

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

- Амозова К. Ф., Старков В. В.** α -достижимые области, негладкий случай 3
- Бурлуцкая М. Ш.** Теорема Жордана–Дирихле для функционально-дифференциального оператора с инволюцией 9
- Волокитина Е. Ю.** Когомологии алгебры Ли векторных полей некоторого одномерного орбифолда 14
- Корнев В. В., Хромов А. П.** Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и антипериодическими краевыми условиями 28
- Новиков Е. А.** Алгоритм переменного порядка, шага и переменной конфигурации для решения жестких задач 35
- Ромакина Л. Н.** Гиперболические параллелограммы плоскости \mathbb{H} 43
- Салимов Р. Б.** К решению неоднородной краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной круговой области в особом случае 52
- Федосеев А. Е.** Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля на конечном отрезке с неинтегрируемой особенностью внутри интервала 58

Механика

- Клочков Ю. В., Николаев А. П., Киселева Т. А.** Напряженно-деформированное состояние эллиптического цилиндра с эллипсоидальным днищем из разнородных материалов на основе МКЭ 65
- Кондратов Д. В., Кондратова Ю. Н., Попов В. С., Плаксина И. В.** Задачи гидроупругости для трубы кольцевого сечения с упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой при воздействии давления 70
- Коссович Л. Ю., Морозов К. М., Павлова О. Е.** Биомеханика сонной артерии человека с патологической извитостью 76

Информатика

- Богомолов А. С.** Комплексный контроль ресурсов сложных человеко-машинных систем 83
- Высоцкий А. В., Тараканов А. С., Шоломов К. И., Тимофеева Н. Е., Ерофтиев А. А.** Исследование эффективности поиска глобального экстремума методом имитации отжига, распараллеленного различными способами 87
- Захарова Е. А., Сидоров С. П.** Об ошибке приближения деревьями сценариев единичной глубины 95
- Комаров Д. Д.** Минимальные реберные расширения пальм 99
- Львов А. А., Киселёв В. В.** Численное моделирование и анализ воздействия искажений на OFDM/QAM-сигнал 104

Приложения

Personalia

- Профессор А. О. Ватульян. К 60-летию со дня рождения 111

РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор
Коссович Леонид Юрьевич

Заместитель главного редактора
Усанов Дмитрий Александрович

Ответственный секретарь
Клоков Василий Тихонович

Члены редакционной коллегии
Аврус Анатолий Ильич
Аксеновская Людмила Николаевна
Аникин Валерий Михайлович
Балаш Ольга Сергеевна
Бучко Ирина Юрьевна
Вениг Сергей Борисович
Волкова Елена Николаевна
Голуб Юрий Григорьевич
Захаров Андрей Михайлович
Ивченков Сергей Григорьевич
Комкова Галина Николаевна
Лебедева Ирина Владимировна
Левин Юрий Иванович
Макаров Владимир Зиновьевич
Монохов Сергей Юрьевич
Орлов Михаил Олегович
Прозоров Валерий Владимирович
Прохоров Дмитрий Валентинович
Федотова Ольга Васильевна
Федорова Антонина Гавриловна
Черевичко Татьяна Викторовна
Шатилова Алла Валерьевна
Шляхтин Геннадий Викторович

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ

Главный редактор
Коссович Леонид Юрьевич

Заместители главного редактора
Прохоров Дмитрий Валентинович

Ответственный секретарь
Халова Виктория Анатольевна

Члены редакционной коллегии:
Андрейченко Дмитрий Константинович
Васильев Александр Юрьевич
Индейцев Дмитрий Анатольевич
Каплунов Юлий Давидович
Ковалев Владимир Александрович
Ломакин Евгений Викторович
Матвеев Валерий Павлович
Манжиров Александр Владимирович
Морозов Никита Федорович
Насыров Семен Рафаилович
Пархоменко Павел Павлович
Радаев Юрий Николаевич
Резчиков Александр Федорович
Роджерсон Грэм
Сперанский Дмитрий Васильевич
Субботин Юрий Николаевич
Харченко Вячеслав Сергеевич
Хромов Август Петрович
Шальто Анатолий Абрамович
Юрко Вячеслав Анатольевич

Зарегистрировано
в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации СМИ
ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года

**ПРАВИЛА
ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ**

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 11 страниц, оформленных в LaTeX согласно стиливому файлу, размещенному по адресу: http://www.sgu.ru/massmedia/izvestia_mmi. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Последовательность предоставления материала:
– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилия автора, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилия автора, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Не допускается нумерация формул, на которые в статье нет ссылок. В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте.

Для своевременной подготовки журнала отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, ФИО авторов и название статьи (на русском и английском языках), краткое название статьи для колонтитула, фамилия, имя и отчество (полностью) всех авторов, e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний).

Более подробную информацию о правилах оформления статей можно найти по адресу http://www.sgu.ru/massmedia/izvestia_mmi.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Ведущий редактор

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Митенёва Елена Анатольевна

Художник

Соколов Дмитрий Валерьевич

Верстка

Багаева Ольга Львовна

Корректор

Крылова Елена Борисовна

Адрес редакции410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Издательство Саратовского университета

Тел.: (845-2) 52-26-89, 52-26-85

E-mail: mmi@sgu.ru

Подписано в печать 27.08.2013.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 13,95(15,0).

Тираж 500 экз. Заказ 38.

Отпечатано в типографии

Издательства Саратовского университета

© Саратовский государственный университет, 2013

CONTENTS**Scientific Part****Mathematics**

- Amozova K. F., Starkov V. V.** α -accessible Domains, a Nonsmooth Case 3
Burlutskaya M. Sh. Jordan–Dirichlet Theorem for Functional Differential Operator with Involution 9
Volokitina E. Y. Cohomology of the Lie Algebra of Vector Fields on Some One-dimensional Orbifold 14
Kornev V. V., Khromov A. P. Dirac System with Undifferentiable Potential and Antiperiodic Boundary Conditions 28
Novikov E. A. Algorithm Variable Order, Step and the Configuration Variables for Solving Stiff Problems 35
Romakina L. N. Hyperbolic Parallelograms of the Plane \hat{H} 43
Salimov R. B. To a Solution of the Inhomogeneous Riemann–Hilbert Boundary Value Problem for Analytic Function in Multiconnected Circular Domain in a Special Case 52
Fedoseev A. E. Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability of the Inverse Problem for Sturm–Liouville Operators with a Nonintegrable Singularity Inside a Finite Interval 58

Mechanics

- Klochkov J. V., Nikolaev A. P., Kiseleva T. A.** Stress-strain State of an Elliptical Cylinder with an Ellipsoidal Bottoms of Dissimilar Materials Based FEM 65
Kondratov D. V., Kondratova Y. N., Popov V. S., Plaksina I. V. The Problem of a Hydroelasticity for a Tube Ring-type a Profile with Elastic, Geometrically Irregular Outer Shell at Pressure Influence 70
Kossovich L. Yu., Morozov K. M., Pavlova O. E. Biomechanics of Human Carotid Artery with Pathological Tortuosity 76

Computer Sciences

- Bogomolov A. S.** Integrated Resource Control of Complex Man-machine Systems 83
Vysotsky A. V., Tarakanov A. S., Sholomov K. I., Timofeeva N. E., Eroftiev A. A. The Effectiveness Analysis of Several Parallel Algorithms Based on Simulated Annealing Method of Global Optimization Problem Solving 87
Zakharova E. A., Sidorov S. P. On the Error of Approximation by Means of Scenario Trees with Depth 1 95
Komarov D. D. Minimal Edge Extensions of Palm Trees 99
Lvov A. A., Kiselev V. V. Numerical Modelling and the Analysis of Impact of Distortions on OFDM/QAM-signal 104

Appendices

- Personalia
 To 60-th Anniversary of Professor A. O. Vatulyan 111



МАТЕМАТИКА

УДК 517.27/51/225

α -ДОСТИЖИМЫЕ ОБЛАСТИ, НЕГЛАДКИЙ СЛУЧАЙ

К. Ф. Амозова¹, В. В. Старков²

¹Преподаватель кафедры математического анализа, Петрозаводский государственный университет, amokira@rambler.ru

²Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа, Петрозаводский государственный университет, VstarV@list.ru

В статье продолжается исследование α -достижимых областей в \mathbb{R}^n . Они являются звездообразными и удовлетворяют важному для приложений условию конуса. Для непрерывной в \mathbb{R}^n функции F получены условия α -достижимости области, определяемой неравенством $F(x) < 0$. При этом эти условия (теоремы 1, 2) записаны в виде неравенств на производные по направлениям; необходимое и достаточное условия отличаются только знаком равенства в этих неравенствах. Даже в случае $\alpha = 0$ (случай звездообразности области) мы получили новые результаты.

Ключевые слова: условие конуса, α -достижимые области, звездообразные множества.

ВВЕДЕНИЕ

В теоремах вложения, в теории интегральных представлений функций, в вопросах граничного поведения функций, разрешимости задачи Дирихле важно, чтобы область определения функции удовлетворяла *условию конуса* или его обобщению (см., например, [1, гл. 1, § 8; 2–4]).

Обозначим через $K(p, e, \alpha, r)$ замкнутый круговой конус раствором $\alpha\pi$, $\alpha \in (0; 1)$, с вершиной в точке $p \in \mathbb{R}^n$, осью симметрии — вектором e и высотой $r \in (0; \infty]$. Говорят, что область $D \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию конуса (слабому), если для каждой точки $p \in D$ конус $K(p, e(p), \alpha, r) \subset D$ для некоторых фиксированных значений $\alpha \in (0; 1)$ и $r \in (0; \infty]$.

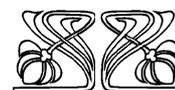
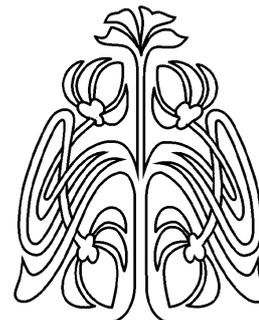
В [5] (см. также [6]) исследуются области с условием конуса при дополнительном предположении, что ось симметрии конуса для каждой точки $p \in D$ — радиальная, т. е. $e(p) = -p$. Для этого в [5] (см. также [6]) вводится понятие α -достижимой области.

Определение [5] (см. также [6]). Область $D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in D$, называется α -достижимой (относительно 0), $\alpha \in [0; 1)$, если для каждой точки $p \in \Sigma = \partial D$ существует такое число $r = r(p) > 0$, что конус $K_+(p, \alpha, r) \subset D' = \mathbb{R}^n \setminus D$; здесь и далее $K_+(p, \alpha, r)$ — конус, полученный пересечением замкнутого евклидова шара $\mathbb{B}^n(p, r)$ радиуса $r > 0$ и конуса

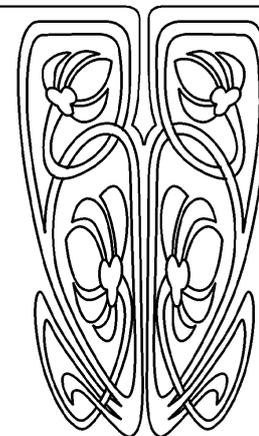
$$K_+(p, \alpha) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left(x - p, \frac{p}{\|p\|} \right) \geq \|x - p\| \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right\},$$

где для $u, v \in \mathbb{R}^n$, (u, v) — скалярное произведение.

В [5] (см. также [6]), в частности, доказано, что такие α -достижимые области являются областями с условием конуса (раствора $\eta\pi$, где η — любое фиксированное число из $(0; \alpha)$).



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Заметим, что определение α -достижимой области, в отличие от областей с условием конуса, охватывает и случай $\alpha = 0$. В этом случае, как будет показано ниже (см. предложение), такое условие равносильно условию звездообразности области.

Пусть:

a) функция $F(x)$ — определена и непрерывна на \mathbb{R}^n ;

b) открытое множество $D = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 0\} \ni 0$;

c) в точках множества уровня $S = \{p \in \mathbb{R}^n : F(p) = 0\}$ существуют производные по направлениям $\frac{\partial F}{\partial l}(p)$ для любого $l \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

А. С. Дудова [7] получила следующее условие звездообразности множества $G = D \cup S$:

Теорема А. Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a)–c). Тогда:

1) из звездообразности множества G относительно нуля следует, что $\frac{\partial F}{\partial(-p)}(p) \leq 0$ для любого $p \in S$;

2) если для любой точки $p \in S$ выполняется хотя бы одно из условий:

i) $\frac{\partial F}{\partial(-p)}(p) < 0$;

ii) $\frac{\partial F}{\partial(-p)}(p) \leq 0, \bar{\gamma}_F(p) = \gamma_{1,F}(p)$,

где $\gamma_F(p) = \{l \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \frac{\partial F}{\partial l}(p) < 0\}$, $\gamma_{1,F}(p) = \{l \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \frac{\partial F}{\partial l}(p) \leq 0\}$, то множество G является звездообразным относительно 0.

Заметим, что в случае выполнения для каждой точки $p \in S$ условия i) достаточно в условиях теоремы А требовать существования на S производных только по направлениям $(-p)$.

В гладком случае критерий звездообразности множества D получен в [8]: $(\text{grad } F(p), p) \geq 0$ для любого $p \in \partial D$. Затем в [5] (см. также [6]) был получен критерий α -достижимости области D в гладком случае: $\left(\frac{\text{grad } F(p)}{\|\text{grad } F(p)\|}, \frac{p}{\|p\|} \right) \geq \sin \frac{\alpha\pi}{2}$ для любого $p \in \partial D$ ($\text{grad } F(p) \neq 0$).

Целью данной статьи является получение условий α -достижимости, $\alpha \in [0; 1)$, области в негладком случае. Иллюстративный пример, приведенный в конце статьи, показывает, что полученные нами условия являются полезными даже в случае $\alpha = 0$, и их с успехом можно применять во многих случаях, когда теорема А не работает. Поскольку при $\alpha \in (0; 1)$ α -достижимые области (за исключением \mathbb{R}^n) ограничены (см. [5, теорема 3], также [6]), то далее мы рассмотрим только случай ограниченных множеств.

Пусть далее функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b), условие же c) мы заменяем более слабым:

c') в точках множества уровня S существуют производные $\frac{\partial F}{\partial l}(p)$ по всем направлениям l из конуса $(K_+(p, \alpha) - p) \setminus \{0\}$.

Из непрерывности F вытекает, что граница $\partial D = \Sigma \subseteq S$.

Предложение. Класс 0-достижимых областей в \mathbb{R}^n совпадает с классом областей, звездообразных относительно 0.

Доказательство. В [5] (см. также [6]) было показано, что для любого $\alpha \in [0; 1)$ α -достижимая область $D \subset \mathbb{R}^n$ является звездообразной. Обратное, пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in D$ — звездообразная относительно 0 область, т. е. для любой точки $x \in D$ отрезок $\{tx : 0 \leq t \leq 1\} \subset D$. Предположим, что D — не является 0-достижимой. Тогда найдется такая точка $p \in \Sigma \subseteq S$, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $y \in K_+(p, 0, \varepsilon) \cap D$ (в этом случае $K_+(p, 0, \varepsilon)$ представляет собой отрезок луча). Из условия звездообразности области D отрезок $[0; y] \in D$ и, следовательно, $p \in D$. Полученное противоречие завершает доказательство.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям a), b), c'). Если для некоторого $\alpha \in [0; 1)$ D — α -достижимая область, то

$$\frac{\partial F}{\partial l}(p) \geq 0$$

для любого направления $l \in (K_+(p, \alpha) - p) \setminus \{0\}$ и для любой точки $p \in S$.



Доказательство. Пусть $p \in S$. Соединим эту точку p с точкой $0 \in D$. Тогда на отрезке $[0; p]$ найдется точка $p_0 \in \Sigma$. Так как D — α -достижимая область и точки $(p + \rho l)$, $\rho > 0$, лежат в конусе $K_+(p, \alpha) \subseteq K_+(p_0, \alpha)$. В [5, теорема 2] (см. также [6]) доказано, что для любой граничной точки p_0 α -достижимой области D пересечение $K_+(p_0, \alpha) \cap D = \emptyset$. Поэтому $F(p + \rho l) \geq 0$. Но $F(p) = 0$, следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial l}(p) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{F(p + \rho l) - F(p)}{\rho} \geq 0,$$

что доказывает теорему 1.

Доказанная теорема представляет собой необходимое условие α -достижимости области D , определяемой условиями а), б), с'). Последующие две теоремы утверждают, что при некоторых дополнительных ограничениях на F это необходимое условие становится достаточным.

Теорема 2. Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям а), б), с') и при этом D — ограниченное множество. Если для некоторого $\alpha \in [0; 1)$ производные по направлениям $\frac{\partial F}{\partial l}(p) > 0$ для любого $l \in (K_+(p, \alpha) - p) \setminus \{0\}$ и для любой точки $p \in \Sigma$, то D — α -достижимая область.

Доказательство. Сначала докажем теорему 2 для $\alpha = 0$. Для этого достаточно доказать (см. предложение) звездообразность области D . Если это не так, то существует точка $p \in D$ такая, что на отрезке $[0, p]$ есть граничная точка $p_0 \in \Sigma$, $p_0 = tp$, $t < 1$. Обозначим $t_0 = \sup_{t \in (0, 1)} \{t : tp \in \Sigma\}$, $p^0 = t_0 p$.

Тогда $p^0 \in \Sigma$ и

$$\frac{\partial F}{\partial(p^0)}(p^0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{F(p^0 + \delta p^0) - F(p^0)}{\delta} \leq 0,$$

так как $F(p^0) = 0$ и $F(p^0(1 + \delta)) < 0$ по определению точки p^0 при достаточно малом δ . Получили противоречие с условием теоремы 2, так как $K_+(p^0, 0) - p^0 = \{tp^0 : t \geq 0\}$. Следовательно, D — звездообразна.

Пусть, далее, $\alpha \in (0; 1)$.

Для начала рассмотрим плоский случай $n = 2$. Докажем, что D — α -достижима. Предположим, что это не так. Тогда найдется такая точка $p \in \Sigma$, что $K_+(p, \alpha, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ для произвольного $\varepsilon > 0$. А значит, найдется последовательность различных точек $y_n \in D$ таких, что $y_n \in K_+(p, \alpha)$ и $y_n \rightarrow p$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что эти точки y_n не будут лежать на луче $\{pt : t \geq 1\}$, иначе это противоречило бы условию звездообразности области D . Соединим каждую из этих точек отрезком с точкой 0. Выберем ту из двух сторон угла $K_+(p, \alpha)$, на которой окажется бесконечное множество точек пересечения z_n этой стороны с отрезками $[0, y_n]$. Тогда $z_n \rightarrow p$ и $z_n \in D$, так как D — звездообразная область и $y_n \in D$.

Обозначим $l_0 = \frac{z_n - p}{\|z_n - p\|}$ — единичный вектор (он не зависит от n), $\rho_n = \|z_n - p\|$. Тогда $z_n = p + \rho_n l_0$ и $F(z_n) < 0$, так как $z_n \in D$. Следовательно,

$$\frac{F(z_n) - F(p)}{\rho_n} = \frac{F(p + \rho_n l_0) - F(p)}{\rho_n} < 0$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial l_0}(p) = \lim_{\rho_n \rightarrow 0^+} \frac{F(p + \rho_n l_0) - F(p)}{\rho_n} \leq 0,$$

а это противоречит условию $\frac{\partial F}{\partial l}(p) > 0$ для любого направления $l \in (K_+(p, \alpha) - p) \setminus \{0\}$ и для любой точки $p \in \Sigma$. Следовательно, D — α -достижимая область.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $n \geq 3$. Также предположим противное, что область D не является α -достижимой. Пусть найдется точка $p \in \Sigma$ такая, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $y \in K_+(p, \alpha, \varepsilon) \cap D$. Через точку y , 0 и точку p проведем плоскость γ . При этом для этих точек из \mathbb{R}^n сохраним тоже обозначение в γ . В сечении области D плоскостью γ получим область Ω (это следует из звездообразности области D), а в сечении конуса $K_+(p, \alpha)$ плоскостью γ — плоский угол раствора $\alpha\pi$, который обозначим $W_+(p, \alpha)$. При этом $y \in W_+(p, \alpha) \cap \Omega$. Если (ξ, η) — декартовы координаты точки на плоскости γ , то каждую точку $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \cap \gamma$ можно записать в виде $(x_1(\xi, \eta), \dots, x_n(\xi, \eta))$, где $x_k(\xi, \eta)$ — линейная функция своих аргументов для каждого $k = \overline{1, n}$. Поэтому область Ω задается условием $f(\xi, \eta) = F(x_1(\xi, \eta), \dots, x_n(\xi, \eta)) < 0$, $(\xi, \eta) \in \gamma$, где $f(\xi, \eta) =$



непрерывна в γ , существует $\frac{\partial f}{\partial l}(\xi, \eta)$ в $(\gamma \cap S)$ и $\frac{\partial f}{\partial l}(p) = \frac{\partial F}{\partial l}(p) = \lim_{\rho \rightarrow 0+} \frac{F(p + \rho l) - F(p)}{\rho} > 0$ для любого $l \in ((K_+(p, \alpha) - p) \cap \gamma) \setminus \{0\} = (W_+(p, \alpha) - p) \setminus \{0\}$. Из проведенных рассуждений следует, что тоже неравенство $\frac{\partial f}{\partial l}(p) > 0$ справедливо не только для рассматриваемой точки $p \in \partial\Omega$, но и для любой граничной точки $p \in \partial\Omega$. Откуда будет следовать α -достижимость области Ω в силу выше рассмотренного плоского случая $n = 2$. А тогда, как доказано в [5, теорема 2] (см. также [6]), для любой точки $p \in \partial\Omega$ конус $W_+(p, \alpha)$ лежит вне области Ω . Следовательно, $W_+(p, \alpha) \cap \Omega = \emptyset$, что противоречит предполагававшемуся существованию точки $y \in W_+(p, \alpha) \cap \Omega$. Теорема 2 доказана.

Мы не знаем, можно ли в формулировке теоремы 2 заменить строгое неравенство на неравенство $\frac{\partial F}{\partial l}(p) \geq 0$. Ниже мы представим доказательство теоремы о возможности такой замены, изменив условие $p \in \Sigma$ на условие $p \in D^\delta = \{x \in D : \rho(x, S) < \delta\}$ для фиксированного $\delta > 0$, где $\rho(x, S)$ — расстояние от x до S .

Теорема 3. Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям а), б) и множество D ограничено. Если для некоторых $\alpha \in [0; 1)$ и сколь угодно малого $\delta > 0$ существуют производные $\frac{\partial F}{\partial l}(x) \geq 0$ для любых $x \in D^\delta$ по любым направлениям $l \in (K_+(x, \alpha) - x) \setminus \{0\}$, то D — α -достижимая область.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$. Обозначим $F_t(x) = F(x) + t\varphi(x)$, $t > 0$ и $D_t = \{x \in \mathbb{R}^n : F_t(x) < 0\}$. Тогда $D_t \subset D$ для любого $t > 0$. Заметим также, что $0 \in D_t$, поскольку $F_t(0) = F(0) < 0$, так как $0 \in D$.

Покажем далее, что существует $T > 0$ такое, что для всех $0 < t < T$ множества уровня $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : F_t(x) = 0\}$ будут лежать в D^δ .

Во-первых, $S_t \subset D$ для всех $t > 0$, так как если $x \in S_t$, то $x \neq 0$ и $F(x) = -t\varphi(x) < 0$.

Во-вторых, если $0 < t_1 < t_2$, то $D_{t_2} \subset D_{t_1}$. Действительно, если $x \in D_{t_2}$, то $F(x) + t_2\varphi(x) < 0$, следовательно, $F(x) + t_1\varphi(x) \leq F(x) + t_2\varphi(x) < 0$, поэтому $x \in D_{t_1}$.

Предположим, что не найдется такого $T > 0$, что $S_t \subset D^\delta$ для каждого $t \in (0, T)$. Тогда существует такая последовательность $y_n \in S_{t_n}$, что расстояние $\rho(y_n, S) > \delta$ при $t_n \rightarrow 0$. Поскольку S — замкнутое множество, то существует последовательность $x_n \in S$ такая, что $\|y_n - x_n\| = \rho(y_n, S) > \delta$.

Из ограниченности множества D следует, что из последовательности $\{y_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (обозначим ее также) такую, что $y_n \rightarrow y_0 \in \mathbb{R}^n$. Переходя к пределу в равенстве $F(y_n) = -\frac{t_n}{2} \|y_n\|^2$ при $t_n \rightarrow 0$, получаем $F(y_0) = 0$, т. е. $y_0 \in S$. Но $\rho(y_n, S) > \delta$. Следовательно, $\rho(y_0, S) \geq \delta$. Противоречие. Следовательно, существует такое число $T > 0$, что $S_t \subset D^\delta$ для любых $t \in (0, T)$.

По условию теоремы $\frac{\partial F}{\partial l}(x) \geq 0$ для всех $x \in S_t$, $0 < t < T$ и $l \in (K_+(x, \alpha) - x) \setminus \{0\}$. Далее, не умаляя общности, можно считать, что $\|l\| = 1$. При таких l и x

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l}(x) = (\text{grad } \varphi, l) = (x, l) \geq \|x\| \cos \frac{\alpha\pi}{2} > 0.$$

Поэтому для всех $x \in S_t$ существуют $\frac{\partial F_t}{\partial l}(x) = \frac{\partial F}{\partial l}(x) + t(x, l) > 0$ для любых $l \in (K_+(x, \alpha) - x) \setminus \{0\}$, $\|l\| = 1$. Тогда по теореме 2 область D_t — α -достижима для любого $t \in (0, T)$.

Покажем теперь, что для любого $x_0 \in D$ найдется такая область D_t , где $0 < t < T$, что $x_0 \in D_t$.

Пусть $x_0 \in D$, $x_0 \neq 0$ и $F(x_0) = -C < 0$. Тогда $x_0 \in D_t$ для всех $t : 0 < t < \frac{2C}{\|x_0\|^2} = t_0$, так как

$$F_t(x_0) = F(x_0) + t \frac{\|x_0\|^2}{2} = -C + t \frac{\|x_0\|^2}{2} < 0.$$

Таким образом, $D = \bigcup_{0 < t < T} D_t$, где каждая область D_t — α -достижима. В [5] доказано, что объединение α -достижимых областей есть α -достижимая область, что и доказывает теорему 3.

Из доказательства теоремы 3 видна возможность ее усиления. Действительно, для $x \in S_t$ (обо-



значения из доказательства теоремы 3) $t = \frac{-F(x)}{\varphi(x)}$. Поэтому

$$\frac{\partial F_t}{\partial l}(x) = \frac{\partial F}{\partial l}(x) + t(x, l) = \frac{\partial F}{\partial l}(x) - \frac{F(x)}{\varphi(x)}(x, l) \geq \frac{\partial F}{\partial l}(x) - \frac{2F(x)}{\|x\|} \cos \frac{\alpha\pi}{2} > 0$$

для любых $l \in (K_+(x, \alpha) - x) \setminus \{0\}$, $\|l\| = 1$, если $\frac{\partial F}{\partial l}(x) > \frac{2F(x)}{\|x\|} \cdot \cos \frac{\alpha\pi}{2}$, $x \in S_t$. Отсюда получаем

Следствие 1. Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям а), б) и множество D ограничено. Если для некоторых $\alpha \in [0; 1)$ и сколь угодно малого $\delta > 0$ существуют производные $\frac{\partial F}{\partial l}(x) > \frac{2F(x)}{\|x\|} \cdot \cos \frac{\alpha\pi}{2}$ для любых $x \in D^\delta$ по любым направлениям $l \in (K_+(x, \alpha) - x) \setminus \{0\}$, то D — α -достижимая область.

Из этого следствия, в частности, получим условие звездообразности области (случай $\alpha = 0$).

Следствие 2. Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет условиям а), б) и множество D ограничено. Если для сколь угодно малого $\delta > 0$ существуют производные $\frac{\partial F}{\partial x}(x) > \frac{2F(x)}{\|x\|}$ для любых $x \in D^\delta$, то D — звездообразная область.

Заметим, что выражения в правой части неравенств из следствия 1 и следствия 2 отрицательны. Это может существенно упрощать проверку выполнения условия α -достижимости или звездообразности. Следующий пример показывает, как следствие 2 позволяет сделать вывод о звездообразности области, тогда как условия теоремы А не применимы.

Пример. Пусть множество $D \in \mathbb{R}^2$ задано условием

$$F(X) = (\|X\|^2 - 1)\|X - e\|^2 < 0, e = (1; 0) \iff X \in \mathbb{B}^2(0, 1).$$

Тогда множество уровня $S = \{X \in \mathbb{R}^2 : F(X) = 0\} = \partial\mathbb{B}^2(0, 1)$.

Обозначим $X = (x; y)$, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = 2x((x-1)^2 + y^2) + 2(x-1)(x^2 + y^2 - 1),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(X) = 2y((x-1)^2 + y^2) + 2y(x^2 + y^2 - 1).$$

Так как функция $F(X)$ дифференцируема на \mathbb{R}^2 , то для $\|l\| = 1$

$$\frac{\partial F}{\partial l}(X) = (\text{grad } F(X), l).$$

А значит, $\frac{\partial F}{\partial l}(1; 0) = (\text{grad } F(1; 0), l) = 0$ для любого $l \in \mathbb{R}^2$. Тогда в теореме А

$$\emptyset = \bar{\gamma}_F(1; 0) \neq \gamma_{1,F}(1; 0) = \mathbb{R}^2,$$

т. е. условия теоремы А не выполнены.

Покажем, что для области D выполняются условия следствия 2. Это условие $\frac{\partial F}{\partial X}(X) > \frac{2F(X)}{\|X\|}$ в гладком случае переписывается как $(\text{grad } F(X), X) > 2F(X)$, т. е.

$$\begin{aligned} [(x^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2) + (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - x)] &> ((x-1)^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) \iff \\ \iff (x-1)^2 + y^2 + (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - x) &> 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим приграничный слой:

$$D^\delta = \left\{ X = (x; y) \in \mathbb{R}^2 : (1 - \delta) < \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \right\},$$

где $0 < \delta < 1$. Тогда для любого $X = (x; y) \in D^\delta$ с постоянной нормой $\|X\| = \sqrt{R} > 1 - \delta > 0$. Поэтому условие (1) примет вид

$$R - 2x + 1 + (R - 1)(R - x) > 0 \iff \frac{R^2 + 1}{1 + R} > x.$$



А так как $X \in \partial\mathbb{B}^2(0, \sqrt{R})$, т. е. $x \in [-\sqrt{R}; \sqrt{R}]$, то достаточно показать, что

$$\frac{R^2 + 1}{1 + R} > \sqrt{R} \iff R^4 + 1 > R + R^3. \quad (2)$$

Обозначим $t = 1 - R > 0$. Тогда неравенство (2) равносильно $(1 - t)^4 + 1 > 1 - t + (1 - t)^3$, что равносильно верному неравенству $t^2 - 3t + 3 > 0$. Таким образом, условия следствия 2 выполнены.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности и поддержке РФФИ (проект 11-01-00952а).

Библиографический список

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М. : Наука, 1975. 480 с.
2. Долженко Е. П. Граничные свойства произвольных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31. С. 3–14. DOI: 10.1070/IM1967v001n01ABEH000543.
3. Adams R. A., Fournier J. Cone conditions and properties of Sobolev spaces // J. Math. Anal. Appl. 1977. Vol. 61. P. 713–734. DOI: 10.1016/0022-247X(77)90173-1
4. Zaremba S. Sur le principe de Dirichlet // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 293–316. DOI: 10.1007/BF02393130.
5. Liczberski P., Starkov V. V. Domains in \mathbb{R}^n with conical accessible boundary // J. Math. Anal. Appl. (to appear).
6. Liczberski P., Starkov V. V. Planar α -angularly starlike domains, α -angularly starlike functions and their generalizations to multi-dimensional case // 60 years of analytic functions in Lublin in memory of our professors and friends Jan G. Krzyz, Zdzislaw Lewandowski and Wojciech Szapiel. Innovatio Press Sciebtific publishing house. University of Economics and Innovation in Lublin, 2012. P. 117–124.
7. Дудова А. С. Условия звездности лебегова множества дифференцируемой по направлениям функции // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 30–33.
8. Старков В. В. Условия звездообразности областей в \mathbb{R}^n // Труды ПетрГУ. Сер. мат. 2011. Вып. 18. С. 70–82.

α -accessible Domains, a Nonsmooth Case

K. F. Amozova, V. V. Starkov

Petrozavodsk State University, Russia, 185910, Petrozavodsk, Lenin st., 33, amokira@rambler.ru, VstarV@list.ru

This paper continues the study of α -accessible domains in \mathbb{R}^n . They are starlike domains and satisfy cone condition which is important for applications. Conditions of α -accessibility of domain, defined by the inequality $F(x) < 0$, is obtained for a continuous function F in \mathbb{R}^n . Thus these conditions are written in the form of inequalities for the directional derivatives; necessary and sufficient conditions differ only in the sign of equality in these inequalities. We obtain new results even in the case where $\alpha = 0$ (the case of starlike domains).

Key words: cone condition, α -accessible domains, starlike sets.

References

1. Besov O. V., Ilin V. P., Nikolskij S. M. *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems*. New York; Toronto; Ontario; London, John Wiley & Sons, 1978, 1979, vol. 1, 2. (Russ. ed.: Besov O. V., Ilin V. P., Nikolskij S. M. *Integral'nye predstavlenija funkcij i teoremy vlozhenija*. Moscow, Nauka, 1975. 480 p.)
2. Dolženko E. P. Boundary properties of arbitrary functions. *Math. USSR Izv.*, 1967, vol. 1, no. 1, pp. 1–12. DOI: 10.1070/IM1967v001n01ABEH000543.
3. Adams R. A., Fournier J. Cone conditions and properties of Sobolev spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 1977, vol. 61. pp. 713–734. DOI: 10.1016/0022-247X(77)90173-1.
4. Zaremba S. Sur le principe de Dirichlet. *Acta Math.*, 1911, vol. 34, pp. 293–316. DOI: 10.1007/BF02393130.
5. Liczberski P., Starkov V. V. Domains in \mathbb{R}^n with conical accessible boundary. *J. Math. Anal. Appl.* (to appear).
6. Liczberski P., Starkov V. V. Planar α -angularly starlike domains, α -angularly starlike functions and their generalizations to multi-dimensional case. *60 years of analytic functions in Lublin in memory of our professors and friends Jan G. Krzyz, Zdzislaw Lewandowski and Wojciech Szapiel*. Innovatio Press Sciebtific publishing house. University of Economics and Innovation in Lublin, 2012, pp. 117–124.
7. Dudova A. S. Uslovija zvezdnosti lebegova mnozhestva differenciruemoj po napravlenijam funkicii [Starlikeness conditions of Lebesgue set of directionally differentiable function]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, 2003, iss. 5, pp. 30–31 (in Russian).
8. Starkov V. V. Starlikeness criteria for domains of \mathbb{R}^n . *Trudy PGU, Ser. Math.*, 2011, vol. 18, pp. 70–82 (in Russian).



УДК 517.984

ТЕОРЕМА ЖОРДАНА–ДИРИХЛЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

М. Ш. Бурлуцкая

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, bms2001@mail.ru

В работе исследуются вопросы о сходимости разложений произвольной функции $f(x)$ в ряд Фурье по системе собственных функций функционально-дифференциального оператора с инволюцией $Ly = y'(1-x) + \alpha y'(x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x)$, $y(0) = \gamma y(1)$. Основываясь на исследовании резольвенты более простого функционально-дифференциального оператора и используя метод контурного интегрирования резольвенты, получены достаточные условия сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$ (аналог теоремы Жордана–Дирихле).

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, инволюция, равносходимость, ряд Фурье.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается функционально-дифференциальный оператор с инволюцией

$$Ly = y'(1-x) + \alpha y'(x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad y(0) = \gamma y(1),$$

где $x \in [0, 1]$, $\alpha^2 \neq 1$, α, γ — комплексные постоянные, $p_i(x) \in C^1[0, 1]$.

Исследование различных свойств таких операторов проводится, например, в работах [1–4] (см. также библиографию).

В [4] установлена равносходимость на отрезке $[0, 1]$ рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) для оператора L и оператора

$$L_0y = y'(1-x) + \alpha y'(x), \quad y(0) = \gamma y(1).$$

А именно доказана следующая теорема

Теорема 1 [4]. Пусть $\gamma \neq b$, $\gamma \neq b^{-1}$, $b = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Тогда для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$ имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - S_r^0(f, x)\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f, x)$ ($S_r^0(f, x)$) — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора L (L_0), включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k (λ_k^0), для которых $|\lambda_k| < r$ ($|\lambda_k^0| < r$).

В данной работе получены достаточные условия сходимости ряда Фурье по с.п.ф. оператора L (аналог теоремы Жордана–Дирихле). На основании теоремы 1 исследование достаточно провести лишь для оператора L_0 .

1. ФОРМУЛА ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА L_0

В этом пункте приведем некоторые вспомогательные факты из [4].

Обозначим через \tilde{L}_0 следующий оператор в пространстве вектор-функций размерности 2:

$$\tilde{L}_0z = Bz'(x), \quad M_0z(0) + M_1z(1) = 0.$$

Здесь $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L_0 (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор), \tilde{R}_λ^0 — резольвента оператора \tilde{L}_0 .



Теорема 2. Если λ таково, что резольвента R_λ^0 оператора L_0 существует и $y = R_\lambda^0 f$, то вектор-функция $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, является решением краевой задачи

$$Bz'(x) - \lambda z(x) = F(x), \tag{1}$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0, \tag{2}$$

с $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$. Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (1), (2) и задача (1), (2) невырождена, то R_λ^0 существует и $(R_\lambda^0 f)(x) = z_1(x)$, где z_1 — первая компонента решения $z(x) = \tilde{R}_\lambda^0 F$ системы (1), (2).

Положим $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$, где $b = \alpha - \tilde{\omega}$, $\tilde{\omega} = \sqrt{\alpha^2 - 1}$ (числа $\pm \tilde{\omega}$ — собственные значения матрицы B). Тогда $B\Gamma = \Gamma D^{-1}$, где $D^{-1} = \text{diag}(\tilde{\omega}, -\tilde{\omega})$. Выполнив в (1), (2) замену $z(x) = \Gamma u(x)$, получим следующую задачу для $u(x)$:

$$u'(x) - \mu D_1 u(x) = \Phi(x), \tag{3}$$

$$U_0(u) = M_0 \Gamma u(0) + M_1 \Gamma u(1) = 0, \tag{4}$$

где $D_1 = \text{diag}(1, -1)$, $\mu = \lambda \omega$, $\omega = 1/\tilde{\omega}$, $\Phi(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$.

Лемма 1. Если μ таково, что матрица $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x, \mu))$, где $V(x, \mu) = \text{diag}(e^{\mu x}, e^{-\mu x})$, обратима, то краевая задача (3), (4) однозначно разрешима при любой $\Phi(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$ и ее решение $u(x) = u(x, \mu)$ имеет вид

$$u(x, \mu) = R_{0\mu} \Phi(x) = -V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu \Phi) + g_\mu \Phi(x), \tag{5}$$

где $g_\mu \Phi(x) = \int_0^1 g(x, t, \mu) \Phi(t) dt$, $U_0(g_\mu \Phi) = \int_0^1 U_{0x}(g(x, t, \mu)) \Phi(t) dt$, (U_{0x} означает, что U_0 применяется к g по переменной x), $g(x, t, \mu) = \text{diag}(g_1(x, t, \mu), g_2(x, t, \mu))$, $g_k(x, t, \mu) = -\varepsilon(x, t) \times \exp\{(-1)^{k-1} \mu(x-t)\}$, при $(-1)^{k-1} \text{Re } \mu \geq 0$, $g_k(x, t, \mu) = \varepsilon(x, t) \exp\{(-1)^{k-1} \mu(x-t)\}$, при $(-1)^{k-1} \text{Re } \mu \leq 0$, $\varepsilon(x, t) = 1$, если $x \geq t$, $\varepsilon(x, t) = 0$, если $x < t$.

Таким образом, $z(x) = \tilde{R}_\lambda^0 F(x) = \Gamma u(x, \mu) = \Gamma R_{0\mu} \Phi(x)$ и тем самым по теореме 2

$$R_\lambda^0 f = [\Gamma R_{0\mu} \Phi]_1, \tag{6}$$

где $[\cdot]_1$ означает первую компоненту вектора.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Пусть $f(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ (непрерывная функция ограниченной вариации) и удовлетворяет краевому условию:

$$f(0) = \gamma f(1). \tag{7}$$

Будем считать, что $\text{Re } \mu \geq 0$ (противоположный случай рассматривается аналогично).

Для исследования резольвенты оператора L_0 оценим компоненты решения в (5).

Лемма 2. Имеет место формула

$$g_\mu \Phi(x) = \frac{1}{\mu} \{G_1(x) + G_2(x, \mu) + G_3(x, \mu)\},$$

где

$$G_1(x) = (-\Phi_1(x), \Phi_2(x))^T, \quad G_2(x, \mu) = \left(e^{\mu(x-1)} \Phi_1(1), -e^{-\mu x} \Phi_2(0) \right)^T,$$

$$G_3(x, \mu) = \left(-\int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t), -\int_0^x e^{-\mu(x-t)} d\Phi_2(t) \right)^T.$$

Доказательство. Имеем, используя интегрирование по частям:

$$(g_\mu \Phi(x))_1 = \int_0^1 g_1(x, t, \mu) \Phi_1(t) dt = -\int_x^1 e^{\mu(x-t)} \Phi_1(t) dt =$$



$$= \frac{1}{\mu} \left[e^{\mu(x-1)} \Phi_1(1) - \Phi_1(x) - \int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t) \right],$$

$$(g_\mu \Phi(x))_2 = \int_0^1 g_2(x, t, \mu) \Phi_2(t) dt = \int_0^x e^{-\mu(x-t)} \Phi_2(t) dt = \frac{1}{\mu} \left[\Phi_2(x) - e^{-\mu x} \Phi_2(0) - \int_0^x e^{-\mu(x-t)} d\Phi_2(t) \right],$$

откуда следует утверждение леммы. □

Так как в (3) $\Phi(x) = D\Gamma^{-1}F(x)$, $F(x) = (f(x), f(1-x))^T$, то очевидно утверждение

Лемма 3. Для компонент вектора $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x))^T$ в (3) имеют место формулы

$$\Phi_1(x) = \frac{\omega}{|\Gamma|} [f(x) - bf(1-x)], \quad \Phi_2(x) = \frac{\omega}{|\Gamma|} [bf(x) - f(1-x)],$$

где $|\Gamma| = \det \Gamma = 1 - b^2$.

Отсюда и из (7) имеем

Следствие. Для функций $\Phi_k(x)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) &= -\Phi_1(1-x), \\ \Phi_1(0) &= \frac{\omega}{|\Gamma|} (\gamma - b)f(1), & \Phi_2(0) &= \frac{\omega}{|\Gamma|} (b\gamma - 1)f(1), \\ \Phi_1(1) &= \frac{\omega}{|\Gamma|} (1 - b\gamma)f(1), & \Phi_2(1) &= \frac{\omega}{|\Gamma|} (b - \gamma)f(1). \end{aligned}$$

Из леммы 3 и следствия из нее для компонент $g_\mu \Phi(x)$ легко получим:

$$G_1(x) = \frac{\omega}{|\Gamma|} (bf(1-x) - f(x), bf(x) - f(1-x))^T, \quad (8)$$

$$G_2(x, \mu) = \frac{\omega}{|\Gamma|} (1 - b\gamma)f(1) (e^{\mu(x-1)}, e^{-\mu x})^T. \quad (9)$$

Лемма 4. Для компонент $U_0(g_\mu \Phi)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} U_0(G_1) &= (0, 0)^T, \\ U_0(G_2) &= \frac{\omega}{|\Gamma|} (1 - b\gamma)f(1) [(1 - b\gamma)e^{-\mu} + (b - \gamma)] (1, -1)^T. \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. Имеем:

$$M_0\Gamma = \begin{pmatrix} 1 - b\gamma & b - \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma - b & b\gamma - 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая (8) и (7), получим:

$$\begin{aligned} U_0(G_1) &= M_0\Gamma G_1(0) + M_1\Gamma G_1(1) = \begin{pmatrix} 1 - b\gamma & b - \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b - \gamma \\ b\gamma - 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\omega}{|\Gamma|} f(1) + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma - b & b\gamma - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b\gamma - 1 \\ b - \gamma \end{pmatrix} \frac{\omega}{|\Gamma|} f(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далее, так как

$$U_0 \left((e^{\mu(x-1)}, e^{-\mu x})^T \right) = M_0\Gamma(e^{-\mu}, 1)^T + M_1\Gamma(1, e^\mu)^T = [(1 - b\gamma)e^{-\mu} + (b - \gamma)] (1, -1)^T,$$

то из (9) следует (10). □

Лемма 5. Имеет место формула

$$\Delta_0^{-1}(\mu) = \frac{1}{\delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} (b\gamma - 1)e^{-\mu} & \gamma - b \\ (b - \gamma)e^\mu & 1 - b\gamma \end{pmatrix},$$

где $\delta_0(\mu) = \det \Delta_0(\mu) = (\gamma - b)^2 e^\mu - (1 - b\gamma)^2 e^{-\mu}$.

Доказательство. Имеем:

$$\Delta_0(\mu) = U_0(V(x, \mu)) = M_0\Gamma + M_1\Gamma \text{diag}(e^\mu, e^{-\mu}) = \begin{pmatrix} 1 - b\gamma & b - \gamma \\ (\gamma - b)e^\mu & (b\gamma - 1)e^{-\mu} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получается явное выражение для $\delta_0(\mu)$.



Вычисляя алгебраические дополнения, получим утверждение леммы. □

Из леммы 5 сразу следует

$$V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu) = \frac{1}{\delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} (b\gamma - 1)e^{-\mu(1-x)} & (\gamma - b)e^{\mu x} \\ (b - \gamma)e^{\mu(1-x)} & (1 - b\gamma)e^{-\mu x} \end{pmatrix}.$$

Лемма 6. *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_1) &= (0, 0)^T, \\ V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_2) &= \frac{\omega}{|\Gamma|}(1 - b\gamma)f(1) \begin{pmatrix} e^{\mu(x-1)} \\ e^{-\mu x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу леммы 4 первое соотношение очевидно, а для второго, учитывая, что

$$\begin{aligned} V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)(1, -1)^T &= \frac{1}{\delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} (b\gamma - 1)e^{-\mu(1-x)} - (\gamma - b)e^{\mu x} \\ (b - \gamma)e^{\mu(1-x)} - (1 - b\gamma)e^{-\mu x} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} [(b\gamma - 1)e^{-\mu} - (\gamma - b)]e^{\mu x} \\ [(b\gamma - 1)e^{-\mu} - (\gamma - b)]e^{\mu}e^{-\mu x} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

имеем из (10)

$$\begin{aligned} V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_2) &= \frac{\omega f(1)}{|\Gamma|\delta_0(\mu)}(1 - b\gamma) [(1 - b\gamma)e^{-\mu} + (b - \gamma)] [(b\gamma - 1)e^{-\mu} - (\gamma - b)] \begin{pmatrix} e^{\mu x} \\ e^{\mu(1-x)} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\omega f(1)}{|\Gamma|\delta_0(\mu)}(1 - b\gamma) [(b - \gamma)^2 - (b\gamma - 1)^2e^{-2\mu}] (e^{\mu x}, e^{\mu(1-x)})^T. \end{aligned}$$

Отсюда, так как

$$\frac{[(b - \gamma)^2 - (b\gamma - 1)^2e^{-2\mu}]}{\delta_0(\mu)} = \frac{[(b - \gamma)^2 - (b\gamma - 1)^2e^{-2\mu}]}{(\gamma - b)^2e^{\mu} - (1 - b\gamma)^2e^{-\mu}} = e^{-\mu},$$

получим утверждение леммы для G_2 . □

Лемма 7. *Если $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $f(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ и $f(0) = \gamma f(1)$, то*

$$\begin{aligned} R_{\lambda}^0 f &= -\frac{\omega}{\mu} f(x) - \frac{1}{\mu} \left(\int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t) + b \int_0^x e^{-\mu(x-t)} d\Phi_2(t) \right) - \\ &- \frac{1}{\mu} \left[\Gamma V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0 \left(\left(\int_x^1 e^{\mu(x-t)} d\Phi_1(t), \int_0^x e^{-\mu(x-t)} d\Phi_2(t) \right)^T \right) \right]_1. \end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. Имеем в силу (6)

$$R_{\lambda}^0 f = [\Gamma R_{0\mu} \Phi]_1 = [\Gamma(g_{\mu} \Phi(x) - V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_{\mu} \Phi))]_1.$$

Из (8) и (9) получим:

$$\begin{aligned} [\Gamma G_1(x)]_1 &= \frac{\omega}{|\Gamma|} (bf(1-x) - f(x) + b^2 f(x) - bf(1-x)) = \frac{\omega}{|\Gamma|} (b^2 - 1)f(x) = -\omega f(x), \\ [\Gamma G_2(x, \mu)]_1 &= \frac{\omega}{|\Gamma|} (1 - b\gamma)f(1) [\Gamma(e^{\mu(x-1)}, e^{-\mu x})^T]_1 = \frac{\omega}{|\Gamma|} (1 - b\gamma)f(1)(e^{\mu(x-1)} + be^{-\mu x}). \end{aligned}$$

Далее, по лемме 6

$$\begin{aligned} [\Gamma V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_1)]_1 &= 0, \\ [\Gamma V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(G_2)]_1 &= \frac{\omega}{|\Gamma|} (1 - b\gamma)f(1)(e^{\mu(x-1)} + be^{-\mu x}). \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует утверждение леммы. □



3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для получения основного результата используется следующее утверждение.

Лемма 8. Если $\varphi(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$, то при $\operatorname{Re} \mu \geq 0$

$$\int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t) = O(e^{\mu x} e^{-\mu \delta}) + o_\delta(1)e^{\mu x}, \quad (12)$$

$$\int_x^1 e^{-\mu t} d\varphi(t) = O(e^{-\mu x} e^{-\mu \delta}) + o_\delta(1)e^{-\mu x}, \quad (13)$$

где $o_\delta(1) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по $x \in [0, 1]$, $O(\cdot)$ не зависит от δ .

Доказательство. В силу непрерывности $f(x)$ функция $\bigvee_0^x(f) = \int_0^x |df(x)|$ также непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на нем и $\bigvee_x^{x+\delta}(f) = o_\delta(1)$ для любого $x \in [0, 1]$.

Если $x \geq \delta$, то

$$\left| \int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t) \right| = \left| \int_0^{x-\delta} e^{\mu t} d\varphi(t) + \int_{x-\delta}^x e^{\mu t} d\varphi(t) \right| \leq |e^{\mu(x-\delta)}| \bigvee_0^1(\varphi) + |e^{\mu x}| \bigvee_{x-\delta}^x(\varphi).$$

Если $x \leq \delta$, то

$$\left| \int_0^x e^{\mu t} d\varphi(t) \right| \leq |e^{\mu x}| \bigvee_0^\delta(\varphi).$$

Отсюда следует (12). Оценка (13) получается из (12) заменой переменной. \square

Теорема 3 (Жордана–Дирихле). Если $f(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ и $f(0) = \gamma f(1)$, $\gamma \neq b$, $\gamma \neq b^{-1}$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - S_r(f, x)| = 0.$$

Доказательство. Имеем:

$$S_r^0(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda^0 f d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} [\Gamma R_{0\mu} \Phi]_1 d\lambda. \quad (14)$$

Так как $V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) = O(1)$ и в силу леммы 8, интегралы в (11) имеют оценку $O(e^{-\mu \delta}) + o_\delta(1)$, то интеграл $\int_{\substack{|\mu|=r \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}}$ от второго и третьего слагаемых в (11) есть $o(1)$. Аналогичный результат может

быть получен при $\operatorname{Re} \mu \leq 0$, причем в этом случае первое слагаемое в $R_\lambda^0 f$ имеет тот же вид $-\frac{\omega}{\mu} f(x)$.

А так как

$$\int_{|\lambda|=r} \frac{\omega}{\mu} d\lambda = \int_{|\lambda|=r} \frac{\omega}{\lambda \omega} d\lambda = 2\pi i,$$

то из (14) получим:

$$S_r^0(f, x) = f(x) + o(1),$$

откуда в силу теоремы 1 следует утверждение теоремы. \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238а).

Библиографический список

- Хромов А. П. Теоремы равномерности для интегрально-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–404.
- Хромов А. П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–949. DOI: 10.4213/mzm1472.
- Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Луконина А. С.,



Хромов А. П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией // Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 4. С. 1309–1312.
4. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Об одной теореме

равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4. С. 3–10.

Jordan–Dirichlet Theorem for Functional Differential Operator with Involution

M. Sh. Burlutskaya

Voronezh State University, Russia, 394006, Voronezh, Universitetskaya pl., 1, bmsh2001@mail.ru

In this paper the problem of decomposability of a function $f(x)$ into Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of a functional-differential operator with involution $Ly = y'(1-x) + \alpha y'(x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x)$, $y(0) = \gamma y(1)$ is investigated. Based on the study of the resolvent of the operator easier and using the method of contour integration of the resolvent, we obtain the sufficient conditions for the convergence of the Fourier series for a function $f(x)$ (analogue of the Jordan–Dirichlet's theorem).

Key words: functional-differential operator, involution, equiconvergence, Fourier series.

References

1. Khromov A. P. Equiconvergence theorems for integro-differential and integral operators. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1982, vol. 42, no. 3, pp. 331–355.
2. Khromov A. P. Inversion of integral operators with kernels discontinuous on the diagonal. *Math. Notes*, 1998, vol. 64, no. 5–6, pp. 804–813. DOI: 10.4213/mzm1472.
3. Burlutskaya M. Sh., Kurdyumov V. P., Lukonina A. S., Khromov A. P. A functional-differential operator with involution. *Doklady Math.*, 2007, vol. 75, no 3, pp. 399–402.
4. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. On the same theorem on a equiconvergence at the whole segment for the functional-differential operators. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 4, pt. 1, pp. 3–10 (in Russian).

УДК 501.1

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРЫ ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НЕКОТОРОГО ОДНОМЕРНОГО ОРБИФОЛДА

Е. Ю. Волокитина

Ассистент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, evgenia.yu@gmail.com

И. М. Гельфанд и Д. Б. Фукс доказали, что когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности изоморфны тензорному произведению кольца полиномов с одной образующей степени 2 и внешней алгебры с одной образующей степени 3. В настоящей статье изучаются когомологии алгебры Ли векторных полей одномерного орбифолда S^1/\mathbb{Z}_2 , который представляет собой пространство орбит при действии группы \mathbb{Z}_2 на окружности отражением относительно оси Ox . Доказано, что рассматриваемые когомологии изоморфны тензорному произведению внешней алгебры с двумя образующими степени 1 и кольца полиномов с одной образующей степени 2. В доказательстве используется метод Гельфанда–Фукса с модификациями для данного случая.

Ключевые слова: орбифолд, алгебра Ли, когомологии.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть S^1 — единичная окружность в плоскости комплексного переменного z , t — угловой параметр на окружности. Обозначим через $X = S^1/\mathbb{Z}_2$ орбифолд, получающийся из окружности, действием группы \mathbb{Z}_2 , порожденной отражением относительно оси Ox . S^1/\mathbb{Z}_2 — один из естественных одномерных орбифолодов. У данного орбифолда существует две особые точки, соответствующие значениям углового параметра $t = 0$ и $t = \pi$. Обозначим через $\mathcal{W}(S^1)$ и $\mathcal{W}(X)$ алгебры Ли гладких векторных полей на окружности и орбифолде X соответственно. Под гладкостью здесь и далее будем понимать гладкость класса C^∞ . Алгебра Ли $\mathcal{W}(S^1)$ — топологическая алгебра Ли с C^∞ -топологией, $\mathcal{W}(X)$ — ее замкнутая подалгебра.



Каждая гладкая функция на орбифолде X определяется четной периодической гладкой функцией на \mathbb{R} . Векторными полями на X являются дифференцирования алгебры гладких функций на X .

Любое векторное поле на окружности представляется в виде $\xi(t)\frac{d}{dt}$, где $\xi(t)$ — гладкая периодическая функция. Будем называть векторные поля, для которых функция $\xi(t)$ нечетная(четная), нечетными(четными) векторными полями. Аналогичным образом векторное поле на орбифолде X можно представить в виде $\xi(t)\frac{d}{dt}$, где $\xi(t)$ — нечетная периодическая гладкая функция. Поэтому под алгеброй Ли $\mathcal{U}(X)$ можно понимать алгебру Ли нечетных векторных полей на окружности. В дальнейшем будем вместо $\xi(t)\frac{d}{dt}$ писать просто $\xi(t)$.

Определение 1. q -мерной коцепью топологической алгебры Ли \mathfrak{g} с коэффициентами в тривиальном \mathfrak{g} -модуле \mathbb{R} называется непрерывный кососимметрический q -линейный функционал на \mathfrak{g} со значениями в \mathbb{R} .

Дифференциал задается формулой: если $L \in C^q(\mathfrak{g})$, то

$$dL(\xi_1, \dots, \xi_{q+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j-1} L([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \widehat{\xi_j}, \dots, \xi_{q+1}). \quad (1)$$

Произведение коцепей определяется следующим образом: если $L_1 \in C^q(\mathfrak{g})$, $L_2 \in C^r(\mathfrak{g})$, то $L_1 \wedge L_2 \in C^{q+r}(\mathfrak{g})$ и

$$L_1 \wedge L_2(\xi_1, \dots, \xi_{q+r}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq q+r} (-1)^{i_1 + \dots + i_r - \frac{q(q-1)}{2}} \cdot L_1(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_q}) \times \\ \times L_2(\xi_1, \dots, \widehat{\xi_{i_1}}, \dots, \widehat{\xi_{i_q}}, \dots, \xi_{q+r}).$$

Обозначим через $C^*(\mathcal{U}(S^1))$ и $C^*(\mathcal{U}(X))$ комплексы непрерывных коцепей с коэффициентами в тривиальном представлении \mathbb{R} для алгебр Ли $\mathcal{U}(S^1)$ и $\mathcal{U}(X)$ соответственно. В статье [1] были вычислены одномерные и двумерные когомологии для алгебры Ли $\mathcal{U}(X)$. Сформулируем этот результат.

Теорема 1. $H^1(\mathcal{U}(X)) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $H^2(\mathcal{U}(X)) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, где образующие в $H^1(\mathcal{U}(X))$ — классы коциклов

$$\alpha_1(\xi(t)) = \frac{d\xi}{dt}(0), \quad \alpha_2(\xi(t)) = \frac{d\xi}{dt}(\pi), \quad (2)$$

а образующие в $H^2(\mathcal{U}(X))$ — классы коциклов

$$\beta(\xi(t), \eta(t)) = \int_0^\pi \left(\frac{d^2\xi}{(dt)^2} \frac{d\eta}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \frac{d^2\eta}{(dt)^2} \right) dt \quad (3)$$

и $\alpha_1 \wedge \alpha_2$.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 2. Алгебра когомологий $H^*(\mathcal{U}(X)) \cong S(\tilde{\beta}) \otimes \Lambda(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, где $\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ — классы коциклов $\beta, \alpha_1, \alpha_2$, определенных формулами (2) и (3). ($\Lambda(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ обозначает внешнюю алгебру с двумя образующими, а $S(\tilde{\beta})$ — кольцо многочленов с одной образующей.)

Сформулируем для сравнения аналогичный результат для окружности, доказанный в [2].

Теорема 3. Алгебра когомологий $H^*(\mathcal{U}(S^1)) \cong S(\tilde{\beta}_1) \otimes \Lambda(\tilde{\alpha}_3)$, где $\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_3$ — классы коциклов β_1 и α_3 , которые определяются формулами

$$\beta_1(\xi, \eta) = \int_0^{2\pi} (\xi''\eta' - \xi'\eta'') dt, \quad \alpha_3(\xi, \eta, \chi) = \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} \xi & \eta & \chi \\ \xi' & \eta' & \chi' \\ \xi'' & \eta'' & \chi'' \end{vmatrix} dt.$$

Заметим, что коцикл β_1 при ограничении на подалгебру $\mathcal{U}(X)$ равен нулю, а коцикл α_3 при ограничении на подалгебру когомологичен нулю и, следовательно, гомоморфизм ограничения $H^*(\mathcal{U}(S^1)) \rightarrow H^*(\mathcal{U}(X))$ тривиален.

Для вычисления когомологий $H^*(\mathcal{U}(X))$ воспользуемся методом Гельфанда–Фукса вычисления когомологий алгебры Ли гладких векторных полей на замкнутом гладком многообразии, описанным в [2], с некоторыми модификациями для нашего случая.



2. ФИЛЬТРАЦИЯ $C_k^q(X)$.

Пусть $p: C^*(\mathcal{W}(S^1)) \rightarrow C^*(\mathcal{W}(X))$ — отображение ограничения коцепей на подалгебру. Оно является гомоморфизмом комплексов. Тогда

$$C^*(\mathcal{W}(X)) \cong C^*(\mathcal{W}(S^1))/\ker p,$$

где $\ker p$ состоит из таких коцепей из $C^*(\mathcal{W}(S^1))$, которые равны нулю, если все аргументы — нечетные векторные поля.

Рассмотрим также отображение $i: C^*(\mathcal{W}(X)) \rightarrow C^*(\mathcal{W}(S^1))$, которое определяется следующим образом:

$$\text{для } L \in C^q(\mathcal{W}(X)) \quad i(L)(\xi_1, \dots, \xi_q) = L(\xi_1, \dots, \xi_q),$$

если все ξ_1, \dots, ξ_q — нечетные и $i(L)(\xi_1, \dots, \xi_q) = 0$, если среди ξ_1, \dots, ξ_q есть хотя бы одно четное векторное поле.

Так как $d(i(L)) \neq i(dL)$, отображение i не будет гомоморфизмом комплексов, а только линейным непрерывным отображением векторных пространств. Таким образом $C^*(\mathcal{W}(X))$ можно вложить в $C^*(\mathcal{W}(S^1))$ как векторное подпространство, но не как подкомплекс.

Обозначим через \tilde{d} следующий дифференциал комплекса $i(C^*(\mathcal{W}(X)))$. Пусть $L \in i(C^q(\mathcal{W}(X)))$, тогда $\tilde{d}L = i(p(dL))$. Заметим также, что $p \circ i = \text{id}_{C^*(\mathcal{W}(X))}$. Получаем следующий изоморфизм комплексов:

$$(C^*(\mathcal{W}(X)), d) \cong (i(C^*(\mathcal{W}(X))), \tilde{d}), \tag{4}$$

где $i(C^*(\mathcal{W}(X)))$ — подпространство в $C^*(\mathcal{W}(S^1))$.

Пусть M — замкнутое гладкое многообразие. Напомним, как в [2] строится фильтрация для $C^q(\mathcal{W}(M))$. Будем говорить, что коцепь $L \in C^q(\mathcal{W}(M))$ имеет фильтрацию $\leq k$, если из $L(\xi_1, \dots, \xi_q) \neq 0$ следует, что существуют k точек $x_1, \dots, x_k \in M$ таких, что каждое из векторных полей ξ_1, \dots, ξ_q не обращается в нуль в окрестности хотя бы одной из точек x_1, \dots, x_k . Обозначим через $C_k^q(M)$ подпространство пространства $C^q(\mathcal{W}(M))$, составленное из элементов фильтрации $\leq k$. Тогда

$$0 = C_0^q(M) \subset C_1^q(M) \subset \dots \subset C_q^q(M) = C^q(\mathcal{W}(M)).$$

Аналогичным образом можно определить фильтрацию пространства $C^q(\mathcal{W}(X))$ подпространствами $C_k^q(X)$, просто заменив в вышестоящем определении фильтрации M на X .

Воспользовавшись изоморфизмом (4), определим фильтрацию пространств $i(C^q(\mathcal{W}((X))))$ подпространствами $\tilde{C}_k^q = i(C_k^q(X))$. Тогда $\tilde{C}_k^q \cong C_k^q(X)$.

Рассмотрим также фильтрацию пространств $C^q(\mathcal{W}(S^1))$ подпространствами $C_k^q(S^1)$, которые определены ранее, если в качестве M рассмотреть S^1 . Тогда $\tilde{C}_k^q \cong C_k^q(S^1) \cap i(C^q(\mathcal{W}((X))))$, то есть \tilde{C}_k^q — подпространство в пространстве $C_k^q(S^1)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Образ пространства $C_k^q(X)$ при гомоморфизме d содержится в $C_k^{q+1}(X)$.*

Доказательство. Пусть $L \in C_k^q(X)$ и $dL(\xi_1, \dots, \xi_{q+1}) \neq 0$. Тогда из определения гомоморфизма d (1) следует, что $L([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_{q+1}) \neq 0$ для некоторых $1 \leq i < j \leq q + 1$. Это означает, что существуют такие точки $t_1, \dots, t_k \in X$, что каждое из векторных полей $[\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_{q+1}$ не равно нулю в окрестности хотя бы одной из этих точек. Каждое из векторных полей ξ_i, ξ_j отличается от нулевого в любой окрестности, в которой отличается от нулевого векторное поле $[\xi_i, \xi_j]$. Поэтому векторные поля ξ_1, \dots, ξ_{q+1} не равны нулю в окрестности хотя бы одной из точек t_1, \dots, t_k . Следовательно, $dL \in C_k^{q+1}$. \square

Из леммы 1 следует, что подпространства $C_k^q(X)$ образуют подкомплекс комплекса $(C^q(\mathcal{W}(X)), d)$. В силу изоморфизма (4) подпространства \tilde{C}_k^q тоже образуют подкомплекс комплекса $(i(C^q(\mathcal{W}(X))), \tilde{d})$ и подкомплексы $(C_k^q(X), d)$ и $(\tilde{C}_k^q, \tilde{d})$ изоморфны.

Для комплекса $(C^*(\mathcal{W}(S^1)), d)$ подпространство $C_k^*(S^1)$ с дифференциалом d также является подкомплексом [2]. Подкомплексы \tilde{C}_1^* , $C_1^*(X)$ и $C_1^*(S^1)$ называются диагональными. Обозначим их через \tilde{C}_Δ^* , $C_\Delta^*(X)$ и $C_\Delta^*(S^1)$. Пространство коцепей \tilde{C}_Δ^* — подпространство в пространстве $C_\Delta^*(S^1)$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *При $q \geq 3$, если $\tilde{d}L \in \tilde{C}_{q-1}^{q+1}$, то $L \in \tilde{C}_{q-1}^q$. В частности, всякий q -мерный коцикл при $q \geq 3$ принадлежит пространству \tilde{C}_{q-1}^q .*



Доказательство. Так как $(\tilde{C}_k^q, \tilde{d}) \cong (C_k^q(X), d)$, доказательство можно провести для комплексов $(C_k^q(X), d)$. Обозначим через $\text{supp } \xi$ носитель векторного поля ξ . Тогда коцепь $L \in C_{q-1}^q(X)$, если из того, что $L(\xi_1, \dots, \xi_q) \neq 0$ следует, что не пусто хотя бы одно из попарных пересечений множеств $\text{supp } \xi_1, \dots, \text{supp } \xi_q$.

Необходимо установить, что если $dL \in C_{q-1}^{q+1}(X)$, то для любых $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathcal{W}(X)$ таких, что их носители попарно не пересекаются, справедливо равенство $L(\xi_1, \dots, \xi_q) = 0$.

При $q \geq 3$, используя разбиение единицы, инвариантное относительно действия группы, можно свести доказательство к случаю, когда носитель хотя бы одного из векторных полей ξ_1, \dots, ξ_q будет иметь окрестность диффеоморфную \mathbb{R} .

Тогда можно воспользоваться утверждением о том, что каждое финитное (имеющее компактный носитель) гладкое векторное поле на \mathbb{R}^n можно представить в виде конечной суммы $\sum_k [\eta_k, \zeta_k]$, где η_k и ζ_k — гладкие финитные векторные поля на \mathbb{R}^n (доказательство см. в [2]).

Предположим для определенности, что $\xi_1 = \sum_k [\eta_k, \zeta_k]$. Так как среди множеств $\text{supp } \eta_k, \text{supp } \zeta_k, \text{supp } \xi_2, \dots, \text{supp } \xi_q$ пересекаются только $\text{supp } \eta_k$ и $\text{supp } \zeta_k$, то

$$\sum_k dL(\eta_k, \zeta_k, \xi_2, \dots, \xi_q) = \sum_k L([\eta_k, \zeta_k], \xi_2, \dots, \xi_q) = L\left(\sum_k [\eta_k, \zeta_k], \xi_2, \dots, \xi_q\right) = L(\xi_1, \dots, \xi_q).$$

Так как $dL \in C_{q-1}^{q+1}(X)$, то $dL(\eta_k, \zeta_k, \xi_2, \dots, \xi_q) = 0$ для всех k . В противном случае среди множеств $\text{supp } \eta_k, \text{supp } \zeta_k, \text{supp } \xi_2, \dots, \text{supp } \xi_q$ должны были быть, по крайней мере, две пары пересекающихся. Отсюда получаем необходимое равенство $L(\xi_1, \dots, \xi_q) = 0$. \square

Фильтрация $0 = \tilde{C}_0^q \subset \tilde{C}_1^q \subset \dots \subset \tilde{C}_q^q = i(C^q(\mathcal{W}(X)))$ порождает спектральную последовательность $(\tilde{E}_r^{k, q-k}, \delta_r)$, нулевой член которой $\tilde{E}_0^{k, q-k}$ по определению равен $\tilde{C}_k^q / \tilde{C}_{k-1}^q$. В следующем параграфе мы опишем фильтрацию пространств $\tilde{E}_0^{k, q-k}$.

3. ФИЛЬТРАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ $\tilde{E}_0^{k, q-k}$.

Определение 2. *Обобщенным сечением гладкого векторного расслоения ν над гладким многообразием M называется непрерывный линейный функционал на пространстве финитных (имеющих компактный носитель) гладких сечений расслоения ν' сопряженного с ν .*

Обобщенное сечение расслоения τ'_q называется кососимметрическим, если оно меняет знак при отображении, индуцированном перестановкой сомножителей в произведении $M \times \dots \times M$. Пусть F — обобщенное сечение некоторого расслоения ν с базой M . F называется сосредоточенным на замкнутом множестве $A \subset M$, если $F(\sigma) = 0$ для любого сечения σ расслоения ν' , совпадающего с нулевым сечением в окрестности множества A .

Для любого обобщенного сечения F расслоения ν , сосредоточенного на компактном множестве A , найдется такое число s , что если финитное гладкое сечение расслоения ν' имеет в каждой точке множества A касание порядка $\geq s$ с нулевым сечением, то $F(\sigma) = 0$. Это утверждение следует из аналогичного утверждения для обобщенных функций [3]. Наименьшее из таких чисел s называется порядком обобщенного сечения относительно множества A .

Пространство коцепей $C^q(\mathcal{W}(M))$ с помощью теоремы о ядре [4, § 1] отождествляется с пространством кососимметрических обобщенных сечений расслоения $\tau'_q(M) = \pi_1^* \tau'(M) \oplus \dots \oplus \pi_q^* \tau'(M)$ с базой $M^q = M \times \dots \times M$, где $\pi_i: M^q \rightarrow M$ — проекция на i -й сомножитель, а $\pi_i^* \tau'(M)$ — обратный образ кокасательного расслоения над M .

Обозначим через M_k^q подмножество произведения M^q , состоящее из таких точек (x_1, \dots, x_q) , что среди точек $x_1, \dots, x_q \in M$ не более k различных. Пространство $C_k^q(M)$ можно отождествить с пространством обобщенных кососимметрических сечений расслоения τ'_q , сосредоточенных на множестве M_k^q .

Обозначим через $C_{k,p}^q(M)$ подпространство пространства $C_k^q(M)$, состоящее из обобщенных сечений, имеющих относительно M_k^q порядок $\leq q - p$. Тогда

$$0 = C_{k, q+1}^q(M) \subset C_{k, q}^q(M) \subset \dots \subset C_k^q(M), \quad \bigcup_p C_{k, p}^q(M) = C_k^q(M).$$



Таким образом, подпространства $C_{k,p}^q(M)$ составляют фильтрацию пространства $C_k^q(M)$. Так как $d(C_{k,p}^q(M)) \subset C_{k,p}^{q+1}(M)$, гомоморфизм d индуцирует гомоморфизмы

$$d_k: C_k^q(M)/C_{k-1}^q(M) \rightarrow C_k^{q+1}(M)/C_{k-1}^{q+1}(M),$$

согласованные с фильтрациями пространств $C_k^q(M)/C_{k-1}^q(M)$ подпространствами

$$C_{k,p}^q(M)/(C_{k,p}^q(M) \cap C_{k-1}^q(M)).$$

Обозначим соответствующие спектральные последовательности через $(E_{k,r}^{q-p,p}(M), \delta_{k,r})$.

Пусть теперь $M = S^1$. Фильтрация пространств $C_k^q(S^1)$ подпространствами $C_{k,p}^q(S^1)$ индуцирует фильтрацию пространств \tilde{C}_k^q подпространствами $\tilde{C}_{k,p}^q = C_{k,p}^q(S^1) \cap \tilde{C}_k^q$. Так как $d(C_{k,p}^q(S^1)) \subset C_{k,p}^{q+1}(S^1)$ и отображение $i \circ p: C^q(\mathcal{U}(S^1)) \rightarrow C^q(\mathcal{U}(S^1))$ не увеличивает порядка обобщенного сечения, то $\tilde{d}(\tilde{C}_{k,p}^q) \subset \tilde{C}_{k,p}^{q+1}$. Таким образом, гомоморфизм \tilde{d} индуцирует гомоморфизмы

$$\tilde{d}_k: \tilde{C}_k^q/\tilde{C}_{k-1}^q \rightarrow \tilde{C}_k^{q+1}/\tilde{C}_{k-1}^{q+1},$$

согласованные с фильтрациями пространств $\tilde{C}_k^q/\tilde{C}_{k-1}^q$ подпространствами $\tilde{C}_{k,p}^q/(\tilde{C}_{k,p}^q \cap \tilde{C}_{k-1}^q)$. Обозначим соответствующие спектральные последовательности через $(\tilde{E}_{k,r}^{q-p,p}, \delta_{k,r})$.

Заметим, что фильтрация пространств $C_k^q(M)$ подпространствами $C_{k,p}^q(M)$ бессодержательна при $q = k$. Соответственно бессодержательна и фильтрация пространств \tilde{C}_k^q подпространствами $\tilde{C}_{k,p}^q$ при $q = k$. В [2] показано, что этот случай можно не рассматривать для M (и для $M = S^1$, в частности). Из леммы 2 следует, что мы можем не рассматривать случая $q = k$ для комплекса $(\tilde{C}_k^q, \tilde{d})$ при $q \geq 3$. Одномерные и двумерные когомологии комплекса $(C^*(\mathcal{U}(X)), d)$ вычислены в [1] и приведены в теореме 1, поэтому случай $q = k = 1, 2$ для комплекса $(\tilde{C}_k^q, \tilde{d})$ также можно не рассматривать.

4. ДИАГОНАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС И ЕГО КОГОМОЛОГИИ

Рассмотрим сначала спектральные последовательности для диагональных комплексов $(\tilde{E}_{1,r}^{q-p,p}, \delta_{1,r})$ и $(E_{1,r}^{q-p,p}(S^1), \delta_{1,r})$.

Согласно определению $E_{1,0}^{q-p,p}(S^1) = C_{1,p}^q(S^1)/C_{1,p+1}^q(S^1)$, $\tilde{E}_{1,0}^{q-p,p} = \tilde{C}_{1,p}^q/\tilde{C}_{1,p+1}^q$. $\tilde{E}_{1,0}^{q-p,p}$ — подпространство в пространстве $E_{1,0}^{q-p,q}(S^1)$. Обозначим $q - p$ через m и будем далее вместо $E_{1,0}^{q-p,p}(S^1)$ писать $E_{1,0}^{m,q-m}(S^1)$, а вместо $\tilde{E}_{1,0}^{q-p,p}$ писать $\tilde{E}_{1,0}^{m,q-m}$. Сформулируем основной результат параграфа.

Теорема 4. $H^1(C_\Delta^*(X)) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $H^2(C_\Delta^*(X)) \cong \mathbb{R}$ и $H^q(C_\Delta^*(X)) = 0$, при $q \geq 3$, где одномерные образующие — классы коциклов α_1 и α_2 , а двумерная образующая класс коцикла β . Коциклы α_1 , α_2 и β определяются равенствами (2) и (3).

Так как $(C_\Delta^*(X), d) \cong (\tilde{C}_\Delta^*(X), \tilde{d})$, мы будем рассматривать комплекс $(\tilde{C}_\Delta^*, \tilde{d})$. Пространство \tilde{C}_Δ^q — подпространство пространства $C_\Delta^q(S^1)$, поэтому коцепи из \tilde{C}_Δ^q можно представлять как обобщенные сечения расслоения $\tau'_q(S^1)$.

В нашем случае, в отличие от [2], присутствуют особые точки. Поэтому выделим в комплексе $(\tilde{C}_\Delta^*, \tilde{d})$ подкомплекс $((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta, \tilde{d})$ коцепей, сосредоточенных в особых точках. Обозначим факторкомплекс $\tilde{C}_\Delta^*/(\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta$ через \bar{C}_Δ^* . Рассмотрим точную последовательность комплексов

$$0 \rightarrow (\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta \rightarrow \tilde{C}_\Delta^* \rightarrow \bar{C}_\Delta^* \rightarrow 0$$

и соответствующую длинную точную последовательность в когомологиях

$$\dots \rightarrow H^i((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta) \rightarrow H^i(\tilde{C}_\Delta^*) \rightarrow H^i(\bar{C}_\Delta^*) \rightarrow H^{i+1}((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta) \rightarrow H^{i+1}(\tilde{C}_\Delta^*) \rightarrow \dots \quad (5)$$

Для доказательства теоремы 4 вычислим члены $H^i((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta)$ и $H^i(\bar{C}_\Delta^*)$ длинной точной последовательности (5). Начнем с вычисления $H^i((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta)$.



4.1. Когомологии комплекса $(\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta$

Пусть $\lambda = \sum_{k_1, \dots, k_q} c_{k_1, \dots, k_q} y_1^{k_1} \dots y_q^{k_q}$ — некоторый кососимметрический многочлен, тогда λ определяет дифференциальный оператор:

$$\lambda(\xi_1, \dots, \xi_q)(t) = \left(\sum_{k_1, \dots, k_q} c_{k_1, \dots, k_q} \frac{d^{k_1}(\xi_1)}{(dt)^{k_1}}(t) \dots \frac{d^{k_q}(\xi_q)}{(dt)^{k_q}}(t) \right). \quad (6)$$

Пусть φ — обобщенная функция на окружности. Тогда можно рассмотреть коцепи вида $\varphi\lambda$, значение которых на векторных полях ξ_1, \dots, ξ_q определяется следующим образом:

$$(\varphi\lambda)(\xi_1, \dots, \xi_q) = \varphi(\lambda(\xi_1, \dots, \xi_q)(t)). \quad (7)$$

Из теории обобщенных функций [5, § 4] следует, что всякую коцепь, сосредоточенную в особых точках, можно представить в виде линейной комбинации коцепей вида $\varphi\lambda$, где в качестве обобщенной функции φ нужно взять либо $\delta(0)$, либо $\delta(\pi)$.

Теорема 5. $H^1((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $H^q((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta) = 0$ при $q \geq 1$, где одномерные образующие — классы коциклов α_1 и α_2 , определенных равенствами (2).

Доказательство. Подкомплекс $(\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta$ изоморфен прямой сумме двух подкомплексов \tilde{C}_0^* и \tilde{C}_π^* коцепей, сосредоточенных в точке 0 и в точке π .

Вычислим когомологии комплекса \tilde{C}_0^* . Обозначим через α_n^0 коцепь вида $\delta(0)y^n$. Всякую коцепь $L \in \tilde{C}_0^q$ можно представить в виде

$$L = \sum_{n_1, \dots, n_q} c_{n_1, \dots, n_q} \alpha_{n_1}^0 \wedge \dots \wedge \alpha_{n_q}^0,$$

где сумма имеет конечное число слагаемых c_{n_1, \dots, n_q} — константы, а все числа n_1, \dots, n_q — нечетные.

По определению дифференциала \tilde{d}

$$\tilde{d}(\alpha_{n_1}^0 \wedge \dots \wedge \alpha_{n_q}^0) = \sum_{i=1}^q (-1)^{i-1} \sum_{\substack{j=1, \\ j - \text{нечетно}}}^{[n_i/2]} (C_{n_i}^j - C_{n_i}^{n_i-j+1}) \alpha_j^0 \wedge \alpha_{n_i-j+1}^0 \wedge \alpha_{n_1}^0 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha_{n_i}^0} \wedge \dots \wedge \alpha_{n_q}^0.$$

Представим коцепь $L \in \tilde{C}_0^q$ в виде

$$L = \sum_{n_1, \dots, n_q \neq 1} c_{n_1, \dots, n_q}^1 \alpha_{n_1}^0 \wedge \dots \wedge \alpha_{n_q}^0 + \sum_{l_1, \dots, l_{q-1}} c_{l_1, \dots, l_{q-1}}^2 \alpha_{l_1}^0 \wedge \dots \wedge \alpha_{l_{q-1}}^0.$$

Положим $n = \sum_{i=1}^q n_i$, $l = \sum_{i=1}^{q-1} l_i$. Пусть $q > 1$, рассмотрим оператор $F^q: \tilde{C}_0^q \rightarrow \tilde{C}_0^{q-1}$ следующего вида:

$$F^q L = \sum_{l_1, \dots, l_{q-1} \neq 1} \frac{c_{l_1, \dots, l_{q-1}}^2}{l+1-q} \alpha_{l_1}^0 \wedge \dots \wedge \alpha_{l_{q-1}}^0.$$

Прямыми вычислениями можно показать, что справедливо равенство

$$F^{q+1} \circ \tilde{d} + \tilde{d} \circ F^q = id_{\tilde{C}_0^q},$$

то есть F — оператор гомотопии. Следовательно, $H^k(\tilde{C}_0^*) = 0$, при $k > 1$.

Рассмотрим случай $q = 1$. Одномерным коциклом является только $\alpha_1^0 = \alpha_1$, класс которого и будет образующей в $H^1(\tilde{C}_0^*)$.

Когомологии комплекса \tilde{C}_π^* вычисляются аналогично. $H^k(\tilde{C}_\pi^*) = 0$, при $k \geq 1$ и $H^1(\tilde{C}_\pi^*) \cong \mathbb{R}$, где одномерная образующая — класс коцикла α_2 . \square



4.2. Когомологии фактор-комплекса \tilde{C}_Δ^*

Напомним некоторые факты из [2], которые будут необходимы в дальнейшем. Всякий элемент из $E_{1,0}^{m,q-m}(S^1)$ можно представить в виде суммы $\sum_i \varphi_i \lambda_i$, где λ_i — элемент фактор-пространства

$P_m^q = \tilde{P}_m^q / R_m^q$ пространства кососимметрических однородных многочленов степени m от q переменных \tilde{P}_m^q по идеалу R_m^q , порожденному многочленом $\sigma_q = y_1 + \dots + y_q$, а φ_i — обобщенные функции на окружности. Будем элементы фактор-пространства P_m^q и представляющие их многочлены обозначать одинаковыми символами. Значение коцепи $\varphi \lambda$ определяется формулами (6) и (7).

Рассмотрим отображение $\tilde{\nabla}: \tilde{P}_m^q \rightarrow \tilde{P}_{m+1}^{q+1}$, которое определяется следующим образом:

$$\tilde{\nabla}(\lambda)(y_1, \dots, y_{q+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j-1} (y_j - y_i) \lambda(y_i + y_j, y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{q+1}).$$

Из определения дифференциала (1) следует равенство

$$d(\varphi \lambda) = \varphi \tilde{\nabla}(\lambda). \tag{8}$$

Так как $\tilde{\nabla}(R_m^q) \subset R_{m+1}^{q+1}$, то $\tilde{\nabla}$ индуцирует отображение $\nabla: P_m^q \rightarrow P_{m+1}^{q+1}$.

Из определения дифференцирования [3, 5] обобщенных функций следует равенство

$$\varphi \cdot (\sigma_q \lambda) = -\frac{d\varphi}{dt} \lambda. \tag{9}$$

Тогда из равенств (8) и (9) следует, что $\delta_0(\varphi \lambda) = \varphi \nabla(\lambda)$, где $\delta_0: E_{1,0}^{m,q-m}(S^1) \rightarrow E_{1,0}^{m+1,q-m}(S^1)$ — дифференциал комплекса $E_{1,0}^{m,q-m}(S^1)$, индуцированный дифференциалом d . Образующие когомологий комплекса (P_m^q, ∇) равны классам многочленов $\lambda^2 = y_1^2 y_2 - y_1 y_2^2$ и $\lambda^3 = (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$. Таким образом, получается, что

$$E_{1,1}^{3,-1}(S^1) = \varphi \tilde{\lambda}_2, \quad E_{1,1}^{3,0}(S^1) = \psi \tilde{\lambda}_3, \quad E_{1,1}^{m,q-m}(S^1) = 0, \quad \text{если } m \neq 3, q - m \neq 0, 1.$$

Перейдем к нашему случаю. Пусть $j: \tilde{C}_\Delta^q \rightarrow \tilde{C}^q$ проекция на фактор-комплекс, \bar{d} — дифференциал фактор-комплекса \tilde{C}^* , индуцированный дифференциалом \tilde{d} . Обозначим через $\tilde{C}_p^q = j(\tilde{C}_{1,p}^q)$. Тогда $\tilde{C}_p^q \subset \tilde{C}_{p-1}^q$ и $\bar{d}(\tilde{C}_p^q) \subset \tilde{C}_p^{q+1}$. Поэтому пространства \tilde{C}_p^q задают фильтрацию пространства \tilde{C}^q , согласованную с дифференциалом \bar{d} . Обозначим соответствующую спектральную последовательность через $\bar{E}_{1,0}^{m,q-m}$, где как и ранее $m = q - p$. Согласно определению нулевого члена спектральной последовательности

$$\bar{E}_{1,0}^{m,q-m} = \tilde{C}_{q-m}^q / \tilde{C}_{q-m+1}^q = j(\tilde{C}_{1,q-m}^q) / j(\tilde{C}_{1,q-m+1}^q) = \tilde{C}_{1,q-m}^q / (\tilde{C}_{1,q-m+1}^q + \tilde{C}_{1,q-m}^q \cap (\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta).$$

Проекция j индуцирует сюръективное отображение $J: \bar{E}_{1,0}^{m,q-m} \rightarrow \bar{E}_{1,0}^{m,q-m}$, которое классу коцепи в $\bar{E}_{1,0}^{m,q-m} = \tilde{C}_{1,q-m}^q / \tilde{C}_{1,q-m+1}^q$ ставит в соответствие ее класс в $\tilde{C}_{1,q-m}^q / (\tilde{C}_{1,q-m+1}^q + \tilde{C}_{1,q-m}^q \cap (\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta)$. Дифференциал в комплексе $\bar{E}_{1,0}^{m,q-m}$, индуцированный дифференциалом \bar{d} , обозначим через $\bar{\delta}_0$.

Назовем обобщенную функцию φ на окружности нечетной (четной), если ее значение на четных (нечетных) функциях равно нулю. Любую обобщенную функцию можно однозначно разложить в сумму нечетной и четной обобщенной функции. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.

$$\begin{aligned} \bar{E}_{1,1}^{3,-1} &= \varphi \tilde{\lambda}_2, \\ \bar{E}_{1,1}^{3,0} &= \psi \tilde{\lambda}_3, \\ \bar{E}_{1,1}^{m,q-m} &= 0, \quad \text{если } m \neq 3, q - m \neq 0, 1, \end{aligned}$$

где φ — нечетная обобщенная функция, ψ — четная обобщенная функция, φ и ψ заданы с точностью до обобщенных функций, сосредоточенных в особых точках. Дифференциал $\bar{\delta}_1: \bar{E}_{1,1}^{3,-1} \rightarrow \bar{E}_{1,1}^{3,0}$ индуцирован дифференциалом \bar{d} , значение которого на коцепи $\varphi \tilde{\lambda}^2$ определяется как $\bar{d}(\varphi \tilde{\lambda}^2) = -\frac{d\varphi}{dt} \tilde{\lambda}^3$.



Доказательство. Образ коцепи $\varphi\lambda$ при отображении $p: C^q(\mathcal{W}(S^1)) \rightarrow C^q(\mathcal{W}(X))$ будем также обозначать через $\varphi\lambda$. Рассмотрим отображение $i \circ p: C^q(\mathcal{W}(S^1)) \rightarrow i(C^q(\mathcal{W}(X))) \subset C^q(\mathcal{W}(S^1))$. Это отображение индуцирует сюръективное отображение $i \circ p: \widetilde{E}_{1,0}^{m,q-m}(S^1) \rightarrow \widetilde{E}_{1,0}^{m,q-m}$. Образом коцепи $\varphi\lambda$ при отображении $i \circ p$ будет коцепь $\widetilde{\varphi\lambda}$, значение которой на векторных полях ξ_1, \dots, ξ_q определяется следующим образом:

$$(\varphi\widetilde{\lambda})(\xi_1, \dots, \xi_q) = \varphi(\widetilde{\lambda}(\xi_1, \dots, \xi_q)(t)), \quad \text{где } \widetilde{\lambda}(\xi_1, \dots, \xi_q)(t) = \\ = \frac{1}{2^q} \left(\sum_{k_1 + \dots + k_q = m} c_{k_1, \dots, k_q} \frac{d^{k_1}(\xi_1(t) - \xi_1(-t))}{(dt)^{k_1}}(t) \dots \frac{d^{k_q}(\xi_q(t) - \xi_q(-t))}{(dt)^{k_q}}(t) \right).$$

Это следует из того, что $\varphi\widetilde{\lambda}(\xi_1, \dots, \xi_q) = 0$, если среди аргументов есть четное векторное поле и $\varphi\widetilde{\lambda}(\xi_1, \dots, \xi_q) = \varphi\lambda(\xi_1, \dots, \xi_q)$, если все аргументы нечетные. Тогда $i(\varphi\lambda) = \varphi\widetilde{\lambda}$ и $p(\varphi\widetilde{\lambda}) = \varphi\lambda$, где $\varphi\lambda$ рассматривается как элемент пространства $C^q(\mathcal{W}(X))$. Заметим, что функция $\widetilde{\lambda}(\xi_1, \dots, \xi_q)(t)$ будет нечетной (четной) при любых $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathcal{W}(S^1)$, если $\lambda \in \widetilde{P}_m^q$, где разность $m - q$ нечетное (четное) целое число. Тогда коцепи вида $\varphi\widetilde{\lambda}$ будут равны нулю, если φ — нечетная (четная) обобщенная функция, а $\lambda \in \widetilde{P}_m^q$, где $m - q$ — четное (нечетное) число. Поэтому можно считать, что в представлении элемента из $\widetilde{E}_{1,0}^{m,q-m}$ в виде $\sum_i \varphi_i \widetilde{\lambda}_i$ все обобщенные функции φ_i четные (нечетные), если $m - q$ чётно (нечётно).

Так как любой элемент пространства $\widetilde{E}_{1,0}^{m,q-m}$ можно представить в виде $\sum_i \varphi_i \widetilde{\lambda}_i$, то элементы пространства $\widetilde{E}_{1,0}^{m,q-m}$ можно представлять в виде $\sum_i \varphi_i \widetilde{\lambda}_i$, где обобщенные функции φ_i заданы с точностью до обобщенных функций, сосредоточенных в особых точках, и их четность зависит от степени многочлена λ_i .

Из равенства (8) и определения дифференциала \widetilde{d} следует, что

$$\widetilde{d}(\varphi\widetilde{\lambda}) = i \circ p(d\varphi\widetilde{\lambda}) = i(d(p(\varphi\widetilde{\lambda}))) = i(d\varphi\lambda) = i(\varphi\widetilde{\nabla}\lambda) = \varphi\widetilde{\nabla}\lambda.$$

Из равенства (9) следует равенство

$$\varphi \cdot (\widetilde{\sigma}_q \widetilde{\lambda}) = -\frac{d\varphi}{dt} \widetilde{\lambda}. \quad (10)$$

Тогда получаем, что $\widetilde{\delta}_0(\varphi\widetilde{\lambda}) = \varphi\widetilde{\nabla}\lambda$, и действие дифференциала $\widetilde{\delta}_0$ на элементах из $\widetilde{E}_{1,0}^{m,q-m}$ сводится к действию дифференциала ∇ на классах многочленов из пространства P_m^q , откуда следует утверждение леммы. \square

Для вычисления члена $\widetilde{E}_{1,2}^{m,q-m}$ нам понадобятся некоторые сведения из теории потоков де Рама [6].

Определение 3. *Потоком де Рама степени q на многообразии M размерности n называется непрерывный линейный функционал на пространстве дифференциальных форм степени $n - q$ с компактными носителями. Дифференциал $b: D^q(M) \rightarrow D^{q+1}(M)$ определяется формулой $bK(\omega) = K(d\omega)$, где K — поток степени q , ω — дифференциальная форма степени $n - q - 1$.*

Рассмотрим комплекс потоков де Рама на окружности $(D^q(S^1), b)$. Всякий поток степени 0 на окружности можно представить в виде φ , а поток степени 1 — в виде ψdt , где φ, ψ — обобщенные функции на окружности. Значения потоков φ и ψdt на дифференциальных формах определяются следующим образом:

$$\varphi(gdt) = \varphi(g), \quad \psi dt(f) = \psi(f),$$

где g и f — гладкие периодические функции на \mathbb{R} . Формулы для дифференциала b в этом случае переписутся в виде

$$b(\psi dt) = 0, \quad (b\varphi)(f) = \varphi(df) = \varphi\left(\frac{df}{dt} dt\right) = -\frac{d\varphi}{dt} dt(f).$$

Под потоками на орбифолде будем понимать потоки на окружности, инвариантные относительно действия группы \mathbb{Z}_2 или, что равносильно, непрерывные линейные функционалы на пространстве



дифференциальных форм на орбиформе (дифференциальные формы на орбиформе — дифференциальные формы на окружности, инвариантные относительно действия группы \mathbb{Z}_2). Таким образом, комплекс потоков на орбиформе — подкомплекс комплекса потоков на окружности. Обозначим его через $(D^q(X), b)$.

0-формами на орбиформе являются гладкие, четные периодические функции на \mathbb{R} , 1-формами на орбиформе являются выражения вида gdt , где g — гладкая нечетная периодическая функция на \mathbb{R} .

Поток степени 0 на орбиформе можно представить в виде φ , а поток степени 1 — в виде ψdt , где φ — нечетная обобщенная функция на окружности, ψ — четная обобщенная функция на окружности. Дифференциал определяется так же как и для комплекса потоков на окружности.

Обозначим через $(D_A^q(X), b)$ подкомплекс комплекса $(D^q(X), b)$, состоящий из потоков, сосредоточенных на множестве $A = \{0, \pi\}$. В терминах обобщенных функций это означает, что обобщенные функции φ и ψ сосредоточены в особых точках. Обозначим через $\bar{D}^q = D^q(X)/D_A^q(X)$ факторкомплекс комплекса потоков на орбиформе по подкомплексу потоков, сосредоточенных в особых точках.

Сопоставляя коцепи $\varphi \tilde{\lambda}^2$ поток φ , коцепи $\psi \tilde{\lambda}^3$ поток ψdt , определим отображение $\gamma: \bar{E}_{1,1}^{3,q-1} \rightarrow \bar{D}^q$. При этом дифференциал комплекса $\bar{E}_{1,1}^{3,q-1}$ перейдет в дифференциал комплекса \bar{D}^q . Так как γ — биективное отображение, то γ определяет изоморфизм комплексов. Найдем когомологии комплекса \bar{D}^q .

Обозначим через $(D_A^q(S^1), b)$ подкомплекс комплекса $(D^q(S^1), b)$, состоящий из потоков, сосредоточенных в точках 0 и π . Тогда комплекс $(D_A^q(X), b)$ — подкомплекс инвариантных потоков комплекса $(D^q(S^1), b)$. Так как множество A неподвижно относительно действия группы \mathbb{Z}_2 , то отсюда следует, что комплекс $\bar{D}^q = D^q(X)/D_A^q(X)$ изоморфен подкомплексу инвариантных элементов комплекса $D^q(S^1)/D_A^q(S^1)$. Обозначим его через $(D^q(S^1)/D_A^q(S^1))_{Inv}$.

В дальнейшем нам понадобится лемма об инвариантных когомологиях комплекса, на котором действует конечная группа.

Лемма 4. Пусть (B^q, d) — дифференциальный комплекс, на котором автоморфизмами комплекса действует конечная группа G . Тогда $H^q(B^q_{Inv}) \cong (H^q(B^q))_{Inv}$, где B^q_{Inv} — комплекс инвариантных коцепей, $(H^q(B^q))_{Inv}$ — инвариантная часть в когомологиях.

Доказательство. Пусть $i: B^q_{Inv} \rightarrow B^q$ — отображение вложения подкомплекса в комплекс. Рассмотрим также отображение $pr: B^q \rightarrow B^q_{Inv}$, которое определяется формулой

$$pr(c) = \frac{1}{p} \sum_{g \in G} gc,$$

где $c \in B^q$, p — порядок группы G . При этом $i \circ pr = id$. Пусть i^* и pr^* — индуцированные отображения в когомологиях. Тогда получаем, что $i^* \circ pr^* = id$, откуда следует, что i^* — инъективно. Таким образом, $H^q(B^q_{Inv}) \cong \text{Im } i^*(H^q(B^q))$. В свою очередь, $i^*(H^q(B^q)) \cong (H^q(B^q))_{Inv}$, что завершает доказательство леммы. \square

Применяя лемму 4 к комплексу $D^*(S^1)/D_A^*(S^1)$ и группе \mathbb{Z}_2 , получаем что

$$H^q((D^*(S^1)/D_A^*(S^1))_{Inv}) \cong (H^q(D^*(S^1)/D_A^*(S^1)))_{Inv}.$$

Лемма 5. Пусть M — компактное ориентируемое n -мерное гладкое многообразие, A — его замкнутое подмножество такое, что $X \setminus A$ — гладкое многообразие. Обозначим через $D^*(M)$ комплекс потоков на M и через $D_A^*(M)$ комплекс потоков на M , сосредоточенных на A . Тогда $H^k(D^*(M)/D_A^*(M)) \cong H_{n-k}(M, A) \cong H^k(M \setminus A)$, где $H_{n-k}(M, A)$ — относительные гомологии, $H^k(M \setminus A)$ — когомологии де Рама многообразия $M \setminus A$.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность комплекса $D^*(M)$, подкомплекса $D_A^*(M)$ и соответствующую длинную точную последовательность в когомологиях

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^i(D_A^*(M)) \rightarrow H^i(D^*(M)) \rightarrow H^i(D^*(M)/D_A^*(M)) \rightarrow H^{i+1}(D_A^*(M)) \rightarrow \\ \rightarrow H^{i+1}(D^*(M)) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Из теоремы де Рама для M [6] следует, что $H^i(D^*(M)) \cong H_{n-i}(M, \mathbb{R}) \cong H^i(M, \mathbb{R})$, где $H_{n-i}(M, \mathbb{R})$ и $H^i(M, \mathbb{R})$ — сингулярные гомологии и когомологии M . Найдем $H^i(D_A^*(M))$, используя теорию пучков.



Обозначим через $\mathfrak{D}_A^q(M)$ и $\mathfrak{D}_A^q(M)|A$ пучок потоков степени q , сосредоточенных на A , с базой M и индуцированный пучок с базой A . Так как пучок $\mathfrak{D}_A^q(M)$ сконцентрирован на A , то существует изоморфизм $\Gamma(\mathfrak{D}_A^q(M)) \cong \Gamma(\mathfrak{D}_A^q(M)|A)$, где $\Gamma(\mathfrak{D}_A^q(M))$ и $\Gamma(\mathfrak{D}_A^q(M)|A)$ — сечения соответствующих пучков над своими базами ([7], лемма 4.9.2). Поэтому при вычислении $H^k(D_A^*(M))$ мы можем рассматривать сечения пучка $\mathfrak{D}_A^q(M)|A$ над A вместо сечений пучка $\mathfrak{D}_A^q(M)$ над X .

Пучок $\mathfrak{D}_A^q(M)|A$ образует резольвенту постоянного пучка над A , состоящую из мягких пучков. Тогда $H^i(D_A^*(M)) \cong H^i(A, \mathbb{R}) \cong H_{n-i}(A, \mathbb{R})$, где $H_{n-i}(A, \mathbb{R})$ и $H^k(A, \mathbb{R})$ — сингулярные гомологии и когомологии A соответственно.

Поставив цепи из комплекса относительных гомологий $C^q(M, A)$ в соответствие поток, представляющий собой интеграл по этой цепи, получим отображение $C^q(M, A) \rightarrow D^*(M)/D_A^*(M)$, которое индуцирует соответствующее отображение в когомологиях. Тогда, используя (11), спектральную последовательность

$$\dots \rightarrow H_{n-i}(A, \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-i}(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-i}(M, A) \rightarrow H_{n-i-1}(A, \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-i-1}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \dots,$$

изоморфизмы

$$\begin{aligned} H_{n-i}(A, \mathbb{R}) &\cong H^i(D_A^*(M)), & H_{n-i-1}(A, \mathbb{R}) &\cong H^{i+1}(D_A^*(M)), \\ H_{n-i}(M, \mathbb{R}) &\cong H^i(D^*(M)), & H_{n-i-1}(M, \mathbb{R}) &\cong H^{i+1}(D^*(M)) \end{aligned}$$

и лемму о пяти гомоморфизмах, получаем изоморфизм

$$H_{n-i}(M, A) \cong H^i(D^*(M)/D_A^*(M)).$$

В свою очередь, $H_{n-i}(M, A) \cong H^n(M \setminus A)$ ([8, §17, теорема 14 и упражнение 44]), что завершает доказательство леммы. \square

Применяя лемму 5 в случае $M = S^1$, $A = \{0, \pi\}$, получим, что

$$H^q(D^*(S^1)/D_A^*(S^1)) \cong H_{1-q}(S^1; A) \cong H^q(S^1 \setminus A).$$

Пространство $S^1 \setminus A$ представляет собой несвязное объединение двух открытых интервалов, поэтому

$$H^0(S^1 \setminus A) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad H^q(S^1 \setminus A) = 0 \quad \text{при } q \geq 0.$$

Образующим в $H^0(S^1 \setminus A)$ соответствуют классы потоков $\varphi_1 = \int_0^\pi dt$ и $\varphi_2 = \int_\pi^{2\pi} dt$ в $H^q(D^*(S^1)/D_A^*(S^1))$.

Так как инвариантные части от φ_1 и φ_2 отличаются лишь знаком, получим, что $H^0(\bar{D}^*) \cong \mathbb{R}$ и $H^q(\bar{D}^*) = 0$ при $q \geq 0$.

Тогда получаем $\bar{E}_{1,2}^{3,-1} \cong \mathbb{R}$ и $\bar{E}_{1,2}^{m,q-m} = 0$ при $q \neq 2$, $m \neq 3$.

Рассмотрим коцепь β , определенную формулой (3). Она определяет образующую пространства $\bar{E}_{1,2}^{3,-1}$ и является коциклом всего комплекса (\tilde{C}^*, \bar{d}) , не являющимся границей [1]. Поэтому следующие дифференциалы $\bar{d}_k = 0$, при $k \geq 2$, и $\bar{E}_{1,2}^{m,q-m} = \bar{E}_{1,3}^{m,q-m} = \dots = \bar{E}_{1,\infty}^{m,q-m}$. Получаем $H^2(\tilde{C}^*) \cong \mathbb{R}$ и $H^q(\tilde{C}^*) = 0$, если $q \neq 2$. Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема 6. $H^2(\tilde{C}^*) \cong \mathbb{R}$ и $H^q(\tilde{C}^*) = 0$, если $q \neq 2$.

Из длинной точной последовательности (5) для комплекса \tilde{C}_Δ^* и подкомплекса $(\tilde{C}_{0,\pi}^*)_\Delta$ получим, что $H^1(\tilde{C}_\Delta^*) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $H^2(\tilde{C}_\Delta^*) \cong \mathbb{R}$ и $H^q(\tilde{C}_\Delta^*) = 0$ при $q \neq 1, 2$. Таким образом, мы доказали теорему 4.

5. КОГОМОЛОГИИ КОМПЛЕКСОВ $\tilde{C}_k^q(X)/\tilde{C}_{k-1}^q(X)$

Сформулируем вначале основной результат параграфа.

Теорема 7. $H^{2k}(\tilde{C}_k^*(X)/\tilde{C}_{k-1}^*(X)) \cong \mathbb{R}$, $H^{2k-1}(\tilde{C}_k^*(X)/\tilde{C}_{k-1}^*(X)) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $H^{2k-2}(\tilde{C}_k^*(X)/\tilde{C}_{k-1}^*(X)) \cong \mathbb{R}$ и $H^q(\tilde{C}_k^*(X)/\tilde{C}_{k-1}^*(X)) = 0$, при $q \neq 2k, 2k-1, 2k-2$, где образующая степени $2k$ — класс коцикла $\underbrace{\beta \wedge \dots \wedge \beta}_k$, образующие степени $k-1$ — классы коциклов

$$\alpha_1 \wedge \underbrace{\beta \wedge \dots \wedge \beta}_{k-1} \text{ и } \alpha_2 \wedge \underbrace{\beta \wedge \dots \wedge \beta}_{k-1}, \text{ образующая степени } k-2 \text{ — класс коцикла } \alpha_1 \wedge \alpha_2 \underbrace{\beta \wedge \dots \wedge \beta}_{k-2}.$$

Коциклы α_1 , α_2 и β определяются равенствами (2) и (3).



Обозначим через $(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_k$ подкомплекс комплекса $\tilde{C}_k^q/\tilde{C}_{k-1}^q$, состоящий из линейных комбинаций коцепей вида $L_1 \wedge L_2$, где $L_1 \in (\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta$, $L_2 \in \tilde{C}_{k-1}^r$, $p+r=q$. Обозначим через \bar{C}_k^q соответствующий фактор-комплекс.

Вычислим сначала когомологии фактор-комплекса \bar{C}_k^* , затем когомологии подкомплекса $(\bar{C}_{0,\pi}^*)_k$ и найдем когомологии всего комплекса $\tilde{C}_k^*/\tilde{C}_{k-1}^*$ из соответствующей длинной точной последовательности:

$$\dots \rightarrow H^i((\bar{C}_{0,\pi}^*)_k) \rightarrow H^i(\tilde{C}_k^*/\tilde{C}_{k-1}^*) \rightarrow H^i(\bar{C}_k^*) \rightarrow H^{i+1}(\bar{C}_{0,\pi}^*)_k \rightarrow H^{i+1}(\tilde{C}_k^*/\tilde{C}_{k-1}^*) \rightarrow \dots \quad (12)$$

5.1. Когомологии фактор-комплекса \bar{C}_k^*

Напомним некоторые результаты из [2], которые будут необходимы далее. Всякий элемент пространства $E_{k,0}^{m,q-m}(S^1)$ может быть представлен в виде $\sum \varphi(t_1, \dots, t_k)(\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_k)$, где φ — обобщенная функция на $(S^1)^k/(S^1)_{k-1}^k$, $\lambda_i \in P_{m_i}^{s_i}$, $m_1 + \dots + m_k = m$, $s_1 + \dots + s_k = q$, а значение коцепи на векторных полях определяется следующим образом:

$$\sum \varphi(t_1, \dots, t_k)(\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_k)(\xi_1, \dots, \xi_q) = \sum \left(\sum_{\sigma \in S_{s_1, \dots, s_k}} \varepsilon(\sigma) \varphi(t_1, \dots, t_k) \times \right. \\ \left. \times (\lambda_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(s_1)})(t_1) \cdot \dots \cdot (\lambda_k(\xi_{\sigma(q-s_k)}, \dots, \xi_{\sigma(q)})(t_k)) \right), \quad (13)$$

где S_{s_1, \dots, s_k} — такие перестановки чисел $1, \dots, q$, что

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(s_1), \dots, \sigma(q-s_k) < \dots < \sigma(q),$$

$\varepsilon(\sigma) = 1$, если σ — четная перестановка, и $\varepsilon(\sigma) = -1$, если σ — нечетная перестановка.

Коцепи $\varphi(t_1, \dots, t_k)(\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_k)$ удовлетворяют следующему условию инвариантности:

$$\varphi(t_1, \dots, t_i, \dots, t_j, \dots, t_k)(\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_i \otimes \dots \otimes \lambda_j \otimes \dots \otimes \lambda_k) = \\ = (-1)^{\deg(\lambda_i)\deg(\lambda_j)} \varphi(t_1, \dots, t_j, \dots, t_i, \dots, t_k)(\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_j \otimes \dots \otimes \lambda_i \otimes \dots \otimes \lambda_k). \quad (14)$$

Дифференциал $\delta_{k,0}$ комплекса $E_{k,0}^{m,q-m}(S^1)$ действует по формуле

$$\delta_{k,0}(\varphi(\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_k)) = \sum_{i=1}^k (-1)^{s_1 + \dots + s_{i-1}} \varphi(\lambda_1 \otimes \dots \otimes \nabla \lambda_i \otimes \dots \otimes \lambda_k), \quad (15)$$

где $s_0 = 0$.

Перейдем теперь к нашему фактор-комплексу \bar{C}_k^q . Аналогично случаю диагонального комплекса мы можем определить фильтрацию в пространстве \bar{C}_k^q подпространствами $(\bar{C}_k^q)_p = j_k(\tilde{C}_{k,p}^q/(\tilde{C}_{k,p}^q \cap \cap \tilde{C}_{k-1}^q))$, где j_k — проекция на фактор-комплекс. Обозначим соответствующую спектральную последовательность через $(\bar{E}_{k,r}^{m,q-m}, \bar{\delta}_{k,r})$.

Рассмотрим спектральные последовательности $(\bar{E}_{k,r}^{m,q-m}, \bar{\delta}_{k,r})$ и $(\tilde{E}_{k,r}^{m,q-m}, \tilde{\delta}_{k,r})$. Обозначим через B_k подмножество $(S^1)^k$, состоящее из таких точек (t_1, \dots, t_k) , что среди точек t_1, \dots, t_k есть, по крайней мере, две одинаковые точки или две точки отличающиеся знаком. Пусть $A_k = B_k \cup \{0, \pi\} \times T^{k-1} \cup S^1 \times \{0, \pi\} \times T^{k-2} \cup T^2 \times \{0, \pi\} \times T^{k-3} \cup \dots \cup T^{k-1} \times \{0, \pi\}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Первый член спектральной последовательности $(\bar{E}_{k,r}^{m,q-m}, \bar{\delta}_{k,r})$ определяется равенствами*

$$\bar{E}_{k,1}^{m,q-m} = 0, \quad m \neq 3k, \quad q \neq 2k, 2k+1, \dots, 3k, \\ \bar{E}_{k,1}^{3k,q-3k} \cong \left\{ \sum \varphi(t_1, \dots, t_k)(\tilde{\lambda}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\lambda}_k) \right\}, \quad q = 2k, 2k+1, \dots, 3k,$$

где многочлены $\lambda_i \in P_{m_i}^{s_i}$ равны либо λ^2 , либо λ^3 , φ — обобщенная функция на T^k , заданная с точностью до обобщенных функций, сосредоточенных на множестве A_k , четная (нечетная) по i -му аргументу, если $m_i - s_i$ — четно (нечетно).

Доказательство. Аналогично случаю диагонального подкомплекса всякий элемент пространства $\tilde{E}_{k,0}^{m,q-m}$ можно представить в виде коцепи $\sum \varphi(\tilde{\lambda}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\lambda}_k)$, значение которой на векторных полях определяется так же как в формуле (13) с заменой λ_i на $\tilde{\lambda}_i$ и φ — обобщенная функция на



k -мерном торе T^k , четность которой по i -му аргументу зависит от степени многочлена λ_i так же как и в формулировке леммы. Обобщенная функция φ задана с точностью до обобщенной функции, сосредоточенной на множестве B_k .

Элементы пространства $\bar{E}_{k,0}^{m,q-m}$ представляются в виде $\sum \varphi(\tilde{\lambda}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\lambda}_k)$, где φ — обобщенная функция на $(S^1)^k$, заданная с точностью до обобщенных функций, сосредоточенных на замкнутом подмножестве A_k , четность которых по i -му аргументу зависит от степени многочлена λ_i .

Из формулы (15) по аналогии со случаем диагонального комплекса следует, что дифференциал $\bar{\delta}_{k,0}$ действует по формуле

$$\bar{\delta}_{k,0}(\varphi(\tilde{\lambda}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\lambda}_k)) = \sum_{i=1}^k (-1)^{s_1+\dots+s_{i-1}} \varphi(\tilde{\lambda}_1 \otimes \dots \otimes \nabla \tilde{\lambda}_i \otimes \dots \otimes \tilde{\lambda}_k). \quad (16)$$

Таким образом, действие дифференциала $\bar{\delta}_{k,0}$ сводится к действию дифференциала ∇ на пространствах многочленов $P_{m_i}^{s_i}$, откуда следует утверждение леммы. \square

Элементы пространств $\bar{E}_{k,1}^{3k,q-3k}$ удовлетворяют условиям инвариантности (14). Дифференциал $\bar{\delta}_{k,1}$ определяется из формул (10) и (16).

Обозначим через $(D^*(T^k), b)$ комплекс потоков де Рама на k -мерном торе T^k . Поток степени q можно представить в виде $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq k} \varphi_{i_1, \dots, i_q} dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_q}$. Значения потоков на дифференциальных формах определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq k} \varphi_{i_1, \dots, i_q} dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_q} \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-q} \leq k} f_{j_1, \dots, j_{k-q}} dt_{j_1} \wedge \dots \wedge dt_{j_{k-q}} \right) = \\ = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq k} \varphi_{i_1, \dots, i_q} (f_{j_1, \dots, j_{k-q}}), \end{aligned}$$

где $j_1 \neq i_1, \dots, i_q, \dots, j_{k-q} \neq i_1, \dots, i_q$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_{k-q}$.

Обозначим, через $(D^*(X^q), b)$ комплекс потоков де Рама на орбифолде X^k или, что то же самое, комплекс потоков, инвариантных относительно действия группы $(\mathbb{Z}_2)^k$ на k -мерном торе. Потоки из $D^*(X^k)$ можно представить в таком же виде, что и потоки на торе с дополнительными условиями на обобщенные функции: $\varphi_{i_1, \dots, i_q}(t_1, \dots, t_k)$ — четная по аргументам t_{i_1}, \dots, t_{i_q} и нечетная по остальным аргументам.

Обозначим через $(D_{A_k}^*(T^k), b)$ комплекс потоков на k -мерном торе, сосредоточенных на множестве A_k , а через $(D_{A_k}^*(X^k), b)$ — комплекс потоков, сосредоточенных на A_k и инвариантных относительно действия группы $(\mathbb{Z}_2)^k$.

Аналогично случаю диагонального комплекса мы можем построить отображение $\gamma_k: \bar{E}_{k,1}^{3k,q-3k} \rightarrow D^{3k-q}(X^k)/D_{A_k}^{3k-q}(X^k)$, которое будет изоморфизмом комплекса $\bar{E}_{k,1}^{3k,q-3k}$ и некоторого подкомплекса в $D^{3k-q}(X^k)/D_{A_k}^{3k-q}(X^k)$, который определяется из условия инвариантности (14). Применяя рассуждения, аналогичные рассуждениям для диагонального комплекса, получим, что

$$H^q(D^*(T^k)/D_{A_k}^*(T^k)) \cong H^q(T^q \setminus A_k).$$

Пространство $T^k \setminus A_k$ представляет собой несвязное объединение $2^k k!$ частей, каждая из которых изоморфна \mathbb{R} . Поэтому $H^0(T^k \setminus A_k) \cong \mathbb{R}^{2^k k!}$ и $H^q(T^k \setminus A_k) = 0$, при $q \geq 1$. Применяя условие инвариантности относительно действия группы \mathbb{Z}_2^k к соответствующим коциклам в $H^0(D^*(T^k)/D_{A_k}^*(T^k))$, получим $k!$ различных классов когомологий в $(H^0(D^*(T^k)/D_{A_k}^*(T^k)))_{Inv}$. Применяя к ним условие инвариантности (14), получим одну образующую в $\bar{E}_{k,2}^{3k,-3k}$, представленную классом коцикла $\underbrace{\beta \wedge \dots \wedge \beta}_k$,

где коцикл β определяется равенством (3). Коцикл $\underbrace{\beta \wedge \dots \wedge \beta}_k$ является коциклом всего комплекса $C^*(\mathcal{U}(X))$, поэтому дифференциалы $\bar{\delta}_{k,q} = 0$ при $q \geq 2$ и $\bar{E}_{k,2} = \bar{E}_{k,3} = \dots = \bar{E}_{k,\infty}$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 8. $H^{2k}(\bar{C}_k^*) \cong \mathbb{R}$ и $H^q(\bar{C}_k^*) = 0$ при $q \neq 2k$, где образующая степени $2k$ — класс коцикла $\underbrace{\beta \wedge \dots \wedge \beta}_k$, коцикл β определяется равенством (3).



5.2. Когомологии комплекса $(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_k$

Теорема 9. $H^{2k-1}((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_k) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $H^{2k-2}((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_k) \cong \mathbb{R}$ и $H^q((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_k) = 0$, при $q \neq 2k-1, 2k-2$, где образующие степени $k-1$ — классы коциклов $\alpha_1 \wedge \underbrace{\beta \wedge \dots \wedge \beta}_{k-1}$ и $\alpha_2 \wedge \underbrace{\beta \wedge \dots \wedge \beta}_{k-1}$, образующая степени $k-2$ — класс коцикла $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \underbrace{\beta \wedge \dots \wedge \beta}_{k-2}$. Коциклы α_1 , α_2 и β определяются равенствами (2) и (3).

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по k . Пусть сначала $k = 2$. Обозначим через \tilde{C}_λ^q комплекс $\bigoplus_{p+r=q} (\tilde{C}_0^p \otimes \tilde{C}_\pi^r \otimes \tilde{C}_\pi^r)$. Тогда $(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_2 \cong \left(\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_\Delta^r) \right) / \tilde{C}_\lambda^q$. Когомологии комплекса \tilde{C}_λ^q тривиальны, поэтому $H^q((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_2) \cong H^q\left(\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_\Delta^r)\right)$. Получаем утверждение теоремы для случая $k = 2$. Теперь, используя найденные когомологии подкомплекса $(\tilde{C}_{0,\pi}^*)_2$, когомологии фактор-комплекса $\tilde{C}_2^*/\tilde{C}_1^*$, найдем когомологии комплекса $\tilde{C}_2^*/\tilde{C}_1^*$ с помощью длинной точной последовательности когомологий (12) при $k = 2$:

$$\dots \rightarrow H^i((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_2) \rightarrow H^i(\tilde{C}_2^*/\tilde{C}_1^*) \rightarrow H^i(\tilde{C}_2^*) \rightarrow H^{i+1}((\tilde{C}_{0,\pi}^*)_2) \rightarrow H^{i+1}(\tilde{C}_2^*/\tilde{C}_1^*) \rightarrow \dots$$

Получим:

$$H^2(\tilde{C}_2^*/\tilde{C}_1^*) \cong \mathbb{R}, \quad H^3(\tilde{C}_2^*/\tilde{C}_1^*) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad H^4(\tilde{C}_2^*/\tilde{C}_1^*) \cong \mathbb{R}, \\ H^q(\tilde{C}_2^*/\tilde{C}_1^*) = 0, \quad q \neq 2, 3, 4.$$

Двумерная образующая — класс коцикла $\alpha_1 \wedge \alpha_2$, трехмерная образующая — классы коциклов $\alpha_1 \wedge \beta$, $\alpha_2 \wedge \beta$, четырехмерная образующая — класс коцикла $\beta \wedge \beta$.

Пусть $k = 3$. Тогда

$$(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_3 \cong \left(\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_2^r) \right) / \left(\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_\Delta^r) \right).$$

Найдем когомологии комплекса \tilde{C}_2^* из длинной точной последовательности когомологий:

$$\dots \rightarrow H^i(\tilde{C}_1^*) \rightarrow H^i(\tilde{C}_2^*) \rightarrow H^i(\tilde{C}_2^*/\tilde{C}_1^*) \rightarrow H^{i+1}(\tilde{C}_1^*) \rightarrow H^{i+1}(\tilde{C}_2^*) \rightarrow \dots$$

Пространство когомологий комплекса $\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_2^r)$ — тензорное произведение пространств когомологий комплексов $(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_\Delta$ и \tilde{C}_2^q . Найдем когомологии комплекса $(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_3$ из длинной точной последовательности когомологий комплекса $\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_2^r)$, подкомплекса $\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_\Delta^r)$ и фактор-комплекса $(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_3$ и получим утверждение для случая $k = 3$.

Теперь, используя длинную точную последовательность (12) при $k = 3$, мы можем вычислить когомологии комплекса $\tilde{C}_3^*/\tilde{C}_2^*$.

Пусть $k = l$, тогда

$$(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_l \cong \left(\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_{l-1}^r) \right) / \left(\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_{l-2}^r) \right).$$

Считая утверждение теоремы верным для случая $k \leq l-1$, найдем сначала когомологии комплекса $\tilde{C}_{l-1}^*/\tilde{C}_{l-2}^*$, используя длинную точную последовательность когомологий (12) при $k = l-1$. Далее, из длинной точной последовательности когомологий комплекса \tilde{C}_{l-1}^* , подкомплекса \tilde{C}_{l-2}^* и фактор-комплекса $\tilde{C}_{l-1}^*/\tilde{C}_{l-2}^*$ найдем когомологии комплекса \tilde{C}_{l-1}^* . Пространство когомологий комплекса $\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_{l-1}^r)$ — тензорное произведение пространств когомологий комплексов $(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_\Delta$ и \tilde{C}_{l-1}^q , пространство когомологий комплекса $\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_{l-2}^r)$ — тензорное произведение пространств когомологий комплексов $(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_\Delta$ и \tilde{C}_{l-2}^q . Найдем когомологии комплекса $(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_l$ из



длинной точной последовательности когомологий комплекса $\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_{l-1}^r)$, подкомплекса $\bigoplus_{p+r=q} ((\tilde{C}_{0,\pi}^p)_\Delta \otimes \tilde{C}_{l-2}^r)$ и фактор-комплекса $(\tilde{C}_{0,\pi}^q)_l$, что завершает доказательство теоремы. \square

В ходе доказательства теоремы 9 нам приходилось вычислять когомологии комплексов $\tilde{C}_k^*/\tilde{C}_{k-1}^*$, поэтому попутно мы доказали теорему 7.

Доказательство теоремы 2. Когомологии комплекса $\tilde{C}_k^q/\tilde{C}_{k-1}^q$ — первый член спектральной последовательности $(\tilde{E}_r^{k,q-k}, \delta_r)$ комплекса $i(C^q(\mathcal{W}(X)))$, при этом $\delta_r = 0$ при $r \geq 1$. Тогда

$$\tilde{E}_1^{k,q-k} = \tilde{E}_2^{k,q-k} = \dots = \tilde{E}_\infty^{k,q-k}.$$

Рассмотрим подкомплекс комплекса $i(C^q(\mathcal{W}(X)))$, мультипликативно порожденный коциклами α_1, α_2 и β . Обозначим его через $C_{\alpha,\beta}^q$. Ограничим фильтрацию комплекса $i(C^q(\mathcal{W}(X)))$ подкомплексами \tilde{C}_k^q на подкомплекс $C_{\alpha,\beta}^q$ и рассмотрим соответствующую спектральную последовательность $(\tilde{E}_{r,\alpha,\beta}^{k,q-k}, \delta_{r,\alpha,\beta})$. Получим, что $\tilde{E}_\infty^{k,q-k} \cong \tilde{E}_{\infty,\alpha,\beta}^{k,q-k}$. Тогда $H^q(i(C^*(\mathcal{W}(X)))) \cong H^q(C_{\alpha,\beta}^*)$. Алгебра когомологий комплекса $C_{\alpha,\beta}^q$ представляет собой тензорное произведение внешней алгебры с двумя образующими степени 1 (классы коциклов α_1 и α_2) и кольца многочленов с одной образующей степени 2 (класс коцикла β). \square

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору М. В. Лосику за неоценимую помощь в работе.

Библиографический список

1. Волокитина Е. Ю. О когомологиях алгебры Ли векторных полей на S^1/\mathbb{Z}_2 // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 8–15.
2. Гельфанд И. М., Фукс Д. Б. Когомологии алгебры Ли касательных векторных полей гладкого многообразия // Функц. анализ. 1969. Т. 3, вып. 3. С. 32–52.
3. Schwartz L. Théorie des distributions. Paris : Hermann, 1951. 418 p.
4. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М. : Физматгиз, 1961. 472 с.
5. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М. : Физматгиз, 1958. 308 с.
6. Рам Ж. де. Дифференцируемые многообразия. М. : Изд-во иностр. лит., 1956. 250 с.
7. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М. : Изд-во иностр. лит., 1961. 320 с.
8. Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. М. : Наука, 1989. 528 с.

Cohomology of the Lie Algebra of Vector Fields on Some One-dimensional Orbifold

E. Y. Volokitina

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, evgenia.yu@gmail.com

I. M. Gelfand and D. B. Fuchs have proved that the cohomology algebra of the Lie algebra of vector fields on the unit circle is isomorphic to the tensor product of the polynomial ring with one generator of degree two and the exterior algebra with one generator of degree three. In the present paper the cohomology of the Lie algebra of vector fields on the one-dimensional orbifold S^1/\mathbb{Z}_2 are studied. S^1/\mathbb{Z}_2 is the orbit space under the \mathbb{Z}_2 group action on the unit circle by reflection in the Ox axis. It has been proved that the cohomology algebra of the Lie algebra of vector fields on the orbifold is isomorphic to the tensor product of the exterior algebra with two generators of degree one and the polynomial ring with one generator of degree two. To prove this result author used the Gelfand–Fuchs method with some modifications.

Key words: orbifold, Lie algebra, cohomology.

References

1. Volokitina E. Y. Cohomology of Lie algebra of vector fields on S^1/\mathbb{Z}_2 . *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012. vol. 12, iss. 1, pp. 8–15 (in Russian).
2. Gelfand I. M., Fuks D. B. Cohomologies of Lie algebra of tangential vector fields of a smooth manifold. *Functional Analysis and Its Applications*, 1969, vol. 3, iss. 3, pp. 194–210.
3. Schwartz L. *Théorie des distributions*. Paris, Hermann, 1951, 418 p.
4. Gelfand I. M., Vilenkin N. Ja. *Generalized Functions, vol. 4: Some Applications of Harmonic Analysis. Rigged Hilbert Spaces*. New York, Academic Press, 1964, 384 p. (Rus. ed.: Gelfand I. M., Vilenkin N. Ja. *Nekotorye primeneniia garmonicheskogo analiza. Osnashchennyye*



- gil'bertovy prostranstva*. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 472 p.)
5. Gelfand I. M., Shilov G. E. *Prostranstva osnovnykh i obobshchennykh funktsii* [Spaces of test and generalized functions]. Moscow, Fizmatgiz, 1958, 308 p. (in Russian).
6. Rham G. de. *Differentsiruemye mnogoobraziia* [Differentiable manifolds]. Moscow, Izdatelstvo inostrannoj literatury, 1956, 250 p. (in Russian).
7. Godeman R. *Algebraicheskaia topologiia i teoriia puchkov* [Algebraic topology and theory of sheaves]. Moscow, Izdatelstvo inostrannoj literatury, 1961, 320 p. (in Russian).
8. Fomenko A. T., Fuks D. B. *Kurs gomotopicheskoi topologii* [A course in homotopy topology]. Moscow, Nauka, 1989, 528 p. (in Russian).

УДК 501.1

СИСТЕМА ДИРАКА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. В. Корнев¹, А. П. Хромов²

¹Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KornevVV@info.sgu.ru

²Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

В работе рассматривается система Дирака с антипериодическими краевыми условиями и с комплекснозначным непрерывным потенциалом. Предложен новый метод исследования спектральных свойств этой краевой задачи. Метод базируется на формулах типа операторов преобразования и является элементарным и простым. С его помощью получена уточненная асимптотика собственных значений и доказано, что система собственных и присоединенных функций образует базис Рисса со скобками в пространстве квадратично суммируемых двумерных вектор-функций, так как собственные значения могут быть кратными. Исследуется также структура проекторов Рисса. Полученные результаты можно использовать в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией.

Ключевые слова: система Дирака, спектр, асимптотика, базис Рисса.

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ систему Дирака:

$$y_1'(x) - q_2(x)y_2(x) = \lambda y_1(x), \quad (1)$$

$$y_2'(x) - q_1(x)y_1(x) = -\lambda y_2(x) \quad (2)$$

с краевыми условиями

$$y_1(0) = -y_1(1), \quad y_2(0) = -y_2(1), \quad (3)$$

где $q_j(x)$ — непрерывные комплекснозначные функции.

В работе [1] предложен новый метод исследования спектральных свойств системы (1), (2) в случае периодических краевых условий. В данной работе на основе этого метода подобное исследование осуществляется в случае антипериодических краевых условий (3). Метод базируется на формулах типа операторов преобразования (см. также [2, с. 30]), является элементарным и весьма простым. В качестве приложения дается новое доказательство теоремы П. Джакова, Б. С. Митягина [3, 4] о базисах Рисса. Как и в периодическом случае, в антипериодическом случае возможна кратность собственных значений. Полученные результаты могут быть также использованы в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией [5].

1. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ПОЛНОТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Имеет место следующая асимптотика решений системы (1), (2):

Лемма 1. Система (1), (2) в области $\operatorname{Re} \lambda \geq -h$, $h > 0$, при больших $|\lambda|$ имеет фундаментальную матрицу решений $Y(x, \lambda) = (y_{ij}(x))_1^2$ с асимптотикой

$$Y(x, \lambda) = (E + o(1))e^{\lambda D x}, \quad (4)$$

где $E = \operatorname{diag}(1, 1)$, $D = \operatorname{diag}(1, -1)$, $o(1) \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [0, 1]$ и $\arg \lambda$, $y_{ij}(x)$ — аналитичны по λ .



Лемма справедлива и при $\operatorname{Re} \lambda \leq h$, а её доказательство можно найти, например, в [1].

Используя асимптотическую формулу (4), получим главный член асимптотики собственных значений.

Теорема 1. *Собственные значения краевой задачи (1)–(3) образуют две бесконечные последовательности с асимптотикой:*

$$\lambda'_n = (2n + 1)\pi i + \varepsilon'_n, \quad \lambda''_n = (2n + 1)\pi i + \varepsilon''_n, \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots,$$

где $\varepsilon'_n \rightarrow 0$ и $\varepsilon''_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В случае $\varepsilon'_n \neq \varepsilon''_n$ они простые, а в случае $\varepsilon'_n = \varepsilon''_n$ — двукратные.

Доказательство. Обозначим $\Delta(\lambda) = Y(0, \lambda) + Y(1, \lambda)$. Собственные значения совпадают с корнями уравнения

$$\det \Delta(\lambda) = 0. \quad (5)$$

По лемме 1

$$\begin{aligned} \det \Delta(\lambda) &= \det (E + o(1) + (E + o(1))e^{\lambda D}) = \det(E + o(1)) \cdot \det (E + o(1) + e^{\lambda D}) = \\ &= (1 + o(1)) (e^\lambda (e^{-\lambda} + 1 + o(1))(e^{-\lambda} + 1 + o(1)) + o(1)). \end{aligned}$$

Следовательно, при больших $|\lambda|$ уравнение (5) эквивалентно уравнению

$$\varphi_0(\lambda) + \varphi_1(\lambda) = 0, \quad (6)$$

где $\varphi_0(\lambda) = (e^{-\lambda} + 1)^2$, $\varphi_1(\lambda) = o(1)$.

Нули функции $\varphi_0(\lambda)$ двукратные и равны $\lambda_n^0 = (2n + 1)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому все собственные значения задачи (1)–(3) достаточно большие по модулю, лежат в некоторой полосе $|\operatorname{Re} \lambda| \leq h$, и из (6) по теореме Руше получаем утверждение теоремы. \square

Введем в рассмотрение оператор

$$Ly = (y'_1(x) - q_2(x)y_2(x), -y'_2(x) + q_1(x)y_1(x))^T, \quad y(0) = -y(1),$$

где $y = y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, T — знак транспонирования. Очевидно, собственные значения оператора L совпадают с собственными значениями краевой задачи (1)–(3).

Лемма 2. *Для резольвенты $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор, справедлива формула*

$$R_\lambda f = -Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U(G_\lambda \tilde{f}) + G_\lambda \tilde{f}, \quad (7)$$

где $G_\lambda \tilde{f} = \int_0^1 Y(x, \lambda)E_0(x, t)Y^{-1}(t, \lambda)\tilde{f}(t) dt$, $U(y) = y(0) + y(1)$, $E_0(x, t) = \operatorname{diag}(-\varepsilon(t, x), \varepsilon(x, t))$, $\varepsilon(x, t) = 1$ при $x \geq t$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$, $\tilde{f} = (f_1(x), -f_2(x))^T$, $f_j(x)$ — координаты $f(x)$, $Y(x, \lambda)$ — та же, что и в лемме 1.

Доказательство. Пусть $R_\lambda f = y$. Тогда имеем $Ly = \lambda y + f$ или

$$y'(x) - Q(x)y(x) = \lambda Dy(x) + \tilde{f}(x), \quad (8)$$

$$y(0) + y(1) = 0, \quad (9)$$

где $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$.

Ищем решение краевой задачи (8), (9) в виде $y(x) = Y(x, \lambda)c(x)$, т. е. применяем метод вариации произвольных постоянных. В результате получим формулу (7). \square

Обозначим через S_δ область, получающуюся из λ -плоскости удалением всех чисел $\lambda_n^0 = (2n + 1)\pi i$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ .

Лемма 3. *В S_δ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула:*

$$R_\lambda f = \int_0^1 O(1)f(t) dt,$$

где $O(1)$ — матрица с элементами, имеющими оценку $O(1)$ по λ , равномерную относительно других переменных.



Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что в S_δ справедлива оценка

$$|\det \Delta(\lambda)| \geq c|e^\lambda| \tag{10}$$

(через c обозначаем разные положительные постоянные, встречающиеся в оценках).

Утверждение леммы легко следует из формулы (7) с учетом (4) и (10), так как случай $\operatorname{Re} \lambda \leq h$ рассматривается аналогично. \square

Теорема 2. Системы собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) операторов L и L^* полны в пространстве $L_2^2[0, 1]$.

Доказательство. Покажем вначале полноту с.п.ф. сопряженного оператора:

$$L^*z = (-z_1'(x) + \bar{q}_1(x)z_2(x), z_2'(x) - \bar{q}_2(x)z_1(x))^T, \quad z(0) = -z(1).$$

Пусть f ортогональна всем с.п.ф. оператора L^* . Тогда $R_\lambda f$ есть целая функция по λ . В силу леммы 3 и теоремы Лиувилля $R_\lambda f$ не зависит от λ , т.е. $R_{\lambda_1} f = R_{\lambda_2} f$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Но $R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} f = (R_{\lambda_1} f - R_{\lambda_2} f)/(\lambda_1 - \lambda_2)$. Следовательно, $f = 0$, и система с.п.ф. оператора L^* полна.

Полнота с.п.ф. оператора L устанавливается аналогично, так как $(L^*)^* = L$ и для $R_{-\lambda}(L^*) = (L^* + \lambda E)^{-1}$ также справедлива лемма 3. \square

2. УТОЧНЕННАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Для уточнения теоремы 1 воспользуемся системой решений системы Дирака, введенной в [1], которая определяется следующим образом. Система (1), (2) эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda x} + \int_0^x e^{\lambda(x-t)} q_2(t) y_2(t) dt,$$

$$y_2(x) = c_2 e^{-\lambda x} + \int_0^x e^{-\lambda(x-t)} q_1(t) y_1(t) dt,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Выполним замену $y_1(x) = e^{\lambda x} z_1(x)$, $y_2(x) = e^{-\lambda x} z_2(x)$. Относительно $z_1(x)$ и $z_2(x)$ получим:

$$z_1(x) = c_1 + \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t) dt, \tag{11}$$

$$z_2(x) = c_2 + \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) z_1(t) dt. \tag{12}$$

Через $(z_{11}(x), z_{12}(x))^T$ будем обозначать решение (11), (12) при $c_1 = 1, c_2 = 0$, а через $(z_{21}(x), z_{22}(x))^T$ — решение системы (11), (12) при $c_1 = 0, c_2 = 1$.

Лемма 4. Имеют место формулы

$$z_{11}(x) = 1 + \int_0^x e^{-2\lambda \xi} K_{11}(x, \xi) d\xi, \quad z_{21}(x) = \int_0^x e^{2\lambda \xi} K_{21}(x, \xi) d\xi,$$

$$z_{12}(x) = \int_0^x e^{-2\lambda \xi} K_{12}(x, \xi) d\xi, \quad z_{22}(x) = 1 + \int_0^1 e^{2\lambda \xi} K_{22}(x, \xi) d\xi,$$

где $K_{11}(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{11,n}(x, \xi)$, $K_{11,n}(x, \xi) = \int_0^x q_2(t_1) dt_1 \int_0^x \varepsilon(t_1, t_2) q_1(t_2) dt_2 \dots \int_0^x \varepsilon(t_{2n-3}, t_{2n-2}) \times$
 $\times q_1(t_{2n-2}) dt_{2n-2} \int_0^x \varepsilon(t_{2n-2}, t_{2n-1}) \varepsilon(\xi, t_{2n}(\xi) + \xi - t_{2n-1}) \varepsilon(t_{2n}(\xi) + \xi, \xi) q_2(t_{2n-1}) q_1(t_{2n}(\xi)) dt_{2n-1},$
 $t_{2n}(\xi) = t_1 - t_2 + t_3 - \dots + t_{2n-1} - \xi$, $K_{11}(x, \xi)$ не зависит от λ , $|K_{11,n}(x, \xi)| \leq (c_1 c_2)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$,



$c_j = \max_x |q_j(x)|$, $K_{21}(x, \xi) = q_1(\xi) + \int_{\xi}^x q_1(\tau) K_{11}(\tau, \tau - \xi) d\tau$, K_{22} получается из K_{11} , меняя q_1 на q_2 , q_2 на q_1 , а K_{12} — из K_{21} , меняя q_1 на q_2 и K_{11} на K_{22} .

(По поводу доказательства леммы 4 см. [1].)

Везде далее $Y(x, \lambda) = (y_{ij}(x))_1^2$, где $y_{1j}(x) = e^{\lambda x} z_{1j}(x)$, $y_{2j}(x) = e^{-\lambda x} z_{2j}(x)$, $j = 1, 2$.

Уравнение (5) для собственных значений после умножения обеих частей на $e^{\lambda/z_{11}(1)}$ примет вид

$$e^{2\lambda} + g_1(\lambda)e^{\lambda} + g_2(\lambda) = 0, \quad (13)$$

где $g_1(\lambda) = \frac{1}{z_{11}(1)} (1 + z_{11}(1)z_{22}(1) - z_{12}(1)z_{21}(1))$, $g_2(\lambda) = \frac{z_{22}(1)}{z_{11}(1)}$. В дальнейшем через α_n будем обозначать различные числа, для которых $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$, а через β_n — такие α_n , которые можно точно вычислить.

Получим асимптотику $z_{ij}(1)$ при $\lambda = \lambda_n = (2n + 1)\pi i + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 5. При $\lambda = \lambda_n$ справедливы асимптотические формулы:

$$z_{ij}(1) = \delta_{ij} + \omega_n + O(\varepsilon_n^4), \quad (14)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\omega_n = \beta_n + \beta_n \varepsilon_n + \beta_n \varepsilon_n^2 + \beta_n \varepsilon_n^3$.

Доказательство. По лемме 4 имеем:

$$z_{11}(1) = 1 + \int_0^1 e^{-2\lambda_n \xi} K_{11}(1, \xi) d\xi = 1 + \int_0^1 e^{-4n\pi i \xi} \left(1 - 2\varepsilon_n \xi + \frac{(2\varepsilon_n \xi)^2}{2!} - \frac{(2\varepsilon_n \xi)^3}{3!} \right) \times \\ \times e^{-2\pi i \xi} K_{11}(1, \xi) d\xi + O(\varepsilon_n^4) = 1 + \omega_n + O(\varepsilon_n^4),$$

где $\omega_n = \int_0^1 e^{-4n\pi i \xi} \left(1 - 2\varepsilon_n \xi + \frac{(2\varepsilon_n \xi)^2}{2!} - \frac{(2\varepsilon_n \xi)^3}{3!} \right) e^{-2\pi i \xi} K_{11}(1, \xi) d\xi$. Таким образом, формула (14) при $i = j = 1$ доказана. Остальные формулы в (14) получаются аналогично. \square

Следствие. При $\lambda = \lambda_n$ имеет место соотношение

$$z_{11}^{-1}(1) = 1 + \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4). \quad (15)$$

Из леммы 5 и формулы (15), в свою очередь, легко следует, что справедливы следующие асимптотические формулы:

$$g_j(\lambda_n) = 2^{2-j} + \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4), \quad j = 1, 2. \quad (16)$$

Лемма 6. Для чисел ε'_n и ε''_n из теоремы 1 справедливы оценки

$$\varepsilon'_n = \alpha_n^{1/2}, \quad \varepsilon''_n = \alpha_n^{1/2}.$$

Доказательство. Обозначим

$$L_{\pm}(\lambda) = e^{\lambda} + \frac{1}{2}g_1(\lambda) \mp \sqrt{g_3(\lambda)}, \quad g_3(\lambda) = \frac{1}{4}g_1^2(\lambda) - g_2(\lambda).$$

Рассмотрим собственные значения $\lambda_n = (2n + 1)\pi i + \varepsilon_n$ краевой задачи (1)–(3). Они являются корнями уравнения (13). Следовательно,

$$L_+(\lambda_n) \cdot L_-(\lambda_n) = 0.$$

Пусть для определенности $L_+(\lambda_n) = 0$. В этом случае

$$e^{\varepsilon_n} = 1 + x_n, \quad (17)$$

где

$$x_n = \frac{1}{2}g_1(\lambda_n) - \sqrt{g_3(\lambda_n)} - 1. \quad (18)$$

На основании (16) заключаем, что

$$g_3(\lambda_n) = \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4), \quad \sqrt{g_3(\lambda_n)} = \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2),$$



$$x_n = \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2), \quad x_n^2 = \alpha_n + O(\varepsilon_n^2).$$

Используя эти соотношения, из (17) получаем, что

$$\varepsilon_n = x_n + O(x_n^2) = \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2), \tag{19}$$

откуда следует, что $\varepsilon_n = \alpha_n^{1/2}$.

Случай $L_-(\lambda_n) = 0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана. \square

Теорема 3. Пусть ε_n — любое из ε'_n или ε''_n . Справедливы асимптотические формулы:

$$\varepsilon_n = \pm \beta_n^{1/2} + \alpha_n^{3/4}$$

(вопрос о знаке перед $\beta_n^{1/2}$ не ясен).

Доказательство. Пусть $\lambda_n = (2n + 1)\pi i$ является собственными значениями задачи (1)–(3) и, для определенности, $L_+(\lambda_n) = 0$. В этом случае по формулам (16) и (18) имеем:

$$x_n = \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4) - \sqrt{\omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4)}.$$

В силу леммы 6 $\omega_n = \beta_n + \alpha_n^{3/2}$ и поэтому

$$x_n = \beta_n + \alpha_n^{3/2} - \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}}.$$

Отсюда с учетом (19) заключаем, что

$$\varepsilon_n = -\sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \alpha_n. \tag{20}$$

Возможны два случая. В первом случае

$$\left| \sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} \right| \leq \left| \alpha_n^{3/4} \right|.$$

Тогда из (20) следует, что

$$\varepsilon_n = -\sqrt{\beta_n} + \alpha_n^{3/4}. \tag{21}$$

Во втором случае

$$\left| \sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} \right| > \left| \alpha_n^{3/4} \right|.$$

В этом случае

$$\left| \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \sqrt{\beta_n} \right| = \left| \beta_n + \alpha_n^{3/2} - \beta_n \right| \cdot \left| \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} - \sqrt{\beta_n} \right|^{-1} \leq \left| \alpha_n^{3/4} \right|.$$

Учитывая это, из (20) получаем, что

$$\varepsilon_n = \sqrt{\beta_n} + \alpha_n^{3/4}. \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует утверждение теоремы (случай $L_-(\lambda_n) = 0$ рассматривается аналогично). \square

Как и в периодическом случае, для кратных собственных значений можно получить еще более точную асимптотику.

Теорема 4. Если $g_3(\lambda_n) = 0$ для некоторого бесконечного множества Λ собственных значений, то достаточно большие по модулю λ_n из Λ двукратны, и для них справедлива асимптотика

$$\lambda_n = (2n + 1)\pi i + \beta_n + \alpha_n^2.$$

Доказательство. По теореме 1 число корней уравнения (13) в круге $|(2n + 1)\pi i - \lambda| < \delta$ при больших $|n|$ равно 2. Число \varkappa_+ (\varkappa_-) корней $L_+(\lambda)$ ($L_-(\lambda)$) в таком случае не больше 2, причем $\varkappa_+ + \varkappa_- = 2$. Следовательно, если $g_3(\lambda_n) = 0$, то $L_{\pm}(\lambda_n) = 0$ и $\varkappa_+ = \varkappa_- = 1$, т. е. λ_n — двукратный корень. В этом случае (17) примет вид

$$e^{\lambda_n} = \frac{1}{2} g_1(\lambda_n).$$

Тогда

$$e^{\lambda_n} = 1 + \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4), \quad \varepsilon_n = y_n + O(y_n^2), \tag{23}$$

где $y_n = \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4) = \beta_n + \beta_n \varepsilon_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2)$. Замечая, что $y_n^2 = \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2)$, из (23) получаем:

$$\varepsilon_n = \beta_n + \beta_n \varepsilon_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2). \tag{24}$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_n = \alpha_n$ и (24) переходит в $\varepsilon_n = \beta_n + \alpha_n^2$. Теорема доказана. \square



3. БАЗИСЫ РИССА

Пусть δ — положительное достаточно малое число. По теореме 1 все собственные значения, достаточно большие по модулю, попадают в круги с границами $\gamma_n = \{\lambda \mid |(2n+1)\pi i - \lambda| = \delta\}$, причем обязательно по два в каждый круг (или по одному, если $\lambda'_n = \lambda''_n$). Суммарная кратность собственных значений в каждом круге равна двум. Рассмотрим проекторы Рисса:

$$P_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} R_\lambda d\lambda, \quad (25)$$

где

$$R_\lambda f = -Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U(G_\lambda f) + G_\lambda f, \quad (26)$$

причем $Y(x, \lambda)$ — из раздела 2; $\Delta(\lambda) = Y(0, \lambda) + Y(1, \lambda)$, $G_\lambda f = \int_0^x Y(x, \lambda)Y^{-1}(t, \lambda)f(t) dt$, $f = f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_i(x) \in L_2[0, 1]$.

Представлением (26) получается так же, как (7). Функция $G_\lambda f$ есть целая по λ .

Из (25), (26) имеем:

$$P_n f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} Y(x, \lambda)\Delta^{-1}(\lambda)Y(1, \lambda) \int_0^1 Y^{-1}(t, \lambda)f(t) dt d\lambda.$$

Обозначим через $s(\lambda)$ функции, зависящие только от λ , ограниченные по $\lambda \in \gamma_n$ при всех n , достаточно больших по модулю. Структура проекторов Рисса описывается следующей леммой:

Лемма 7. При $|n|$ достаточно больших

$$P_n f = \int_{\gamma_n} \Phi(x, \lambda; f) d\lambda,$$

где каждая из компонент вектора Φ имеет вид

$$\sum_k s(\lambda)y_{i_1 j_1}(x)(w_{ij}, \bar{f}_i)$$

(суммирование ведется по всем $k = (i_1, j_1, i, j, l)$, когда компоненты мультииндекса k принимают значения 1 и 2), $w_{ij}(x)$ — элементы матрицы $Y^{-1}(x, \lambda)$.

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству теоремы 5 из [1].

Обозначим через $\varphi(x, \mu)$ одну из функций вида

$$\varphi(x, \mu) = e^{(\pm\bar{\mu} \pm \pi i)x} \left\{ \varphi(x) + \frac{1}{2} \int_x^1 \varphi(\tau) \bar{K}_{ij}(\tau, (\tau \pm x)/2) d\tau \right\},$$

$$\varphi(x, \mu) = \frac{1}{2} e^{(\pm\bar{\mu} \pm \pi i)x} \int_x^1 \varphi(\tau) \bar{K}_{ij}(\tau, (\tau \pm x)/2) d\tau,$$

где $\varphi(x) \in L_2[0, 1]$. Знаки \pm берутся в любой комбинации.

Лемма 8. При $\mu \in \gamma = \{\mu \mid |\mu| = \delta\}$ справедливы оценки

$$\|\varphi(x, \mu)\| \leq c\|\varphi\|,$$

где c не зависит от μ , $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0, 1]$.

Лемма 9. Если $\lambda = (2n+1)\pi i + \mu$, $\mu \in \gamma$, то для каждой пары (i, j) существуют две функции $\varphi(x, \mu)$ из приведенных выше такие, что справедливы формулы

$$(y_{ij}(x), \varphi(x)) = (e^{2n\pi i x}, \varphi(x, \mu)) + (e^{-2n\pi i x}, \varphi(x, \mu)), \quad i, j = 1, 2. \quad (27)$$



Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} y_{11} &= e^{\lambda x} z_{11}(x) = e^{\lambda x} + \int_0^x e^{\lambda(x-2\xi)} K_{11}(x, \xi) d\xi = e^{\lambda x} + \frac{1}{2} \int_{-x}^x e^{\lambda\tau} K_{11}(x, (x-\tau)/2) d\tau = \\ &= e^{\lambda x} + \frac{1}{2} \int_0^x e^{\lambda\tau} K_{11}(x, (x-\tau)/2) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\lambda\tau} K_{11}(x, (x+\tau)/2) d\tau = e^{2n\pi i x} e^{(\mu+\pi i)x} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x e^{2n\pi i\tau} e^{(\mu+\pi i)\tau} K_{11}(x, (x-\tau)/2) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-2n\pi i\tau} e^{-(\mu+\pi i)\tau} K_{11}(x, (x+\tau)/2) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда получаем (27) при $i = j = 1$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана. \square

Замечание. Конкретный вид $\varphi(x, \mu)$ в (27) для каждой пары (i, j) в дальнейшем не важен.

Лемма 10. *Справедливы оценки*

$$\sum_k |(y_{ij}(x, (2n+1)\pi i + \mu), \varphi)|^2 \leq c \|\varphi\|^2, \tag{28}$$

$$\sum_n |(w_{ij}(x, (2n+1)\pi i + \mu), \varphi)|^2 \leq c \|\varphi\|^2, \tag{29}$$

где c не зависит от $\mu \in \gamma$, $y_{ij}(x, (2n+1)\pi i + \mu)$ ($w_{ij}(x, (2n+1)\pi i + \mu)$) есть $y_{ij}(x)$ ($w_{ij}(x)$) при $\lambda = (2n+1)\pi i + \mu$.

Оценки (28) следуют из лемм 8 и 9. Оценки (29) получаются аналогично.

Лемма 11. *Обозначим через N_0 все целые числа, меньшие по модулю некоторого достаточно большого фиксированного числа. Пусть N — любой конечный набор целых чисел, причем $N \cap N_0 = \emptyset$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| \sum_{n \in N} P_n \right\| \leq c,$$

где c не зависит от набора N , $\|\cdot\|$ — норма в пространстве операторов в $L_2^2[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))^T$, $f_j, g_j \in L_2[0, 1]$. По лемме 7 имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \in N} (P_n f, g) \right| &= \left| \int_{\gamma} \sum_{n \in N} |(\Phi_1(x, (2n+1)\pi i + \mu; f), g_1) + (\Phi_2(x, (2n+1)\pi i + \mu; f), g_2)| d\mu \right| \leq \\ &\leq c \sum_k \sum_{n \in N} \int_{\gamma} |(y_{ij}(x, (2n+1)\pi i + \mu), g_{l_1}(x))| \cdot |(w_{ij}(x, (2n+1)\pi i + \mu), \bar{f}_{l_1}(x))| |d\mu|, \end{aligned}$$

где Φ_1, Φ_2 — компоненты Φ , \sum_k означает суммирование по мультииндексу $k = (i_1, j_1, i, j, l_1, l_2)$ с компонентами, принимающими значения 1 и 2.

Отсюда по лемме 10 получаем оценку

$$\left| \sum_{k \in N} (P_n f, g) \right| \leq c \|f\| \cdot \|g\|,$$

где c не зависит от N , f и g , и по теореме Банаха–Штейнгауза получаем утверждение леммы. \square

Теорема 5. *Система с.п.ф. краевой задачи (1)–(3) образует базис Рисса со скобками в $L_2^2[0, 1]$.*

Доказательство. В силу леммы 11 и теоремы 2 заключаем, что система с.п.ф. образует безусловный базис со скобками в $L_2^2[0, 1]$, и каждая скобка содержит члены ряда Фурье по с.п.ф., соответствующие собственным значениям, попавшим в конкретные γ_n при большом n . \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238а).



Библиографический список

1. Бурлуцкая М. Ш., Корнев В. В., Хромов А. П. Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2012. Т. 52, № 9. С. 1621–1632.
2. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 340 с.
3. Djakov P., Mityagin B. Bari–Markus property for Riesz projections of ID periodic Dirac operators // Math. Nachr. 2010. Vol. 283, № 3. P. 443–462.
4. Джаков П. Б., Митягин Б. С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // УМН. 2006. Т. 61, № 4(370). С. 77–182. DOI: 10.4213/gm2121.
5. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2011. Т. 51, № 12. С. 2233–2246.

Dirac System with Undifferentiable Potential and Antiperiodic Boundary Conditions

V. V. Kornev, A. P. Khromov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, KornevVV@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

The object of the paper is Dirac system with antiperiodic boundary conditions and complex-valued conditions potential. A new method is suggested for investigating spectral properties of this boundary problem. The method is based on the formulas of the transform operators type. It is rather elementary and simple. Using this method asymptotic behaviour of eigenvalues is specified and it is proved that eigen and associated functions form Riesz basis with brackets in the space of quadratic summable two-dimensional vector-functions since eigenvalues may be multiple. The structure of Riesz projection operators is also studied. The results of the paper can be used in spectral problems for equations with partial derivatives of the 1-st order containing involution.

Key words: Dirac system, spectrum, asymptotics, Riesz basis.

References

1. Burlutskaya M. Sh., Kornev V. V., Khromov A. P. Dirac system with non-differentiable potential and periodic boundary conditions. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2012, vol. 52, no. 9, pp. 1621–1632 (in Russian).
2. Marchenko V. A. *Operatory Shturma–Liouillia i ikh prilozheniia* [Sturm–Liouville operators and their applications]. Kiev, Naukova Dumka, 1977, 340 p. (in Russian).
3. Djakov P., Mityagin B. Bari–Markus property for Riesz projections of ID periodic Dirac operators. *Math. Nachr.*, 2010, vol. 283, no. 3, pp. 443–462.
4. Djakov P., Mityagin B. S. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators. *Russian Math. Surveys*, 2006, vol. 61, no. 4, pp. 663–766. DOI: 10.4213/gm2121.
5. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 12, pp. 2233–2246.

УДК 519.622

АЛГОРИТМ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА, ШАГА И ПЕРЕМЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ

Е. А. Новиков

Доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник отдела вычислительной математики, Институт вычислительного моделирования СО РАН, novikov@icm.krasn.ru

Построено неравенство для контроля устойчивости схемы Ческино второго порядка точности. На основе стадий этого метода построена численная формула первого порядка с расширенным до 32 интервалом устойчивости. На основе L -устойчивой (2,1)-схемы и численной формулы Ческино разработан алгоритм переменной структуры, в котором эффективная численная формула выбирается на каждом шаге по критерию устойчивости. Алгоритм предназначен для решения как жестких, так и не жестких задач. Приведены результаты расчетов, подтверждающие эффективность построенного алгоритма.

Ключевые слова: жесткая задача, схема Ческино, (2,1)-метод, контроль точности и устойчивости.



ВВЕДЕНИЕ

Во многих важных приложениях возникает проблема численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Часто уравнения в частных производных приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям после дискретизации по пространственным переменным. Полученная таким образом задача, как правило, жесткая и большой размерности. Для решения жестких задач в основном применяются неявные методы, в которых основные затраты приходятся на декомпозицию матрицы Якоби. Для повышения эффективности расчетов в ряде алгоритмов используется замораживание матрицы Якоби, т. е. применение одной матрицы на нескольких шагах интегрирования [1]. Наиболее успешно этот подход применяется в алгоритмах на основе многошаговых численных формул [2]. Эта проблема решается достаточно просто для методов, в которых стадии вычисляются с участием матрицы Якоби в некотором итерационном процессе. В алгоритмах интегрирования на основе известных безытерационных методов, к которым относятся методы типа Розенброка [3] и их различные модификации [1], вопрос о применении одной матрицы на нескольких шагах интегрирования более сложный. В таких алгоритмах матрица Якоби включена в численную схему и ее аппроксимация может приводить к понижению порядка точности. В [4] эта проблема изучается применительно к методам типа Розенброка. Доказано, что максимальный порядок точности данных методов равен двум, если в алгоритме интегрирования одна матрица Якоби применяется на нескольких шагах интегрирования. Это означает, что применение методов типа Розенброка будет эффективным при решении задач небольшой размерности или при небольшой точности расчетов.

Некоторым аналогом замораживания матрицы Якоби является применение в расчетах алгоритмов интегрирования на основе явных и L -устойчивых методов с автоматическим выбором численной схемы [5]. В этом случае эффективность алгоритма может быть повышена за счет расчета переходного участка, соответствующего максимальному собственному числу матрицы Якоби, по явному методу. В качестве критерия выбора эффективной численной формулы естественно применять неравенство для контроля устойчивости [6–8]. Отметим, что применение таких комбинированных алгоритмов полностью не снимает проблемы замораживания матрицы Якоби [9].

Здесь построено неравенство для контроля устойчивости метода Ческино второго порядка точности. На основе стадий данной численной формулы построена схема первого порядка с расширенной до 32 единиц по вещественной оси областью устойчивости. На основе L -устойчивой (2,1)-схемы и рассмотренных явных численных формул разработан алгоритм переменной структуры, в котором эффективная численная формула выбирается на каждом шаге по критерию устойчивости. Алгоритм предназначен для решения жестких и не жестких задач с точностью расчетов порядка 1%. Приведены результаты вычислений, подтверждающие работоспособность и эффективность построенного алгоритма.

1. (2,1)-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ

Для численного решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (1)$$

где y и f — вещественные N -мерные вектор-функции, t — независимая переменная, в [10] предложен класс численных (m, k) -схем. С точки зрения реализации эти методы столь же просты, как и схемы типа Розенброка. Однако для них значительно проще решаются проблемы численного вычисления и замораживания матрицы Якоби. Кроме того, (m, k) -методы обладают более хорошими свойствами точности и устойчивости при незначительном увеличении вычислительных затрат. В традиционных методах число стадий m полностью описывает численную формулу. В (m, k) -методах для описания численных схем требуется две постоянные m — число стадий и k — количество вычислений правой части системы (1) на шаге интегрирования.

Для решения задачи (1) рассмотрим (2,1)-схему вида

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2, \quad D_n k_1 = hf(y_n), \quad D_n k_2 = k_1, \quad (2)$$



где k_1 и k_2 — стадии метода; $D_n = E - ahA_n$; A_n — некоторая матрица, представимая в виде $A_n = f'_n + hB_n + O(h^2)$; E — единичная матрица; h — шаг интегрирования; $f'_n = \partial f(y_n)/\partial y$ — матрица Якоби задачи (1); B_n — независящая от шага произвольная матрица; a , p_1 и p_2 — числовые коэффициенты. Такая формулировка метода позволяет применять (2) с замораживанием как аналитической, так и численной матрицы Якоби [11]. В случае использования в расчетах матрицы Якоби f'_{n-k} , вычисленной k шагов назад, имеем $B_n = -kf''_n f_n$, $f''_n f_n = \partial^2 f(y_n)/\partial y^2$. Если матрица Якоби вычисляется численно с шагом $r_j = c_j h$, то элементы $b_{n,ij}$ матрицы B_n имеют вид $b_{n,ij} = 0.5c_j \partial^2 f_i(y_n)/\partial y_j^2$. Получим коэффициенты L -устойчивой численной схемы (2) второго порядка и неравенство для контроля точности вычислений. Разложение точного решения $y(t_{n+1})$ задачи (1) в ряд Тейлора имеет вид

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + \frac{1}{2}h^2 f'f + \frac{1}{6}h^3 [f'^2 f + f'' f^2] + O(h^4),$$

где элементарные дифференциалы f , $f'f$, $f'^2 f$ и $f'' f^2$ вычислены на точном решении $y(t_n)$. Для нахождения коэффициентов a , p_1 и p_2 схемы (2) запишем разложения стадий k_1 и k_2 в ряды Тейлора и подставим в (2). Получим

$$y_{n+1} = y_n + (p_1 + p_2)hf_n + a(p_1 + 2p_2)h^2 f'_n f_n + a^2(p_1 + 3p_2)h^3 f'^2_n f_n + a(p_1 + 2p_2)h^3 B_n f_n + O(h^4),$$

где элементарные дифференциалы f_n , $f'_n f_n$, $f'^2_n f_n$, $f''_n f_n^2$ и $B_n f_n$ вычислены на приближенном решении y_n . Полагая $y_n = y(t_n)$ и сравнивая полученные ряды до членов с h^2 , получим условия второго порядка точности схемы (2), т. е.

$$p_1 + p_2 = 1, \quad a(p_1 + 2p_2) = \frac{1}{2}.$$

Исследуем устойчивость схемы (2). Применяя ее к задаче $y' = \lambda y$, $\text{Re}(\lambda) < 0$, получим $y_{n+1} = Q(x)y_n$, где $x = h\lambda$, а функция устойчивости $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x) = \frac{1 + (p_1 + p_2 - 2a)x + a(a - p_1)x^2}{(1 - ax)^2}.$$

Тогда схема (2) будет L -устойчивой, если $p_1 = a$. Подставляя это соотношение в условия порядка, имеем:

$$p_1 = a, \quad p_2 = 1 - a, \tag{3}$$

где a определяется из условия L -устойчивости $a^2 - 2a + 0.5 = 0$. Сравнивая ряды для точного и приближенного решений до членов с h^3 , получим, что локальная ошибка δ_n численной схемы (2), (3) имеет вид

$$\delta_n = h^3 \left[\left(a - \frac{1}{3}\right) f'^2 f + \frac{1}{6} f'' f^2 - \frac{1}{2} B_n f \right] + O(h^4).$$

Уравнение устойчивости $a^2 - 2a + 0.5 = 0$ имеет два корня $a_1 = 1 - 0.5\sqrt{2}$ и $a_2 = 1 + 0.5\sqrt{2}$. Выберем $a = a_1$, так как в этом случае меньше коэффициент в главном члене $h^3 f'^2 f$ локальной ошибки. Рассмотрим одновременно схему типа Розенброка с двумя вычислениями правой части задачи (1) на каждом шаге, т. е.

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2, \quad D_n k_1 = hf(y_n), \quad D_n k_2 = hf(y_n + \beta k_1). \tag{4}$$

Согласно [4] при $\beta = a$ коэффициенты (3) обеспечивают второй порядок точности схемы (4), а условие $a^2 - 2a + 0.5 = 0$ — ее L -устойчивость. Из [1, 4] следует, что численная формула (4) с коэффициентами (3) является одной из наиболее удачных среди двухстадийных методов Розенброка. Локальная ошибка (4) имеет вид

$$\delta_n^{roz} = h^3 \left[\left(a - \frac{1}{3}\right) f'^2 f + \left(\frac{1}{6} + \frac{1 - \sqrt{2}}{2} a\right) f'' f^2 - a B_n f \right] + O(h^4).$$

Построенная здесь схема (2), (3), так же как и (4) с коэффициентами (3), обладает вторым порядком точности и L -устойчивостью, а их локальные ошибки различаются незначительно. В то же время (2)



требует на каждом шаге на одно вычисление функции f меньше (4) при прочих равных затратах, что делает ее предпочтительнее.

Контроль точности вычислений численной схемы (2) построим по аналогии [4]. Для этого введем обозначение

$$v(j_n) = D_n^{1-j_n}(k_2 - k_1),$$

где k_1 и k_2 вычисляются по формулам (2). Тогда согласно [4] для контроля точности на каждом шаге нужно проверять неравенство

$$\|v(j_n)\| \leq \varepsilon, 1 \leq j_n \leq 2,$$

где ε — требуемая точность расчетов, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^N , а переменная j_n выбирается наименьшей, при которой выполняется данное неравенство.

Отметим одну важную особенность построенной оценки ошибки $v(j_n)$. Схема (2) является L -устойчивой, т.е. для ее функции устойчивости $Q(x)$ имеет место соотношение $Q(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Так как для точного решения $y(t_{n+1}) = \exp(x)y(t_n)$ задачи $y' = \lambda y$, $\text{Re}(\lambda) < 0$, выполняется аналогичное свойство, то естественным будет требование стремления к нулю оценки ошибки при $x \rightarrow -\infty$. Однако для $v(1)$ это свойство не выполняется — данная оценка ведет себя A -устойчивым образом. С целью исправления асимптотического поведения ошибки вместо $v(1)$ введена оценка $v(j_n)$, $1 \leq j_n \leq 2$. В этом случае поведение оценки ошибки при $j_n = 2$ будет согласовано с поведением точного решения тестовой задачи при $x \rightarrow -\infty$. Подчеркнем, что в смысле главного члена оценки $v(1)$ и $v(2)$ совпадают. Использование $v(j_n)$ фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат. Это связано с тем, что $v(j_n)$ при $j_n = 2$ проверяется только в том случае, если оно нарушено при $j_n = 1$. Такая ситуация встречается достаточно редко, в основном при быстром росте величины шага интегрирования. Однако это позволяет уменьшить количество неоправданных повторных вычислений решения (возвратов).

Оценку максимального собственного числа $w_{n,0} = h\lambda_{n,max}$ матрицы Якоби системы (1), необходимую для перехода на явную формулу, оценим по формуле

$$w_{n,0} = h \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\| = h \cdot \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right|.$$

Ниже данная оценка будет применяться для автоматического выбора численной схемы — явная или L -устойчивая численная формула.

2. МЕТОД ЧЕСКИНО

Для решения (1) рассмотрим явную формулу типа Рунге–Кутты вида

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + p_{m1}k_1 + p_{m2}k_2 + p_{m3}k_3 + p_{m4}k_4, \\ k_1 &= hf(t_n, y_n), \quad k_2 = hf(t_n + 0.25h, y_n + 0.25k_1), \quad k_3 = hf(t_n + 0.5h, y_n + 0.5k_2), \\ k_4 &= hf(t_n + h, y_n + k_1 - 2k_2 + 2k_3), \end{aligned} \quad (5)$$

где h — шаг интегрирования, k_i , $1 \leq i \leq 4$, — стадии метода, p_{mi} , $1 \leq i \leq 4$, — числовые коэффициенты, m — порядок точности метода. При коэффициентах

$$p_{21} = 1, \quad p_{22} = -2, \quad p_{23} = 2, \quad p_{24} = 0, \quad (6)$$

схема (5), (6) имеет второй порядок точности [12]. Схема (5) с коэффициентами $p_{41} = p_{44} = 1/6$, $p_{42} = 0$ и $p_{43} = 2/3$ имеет четвертый порядок. Тогда для контроля точности схемы второго порядка можно использовать оценку ошибки $\delta_{n,2}$ вида

$$\delta_{n,2} = \sum_{i=1}^N (p_{4i} - p_{2i})k_i.$$

В результате для контроля точности вычислений применяется неравенство $\|\delta_{n,2}\| \leq \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^N , ε — требуемая точность расчетов. Учитывая, что имеет место соотношение



$\delta_{n,2} = O(h^3)$, шаг h^{ac} по точности выбирается по формуле $h^{ac} = qh$, где q находится из уравнения $q^3 \|\delta_{n,2}\| = \varepsilon$. Если $q < 1$, то происходит повторное вычисление решения (возврат) с шагом h , равным qh . В противном случае вычисляется приближенное решение, а прогнозируемый шаг h_{n+1} вычисляется по формуле $h_{n+1} = qh$. Неравенство $\|\delta_{n,2}\| \leq \varepsilon$ хорошо зарекомендовало себя при решении многих практических задач, ниже оно будет использоваться здесь.

3. КОНТРОЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ЧЕСКИНО

Построим неравенство для контроля устойчивости схемы (2). Для этого применим (2) для решения линейной задачи $y' = Ay$ с постоянной матрицей A . Первые три стадии k_1 , k_2 и k_3 применительно к данной задаче имеют вид

$$k_1 = Xy_n, \quad k_2 = [X + 0.25X^2]y_n, \quad k_3 = [X + 0.5X^2 + 0.125X^3]y_n,$$

где $X = hA$. Нетрудно видеть, что имеют место соотношения

$$k_1 - 2k_2 + k_3 = 0.125X^3y_n, \quad 0.5(k_2 - k_1) = 0.125X^2y_n.$$

Теперь оценку максимального собственного числа $w_{n,1}$ матрицы Якоби системы (1) можно вычислить степенным методом [7]. Введем обозначение

$$w_{n,1} = 2 \cdot \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \frac{|(k_1 - 2k_2 + k_3)_i|}{|(k_2 - k_1)_i|} \right\}. \quad (7)$$

Тогда для контроля устойчивости метода Ческино можно применять неравенство $w_{n,1} \leq D$, где число D ограничивает интервал устойчивости.

Устойчивость методов типа Рунге–Кутты обычно исследуется на скалярном тестовом уравнении $y' = \lambda y$, где λ есть произвольное комплексное число, $\text{Re}(\lambda) < 0$. Смысл λ — некоторое собственное число матрицы Якоби задачи (1). Применяя (5), (6) для решения $y' = \lambda y$, получим, что функция устойчивости $Q_2(x)$ метода второго порядка точности имеет вид $Q_2(x) = 1 + x + 0.5x^2 + 0.125x^3$, $x = h\lambda$. Интервал устойчивости метода второго порядка равен двум, а метода четвертого порядка приблизительно равен 2.8. Поэтому в неравенстве $w_{n,1} \leq D$ положим $D = 2$. Учитывая, что $w_{n,1} = O(h)$, шаг h^{st} по устойчивости можно выбирать по формуле $h^{st} = rh$, где r вычисляется из равенства $rw_{n,1} = 2$.

Оценка (7) является грубой, потому что максимальное собственное число не обязательно сильно отделено от остальных, в степенном методе применяется мало итераций и дополнительные искажения вносит нелинейность задачи (1). Поэтому контроль устойчивости используется как ограничитель на размер шага интегрирования. В результате прогнозируемый шаг вычисляется по формуле

$$h_{n+1} = \max \left[h_n, \min(h^{ac}, h^{st}) \right], \quad (8)$$

где h_n есть последний успешный шаг интегрирования.

Формула (8) применяется для прогноза шага интегрирования h_{n+1} после успешного вычисления решения с предыдущим шагом h_n , и поэтому фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат. Если шаг по устойчивости меньше последнего успешного, то он уменьшен не будет, потому что причиной этого может быть грубость оценки максимального собственного числа. Однако шаг не будет и увеличен, потому что не исключена возможность неустойчивости численной схемы. Формула (8) позволяет стабилизировать поведение шага на участке установления решения, где определяющую роль играет устойчивость.

Из результатов расчетов алгоритмом интегрирования с контролем точности и дополнительным контролем устойчивости следует, что фактическая точность вычисления решения на интервале установления значительно выше задаваемой. Это естественно, потому что старые ошибки подавляются за счет контроля устойчивости, а новые ошибки невелики за счет малости производных решения. В такой ситуации эффективнее проводить вычисления методом более низкого порядка точности с широкой областью устойчивости.



4. МЕТОД ПЕРВОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Для численного решения задачи (1) рассмотрим схему вида

$$y_{n+1} = y_n + r_1 k_1 + r_2 k_2 + r_3 k_3 + r_4 k_4, \quad (9)$$

где стадии k_i , $1 \leq i \leq 4$, вычислены по формулам (5), а коэффициенты r_i , $1 \leq i \leq 4$, подлежат определению. Заметим, что при $r_1 = 1$, $r_2 = -2$, $r_3 = 2$ и $r_4 = 0$ численная формула (9) имеет второй порядок точности и совпадает с (5) с коэффициентами (6). Построим менее точную схему с максимальным интервалом устойчивости. Для этого применим (9) для решения скалярного тестового уравнения $y' = \lambda y$. Получим $y_{n+1} = Q(x)y_n$, где функция устойчивости $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x) = 1 + (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)x + (0.25r_2 + 0.5r_3 + r_4)x^2 + (0.125r_3 + 0.5r_4)x^3 + 0.25r_4x^4.$$

Требование первого порядка точности приводит к соотношению $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1$, которое ниже будем считать выполненным. Оставшиеся коэффициенты r_i выберем таким образом, чтобы метод (9) имел максимальный интервал устойчивости. Для этого рассмотрим многочлен Чебышева $T_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1$ на промежутке $[-1, 1]$. Проведем замену переменных, полагая $z = 1 - 2x/\gamma$. Получим:

$$T_4(x) = 1 - 32x/\gamma + 160x^2/\gamma^2 - 256x^3/\gamma^3 + 128x^4/\gamma^4,$$

при этом отрезок $[\gamma, 0]$ отображается на $[-1, 1]$. Нетрудно показать, что среди всех многочленов $P_4(x)$ вида $P_4(x) = 1 + x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$ для $T_4(x)$ неравенство $|T_4(x)| \leq 1$ выполняется на максимальном интервале $[\gamma, 0]$, $\gamma = -32$. Потребуем совпадения коэффициентов $Q(x)$ и $T_4(x)$ при $\gamma = -32$. Это приводит к соотношениям

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1, \quad 0.25r_2 + 0.5r_3 + r_4 = 5/32, \quad 0.125r_3 + 0.5r_4 = 1/128, \quad 0.25r_4 = 18192.$$

В результате имеем коэффициенты

$$r_1 = 895/2048, \quad r_2 = 257/512, \quad r_3 = 31/512, \quad r_4 = 1/2048$$

метода первого порядка точности с максимальным интервалом устойчивости, локальная ошибка δ_n которого имеет вид $\delta_n = 9h^2 f' f / 32 + O(h^3)$. Для контроля точности численной формулы первого порядка будем использовать оценку локальной ошибки. Учитывая, что имеет место $k_2 - k_1 = 0.25h^2 f'_n f_n + O(h^3)$ и вид локальной ошибки, неравенство для контроля точности записывается в виде $\|k_2 - k_1\| \leq \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в R^N , ε — требуемая точность расчетов.

Интервал устойчивости численной схемы (9) равен 32. Поэтому для ее контроля устойчивости можно применять неравенство $w_{n,1} \leq 32$, где $w_{n,1}$ задается (7).

5. АЛГОРИТМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

На основе построенных явных методов первого и второго порядков точности легко сформулировать алгоритм переменного порядка и шага. Расчеты всегда начинаются методом второго порядка как более точным. Переход на схему первого порядка осуществляется при нарушении неравенства $w_{n,1} \leq 2$. Обратный переход на метод второго порядка происходит в случае выполнения неравенства $w_{n,1} \leq 2$. При расчетах по методу первого порядка, наряду с точностью, контролируется устойчивость, а выбор прогнозируемого шага производится по аналогии с методом второго порядка точности по формуле типа (8).

В случае использования схемы (2) формулировка алгоритма интегрирования также не вызывает трудностей. Нарушение неравенства $w_{n,1} \leq 32$ вызывает переход на схему (2). Передача управления явным методам происходит в случае выполнения неравенства $w_{n,0} \leq 32$, где оценка $w_{n,0}$ вычисляется через норму матрицы Якоби.

Численную формулу (2) без потери порядка точности можно применять с замораживанием матрицы D_n . Отметим, что при замораживании матрицы Якоби величина шага интегрирования остается постоянной с целью сохранения свойства L -устойчивости метода (2). Попытка замораживания матрицы D_n осуществляется после каждого успешного шага. Размораживание матрицы происходит в следующих случаях: 1) нарушение точности расчетов, 2) если число шагов с замороженной матрицей достигло заданного максимального числа i_h , 3) если прогнозируемый шаг больше последнего



успешного в q_h раз. Числами i_h и q_h можно влиять на перераспределение вычислительных затрат. При $i_h = 0$ и $q_h = 0$ замораживания не происходит, при увеличении i_h и q_h число вычислений правой части возрастает, а количество обращений матрицы Якоби убывает. В расчетах использовались значения $i_h = 10$ и $q_h = 2$. Норма $\|\varphi\|$ в неравенствах для контроля точности вычисляются по формуле

$$\|\varphi\| = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ |\varphi_i| / (|y_n^i| + r) \right\},$$

где i — номер компоненты, r — положительный параметр. Если по i -й компоненте решения выполняется неравенство $|y_n^i| < r$, то контролируется абсолютная ошибка $r\varepsilon$, в противном случае — относительная ошибка ε .

Ниже построенный алгоритм переменного порядка и шага, а также с автоматическим выбором явной или L -устойчивой численной схемы будем называть MK2CES24.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты проводились с задаваемой точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ на PC Intel(R) Core i7-3770S CPU@3.10GHz с двойной точностью. Невысокая точность расчетов связана с тем, что в построенном алгоритме применяются схемы низкого порядка точности, и поэтому данным методом осуществлять расчеты с более высокой точностью нецелесообразно. Сравнение эффективности проводилось с известным методом Гира в реализации А. Хиндмарша DLSODE из коллекции ODEPACK [13] и алгоритмом RKMK2 [11] на основе L -устойчивого и явных двухстадийных методов. В качестве тестовой задачи выбрана модель реакции Белоусова–Жаботинского, для которой на промежутке интегрирования характерно наличие трех переходных процессов. Тестовый пример имеет вид

$$\begin{aligned} y_1' &= 77.27(y_2 - y_1y_2 + y_1 - 8.375 \cdot 10^{-6}y_1^2), \\ y_2' &= (-y_2 - y_1y_2 + y_3)/77.27, \quad y_3' = 0.161(y_1 - y_3), \\ t \in [0, 300], \quad y_1(0) &= 4, \quad y_2(0) = 1.1, \quad y_3(0) = 4, \quad h_0 = 2 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Расчеты проводились с численной матрицей Якоби. Сравнение эффективности проводилось по числу вычислений правой части ifu и матрицы Якоби ija задачи (10) на интервале интегрирования. Решение (10) алгоритмом MK2CES24 вычислено с затратами $ifu = 1\,029$ и $ija = 49$. При вычислениях по L -устойчивой схеме (2) затраты $ifu = 926$ и $ija = 88$. Фактическая точность расчетов в конце интервала интегрирования не хуже задаваемой. Решение (10) удалось вычислить явными методами переменного порядка и шага с затратами $ifu = 978\,524$. Данная задача слишком жесткая для явных методов. Однако результаты расчетов приведены здесь с целью демонстрации принципиальной возможности применения явных методов с контролем устойчивости и переменным порядком для решения достаточно жестких примеров. Явные методы на некоторых жестких задачах большой размерности могут быть эффективнее L -устойчивых методов. Решение данной задачи алгоритмом RKMK2 [11] вычислено с затратами $ifu = 1\,214$ и $ija = 65$. Решение (10) явными методами переменного порядка и шага из алгоритма RKMK2 вычислено с затратами $ifu = 2\,112\,678$.

При расчетах программой DLSODE требуемая точность $\varepsilon = 10^{-2}$ достигается при задаваемой точности $\varepsilon = 10^{-4}$ с затратами $ifu = 1\,129$ и $ija = 107$. При более высокой точности расчетов DLSODE эффективнее построенного алгоритма. Это является следствием низкого порядка точности построенных численных формул.

При задаваемой точности $\varepsilon = 10^{-2}$ алгоритм MK2CES24 более чем в 2 раз эффективнее алгоритма DLSODE по числу декомпозиций матрицы Якоби, в то время как количество вычислений правой части (10) для MK2CES24 и DLSODE различается незначительно. В случае большой размерности задачи (1) построенный алгоритм интегрирования по времени счета может быть эффективнее DLSODE.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенный алгоритм MK2CES42 предназначен для расчетов с небольшой точностью — порядка 1% и ниже. В этом случае достигается его максимальная эффективность. В MK2CES42 с помощью признака можно задавать различные режимы: 1) явными методами первого или второго порядков



точности с контролем или без контроля устойчивости; 2) явными методами с переменным порядком и шагом; 3) L -устойчивым методом с замораживанием или без замораживания аналитической или численной матрицы Якоби; 4) с автоматическим выбором численной схемы. Все это позволяет применять данный алгоритм для решения как жестких, так и нежестких задач. При расчетах с автоматическим выбором численной схемы вопрос о том, является ли задача жесткой или нет, перекладывается на алгоритм интегрирования.

Использование неравенства для контроля устойчивости фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат, потому что оценка максимального собственного числа матрицы Якоби системы (1) осуществляется через ранее вычисленные стадии и не приводит к росту числа вычислений функции f . Такая оценка получается грубой. Однако применение контроля устойчивости в качестве ограничителя на рост шага позволяет избежать негативных последствий грубости оценки. Более того, в некоторых случаях это приводит к нестандартно высокому повышению эффективности алгоритма. На участке установления за счет контроля устойчивости старые ошибки стремятся к нулю, а новые невелики за счет малости производных решения. В некоторых случаях вместо оценки максимального собственного числа оценивается следующее по порядку. Шаг интегрирования становится больше максимально допустимого, и с таким шагом осуществляется интегрирование до тех пор, пока не нарушается неравенство для контроля точности. Как правило, число таких шагов невелико. Однако величина шага может на порядок превышать максимальный шаг по устойчивости. После нарушения неравенства для контроля точности шаг уменьшается до максимально возможного. Такой эффект может повторяться многократно в зависимости от длины участка установления. В результате средний шаг интегрирования может превышать максимально допустимый.

Применение на участке установления явного метода первого порядка точности с расширенной областью устойчивости позволяет в 16 раз увеличить размер шага интегрирования по сравнению с явным методом второго порядка без увеличения вычислительных затрат. На переходных участках, где определяющую роль играет точность вычислений, более эффективным является метод второго порядка точности, хотя и с небольшой областью устойчивости. Комбинирование методов низкого и высокого порядков с помощью неравенства для контроля устойчивости позволяет повысить эффективность расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00106 и 11-01-00224).

Библиографический список

1. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М. : Мир, 1999. 685 с.
2. Byrne G. D., Hindmarsh A. C. ODE solvers : a review of current and coming attractions // J. of Comput. Physics. 1987. № 70. P. 1–62.
3. Rosenbrock H. H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Computer. 1963. № 5. P. 329–330.
4. Новиков В. А., Новиков Е. А., Юматова Л. А. Замораживание матрицы Якоби в методе типа Розенброка второго порядка точности // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27, № 3. С. 385–390.
5. Новиков Е. А. Построение алгоритма интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений на неоднородных схемах // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 2. С. 272–275.
6. Новиков Е. А. Алгоритм интегрирования жестких задач с помощью явных и неявных методов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 19–27.
7. Новиков В. А., Новиков Е. А. Повышение эффективности алгоритмов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений за счет контроля устойчивости // ЖВМ и МФ. 1985. Т. 25, № 7. С. 1023–1030.
8. Новиков Е. А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск : Наука, 1997. 197 с.
9. Новиков Е. А., Шорников Ю. В. Компьютерное моделирование жестких гибридных систем. Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. 450 с.
10. Новиков Е. А., Шитов Ю. А., Шокин Ю. И. Одношаговые безытерационные методы решения жестких систем // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 6. С. 1310–1314.
11. Новиков А. Е., Новиков Е. А. Численное решение жестких задач с небольшой точностью // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 1. С. 46–56.
12. Ceschino F., Kuntzman J. Numerical solution of initial value problems. New Jersey : Prentice-Hall, Englewood Clis, 1966. 287 p.
13. Hindmarsh A.C. ODEPACK, a systematized collection of ODE solvers // Lawrence Livermore National Laboratory, 1982. Preprint UCRL-88007.



Algorithm Variable Order, Step and the Configuration Variables for Solving Stiff Problems

E. A. Novikov

Institute of Computational Modelling, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia, 660036, Krasnoyarsk, Akademgorodok, novikov@icm.krasn.ru

An inequality for stability control of a Ceschino's scheme of second order of accuracy is constructed. A numerical formula of order one is developed that is based on the stages of the this method and its stability interval is extended to 32. On a base of L-stable (2,1)-scheme and a numerical Ceschino's formula, an algorithm of alternating structure, in which an efficient numerical formula is chosen on an every step by a stability criterion, is constructed. The algorithm is intended for solving stiff and non-stiff problems. There are shown results of calculations, confirming efficiency of this algorithm.

Key words: stiff problem, Ceschino's scheme, (2,1)-method, accuracy and stability control.

References

1. Hairer E., Wanner G. *Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-Algebraic problems*. New York, Springer-Verlag, 1996, 601 p.
2. Byrne G. D., Hindmarsh A. C. ODE solvers : a review of current and coming attractions. *J. of Comput. Physics*, 1987, no. 70, pp. 1–62.
3. Rosenbrock H. H. Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations. *Computer*, 1963, no. 5, pp. 329–330.
4. Novikov V. A., Novikov E. A., Yumatova L. A. Freezing of a matrix of Jacobi in the Rosenbrock method of the second order of accuracy. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1987, vol. 27, no. 3, pp. 385–390 (in Russian).
5. Novikov E. A. Construction of algorithm for the integrating stiff differential equations on nonuniform schemes. *Soviet Math. Dokl.*, 1984, vol. 30, no. 2, pp. 358–361.
6. Novikov E. A. Algorithm of Integrating Stiff Problems Using the Explicit and Implicit Methods. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, no. 4, pp.19–27 (in Russian).
7. Novikov V. A., Novikov E. A. Increase of efficiency of algorithms of integration of the ordinary differential equations at the expense of stability control. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1985, vol. 25, no. 7, pp. 1023–1030 (in Russian).
8. Novikov E. A. *Explicit methods for stiff systems*. Novosibirsk, Nauka, 1997, 197 p. (in Russian).
9. Novikov E. A., Shornikov Yu. V. *Computer modeling of stiff hybrid systems*. Novosibirsk, publishing house NGTU, 2012, 450 p. (in Russian).
10. Novikov E. A., Shitov Yu. A., Shokin Yu. I. One-step iteration-free methods of solving stiff systems. *Soviet Math. Dokl.*, 1989, vol. 38, no. 1, pp. 212–216.
11. Novikov A. E., Novikov E. A. Numerical integration of stiff systems with low accuracy. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 443–452. DOI: 10.1134/S2070048210040046.
12. Ceschino F., Kuntzman J. *Numerical solution of initial value problems*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Clis, 1966, 287 p.
13. Hindmarsh A. C. ODEPACK, a systematized collection of ODE solvers. *Lawrence Livermore National Laboratory*, 1982, preprint UCRL–88007.

УДК 514.133

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ ПЛОСКОСТИ \hat{H}

Л. Н. Ромакина

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, romakinaln@mail.ru

На гиперболической плоскости \hat{H} положительной кривизны в модели Кэли–Клейна исследованы гиперболические параллелограммы. Проведена их классификация, получены метрические соотношения между величинами углов и выражения длин ребер через меры углов при вершинах.

Ключевые слова: гиперболическая плоскость \hat{H} положительной кривизны; параллелограмм; гиперболический параллелограмм.

ВВЕДЕНИЕ

Гиперболическую плоскость \hat{H} положительной кривизны [1–5] рассматриваем в проективной интерпретации Кэли–Клейна как внешнюю относительно овальной линии γ , называемой *абсолютом* плоскости \hat{H} , область проективной плоскости P_2 .



Наличие на \hat{H} двух типов параллельности позволяет выделить три типа параллелограммов этой плоскости. В данной работе исследованы *гиперболические* параллелограммы, все стороны которых являются гиперболическими прямыми. По типу расположения на абсолюте точек сторон проведена классификация параллелограммов. Используемый метод классификации предложен в работах [6, 7] при исследовании n -контуров. Показано, что различные типы положений на абсолюте точек сторон определяют на \hat{H} четыре класса гиперболических параллелограммов. Для параллелограммов каждого класса получены: соотношения между длинами ребер и между внутренними и внешними углами при вершинах; выражения длин ребер через величины гиперболических углов (внешних или внутренних) при вершинах соответствующих ребер.

Приведем используемые в работе основные понятия и формулы.

При выводе метрических формул используем только вещественные координаты действительных точек и прямых в каноническом репере R второго типа [3]. Уравнение абсолюта в репере R в координатах текущей точки (прямой) имеет вид

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0 \quad (4X_1X_2 - X_3^2 = 0). \quad (1)$$

Для координат (m_i) , $i = 1, 2, 3$, собственной для \hat{H} точки M в репере R выполняется неравенство

$$m_1m_2 - m_3^2 < 0. \quad (2)$$

Значение квадратичной формы $\Phi = 4X_1X_2 - X_3^2$ от координат (a_i) действительной прямой a назовем *характеристикой* данных координат прямой в заданном репере: $\Phi_a(a_i) = 4a_1a_2 - a_3^2$. Если в репере R координаты (a_i) и (b_i) задают одну прямую a , то согласно определению проективных координат существует $\lambda \neq 0$ такое, что для всех индексов i выполняется равенство $b_i = \lambda a_i$. Следовательно, характеристики $\Phi_a(a_i)$, $\Phi_a(b_i)$ координат (a_i) и (b_i) прямой a в репере R связаны условием $\Phi_a(b_i) = \lambda^2 \Phi_a(a_i)$ и являются вещественными числами одного знака. Каждая характеристика координат эллиптической, гиперболической и параболической прямой a в репере R удовлетворяет соответственно условию

$$\Phi_a > 0, \quad \Phi_a < 0, \quad \Phi_a = 0. \quad (3)$$

Пара собственных для \hat{H} точек гиперболической или параболической прямой определяет на этой прямой отрезок и пару лучей. Отрезки гиперболических прямых являются измеримыми на \hat{H} . Если собственные для плоскости \hat{H} точки A, B принадлежат гиперболической прямой, то прямая AB содержит две действительные точки абсолютной линии γ , обозначим их как K_1, K_2 . Сложное отношение (ABK_1K_2) четверки точек прямой является инвариантом группы G . Число $|AB| = \frac{\rho}{2} |\ln(ABK_1K_2)|$, где $\rho, \rho \in \mathbb{R}_+$, — радиус кривизны плоскости \hat{H} , назовем *расстоянием* между точками A, B и *длиной* отрезка AB .

Расстояние между точками $A(a_i), B(b_i)$, $i = 1, 2, 3$, гиперболической прямой в репере R можно вычислить по формуле

$$\operatorname{ch} \frac{|AB|}{\rho} = \pm \frac{a_1b_2 + a_2b_1 - 2a_3b_3}{2\sqrt{a_1a_2 - a_3^2}\sqrt{b_1b_2 - b_3^2}}. \quad (4)$$

Пучок прямых плоскости \hat{H} назовем *гиперболическим (эллиптическим)*, если его центр — внешняя (внутренняя) относительно абсолюта точка. *Параболическим* пучком назовем пучок с центром на абсолюте. Прямые, принадлежащие гиперболическому (эллиптическому) пучку, назовем *пересекающимися (расходящимися)* на \hat{H} . Прямые параболического пучка назовем *параллельными*.

Пара прямых на плоскости \hat{H} в зависимости от типов прямых в паре и от типа содержащего данные прямые пучка может определять 15 типов углов плоскости \hat{H} [4]. Определим типы углов, используемых в данной работе.

Две гиперболические пересекающиеся прямые a и b разбивают плоскость \hat{H} на два *вертикальных гиперболических угла*, симметричных относительно общей точки прямых a, b , и *смежный* с каждым из этих углов *гиперболический псевдоугол*.

Параллельные гиперболические прямые a и b определяют две связанные области на \hat{H} . Ту область, которая не содержит (содержит) полярную общую точку прямых a и b относительно абсолюта назовем *полосой (псевдополосой)* плоскости \hat{H} между прямыми a и b .



Гиперболическая a и эллиптическая b прямые разбивают плоскость \hat{H} на две связные части. Каждую из них назовем *квазиуглом* между прямыми a, b . По отношению друг к другу эти части назовем *смежными*.

Пусть гиперболическая a и эллиптическая b прямые образуют смежные квазиуглы ν_1, ν_2 . Пара прямых a, b в пучке с центром во внешней относительно абсолюта точке K разделяет пару действительных абсолютных касательных k_1, k_2 . Следовательно, $(abk_1k_2) \in \mathbb{R}_-$. Тогда выполняются равенства

$$\ln(abk_1k_2) = \pi i + \ln |(abk_1k_2)|, \quad \ln(bak_1k_2) = \pi i - \ln |(abk_1k_2)|,$$

где функция $w = \ln z$ — главное значение логарифмической функции $w = \text{Ln } z$:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Числа $[\pi i \pm \ln |(abk_1k_2)|] / 2$, где $\ln |(abk_1k_2)| \in \mathbb{R}$, назовем *мерами* или *величинами* квазиуглов ν_1, ν_2 .

Если прямые a, b гармонически разделяют пару k_1, k_2 , т.е. $(abk_1k_2) = -1$, то мера квазиугла между ними равна $\pi i / 2$. Прямые a, b в этом случае назовем *ортогональными*. Обозначение: $a \perp b$.

Пусть пересекающиеся гиперболические прямые a, b образуют вертикальные гиперболические углы ν_1, ν_2 и смежный с каждым из этих углов гиперболический псевдоугол ψ . Пара прямых a, b в пучке с центром в собственной для \hat{H} точке K не разделяет пары абсолютных касательных k_1, k_2 , т.е. $(abk_1k_2) \in \mathbb{R}_+$.

Число $v = \frac{1}{2} |\ln(abk_1k_2)|$, $v \in \mathbb{R}_+$, назовем *мерой* или *величиной* гиперболического угла ν_1 (ν_2).

Если непараболические прямые a, b принадлежат параболическому пучку, то касательные к абсолюту, проведенные через точку K , совпадают: $k_1 = k_2$. В этом случае $(abk_1k_2) = 1$, и $\ln(abk_1k_2) = 0$, т.е. вычисленная формально мера полосы (псевдополосы), определенной параллельными гиперболическими прямыми, равна нулю. Следовательно, пара параллельных гиперболических прямых не имеет инварианта относительно группы G .

Меру \hat{ab} угла между неизотропными пересекающимися прямыми $a(a_i), b(b_i), i = 1, 2, 3$, в репере R можно выразить формулой

$$\text{ch } \hat{ab} = \pm \frac{2a_1b_2 + 2a_2b_1 - a_3b_3}{\sqrt{4a_1a_2 - a_3^2} \sqrt{4b_1b_2 - b_3^2}}. \quad (5)$$

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

Четырехвершинником плоскости \hat{H} назовем совокупность четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и четырех отрезков (эллиптических, гиперболических или параболических прямых), циклически соединяющих эти точки. Данные точки назовем *вершинами*, отрезки — *ребрами*, а прямые, содержащие данные отрезки, — *сторонами* четырехвершинника.

Ребра (стороны), имеющие общую вершину, назовем *смежными* ребрами (сторонами) четырехвершинника. Ребра (стороны), не являющиеся смежными, назовем *противоположными*.

Вершины, принадлежащие (не принадлежащие) одному ребру, назовем *смежными* (*противоположными*) вершинами четырехвершинника. Прямые, проходящие через противоположные вершины четырехвершинника, назовем *диагональными* прямыми данного четырехвершинника.

В данной работе условимся рассматривать только *конечные* четырехвершинники, все точки которых являются собственными на \hat{H} .

Параллелограммом плоскости \hat{H} назовем четырехвершинник, противоположные стороны которого параллельны.

Каждый угол между смежными сторонами параллелограмма будем называть *углом при вершине* данных сторон, указывая при необходимости его тип. Угол при вершине параллелограмма назовем *внутренним*, если он содержит противоположную вершину параллелограмма. Угол, смежный с внутренним углом при вершине, назовем *внешним* углом параллелограмма при данной вершине.

Параллельными в паре на \hat{H} могут быть либо две гиперболические прямые, либо гиперболическая и параболическая прямые. Поэтому все параллелограммы плоскости \hat{H} можно отнести к трем типам. *Гиперболическим* назовем параллелограмм, все стороны которого гиперболические, *параболическим* — параллелограмм, содержащий одну параболическую сторону. Параллелограмм с двумя параболическими сторонами назовем *бипараболическим*.



Классификацию гиперболических параллелограммов проведем, учитывая расположение на абсолюте несобственных точек сторон.

Все стороны гиперболического параллелограмма содержат шесть точек абсолюта, причем две из этих точек, обозначим их через Q, S — точки пересечения противоположных сторон. Все вершины конечного параллелограмма — собственные точки плоскости \hat{H} , поэтому внутренние относительно γ хорды сторон параллелограмма не имеют общих внутренних относительно γ точек. Следовательно, с точностью до обозначения в парах противоположных сторон возможны лишь четыре типа расположения на абсолютной линии γ точек сторон параллелограмма:

- 1) точки Q, S разбивают γ на две дуги, одна из которых содержит концы хорд с общей точкой Q , другая — концы хорд с общей точкой S (рис. 1, а);
- 2) точки Q, S разбивают γ на две дуги, каждая из которых содержит концы одной из хорд, исходящих из Q , и одной из хорд, исходящих из S (рис. 1, б);
- 3) точки Q, S разбивают линию γ на две дуги, одна из которых не содержит точек сторон параллелограмма (рис. 1, в);
- 4) одна из дуг линии γ , образованных точками Q, S , содержит одну из четырех точек сторон параллелограмма на абсолюте (рис. 1, г).

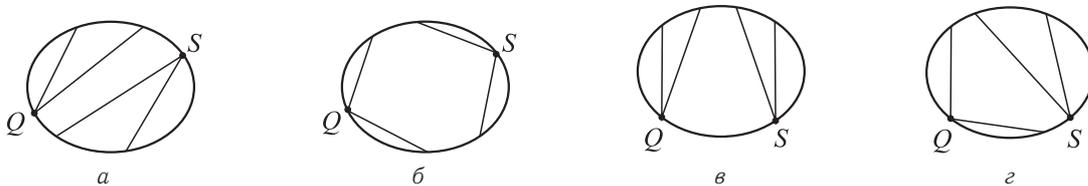


Рис. 1. Типы расположений на абсолютной овальной линии γ точек сторон гиперболического параллелограмма

Соответственно типу 1)–4) расположения точек сторон на абсолюте гиперболический параллелограмм отнесем к классу $h(I), h(II), h(III), h(IV)$.

3. СВОЙСТВА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

Для гиперболического параллелограмма $ABCD$ введем обозначения: $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, a \cap \gamma = \{A_0, Q\}, b \cap \gamma = \{B_0, S\}, c \cap \gamma = \{C_0, Q\}, d \cap \gamma = \{D_0, S\}$. Величину угла при вершине параллелограмма будем обозначать той же буквой, что и вершину, причем величину внешнего угла будем помечать чертой сверху. Обозначать вершины параллелограмма $ABCD$ (рис. 2, 3) условимся так, чтобы правильно расположенными на γ [7] соответственно классу параллелограмма были точки упорядоченной системы:

$$\begin{aligned} h(I) : T_1 &= \{Q, C_0, A_0, S, B_0, D_0\}; & h(II) : T_2 &= \{Q, A_0, B_0, S, D_0, C_0\}; \\ h(III) : T_3 &= \{Q, C_0, A_0, B_0, D_0, S\}; & h(IV) : T_4 &= \{Q, C_0, A_0, B_0, S, D_0\}. \end{aligned} \quad (6)$$

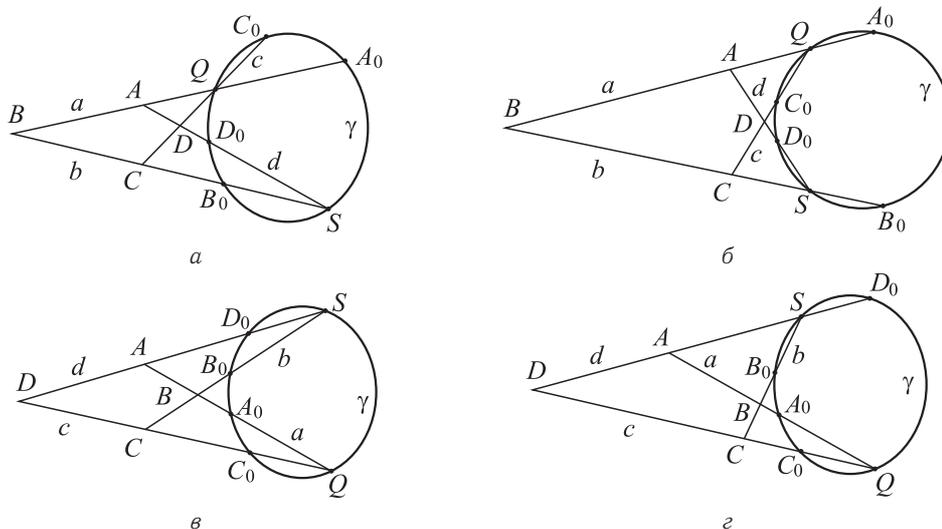


Рис. 2. Гиперболические параллелограммы класса: $h(I)$ (а); $h(II)$ (б), $h(III)$ (в); $h(IV)$ (г)



Каждые две смежные стороны гиперболического параллелограмма образуют два вертикальных гиперболических угла и смежный с ними гиперболический псевдоугол. В метрические соотношения будем включать только меры гиперболических углов при вершинах параллелограммов, внутренних или внешних, учитывая, что они являются действительными положительными числами.

Теорема. Пусть $ABCD$ — гиперболический параллелограмм плоскости \hat{H} действительного радиуса кривизны ρ , точки соответствующей системы (6) которого правильно расположены на γ . Справедливы следующие утверждения.

1. Диагональная прямая BD в гиперболическом параллелограмме каждого класса является гиперболической. Диагональная прямая AC параллелограмма класса $h(II)$ является эллиптической. В параллелограмме класса $h(I)$, $h(III)$, $h(IV)$ диагональная прямая AC может быть любого типа.

2. Внутренние углы параллелограмма при вершинах A , C (B , D) являются гиперболическими псевдоуглами (углами).

3. Соответственно классу параллелограмма величины гиперболических углов при вершинах внешних \bar{A} , \bar{C} и внутренних B , D связаны следующими условиями:

$$h(I) : \quad \operatorname{sh} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{sh} \frac{\bar{C}}{2} = \operatorname{sh} \frac{B}{2} \operatorname{sh} \frac{D}{2}, \quad \bar{A} < B < \bar{C}, \quad \bar{A} < D < \bar{C}; \quad (7)$$

$$h(II) : \quad \operatorname{sh} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{sh} \frac{\bar{C}}{2} = \operatorname{ch} \frac{B}{2} \operatorname{ch} \frac{D}{2}; \quad (8)$$

$$h(III) : \quad \operatorname{ch} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{ch} \frac{\bar{C}}{2} = \operatorname{ch} \frac{B}{2} \operatorname{ch} \frac{D}{2}, \quad B < \bar{A} < D, \quad B < \bar{C} < D; \quad (9)$$

$$h(IV) : \quad \operatorname{sh} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{ch} \frac{\bar{C}}{2} = \operatorname{ch} \frac{B}{2} \operatorname{sh} \frac{D}{2}, \quad B < \bar{C}, \quad \bar{A} < D. \quad (10)$$

4. Соответственно классу параллелограмма длины его ребер зависят от мер гиперболических углов при вершинах следующим образом:

$$h(I) : \quad \begin{aligned} |AB| &= \rho \ln \left(\operatorname{th} \frac{B}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \right), & |BC| &= \rho \ln \left(\operatorname{th} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2} \right), \\ |CD| &= \rho \ln \left(\operatorname{th} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2} \right), & |AD| &= \rho \ln \left(\operatorname{th} \frac{D}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \right); \end{aligned} \quad (11)$$

$$h(II) : \quad \begin{aligned} |AB| &= \rho \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2} \right), & |BC| &= \rho \ln \left(\operatorname{cth} \frac{B}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{C}}{2} \right), \\ |CD| &= \rho \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2} \right), & |AD| &= \rho \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2} \right); \end{aligned} \quad (12)$$

$$h(III) : \quad \begin{aligned} |AB| &= \rho \ln \left(\operatorname{th} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2} \right), & |BC| &= \rho \ln \left(\operatorname{th} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2} \right), \\ |CD| &= \rho \ln \left(\operatorname{th} \frac{D}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{C}}{2} \right), & |AD| &= \rho \ln \left(\operatorname{th} \frac{D}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \right); \end{aligned} \quad (13)$$

$$h(IV) : \quad \begin{aligned} |AB| &= \rho \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2} \right), & |BC| &= \rho \ln \left(\operatorname{th} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2} \right), \\ |CD| &= \rho \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2} \right), & |AD| &= \rho \ln \left(\operatorname{th} \frac{D}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Присоединим к гиперболическому параллелограмму $ABCD$ канонический репер $R = \{Q, S, A_3, A_0\}$ второго типа, где A_3 — полюс прямой QS относительно абсолюта. Найдем координаты точек системы (6), вершин, сторон и диагональных прямых параллелограмма $ABCD$ в репере R .

Точки A , B прямой $a = QA_0(0 : 1 : -1)$ можно задать координатами: $A(u : 1 : 1)$, $B(v : 1 : 1)$, $u, v \in \mathbb{R}$. Точка C принадлежит прямой $b = SB(1 : 0 : -v)$. Присвоим точке C координаты $(v : t : 1)$, где $t \in \mathbb{R}$. Тогда точка D пересечения прямых $d = AS(1 : 0 : -u)$, $c = CQ(0 : 1 : -t)$ имеет в R координаты $(u : t : 1)$. Итак,

$$\begin{aligned} Q(1 : 0 : 0), & \quad S(0 : 1 : 0), & \quad A_0(1 : 1 : 1), & \quad A(u : 1 : 1), \\ B(v : 1 : 1), & \quad C(v : t : 1), & \quad D(u : t : 1), & \quad t, u, v \in \mathbb{R}; \end{aligned} \quad (15)$$



$$\begin{aligned} a(0 : 1 : -1), \quad b(1 : 0 : -v), \quad c(0 : 1 : -t), \quad d(1 : 0 : -u), \\ AC(1 - t : v - u : tu - v), \quad BD(1 - t : u - v : tv - u). \end{aligned} \quad (16)$$

Вершины параллелограмма являются собственными на \widehat{H} точками, поэтому их координаты из (15) в силу неравенства (2) удовлетворяют условиям:

$$u < 1, \quad v < 1, \quad tu < 1, \quad tv < 1. \quad (17)$$

Точки абсолюта (1) на сторонах параллелограмма, не входящие в репер R , имеют координаты

$$B_0(v^2 : 1 : v), \quad C_0(1 : t^2 : t), \quad D_0(u^2 : 1 : u). \quad (18)$$

Потребуется также координаты прямых

$$SA_0(1 : 0 : -1), \quad SC_0(t : 0 : -1), \quad QB_0(0 : v : -1), \quad QD_0(0 : u : -1). \quad (19)$$

Определим допустимые значения параметров t, u, v , при которых параллелограмм $ABCD$ относится к классу $h(I), h(II), h(III), h(IV)$.

Положение на абсолюте точек системы (6) можно характеризовать числами:

$$\begin{aligned} I_1 = ((SA_0)b(SC_0)(SQ)), \quad I_2 = (d(SQ)b(SA_0)) = (AQBA_0), \quad I_3 = (a(QS)c(QB_0)) = (BSCB_0), \\ I_4 = (b(SQ)d(SC_0)) = (CQDC_0), \quad I_5 = (c(QS)a(QD_0)) = (DSAD_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Для гиперболических параллелограммов соответственно их классу в принятых обозначениях получаем следующие неравенства для чисел (20):

$$\begin{aligned} h(I) : \quad I_1 > 0, \quad I_2 > 0, \quad I_3 > 0, \quad I_4 < 0, \quad I_5 < 0; \\ h(II) : \quad I_1 > 0, \quad I_2 > 0, \quad I_3 < 0, \quad I_4 > 0, \quad I_5 < 0; \\ h(III) : \quad I_1 > 0, \quad I_2 > 0, \quad I_3 < 0, \quad I_4 < 0, \quad I_5 > 0; \\ h(IV) : \quad I_1 > 0, \quad I_2 > 0, \quad I_3 < 0, \quad I_4 < 0, \quad I_5 < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

В репере R числа (20) в координатах (15), (16), (18), (19) имеют выражения

$$I_1 = \frac{t-1}{tv-1}, \quad I_2 = \frac{v-u}{1-u}, \quad I_3 = \frac{v(1-t)}{v-1}, \quad I_4 = \frac{t(v-u)}{tv-1}, \quad I_5 = \frac{u(t-1)}{tu-1}. \quad (22)$$

С учетом неравенств (17), (21) и выражений (22) получаем допустимые значения параметров t, u, v координат в присоединенном репере R вершин гиперболических параллелограммов соответствующего класса:

$$\begin{aligned} h(I) : \quad t \in (0; 1), \quad u < 0, \quad v < 0, \quad u < v; \\ h(II) : \quad t < 0, \quad u < 0, \quad v \in (0; 1), \quad tu < 1; \\ h(III) : \quad t \in (0; 1), \quad u \in (0; 1), \quad v \in (0; 1), \quad u < v; \\ h(IV) : \quad t \in (0; 1), \quad u < 0, \quad v \in (0; 1). \end{aligned} \quad (23)$$

При любых значениях (23) параметров t, u, v характеристика координат прямой BD (16) гиперболического параллелограмма каждого класса меньше нуля: $\Phi_{BD} = -4(1-t)(v-u) - (u-tv)^2 < 0$, следовательно, в гиперболическом параллелограмме любого класса диагональная прямая BD является гиперболической.

Для координат (16) диагональной прямой AC : $\Phi_{AC} = 4(1-t)(v-u) - (tu-v)^2$.

При любых значениях (23) параметров t, u, v в параллелограмме класса $h(II)$:

$$\Phi_{AC} = 4(1-t)(v-u) - (tu-v)^2 = v(4-v) + tu(4-tu) + u(tv-4) + tv(u-4) > 0.$$

Следовательно, диагональная прямая AC в гиперболическом параллелограмме класса $h(II)$ является эллиптической.

Для параллелограмма класса $h(I), h(III), h(IV)$ зафиксируем по три набора $(t; u; v)$ параметров из допустимых значений (23):

$$\begin{aligned} h(I) : \quad \left(\frac{1}{3}; -3; -1\right), \quad \left(\frac{8}{9}; -3; -1\right), \quad \left(\frac{7}{9}; -3; -1\right); \\ h(III) : \quad \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{19}{20}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right), \quad \left(4\sqrt{3}-6; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right); \\ h(IV) : \quad \left(\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{4}{5}; -1; \frac{1}{2}\right), \quad \left(3\sqrt{2}-\frac{7}{2}; -1; \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (24)$$



Характеристики координат (16) прямой AC при наборах из (24) равны:

$$\begin{aligned} h(I) : & \quad \Phi_{AC} = 12, & \Phi_{AC} = -153, & \Phi_{AC} = 0; \\ h(III) : & \quad \Phi_{AC} = 23, & \Phi_{AC} = -121, & \Phi_{AC} = 0; \\ h(IV) : & \quad \Phi_{AC} = 8, & \Phi_{AC} = -49, & \Phi_{AC} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Наборы (25) характеристик координат (16) прямой AC согласно условиям (3) доказывают, что в гиперболическом параллелограмме класса $h(I)$, $h(III)$, $h(IV)$ диагональная прямая AC может быть любого типа. Утверждение 1 доказано.

Чтобы доказать второе утверждение теоремы, построим параболические прямые k_A, k_B, k_C, k_D , проходящие через соответствующие вершины параллелограмма. Характеристики координат параболической прямой равны нулю, поэтому в репере R одна из двух касательных к абсолюту, проходящих через каждую вершину параллелограмма, может быть задана соответственно координатами:

$$\begin{aligned} k_A \left((\sqrt{1-u} - 1)^2 : 1 : 2(\sqrt{1-u} - 1) \right), & \quad k_B \left((\sqrt{1-v} - 1)^2 : 1 : 2(\sqrt{1-v} - 1) \right), \\ k_C \left((\sqrt{1-tv} - 1)^2 : v^2 : 2v(\sqrt{1-tv} - 1) \right), & \quad k_D \left((\sqrt{1-tu} - 1)^2 : u^2 : 2u(\sqrt{1-tu} - 1) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

На основании условий (23), применяя координаты (16), (26), находим:

$$\begin{aligned} J_1 = (ad(AC)k_A) &= \frac{(1-t)(v-u)^{-1}}{(\sqrt{1-u}-1)^2} > 0, & J_2 = (cb(AC)k_C) &= \frac{v^2(1-t)(v-u)^{-1}}{(\sqrt{1-tv}-1)^2} > 0, \\ J_3 = (ab(BD)k_B) &= \frac{(1-t)(u-v)^{-1}}{(\sqrt{1-v}-1)^2} < 0, & J_4 = (cd(BD)k_D) &= \frac{v^2(1-t)(u-v)^{-1}}{(\sqrt{1-tu}-1)^2} < 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Неравенства (27) означают следующее. Прямая AC не разделяет с прямой k_A (k_C) пару прямых a, d (c, b), так как $J_1 > 0$ ($J_2 > 0$). Поэтому прямая AC принадлежит полностью и гиперболическому псевдоуглу между прямыми a, d , и гиперболическому псевдоуглу между прямыми b, c . Следовательно, внутренние углы параллелограмма $ABCD$ при вершинах A, C являются гиперболическими псевдоуглами. Прямая BD разделяет с прямой k_B (k_D) пару прямых a, b (c, d), так как $J_3 < 0$ ($J_4 < 0$). Поэтому прямая BD принадлежит полностью и объединению гиперболических углов между прямыми a, b , и объединению гиперболических углов между прямыми c, d . Следовательно, внутренние углы параллелограмма $ABCD$ при вершинах B, D являются гиперболическими углами. Второе утверждение теоремы доказано.

По формуле (5) выразим через параметры t, u, v величины гиперболических углов, внешних \bar{A}, \bar{C} и внутренних B, D , параллелограмма $ABCD$ при его вершинах:

$$\operatorname{ch} \bar{A} = \epsilon_1 \frac{2-u}{u}, \quad \operatorname{ch} B = \epsilon_2 \frac{2-v}{v}, \quad \operatorname{ch} \bar{C} = \epsilon_3 \frac{2-tv}{tv}, \quad \operatorname{ch} D = \epsilon_4 \frac{2-tu}{tu}, \quad \epsilon_i = \pm 1, \quad i = \bar{1}, \bar{4}. \quad (28)$$

Учитывая, что $\bar{A} \in \mathbb{R}_+, B \in \mathbb{R}_+, \bar{C} \in \mathbb{R}_+, D \in \mathbb{R}_+$, согласно (23) определим числа ϵ_i из выражений (28). Соответственно классу параллелограмма получаем:

$$\begin{aligned} h(I) & : \quad \epsilon_1 = -1, \quad \epsilon_2 = -1, \quad \epsilon_3 = -1 \quad \epsilon_4 = -1; \\ h(II) & : \quad \epsilon_1 = -1, \quad \epsilon_2 = 1, \quad \epsilon_3 = -1 \quad \epsilon_4 = 1; \\ h(III) & : \quad \epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_2 = 1, \quad \epsilon_3 = 1 \quad \epsilon_4 = 1; \\ h(IV) & : \quad \epsilon_1 = -1, \quad \epsilon_2 = 1, \quad \epsilon_3 = 1 \quad \epsilon_4 = -1. \end{aligned} \quad (29)$$

Из равенств (28) при соответствующих значениях чисел ϵ_i (29) для параллелограмма заданного класса находим:

$$h(I) : \quad u = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} \bar{A}}, \quad v = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} B}, \quad tv = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} \bar{C}}, \quad tu = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} D}; \quad (30)$$

$$h(II) : \quad u = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} \bar{A}}, \quad v = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} B}, \quad tv = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} \bar{C}}, \quad tu = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} D}; \quad (31)$$

$$h(III) : \quad u = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} \bar{A}}, \quad v = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} B}, \quad tv = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} \bar{C}}, \quad tu = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} D}; \quad (32)$$

$$h(IV) : \quad u = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} \bar{A}}, \quad v = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} B}, \quad tv = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} \bar{C}}, \quad tu = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} D}. \quad (33)$$



Исключая из равенств (30)–(33) параметры t, u, v , получаем соотношения

$$\begin{aligned} h(I) : & \quad (\operatorname{ch} \bar{A} - 1)(\operatorname{ch} \bar{C} - 1) = (\operatorname{ch} B - 1)(\operatorname{ch} D - 1), \\ h(II) : & \quad (\operatorname{ch} \bar{A} - 1)(\operatorname{ch} \bar{C} - 1) = (\operatorname{ch} B + 1)(\operatorname{ch} D + 1), \\ h(III) : & \quad (\operatorname{ch} \bar{A} + 1)(\operatorname{ch} \bar{C} + 1) = (\operatorname{ch} B + 1)(\operatorname{ch} D + 1), \\ h(IV) : & \quad (\operatorname{ch} \bar{A} - 1)(\operatorname{ch} \bar{C} + 1) = (\operatorname{ch} B + 1)(\operatorname{ch} D - 1), \end{aligned}$$

в силу которых справедливы соответствующие формулы из (7), (8), (9), (10).

Для параллелограмма класса $h(I)$ согласно требованиям (23) имеем: $v > u, tu > u, tv > v, tv > tu$. Записывая данные неравенства для t, u, v , из (30) получаем:

$$\operatorname{ch} \bar{A} < \operatorname{ch} B, \quad \operatorname{ch} \bar{A} < \operatorname{ch} D, \quad \operatorname{ch} B < \operatorname{ch} \bar{C}, \quad \operatorname{ch} D < \operatorname{ch} \bar{C}.$$

Следовательно, справедливы неравенства из (7).

Для параллелограмма класса $h(II)$ требования (23) не дают соответствующих неравенств между величинами гиперболических углов при вершинах.

Для параллелограмма класса $h(III)$ в силу требований (23) имеем: $v > u, tu < u, tv < v, tv > tu$. Записывая данные неравенства для t, u, v , из (32) получаем:

$$\operatorname{ch} \bar{A} > \operatorname{ch} B, \quad \operatorname{ch} \bar{A} < \operatorname{ch} D, \quad \operatorname{ch} B < \operatorname{ch} \bar{C}, \quad \operatorname{ch} D > \operatorname{ch} \bar{C}.$$

Следовательно, справедливы неравенства из (9).

Для параллелограмма класса $h(IV)$ согласно (23): $tu > u, tv < v$. Применив к данным неравенствам разложения (33), получаем:

$$\operatorname{ch} \bar{A} < \operatorname{ch} D, \quad \operatorname{ch} B < \operatorname{ch} \bar{C}.$$

Следовательно, справедливы неравенства из (10). Утверждение 3 теоремы доказано.

По формуле (4), учитывая условия (23), найдем выражения длин ребер параллелограмма $ABCD$ через параметры t, u, v :

$$\operatorname{ch} \frac{|AB|}{\rho} = \frac{2 - u - v}{2\sqrt{1-u}\sqrt{1-v}}, \quad \operatorname{ch} \frac{|BC|}{\rho} = \frac{2 - v - tv}{2\sqrt{1-v}\sqrt{1-tv}}, \quad (34)$$

$$\operatorname{ch} \frac{|CD|}{\rho} = \frac{2 - tu - tv}{2\sqrt{1-tu}\sqrt{1-tv}}, \quad \operatorname{ch} \frac{|AD|}{\rho} = \frac{2 - u - tu}{2\sqrt{1-u}\sqrt{1-tu}}. \quad (35)$$

Запишем первое равенство из (34) в виде

$$\left(\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-v}} \right)^2 - 2 \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-v}} \operatorname{ch} \frac{|AB|}{\rho} + 1 = 0. \quad (36)$$

Для гиперболических параллелограммов каждого класса согласно требованиям из (23) $\sqrt{1-u} > \sqrt{1-v}$. Поэтому из квадратного относительно $(\sqrt{1-u} : \sqrt{1-v})$ уравнения (36) для гиперболических параллелограммов каждого класса получаем:

$$\frac{1-u}{1-v} = e^{2\frac{|AB|}{\rho}}. \quad (37)$$

Согласно требованиям (23) выполняются соответственно неравенства

$$\begin{aligned} h(I) : & \quad 1 - v > 1 - tv, \quad 1 - tu > 1 - tv, \quad 1 - u > 1 - tu; \\ h(II) : & \quad 1 - v < 1 - tv, \quad 1 - tu < 1 - tv, \quad 1 - u > 1 - tu; \\ h(III) : & \quad 1 - v < 1 - tv, \quad 1 - tu > 1 - tv, \quad 1 - u < 1 - tu; \\ h(IV) : & \quad 1 - v < 1 - tv, \quad 1 - tu > 1 - tv, \quad 1 - u > 1 - tu. \end{aligned} \quad (38)$$

Согласно условиям (38) из равенств (34), (35) получаем:

$$h(I) : \quad \frac{1-v}{1-tv} = e^{2\frac{|BC|}{\rho}}, \quad \frac{1-tu}{1-tv} = e^{2\frac{|CD|}{\rho}}, \quad \frac{1-u}{1-tu} = e^{2\frac{|AD|}{\rho}}; \quad (39)$$



$$h(II) : \quad \frac{1-v}{1-tv} = e^{-2\frac{|BC|}{\rho}}, \quad \frac{1-tu}{1-tv} = e^{-2\frac{|CD|}{\rho}}, \quad \frac{1-u}{1-tu} = e^{2\frac{|AD|}{\rho}}; \quad (40)$$

$$h(III) : \quad \frac{1-v}{1-tv} = e^{-2\frac{|BC|}{\rho}}, \quad \frac{1-tu}{1-tv} = e^{2\frac{|CD|}{\rho}}, \quad \frac{1-u}{1-tu} = e^{-2\frac{|AD|}{\rho}}; \quad (41)$$

$$h(IV) : \quad \frac{1-v}{1-tv} = e^{-2\frac{|BC|}{\rho}}, \quad \frac{1-tu}{1-tv} = e^{2\frac{|CD|}{\rho}}, \quad \frac{1-u}{1-tu} = e^{2\frac{|AD|}{\rho}}. \quad (42)$$

Подставляя соответствующие значения параметров t, u, v из равенств (30)–(33) в выражения (37), (39)–(42), получим следующие соотношения:

$$h(I) : \quad e^{\frac{|AB|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{B}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2}, \quad e^{\frac{|BC|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2}, \quad (43)$$

$$e^{\frac{|CD|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2}, \quad e^{\frac{|AD|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{D}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2};$$

$$h(II) : \quad e^{\frac{|AB|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2}, \quad e^{\frac{|BC|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{B}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{C}}{2}, \quad (44)$$

$$e^{\frac{|CD|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2}, \quad e^{\frac{|AD|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2};$$

$$h(III) : \quad e^{\frac{|AB|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2}, \quad e^{\frac{|BC|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2}, \quad (45)$$

$$e^{\frac{|CD|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{D}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{C}}{2}, \quad e^{\frac{|AD|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{D}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2};$$

$$h(IV) : \quad e^{\frac{|AB|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2}, \quad e^{\frac{|BC|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{B}{2}, \quad (46)$$

$$e^{\frac{|CD|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{\bar{C}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2}, \quad e^{\frac{|AD|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{D}{2} \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2}.$$

На основании равенств (43)–(46) справедливы формулы (11)–(14). Теорема доказана. \square

Пусть в гиперболическом параллелограмме $ABCD$ на абсолюте правильно расположены точки соответствующей классу параллелограмма системы из (6). Тогда по утверждению 2 теоремы 1 точки A, C (B, D) являются вершинами внутренних гиперболических псевдоуглов (углов) параллелограмма. Согласно формулам (11)–(14) для параллелограмма соответствующего класса имеют место равенства

$$h(I) : \quad |AB| + |BC| = |AD| + |CD|; \quad h(II) : \quad |AB| + |CD| = |BC| + |AD|;$$

$$h(III) : \quad |AB| + |AD| = |BC| + |CD|; \quad h(IV) : \quad |AB| = |BC| + |CD| + |AD|.$$

Таким образом, следствиями теоремы 1 являются следующие утверждения.

Теорема 2. В параллелограмме класса $h(I)$ суммы длин ребер, исходящих из вершин внутренних гиперболических углов, равны.

Теорема 3. В параллелограмме класса $h(II)$ суммы длин противоположных ребер равны.

Теорема 4. В параллелограмме класса $h(III)$ суммы длин ребер, исходящих из вершин внутренних гиперболических псевдоуглов, равны.

Теорема 5. В параллелограмме класса $h(IV)$ длина большего ребра равна сумме длин трех других ребер параллелограмма.

По утверждению 1 теоремы 1 диагональная прямая AC в параллелограмме $ABCD$ класса $h(I)$, $h(III)$, $h(IV)$ может принадлежать каждому из трех типов прямых плоскости \hat{H} . Тип прямой инвариантен во всех преобразованиях группы G . Таким образом, справедлива

Теорема 6. На плоскости \hat{H} все параллелограммы каждого из классов $h(I)$, $h(III)$, $h(IV)$ образуют по три инвариантных относительно группы G рода.

В зависимости от типа диагональной прямой AC (эллиптического (e), гиперболического (h), параболического (p)) параллелограммы классов $h(I)$, $h(III)$, $h(IV)$ отнесем соответственно к роду: $h(I)e$, $h(I)h$, $h(I)p$; $h(III)e$, $h(III)h$, $h(III)p$; $h(IV)e$, $h(IV)h$, $h(IV)p$.



Библиографический список

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М. : Наука, 1969. 548 с.
2. Ромакина Л. Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны // Мат. сб. 2012. Т. 203, вып. 9. С. 83–116.
3. Ромакина Л. Н. Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 37–44.
4. Ромакина Л. Н. Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 393–407.
5. Ромакина Л. Н. Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны // Дальневост. мат. журн. 2013. Т. 13, вып. 1. С. 127–147.
6. Ромакина Л. Н. Конечные замкнутые 3(4)-контурные расширенной гиперболической плоскости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 1, вып. 3. С. 14–26.
7. Ромакина Л. Н. Конечные замкнутые 5-контурные расширенной гиперболической плоскости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 38–49.

Hyperbolic Parallelograms of the Plane \hat{H}

L. N. Romakina

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, romakinaln@mail.ru

Hyperbolic parallelograms on a Hyperbolic Plane \hat{H} of the positive curvature in the Cayley–Klein model are investigated. We conducted their classification, obtained the metric correlations between the measure of angles and the expressions of lengths of the edges through a measure of included angles.

Key words: hyperbolic plane \hat{H} of positive curvature; parallelogram; hyperbolic parallelogram.

References

1. Rozenfeld B. A. *Neevklidovy prostranstva* [Non-Euclidean spaces]. Moscow, Nauka, 1969, 548 p. (in Russian).
2. Romakina L. N. Simple partitions of a hyperbolic plane of positive curvature. *Sb. Math.*, 2012, vol. 203, iss. 9. pp. 1310–1341.
3. Romakina L. N. Oval Lines of the Hyperbolic Plane of Positive Curvature. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 37–44 (in Russian).
4. Romakina L. N. Analogs of a formula of Lobachevsky for angle of parallelism on the hyperbolic plane of positive curvature. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2013, vol. 10, pp. 393–407 (in Russian).
5. Romakina L. N. The theorem of the area of a rectangular trihedral of the hyperbolic plane of positive curvature. *Far Eastern Mathematical Journal*, 2013, vol. 13, № 1, pp. 127–147 (in Russian).
6. Romakina L. N. Finite Closed 3(4)-Loops of Extended Hyperbolic Plane. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 3, pp. 14–26 (in Russian).
7. Romakina L. N. Finite Closed 5-Loops of Extended Hyperbolic Plane. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 1, pp. 38–49 (in Russian).

УДК 517.54

К РЕШЕНИЮ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В МНОГОСВЯЗНОЙ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Р. Б. Салимов

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, salimov@5354.ru

Предлагается новый подход к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной круговой области, основанный на построении решения соответствующей однородной задачи, когда определяется аналитическая в области функция по известным граничным значениям её аргумента. Рассматривается особый случай задачи, когда индекс задачи неотрицателен и меньше порядка связности области, уменьшенного на единицу. Картина разрешимости задачи зависит от разрешимости и числа решений соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, индекс задачи, оператор Шварца.



Рассматривается применение предложенного в работе [1] подхода к решению краевой задачи Гильберта для аналитической в многосвязной круговой области функции в особом (по терминологии И. Н. Векуа [2, с. 258]) случае, когда индекс задачи неотрицателен и меньше порядка связности области, уменьшенного на единицу. В последнем случае рассматриваемая задача исследована недостаточно полно (это отмечено, в частности, в книге [3, с. 406, 407]).

Для удобства вначале приведем обозначения и используемые в дальнейшем формулы из статьи [1].

Пусть D является $(m + 1)$ -связной круговой областью, ограниченной полными окружностями L_0, L_1, \dots, L_m без общих точек, расположенными в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, из которых L_0 охватывает остальные.

Требуется найти функцию $F(z) = u(z) + iv(z)$, аналитическую и однозначную в области D , непрерывно продолжимую на её границу $L = \bigcup_{j=0}^m L_j$ по краевому условию:

$$\operatorname{Re} [(a(t) + ib(t))F(t)] = a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t), \quad (1)$$

где $a(t), b(t), c(t)$ — заданные на L действительные функции точки t контура L , удовлетворяющие условию Гёльдера, — функции класса H на L , причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L .

На L установим положительное направление обхода, при котором область D остается слева. Пусть t_{j0} — фиксированная точка кривой L_j . В дальнейшем для функции $f(t)$, заданной на L_j , под $f(t_{j0} + 0)$ и $f(t_{j0} - 0)$ будем понимать пределы, к которым стремится $f(t)$, когда точка t стремится к t_{j0} соответственно в отрицательном и положительном направлениях.

Краевое условие (1) запишем так:

$$\operatorname{Re} [e^{-i\nu(t)}F(t)] = c(t)/|G(t)|, \quad (2)$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, $\nu(t) = \arg G(t)$ — ветвь, непрерывная всюду на L , за исключением, быть может, точек t_{j0} , для которых

$$\nu(t_{j,0} - 0) - \nu(t_{j,0} + 0) = 2\pi \frac{\kappa_j}{2},$$

причем $\kappa_j/2$ — целое число, $j = \overline{0, m}$.

Число $\kappa = \sum_{j=0}^m \kappa_j$ назовем *индексом задачи Гильберта* (2), следуя Н. И. Мусхелишвили [4, с. 144] (заметим, что в книгах [2, с. 243; 3, с. 144] индексом этой задачи называется число $\kappa/2$).

Здесь рассмотрим случай, когда $0 \leq \kappa/2 < m$.

1. Обозначим q_j, R_j соответственно центр и радиус окружности L_j , $j = \overline{0, m}$, считая, что $q_0 = 0, R_0 = 1$. Примем $t_{00} = 1, t_{j0} = q_j + R_j, j = \overline{1, m}$. Пусть $t = q_j + R_j e^{i\gamma}, 0 \leq \gamma < 2\pi$, есть точка окружности L_j ; через s будем обозначать дуговую абсциссу указанной точки кривой L_j , отсчитываемую от точки t_{j0} в положительном направлении, $j = \overline{0, m}$, $s = (2\pi - \gamma)R_j$ при $j = \overline{1, m}$. Под $\arg(z - q_j)$ будем понимать непрерывную ветвь, однозначную в круге $|z| < 1$, разрезанном по линии, состоящей из отрезка с концами $z = q_j, z = t_{j0}$ и линии l_j , лежащей внутри области D и соединяющей точки $t_{j0}, t_{00}, j = \overline{0, m}$, (при $j = 0$ линия l_j отсутствует), примем, что эта ветвь на L_j принимает значение $\arg(t - q_j) = \gamma, 0 \leq \gamma < 2\pi$.

Пусть $t_j = q_j + R_j e^{i\gamma_j}, 0 \leq \gamma_j < 2\pi$, есть некоторая точка окружности L_j , положение этой точки, т. е. число γ_j будем считать незадаанным, $j = \overline{1, m}$.

Пусть $\arg(z - t_j)$ — непрерывная ветвь, однозначная в круге $|z| < 1$, разрезанном по линии, состоящей из направленной как L_j дуги $t_j t_{j0}$ этой окружности и вышеуказанной кривой l_j ; будем считать, что эта ветвь при $\gamma_j > 0$ на окружности L_j , включая точки левого берега разреза по дуге $t_j t_{j0}$, принимает значения

$$\arg(t - t_j) = \begin{cases} (-\pi + \gamma + \gamma_j)/2, & 0 \leq \gamma < \gamma_j, \\ (\pi + \gamma + \gamma_j)/2, & \gamma_j < \gamma < 2\pi, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

При $\gamma_j = 0$ эта формула принимает вид $\arg(t - t_{j0}) = (\pi + \gamma)/2, 0 \leq \gamma < 2\pi$. Поэтому при вышеуказанном выборе ветвей аргументов непрерывная в области D ветвь

$$\arg \frac{z - t_j}{z - q_j} = \arg(z - t_j) - \arg(z - q_j)$$



на L_j в случае $\gamma_j > 0$ принимает значение

$$\arg \frac{t - t_j}{t - q_j} = \begin{cases} (-\pi - \gamma + \gamma_j)/2, & 0 \leq \gamma < \gamma_j, \\ (\pi - \gamma + \gamma_j)/2, & \gamma_j < \gamma < 2\pi. \end{cases} \quad (3)$$

В частности, при $\gamma_j = 0$ заключаем, что $\arg \frac{z - t_{j0}}{z - q_j}$ на L_j принимает значение

$$\arg \frac{t - t_{j0}}{t - q_j} = \frac{\pi - \gamma}{2}, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi. \quad (4)$$

2. Введем в рассмотрение функцию $p_j(t) = 1$ на вышеуказанной дуге $t_j t_{j0}$ окружности L_j , $p_j(t) = 0$ на остальной части L_j и на всех других окружностях — компонентах L , $j = \overline{1, m}$. Далее краевое условие (2) запишем в равносильном виде:

$$\operatorname{Re} [e^{-i\tilde{\nu}(t)} \tilde{F}(t)] = \tilde{c}(t), \quad (5)$$

где

$$\tilde{\nu}(t) = \nu(t) + \sum_{j=1}^m \left[2\pi p_j(t) + 2 \arg \frac{t - t_j}{t - q_j} + (1 + \kappa_j/2) \arg(t - q_j) \right], \quad (6)$$

$$\tilde{F}(z) = F(z) \prod_{j=1}^m \left[(z - q_j)^{1+\kappa_j/2} \cdot \left(\frac{z - t_j}{z - q_j} \right)^2 \right], \quad (7)$$

$$\tilde{c}(t) = \frac{c(t)}{|G(t)|} \prod_{j=1}^m \left[|t - q_j|^{1+\kappa_j/2} \cdot \left| \frac{t - t_j}{t - q_j} \right|^2 \right]. \quad (8)$$

Будем искать решение $\tilde{F}(z)$ краевой задачи (5) в классе функций, непрерывных в области D , вплоть до её границы (при этом, как видно из формулы (7), функция $F(z)$ может иметь особенности в точках t_j , $j = \overline{1, m}$). Вначале найдем частное решение $\tilde{F}_0(z)$ соответствующей однородной задачи:

$$\operatorname{Re} [e^{-i\tilde{\nu}(t)} \tilde{F}_0(t)] = 0, \quad (9)$$

отличное от нуля всюду на L . Из (9) для аргумента

$$\arg \tilde{F}_0(t) = \tilde{\psi}(t) \quad (10)$$

такого решения, как и в [1], получим выражение

$$\tilde{\psi}(t) = \tilde{\nu}(t) + \frac{\pi}{2} + \pi n_j, \quad (11)$$

когда $t \in L_j$, где n_j — произвольное целое число, $j = \overline{0, m}$, $n_0 = 0$. Таким образом, известны граничные значения $\tilde{\psi}(t)$ функции $\arg \tilde{F}_0(z)$ с точностью до слагаемого πn_j при нефиксированных пока значениях γ_j , $j = \overline{1, m}$. Остается найти функцию $\tilde{F}_0(z)$.

Для нахождения вышеуказанного частного решения $\tilde{F}_0(z)$ задачи (9) воспользуемся предложенным в статье [1] подходом. Пусть z_0 — заданная точка области D , $\arg(t - z_0)$ — граничное значение непрерывной ветви $\arg(z - z_0)$, однозначной в области D , разрезанной по линии, лежащей в области D и соединяющей точки z_0 , t_{00} . Как видно из формул (6), (11), функция $\tilde{\psi}(t) - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0)$ непрерывна на каждой из окружностей L_j , $j = \overline{0, m}$, поэтому при обходе L_j , $j = \overline{0, m}$, приращения не получает. Следовательно, в силу принципа аргумента функция $\tilde{F}_0(z)/(z - z_0)^{m+\kappa/2}$ не имеет нулей в области D . Тогда функция

$$\Phi(z) = -i \ln [\tilde{F}_0(z)/(z - z_0)^{m+\kappa/2}] \quad (12)$$

аналитична в области D , причем действительная часть её граничного значения равна $\tilde{\psi}(t) - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0)$, т.е. согласно (10), (11) на L_j

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = \tilde{\nu}(t) + \frac{\pi}{2} + \pi n_j - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0), \quad j = \overline{0, m}.$$



Отсюда в силу (6) с учетом выражений (3) для $\arg \frac{t-t_j}{t-q_j}$ и $p_j(t)$ будем иметь при $t \in L_j$, $j = \overline{1, m}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(t) = & \frac{3\pi}{2} + \gamma_j + \pi n_j + \nu(t) + \sum_{j_1=1, j_1 \neq j}^m \left(\arg(t - q_{j_1}) + 2 \arg \frac{t - t_{j_1}}{t - q_{j_1}} \right) + \\ & + \sum_{j_1=1}^m \frac{\kappa_{j_1}}{2} \arg(t - q_{j_1}) - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0), \end{aligned} \quad (13)$$

при $t \in L_0$ получим:

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = \frac{\pi}{2} + \nu(t) + \sum_{j=1}^m \left(2 \arg \frac{t - t_j}{t - q_j} + (1 + \kappa_j/2) \arg(t - q_j) \right) - (m + \kappa/2) \arg(t - z_0). \quad (14)$$

Поскольку функция $\Phi(z)$ должна быть однозначной и аналитической в области D , то должны выполняться условия (см., например, [3, с. 383])

$$\int_L \operatorname{Re} \Phi(t) \alpha_k(t) ds = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad (15)$$

где $\alpha_k(t) = \partial \beta_k(t) / \partial n$ есть производная по направлению внутренней для области D нормали в точке t границы L области D , $\beta_k(z)$ — гармоническая в области D функция, граничные значения которой определяются формулой

$$\beta_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in L_k, \\ 0 & \text{на остальных окружностях,} \end{cases} \quad (16)$$

$k = \overline{1, m}$. Функции $\beta_k(z)$, $\alpha_k(t)$ считаем известными, $k = \overline{1, m}$.

Подставляя выражения (13), (14) в условия (15), приходим к системе нелинейных уравнений с неизвестными γ_j , n_j , $j = \overline{1, m}$, вопрос о решении которой рассмотрен в работе [1].

Считая, что числа n_j , γ_j , $j = \overline{1, m}$, уже определены, по формулам (13), (14) вычислим $\operatorname{Re} \Phi(t)$ и с помощью оператора Шварца найдем однозначную аналитическую в области D функцию $\Phi(z) = S(\operatorname{Re} \Phi(t), z) + iv_0$, взяв произвольную действительную постоянную $v_0 = 0$.

Тогда согласно (12) будем иметь

$$\tilde{F}_0(z) = e^{i\Phi(z)} (z - z_0)^{m+\kappa/2} \quad (17)$$

— частное решение задачи (9), отличное от нуля всюду на L . В силу (9) $ie^{-i\bar{\nu}(t)} \tilde{F}_0(t)$ — действительная величина, поэтому условие (5) можно записать так:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\tilde{F}(t)}{i\tilde{F}_0(t)} \right] = c_*(t), \quad (18)$$

где

$$c_*(t) = \tilde{c}(t) / (ie^{-i\bar{\nu}(t)} \tilde{F}_0(t)). \quad (19)$$

Как видно из (17), точка z_0 является полюсом порядка $m + \kappa/2$ функции $\tilde{F}(z) / (i\tilde{F}_0(z))$. Учитывая это, последнюю функцию будем искать в виде

$$\tilde{F}(z) / (i\tilde{F}_0(z)) = \Psi(z) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \mu_j / (z - z_0)^j, \quad (20)$$

где $\Psi(z)$ — новая искомая аналитическая и однозначная в области D функция, β_0 , μ_j — произвольные соответственно действительная и комплексная постоянные.

Согласно (18), (20) всюду на L имеем:

$$\operatorname{Re} \Psi(t) = c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re} [\mu_j / (t - z_0)^j]. \quad (21)$$



Функция $\operatorname{Re} \Psi(t)$ должна удовлетворять условиям, аналогичным (15), поэтому должны выполняться соотношения

$$\sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \int_L \operatorname{Re} [\mu_j / (t - z_0)^j] \alpha_k(t) ds = \int_L c_*(t) \alpha_k(t) ds, \quad k = \overline{1, m}. \quad (22)$$

Эти соотношения представляют собой систему m линейных алгебраических уравнений с $(2m + \kappa)$ неизвестными $\operatorname{Re} \mu_j, \operatorname{Im} \mu_j, j = \overline{1, m + \kappa/2}$. Считая условия (22) выполненными, по значениям $\operatorname{Re} \Psi(t)$ формулы (21) с помощью оператора Шварца находим $\Psi(z)$, тогда в силу (20) будем иметь:

$$\frac{\tilde{F}(z)}{i\tilde{F}_0(z)} = S\left(c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re} \frac{\mu_j}{(t - z_0)^j}, z\right) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \frac{\mu_j}{(z - z_0)^j}. \quad (23)$$

Отсюда, принимая во внимание (17) и выражение (7) для $\tilde{F}(z)$, получим:

$$F(z) = ie^{i\Phi(z)}(z - z_0)^{m+\kappa/2} \left\{ S\left(c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re} \frac{\mu_j}{(t - z_0)^j}, z\right) + i\beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \frac{\mu_j}{(z - z_0)^j} \right\} / \left(\prod_{j=1}^m \left[(z - q_j)^{1+\kappa_j/2} \cdot \left(\frac{z - t_j}{z - q_j} \right)^2 \right] \right). \quad (24)$$

Так как мы ищем решение $F(z)$ краевой задачи (2), непрерывное на L , то мы должны потребовать, чтобы выражение в фигурных скобках (т.е. выражение (23)) последней формулы обращалось в нуль второго порядка в точках $t_{j_1}, j_1 = \overline{1, m}$. С этой целью потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$\operatorname{Im} S\left(c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re} \frac{\mu_j}{(t - z_0)^j}, t_{j_1}\right) + \beta_0 + \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Im} \frac{\mu_j}{(t_{j_1} - z_0)^j} = 0, \quad j_1 = \overline{1, m}, \quad (25)$$

кроме того, указанное выражение (23), заменив в нем предварительно t на $t_* \in L$, запишем для $z = t = (q_{j_1} + R_{j_1} e^{i\gamma}) \in L_{j_1}$, далее потребуем, чтобы производная по γ от него в точке t_{j_1} обращалась в нуль, и будем иметь:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_{j_1}} \frac{\operatorname{Im} \left[S(c_*(t_*), t) - S(c_*(t_*), t_{j_1}) \right]}{\gamma - \gamma_{j_1}} - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \left\{ \operatorname{Im} \left[S\left(\operatorname{Re} \frac{\mu_j}{(t_* - z_0)^j}, t\right) \right]_{\gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_{j_1}} + \operatorname{Im} \frac{\mu_j j R_{j_1} e^{i\gamma_{j_1}}}{(t_{j_1} - z_0)^{j+1}} \right\} = 0, \quad (26)$$

здесь $j_1 = \overline{1, m}$. Последние условия (25), (26) являются необходимыми для непрерывности функции $F(z)$ формулы (24) в точках t_{j_1} ; применяя результаты статьи [5] к функции (23), с учетом (8), (19) можно показать, что они являются так же достаточными и попутно убедиться в существовании выражения в левой части уравнения (26).

Соотношения (22), (25), (26) представляют собой систему линейных $3m$ уравнений с $\kappa + 2m + 1$ действительными неизвестными $\operatorname{Re} \mu_j, \operatorname{Im} \mu_j, \beta_0$.

При выполнении условий (22) оператор Шварца в формулах (23)–(26) определяет однозначную функцию и представляет собой интеграл по кривой L с плотностью $c_*(t) - \sum_{j=1}^{m+\kappa/2} \operatorname{Re} [\mu_j / (t - z_0)^j]$ и однозначным ядром [3, с. 384].

Не приводя явных выражений, будем считать, что в системе уравнений (22), (25), (26) коэффициенты при неизвестных $\operatorname{Re} \mu_j, \operatorname{Im} \mu_j, j = \overline{1, m}$, уже вычислены. Отметим лишь, что в уравнении (25) коэффициент при неизвестном $\operatorname{Re} \mu_j$ равен значению суммы

$$\operatorname{Im} S\left(-\operatorname{Re} \frac{1}{(t_* - z_0)^j}, t\right) + \operatorname{Im} \frac{1}{(t - z_0)^j}$$



в точке $t = t_{j_1}$, в уравнении (26) — значению производной по γ от последней суммы при $\gamma = \gamma_{j_1}$, когда $t = q_{j_1} + R_{j_1} e^{t\gamma}$, причем существование указанной производной от первого слагаемого последней суммы следует из результатов, приведенных в книге [3, с. 43].

Пусть $0 \leq \kappa < m - 1$ и число неизвестных $\kappa + 2m + 1 < 3m$ — числа уравнений системы (22), (25), (26). Обозначим ранг основной матрицы этой системы через r . В рассматриваемом случае $r \leq \kappa + 2m + 1$. Совместность системы (22), (25), (26) равносильна совпадению рангов основной и расширенной матриц системы. Это совпадение будет иметь место, если все миноры $(r + 1)$ -го порядка расширенной матрицы системы, содержащие базисный минор основной матрицы и свободные члены системы, обращаются в нуль. Ясно, что число таких миноров равно $3m - r$. Приравняв нулю эти миноры, получаем $3m - r$ условий совместности системы, которые представляют собой условия разрешимости задачи (2). При выполнении этих $3m - r$ условий совместности система (22), (25), (26) равносильна системе r её уравнений, основная матрица которой имеет ранг r , причем один из миноров этой матрицы является базисным минором основной матрицы исходной системы.

При $r = \kappa + 2m + 1$ последняя система r уравнений с r неизвестными имеет единственное решение, которому отвечает единственное решение (24) задачи (2); оно существует при выполнении $3m - r = m - 1 - \kappa$ условий разрешимости.

При $r < \kappa + 2m + 1$ вышеуказанная система r уравнений содержит $\kappa + 2m + 1$ неизвестных. Из этой системы r неизвестных, коэффициенты которых являются элементами базисного минора (основной матрицы системы (22), (25), (26)), выразим через $\kappa + 2m + 1 - r$ остальных неизвестных, значения которых могут быть выбраны произвольно. Подставляя найденные выражения в формулу (24), получим зависящее от $\kappa + 2m + 1 - r$ произвольных действительных постоянных решение задачи (2), которое существует при выполнении $3m - r$ условий разрешимости. Итак, имеет место

Теорема 1. Если $0 \leq \kappa < m - 1$ и выполняются $3m - r$ условий совместности системы (22), (25), (26), то при $r = \kappa + 2m + 1$ задача (2) имеет единственное решение согласно (24), при $r < \kappa + 2m + 1$ решение задачи (2) определяется формулой (24) и содержит $\kappa + 2m + 1 - r$ произвольных действительных постоянных.

При $\kappa = m - 1$ число неизвестных $\kappa + 2m + 1 = 3m$, т. е. равно числу уравнений системы (22), (25), (26). Если $r = 3m$, то система совместна и имеет единственное решение, тогда, подставляя найденные значения неизвестных, по формуле (24) определим единственное решение задачи (2).

Если $r < 3m$, то система (22), (25), (26) будет совместна при выполнении $3m - r$ условий, записываемых, как указано выше; при их выполнении исходная система решается так же, как и в предыдущем случае при $r < \kappa + 2m + 1$, если число $\kappa + 2m + 1$ в тексте заменить на $3m$. Следовательно, справедлива

Теорема 2. Пусть $\kappa = m - 1$. Если $r = 3m$, то задача (2) имеет единственное решение, определяемое формулой (24). Если $r < 3m$ и выполняются $3m - r$ условий совместности системы (22), (25), (26), то решение задачи (2) определяется формулой (24) и содержит $3m - r$ действительных произвольных постоянных.

Рассмотрим случай $\kappa \geq m$ ($\kappa < 2m$). Тогда число неизвестных $\kappa + 2m + 1 > 3m$ — числа уравнений системы (22), (25), (26). Если $r = 3m$, то эта система совместна, так как ранг её расширенной матрицы равен $3m$, и рассматриваемая система имеет решение, зависящее от $\kappa + 2m + 1 - 3m = \kappa - m + 1$ произвольно задаваемых неизвестных, через которые выражаются неизвестные с коэффициентами, равными элементам базисного минора вышеуказанной системы. Решение задачи (2) согласно формуле (24) зависит от $\kappa - m + 1$ вышеуказанных действительных произвольных постоянных.

Если $r < 3m$, то система (22), (25), (26) совместна, если выполняются $3m - r$ условий совместности — условий обращения в нуль всех миноров $(r + 1)$ -го порядка расширенной матрицы системы, содержащих базисный минор основной матрицы и свободные члены системы. Исходная система равносильна системе r её уравнений, основная матрица которой содержит вышеуказанный базисный минор. Из последней системы r неизвестных с коэффициентами, являющимися элементами базисного минора, выразим через $\kappa + 2m + 1 - r$ остальных неизвестных, значения которых могут быть заданы произвольно. При этом формула (24) дает решение задачи (2), зависящее от $\kappa + 2m + 1 - r$ действительных произвольных постоянных. Итак, справедлива

Теорема 3. Пусть $\kappa \geq m$ ($\kappa < 2m$). Если $r = 3m$, то задача (2) имеет решение (24), зависящее от $\kappa - m + 1$ действительных произвольных постоянных. Если $r < 3m$ и выполняется $3m - r$



условий совместности системы (22), (25), (26), то задача (2) имеет решение (24), зависящее от $\kappa + 2m + 1 - r$ действительных произвольных постоянных.

В теореме 1 и при $r < 3m$ в теоремах 2,3 предполагается, что выполняются $3m - r$ условий совместности системы (22), (25), (26); кроме того, принимается, что при $r < \kappa + 2m + 1$ в теореме 1 и при $r < 3m$ в теоремах 2,3 обращаются в нуль все миноры $(r + 1)$ -го порядка основной матрицы системы (22), (25), (26), содержащие базисный минор этой матрицы, с общим числом, равным соответственно $(3m - r)(\kappa + 2m + 1 - r)$, $(3m - r)^2$, $(3m - r)(\kappa + 2m + 1 - r)$. Ясно, что эти предположения являются условиями разрешимости задачи (2), обеспечивающими реализацию соответствующих условий рассматриваемой теоремы, и могут выполняться только в исключительных случаях.

В книге [2, с.274,275] приведен пример, для которого $c(t) \equiv 0$ всюду на L , и упомянутые исключительные случаи реализуются, когда краевая задача (2) имеет ненулевые решения при $0 \leq \kappa/2 \leq m - 1$ (в наших обозначениях).

Вопросы совместности совокупности всех указанных условий в любой из теорем требуют особого рассмотрения в каждом конкретном случае с учетом того, что коэффициенты и свободные члены системы (22), (25), (26) зависят от формы области D и свойств заданных функций $\nu(t)$, $c(t)$ краевого условия (2).

Уместно отметить, что условия совместности системы (22), (25), (26) выполняются автоматически, если $c(t) \equiv 0$ всюду на L .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00636-а).

Библиографический список

1. Салимов Р. Б. Модификация нового подхода к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной круговой области // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 32–38.
2. Веква И. Н. Обобщенные аналитические функции. М. : Физматгиз, 1959. 628 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
5. Салимов Р. Б. Некоторые свойства аналитических в круге функций и их приложения к исследованию поведения сингулярных интегралов // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 42–50.

To a Solution of the Inhomogeneous Riemann–Hilbert Boundary Value Problem for Analytic Function in Multiconnected Circular Domain in a Special Case

R. B. Salimov

Kazan State University of Architecture and Engineering, Russia, 420043, Kazan, Zelenaya st., 1, salimov@5354.ru

The author offers a new approach to solution of the Riemann–Hilbert boundary value problem for analytic function in multiconnected circular domain. This approach is based on construction of solution of corresponding homogeneous problem, when analytic in domain function is being defined by known boundary values of its argument. The author considers a special case of a problem when the index of a problem is more than zero and on unit or less order of connectivity of domain. Resolvability of a problem depends on number of solutions of some system of the linear algebraic equations.

Key words: Riemann–Hilbert boundary value problem, index of a problem, Schwarz's operator.

References

1. Salimov R. B. Modification of new approach to solution of the Hilbert boundary value problem for analytic function in multi-connected circular domain. *Izv. Saratov. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 32–38 (in Russian).
2. Vekua I. N. *Generalized analytic functions*. Oxford, Pergamon Press, 1962, 668 p. (Rus. ed.: Vekua I. N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii*. Moscow, Fizmatgiz, 1959, 628 p.)
3. Gahov F. D. *Boundary-Value Problems*. Moscow, Nauka, 1977, 640 p. (in Russian).
4. Muskhelishvili N. I. *Singular Integral Equations. Boundary-Value Problems of the Theory of Functions and Some of Their Applications to Mathematical Physics*. Moscow, Nauka, 1968, 511 p. (in Russian).
5. Salimov R. B. Some properties of analytic in a disc functions and their applications to study of behaviour of singular integrals. *Russian Math. (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2012, vol. 56, no. 3, pp. 36–44.



УДК 517.927

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА

А. Е. Федосеев

Ассистент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, fedoseev_ae@mail.ru

В данной статье исследуется обратная задача спектрального анализа восстановления оператора Штурма–Лиувилля на конечном отрезке с неинтегрируемой особенностью типа Бесселя внутри интервала по заданным спектральным данным. Получена конструктивная процедура решения обратной задачи, доказана единственность восстановления оператора по заданным спектральным данным, а также получены необходимые и достаточные условия разрешимости данной обратной задачи.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, обратная задача, неинтегрируемая особенность, функция Вейля, спектральные данные.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\ell y = -y'' + \left(\frac{\nu_0}{(x-a)^2} + q(x) \right) y = \lambda y, \quad 0 < x < T, \quad (1)$$

на конечном отрезке, с неинтегрируемой особенностью в точке $a > 0$. Здесь потенциал $q(x)$ — комплекснозначная функция, ν_0 — комплексное число. Положим $\nu_0 = \nu^2 - 1/4$ и для определенности $\operatorname{Re} \nu > 0$, $\nu \neq 1, 2, \dots$. Предположим, что $q(x)|x-a|^{\min(0, 1-2\operatorname{Re} \nu)} \in L(0, T)$. Класс таких функций $q(x)$ будем обозначать через W .

В данной статье исследуется краевая задача $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(x))$ для дифференциального уравнения (1) с краевыми условиями:

$$y(0) = y(T) = 0$$

и с дополнительным *условием склейки* решений около особой точки $x = a$. При этом рассматриваются произвольные в некотором смысле условия склейки, порождаемые матрицей перехода $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, которая связывает решения уравнения (1) в окрестности особой точки (подробнее см. § 1). В частном случае, при $(\nu_0 = 0)$ рассматриваемые условия склейки соответствуют условию

$$\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} (a+0) = A \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} (a-0).$$

Целью данной работы является исследование нелинейной обратной задачи восстановления потенциала $q(x)$ по заданным спектральным данным при условии что ν_0 , a и матрица A заданы и зафиксированы. Доказана единственность восстановления оператора Штурма–Лиувилля, получен алгоритм решения обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Метод оператора преобразования, используемый в [1, 2] для классических операторов Штурма–Лиувилля, оказывается неудобным для задачи \mathcal{L} . В данной статье используется метод спектральных отображений [3, 4].

1. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Пусть $\lambda = \rho^2$ и $\operatorname{Im} \rho \geq 0$. Рассмотрим функции

$$C_j(x, \lambda) = (x-a)^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} (\rho(x-a))^{2k}, \quad j = 1, 2,$$

где $\mu_j = (-1)^j \nu + 1/2$, $c_{10}c_{20} = (2\nu)^{-1}$, $c_{jk} = (-1)^k c_{j0} \left(\prod_{s=1}^k ((2s + \mu_j)(2s + \mu_j - 1) - \nu_0) \right)^{-1}$.



Здесь и в дальнейшем $z^\mu = \exp(\mu(\ln|z| + i \arg z))$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$. При $x > a$ и $x < a$ функции $C_j(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (1) при $q(x) \equiv 0$. Пусть функции $s_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2$ являются решениями следующих интегральных уравнений при $x > a$ и $x < a$:

$$s_j(x, \lambda) = C_j(x, \lambda) + \int_a^x g(x, t, \lambda)q(t)s_j(t, \lambda) dt,$$

где $g(x, t, \lambda) = C_1(t, \lambda)C_2(x, \lambda) - C_1(x, \lambda)C_2(t, \lambda)$. Функции $s_j(x, \lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) и при каждом фиксированном x являются целыми по λ порядка $1/2$.

Пусть задана матрица $A = [a_{jk}]_{j,k=1,2}$, $\det A \neq 0$ с комплексными a_{jk} . Введем функции $\{\sigma_j(x, \lambda)\}_{j=1,2}$, $x \in J_- \cup J_+$, $J_\pm = \{\pm(x - a) > 0\}$ по формуле

$$\sigma_j(x, \lambda) = \begin{cases} s_j(x, \lambda), & x \in J_-, \\ \sum_{k=1}^2 a_{kj}s_k(x, \lambda), & x \in J_+. \end{cases}$$

Определение 1. Будем говорить, что решение $y(x, \lambda)$ уравнения (1) удовлетворяет *условию склейки* порожденному матрицей перехода A , если $y(x, \lambda)$ может быть представлено в виде $y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^2 \chi_j(\lambda)\sigma_j(x, \lambda)$, для всех $x \in J_- \cup J_+$, где коэффициенты $\chi_j(\lambda)$ не зависят от x .

Введем числа ξ_{jk} , $j, k = 1, 2$ по формуле

$$\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \pi \nu} \begin{bmatrix} -a_{11}e^{2\pi i \nu} + a_{22}e^{-2\pi i \nu} & -i(a_{11}e^{\pi i \nu} - a_{22}e^{-\pi i \nu}) \\ -i(a_{11}e^{\pi i \nu} - a_{22}e^{-\pi i \nu}) & a_{11} - a_{22} \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$C(x, \lambda) = \sigma'_2(0, \lambda)\sigma_1(x, \lambda) - \sigma'_1(0, \lambda)\sigma_2(x, \lambda), \quad S(x, \lambda) = \sigma_1(0, \lambda)\sigma_2(x, \lambda) - \sigma_2(0, \lambda)\sigma_1(x, \lambda).$$

Функции $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$ являются решениями дифференциального уравнения (1) при $x \in J_\pm$ и удовлетворяют начальным условиям $C(0, \lambda) = S'(0, \lambda) = 1$, $C'(0, \lambda) = S(0, \lambda) = 0$.

Обозначим $\Delta(\lambda) = S(T, \lambda)$.

Лемма 1. Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ и ее нули $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ совпадают с собственными значениями краевой задачи \mathcal{L} .

Обозначим через m_n кратность собственного значения λ_n ($\lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+m_n-1}$) и положим $\mathbb{S} = \{n : n - 1 \in \mathbb{N}, \lambda_{n-1} \neq \lambda_n\} \cup \{1\}$, $S_\nu(x, \lambda) = \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu}{\partial \lambda^\nu} S(x, \lambda)$, $S_{n+\nu}(x) = S_\nu(x, \lambda_n)$, $n \in \mathbb{S}$, $\nu = \overline{0, m_n - 1}$.

Потребуем, чтобы

$$a_{11}e^{2i\pi\nu} \neq a_{22}. \tag{2}$$

Мы будем называть (2) *условием регулярности склейки*.

Функция $\Delta(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1) при $|\rho| \rightarrow \infty$

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{2i\rho} e^{-i\rho T} \left(\Delta_0(\lambda) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \tag{3}$$

где

$$\Delta_0(\lambda) = -\xi_{12} + \xi_{22}e^{2i\rho a} + \xi_{21}e^{2i\rho T} - \xi_{11}e^{2i\rho(T-a)}; \tag{4}$$

- 2) существуют такие $h > 0$, $C_h > 0$, что $|\Delta(\lambda)| \geq C_h |\rho|^{-1} e^{-i\rho T}$, при $\text{Im } \rho > h$. Следовательно, нули функции $\Delta(\lambda)$ лежат в полосе $\text{Im } \rho \leq h$;
- 3) число нулей N_ξ функции $\Delta(\lambda)$ в прямоугольнике $\Pi_\xi = \{\rho : \text{Im } \rho \leq h, \text{Re } \rho \in [\xi, \xi + 1]\}$ ограничено по ξ ;
- 4) пусть $\lambda_n = \rho_n^2$. Обозначим $G_\delta = \{\rho : |\rho - \rho_n| \geq \delta, n \geq 1\}$. Тогда $|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |\rho|^{-1} e^{-i\rho T}$, $\rho \in G_\delta$;
- 5) существует последовательность чисел $r_N \rightarrow \infty$ такая, что для достаточно малого $\delta > 0$ окружности $|\rho| = r_N$ целиком лежат в G_δ для всех N ;



6) пусть $\{\rho_n^0\}$ — нули функции $\Delta_0(\lambda)$ вида (4). Тогда, при $n \rightarrow \infty$

$$\rho_n = \rho_n^0 + O\left(\frac{1}{\rho_n^0}\right). \quad (5)$$

Пусть $\Phi(x, \lambda)$ — решение уравнения (1) при условиях $\Phi(0, \lambda) = 1$, $\Phi(T, \lambda) = 0$. Обозначим $M(\lambda) = \Phi'(0, \lambda)$. Функции $\Phi(x, \lambda)$ и $M(\lambda)$ называются *решением Вейля* и *функцией Вейля* для \mathcal{L} соответственно.

Теорема 1. *Зафиксируем $n \in \mathbb{S}$. В окрестности точки $\lambda = \lambda_n$ функция Вейля $M(\lambda)$ имеет представление*

$$M(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{m_n-1} \frac{M_{n+\nu}}{(\lambda - \lambda_n)^{\nu+1}} + M_n^*(\lambda),$$

где m_n — кратность λ_n , $M_n^*(\lambda)$ регулярна при $\lambda = \lambda_n$, коэффициенты $M_{n+\nu}$, $\nu = \overline{0, m_n - 1}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} M_{n+m_n-1} &= -\frac{d_{0,n}^1}{d_{0,n}^0}, \\ M_{n+m_n-1-\nu} &= -\frac{1}{d_{0,n}^0} \left(d_{\nu,n}^1 + \sum_{k=0}^{\nu-1} M_{n+m_n-1-k} d_{\nu-k,n}^0 \right), \quad \nu = \overline{1, m_n - 1}, \\ d_{\nu,n}^1 &:= \frac{1}{\nu!} C^{(\nu)}(T, \lambda_n), \quad d_{\nu,n}^0 := \frac{1}{(\nu + m_n)!} \Delta^{(\nu+m_n)}(\lambda_n), \quad \nu = \overline{0, m_n - 1} \end{aligned}$$

и справедливы следующие оценки:

$$|M_{n+\nu}| \leq C |\rho_n|^{\nu+2}, \quad n > n^*, \quad \nu = \overline{0, m_n - 1}. \quad (6)$$

Определение 2. Последовательность $\{M_n\}_{n \geq 1}$ называется последовательностью Вейля, а набор $\mathcal{D} := \{\lambda_n, M_n\}_{n \geq 1}$ называется *спектральными данными*.

Обратная задача. По заданным спектральным данным $\mathcal{D} := \{\lambda_n, M_n\}_{n \geq 1}$ построить потенциал $q(x)$.

2. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для исследования обратной задачи условимся, что наряду с \mathcal{L} будем рассматривать краевую задачу $\tilde{\mathcal{L}}$ того же вида, но с другим потенциалом \tilde{q} . Если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к задаче \mathcal{L} , то соответствующий символ $\tilde{\gamma}$ с волной наверху будет обозначать аналогичный объект, относящийся к задаче $\tilde{\mathcal{L}}$, а $\hat{\gamma} := \gamma - \tilde{\gamma}$.

Теорема 2. *Если $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $M_n = \tilde{M}_n$, при всех $n \geq 1$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$ почти всюду при $0 < x < T$. Таким образом, задание спектральных данных $\{\lambda_n, M_n\}$ однозначно определяет потенциал $q(x)$.*

Перейдем теперь к построению решения обратной задачи. Будем говорить, что $\mathcal{L} \in V$, если $q(x) \in W$. Обратную задачу будем решать в классе V .

Пусть заданы спектральные данные $\{\lambda_n, M_n\}_{n \geq 1}$ из обратной задачи и пусть $\tilde{\mathcal{L}}$ — некоторая модельная задача со спектральными данными $\tilde{\mathcal{D}} = \{\tilde{\lambda}_n, \tilde{M}_n\}_{n \geq 1}$. Обозначим

$$\begin{aligned} \lambda_{n,0} &:= \lambda_n, & \lambda_{n,1} &:= \tilde{\lambda}_n, & M_{n,0} &:= M_n, & M_{n,1} &:= \tilde{M}_n, \\ \mathbb{S}_0 &= \mathbb{S}, & \mathbb{S}_1 &= \tilde{\mathbb{S}}, & m_{n,0} &:= m_n, & m_{n,1} &:= \tilde{m}_n, \\ S_{n+\nu,i}(x) &:= S_\nu(x, \lambda_{n,i}), & \tilde{S}_{n+\nu,i}(x) &:= \tilde{S}_\nu(x, \lambda_{n,i}), & n \in \mathbb{S}_i, & \nu &= \overline{0, m_{n,i} - 1}, & i = 0, 1, \\ D(x, \lambda, \mu) &:= \frac{1}{\eta(x)} \frac{\langle S(x, \lambda), S(x, \mu) \rangle}{\lambda - \mu}, & D_{i,j}(x, \lambda, \mu) &:= \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial \lambda^i \partial \mu^j} D(x, \lambda, \mu), \\ \alpha_{n+\nu,i} &:= \sum_{p=\nu}^{m_{n,i}-1} |M_{n+p,i}|, & n \in \mathbb{S}_i, & \nu &= \overline{0, m_{n,i} - 1}, \end{aligned}$$



$$\xi_{n+\nu} := |\rho_{n,0} - \rho_{n,1}| + \frac{1}{\alpha_{n+\nu,0}} \sum_{p=\nu}^{m_n-1} |M_{n+p,0} - M_{n+p,1}|$$

при $n \in \mathbb{S}_0 \cap \mathbb{S}_1$, $m_n = \tilde{m}_n$, $\nu = \overline{0, m_n - 1}$ и $\xi_n := 1$ для остальных n .

При $i, j = 0, 1$, $n \in \mathbb{S}_i$ положим

$$A_{n+\nu,i}(x, \lambda) := \sum_{p=\nu}^{m_{n,i}-1} M_{n+p,i} D_{0,p-\nu}(x, \lambda, \lambda_{n,i}), \quad P_{n+\nu,i;k,j}(x) = \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu}{\partial \lambda^\nu} A_{k,j}(x, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_{n,i}},$$

$$B_{n+\nu,i}(x, \lambda) := \sum_{p=\nu}^{m_{n,i}-1} M_{n+p,i} S_{n+p-\nu,i}(x), \tag{7}$$

где $k \geq 1$, $\nu = \overline{0, m_{n,i} - 1}$. Аналогично обозначим $\tilde{D}(x, \lambda, \mu)$, $\tilde{D}_{i,j}(x, \lambda, \mu)$, $\tilde{A}_{n+\nu,i}(x, \lambda)$, $\tilde{B}_{n+\nu,i}(x, \lambda)$ и $\tilde{P}_{n+\nu,i;k,j}(x)$, $n \geq 1$, $k \geq 1$, $i, j = 0, 1$, заменяя $S(x, \lambda)$ на $\tilde{S}(x, \lambda)$ в введенных обозначениях.

Выберем задачу \mathcal{L} так, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\alpha_{k,0} + \alpha_{k,1}) < \infty. \tag{8}$$

Теорема 3. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\tilde{S}_{n,i}(x) = S_{n,i}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{P}_{n,i;k,0}(x) S_{k,0}(x) - \tilde{P}_{n,i;k,1}(x) S_{k,1}(x) \right), \quad n \geq 1, \quad i = 0, 1, \tag{9}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, T]$.

Пусть w — множество индексов $u = (n, i)$, $n \geq 0$, $i = 0, 1$. Для каждого фиксированного $x \in [0, T]$ определим вектор

$$\psi(x) = (\psi_u(x))_{u \in w}^T = (\psi_{n,0}(x), \psi_{n,1}(x))_{n \geq 1}^T$$

(где T обозначает транспозицию) по формуле

$$\begin{pmatrix} \psi_{n,0}(x) \\ \psi_{n,1}(x) \end{pmatrix} = \rho_n^0 \begin{pmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{n,0}(x) \\ S_{n,1}(x) \end{pmatrix}, \quad \chi_n = \begin{cases} \xi_n^{-1}, & \xi_n \neq 0, \\ 0, & \xi_n = 0. \end{cases}$$

Если $\psi_{n,0}$, $\psi_{n,1}$ даны, то $S_{n,0}$ и $S_{n,1}$ можно найти по формуле

$$\begin{pmatrix} S_{n,0}(x) \\ S_{n,1}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho_n^0} \begin{pmatrix} \xi_n & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{n,0}(x) \\ \psi_{n,1}(x) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Введем также блочную матрицу

$$H(x) = (H_{u,v}(x))_{u,v \in w} = \begin{pmatrix} H_{n,0;k,0}(x) & H_{n,0;k,1}(x) \\ H_{n,1;k,0}(x) & H_{n,1;k,1}(x) \end{pmatrix}_{n,k \geq 1}, \quad u = (n, i), \quad v = (k, j),$$

где

$$\begin{pmatrix} H_{n,0;k,0}(x) & H_{n,0;k,1}(x) \\ H_{n,1;k,0}(x) & H_{n,1;k,1}(x) \end{pmatrix} = \frac{\rho_n^0}{\rho_k^0} \begin{pmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n,0;k,0}(x) & P_{n,0;k,1}(x) \\ P_{n,1;k,0}(x) & P_{n,1;k,1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_k & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяются $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{H}(x)$ заменой в предыдущих определениях $S_{n,i}(x)$ на $\tilde{S}_{n,i}(x)$ и $P_{n,i;k,j}(x)$ на $\tilde{P}_{n,i;k,j}(x)$.

Рассмотрим банахово пространство B ограниченных последовательностей вида $v = [v_u]_{u \in w}$ с нормой $\|v\|_B = \sup_{u \in w} |v_u|$. При каждом фиксированном $x \in [0, a) \cup (a, T]$ матрицы $H(x)$ и $\tilde{H}(x)$ порождают операторы $H(x)$ и $\tilde{H}(x)$ соответственно, действующие из B в B и являющиеся линейными ограниченными операторами.



Теорема 4. При каждом фиксированном $x \in [0, T]$ вектор $\psi(x) \in B$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{\psi}(x) = (I - \tilde{H}(x))\psi(x) \tag{11}$$

в банаховом пространстве B , где I — единичный оператор.

В самом деле, запишем (9) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{n,0}(x) - \tilde{S}_{n,1}(x) &= S_{n,0}(x) - S_{n,1}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \left((\tilde{P}_{n,0;k,0}(x) - \tilde{P}_{n,1;k,0}(x))(S_{k,0}(x) - S_{k,1}(x)) + \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{P}_{n,0;k,0}(x) - \tilde{P}_{n,1;k,0}(x) - \tilde{P}_{n,0;k,1}(x) + \tilde{P}_{n,1;k,1}(x))S_{k,1}(x) \right), \\ \tilde{S}_{n,1}(x) &= S_{n,1}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{P}_{n,1;k,0}(x)(S_{k,0}(x) - S_{k,1}(x)) + (\tilde{P}_{n,1;k,0}(x) - \tilde{P}_{n,1;k,1}(x))S_{k,1}(x) \right). \end{aligned}$$

Учитывая введенные обозначения, получаем

$$\tilde{\psi}_{n,i}(x) = \psi_{n,i}(x) - \sum_{(k,j) \in w} \tilde{H}_{n,i;k,j}(x)\psi_{k,j}(x), \quad (n, i) \in w, \tag{12}$$

что равносильно (11).

При каждом фиксированном $x \in [0, T]$ соотношение (11) можно рассматривать как линейное уравнение относительно $\psi(x)$. Это уравнение называется *основным уравнением* обратной задачи. Таким образом, нелинейная обратная задача сводится к решению линейного уравнения.

Теорема 5. При каждом фиксированном $x \in [0, a) \cup (a, T]$ оператор $I - \tilde{H}(x)$ имеет ограниченный обратный оператор, то есть основное уравнение (11) однозначно разрешимо.

Используя решение основного уравнения, можно построить $q(x)$. Обозначим

$$\varepsilon_0(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{B}_{k,0}(x)S_{k,0}(x) - \tilde{B}_{k,1}(x)S_{k,1}(x) \right), \quad \varepsilon(x) := 2\varepsilon'_0(x). \tag{13}$$

Теорема 6. Имеет место соотношение

$$q(x) = \tilde{q}(x) + \varepsilon(x). \tag{14}$$

Таким образом, мы получили следующий алгоритм решения обратной задачи.

Алгоритм. Заданы спектральные данные $\mathcal{D} = \{\lambda_n, M_n\}$.

(i) Выбираем \tilde{L} так, чтобы было справедливо (8) и строим $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{H}(x)$.

(ii) Находим $\psi(x)$ из уравнения (11) и вычисляем $S_{n,k}(x)$, $n \geq 1$, $j = 0, 1$ по формуле (10).

(iii) находим $q(x)$ из формул (7), (13), (14).

Сформулируем теперь необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Теорема 7. Для того чтобы комплексные числа $\{\lambda_n, M_n\}$ были спектральными данными для некоторой краевой задачи $\mathcal{L} \in V$, необходимо и достаточно, чтобы

- 1) существовала такая задача $\tilde{\mathcal{L}}$, что справедливы (5), (6), (8);
- 2) (Условие P) при каждом фиксированном $x \in [0, a) \cup (a, T]$ линейный ограниченный оператор $I - \tilde{H}(x)$, действующий из B в B имеет ограниченный обратный;
- 3) $\varepsilon(x)|x - a|^{\min(0, 1 - 2 \operatorname{Re} \nu)} \in L(0, T)$, где функция $\varepsilon(x)$ строится по формуле (13).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00134).

Библиографический список

1. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 330 с.
2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М. : Наука, 1984. 239 с.
3. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.
4. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002. 303 p.



Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability of the Inverse Problem for Sturm–Liouville Operators with a Nonintegrable Singularity Inside a Finite Interval

A. E. Fedoseev

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, fedoseev_ae@mail.ru

The inverse spectral problem of recovering Sturm–Liouville operators on a finite interval with a nonintegrable Bessel-type singularity in an interior point from the given spectral data is studied. A corresponding uniqueness theorem is proved, a constructive procedure for the solution of the inverse problem is provided. Necessary and sufficient conditions for the solvability of the inverse problem are obtained.

Key words: Sturm–Liouville operators, inverse problems, nonintegrable singularity, Weyl function, spectral data.

References

1. Marchenko V. A. *Sturm–Liouville operators and applications*. Basel, Birkhäuser, 1986. 367 p. (Russ. ed.: Marchenko V. A. *Operatory Shturma–Liuvillia i ikh prilozheniia*. Kiev, Naukova Dumka, 1977. 331 p.)
2. Levitan B. M. *Inverse Sturm–Liouville problems*. Utrecht, VNU, 1987, 240 p. (Russ. ed.: Levitan B. M. *Obratnye zadachi Shturma–Liuvillia*. Moscow, Nauka, 1984, 239 p.)
3. Yurko V. A. *Vvedenie v teoriiu obratnykh spectral'nykh zadach* [Introduction to the theory of inverse spectral problems]. Moscow, Fizmatlit, 1984, 384 p. (in Russian).
4. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*, Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002, 303 p.



МЕХАНИКА

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫМ ДНИЩЕМ ИЗ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ МКЭ

Ю. В. Ключков¹, А. П. Николаев², Т. А. Киселева³

¹ Доктор технических наук, заведующий кафедрой высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет, Klotchkov@bk.ru

² Доктор технических наук, профессор кафедры лесного и водного хозяйства, Волгоградский государственный аграрный университет, anpetr40@yandex.ru

³ Ассистент кафедры высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет, kiseleva_ta@ro.ru

Изложен алгоритм расчета конструкции в форме эллиптического цилиндра с эллипсоидальным днищем из разнородных материалов на основе МКЭ с использованием скалярной и векторной интерполяций полей перемещений. В качестве элемента дискретизации используется четырехугольный криволинейный конечный элемент с восемнадцатью степенями свободы в узле. На примере расчета кругового цилиндра сочлененного с эллипсоидом вращения проведена верификация разработанного алгоритма и показана его эффективность.

Ключевые слова: сочлененные оболочки, скалярная интерполяция, векторная интерполяция, четырехугольный конечный элемент, эллипсоид, цилиндр.

Сочлененные оболочки в виде эллиптического цилиндра и эллипсоида находят широкое применение в различных отраслях строительства и машиностроения. Долговечность и надежность такого рода конструкций в решающей степени зависит от точности определения их напряженно-деформированного состояния (НДС). Одним из наиболее эффективных численных методов анализа НДС на сегодняшний день является метод конечных элементов (МКЭ).

В настоящей работе изложен алгоритм расчета конструкции в форме эллиптического цилиндра с эллиптическим днищем на основе МКЭ с использованием четырехугольного конечного элемента с векторной интерполяцией полей перемещений [1].

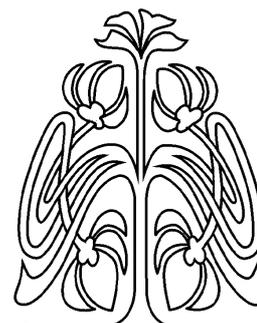
1. ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Положение произвольной точки M^0 срединной поверхности в декартовой системе координат $Oxyz$ определяется радиус-вектором

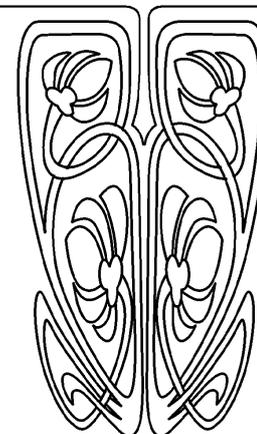
$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(x, \theta) \sin \theta \vec{j} + r(x, \theta) \cos \theta \vec{k}, \quad (1)$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — орты декартовой системы координат; θ — угол, отсчитываемый от оси Oz против хода часовой стрелки; $r(x, \theta) = \sqrt{1 - x^2/a^2} \times \frac{bc}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}$; a , b , c — параметры эллипсоида.

Дифференцированием (1) находятся векторы, касательные к поверхности эллипсоида



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,x}^0, \quad \vec{a}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^0, \quad (2)$$

а нормаль к поверхности определяется векторным произведением:

$$\vec{a}^0 = (\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0) / \sqrt{a^0}. \quad (3)$$

Производные базисных векторов (2), (3) можно представить компонентами векторов этого же базиса

$$\{\vec{a}_{,x}^0\} = [\alpha]\{\vec{a}^0\}, \quad \{\vec{a}_{,\theta}^0\} = [\beta]\{\vec{a}^0\},$$

где

$$\{\vec{a}^0\}^T = \{\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \vec{a}^0\}, \quad \{\vec{a}_{,x}^0\}^T = \{\vec{a}_{1,x}^0 \vec{a}_{2,x}^0 \vec{a}_{,x}^0\}, \quad \{\vec{a}_{,\theta}^0\}^T = \{\vec{a}_{1,\theta}^0 \vec{a}_{2,\theta}^0 \vec{a}_{,\theta}^0\}.$$

Положение произвольной точки оболочки $M^{0\zeta}$, отстоящей на расстоянии ζ от срединной поверхности оболочки, определяется радиус-вектором

$$\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta \vec{a}^0. \quad (4)$$

Векторы локального базиса \vec{g}_α^0 точки $M^{0\zeta}$ находятся дифференцированием (4)

$$\vec{g}_1^0 = \vec{R}_{,x}^0 = \vec{a}_1^0 + \zeta \vec{a}_{,x}^0, \quad \vec{g}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^0 = \vec{a}_2^0 + \zeta \vec{a}_{,\theta}^0.$$

2. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ДЕФОРМАЦИИ И ЗАКОН ГУКА

При использовании гипотезы прямой нормали вектор перемещения \vec{V} точки $M^{0\zeta}$ выражается через вектор перемещения \vec{v} точки M^0 срединной поверхности оболочки:

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta (\vec{a} - \vec{a}^0) = \vec{v} + \zeta \vec{v}^n, \quad (5)$$

где

$$\vec{v} = v^\rho \vec{a}_\rho^0 + v \vec{a}^0. \quad (6)$$

Производные векторов (6), (5) определяются выражениями

$$\vec{v}_{,\alpha} = f_\alpha^\rho \vec{a}_\rho^0 + f_\alpha \vec{a}^0, \quad \vec{V}_{,\alpha} = \vec{v}_{,\alpha} + \zeta \vec{v}_{,\alpha}^n, \quad (7)$$

$$\vec{v}_{,\alpha}^n = \frac{(\vec{a}_1^0 \times \vec{v}_{,1}) \times (\vec{a}_2^0 \times \vec{v}_{,2})}{\sqrt{a^0}} - \vec{a}^0 = h_\alpha^\rho \vec{a}_\rho^0 + h_\alpha \vec{a}^0, \quad (8)$$

где f_α^ρ , f_α , h_α^ρ , h_α — функции компонент вектора перемещения точки срединной поверхности и их производных. При получении (8) принято, что детерминант метрического тензора остается неизменным $\sqrt{a} = \sqrt{a^0}$.

Деформации в произвольной точке оболочки $M^{0\zeta}$ определяются выражениями [2]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{V}_{,\beta}^0 + \vec{V}_{,\alpha}^0 \cdot \vec{g}_\beta^0 = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \chi_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — деформации в соответствующей точке срединной поверхности оболочки; $\chi_{\alpha\beta}$ — искривления срединной поверхности оболочки.

Соотношения (9) можно представить в матричном виде:

$$\{\varepsilon^\zeta\} = [\Gamma] \{\varepsilon\} = [\Gamma] [D] \{v\} = [H] \{v\}, \quad (10)$$

где $\{\varepsilon^\zeta\}^T = \{\varepsilon_{11}^\zeta \varepsilon_{22}^\zeta \varepsilon_{12}^\zeta\}$, $\{v\}^T = \{v^1 v^2 v\}$, $[H]$ — матрица алгебраических и дифференциальных операций.

Соотношения между напряжениями и деформациями принимаются в виде [3]

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{\alpha\beta} + 2\nu g^{\alpha\rho} g^{\beta\gamma} \varepsilon_{\rho\gamma}^\zeta, \quad (11)$$

где $\sigma^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты тензора напряжений; $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{\rho\gamma}^\zeta g^{\rho\gamma}$ — первый инвариант тензора деформаций; $g^{\rho\gamma}$ — контравариантные компоненты метрического тензора; λ , μ — параметры Ламе.

Выражения (11) представляются в матричном виде:

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon^\zeta\}, \quad (12)$$

где $\{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{12}\}$.



3. МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

В качестве конечного элемента принят криволинейный четырехугольник с узлами i, j, k, l , являющийся фрагментом срединной поверхности оболочки. Узловыми неизвестными являются перемещения, их первые и вторые производные в локальной системе координат:

$$\{u_y\}_{1 \times 72}^T = \left\{ \begin{matrix} \{v_y^1\}_{1 \times 24}^T & \{v_y^2\}_{1 \times 24}^T & \{v_y\}_{1 \times 24}^T \end{matrix} \right\},$$

где

$$\{q\}_{1 \times 24}^T = \left\{ q^i q^j q^k q^l q_{,\xi}^i q_{,\xi}^j q_{,\xi}^k q_{,\xi}^l q_{,\eta}^i q_{,\eta}^j q_{,\eta}^k q_{,\eta}^l q_{,\xi\xi}^i q_{,\xi\xi}^j q_{,\xi\xi}^k q_{,\xi\xi}^l q_{,\xi\xi\eta}^i q_{,\xi\xi\eta}^j q_{,\xi\xi\eta}^k q_{,\xi\xi\eta}^l q_{,\xi\eta}^i q_{,\xi\eta}^j q_{,\xi\eta}^k q_{,\xi\eta}^l \right\},$$

(символом q обозначены перемещения v^1, v^2 или v).

Аппроксимация перемещений внутренней точки конечного элемента через узловые значения принималась в двух вариантах. В первом варианте использовалась аппроксимация перемещений как скалярных полей [4]:

$$v^1 = \{\phi\}_{1 \times 24}^T \{v_y^1\}_{24 \times 1}, \quad v^2 = \{\phi\}_{1 \times 24}^T \{v_y^2\}_{24 \times 1}, \quad v = \{\phi\}_{1 \times 24}^T \{v_y\}_{24 \times 1}. \quad (13)$$

С использованием (13), (12) и (10) и алгоритма [1, 2, 5] получена матрица жесткости четырехугольного элемента [4]:

$$[K_C] \{u_y\} = \{f_y\}.$$

Во втором варианте использована аппроксимация перемещений как векторных полей [2, 5]:

$$\vec{v} = \{\phi\}^T \{\vec{v}_y\}, \quad (14)$$

где $\{\vec{v}_y\}_{1 \times 24}^T = \left\{ \vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,\xi}^i \vec{v}_{,\xi}^j \vec{v}_{,\xi}^k \vec{v}_{,\xi}^l \vec{v}_{,\eta}^i \vec{v}_{,\eta}^j \vec{v}_{,\eta}^k \vec{v}_{,\eta}^l \vec{v}_{,\xi\xi}^i \vec{v}_{,\xi\xi}^j \vec{v}_{,\xi\xi}^k \vec{v}_{,\xi\xi}^l \vec{v}_{,\xi\xi\eta}^i \vec{v}_{,\xi\xi\eta}^j \vec{v}_{,\xi\xi\eta}^k \vec{v}_{,\xi\xi\eta}^l \vec{v}_{,\xi\eta}^i \vec{v}_{,\xi\eta}^j \vec{v}_{,\xi\eta}^k \vec{v}_{,\xi\eta}^l \right\}.$

На основе (14) получаются матричные соотношения:

$$\{v\}_{3 \times 1} = [L_w]_{3 \times 72} \{u_y\}_{72 \times 1}, \quad (15)$$

из которых следует, что каждая компонента вектора-столбца $\{v\} = \{v^1 v^2 v\}^T$ зависит от всех узловых компонент конечного элемента $\{v_y^1\}, \{v_y^2\}, \{v_y\}$.

С использованием (15), (12), (10) получена матрица жесткости конечного элемента [4]:

$$[K_w] \{u_y\} = \{f_y\}.$$

Срединные поверхности эллиптического цилиндра и эллиптического днища определяются в декартовой системе координат $Oxyz$:

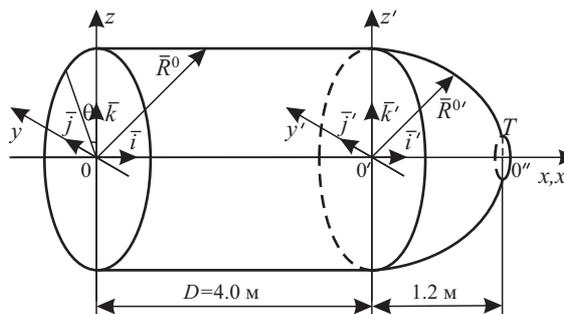
$$\vec{R}_u^0 = x\vec{i} + r(\theta) \sin \theta \vec{j} + r(\theta) \cos \theta \vec{k}, \quad \vec{R}_s^0 = x'\vec{i}' + r'(x'; \theta) \sin \theta \vec{j}' + r'(x'; \theta) \cos \theta \vec{k}',$$

где

$$r(\theta) = \frac{bc}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}, \quad r'(x'; \theta) = \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2}} \cdot \frac{bc}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}},$$

$x' = x - D$, D — длина цилиндра (рисунок).

При расчете эллиптического цилиндра с днищем из разнородных материалов на кривой пересечения срединных поверхностей узловыми неизвестными $\{z_y\}$ эллиптического цилиндра принимаются за основные, а узловыми неизвестными примыкающего днища $\{z'_y\}$ должны быть выражены через $\{z_y\}$. Векторы узловых неизвестных на кривой пересечения представим выражениями





$$\{z_y\}_{1 \times 18}^T = \{v^1 v^2 v v^1_{,x} v^2_{,x} v_{,x} v^1_{,\theta} v^2_{,\theta} v_{,\theta} v^1_{,xx} v^2_{,xx} v_{,xx} v^1_{,\theta\theta} v^2_{,\theta\theta} v_{,\theta\theta} v^1_{,x\theta} v^2_{,x\theta} v_{,x\theta}\}, \quad (16)$$

$$\{z'_y\}_{1 \times 18}^T = \left\{ v^{1'} v^{2'} v' v^{1'}_{,x} v^{2'}_{,x} v'_{,x} v^{1'}_{,\theta} v^{2'}_{,\theta} v'_{,\theta} v^{1'}_{,xx} v^{2'}_{,xx} v'_{,xx} v^{1'}_{,\theta\theta} v^{2'}_{,\theta\theta} v'_{,\theta\theta} v^{1'}_{,x\theta} v^{2'}_{,x\theta} v'_{,x\theta} \right\}. \quad (17)$$

Для получения зависимостей между компонентами векторов (17) и (16) используются следующие условия.

1. Равенство векторов перемещения точек срединных поверхностей эллиптического цилиндра и днища

$$\vec{V}' = \vec{V}, \quad (18)$$

откуда получаются зависимости

$$v^{1'} = v^1, \quad v^{2'} = v^2, \quad v' = v. \quad (19)$$

2. Равенство первой и второй производных векторов перемещений по координате θ

$$\vec{V}'_{,\theta} = \vec{V}_{,\theta}, \quad \vec{V}'_{,\theta\theta} = \vec{V}_{,\theta\theta},$$

откуда определяются соотношения

$$v^{1'}_{,\theta} = v^1_{,\theta}, \quad v^{2'}_{,\theta} = v^2_{,\theta}, \quad v'_{,\theta} = v_{,\theta}, \quad v^{1'}_{,\theta\theta} = v^1_{,\theta\theta}, \quad v^{2'}_{,\theta\theta} = v^2_{,\theta\theta}, \quad v'_{,\theta\theta} = v_{,\theta\theta}. \quad (20)$$

3. Равенство углов поворотов нормалей к срединным поверхностям эллиптического цилиндра и днища

$$v_{,x}' = v_{,x}. \quad (21)$$

4. Равенство нормальных усилий вдоль меридиана

$$\frac{E'h^3}{1-\nu'^2} (\varepsilon_{11}' + \nu\varepsilon_{22}') = \frac{Eh^3}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}),$$

откуда получается зависимость

$$v^{1'}_{,x} = \frac{Eh^3(1-\nu'^2)}{E'h^3(1-\nu^2)} (v^{1'}_{,x} + \nu v^{2'}_{,\theta}) - \nu' v^{2'}_{,\theta}. \quad (22)$$

5. Равенство касательных усилий

$$\frac{E'h'}{1+\nu'} \varepsilon_{12}' = \frac{Eh}{1+\nu} \varepsilon_{12}$$

приводит к выражению

$$v^{2'}_{,x} = \frac{Eh(1+\nu')}{E'h'(1+\nu)} v^{2'}_{,x}. \quad (23)$$

6. Равенство моментов

$$M_{xx} = M_{xx}'$$

дает возможность выразить вторую производную $v_{,xx}'$ функцией узловых неизвестных основной оболочки

$$v_{,xx}' = f(\{z_y\}). \quad (24)$$

На основе (21)–(24) составляется матричное соотношение

$$[z_y'] = [L]\{z_y\}, \quad (25)$$

с использованием которого формируется матричная зависимость:

$$\{u_y'\} = [L]\{u_y\}$$

для преобразования матрицы $[K_w]$ и вектора узловых нагрузок конечного элемента, примыкающего к границе пересечения оболочек узлами i, l

$$[K_w^{\Pi}] = [L]^T [K_w] [L], \quad [f_w^{\Pi}] = [L]^T \{f_y\}.$$



4. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера была решена задача об определении НДС оболочки в виде кругового цилиндра, сочлененного с эллипсоидом вращения, нагруженной внутренним давлением интенсивности q . Были приняты следующие исходные данные: радиус и длина цилиндра $R = 0.9$ м, $D = 4.0$ м; параметры эллипсоида $a = 1.3$ м; $b = c = 0.9$ м; толщина оболочки $t = 0.008$ м; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; $q = 1$ МПа. Вследствие наличия плоскостей симметрии рассматривалась 1/4 часть оболочки. Координаты x и θ принимали следующие значения: $0 \leq x \leq 5.2$ м, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Левый край оболочки шарнирно закреплен, правый край свободен. Расчеты выполнялись в двух вариантах: в первом варианте при формировании матрицы жесткости четырехугольного элемента дискретизации использовалась общепринятая интерполяция компонент вектора перемещения как скалярных величин [4]; во втором варианте применялась векторная интерполяция полей перемещений четырехугольного конечного элемента [1]. В обоих вариантах были реализованы разработанные условия сочленения оболочек (18)–(25). Результаты повариантных расчетов представлены в таблице, в которой приведены численные значения в МПа меридиональных σ_M и кольцевых напряжений σ_K в сечениях Oyz , $O'y'z'$, $O''T$ и при различных отношениях модулей упругости сочленяемых оболочек, при этом модулю упругости цилиндра придавались различные значения, а модуль упругости эллипсоида оставался неизменным.

Интерполяция		Скалярная				Векторная			
сечения	E/E'	1/1	1/10	1/100	1/1000	1/1	1/10	1/100	1/1000
$x = 0.0$ м	σ_M^B	47.92	47.9	47.9	47.4	47.9	47.9	47.9	47.9
	σ_M^H	47.92	47.9	47.9	47.4	47.9	47.9	47.9	47.9
	σ_K^B	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5
	σ_K^H	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5
$x = 4.0$ м	σ_M^B	46.1	128.9	199.7	210.8	46.2	129.3	200.2	211.6
	σ_M^H	49.9	-31.3	-101.1	-113.1	49.8	-31.6	-101.6	-112.8
	σ_K^B	100.5	63.7	63.5	63.7	100.5	63.8	63.6	63.8
	σ_K^H	101.6	15.7	-26.7	-33.5	101.6	15.5	-26.9	-33.5
$x = 5.2$ м	σ_M^B	-0.08	-11.64	-128.60	-1256.12	0.03	0.03	0.03	0.03
	σ_M^H	0.12	11.69	128.77	1257.41	0.05	0.05	0.05	0.05
	σ_K^B	84.2	72.5	-45.0	-1177.9	84.5	84.5	84.5	84.5
	σ_K^H	82.3	76.3	5.0	-682.2	83.6	83.6	83.6	83.6

Анализ табличного материала показывает, что результаты повариантного расчета практически совпадают при равенстве модулей упругости основной (цилиндра) и примыкающей (эллипсоида) оболочек. Однако с уменьшением значения модуля упругости цилиндра величины контролируемых параметров НДС в концевом сечении оболочки существенно отличаются друг от друга в зависимости от варианта расчета. Так как цилиндрическая часть оболочки становится все более податливой, то эллипсоидная часть оболочки получает дополнительную возможность смещаться как абсолютно твердое тело. Такое смещение не должно оказывать влияния на НДС конструкции, что наблюдается во втором варианте расчета, в котором реализована векторная интерполяция полей перемещений. В первом же варианте погрешность вычислений в концевом сечении стремительно нарастает. Меридиональные напряжения, которые по физическим соображениям должны быть равны нулю, так как концевое сечение незагружено, достигают неприемлемо больших значений. Кольцевые напряжения изменяют свой знак, что также является недопустимым. Таким образом, можно сделать вывод, что при расчете сочлененных оболочек с различными физико-механическими характеристиками материала необходимо использовать векторную интерполяцию перемещений в сочетании с разработанными корректными условиями сочленения.

Библиографический список

1. Ключков Ю. В., Николаев А. П., Киселева Т. А. Сравнение вариантов интерполяции перемещений на примере произвольной оболочки в форме эллипсоида // Вестн. Волгоград. гос. архит.-строит. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. 2011. Вып. 23(42). С. 54–59.
2. Николаев А. П., Ключков Ю. В., Киселев А. П., Гурева Н. А. Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах. Волгоград : ФГБОУ ВПО Волгоградский ГАУ, 2012. 264 с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. М. : Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
4. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л. : Судостроение, 1974. 344 с.



5. Клочков Ю. В., Николаев А. П., Киселева Т. А. Анализ НДС произвольной непологой оболочки в форме компенсатора с использованием векторной интерполяции полей перемещений // Изв. Волгоград. техн. ун-

та : межвуз. сб. науч. ст. № 10(97)/ ВолгГТУ. Волгоград : ИУНЛ ВолгГТУ, 2012 (Сер. Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. Вып. 14). С. 28–32.

Stress-strain State of an Elliptical Cylinder with an Ellipsoidal Bottoms of Dissimilar Materials Based FEM

J. V. Klochkov, A. P. Nikolaev, T. A. Kiseleva

Volgograd State Agricultural University, Russia, 400002, University av., 26, Klotchkov@bk.ru, anpetr40@yandex.ru, kiseleva_ta@ro.ru

The algorithm of calculating the construction in the form of an elliptical cylinder with ellipsoidal bottom of different materials based on the finite element method with the use of scalar and vector fields interpolating movements is described. As part of the sampling using rectangular curved finite elements with eighteen degrees of freedom in the node. Calculations of a circular cylinder with an articulated ellipsoid of rotation the verification of the algorithm and shows its effectiveness.

Key words: articulated shell, scalar interpolation, vector interpolation, rectangular finite element, ellipsoid, cylinder.

References

1. Klochkov J. V., Nikolaev A. P., Kiseleva T. A. Comparison of options interpolations movement as an example of an arbitrary shell in the shape of an ellipsoid. *Vestnik Volgogradskogo Gos. Arch.- Stroit. Univ. Ser. Str-vo i Arhit.* [Bulletin of the Volgograd State Architectural and Building Univ. Ser. The Construction and Arch.], 2011, no. 23(42), pp. 54–59 (in Russian).
2. Nikolaev A. P., Klochkov J. V., Kiselev A. P., Gureeva N. A. *Vektornaja interpoljacija polej peremeshhenij v konechno-jelementnyh raschetah* [Vector interpolation displacement fields in finite-element calculations]. Volgograd, 2012, 264 p. (in Russian).
3. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1976, vol. 1, 536 p. (in Russian).
4. Postnov V. A., Harhurim I. J. *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruksii* [The Finite Element Method in the Calculation of Ship Structures]. Leningrad, Sudostroenie, 1974. 344 p. (in Russian).
5. Klochkov J. V., Nikolaev A. P., Kiseleva T. A. Analysis VAT Arbitrary Nonshallow Shell in the Form of the Compensator Using Vector Interpolation of Displacement Fields. *Izvestiya Volgogradskogo Tekhnicheskogo Universiteta* [Proceedings of the Volgograd Technical University]: Interuniversity. Ser. Scientific. Art. no. 10 (97) / VolgGTU. Volgograd IUNL VolgGTU, 2012 (Ser. Actual problems of management, computer science and informatics in technical systems. iss. 14), pp. 28–32 (in Russian).

УДК 532.516:517.958:531.383

ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРУБЫ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ С УПРУГОЙ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ВНЕШНЕЙ ОБОЛОЧКОЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ДАВЛЕНИЯ

Д. В. Кондратов¹, Ю. Н. Кондратова², В. С. Попов³, И. В. Плаксина⁴

¹ Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной информатики и информационных технологий в управлении, Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина, Саратов, KondratovDV@yandex.ru

² Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KondratovaUN@info.sgu.ru

³ Доктор технических наук, заведующий кафедрой теплогазоснабжения, вентиляции, водообеспечения и прикладной гидродинамики, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., vic_p@bk.ru

⁴ Преподаватель кафедры прикладной информатики и информационных технологий в управлении, Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина, Саратов, chefirina@yandex.ru



Рассмотрена механическая модель, представленная в виде трубы кольцевого сечения, образованная двумя поверхностями соосных цилиндрических оболочек, взаимодействующими с вязкой несжимаемой жидкостью. Построена математическая модель этой системы, состоящая из дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих динамику вязкой несжимаемой жидкости и упругой ребристой оболочки совместно с граничными условиями.

Ключевые слова: гидроупругость, вязкая жидкость, труба кольцевого сечения, геометрически нерегулярная оболочка.

В настоящее время в различных областях техники используются такие современные конструкции, которые представляют собой сложные системы, описывающие взаимодействия твердых, упругих и жидких тел. Такие конструкции могут быть описаны моделью, состоящей из двух цилиндрических оболочек, вложенных друг в друга, между которыми расположена жидкость. Примерами использования таких моделей с двумя цилиндрическими оболочками могут служить двигатели внутреннего сгорания, поплавковые приборы навигации, жидкостные ракетные двигатели [1–5]. В таких моделях жидкость между оболочками может служить не только для демпфирования собственных колебаний оболочек, но и для охлаждения этих оболочек. Кроме того, внешняя оболочка может быть геометрически нерегулярной, а внутренняя — абсолютно жесткой.

Рассмотрим механическую модель, представляющую собой круглую трубу кольцевого сечения, образованную двумя поверхностями соосных цилиндрических оболочек, взаимодействующими с вязкой несжимаемой жидкостью. Такая система представлена на рис. 1.

Между цилиндрическими оболочками рассматривается ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости, причем внешняя оболочка является упругой геометрически нерегулярной, а внутренняя оболочка является абсолютно жестким цилиндром. Ширина h_0 цилиндрической щели кольцевого сечения значительно меньше внешнего радиуса R_2 внутренней оболочки и внутреннего радиуса R_1 и радиуса срединной поверхности R внешней оболочки $h_0 = 2(R - R_1) \ll R$. Радиус срединной поверхности оболочки равен R , а ее толщина на участках, где отсутствуют ребра жесткости, равна h_0 . Длины цилиндрических оболочек l — одинаковые, а упругие перемещения внешней оболочки значительно меньше ширины δ цилиндрической щели. Течение жидкости происходит под действием переменного по времени перепада давления. Перемещение внутренней оболочки относительно внешней на торцах отсутствует. Механическая система считается термостабилизированной.

Рассмотрим систему координат $O_1x_1y_1z_1$ и свяжем ее с основанием, к которому крепится механическая система. Центр системы O_1 расположен в геометрическом центре соосных оболочек в невозмущенном состоянии. Будем полагать, что перемещения вдоль оси O_1y_1 отсутствуют. Рассмотрим дополнительно необходимую далее цилиндрическую систему координат r, θ, y ($\bar{n}_r, \bar{n}_\theta, \bar{j}$ — орты цилиндрической системы). Полюс цилиндрической системы координат совпадает с началом координат $O_1x_1y_1z_1$ и направления осей Oy, O_1y_1 цилиндрической и декартовой систем координат совпадают (рис. 2).

Внешняя поверхность внешней оболочки трубы является геометрически нерегулярной и имеет n ребер жесткости ступенчато изменяющейся высоты. Ребра представляют собой внешние шпангоуты. Крепление геометрически нерегулярной оболочки на торцах имеет свободное опирание. Ребра жесткости характеризуются своей высотой h_{pj} , длиной ε_{0j}^* и продольной координатой начала ребра y_j . При этом высота ребра при движении вдоль оболочки изменяется скачкообразно. Нормальная к координатной поверхности координата z , внутренней поверхности оболочки постоянна $z_1 = -h_0/2$.

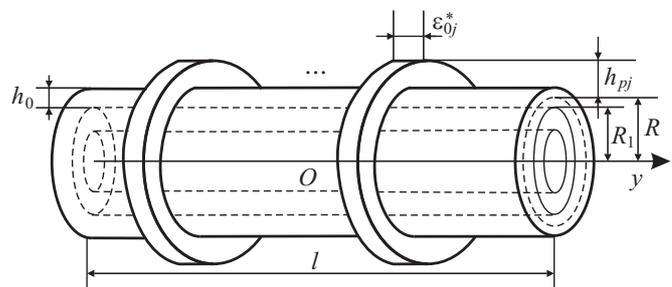


Рис. 1. Механическая модель

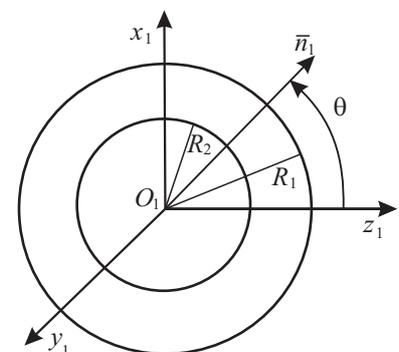


Рис. 2. Системы координат



Часть внешней поверхности оболочки постоянна $z_2 = h_0/2$, а расположенные вдоль оси Oy в точках y_j ($j = 1, 2, \dots, n$) ребра ограничены по высоте поверхностями

$$z_2 = h_{pj} - h_0 = \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}}\right) h_{pj}.$$

Таким образом, получается, что внешняя оболочка имеет разрывы в точках оси Oy и в связи с этим возникает трудность в ее описании. Можно воспользоваться единичной функцией Хевисайда $\Gamma(y)$, которая определяется как

$$\Gamma(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y < 0, \\ 1, & \text{если } y \geq 0. \end{cases}$$

Тогда ступенчатый характер изменения высоты ребра можно описать с помощью разностей функций Хевисайда по продольной координате. Тогда внешнюю поверхность оболочки можно описать с помощью общего уравнения:

$$z_2 = \frac{h_0}{2} + \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}}\right) h_{pj} \Delta\Gamma_{yj},$$

где $\Delta\Gamma_{yj} = \Gamma(y - y_j) - \Gamma(y - y_j - \varepsilon_{0j}^*)$, $\Gamma(y)$ — единичная функция Хевисайда по продольной координате; y_j — точка появления ребра по продольной координате.

Математическая модель рассматриваемой механической системы состоит из дифференциальных уравнений в частных производных описывающих динамику вязкой несжимаемой жидкости и упругой ребристой оболочки совместно с граничными условиями. Наличие жидкости в системе приводит к быстрому затуханию собственных колебаний, и переходный процесс можно не рассматривать, поэтому рассматриваются только вынужденные колебания.

Течение вязкой несжимаемой жидкости между цилиндрическими оболочками осесимметричное и описывается уравнениями Навье–Стокса. В цилиндрической системе координат эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_k}{\partial r} + V_y \frac{\partial V_k}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial k} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_k}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_k}{\partial y^2} - \chi \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $k = r$ или y ; $\chi = 1$ при $k = r$, $\chi = 0$ при $k = y$; V_y, V_r — компоненты вектора скорости жидкости в цилиндрической системе координат (\bar{n}_r, \bar{j}) , начало O которой находится в центре внутренней оболочки; p — давление жидкости; ρ — плотность жидкости; ν — кинематический коэффициент вязкости; y — координата вдоль оси симметрии Oy ; r — расстояние от оси Oy ; t — время.

Граничные условия для системы (1) представляют собой условия прилипания вязкой жидкости к поверхностям оболочек и условия для давления на концах механической системы:

$$V_r = \frac{\partial u_3}{\partial t}, \quad V_y = -\frac{\partial u_1}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_2 + \delta + u'_3;$$

$V_r = 0, V_y = 0$ при $r = R_2$; $p = p^+$ при $y = l/2, p = p^-$ при $y = -l/2$, где u_3 — прогиб внешней оболочки, положительный в сторону, противоположную центру кривизны; u_1 — продольное перемещение оболочек положительное, в сторону противоположную оси Oy .

Для вывода уравнений динамики ребристой оболочки применим вариационный интегральный принцип Гамильтона. Принцип Гамильтона в цилиндрической системе координат можно записать в виде

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [L + (\bar{q}, \bar{u})] dt = 0, \quad (2)$$

$$L = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \iint_{\Omega} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \bar{u}^z}{\partial t}, \frac{\partial \bar{u}^z}{\partial t} \right) - (\sigma_s \varepsilon_s^z + \sigma_\theta \varepsilon_\theta^z + \tau_{s\theta} \gamma_{y\theta}^z) \right] dz d\Omega, \quad (3)$$



где L — функция Лагранжа; \bar{q} — вектор поверхностных усилий; $\bar{u} = u_1\bar{n}_y + u_2\bar{n}_\theta + u_3\bar{n}$ — вектор упругих перемещений координатной поверхности оболочки ($\bar{n}_y, \bar{n}_\theta, \bar{n}$ — продольное и окружное направления в координатной поверхности оболочки и нормаль к ней); ρ_0 — плотность материала оболочки; \bar{u}^z — вектор упругих перемещений точек оболочки, отстоящих от координатной поверхности на расстоянии z ; $\sigma_y, \sigma_\theta, \tau_{y\theta}$ — компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_y^z, \varepsilon_\theta^z, \gamma_{y\theta}^z$ — компоненты тензора упругой деформации; $d\Omega = R d\theta ds$.

Согласно гипотезам Кирхгофа–Лява имеем:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u_1^z \bar{n}_y + u_2^z \bar{n}_\theta + u_3^z \bar{n}, \\ u_1^z &= u_1 - z \frac{\partial u_3}{\partial y}, \quad u_2^z = u_2 - z \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} - \frac{u_2}{R} \right), \quad u_3^z = u_3, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu_0^2} (\varepsilon_y^z + \mu_0 \varepsilon_\theta^z), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1 - \mu_0^2} (\varepsilon_\theta^z + \mu_0 \varepsilon_y^z), \quad \tau_{y\theta} = \frac{E}{2(1 + \mu_0)} \gamma_{y\theta}^z, \quad \varepsilon_y^z = \frac{\partial u_1}{\partial y} - z \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_\theta^z &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{u_3}{R} - z \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u_2}{\partial \theta} \right), \quad \gamma_{y\theta}^z = \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial y} - z \frac{2}{R} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial \theta} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где E — модуль Юнга материала оболочки; μ_0 — коэффициент Пуассона.

Уравнение (2) для оболочки ($-l/2 \leq y \leq l/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) после преобразования функции Лагранжа (3) согласно (4) и интегрирования по z запишется в виде

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} \left\{ \left[R \frac{\partial N_1^p}{\partial y} + \frac{\partial S^p}{\partial \theta} + R q_y - R h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) \right] \delta u_1 + \right. \\ & + \left[R \frac{\partial S^p}{\partial y} + \frac{\partial N_2^p}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2^p}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial H^p}{\partial y} + R q_\theta - R h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) \right] \delta u_2 + \\ & + \left. \left[R \frac{\partial^2 M_1^p}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_2^p}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial H^p}{\partial y \partial \theta} - N_2^p + R q_n - R h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) \right] \delta u_3 \right\} dy d\theta dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^{2\pi} \left[R N_1^p \delta u_1 + (R S^p + H^p) \delta u_2 + \left(R \frac{\partial M_1^p}{\partial y} + 2 \frac{\partial H^p}{\partial \theta} \right) \delta u_3 - R M_1^p \delta \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \right]_{-l/2}^{l/2} d\theta dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{-l/2}^{l/2} \left[S^p \delta u_1 + \left(N_2^p + \frac{1}{R} M_2^p \right) \delta u_2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial M_2^p}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial H^p}{\partial y} \right) \delta u_3 - \frac{1}{R} M_2^p \delta \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) \right]_0^{2\pi} dy dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} 2 H^p \delta u_3 \Big|_0^{2\pi} \Big|_{-l/2}^{l/2} dt + R h \iint_{\Omega} \left[\left(\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} \delta u_1 + \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial t} \delta u_2 + \rho_0 \frac{\partial u_3}{\partial t} \delta u_3 \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) \right]_{t_0}^{t_1} dy d\theta = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} S^p &= \frac{E h_0}{2(1 + \mu_0)} \left\{ \gamma_{y\theta} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) + 2 \kappa_{y\theta} h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj} \right\}; \\ H^p &= \frac{E h_0^3}{12(1 + \mu_0)} \kappa_{y\theta} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{yj} \right) + \frac{E h_0}{2(1 + \mu_0)} \gamma_{y\theta} h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj}; \\ N_1^p &= \frac{E h_0}{1 - \mu_0^2} \left\{ (\varepsilon_y + \mu_0 \varepsilon_\theta) \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) + (\kappa_y + \mu_0 \kappa_\theta) h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj} \right\}; \end{aligned}$$



$$N_2^p = \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \left\{ (\varepsilon_\theta + \mu_0 \varepsilon_y) \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) + (\kappa_\theta + \mu_0 \kappa_y) h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj} \right\},$$

$$M_1^p = \frac{Eh_0^3}{12(1 - \mu_0^2)} (\kappa_y + \mu_0 \kappa_\theta) \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{yj} \right) + \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} (\varepsilon_y + \mu_0 \varepsilon_\theta) h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj},$$

$$M_2^p = \frac{Eh_0^3}{12(1 - \mu_0^2)} (\kappa_\theta + \mu_0 \kappa_y) \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{yj} \right) + \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} (\varepsilon_\theta + \mu_0 \varepsilon_y) h_0 \sum_{i=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yi},$$

$$k_{1j} = \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}}{h_0}, \quad k_{2j} = \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}^2}{2h_0^2}, \quad k_{3j} = \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \left(4 - 2 \frac{h_0}{h_{pj}} + \frac{h_0^2}{h_{pj}^2} \right) \frac{h_{pj}^3}{h_0^3},$$

где компоненты деформации координатной поверхности оболочки $\varepsilon_y, \varepsilon_\theta, \gamma_{y\theta}, \kappa_y, \kappa_\theta, \kappa_{y\theta}$ связаны с компонентами вектора перемещений координатной поверхности оболочки следующими соотношениями:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + u_2 \right), \quad \gamma_{y\theta} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \theta}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2},$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right), \quad \kappa_{y\theta} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial \theta} \right).$$

Из вариационного уравнения (5) получаем необходимые уравнения динамики геометрически нерегулярной оболочки и краевые условия. Три уравнения динамики оболочки получаются, если в первом интеграле обратить в нуль коэффициенты при независимых вариациях. Остальные члены уравнения (5) определяют краевые условия задачи.

В случае осесимметричной деформации ребристой оболочки уравнения имеют вид [6]

$$\frac{\partial N_1^p}{\partial y} - h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) = -q_y, \quad \frac{\partial^2 M_1^p}{\partial y^2} - \frac{1}{R} N_2^p - h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) = -q_n,$$

где зависимости обобщенных сил N_1^p, N_2^p и обобщенного момента M_1^p от перемещений имеют вид

$$N_1^p = \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \left\{ \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} + \mu_0 \frac{1}{R} u_2 \right] \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj} \right\},$$

$$N_2^p = \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \left\{ \left[\frac{1}{R} u_3 + \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) - \mu_0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj} \right\},$$

$$M_1^p = -\frac{Eh_0^3}{12(1 - \mu_0^2)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{yj} \right) + \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \mu_0 \frac{1}{R} u_3 \right) h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj}$$

и граничные условия для перемещений на торцах $\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0, u_2 = 0, \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0$ при $y = -l/2$ и $y = l/2$.

Тогда уравнения динамики ребристой оболочки в цилиндрической системе координат при осесимметричном деформации имеют вид

$$\frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left[\frac{\partial u_1}{\partial y} - \mu_0 \frac{u_3}{R} \right] \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj} \right) =$$

$$= h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) - q_y,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{Eh_0^3}{12(1 - \mu_0^2)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \left[1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{yj} \right] + \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} - \mu_0 \frac{u_3}{R} \right] h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj} \right) +$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{R} \frac{E h_0}{1 - \mu_0^2} \left\{ \left[\frac{u_3}{R} - \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) - \mu_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} h_0 \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{yj} \right\} = \\
 & = -h_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{yj} \right) + q_n,
 \end{aligned}$$

где $k_{1j} = \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}}{h_0}$, $k_{2j} = \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}^2}{2h_0^2}$, $k_{3j} = \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \left(4 - 2 \frac{h_0}{h_{pj}} + \frac{h_0^2}{h_{pj}^2} \right) \frac{h_{pj}^3}{h_0^3}$.

Здесь $\Delta \Gamma_{yj} = \Gamma(y - y_j) - \Gamma(y - y_j - \varepsilon_{0j}^*)$, $\Gamma(y)$ — единичная функции Хевисайда по продольной координате y ; y_j — точка появления ребра по продольной координате; μ_0 — коэффициент Пуассона материала оболочки; E — модуль Юнга материала оболочки; ρ_0 — плотность материала оболочки.

Таким образом, были получены уравнения динамики геометрически нерегулярной оболочки с ребрами жесткости ступенчато изменяющейся высоты.

Поверхностная нагрузка определяется напряжением со стороны жидкости

$$q_s = - \left[p_{ry} \cos(\hat{n}, \hat{n}_r) + p_{yy} \cos(\hat{n}, \hat{j}) \right] \Big|_{r=R_2+\delta+u_3}, \quad q_n = - \left[p_{rr} \cos(\hat{n}, \hat{n}_r) + p_{ry} \cos(\hat{n}, \hat{j}) \right] \Big|_{r=R_2+\delta+u_3},$$

где \hat{n} — единичный вектор нормали к срединной поверхности оболочки; \hat{s} — единичный вектор в продольном направлении в срединной поверхности оболочки, противоположный единичному вектору \hat{j} ; \hat{n}_r, \hat{j} — единичные векторы введенной цилиндрической системы координат,

$$\begin{aligned}
 k_{1j} &= \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}}{h_0}, & k_{2j} &= \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}^2}{2h_0^2}, & k_{3j} &= \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \left(4 - 2 \frac{h_0}{h_{pj}} + \frac{h_0^2}{h_{pj}^2} \right) \frac{h_{pj}^3}{h_0^3}, \\
 p_{rr} &= -p + 2\nu\rho \frac{\partial V_r}{\partial r}, & p_{ry} &= \nu\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial r} \right), & p_{yy} &= -p + 2\nu\rho \frac{\partial V_y}{\partial y},
 \end{aligned}$$

$$\cos(\hat{n}, \hat{n}_r) = \frac{R_2 + \delta + u_3}{|\bar{N}|}, \quad \cos(\hat{n}, \hat{j}) = - \frac{R_2 + \delta + u_3}{|\bar{N}|} \frac{\partial u_3}{\partial y}, \quad |\bar{N}| = (R_2 + \delta + u_3) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right)^2}.$$

Граничные условия уравнений представляют собой условия свободного (шарнирного) опирания:

$$u_3 = 0, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm l/2.$$

Таким образом, получили связанную задачу гидроупругости для круглой трубы кольцевого сечения с абсолютно жестким внутренним цилиндром и упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой, свободно опираемой на концах трубы.

Выполнено при поддержке гранта Президента РФ (проект МД-1025.2012.8) и грантов РФФИ (проекты 12-01-31154-мол_а, 12-01-31161-мол_а).

Библиографический список

1. Башта Т. М. Машиностроительная гидравлика. М. : Машгиз, 1963. 696 с.
2. Могилевич Л. И., Андрейченко К. П. Динамика гироскопов с цилиндрическим поплавковым подвесом. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1987. 160 с.
3. Могилевич Л. И., Попов В. С. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроении / ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ». Саратов, 2003. 156 с.
4. Симдянкин А. А. Контактное-силовое взаимодействие деталей цилиндрической группы / ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ». Саратов, 2003. 144 с.
5. Кондратов Д. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при свободном торцевом истечении в условия вибрации // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2007. № 3(26), вып. 1. С. 22–31.
6. Могилевич Л. И., Попова А. А., Попов В. С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64–72.



The Problem of a Hydroelasticity for a Tube Ring-type a Profile with Elastic, Geometrically Irregular Outer Shell at Pressure Influence

D. V. Kondratov¹, Y. N. Kondratova², V. S. Popov³, I. V. Plaksina⁴

¹Stolyin Volga Region Institute Russian Academy of Public Administration under the President of the Russian Federation, Russia, 410031, Saratov, Sobornaya st., 23/25, KondratovDV@yandex.ru

²Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, KondratovaUN@info.sgu.ru

³Saratov State Technical University, Russia, 410054, Saratov, Politekhnikeskaya st., 77, vic_p@bk.ru

⁴Stolyin Volga Region Institute Russian Academy of Public Administration under the President of the Russian Federation, Russia, 410031, Saratov, Sobornaya st., 23/25, chefirina@yandex.ru

The mechanical model presented in the form of a tube of ring section, formed by two surfaces of coaxial cylindrical shells cooperating with viscous incompressible liquid is considered. The mathematical model of this system consisting of the differential equations in private derivatives of describing dynamics of viscous incompressible liquid and an elastic ridge shell together with boundary conditions is constructed.

Key words: hydroelasticity, viscous liquid, tube of ring section, geometrically irregular shell.

References

1. Bashta T. M. *Mashinostroitel'naya gidravlika* [Machine-building hydraulics]. Moscow, Mashgiz, 1963, 696 p. (in Russian).
2. Mogilevich L. I., Andrejchenko K. P. *Dinamika giroskopov s tsilindricheskim poplavkovym podvesom* [Dynamics of gyroscopes with cylindrical floating suspension]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1987, 160 p. (in Russian).
3. Mogilevich L. I., Popov V. S. *Prikladnaia gidrouprugost' v mashino- i priborostroenii* [Applied hydroelasticity in mechanical engineering and instrument making]. Saratov, 2003, 156 p. (in Russian).
4. Simdyankin A. A. *Kontaktno-silovoe vzaimodeistvie detalei tsilindro-porshnevoi gruppy* [The kontakt-force interaction of details cylidr-piston group]. Saratov, 2003, 144 p. (in Russian).
5. Kondratov D. V., Mogilevich L. I. Mathematical modelling of processes of interaction of two cylindrical environments with the layer of the liquid between them under free leakage conditions of foundation vibration. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2007, no. 3(26), iss. 1, pp. 22–31 (in Russian).
6. Mogilevich L. I., Popova A. A., Popov V. S. Dynamics's priests of interaction of an elastic cylindrical environment with a laminar stream of a liquid inside of it with reference to pipeline transport. *Nauka i tekhnika transporta*, 2007, no. 2, pp. 64–72 (in Russian).

УДК 501.1

БИОМЕХАНИКА СОННОЙ АРТЕРИИ ЧЕЛОВЕКА С ПАТОЛОГИЧЕСКОЙ ИЗВИТОСТЬЮ

Л. Ю. Коссович¹, К. М. Морозов², О. Е. Павлова³

¹Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, papo-bio@sgu.ru

²Ведущий научный сотрудник отдела хирургии сосудов, Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова, papo-bio@sgu.ru

³Инженер отдела биомеханики ОНИ наноструктур и биосистем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Pavlova@info.sgu.ru

Патологическая извитость сонной артерии занимает второе место в структуре причин сосудисто-мозговой недостаточности. Ранее авторами уже было описано влияние типа патологической извитости на поведение сонной артерии. В данной работе рассмотрено влияние различных анатомических (угол изгиба, размер ампулы) и реологических (уровень гематокрита) факторов на гемодинамику и напряженно-деформированное состояние сонной артерии с патологической извитостью. Выявлено, что уменьшение угла изгиба приводит к снижению объема крови, поступающей в мозг, и возможному формированию септального стеноза в области изгиба, а снижение уровня гематокрита способствует инициации процесса атерогенеза в зоне изгиба внутренней сонной артерии. Проведено численное моделирование реконструктивной операции на патологически извитой сонной артерии конкретного человека с атеросклеротическим поражением. Проведен расчет модели с предполагаемой геометрией сонной артерии данного пациента до возникновения патологий. Показано, что объемный кровоток после операции восстанавливается на 11%, но не достигает значений для сонной артерии данного пациента в норме.

Ключевые слова: конечно-элементный анализ, патологическая извитость, сонная артерия, биомеханика.



ВВЕДЕНИЕ

Сердечно-сосудистые заболевания являются одной из самых важных медицинских и социальных проблем в связи с их широкой распространенностью и тяжелыми последствиями для здоровья населения. Инсульт занимает второе место в структуре смертности, уступая лишь ишемической болезни сердца. В 2011 году в России было зарегистрировано около 882 тыс. случаев инсульта [1], из них около 333 тыс. привели к летальному исходу [2]. Необходимо отметить, что остаточные изменения встречаются у 30% больных, перенесших инсульт, а трудоспособность восстанавливается лишь у 10% больных [3].

Основными причинами, приводящими к возникновению ишемического инсульта, являются атеросклероз и патологические извитости внутренних сонных и позвоночных артерий. Распространенность патологической извитости (ПИ) сонной артерии (СА) составляет около 26% среди людей, имеющих клинические симптомы или факторы риска сердечно-сосудистых заболеваний [4].

В соответствии с общепринятой классификацией выделяют четыре вида патологических извитостей: С- и S-образные изгибы, перегиб под острым углом и петле- и спиралеобразные извитости (рис. 1).

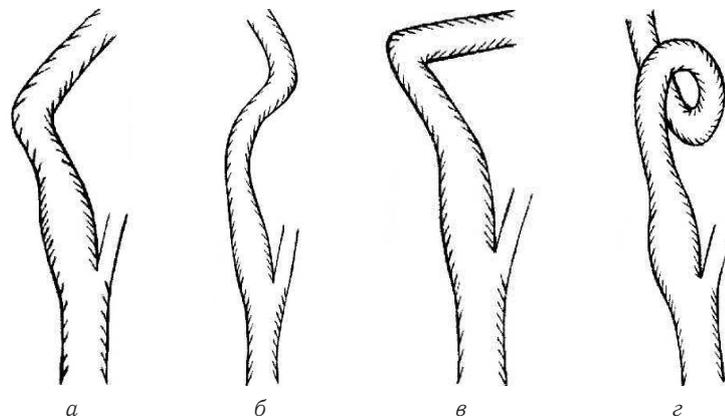


Рис. 1. Виды патологических извитостей: *а* — С-образный изгиб, *б* — S-образный изгиб, *в* — перегиб, *г* — петля

Каждая форма извитости по-своему влияет на гемодинамику и напряженно-деформированное состояние сонной артерии. Результаты исследования влияния типа ПИ были описаны в предыдущих работах [5, 6]. На поведение сонной артерии с конкретным видом ПИ оказывают влияние также размер ампулы СА, угол изгиба, уровень гематокрита в крови.

Таким образом, целью данной работы было биомеханическое исследование влияния перечисленных выше анатомических и реологических факторов на гемодинамические характеристики потока и напряженно-деформированное состояние стенок сосуда, а также последующее численное моделирование реконструктивной операции на сонной артерии с патологической извитостью для конкретного человека.

1. МЕТОДЫ

1.1. Построение модели

Построение трехмерных геометрических моделей сонных артерий с патологическими извитостями происходило на основе данных компьютерной томограммы с использованием специализированного программного пакета SolidWorks 2008 (SolidWorks corporation).

Исследование влияние анатомических и реологических факторов было проведено на примере сонной артерии с С-образным изгибом. Были построены модели СА в норме (рис. 2, *а*), с углом изгиба от 130° до 90° (рис. 2, *б-е*), с разными ампулами, отношение диаметра которой к диаметру сосуда составляло от 1 до 2.5 (рис. 2, *ж-к*).

Для исследования влияния уровня гематокрита на гемодинамику сонной артерии с патологической извитостью использовалась геометрия, представленная на рис. 2, *б*.

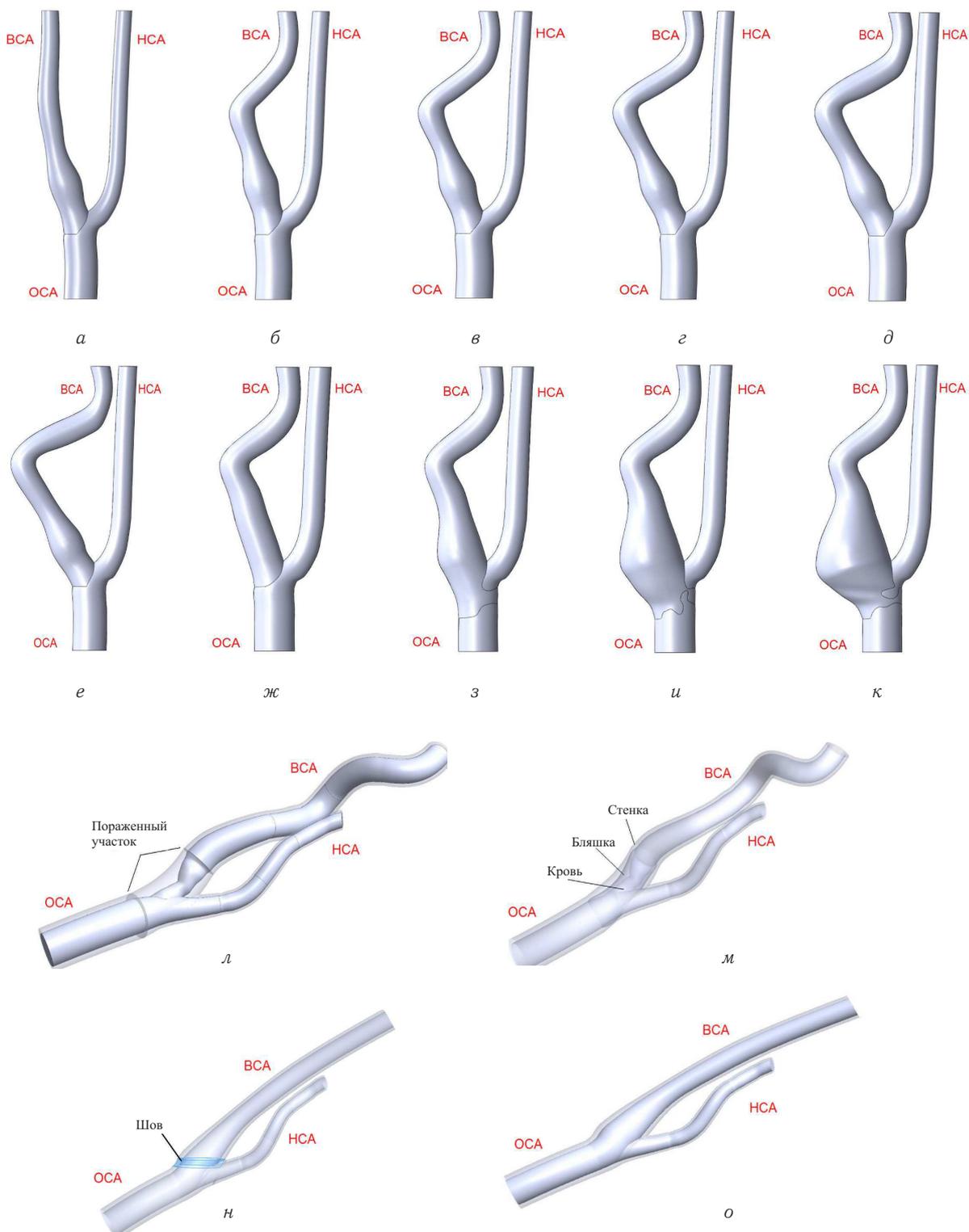


Рис. 2. Объемы, занимаемые кровью, для: *а* – СА в норме, *б* – СА с углом изгиба 130° , *в* – СА с углом изгиба 120° , *г* – СА с углом изгиба 110° , *д* – СА с углом изгиба 100° , *е* – СА с соотношением диаметра ампулы к диаметру сосуда 1, *з* – СА с соотношением 1.5, *и* – СА с соотношением 2, *к* – СА с соотношением 2.5, *л* – СА с S-образной извитостью и пораженным атеросклерозом участком, *м* – СА с S-образной извитостью и атеросклеротической бляшкой, *н* – СА после операции со швом, *о* – СА до патологии



Моделирование реконструктивной операции было выполнено для пациента, у которого сонная артерия была поражена атеросклерозом в области бифуркации общей сонной артерии (ОСА) и устья внутренней сонной артерии (ВСА), сужающим просвет сосуда на 75%, с последующей S-образной патологической извитостью ВСА. Было рассмотрено две модели. В первом случае пораженный атеросклерозом участок представлял собой один объем (модель 1, рис. 2, л), во втором — два объема, соответствующих стенке и бляшке (модель 2, рис. 2, м). Была построена модель СА этого пациента после хирургического вмешательства (рис. 2, н) как описано в [7], но с выделением области шва в отдельное тело. Кроме того, была построена модель СА, предполагающая геометрию сосуда до возникновения патологий (рис. 2, о).

1.2. Численный эксперимент

Численные расчеты были проведены в конечно-элементном пакете Ansys (Ansys Inc., USA), который часто используется для решения задач биомеханики [8–10]. В качестве сетки для построенных геометрических моделей использовалось неструктурированное разбиение тетраэдрами ввиду сложности геометрии сосуда. Была исследована сеточная сходимость и выбран размер элемента 0.0003 м.

Кровь предполагалась ньютоновской жидкостью с плотностью $\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$ и коэффициентом динамической вязкости $\mu = 0.0037 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Ее движение описывается уравнением Навье–Стокса для несжимаемой жидкости.

При исследовании влияния уровня гематокрита на гемодинамику и напряженно-деформированное состояние (НДС) сонной артерии с патологической извитостью значения вязкости и плотности крови изменялись, как показано в табл. 1.

На входе в сонную артерию задавалась функция скорости, на выходах из ВСА и наружной сонной артерии задавалось постоянное давление. При моделировании сонной артерии конкретного человека использовались значения скорости, полученные в результате доплерографического исследования данного пациента.

Материал стенки предполагался гиперупругим. Движение стенки описывается уравнением Навье–Ламе. Торцы сосуда были закреплены. Задавалось условие взаимодействия твердого тела и жидкости (Fluid-Solid Interaction).

Для моделирования гиперупругого материала использовалась трехпараметрическая модель Муни–Ривлина. Кривые зависимости напряжения от деформации были взяты из литературных данных. При исследовании влияния анатомических и реологических факторов на гемодинамику и НДС сосуда были взяты результаты эксперимента на одноосное растяжение, приведенные в работе [11]. Для описания механических свойств стенки конкретного пациента и бляшки в модели 2 использовались данные из работы [12], пораженного атеросклерозом участка в модели 1 — результаты эксперимента на двухосное растяжение пораженной атеросклерозом ткани из работы [13]. Механические характеристики участка стенки, соответствующего шву, были взяты в виде $E = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ (модуль Юнга) и $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$ (плотность).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

2.1. Исследование влияния анатомических и реологических факторов

Уменьшение угла изгиба приводит к уменьшению объема крови, поступающей в головной мозг. Для угла изгиба 90° уменьшение среднего объемного кровотока за сердечный цикл по сравнению с нормой составляет 10%. Увеличиваются максимальные значения касательных напряжений (КНС), эквивалентных напряжений (ЭН) и циклических деформаций (ЦД) в месте изгиба, локализующиеся на вогнутой стороне стенки изгиба (табл. 2), что вызывает повреждение стенки.

Таблица 1
Уровень гематокрита и соответствующие ему вязкость и плотность

Уровень гематокрита, %	Вязкость, Па·с	Плотность, кг/м ³
42	0.0039	1055
35	0.0034	1051
26	0.00275	1046
20	0.0025	1040

Таблица 2
Напряженно-деформированное состояние стенки в месте изгиба

Модель	КНС, Па	ЭН, Па	ЦД
норма	18.53	22596	0.021
130°	19.68	23014	0.0298
120°	20.29	23591	0.0317
110°	22.3	26069	0.0363
100°	21.47	27901	0.0372
90°	23.87	31156	0.0398



Увеличение размера ампулы приводит к незначительному изменению объемного кровотока (менее 0.5%). Средние значения давления, эквивалентных напряжений и циклических деформаций оказываются выше для большего размера ампулы (табл. 3), что может вызвать дальнейший рост ампулы.

Таблица 3

Показатели гемодинамики и НДС в ампуле СА

Параметры	Соотношение диаметров ампулы и сосуда			
	1	1.5	2	2.5
Давление, Па	1410	1738	2171	2677
ЭН, Па	23532	28962	35473	40464
ЦД	0.0352	0.0414	0.0483	0.0507

на выпуклой стороне стенки увеличивается. Согласно гемодинамической теории атерогенеза области низких КНС являются благоприятным местом для развития атеросклероза.

2.2. Моделирование реконструктивной операции

Результаты численного анализа показали, что модель сонной артерии конкретного пациента, в которой пораженный атеросклерозом участок состоит из стенки и бляшки (модель 2 на рис. 2, м), лучше отражает имеющие место процессы. Систолическое значение скорости в месте сужения для модели № 1 составляет 1.84 м/с, а для модели 2 — 2.05 м/с, что на 16.36% и 6.82% соответственно меньше значения, полученного в ходе ультразвукового исследования. Для модели 2 значения давления выше и перепад давления в месте поражения СА атеросклерозом больше, чем для модели 1 на 187.1 Па (1.4 мм рт. ст.).

Низкие касательных напряжений стенки концентрируются сразу, после места максимального сужения сосуда и в местах изгиба на вогнутой стороне стенки. Максимальные значения КНС концентрируются на поверхности атеросклеротической бляшки, для модели 2 они на 2.21 Па выше, чем для модели 1.

Для модели 1 максимальные значения эквивалентных напряжений ниже на 5153 Па, чем для модели 2. Для модели 1 наблюдается повышение эквивалентных напряжений на стенке сосуда на стыке с пораженным атеросклерозом участком. Для модели 2 повышение значений ЭН наблюдается в зоне контакта сосудистой стенки и атеросклеротического поражения, что говорит о возможности ее отслоения.

В сонной артерии после хирургического вмешательства наблюдается нормальное распределение касательных напряжений на стенке сосуда, соответствующее распределению в сосуде до возникновения патологии. Максимальные значения эквивалентных напряжений концентрируются в апексе СА и более чем в два раза выше ЭН, наблюдающихся в сосуде до возникновения патологии. Высокие значения ЭН наблюдаются и в зоне шва, что может свидетельствовать о возможном рестенозе на данном участке сосуда.

Среднее значение объемного кровотока для модели 1 больше, чем для СА после реконструкции, что еще раз говорит в пользу модели 2. Средний объемный кровоток за сердечный цикл в СА после реконструкции увеличился на 11% по сравнению с моделью 2. Однако он остался меньше, чем для модели сосуда до образования патологий, разница составила около 15%.

ВЫВОДЫ

Исследовано влияние различных анатомических и реологических факторов на гемодинамику и напряженно-деформированное состояние сонной артерии с патологической извитостью. Показано, что уменьшение угла изгиба приводит к снижению объема крови, поступающей в мозг, и повреждению стенки сосуда в месте изгиба с возможным образованием септального стеноза. Увеличение размеров ампулы не меняет значительно объемного кровотока, но может вызвать дальнейший ее рост. Снижение уровня гематокрита повышает шансы возникновения атеросклеротического поражения в месте изгиба.

Для биомеханического моделирования реконструктивной операции на сонной артерии с патологической извитостью для конкретного пациента целесообразно использовать модель, в которой пораженный атеросклерозом участок представляет собой композицию из двух объемов, занимаемых стенкой и бляшкой с соответствующими им механическими свойствами.



Выполненная операция позволяет восстановить объемный кровоток по внутренней сонной артерии на 11%. Полученные данные согласуются с результатами ультразвуковых исследований сонной артерии для данного пациента.

Библиографический список

1. Заболеваемость взрослого населения России в 2011 году : стат. материалы : в 6 ч. / ФГБУ «ЦНИИОИЗ» Минздрава РФ. М., 2012. Ч. 3. 525 с.
2. Демографический ежегодник России. 2012. URL: http://www.gks.ru/bgd/regl/B12_16/Main.htm (дата обращения: 01.07.2013).
3. Спиридонов А. А., Лаврентьев А. В., Морозов К. М., Пирцхалаишвили З. К. Микрохирургическая реваскуляризация каротидного бассейна. М. : Изд-во НЦССХ им. А. Н. Бакулева РАМН, 2000. 266 с.
4. Prencipe G., Pellegrino L., Vairo F., Tomaiuolo M., Furio O. A. Dolichoarteriopathy (kinking, coiling, tortuosity) of the carotid arteries and cardiovascular risk factors // *Minerva Cardioangiol.* 1998. Vol. 46, № 1–2. P. 1–7.
5. Павлова О. Е., Иванов Д. В., Грамакова А. А., Морозов К. М., Суслов И. И. Гемодинамика и механическое поведение бифуркации сонной артерии с патологической извитостью // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2010. Т. 10, № 2. С. 66–73.
6. Павлова О. Е., Иванов Д. В., Кириллова И. В. Численное исследование влияния патологической извитости артерии на кровоток // *ANSYS Advantage.* Русская версия. 2012. Вып. 18. С. 47–48.
7. Павлова О. Е. Оперативное вмешательство на сонных артериях с патологией // *Математическое моделирование и биомеханика в современном университете : тез. докл. VII Всерос. шк.-семинара. Ростов н/Д, 2012.* С. 98.
8. Голядкина А. А., Кириллова И. В., Щучкина О. А., Маслякова Г. Н., Островский Н. В., Челнокова Н. О. Конечно-элементное моделирование ишемической болезни сердца исходя из картины морфофункциональных изменений венечных артерий и сердечной мышцы человека // *Рос. журн. биомеханики.* 2011. Т. 15, № 4. С. 33–46.
9. Голядкина А. А., Кириллова И. В., Щучкина О. А. Анализ напряженно-деформированного состояния и гемодинамики коронарных артерий и желудочков сердца человека // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки.* 2011. Т. 3, № 24. С. 79–88.
10. Голядкина А. А., Кириллова И. В. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния стенок желудочков сердца человека в норме и при патологии // *Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского.* 2011. Т. 4, № 2. С. 415–417.
11. Каменский А. В. Математическое моделирование поведения бифуркации сонной артерии человека на различных стадиях атеросклеротического поражения и после операционного вмешательства: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2007. 179 с.
12. Wu Wei, Qi Min, Liu Xiao-Peng Yang, Da-Zhi, Wang Wei-Qiang. Delivery and release of nitinol stent in carotid artery and their interactions : A finite element analysis // *J. Biomech.* 2007. Vol. 40. P. 3034–3040.
13. Kural M. H., Cai M., Tang D., Gwyther T., Zheng J., Billiar K. L. Planar biaxial characterization of diseased human coronary and carotid arteries for computational modeling // *J. Biomech.* 2012. Vol. 45. P. 790–798.

Biomechanics of Human Carotid Artery with Pathological Tortuosity

L. Yu. Kossovich¹, K. M. Morozov², O. E. Pavlova³

¹Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, nano-bio@sgu.ru

²I. M. Sechenov First Moscow State Medical University, Russia, 119991, Moscow, Trubetskaya st., 8–2, nano-bio@sgu.ru

³Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, Pavlova@info.sgu.ru

Pathological tortuosity of carotid artery ranks second among the causes of cerebro-vascular insufficiency. In their previous researches authors have described the influence of pathological tortuosity type on carotid artery behaviour. In this article we discuss the influence of different anatomic (bending angle, bulb size) and rheological factors on haemodynamics and stress-strain state of carotid artery with pathological tortuosity. Decreasing of the bending angle leads to blood volume reduction in brain and possible formation of septal stenosis in bending area. Diminution of hematocrit level promotes the initiation of atherogenesis in internal carotid bend. Computational modeling of reconstructive surgery of pathologically tortuous carotid of the patient with atherosclerosis was carried out. Numerical analysis of plausible model of patient carotid before pathology formation was conducted. Volume blood flow after surgery has increased by 11%, but remained to be lower than in the healthy patient.

Key words: finite-element analysis, pathological tortuosity, carotid artery, biomechanics.



References

1. *Zabolevaemost' vzroslogo naseleniia Rossii v 2011 godu* [Morbidity rate of adult population of Russia in 2011]. Moscow, 2012, pt. 3, 525 p. (in Russian).
2. *Demographical Annual of Russia. 2012*. Available at: http://www.gks.ru/bgd/regl/B12_16/Main.htm (Accessed 01, July, 2013).
3. Spiridonov A. A., Lavrent'ev A. V., Morozov K. M., Pirtskhalaishvili Z. K. *Mikrokhirurgicheskaiia revaskuliarizatsiia karotidnogo basseina* [Microsurgical revascularization of carotid system]. Moscow, 2000, 266 p. (in Russian).
4. Principe G., Pellegrino L., Vairo F., Tomaiuolo M., Furio O. A. Dolichoarteriopathy (kinking, coiling, tortuosity) of the carotid arteries and cardiovascular risk factors. *Minerva Cardioangiol*, 1998, vol. 46, no. 1–2, pp. 1–7.
5. Pavlova O. E., Ivanov D. V., Gramakova A. A., Morozov K. M., Suslov I. I. Hemodynamics and Mechanical Behavior of Pathologically Tortuous Carotid Arteries. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 2, pp. 66–73 (in Russian).
6. Pavlova O. E., Ivanov D. V., Kirillova I. V. Computational Investigation of Pathological Tortuosity Influence on artery bloodflow. *Ansys Advantage. Russian Edition.*, 2012, iss. 18, pp. 47–48 (in Russian).
7. Pavlova O. E. Operativnoe vmeshatel'stvo na sonnykh arteriiakh s patologiei [Surgical Treatment of Carotid Arteries with Tortuosity]. *Matematicheskoe modelirovaniie i biomekhanika v sovremennom universitete : tezisyy dokladov VII Vserossiiskoi shkoly-seminara*, Rostov-on-Don, 2012, pp. 98 (in Russian).
8. Golyadkina A. A., Kirillova I. V., Schuchkina O. A., Maslyakova G. N., Ostrovskiy N. V., Chelnokova N. O. The Finite Element Modelling of Ischemic Heart Disease Based on the Morphological and Functional Changes of Human Coronary Arteries and Myocardium. *Russian Journal of Biomechanics*, 2011, vol. 15, iss. 4, pp. 33–46 (in Russian).
9. Golyadkina A. A., Kirillova I. V., Schuchkina O. A. Investigation of Human Coronary Arteries and Heart Ventricles Mode of Deformation and Haemodynamics. *Vestnik SamGTU. Ser. Fiz.-Math. Nauk.*, 2011, vol. 3, iss. 24, pp. 79–88 (in Russian).
10. Golyadkina A. A., Kirillova I. V. Numerical Modeling of Stress-strain State of Normal and Pathological Human Ventricle Walls. *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*, 2011, vol. 4, iss. 2, pp. 415–417 (in Russian).
11. Kamenskiy A. V. *Matematicheskoe modelirovaniie povedeniia bifurkatsii sonnoi arterii cheloveka na razlichnykh stadiiakh ateroskleroticheskogo porazheniia i posle operatsionnogo vmeshatel'stva*. Diss. kand. fiz.-mat. nauk [Mathematical modeling of carotid bifurcation behaviour at different stages of atherosclerosis and after surgical treatment : Cand. phys. and math. sci. diss.]. Saratov, 2007. 170 p. (in Russian).
12. Wu Wei, Qi Min, Liu Xiao-Peng Yang, Da-Zhi, Wang Wei-Qiang. Delivery and release of nitinol stent in carotid artery and their interactions: A finite element analysis. *J. Biomech.*, 2007, vol. 40, pp. 3034–3040.
13. Kural M. H., Cai M., Tang D., Gwyther T., Zheng J., Billiar K. L. Planar biaxial characterization of diseased human coronary and carotid arteries for computational modeling. *J. Biomech.*, 2012, vol. 45, pp. 790–798.



ИНФОРМАТИКА

УДК 510.67; 656.081

КОМПЛЕКСНЫЙ КОНТРОЛЬ РЕСУРСОВ СЛОЖНЫХ ЧЕЛОВЕКОМАШИННЫХ СИСТЕМ

А. С. Богомолов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Alexbogomolov@ya.ru

Исследуется природа возникновения аварийных ситуаций и катастроф в сложных человекомашинных системах. В целях комплексной оценки и прогнозирования аварийных ситуаций предлагается рассматривать ресурс системы в виде набора показателей, включающего человеческие ресурсы и ресурсы машин. Прогнозирование аварий предлагается осуществлять с проверкой логических условий безопасности, которые объединяют разнородные ресурсы системы.

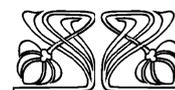
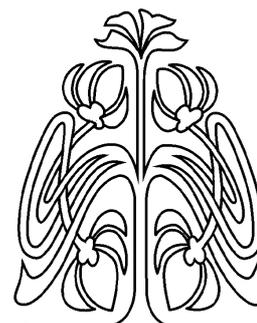
Ключевые слова: авария, безопасность, катастрофа, остаточный ресурс, причинно-следственная модель, сложные человекомашинные системы, СЧМС, человеческий фактор.

ВВЕДЕНИЕ

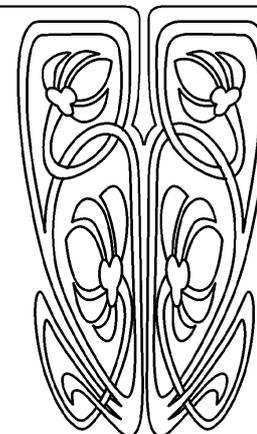
Функционирование современных производственных и транспортных комплексов, сложных человекомашинных систем (СЧМС) зависит от большого количества разнородных факторов, полный учет которых на больших участках и длительных промежутках времени практически невозможен. Это обуславливается высокой размерностью пространства состояния системы и большим количеством параметров, которые её характеризуют.

Вместе с тем, задача обеспечения безаварийного и безопасного функционирования СЧМС становится все более актуальной. Как свидетельствуют данные о многочисленных техногенных авариях и катастрофах современности, многие из них могли бы быть предотвращены путем своевременной комплексной оценки ресурсов и возможностей объекта в совокупности с ресурсами персонала. Традиционно используемое понятие остаточного ресурса [1] не дает достаточной точности в оценке безопасности. При расчете остаточного ресурса как предполагаемой суммарной наработки системы от момента контроля до перехода в предельное состояние не учитывается, как правило, ряд сложных взаимодействий процессов в системе, в особенности человекомашинное взаимодействие. В то же время большая часть техногенных аварий и катастроф происходит по причине бесконтрольных действий персонала управления, и в последние десятилетия эта доля растет. Например, в авиационной отрасли по вине экипажа происходят до 90 процентов аварий [2]. С другой стороны, во многих отраслях наблюдается значительный износ парка техники и оцениваемый остаточный ресурс машин приближается к тем граничным значениям, при которых использование его величины при расчетах безопасного функционирования на достаточно длительных промежутках времени связано со значительным риском аварии.

В связи со сказанным предлагается использовать для оценки безопасности СЧМС понятие комплексного ресурса — набора значений ресурсов отдельных подсистем и элементов. Выбор множества этих



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





подсистем зависит от конкретной СЧМС, истории эксплуатации и других соображений. Оценку возможности возникновения аварийных ситуаций и путей их предотвращения предлагается осуществлять в виде своевременной проверки комплекса логических условий, накладываемых на значения частей комплексного ресурса.

Целью исследования является разработка подхода к комплексному контролю ресурсов СЧМС, выявлению возможных аварийных ситуаций, а также путей оперативного возобновления критических ресурсов системы.

1. КОМПЛЕКСНЫЙ РЕСУРС СЧМС

Определение. Под *ресурсом* подсистемы или элемента СЧМС будем понимать показатель практически гарантированной работоспособности в течение некоторого времени работы в заданных режимах или в процессе решения некоторой задачи. *Комплексный ресурс (КР) СЧМС* — это определённый набор ресурсов её ключевых подсистем и элементов.

Значения ресурсов могут быть как числовыми, так и нечисловыми. Например, множество, список инструкций — как значение информационного ресурса. Сравнение двух значений комплексного ресурса осуществляется по компонентно в числовом или теоретико-множественном смысле.

Комплексный ресурс должен состоять как минимум из двух частей, одна из которых выражает ресурс машины (например, остаточный ресурс, если таковой может быть использован для данной задачи), другая — ресурс персонала (экипажа, операторов). Последнее значение при детальном учете не будет выражаться одним числом, так как зависит от состояния персонала, выработки часов, взаимодействия внутри коллектива, а также от режима взаимодействия с машиной и условий работы с ней.

Введение понятия КР связано с необходимостью более точной оценки условий безопасности функционирования СЧМС. В отличие от традиционного понятия остаточного ресурса понятие КР может применяться к системе, в которой взаимодействуют машина и экипаж, учитывая ресурсы экипажа. КР имеет смысл анализировать на небольших промежутках времени или в отношении отдельной поставленной задачи, что дает более тонкую оценку безопасности, так как значение КР предлагается пересчитывать с необходимой частотой с учетом восполнения ресурсов различных подсистем, изменений в их составе и других условий. Такой подход является актуальным, поскольку в настоящее время парк отечественной техники, находящейся в активной эксплуатации, в целом значительно изношен. Это во многом касается, например, производственных и авиационно-транспортных систем.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЧМС

Для моделирования работы СЧМС эффективно используется причинно-следственная модель [3]. Её необходимость обуславливается сложным характером связей разнородных факторов системы и невозможностью во многих случаях описать зависимости аналитическими формулами. Исследуемая система представляется причинно-следственным комплексом (ПСК) — композицией причинно-следственных звеньев. Каждое звено содержит группу причины, состоящую из причины и условия реализации связи, и группу следствия, состоящую из следствия и условий, возникающих после реализации связи. В ядре звена заложены процедуры и функции, преобразующие причины в следствие.

Степень детализации и количество звеньев ПСК зависят от конкретных характеристик СЧМС и подбираются так, чтобы существовала возможность рассчитать расход ресурса при прохождении каждого звена.

В рамках причинно-следственного подхода выделяются следующие основные группы базовых составляющих СЧМС: командно-информационная составляющая, персонал, оборудование, сырьё и комплектующие, энергетическая составляющая и окружающая среда. Функционирование СЧМС представляет собой сложное взаимодействие процессов потребления ресурсов, соответствующих этим группам. Данные базовые процессы взаимодействуют между собой и могут использовать ресурсы друг друга. Поэтому рассматриваются частные процессы, составляющие взаимодействие базовых в группах 2, ..., 6. Потребление ресурсов происходит во взаимодействии процессов, и поэтому существует возможность компенсировать недостаток одних ресурсов за счет других, что и происходит в ситуациях, когда функционирование системы нарушено, но при этом свою задачу она выполняет, аварии не случаются.

Выделим конечный список ресурсов системы, которые будут рассматриваться как ключевые и изучаться в вопросах безопасности. На различных этапах работы каждой СЧМС эти ресурсы, вообще говоря, также различны, поэтому мы не используем здесь их конкретных названий. Ключевые



ресурсы — это, как правило, ресурсы персонала (управляющего и участвующего в подготовке работы СЧМС), ресурсы подсистем, часто имеющих скрытые дефекты, ресурсы систем наблюдения за проявлениями окружающей среды.

Упорядоченный набор выбранных ресурсов r — назовем комплексным ресурсом системы в данный момент времени. Компоненты данного набора могут иметь различную размерность: числовые значения количества ресурсов (например, горючего), планируемое время безотказной работы подсистемы, агрегата или детали в заданном режиме, а также компоненты в виде множеств и мультимножеств (например, списки деталей).

Над значениями комплексного ресурса введем операцию сложения по компонентам, где числа складываются, а компоненты в виде списков объединяются. Операция умножения на натуральное число увеличивает соответствующим образом числовые компоненты КР и количество элементов мультимножественных компонент. Также введем частичную операцию сравнения, смысл которой состоит в определении, покрывает ли имеющееся значение КР то значение, которое требуется для выполнения дальнейшей задачи, этапа работы. Если все составляющие текущего КР r больше или равны как числа или включают как списки или мультимножества все элементы требуемого КР r^- , то r теоретически считается достаточным для проведения этапа. В этом случае возможно определить дополнение одного значения КР до другого. Пусть возобновление ресурсов перед началом участка обозначено через r^+ . Значение r^+ включает увеличение ресурса за счет планово-предупредительного ремонта, смены сотрудников, дозаправки и т. д. Если возобновления не производится, например, из-за непрерывности работ, то ситуацию можно обозначить как $r^+ = 0$ (имеется в виду, что числовые элементы равны 0, а компоненты-множества пусты). В наиболее простом случае условие нормального прохождения участка можно представить как

$$r + r^+ \geq r^-, \quad (1)$$

в момент начала работы на данном участке. Это означает, что каждая компонента из левой части неравенства не меньше (если это числа) или включает в себя (если это мультимножества) значения соответствующей компоненты правой части. В этом случае значение $r' = r + r^+ - r^-$ составят часть ресурса системы для следующих по времени этапов работы (безопасность которых не гарантируется условием (1)).

В более сложных случаях условие (1) выполняется не всегда и когда процессы расхода разнородных ресурсов взаимодействуют между собой, часть ресурсов одной подсистемы может быть перемещена на компенсацию отказа в другой, если ресурса первой подсистемы для этого достаточно. В этом случае даже при невыполнении (1) аварийной ситуации можно избежать, что будет более подробно рассмотрено ниже.

3. УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ АВАРИЙ

Аварийное состояние объекта рассматривается как следствие частичного исчерпания КР системы, что означает исчерпание ресурса одной или нескольких подсистем в условиях, когда необходимо их дальнейшее функционирование [4, 5]. Исчерпание ресурса подсистемы a означает достижение его показателем $r_a(t)$ критического минимума:

$$r_a(t) < \underline{r}_a, \quad (2)$$

где \underline{r}_a — некоторое пороговое значение. Если ресурс a характеризуется некоторым множеством, например, инструкций или деталей, то (2) следует понимать как $\underline{r}_a \notin r_a(t)$.

Последовательность отказов, приводящая к аварии, в этом случае характеризуется совокупностью условий исчерпания ресурсов подсистем, которая может быть записана как:

$$(r_a(t) < \underline{r}_a) \wedge (r_{a_1}(t_1) < \underline{r}_{a_1}) \wedge \dots \wedge (r_{a_n}(t_n) < \underline{r}_{a_n}), \quad (3)$$

где в каждой скобке справа — также критические значения ресурсов подсистем a_i . Ресурсы этих подсистем, если они в нужное время были в достаточном количестве, могли бы быть использованы для предотвращения аварии или парирования отказа подсистемы a .

То есть аварии и катастрофы часто случаются вследствие так называемого «неблагоприятного стечения обстоятельств», которое формально описывается (3) и представляет собой сочетание ряда отказов и действий внешних факторов, которые не позволяют системе парировать другие отказы. Цепь этих событий в течение достаточно быстрого промежутка времени приводит к аварии. Время в этом случае также можно рассматривать как ресурс, поскольку по истечении достаточного времени



подготовленный персонал может успеть возобновить ресурс какой-либо из подсистем a_i и парировать отказ a .

В предлагаемом подходе рассматривается возможность компенсации отказов одних подсистем за счет ресурсов других. Такая ситуация описывается принципом парирования единичного отказа, изложенном в [2, с. 37]: «Ни один единичный отказ агрегата (системы), ни одна единичная ошибка экипажа или служб обеспечения полетов не должны приводить к аварийной или катастрофической ситуации». Принцип парирования единичного отказа можно трактовать как возможность парировать отказ любой подсистемы за счет ресурсов других подсистем. Например, пусть отказ подсистемы a в момент t может компенсироваться ресурсами какой-либо из подсистем a_1, \dots, a_n . В этом случае для успешного парирования отказа должно выполняться условие

$$(r_a(t) < \underline{r}_a) \rightarrow (r_{a_1}(t_1) > \underline{r}_{a_1}) \vee \dots \vee (r_{a_n}(t_n) > \underline{r}_{a_n}), \quad (4)$$

где t_2, \dots, t_n — некоторые следующие моменты. Условие (4) предлагается в данном случае рассматривать как условие безопасности, своевременная проверка которого позволяет предотвратить возникновение цепи отказов, приводящей к аварийной ситуации, связанной с подсистемой a .

Заметим, что условия (3) и (4) записаны в укрупнённой форме, т. е. для выяснения деталей возникновения аварии может понадобиться сформулировать аналогичные условия для подсистем a_i .

Предлагаемый подход состоит в использовании баз знаний, наполняемых условиями безопасности. Эти условия формируются по результатам расследований произошедших аварий, статистики, процедур экспертных оценок, аналитических расчетов.

Функционирование СЧМС разбивается на несколько этапов, для каждого из которых формируется база условий безопасности. Разбиение на этапы соответствует возможностям оценки необходимого для данного этапа ресурса, для выбора степени детализации могут быть использованы принципы причинно-следственного подхода.

Перед началом каждого этапа проверяется возможность нарушения условия безопасности с учетом текущего значения комплексного ресурса и прогнозируемого расхода его компонент на предстоящем этапе. Возможность расчета расхода ресурсов позволяет предусмотреть возможные нарушения условия (4) в прогнозируемый отрезок времени выполнения этапа. В более простом случае моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n можно считать совпадающими и требовать выполнения условия (4) в виде $(r_a(t) < \underline{r}_a) \rightarrow (r_{a_1}(t) > \underline{r}_{a_2}) \vee \dots \vee (r_{a_n}(t) > \underline{r}_{a_n})$, где t — момент проверки.

Если условия выполняются, СЧМС осуществляет переход к исследуемому этапу. Если часть условий не выполняется, то соответствующая группа ресурсов объявляется критической, и возникает задача возобновления некоторых из них так, чтобы условие безопасности выполнялось. Препятствием к возобновлению ресурсов являются затраты, связанные с ними, и ограниченное их количество. В связи с этим возникает необходимость введения критерия качества возобновления, что позволяет рассматривать задачу дискретной оптимизации.

При нормальном функционировании объекта условия в начале каждого этапа достаточно ресурсов для его выполнения. При нарушенном функционировании некоторые процессы могут, взаимодействуя между собой, компенсировать недостаток ресурса, возникший в других процессах. Возможность этого выражается условиями безопасности.

В зависимости от масштаба и размерности перечисленные задачи могут рассматриваться на различных отрезках функционирования СЧМС.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагается подход к прогнозированию аварийных ситуаций в сложных человекомашинных системах. Вводится понятие комплексного ресурса системы, который рассматривается в виде набора компонент, включающего, в частности, человеческий ресурс. Прогнозирование аварийных ситуаций и катастроф предлагается осуществлять с проверкой логических условий безопасности, которые объединяют значения разнородных ресурсов СЧМС.

Предлагаемый подход может быть использован при обучении персонала СЧМС, создании тренажеров, а также как аппарат систематизации и формализации при расследовании аварий, предсказания аварийных ситуаций и оперативного обеспечения безопасности функционирования транспортных и производственных объектов. Эффективная реализация комплексного подхода к контролю разнородных ресурсов сложных человекомашинных систем поможет предотвратить значительное число аварий и катастроф, возникающих в следствие критического взаимодействия внутренних процессов СЧМС.



Библиографический список

1. ГОСТ 27.002-89. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения. М., 1990.
2. Новожиллов Г. В., Неймарк М. С., Цесарский Л. Г. Безопасность полета самолета : концепция и технология. М. : Изд-во МАИ, 2007. 196 с.
3. Резчиков А. Ф., Твердохлебов В. А. Причинно-следственные модели производственных систем. Саратов : Научная книга, 2008.
4. Клюев В. В., Резчиков А. Ф., Богомолов А. С., Уков Д. А., Филимонюк Л. Ю. Системный подход к задаче оценки остаточного ресурса человеко-машинных систем // Контроль. Диагностика. 2011. № 8. С. 9–13.
5. Клюев В. В., Резчиков А. Ф., Богомолов А. С., Кошевая Е. М., Уков Д. А. Причинно-следственный подход к управлению ресурсом печи обжига при производстве цемента // Контроль. Диагностика. 2012. № 7. С. 30–36.

Integrated Resource Control of Complex Man-Machine Systems

A. S. Bogomolov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrakhanskaya st., 83, alexbogomolov@ya.ru

Investigate the nature of emergencies and disasters in complex human-machine systems. In order to assess and predict the complex emergency proposed to consider the resource system as a vector comprising human resources and computer resources. Prediction of accidents are encouraged to check with the logical security conditions applicable to heterogeneous system resources in the complex

Key words: accidents, security, disaster, remaining life, man-machine systems, the human factor.

References

1. State Standard 27.002-89. Industrial product dependability. General concepts. Terms and definitions. Moscow, Standartinform, 1990, 24 p. (in Russian).
2. Novojilov G. V., Neymark M. S., Tsesarskiy L. G. *Bezopasnost' poleta samoleta. Konceptsiya i tehnologiya* [Providing of the flight safety of an airplane. The concept and technique]. Moscow, MAI, 2007, 196 p. (in Russian).
3. Rezchikov A. F., Tverdohlebov V. A. *Prichinno-sledstvennyye modeli proizvodstvennyh sistem* [Cause-effect models of production systems]. Saratov, Nauchnaja kniga, 2008 (in Russian).
4. Klyuev V. V., Rezchikov A. F., Bogomolov A. S., Ukov D. A., Filimonyuk L. Yu. System approach to a problem of appraisal of man-machine systems' remaining life. *Control. Diagnostika*, 2011, no. 8, pp. 9–13 (in Russian).
5. Kluev V. V., Rezchikov A. F., Bogomolov A. S., Koshevaya E. M., Ukov D. A. Cause-conditional approach to resource management of furnace in cement production. *Control. Diagnostika*, 2012, no. 7, pp. 30–36 (in Russian).

УДК 681.3.06, 681.322

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА МЕТОДОМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА, РАСПАРАЛЛЕЛЕННОГО РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

А. В. Высоцкий¹, А. С. Тараканов¹, К. И. Шоломов¹, Н. Е. Тимофеева², А. А. Ерофтиев³

¹Студент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, alex_v2008@mail.ru, sholomov@mail.ru, tarakanov.alexey@gmail.com

²Ассистент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, timofeevane@info.sgu.ru

³Аспирант кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и систем, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, eroftiev.andrey@gmail.com

В данной статье представлены результаты создания параллельной вычислительной системы и проверки ее возможностей при решении учебных и научных задач. Рассмотрены и реализованы три варианта распараллеливания алгоритма оптимизации многоэкстремальной целевой функции двух переменных с явными ограничениями, основанного на стохастическом методе имитации отжига. Исследована зависимость надёжности и производительности параллельных версий алгоритма от их параметров и количества узлов параллельной вычислительной системы. Показано, что предложенные параллельные варианты алгоритма имитации отжига позволяют успешно находить глобальный минимум многоэкстремальной целевой функции.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, алгоритм имитации отжига, многоэкстремальная целевая функция, явные ограничения, параллельные вычислительные системы.



ВВЕДЕНИЕ

Современные задачи науки и техники, такие как моделирование климата, геновая инженерия, проектирование интегральных схем, анализ загрязнения окружающей среды, создание лекарственных препаратов, наноматериалов и др., требуют для своего решения ЭВМ с огромной вычислительной производительностью. Единичные рабочие станции уже не способны в короткие сроки решать вышеперечисленные задачи. Здесь и возникает необходимость использования параллельных вычислений, когда над общей задачей работают десятки, сотни и даже тысячи рабочих станций.

Цель данной работы — реализация и проведение сравнительного анализа методов распараллеливания алгоритма нахождения глобального минимума многоэкстремальной целевой функции многих переменных с явными ограничениями (ограничениями типа равенств), основанного на стохастическом методе имитации отжига.

При этом решались следующие задачи:

- поиск эффективных способов распараллеливания алгоритма, с точки зрения минимизации времени и повышения надежности вычислений;
- программная реализация поиска глобального экстремума методом имитации отжига, распараллеленного различными способами;
- проведение численного эксперимента для оценки эффективности способов распараллеливания;
- анализ результатов численного эксперимента.

1. ПОИСК ГЛОБАЛЬНОГО МИНИМУМА МЕТОДОМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА ПРИ НАЛИЧИИ ЯВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Метод отжига — это техника оптимизации, использующая упорядоченный случайный поиск на основе аналогии с процессом образования в веществе кристаллической структуры с минимальной энергией при охлаждении.

Большим преимуществом метода отжига является возможность избежать так называемых «ловушек» в локальных минимумах оптимизируемой функции за счет принятия изменений, временно ухудшающих результат, что отражает нагрев расплава для предотвращения его быстрого остывания при протекании соответствующего физического процесса. Еще одним преимуществом является то, что даже в условиях нехватки вычислительных ресурсов для нахождения глобального минимума метод отжига, как правило, выдает неплохое решение — один из локальных минимумов [1].

Конкретная схема отжига задается следующими параметрами [2]:

- законом изменения температуры $T(k)$, где k — номер шага;
- порождающим семейством вероятностных распределений $\zeta(x, T)$;
- функцией вероятности принятия нового состояния $h(\Delta E, T)$.

Таким образом, алгоритм имитации отжига можно записать в следующем виде:

- 1) случайным образом выбирается начальная точка $x = x_0$, $x_0 \in \Omega$. Текущее значение энергии E устанавливается в значение $f(x_0)$.
- 2) k -я итерация алгоритма:
 - a) сравнить энергию системы E в состоянии x с найденным на настоящий момент глобальным минимумом. Если $E < \min$, $E = f(x)$, то изменить значение глобального минимума;
 - b) сгенерировать новую точку $x' = G(x, T(k))$;
 - c) вычислить значение функции в ней: $E' = f(x')$;
 - d) сгенерировать случайное число α из интервала $[0; 1]$;
 - e) если $\alpha < h(E' - E, T(k))$, то установить $x = x'$, $E = E'$, и перейти к следующей итерации. Иначе повторить шаг b , пока не будет найдена подходящая точка x' .

Исторически первой схемой метода имитации отжига является схема больцмановского отжига. В ней изменение температуры задаётся в виде

$$T(k) = \frac{T_0}{\ln(1+k)}, \quad k > 0.$$

Порождающее семейство вероятностных распределений $\zeta(x, T)$ выбирается как семейство нормальных распределений с математическим ожиданием x и дисперсией T и соответственно задаётся плотностью

$$g(x'; x, T) = (2\pi T)^{-n/2} \cdot \exp(-|x' - x|^2 / (2T)),$$

где n — размерность метрического пространства состояний.



Для данной схемы доказано, что при достаточно больших T_0 и количестве шагов k гарантируется нахождение глобального минимума.

Недостатком схемы больцмановского отжига является очень медленное уменьшение температуры T . Решение этой проблемы возможно путём замены закона изменения температуры, например, на следующий $T(k) = r \cdot T(k - 1)$, где температурный коэффициент r выбирается, как правило, в пределах $0.7 \div 0.99$.

Такая схема имитации отжига называется тушением. Она очень быстро сходится, что позволяет экономить вычислительные ресурсы. При этом не гарантируется нахождения глобального минимума, но, как правило, быстро находится близкое решение, а на практике и сам минимум.

2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ МЕТОДА ИМИТАЦИИ ОТЖИГА

Появление и развитие параллельных вычислительных систем привело к развитию нескольких подходов к распараллеливанию метода имитации отжига.

Существуют различные подходы к реализации алгоритма имитации отжига на параллельных вычислительных системах, рассмотрим 3 из них:

- 1) параллельный запуск алгоритма имитации отжига (мультистарт);
 - 2) параллельный запуск алгоритма имитации отжига с обменом результатами (кластерный алгоритм);
 - 3) разбиение пространства решений на области [3].
- Рассмотрим их подробнее.

2.1. Параллельный запуск алгоритма имитации отжига

Данная адаптация метода имитации отжига предполагает вычисление глобального минимума ЦФ одновременно на нескольких машинах (вычислительных узлах) с последующим выбором лучшего решения на выделенной машине (управляющий узел).

В выполняемой на нескольких вычислительных узлах при одинаковых начальных условиях осуществляется поиск минимума ЦФ методом имитации отжига по схеме больцмановского тушения.

Затем результаты, полученные в вычислительных узлах, передаются в управляющий узел, в котором осуществляется выбор решения с наименьшим значением ЦФ, что должно обеспечивать глобальность найденного минимума.

Реализованный таким образом на параллельной вычислительной системе алгоритм оптимизации методом имитации отжига должен обеспечивать надёжный поиск глобального минимума целевой функции за счёт многократного повторения поиска в заданной явными ограничениями области.

При этом, так как многократный процесс поиска минимума осуществляется одновременно на соответствующем числе машин, то затраченное на выполнения всего параллельного алгоритма, блок-схема которого изображена на рис. 1, время приблизительно равно времени выполнения одного процесса и практически не зависит от числа процессов. Соответственно при использовании клиентских машин можно уменьшить временные затраты при поиске глобального минимума примерно в p раз [2].

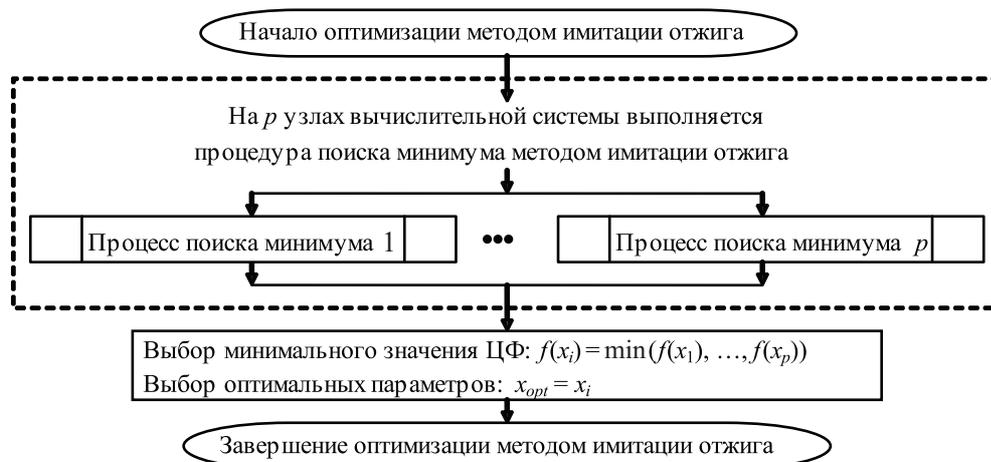


Рис. 1. Блок-схема алгоритма оптимизации методом имитации отжига, выполняемого на параллельной вычислительной системе. Пунктиром выделена часть алгоритма, выполняемая на клиентских машинах



2.2. Кластерный алгоритм

Кластерный алгоритм является дальнейшим развитием алгоритма, который представлен выше. Основным отличием его является введение в выполняемую на каждом вычислительном узле параллельной системы последовательную часть алгоритма этапа обмена результатами между рабочими узлами.

Изначально на каждом из p узлов параллельной вычислительной системы запускается алгоритм имитации отжига с разными начальными точками $x_l, 1 \leq l \leq p$. По выполнении заданного количества итераций рабочие узлы обмениваются текущими результатами, после чего продолжают работу, исходя из лучшего значения результата. После t обменов рабочие узлы продолжают работу по получению индивидуального результата. По достижении условия завершения поиска главный узел вычислительной системы выбирает лучшее решение [2].

Таким образом, последовательная часть алгоритма имитации отжига по схеме больцмановского тушения приобретает соответствующий вид (рис. 2).

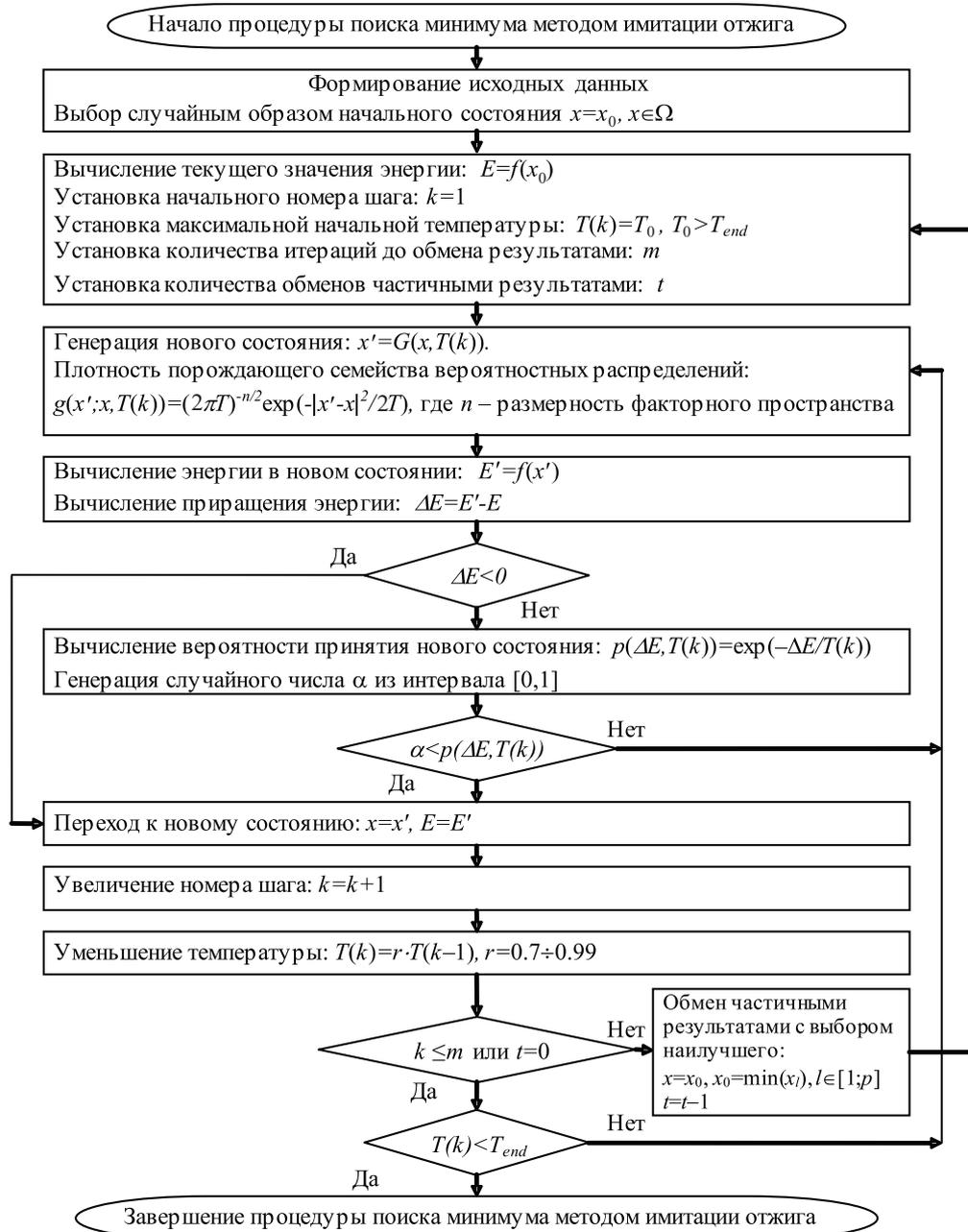


Рис. 2. Блок-схема последовательной части кластерного алгоритма имитации отжига по схеме больцмановского тушения с обменом результатами



2.3. Разбиение пространства решений на области

В данном методе пространство решений алгоритма имитации отжига разбивается на несколько областей, в каждой из которых запускается последовательный алгоритм имитации отжига. В этом случае работа главного вычислительного узла, так же как и в упомянутых ранее адаптациях, сводится к выбору наилучшего решения среди полученных на рабочих узлах параллельной вычислительной системы.

Данный подход позволяет строить параллельные алгоритмы с низким трафиком обмена между параллельными процессами [2].

Построение алгоритма имитации отжига, основанного на этом подходе, требует решения следующих задач [3]:

- 1) разбиение исходного пространства корректных решений на несколько непересекающихся областей, дающих в объединении все пространство;
- 2) выбор начального корректного решения в каждой из областей;
- 3) введение операций преобразования решения таким образом, чтобы они были замкнуты в каждой из областей;
- 4) выбор способа распределения областей по узлам вычислительной системы и схемы отсеечения «неперспективных» областей в ходе работы алгоритма.

Данный способ может эффективно применяться на широком классе задач. В то же время особенностью метода имитации отжига с разбиением на области является необходимость разработки способа разбиения для каждой решаемой задачи.

3. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Оценка надёжности и эффективности распараллеленного алгоритма имитации отжига по схеме Больцмановского тушения осуществлялась на многоэкстремальных ЦФ, с количеством параметров оптимизации n , равным 2:

- гладкая многоэкстремальная функция:

$$f(x_1, x_2) = -\frac{1}{\frac{x_1^2 + x_2^2}{100} - \cos(x_1) \cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) + 2}, \quad (1)$$

где $-0.5 < x_j < 1$, $j = 1, 2$, $f_{\min} = -1$;

- многоэкстремальная функция Растргина:

$$f(x_1, x_2) = 20 + x_1^2 - 10 \cos(2\pi x_1) + x_2^2 - 10 \cos(2\pi x_2), \quad (2)$$

где $-0.5 < x_j < 1$, $j = 1, 2$, $f_{\min} = 0$;

- негладкая 4 экстремальная функция:

$$\begin{aligned} f_1 &= -5e^{-3(|x_1+1|^{0.6}+|x_2+1|^{0.6})}, \\ f_2 &= -10e^{-2(|x_1|+|x_2|)}, \\ f_3 &= -7e^{-2.5(|x_1-1|^{0.8}+|x_2-1|^{0.8})}, \\ f_4 &= -3e^{-(|x_1-2|^{0.9}+|x_2-2|^{0.9})}, \\ f(x_1, x_2) &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4, \end{aligned} \quad (3)$$

где $-0.5 < x_j < 1$, $j = 1, 2$, $f_{\min} = -10.1$;

- негладкая 4 экстремальная функция, имеющая три равных по значению глобальных минимума:

$$\begin{aligned} g_1 &= -7e^{-3(|x_1+1|^{0.6}+|x_2+1|^{0.6})}, \\ g_2 &= -7e^{-2(|x_1|+|x_2|)}, \\ g_3 &= -7e^{-2.5(|x_1-1|^{0.8}+|x_2-1|^{0.8})}, \\ g_4 &= -7e^{-(|x_1-2|^{0.9}+|x_2-2|^{0.9})}, \\ f(x_1, x_2) &= g_1 + g_2 + g_3 + g_4, \end{aligned} \quad (4)$$

где $-0.5 < x_j < 1$, $j = 1, 2$, $f_{\min} = -7.5$.



Тестирование проводилось при следующих условиях: начальная температура $T_0 = 10^9$, конечная $T_{end} = 0.1$, коэффициент изменения температуры $r = 0.97$. При таких значениях параметров обеспечивалось оптимальное соотношение точности результата и времени вычисления алгоритма.

Результаты поиска минимума ЦФ (1), (2), (3) и (4) тремя распараллеленными методами имитации отжига в зависимости от числа одновременно работающих процессов p , усредненные по итогам 100 запусков вычислительной системы, приведены на рис. 3, *a-g* для каждой из функций.

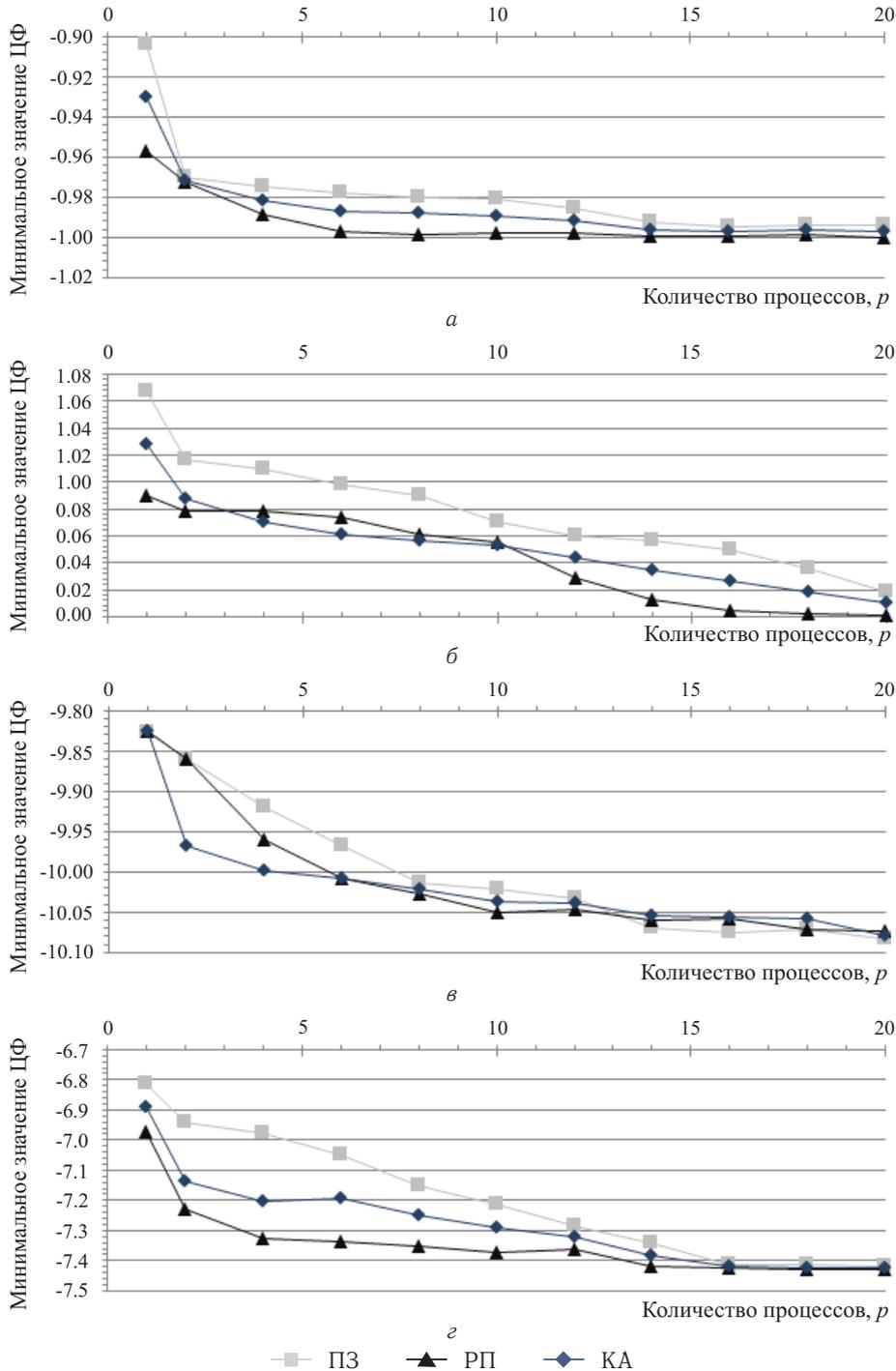


Рис. 3. Зависимость минимального значения целевой функции от количества одновременно работающих процессов при параллельном запуске (ПЗ), кластерном алгоритме (КА) и разбиении пространства решений на области (РП): *a* — для гладкой многоэкстремальной функции, *b* — многоэкстремальной функции Растригина, *v* — для негладкой 4-экстремальной функции, *z* — для негладкой 4-экстремальной функции с тремя равными минимумами



Как видно из рис. 3, а–г, при малом количестве работающих процессов p результат выдается с большим разбросом, но при увеличении p результаты стабилизируются и приближаются к глобальному минимуму, так как поиск в этом случае ведётся в большей части заданной явными ограничениями области факторного пространства.

При этом увеличение числа параллельно работающих процессов p с 1 до 20 приводит к уменьшению размеров области глобального минимума, оцениваемой по среднеквадратическому отклонению минимального значения ЦФ, на 60%, 55% и 50% для разбиения пространства решений на области, кластерного алгоритма и параллельного запуска соответственно (рис. 4).

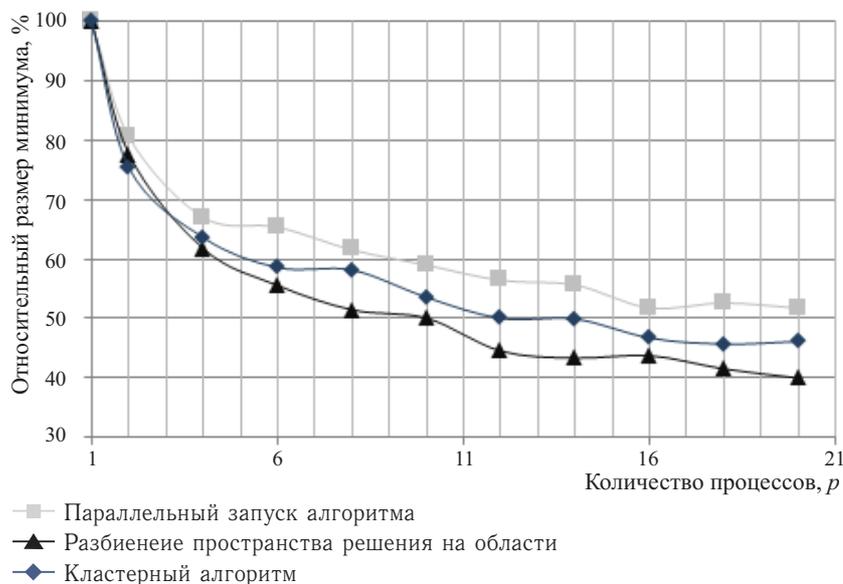


Рис. 4. Зависимость размеров области глобального минимума от количества параметров оптимизации n и числа p одновременно работающих процессов поиска минимума методом имитации отжига по схеме больцмановского тушения

При решении реальных оптимизационных задач большое время занимает вычисление ЦФ. Соответственно эффективность метода оптимизации можно оценивать по количеству итераций алгоритма. Как видно из рис. 5, в случае параллельного запуска алгоритма на p вычислительных узлах среднее число итераций алгоритма не будет зависеть от числа одновременно работающих процессов. Данная зависимость характерна и для кластерного алгоритма, так как количество итераций алгоритма задается пользователем и не зависит от числа работающих узлов. Однако с ростом числа узлов увеличивается время выполнения алгоритма. Это связано с задержкой в передаче и приеме данных, осуществляемых через сеть.

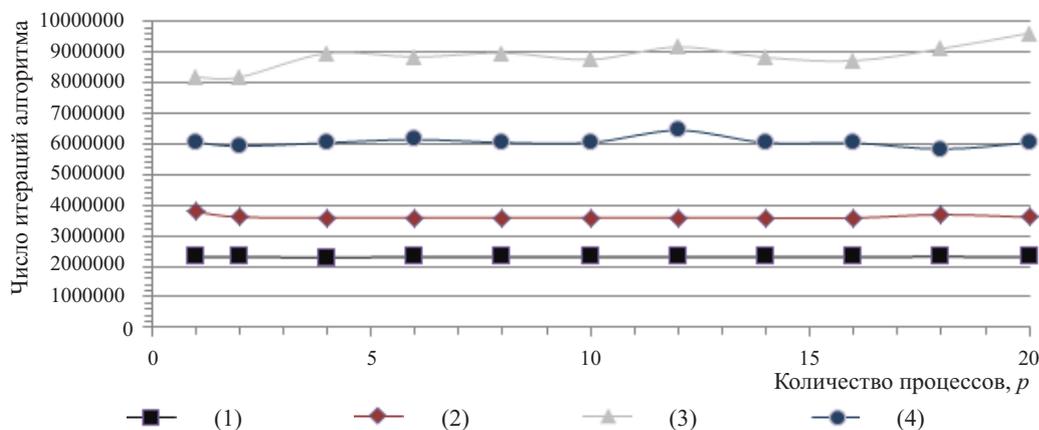


Рис. 5. Число итераций алгоритма поиска минимума ЦФ 1–4 методом параллельного запуска



Число итераций сокращается с увеличением вычислительных узлов в случае разбиения пространства решений на области; соответствующая зависимость имеет экспоненциальный характер (рис. 6).

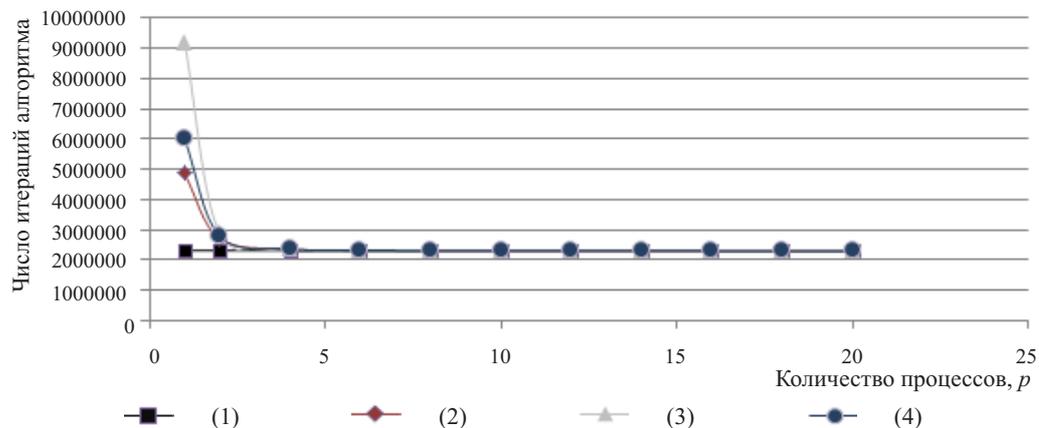


Рис. 6. Число итераций алгоритма поиска минимума ЦФ 1–4 методом разбиения пространства решений

Значительное влияние на количество вычислений ЦФ и соответственно на эффективность тестируемого метода оптимизации оказывает значение температурного коэффициента r . В ходе проведения численного эксперимента был сделан вывод, что изменение температурного коэффициента r с 0.95 до 0.9999 приводит к увеличению времени вычислений ЦФ практически в 6 раз, однако при этом точность нахождения решения повышается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенной работы были рассмотрены и реализованы 3 варианта распараллеливания алгоритма оптимизации многоэкстремальной целевой функции двух переменных с явными ограничениями, основанного на стохастическом методе имитации отжига, и проведен анализ эффