.82

# КОНЕЧНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

**Т. И. Шарапудинов**

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала
E-mail: sharapudinov@gmail.com

В настоящей работе построены новые конечные ряды, так называемые конечные предельные ряды по полиномам Чебышева (Хана), ортогональным на равномерной сетке, которые совпадают в концевых точках $x = 0$ и $x = N - 1$ с исходной функцией $f(x)$. Конструкция конечных предельных рядов основана на предельном переходе при $\alpha \to -1$ конечных рядов Фурье $\sum_{k=0}^{N-1} f_k^\alpha \tau_k^{\alpha,\alpha}(x, N)$ по полиномам Чебышева (Хана) $\tau_n^{\alpha,\alpha}(x, N)$, ортонормированным на равномерной сетке $\{0, 1, \dots, N-1\}$.

**Ключевые слова:** конечные ряды Фурье, ортогональные полиномы.

**Finite Limit Series on Chebyshev Polynomials, Orthogonal on Uniform Nets**

**T. I. Sharapudinov**

In the paper we construct new series, called finite limit series on Chebyshev (Hahn) polynomials $\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$, orthogonal on uniform net $\{0, 1, \dots, N-1\}$. Their partial sums $S_n(f; x)$ equal in boundary points $x = 0$ и $x = N - 1$ with approximated function $f(x)$. Construction of finite limit series based on the passage to the limit with $\alpha \to -1$ of Fourier series $\sum_{k=0}^{N-1} f_k^\alpha \tau_k^{\alpha,\alpha}(x, N)$ on Chebyshev (Hahn) polynomials $\tau_n^{\alpha,\alpha}(x, N)$, orthonormal on uniform net $\{0, 1, \dots, N-1\}$.

**Key words:** Fourier series, orthogonal polynomials.

## ВВЕДЕНИЕ

В задачах, связанных с обработкой временных рядов и изображений, возникает необходимость разбить заданный ряд данных на части, затем аппроксимировать его покусочно. Тогда в местах стыка, как правило, возникают нежелательные разрывы. Такая картина непременно возникает при использовании для приближения участков исходной функции сумм Фурье по классическим ортонормированным системам, например полиномам Чебышева, ортогональным на равномерных сетках. Остановимся на этом случае более подробно.

Через $\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ мы обозначим классические полиномы Чебышева [1], которые при $\alpha, \beta > -1$ образуют ортонормированную систему на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ с весом:

$$\mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(N) 2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)},$$

Для произвольной дискретной функции $f : \Omega_N \to \mathbf{R}$ мы можем определить коэффициенты Фурье–Чебышева, конечный ряд Фурье

$$f_k^{\alpha,\beta} = \sum_{j=0}^{N-1} \mu(j) \tau_k^{\alpha,\beta}(j, N) f(j), \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^{\alpha,\beta} \tau_k^{\alpha,\beta}(x, N),$$

и сумму Фурье:

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta} \tau_k^{\alpha,\beta}(x, N), \qquad 0 \le n \le N-1.$$

Указанные выше разрывы в точках «стыка» возникают из-за того, что суммы Фурье $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ не совпадают с исходной функцией $f(x)$ в точках $x=0$ и $x=N-1$. С другой стороны, проанализировав асимптотические свойства полиномов $\tau_k^{\alpha,\beta}(x,N)$ вблизи концов 0 и $N-1$ (см. [1]), можно заметить, что суммы Фурье $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ по этим полиномам имеют тенденцию стремиться к $f(x)$ точках $x=0$ и $x=N-1$ при $\alpha,\beta\to-1$, т. е.

$$S_{n,N}^{-1}(f,x)=f(x),\qquad x\in\{0,N-1\},\tag{1}$$

где $S_{n,N}^{-1}(f,x)=\lim\limits_{\alpha,\beta\to-1}S_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$. В настоящей статье мы исследуем, что собой представляет $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ и нельзя ли использовать $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ в качестве альтернативного суммам Фурье $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ аппарата приближения дискретных функций.

## 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Пусть $\alpha$, $\beta$ — произвольные действительные числа. Полиномы Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ мы определим с помощью обобщенной гипергеометрической функции следующим образом:

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}{}_3F_2(-n,-x,\alpha+\beta+1+n;\beta+1,1-N;1)=$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_kx^{[k]}}{\Gamma(k+\beta+1)k!(N-1)^{[k]}},\tag{2}$$

где $a^{[0]}=1$, $a^{[k]}=a(a-1)\cdots(a-k+1)$, $(a)_0=1$, $(a)_k=a(a+1)\cdots(a+k-1)$, в частности,

$$T_0^{\alpha,\beta}(x,N)=1,\qquad T_1^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{\alpha+\beta+2}{N-1}x-\beta-1.\tag{3}$$

Ниже нам понадобятся следующие [1] свойства полиномов $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$:

*ортогональность при* $\alpha,\beta>-1$

$$\sum_{x=0}^{N-1}\mu(x)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)T_m^{\alpha,\beta}(x,N)=\delta_{nm}h_{n,N}^{\alpha,\beta},\tag{4}$$

где

$$h_{n,N}^{\alpha,\beta}=\frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)},\tag{5}$$

*равенства*

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=(-1)^nT_n^{\beta,\alpha}(N-1-x,N),$$

$$(n+\alpha+1)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)-(n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1}(N-1-x)T_n^{\alpha+1,\beta}(x,N-1),$$

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{(n+\beta)!}{n!}\frac{(n+\alpha)^{[-\beta]}x^{[-\beta]}}{(N-1)^{[-\beta]}}T_{n+\beta}^{\alpha,-\beta}(x+\beta,N+\beta),$$

где $\beta$ — целое, $-n\le\beta\le-1$, причем, если $\alpha,\beta$ — целые, $-n\le\beta\le-1$, $-(n+\beta)\le\alpha\le-1$, то

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]}(N-x-1)^{[-\alpha]}}{(N-1)^{[-\beta]}(N-1+\beta)^{[-\alpha]}}T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha,-\beta}(x+\beta,N+\alpha+\beta).\tag{6}$$

## 2. КОНЕЧНЫЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ РЯД ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Пусть $\alpha>-1$,

$$\tau_n^\alpha(x)=\tau_n^\alpha(x,N)=\{h_{n,N}^{\alpha,\alpha}\}^{-\frac12}T_n^{\alpha,\alpha}(x,N),\qquad 0\le n\le N-1.\tag{7}$$

Тогда в силу (4) полиномы $\tau_n^\alpha(x)=\tau_n^\alpha(x,N)$ $(0\le n\le N-1)$ образуют на сетке $\Omega_N=\{0,1,\dots,N-1\}$ ортонормированную систему с весом

$$\mu^\alpha(x)=\mu^\alpha(x,N)=\mu(x;\alpha,\alpha,N)=\frac{\Gamma(N)2^{2\alpha+1}}{\Gamma(N+2\alpha+1)}\frac{\Gamma(x+\alpha+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)},\tag{8}$$

т. е.

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu^\alpha(x)\tau_n^\alpha(x)\tau_m^\alpha(x) = \delta_{nm}. \tag{9}$$

Дискретную функцию $f : \Omega_N \to \mathbf{R}$ мы можем представить в виде конечного ряда Фурье по полиномам $\tau_n^\alpha(x) = \tau_n^\alpha(x, N)$ $(0 \le n \le N-1)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^\alpha \tau_k^\alpha(x), \qquad x \in \Omega_N, \tag{10}$$

где

$$f_k^\alpha = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\tau_k^\alpha(j)\mu^\alpha(j). \tag{11}$$

Конечным предельным рядом по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке, мы будем называть конечный ряд, полученный в результате почленного предельного перехода при $\alpha \to -1$ в конечном ряде Фурье–Чебышева (10), т. е. конечный ряд вида $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{N-1} f_k^{-1}\tau_k^{-1}(x)$, $x \in \Omega_N$, где $f_k^{-1}\tau_k^{-1}(x) = \lim\limits_{\alpha\to-1} f_k^\alpha \tau_k^\alpha(x)$. При этом отметим, что выражение $f_k^{-1}\tau_k^{-1}(x)$, вообще говоря, не может быть определено с помощью равенств (7) и (11), так как сумма $\sum\limits_{j=0}^{N-1} f(j)\tau_k^{-1}(j)\mu^{-1}(j)$ теряет смысл из-за того, что $\mu^{-1}(0) = \mu^{-1}(N-1) = \infty$ (см.(8)). Поэтому возникает вопрос о том, что представляет собой выражение $f_k^{-1}\tau_k^{-1}(x) = \lim\limits_{\alpha\to-1} f_k^\alpha \tau_k^\alpha(x)$. Рассмотрим сначала два случая: $k = 0$ и $k = 1$.

Из (3) и (7) имеем:

$$\tau_0^\alpha(x) = \{h_{0,N}^{\alpha,\alpha}\}^{-1/2} = \frac{\sqrt{\Gamma(2\alpha+2)}}{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)} = \pi^{-1/4}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\alpha+1)}}, \tag{12}$$

$$\tau_1^\alpha(x) = \{h_{1,N}^{\alpha,\alpha}\}^{-1/2}(\alpha+1)\left(\frac{2x}{N-1}-1\right) = \pi^{-1/4}\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+5/2)(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}}\sqrt{\frac{N-1}{N+1+2\alpha}}\left(\frac{2x}{N-1}-1\right).$$

Из (11) и (12) находим

$$\begin{aligned} f_0^\alpha\tau_0^\alpha(x) &= \sum_{j=0}^{N-1} \mu^\alpha(j)\tau_0^\alpha(j)f(j)\tau_0^\alpha(x) = \\ &= \pi^{-1/2}\frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{\Gamma(N)2^{2\alpha+1}(\alpha+1)}{\Gamma(N+2\alpha+1)}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(N-j+\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(N-j)}f(j) = \\ &= \pi^{-1/2}\frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{\Gamma(N)2^{2\alpha+1}}{\Gamma(N+2\alpha+1)}\left[\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(N+\alpha)}{\Gamma(1)\Gamma(N)}f(0)+\right. \\ &\left. + \frac{\Gamma(N+\alpha)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(N)\Gamma(1)}f(N-1) + (\alpha+1)\sum_{j=1}^{N-2}\frac{\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(N-j+\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(N-j)}f(j)\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Из (13) непосредственно следует, что

$$\lim_{\alpha\to-1} f_0^\alpha\tau_0^\alpha(x) = \frac{f(0)+f(N-1)}{2}. \tag{14}$$

В случае $k = 1$ из (12) и (7) имеем:

$$\begin{aligned} f_1^\alpha\tau_1^\alpha(x) &= \sum_{j=0}^{N-1}\mu^\alpha(j)\tau_1^\alpha(x)\tau_1^\alpha(j)f(j) = \pi^{-1/2}2^{2\alpha+2}\frac{\Gamma(\alpha+5/2)}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{N-1}{N+1+2\alpha}\left(\frac{2x}{N-1}-1\right)\times \\ &\times(\alpha+1)\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{2j}{N-1}-1\right)\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N+2\alpha+1)}\frac{\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(N-j+\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(N-j)}f(j). \end{aligned} \tag{15}$$

Применяя такие же рассуждения, какие применялись при доказательстве (14), из (15) выводим

$$\lim_{\alpha\to-1} f_1^\alpha \tau_1^\alpha(x) = \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2x}{N-1}-1\right). \tag{16}$$

Перейдем теперь к случаю, когда $k\ge 2$. В этом случае, пользуясь равенствами (7), (8) и (11), мы можем записать

$$f_k^\alpha \tau_k^\alpha(x) = \frac{T_k^{\alpha,\alpha}(x,N)}{h_{k,N}^{\alpha,\alpha}}\sum_{j=0}^{N-1}\mu^\alpha(j)T_k^{\alpha,\alpha}(j,N)f(j) = \frac{T_k^{\alpha,\alpha}(x,N)}{h_{k,N}^{\alpha,\alpha}}\sum_{j=1}^{N-2}\mu^\alpha(j)T_k^{\alpha,\alpha}(j,N)g(j), \tag{17}$$

где

$$g(t) = f(t) - \frac{f(0)+f(N-1)}{2} - \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2t}{N-1}-1\right).$$

Далее, при $k\ge 2$, $1\le j\le N-2$ имеем (см. (5))

$$\lim_{\alpha\to-1} h_{k,N}^{\alpha,\alpha} = \frac{(N+k-2)^{[k]}}{(N-1)^{[k]}}\frac{(k-1)!^2)}{2k!(k-2)!(2k-1))} = \frac{(N+k-2)^{[k]}}{(N-1)^{[k]}}\frac{k-1}{2k(2k-1)}, \tag{18}$$

$$\lim_{\alpha\to-1}\mu^\alpha(j) = \frac{\Gamma(N)}{2\Gamma(N-1)}\frac{\Gamma(x)\Gamma(N-x-1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)} = \frac{N-1}{2j(N-1-j)} = \mu^{-1}(j). \tag{19}$$

Кроме того из (2) и (6) имеем:

$$\lim_{\alpha\to-1} T_k^{\alpha,\alpha}(x,N) = T_k^{-1,-1}(x,N) = -\frac{x(N-x-1)}{(N-1)(N-2)}T_{k-2}^{1,1}(x-1,N-2). \tag{20}$$

Сопоставляя (18)–(20) с (17), при $k\ge 2$ находим

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to-1} f_k^\alpha\tau_k^\alpha(x) &= \frac{2k(2k-1)}{k-1}\frac{(N-1)^{[k]}}{(N+k-2)^{[k]}}\frac{x(N-x-1)}{(N-1)(N-2)}T_{k-2}^{1,1}(x-1,N-2)\times\\ &\times\sum_{j=1}^{N-2}\mu^{-1}(j)\frac{j(N-j-1)}{(N-1)(N-2)}T_{k-2}^{1,1}(j-1,N-2)g(j) =\\ &= g_{k-2}\frac{k(2k-1)}{k-1}\frac{(N-3)^{[k-2]}}{(N+k-2)^{[k-2]}}T_{k-2}^{1,1}(x-1,N-2)\frac{x(N-x-1)}{N(N-1)},\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$g_m = g_m(N) = \frac{1}{N-2}\sum_{j=1}^{N-2}T_m^{1,1}(j-1,N-2)g(j). \tag{22}$$

Из (10), (14), (16), (21) и (22) мы выводим следующее равенство:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{f(N-1)+f(0)}{2} + \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2x}{N-1}-1\right)+\\ &+\frac{x(N-x-1)}{N(N-1)}\sum_{k=0}^{N-3}\frac{(k+2)(2k+3)}{k+1}\frac{(N-3)^{[k]}}{(N+k)^{[k]}}g_kT_k^{1,1}(x-1,N-2).\end{aligned} \tag{23}$$

Равенству (23) можно придать несколько иной вид. С этой целью заметим, что в силу (5)

$$h_{k,N-2}^{1,1} = \frac{(N+k)^{[k]}}{(N-3)^{[k]}}\frac{\Gamma(k+2)\Gamma(k+2)2^3}{k!\Gamma(k+3)(2k+3)} = 8\frac{(N+k)^{[k]}}{(N-3)^{[k]}}\frac{k+1}{(k+2)(2k+3)},$$

отсюда, с учетом (7) и (21), для $k\ge 2$ имеем

$$\lim_{\alpha\to-1} f_k^\alpha\tau_k^\alpha(x) = \frac{8x(N-x-1)}{N(N-1)}\hat{g}_{k-2}\tau_{k-2}^1(x-1,N-2),$$

где

$$\hat{g}_m = \hat{g}_m(N) = \frac{1}{N-2}\sum_{j=1}^{N-2}\tau_m^1(j-1,N-2)g(j). \tag{24}$$

Поэтому из (10), (14) и (16) мы выводим следующий результат

**Теорема 1.** *Для любой дискретной функции $f(x)$, заданной на сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, справедливо следующее равенство*

$$f(x) = \frac{f(N-1)+f(0)}{2} + \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2x}{N-1}-1\right) + \frac{8x(N-x-1)}{N(N-1)}\sum_{k=0}^{N-3}\hat{g}_k\tau_k^1(x-1, N-2), \quad (25)$$

*в котором коэффициенты $\hat{g}_k$ определены с помощью равенства* (24).

Рассмотрим частичные суммы конечного ряда (25) следующего вида:

$$S_{n,N}^{-1}(f,x) = \frac{f(N-1)+f(0)}{2} + \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2x}{N-1}-1\right) + $$
$$+\frac{8x(N-x-1)}{N(N-1)}\sum_{k=0}^{n}\hat{g}_k\tau_k^1(x-1, N-2). \quad (26)$$

Из равенства (26) видно, что $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ совпадают в концевых точках $x = 0$ и $x = N-1$ с исходной функцией $f(x)$, т. е. $S_{n,N}^{-1}(f,x) = f(0)$, $S_{n,N-1}^{-1} = f(N-1)$.

Следует отметить, что полиномы $\tau_n^{-1}(x,N) = \lim\limits_{\alpha,\beta\to-1}\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ не образуют ортонормированной системы на $\Omega_N$. Тем не менее $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов степени $n$. Можно показать, что $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ как аппарат приближения дискретных функций не уступает суммам Фурье–Чебышева по полиномам Чебышева $\tau_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x,N)$. Отметим еще, что конструкция сумм $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ столь же проста, как конструкция конечных рядов Фурье по ортогональным полиномам. Но она является более удобной с точки зрения численной реализации, так как в выражении, определяющем коэффициенты $\tilde{g}_k$, фигурирующие в конструкции сумм $S_{n,N}^{-1}(f,x)$, не участвует весовая функция типа $\dfrac{\Gamma(x+\alpha+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}$, которая в случае $\alpha < 0$ привела бы к существенным вычислительным сложностям. Это обстоятельство вместе с (1) делают суммы $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ весьма привлекательным инструментом для решения задач, связанных с аппроксимацией дискретных функций.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 10-01-00191-а).

**Библиографический список**

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : Дагестан. науч. центр РАН, 2004. 276 с. [*Sharapudinov I. I.* Mixed series of orthogonal polynomials. Theory and applications. Makhachkala : Dagestan. nauch. center RAN, 2004. 276 p.]

УДК 517.518.8

# АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2\pi}^{p(x)}$

**Т. Н. Шах-Эмиров**

Дагестанский научный центр, Махачкала
E-mail: Tadgius@gmail.com

В работе рассмотрены аппроксимативные свойства линейных средних типа Норлюнда $\mathcal{N}_n(f,x)$ и Рисса $\mathcal{R}_n(f,x)$ для тригонометрических рядов Фурье в пространстве Лебега с переменным показателем $L_{2\pi}^{p(x)}$. При определенных условиях на методы суммирования Норлюнда и Рисса доказано, что если $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ $(0 < \alpha \le 1)$, то $\|f - \mathcal{N}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$, $\|f - \mathcal{R}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$.

**Ключевые слова:** пространства Лебега и Соболева с переменным показателем, модуль непрерывности.

**Approximation Properties of Some Types of Linear Means in Space $L_{2\pi}^{p(x)}$**

**T. N. Shakh-Emirov**

Approximative properties of Norlund $\mathcal{N}_n(f,x)$ and Riesz $\mathcal{R}_n(f,x)$ means for trigonometric Fourier series in Lebesgue space of variable exponent $L_{2\pi}^{p(x)}$ are considered. Under certain conditions on Norlund and Riesz summation methods it is proved that the estimates $\|f - \mathcal{N}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$, $\|f - \mathcal{R}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$ hold for $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ $(0 < \alpha \le 1)$.

**Key words:** Lebesgue and Sobolev spaces of variable exponent, module of continuity.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть $p(x)$ — неотрицательная измеримая $2\pi$-периодическая функция. Через $L_{2\pi}^{p(x)}$ обозначим множество измеримых $2\pi$-периодических функций таких, что $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)}\,dx < \infty$, а через $W^{p(x)}$ — класс абсолютно непрерывных на периоде функций, производная которых принадлежит $L_{2\pi}^{p(x)}$. Если $p(x) \geq 1$, то одна из эквивалентных норм в $L_{2\pi}^{p(x)}$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\gamma > 0 \Big| \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{f(x)}{\gamma}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

Для $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ введем в рассмотрение функцию Стеклова:

$$s_h(f)(x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+t)\,dt$$

и модуль непрерывности [1]

$$\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0<h\leq\delta} \|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)}.$$

Через $\mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ обозначим класс Липшица с показателем $\alpha$ в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$, состоящий из функций $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$, для которых имеет место неравенство

$$\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)} \leq M\delta^{\alpha} \qquad (0 < \alpha \leq 1).$$

Для дальнейшего потребуются следующие обозначения:

$$\underline{p} = \operatorname{ess}\inf_{x\in[0,2\pi]} p(x), \qquad \bar{p} = \operatorname{ess}\sup_{x\in[0,2\pi]} < \infty.$$

Кроме того, мы будем считать, что переменный показатель $p(x)$ удовлетворяет следующему условию Дини–Липшица:

$$|p(x) - p(y)| \ln\frac{2\pi}{|x-y|} \leq C, \qquad x, y \in [0, 2\pi]. \tag{1}$$

Класс $2\pi$-периодических переменных показателей $p(x)$, удовлетворяющих условию $1 \leq p(x) \leq \bar{p}$ и условию Дини–Липшица (1), обозначим через $\mathcal{P}$. Подкласс класса $\mathcal{P}$ — удовлетворяющих дополнительному условию $1 < \underline{p} \leq p(x)$, — обозначим через $\hat{\mathcal{P}}$.

Пусть дан ряд Фурье функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$:

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Обозначим через $S_n(f)(x)$ $n$-ю частичную сумму этого ряда:

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Пусть теперь $\{p_n\}_0^\infty$ — последовательность положительных чисел. Рассматриваются два типа линейных средних:

$$\mathcal{N}_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m} S_m(f)(x), \qquad \mathcal{R}_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_m S_m(f)(x),$$

где $P_n = \sum\limits_{m=0}^{n} p_n$. Средние $N_n(f)(x)$ и $R_n(f)(x)$ называются средними Норлюнда и Рисса соответственно [2–4].

Последовательность положительных вещественных чисел $\{p_n\}_0^\infty$ называется почти монотонно убывающей (возрастающей), если существует константа $c$, зависящая только от самой $\{p_n\}_0^\infty$, такая, что для всех $n \geq m$ выполняется

$$p_n \leq cp_m \qquad (p_n \geq cp_m).$$

Для краткости введем обозначения $\{p_n\}_0^\infty \in$ ПМУП ($\{p_n\}_0^\infty \in$ ПМВП), $\Delta g_n = g_n - g_{n+1}$.

## 1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Теорема 1.** *Пусть* $p \in \hat{\mathcal{P}}$, $0 < \alpha < 1$, $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ *и* $\{p_n\}_0^\infty$ *— последовательность положительных чисел. Если* $\{p\}_0^\infty \in$ *ПМУП, или* $\{p\}_0^\infty \in$ *ПМВП и* $(n+1)p_n = O(P_n)$*, то для* $n = 1, 2, \ldots$ *имеет место оценка*

$$\|f - \mathcal{N}_n(f)\|_{p(\cdot)} = \mathrm{C} M n^{-\alpha}.$$

**Теорема 2.** *Пусть* $p \in \hat{\mathcal{P}}$, $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(1, M)$ *и* $\{p_n\}_0^\infty$ *— последовательность положительных чисел. Если* $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k|\Delta p_k| = O(P_n)$*, или* $\sum\limits_{k=0}^{n-1} |\Delta p_k| = O(P_n/n)$*, то для* $n = 1, 2, \ldots$ *имеет место оценка*

$$\|f - \mathcal{N}_n(f)\|_{p(\cdot)} = C M n^{-1}.$$

**Теорема 3.** *Пусть* $p \in \hat{\mathcal{P}}$, $0 < \alpha \le 1$, $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ *и* $\{p_n\}_0^\infty$ *— последовательность положительных чисел. Если*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \Delta \left( \frac{P_k}{k+1} \right) \right| = O\left( \frac{P_n}{n+1} \right),$$

*то для* $n = 1, 2, \ldots$ *имеет место оценка*

$$\|f - \mathcal{R}_n(f)\|_{p(\cdot)} = C M n^{-\alpha}.$$

Отметим, что впервые аналогичные результаты для классов

$$\mathrm{Lip}(\alpha, p(x, M)) = \left\{ f \in L_{2\pi}^{p(x)} : \Omega_{p(x)}(f, \delta) \le M\delta^\alpha, \delta > 0 \right\},$$

где $\Omega_{p(x)}(f, \delta) = \sup\limits_{|h|<\delta} \|T_h(f)\|_{p(\cdot)}$, $\delta > 0$, $T_h(f)(x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h |f(x+t) - f(x)|\, dt$, были получены в работе [2]. Из определений величин $\Omega_{p(x)}(f, \delta)$ и $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$ непосредственно вытекает, что $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} \le \Omega_{p(x)}(f, \delta)$ и, следовательно, $\mathrm{Lip}(\alpha, p(x))$ являются подклассами соответствующих классов $\mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$, введенных в настоящей работе. Поэтому основные результаты, полученные в работе [2], являются следствиями теорем 1–3. При этом следует отметить, что соотношение $\lim\limits_{\delta\to 0} \Omega_{p(x)}(f, \delta) = 0$ в работе [2] выводится из свойства ограниченности максимальной функции Харди–Литтльвуда в $L_{2\pi}^{p(x)}$, доказанного в [5] при $p_- > 1$. Однако если $p_- = 1$, то максимальная функция, вообще говоря, не ограничена в $L_{2\pi}^{p(x)}$. Это обстоятельство не позволяет рассматривать величину $\Omega_{p(x)}(f, \delta)$ в качестве модуля непрерывности в том случае, когда $p_- = 1$, поскольку в этом случае мы не можем утверждать, что для любой функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ величина $\Omega_{p(x)}(f, \delta)$ будет стремиться к нулю, когда $\delta$ стремится к нулю. В этом можно убедиться на примере функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\ln x)^2}, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 1 \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

Кроме того, в [1] показано, что для произвольного $p(x) \in \mathcal{P}$ имеет место соотношение $\lim\limits_{\delta\to 0} \Omega_{p(\cdot)}(f, \delta) = 0$, следовательно, величина $\Omega_{p(\cdot)}(f, \delta)$, используемая в настоящей работе, является модулем непрерывности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ и в том случае, когда $p_- = 1$.

**Замечание.** Можно показать, что классы $\mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ шире классов $\mathrm{Lip}(\alpha, p(x), \mathrm{M})$ не только в случае, когда $p(x) \in \mathcal{P}$, но также тогда, когда $p(x) \in \hat{\mathcal{P}}$. Но в рамках настоящей статьи мы на этом не остановимся.

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Пусть $p(x) \in \mathcal{P}$, $T_n$ — множество тригонометрических полиномов степени не выше $n$. Через $E_n(f)_{p(\cdot)}$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ тригонометрическими полиномами степени не выше $n$:

$$E_n(f) = \inf_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{p(\cdot)}.$$

Приведем теорему о неравенстве типа Джексона, доказанную И. И. Шарапудиновым в [1].

**Теорема 4.** *Если* $p(x) \in \mathcal{P}$ *и* $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$, *то*

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \le C(p)\Omega(f, 1/n)_{p(\cdot)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

**Лемма 1.** *Пусть* $p \in \hat{\mathcal{P}}$ *и* $0 < \alpha \le 1$. *Тогда для любой* $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ *верна оценка*

$$\|f - S_n(f)\|_{p(\cdot)} \le CMn^{-\alpha} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказывается с использованием теоремы 4 и аппроксимативных свойств частичных сумм $S_n$.

**Лемма 2.** *Пусть* $p \in \hat{\mathcal{P}}$. *Если* $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(1, M)$, *то* $f(x)$ *абсолютно непрерывна и* $f' \in L^{p(x)}$, *т. е.* $f \in W^{p(x)}$.

**Доказательство.** Пусть $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(1)$ и $\delta > 0$. Так как $\underline{p} \le p(x)$ почти всюду по теореме 2.8 из [6]

$$\left\| \frac{1}{h} \int\limits_0^h [f(x+t) - f(x)]\, dt \right\|_{\underline{p}} \le c \left\| \frac{1}{h} \int\limits_0^h [f(x+t) - f(x)]\, dt \right\|_{p(\cdot)}$$

для каждого $h$ такого, что $|h| \le \delta$. Из этого неравенства и эквивалентности $\omega_{\underline{p}}(f, *)$ и $\Omega(f, *)_{p(\cdot)}$ получаем:

$$\omega_{\underline{p}}(f, *) \le c\Omega(f, *)_{p(\cdot)}.$$

Следовательно, из принадлежности $f$ классу $\mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(1)$ выполняется соотношение $\omega_{\underline{p}}(f, *) = O(\delta)$, а это означает, что $f$ абсолютно непрерывна и $f' \in L^{\underline{p}}$ ([7, с. 51–54]) Так как $(f(x+t) - f(x))/t \to f'(x)$, $t \to 0$ почти всюду, почти для всех $x$ получаем

$$\frac{2}{\delta} \left| \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\, dt \right| \to |f'(x)|, \qquad \delta \to 0^+.$$

Так как $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ удовлетворяют условию $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)g(x)|\, dx < \infty$, $\|g\|_{p'(\cdot)} \le 1$ по всем $g(x) \in L_{2\pi}^{p'(x)}$ $\left(p'(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}\right)$, то лемма будет верна при выполнении этого условия для $f'(x)$.

По лемме Фату для каждой измеримой функции $g(x)$ такой, что $\|g\|_{p'(\cdot)} \le 1$,

$$\int\limits_0^{2\pi} |f'(x)||g(x)|\, dx = \int\limits_0^{2\pi} \left( \lim_{\delta \to 0^+} \frac{2}{\delta} \left| \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\, dt \right| \right) |g(x)|\, dx \le$$

$$\le \liminf_{\delta \to 0^+} \int\limits_0^{2\pi} \left( \frac{2}{\delta} \left| \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\, dt \right| \right) |g(x)|\, dx.$$

Применяя интегрирование по частям получаем

$$\liminf_{\delta \to 0^+} \int\limits_0^{2\pi} \left( \frac{2}{\delta} \left| \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}\, dt \right| \right) |g(x)|\, dx =$$

$$= \liminf_{\delta \to 0^+} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{2}{\delta} \left( \frac{1}{t} \int\limits_0^t [f(x+\tau) - f(x)] d\tau \Big|_{\delta/2}^{\delta} + \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{1}{t^2} \int\limits_0^t [f(x+\tau) - f(x)] d\tau\, dt \right) \right| |g(x)|\, dx \le$$

$$\le \liminf_{\delta \to 0^+} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{2}{\delta} \left( \frac{1}{t} \int\limits_0^t [f(x+\tau) - f(x)] d\tau \Big|_{\delta/2}^{\delta} + \int\limits_{\delta/2}^{\delta} \frac{1}{t^2} \int\limits_0^t [f(x+\tau) - f(x)] d\tau\, dt \right) \right| |g(x)|\, dx \le$$

$$\le \liminf_{\delta \to 0^+} \left( \frac{2}{\delta} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{1}{t} \int\limits_0^t [f(x+\tau) - f(x)] d\tau \Big|_{\delta/2}^{\delta} \right| |g(x)|\, dx + \right.$$

$$+\frac{2}{\delta}\int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_{\delta/2}^{\delta}\frac{1}{t^2}\int\limits_0^t [f(x+\tau)-f(x)]d\tau\, dt\right| |g(x)|\, dx\Bigg) \le$$

$$\le \liminf_{\delta\to 0^+}\frac{2}{\delta}(\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)}+\frac{1}{2}\Omega(f,\frac{\delta}{2})_{p(\cdot)}+(1+r_p([0,2\pi])\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)})\le CM.$$

Здесь $r_p([0,2\pi]) = \frac{1}{\underline{p}}+\frac{1}{\overline{p}} < 2$. Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть* $p(x) \in \hat{\mathcal{P}}$ *и* $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(1, M)$. *Тогда для* $n = 1, 2, \ldots$ *верна оценка*

$$\|S_n(f)-\sigma_n(f)\|_{p(\cdot)} \le CMn^{-1},$$

*где* $\sigma_n(f)(x) = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{m=0}^{n} S_m(f)(x)$.

**Доказательство.** Следует из предыдущей леммы, равномерной ограниченности частичных сумм $S_n(f)(x)$ и того факта, что для произвольной $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ и ее сопряженной функции $\tilde{f}(x)$ имеет место неравенство $\|\tilde{f}\|_{p(\cdot)} \le c(p)\|f\|_{p(\cdot)}$, где $c(p)$ — некоторая константа, зависящая только от переменного показателя $p$.

Теоремы 1–3 доказываются аналогично теоремам 1–3 в [2] с помощью приведенных выше лемм.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 10-01-00191-а)

## Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближения функций тригонометрическими полиномами в $L_{2\pi}^{p(x)}$ // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2011. Т. 5. С. 108–118. [*Sharapudinov I. I.* Some problems in approximation theory by trigonometric polynomials in $L_{2\pi}^{p(x)}$ // Math. Forum (Itogi nauki. The South of Russia). 2011. Vol. 5. P. 108–118.]
2. *Guven A., Israfilov D. M.* Trigonometric approximation in Generalized Lebesgue spaces Lp(x) // J. of Math. Inequalities. 2010. Vol. 4, № 2. P. 285–299.
3. *Chandra P.* Approximation by Nörlund operators// Mat. Vestnik. 1986. Vol. 38. P. 263–269.
4. *Chandra P.* A note on degree of approximation by Nörlund and Riesz operators// Mat. Vestnik. 1990. Vol. 42. P. 9–10.
5. *Diening L.* Maximal function on generalized Lebesgue spaces Lp(·)// Math. Inequal. Appl. 2004. Vol. 7. P. 245–253.
6. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$// Czechoslovak Math. J. 1991. Vol. 41, № 4. P. 592–618.
7. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Vol. 303 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Berlin : Springer-Verlag, 1993.

УДК 517.984

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ЗВЕЗДООБРАЗНОМ ГРАФЕ С РАЗНЫМИ ПОРЯДКАМИ НА РАЗНЫХ РЕБРАХ

**В. А. Юрко**

Саратовский государственный университет
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов переменных порядков на компактных звездообразных графах. Приведена теорема единственности восстановления потенциалов по матрицам Вейля. Получено конструктивное решение обратной задачи.

**Ключевые слова:** звездообразные графы, дифференциальные операторы переменных порядков, обратные спектральные задачи.

**Recovering Differential Operators on Star-Type Graphs with Different Orders on Different Edges**

**V. A. Yurko**

An inverse spectral problem is studied for variable orders differential operators on compact star-type graphs. A uniqueness theorem of recovering potentials from the Weyl matrices is provided. A constructive solution of the inverse problem is obtained.

**Key words:** star-type graphs, variable orders differential operators, inverse spectral problems.

**1.** В статье исследуются обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов переменных порядков на компактных звездообразных графах. Точнее, дифференциальные уравнения имеют различные порядки на различных ребрах. Такие задачи часто встречаются в естествознании и технике (см. [1, 2]). В качестве основной спектральной характеристики мы вводим и изучаем так называемые матрицы Вейля, которые являются обобщением функции Вейля для классического оператора Штурма–Лиувилля и обобщением матрицы Вейля для дифференциальных операторов высших порядков на интервале, введенной в [3, 4]). Показано, что задание матриц Вейля однозначно определяет коэффициенты дифференциального уравнения на графе. Получена также конструктивная процедура решения обратной задачи по заданным матрицам Вейля. Для исследования этой обратной задачи мы развиваем идеи метода спектральных отображений [3, 4]. Полученные результаты являются естественными обобщениями известных результатов для дифференциальных операторов на интервале и на графах.

Рассмотрим компактный звездообразный граф $T$ в $\mathbf{R}^\omega$ с множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_p\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_p\}$, где $v_1, \dots, v_p$ — граничные вершины, $v_0$ — внутренняя вершина и $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1,p}$, $\bigcap\limits_{j=1}^{p} e_j = \{v_0\}$. Пусть $l_j$ — длина ребра $e_j$. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что $x_j = 0$ соответствуют граничным вершинам $v_1, \dots, v_p$. Интегрируемая функция $Y$ на $T$ может быть представлена в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,p}}$, где функция $y_j(x_j)$ определена на ребре $e_j$. Зафиксируем $n, N$ и $m$ так, что $1 < N < n$ и $0 < m < p$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на $T$:

$$\left.\begin{aligned} y_j^{(n)}(x_j) + \sum_{\mu=0}^{n-2} q_{\mu j}(x_j) y_j^{(\mu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \qquad j = \overline{1,m}, \\ y_j^{(N)}(x_j) + \sum_{\mu=0}^{N-2} q_{\mu j}(x_j) y_j^{(\mu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \qquad j = \overline{m+1,p}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $q_{\mu j}(x_j)$ — комплекснозначные интегрируемые функции. Будем называть $q_j = \{q_{\mu j}\}$ потенциалом на ребре $e_j$, а $q = \{q_j\}_{j=\overline{1,p}}$ — потенциалом на графе $T$. Рассмотрим линейные формы:

$$U_{j\nu}(y_j) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \gamma_{j\nu\mu} y_j^{(\mu)}(l_j), \quad j = \overline{1,p},$$

где $\gamma_{j\nu\mu}$ — комплексные числа, $\gamma_{j\nu} := \gamma_{j\nu\nu} \neq 0$, $\nu = \overline{0,n-1}$ при $j = \overline{1,m}$, и $\nu = \overline{0,N-1}$ при $j = \overline{m+1,p}$.

**2.** Зафиксируем $j = \overline{1,p}$. Пусть $\{C_{kj}(x_j, \lambda)\}$ ($k = \overline{1,n}$ при $j = \overline{1,m}$ и $k = \overline{1,N}$ при $j = \overline{m+1,p}$) — фундаментальная система решений уравнения (1) на ребре $e_j$ при начальных условиях $C_{kj}^{(\mu-1)}(0,\lambda) = \delta_{k\mu}$, ($k,\mu = \overline{1,n}$ при $j = \overline{1,m}$ и $k,\mu = \overline{1,N}$ при $j = \overline{m+1,p}$). Здесь и далее $\delta_{k\mu}$ — символ Кронекера.

Зафиксируем $s = \overline{1,p}$ и $k$ так, что $1 \le k \le n-1$ при $s = \overline{1,m}$ и $1 \le k \le N-1$ при $s = \overline{m+1,p}$. Пусть $\Psi_{sk} = \{\psi_{skj}\}_{j=\overline{1,p}}$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие следующим условиям.

*Случай 1.* Если $s = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,N-1}$, то $\Psi_{sk}$ удовлетворяет краевым условиям (2) и условиям склейки (3):

$$\left.\begin{gathered} \psi_{sks}^{(\nu-1)}(0) = \delta_{k\nu}, \qquad \nu = \overline{1,k}, \qquad \psi_{skj}^{(\xi-1)}(0) = 0, \qquad \xi = \overline{1,n-k}, \qquad j = \overline{1,m} \setminus s, \\ \psi_{skj}^{(\eta-1)}(0) = 0, \qquad \eta = \overline{1,N-k}, \qquad j = \overline{m+1,p}, \end{gathered}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{gathered} U_{j\nu}(\psi_{skj}) - U_{p\nu}(\psi_{skp}) = 0, \quad j = \overline{1,p-1}, \qquad \nu = \overline{0,k-1}, \\ \sum_{j=1}^{p} U_{j\nu}(\psi_{skj}) = 0, \qquad \nu = \overline{k,N-1}, \quad \sum_{j=1}^{m} U_{j\nu}(\psi_{skj}) = 0, \qquad \nu = \overline{N,n-1}. \end{gathered}\right\} \tag{3}$$

*Случай 2.* Если $s = \overline{1,m}$, $k = \overline{N,n-1}$, то $\Psi_{sk}$ удовлетворяет краевым условиям (4) и условиям склейки (5):

$$\left.\begin{array}{c} \psi_{sks}^{(\nu-1)}(0) = \delta_{k\nu}, \qquad \nu = \overline{1,k}, \qquad \psi_{skj}^{(\xi-1)}(0) = 0, \qquad \xi = \overline{1,n-k}, \qquad j = \overline{1,m} \setminus s, \\ \psi_{skj}(0) = 0, \quad j = \overline{m+1,p}, \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{c} U_{j\nu}(\psi_{skj}) - U_{p\nu}(\psi_{skp}) = 0, \quad j = \overline{1,p-1}, \qquad \nu = \overline{0,N-2}, \\ U_{j\nu}(\psi_{skj}) - U_{m\nu}(\psi_{skm}) = 0, \quad j = \overline{1,m-1}, \qquad \nu = \overline{N-1,k-1}, \\ \sum_{j=1}^{m} U_{j\nu}(\psi_{skj}) = 0, \qquad \nu = \overline{k,n-1}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

*Случай 3.* Если $s = \overline{m+1,p}$, $k = \overline{1,N-1}$, то $\Psi_{sk}$ удовлетворяет краевым условиям (6) и условиям склейки (7):

$$\left.\begin{array}{c} \psi_{sks}^{(\nu-1)}(0) = \delta_{k\nu}, \qquad \nu = \overline{1,k}, \qquad \psi_{skj}^{(\xi-1)}(0) = 0, \qquad \xi = \overline{1,n-k}, \qquad j = \overline{1,m}, \\ \psi_{skj}^{(\eta-1)}(0) = 0, \quad \eta = \overline{1,N-k}, \qquad j = \overline{m+1,p} \setminus s, \end{array}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{c} U_{j\nu}(\psi_{skj}) - U_{p\nu}(\psi_{skp}) = 0, \quad j = \overline{1,p-1}, \qquad \nu = \overline{0,k-1}, \\ \sum_{j=1}^{p} U_{j\nu}(\psi_{skj}) = 0, \qquad \nu = \overline{k,N-1}. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Условия склейки для $\Psi_{sk}$ являются обобщением условий склейки Киркгофа [3]. Будем предполагать, что выполняются условия регулярности склейки (см. [5]). Введем матрицы $M_s(\lambda)$, $s = \overline{1,p}$, следующим образом.

При $s = \overline{1,m}$ положим $M_s(\lambda) = [M_{sk\mu}(\lambda)]_{k,\mu=\overline{1,n}}$, $M_{sk\mu}(\lambda) := \psi_{sks}^{(\mu-1)}(0,\lambda)$.

При $s = \overline{m+1,p}$ положим $M_s(\lambda) = [M_{sk\mu}(\lambda)]_{k,\mu=\overline{1,N}}$, $M_{sk\mu}(\lambda) := \psi_{sks}^{(\mu-1)}(0,\lambda)$.

Из определения $\Psi_{sk}$ следует, что $M_{sk\mu}(\lambda) = \delta_{k\mu}$ при $k \ge \mu$, и $\det M_s(\lambda) \equiv 1$. Матрица $M_s(\lambda)$ называется матрицей Вейля относительно граничной вершины $v_s$. Обратные задачи ставятся следующим образом.

**Обратная задача 1.** Даны $\{M_s(\lambda)\}_{s=\overline{1,p-1}}$, построить $q$ на $T$.

**Обратная задача 2.** Даны $\{M_s(\lambda)\}_{s=\overline{2,p}}$, построить $q$ на $T$.

**3.** Используя фундаментальную систему решений $\{C_{kj}(x_j,\lambda)\}$, можно записать:

$$\left.\begin{array}{c} \psi_{skj}(x_j,\lambda) = \sum_{\mu=1}^{n} M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}(x_j,\lambda), \qquad j = \overline{1,p}, \qquad s = \overline{1,m}, \qquad k = \overline{1,n-1}, \\ \psi_{skj}(x_j,\lambda) = \sum_{\mu=1}^{N} M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}(x_j,\lambda), \qquad j = \overline{1,p}, \qquad s = \overline{m+1,p}, \qquad k = \overline{1,N-1}, \end{array}\right\} \tag{8}$$

где коэффициенты $M_{skj\mu}(\lambda)$ не зависят от $x_j$. В частности, $M_{sks\mu}(\lambda) = M_{sk\mu}(\lambda)$. Подставляя (8) в краевые условия и условия склейки для решений Вейля $\Psi_{sk}$, получаем линейную алгебраическую систему относительно $M_{skj\mu}(\lambda)$. Решая эту систему по формулам Крамера, вычисляем $M_{skj\mu}(\lambda) = \Delta_{skj\mu}(\lambda)(\Delta_{sk}(\lambda))^{-1}$, где функции $\Delta_{skj\mu}(\lambda)$ и $\Delta_{sk}(\lambda)$ являются целыми по $\lambda$. Таким образом, функции $M_{skj\mu}(\lambda)$ являются мероморфными по $\lambda$ и, следовательно, решения Вейля и матрицы Вейля мероморфны по $\lambda$. В частности,

$$M_{sk\mu}(\lambda) = \Delta_{sk\mu}(\lambda)(\Delta_{sk}(\lambda))^{-1}, \quad k < \mu,$$

где $\Delta_{sk\mu}(\lambda) := \Delta_{sks\mu}(\lambda)$. Функция $\Delta_{sk\mu}(\lambda)$, $k \le \mu$ ($\Delta_{skk}(\lambda) := \Delta_{sk}(\lambda)$) является характеристической функцией для краевой задачи $L_{sk\mu}$ и ее нули совпадают с собственными значениями $L_{sk\mu}$.

Рассмотрим теперь вспомогательные обратные задачи восстановления дифференциального оператора на каждом фиксированном ребре. Зафиксируем $s = \overline{1,p}$, и рассмотрим следующую обратную задачу на ребре $e_s$.

**Обратная задача 3.** Дана матрица Вейля $M_s$, построить $q_s$ на ребре $e_s$.

В этой обратной задаче мы строим потенциал только на ребре $e_s$, но матрица Вейля $M_s$ несет глобальную информацию со всего графа. Другими словами, эта задача не является локальной обратной задачей, относящейся только к ребру $e_s$.

**Теорема 1.** *Зафиксируем $s = \overline{1,p}$. Задание матрицы Вейля $M_s$ однозначно определяет потенциал $q_s$ на ребре $e_s$.*

Используя метод спектральных отображений, можно получить конструктивную процедуру решения обратной задачи 3. Она может быть получена так же, как и для дифференциальных операторов $n$-го порядка на конечном интервале (подробнее см. [4, Ch. 2]).

Введем теперь вспомогательную матрицу Вейля относительно внутренней вершины $v_0$ и фиксированного ребра $e_j$, $j = \overline{1,p}$.

*Случай 1.* Зафиксируем $j = \overline{1,m}$. Пусть $\varphi_{jk}(x_j,\lambda)$, $k = \overline{1,n}$ — решения уравнения (1) на ребре $e_j$ при условиях

$$\varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda) = \delta_{k\nu}, \qquad \nu = \overline{1,k}, \quad \varphi_{jk}^{(\xi-1)}(0,\lambda) = 0, \qquad \xi = \overline{1,n-k}.$$

Введем матрицу $m_j(\lambda) = [m_{jk\nu}(\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n}}$, где $m_{jk\nu}(\lambda) := \varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda)$.

*Случай 2.* Зафиксируем $j = \overline{m+1,p}$. Пусть $\varphi_{jk}(x_j,\lambda)$, $k = \overline{1,N}$ — решения уравнения (1) на ребре $e_j$ при условиях

$$\varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda) = \delta_{k\nu}, \qquad \nu = \overline{1,k}, \quad \varphi_{jk}^{(\xi-1)}(0,\lambda) = 0, \qquad \xi = \overline{1,N-k}.$$

Введем матрицу $m_j(\lambda) = [m_{jk\nu}(\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,N}}$, где $m_{jk\nu}(\lambda) := \varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda)$.

Матрица $m_j(\lambda)$ называется матрицей Вейля относительно внутренней вершины $v_0$ и ребра $e_j$. Рассмотрим следующую обратную задачу на ребре $e_j$.

**Обратная задача 4.** Зафиксируем $j = \overline{1,p}$. Дана матрица Вейля $m_j$, Построить потенциал $q_j$ на ребре $e_j$.

Данная обратная задача является классической, так как это задача восстановления дифференциального уравнения высшего порядка на конечном интервале по матрице Вейля. Обратная задача 4 решена в [4]. В частности, следующая теорема единственности доказана в [4].

**Теорема 2.** *Задание матрицы Вейля $m_j$ однозначно определяет потенциал на ребре $e_j$.*

Кроме того, в [4] дан алгоритм решения обратной задачи 4, а также приведены необходимые и достаточные условия разрешимости этой обратной задачи.

**Теорема 3.** *1. Зафиксируем $j = \overline{1,m}$. Тогда для каждого фиксированного $s = \overline{1,m} \setminus j$,*

$$m_{j1\nu}(\lambda) = \frac{\psi_{s1j}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda)}{\psi_{s1j}(l_j,\lambda)}, \quad \nu = \overline{2,n}, \tag{9}$$

$$m_{jk\nu}(\lambda) = \frac{\det[\psi_{s\mu j}(l_j,\lambda),\ldots,\psi_{s\mu j}^{(k-2)}(l_j,\lambda),\psi_{s\mu j}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda)]_{\mu=\overline{1,k}}}{\det[\psi_{s\mu j}^{(\xi-1)}(l_j,\lambda)]_{\xi,\mu=\overline{1,k}}}, \qquad 2 \le k < \nu \le n. \tag{10}$$

*2. Зафиксируем $j = \overline{m+1,p}$. Тогда для каждого фиксированного $s = \overline{1,m} \setminus j$ соотношения* (9)–(10) *верны с $N$ вместо $n$.*

**4.** Теперь мы получаем решение обратной задачи 1 и устанавливаем его единственность, т. е. справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Задание матриц Вейля $\{M_s\}_{s=\overline{1,p-1}}$ однозначно определяет потенциал $q$ на $T$. Решение обратной задачи* 1 *может быть получено по следующему алгоритму.*

**Алгоритм 1.** *Даны матрицы Вейля $\{M_s\}_{s=\overline{1,p-1}}$.*

*1. Находим потенциалы $q_s$, $s = \overline{1,p-1}$, решая обратную задачу* 3 *при каждом $s = \overline{1,p-1}$.*

*2. Вычисляем матрицу Вейля $m_p(\lambda)$ по* (9)–(10) *при $j = p$, используя знание потенциала на ребрах $e_1,\ldots,e_{p-1}$ (подробнее см.* [5]*).*

*3. Строим потенциал $q_p$ на ребре $e_p$, решая обратную задачу* 4.

Аналогично решается обратная задача 2; здесь вычисления немного более сложные. Пусть $m > 1$.

**Теорема 5.** *Задание матриц Вейля $\{M_s\}_{s=\overline{2,p}}$ однозначно определяет потенциал $q$ на $T$. Решение обратной задачи 2 может быть получено по следующему алгоритму.*

**Алгоритм 2.** *Даны матрицы Вейля* $\{M_s\}_{s=\overline{2,p}}$.

*1. Находим потенциалы* $q_s$, $s=\overline{2,p}$, *решая обратную задачу* 3 *при каждом* $s=\overline{2,p}$.

*2. Строим матрицу Вейля* $m_1(\lambda)$ *по* (9)–(10) *при* $j=1$ (*подробнее см.* [5]).

*3. Находим потенциал* $q_1$ *на ребре* $e_1$, *решая обратную задачу* 4.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня* (*проекты* 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

## Библиографический список

1. *Покорный Ю. В., Белоглазова Т. В., Дикарева Е. В., Перловская Т. В.* Функция Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений различных порядков // Мат. заметки. 2003. Т. 74, вып. 1. С. 146–149. [*Pokorny Yu. V., Beloglazova T. V., Dikareva E. V., Perlovskaya T. V.* Green's function for a locally interacting system of ordinary equations of various orders // Math. Notes. 2003. Vol. 74, № 1. P. 146–149.]

2. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : Физматлит, 2004. [*Pokorny Yu. V., Penkin O. M., Pryadiev V. L., Borovskikh A. V., Lazarev K. P., Shabrov S. A.* Differential equations on geometrical graphs. Moscow : Fizmatlit, 2004.]

3. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. [*Yurko V. A.* Introduction to the theory of inverse spectral problems. Moscow : Fizmatlit, 2007.]

4. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002.

5. *Yurko V. A.* Spectral analysis for differential operators on star-type graphs with different orders on different edges. Schriftenreiche des Fachbereichs Mathematik, SM–DU–747. Duisburg : Universität Duisburg-Essen, 2012. 10 p.

# СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Андреев Александр Анатольевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет. E-mail: andre@ssu.samara.ru

**Андрейченко Дмитрий Константинович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: AndreichenkoDK@info.sgu.ru

**Андрейченко Константин Петрович**, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет. E-mail: kp_andreichenko@renet.ru

**Афанасенкова Юлия Вячеславовна**, аспирант кафедры математического анализа, Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского. E-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

**Байдакова Наталия Васильевна**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН, Екатеринбург. E-mail: baidakova@imm.uran.ru

**Болучевская Анна Владимировна**, ассистент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики, Волгоградский государственный университет. E-mail: a.v.boluch@gmail.com

**Васильев Ярослав Андреевич**, аспирант кафедры математического анализа, Смоленский государственный университет. E-mail: Vasiliev.Yaroslav.A@yandex.ru

**Волосивец Сергей Сергеевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

**Гладышев Юрий Александрович**, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры физики, Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского. E-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

**Голубев Максим Олегович**, аспирант кафедры высшей математики, Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный. E-mail: maksimkane@mail.ru

**Егошина Надежда Владимировна**, студентка механико-математического факультета, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: saviour92@mail.ru

**Ефимова Маргарита Павловна**, аспирант кафедры математического анализа, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. E-mail: efimova.margarita@gmail.com

**Игнатьев Михаил Юрьевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: IgnatievMU@info.sgu.ru

**Кац Борис Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Казанский (приволжский) федеральный университет. E-mail: katsboris877@gmail.com

**Козлова Елена Александровна**, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет. E-mail: leni2006@mail.ru

**Козлова Ирина Александровна**, аспирант кафедры математического анализа, Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского. E-mail: irena1983.83@mail.ru

**Комарова Мария Сергеевна**, заместитель начальника отдела информационных ресурсов и систем, Поволжский региональный центр новых информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: welecat@gmail.com

**Корнев Владимир Викторович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: KornevVV@info.sgu.ru

**Королева Ольга Артуровна**, старший преподаватель кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: korolevaoart@yandex.ru

**Кудрявцева Ольга Сергеевна**, аспирант кафедры математического анализа и теории функций, Волгоградский государственный университет, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики, Волжский гуманитарный институт (филиал) Волгоградского государственного университета. E-mail: Kudryavceva@vgi.volsu.ru

**Лихачева Татьяна Владимировна**, аспирант кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: iofinat@mail.ru

**Магомед-Касумов Магомедрасул Грозбекович**, младший научный сотрудник лаборатории теории функций и приближения, Учреждение Российской академии наук Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и Правительства Республики Северная Осетия-Алания, Махачкала. E-mail: rasuldev@gmail.com

**Миронова Светлана Рафаиловна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной

математики, Казанский научно-исследовательский технический университет. E-mail: srmironova@yandex.ru

**Новиков Владимир Васильевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: vvnovikov@yandex.ru

**Погодина Анна Юрьевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А. E-mail: apogodina@yandex.ru.

**Скляров Вячеслав Петрович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: sklyarovvp@sgu.ru

**Старовойтов Александр Павлович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории функций, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. E-mail: svoitov@gsu.by

**Теляковский Сергей Александрович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела теории функций, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва. Email: sergeyAltel@yandex.ru

**Трушкова Екатерина Александровна**, кандидат физико-математических наук, и. о. старшего научного сотрудника, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва. E-mail: katerinatr@mail.ru

**Шакиров Искандер Асгатович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики ее преподавания, проректор по дополнительному образованию, Набережночелнинский институт социально-педагогических технологий и ресурсов. E-mail: iskander@tatngpi.ru

**Шарапудинов Тимур Идрисович**, научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр Российской академии наук, Махачкала. E-mail: sharapudinov@gmail.com

**Шах-Эмиров Таджидин Нурмагомедович**, инженер-исследователь отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр Российской академии наук, Махачкала. E-mail: Tadgius@gmail.com

**Юрко Вячеслав Анатольевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

**Яковлева Юлия Олеговна**, аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Самарский государственный технический университет. E-mail: julia.yakovleva@mail.ru

# INFORMATION ABOUT AUTHORS

**Afanasenkova Yuliya Vyacheslavovna**, Post-Graduate of the Chair of Mathematical Analysis, Tsiolkovsky Kaluga State University. E-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

**Andreev Aleksander Anatolevich**, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Samara State Technical University. E-mail: andre@ssu.samara.ru

**Andreichenko Dmitrii Konstantinovich**, Doctor of Science, Head of the Chair of the software computer systems and information systems, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: AndreichenkoDK@info.sgu.ru

**Andreichenko Konstantin Petrovich**, Doctor of Science, Professor of the Chair of Applied Mathematics and System Analysis, Saratov State Technical University. E-mail: kp_andreichenko@renet.ru

**Baidakova Natalia Vasilevna**, Candidate of Science, Senior Researcher of Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg. E-mail: baidakova@imm.uran.ru

**Boluchevskaya Anna Vladimirovna**, Assistant of the Chair of Computer Science and Experimental Mathematics, Volgograd State University. E-mail: a.v.boluch@gmail.com

**Efimova Margarita Pavlovna**, Post-Graduate Student of the Chair of Mathematical Analysis, M. V. Lomonosov Moscow State University. E-mail: efimova.margarita@gmail.com

**Egoshina Nadezhda Vladimirovna**, Student of Mechanics and Mathematics Department, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: saviour92@mail.ru

**Ignatyev Mikhail Yurievich**, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Mathematical Physics and Numerical Mathematics, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: IgnatievMU@info.sgu.ru

**Gladyshev Yurii Aleksandrovich**, Doctor of Science, Professor of the Chair of Physics, Tsiolkovsky Kaluga State University. E-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

**Golubev Maxim Olegovich**, Post-Graduate Student of the Chair of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudny. E-mail: maksimkane@mail.ru

**Kats Boris Aleksandrovich**, Doctor of Science, Professor of the Chair of Mathematical Analysis, Kazan Federal University. E-mail: katsboris877@gmail.com

**Komarova Maria Sergeevna**, Assistant Chief of the Department of Information Resources and Systems, Volga Regional Center of New Information Technologies, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: welecat@gmail.com

**Kornev Vladimir Viktorovich**, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Differential Equations and Applied Mathematics, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: KornevVV@info.sgu.ru

**Koroleva Olga Arturovna**, Senior Lecturer of the Chair of Computer Algebra and Number Theory, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: korolevaoart@yandex.ru

**Kozlova Elena Aleksandrovna**, Post-Graduate Student of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Samara State Technical University. E-mail: leni2006@mail.ru

**Kozlova Irina Aleksandrovna**, Post-Graduate of the Chair of Mathematical Analysis, Kaluga State University. E-mail: irena1983.83@mail.ru

**Kudryavtseva Olga Sergeevna**, Post-Graduate Student of the Chair of Mathematical Analysis and Function Theory, Volgograd State University, Senior Lecturer of the Chair of Applied Mathematics and Informatics, Volzhsky Institute of Humanities (affiliate) Volgograd State University. E-mail: Kudryavceva@vgi.volsu.ru

**Likhacheva Tatiana Vladimirovna**, Post-Graduate Student of the Chair of Function Theory and Approximation, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: iofinat@mail.ru

**Magomed-Kasumov Magomedrasul Grozbekovich**, Junior Researcher of the Laboratory of Functions Theory and Approximation, RASs Institution South Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Center RAS, Makhachkala. E-mail: rasuldev@gmail.com

**Mironova Svetlana Rafailovna**, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Computational Mathematics, Kazan State Technical University. E-mail: srmironova@yandex.ru

**Novikov Vladimir Vasilievich**, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Theory of Functions and Approximations, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: vvnovikov@yandex.ru

**Pogodina Anna Yurievna**, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics and Systems Analysis, Saratov State Technical University. E-mail: apogodina@yandex.ru

**Shakh-Emirov Tadgidin Nurmagomedovich**, Post-Graduate Student, Research Engineer of Department of Mathematics and Informatics of Daghestan Scientific Center of RAS, Makhachkala. E-mail: Tadgius@gmail.com

**Shakirov Iskander Asgatovich**, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Mathematics and its Teaching Methods, Vice-rector on Complementary Education, Naberezhnochelninsky Institute of Social Pedagogical

Technologies and Resources. E-mail: iskander@tatngpi.ru

**Sharapudinov Timur Idrisovich**, Junior Research Scientist of Department of Mathematics and Computer Science, Dagestan Scientific Center of RAS, Makhachkala. E-mail: sharapudinov@gmail.com

**Sklyarov Vyacheslav Petrovich**, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Mathematical Physics and Computational Mathematics, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: sklyarovvp@sgu.ru

**Starovoitov Alexader Pavlovich**, Doctor of Science, Head of the Department of Differential Equations and Function Theory, Gomel State University. E-mail: svoitov@gsu.by

**Telyakovskii Sergey Aleksandrovich**, Doctor of Science, Leading Researcher, Department of Funcions Theory, Steklov Institute of Mathematics of RAS, Moscow. Email: sergeyAltel@yandex.ru

**Trushkova Ekaterina Alexandrovna**, Candidate of Science, Senior Reasercher of Institute of Control Sciences of RAS, Moscow. E-mail: katerinatr@mail.ru

**Vasiliev Yaroslav Andreevich**, Post-Graduate Student of the Chair of Mathematical Analysis, Smolensk State University. E-mail: Vasiliev.Yaroslav.A@yandex.ru

**Volosivets Sergei Sergeevich**, Candidate of Science, Associate Professor of the Chair of Function Theory and Approximation, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

**Yakovleva Julia Olegovna**, Post-Graduate Student of the Chair of Applied Mathematics Computer Science, Samara State Technical University. E-mail: julia.yakovleva@mail.ru

**Yurko Vyacheslav Anatolevich**, Doctor of Science, Professor, Head of the Chair of Mathematical Physics and Numerical Analysis, Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky. E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru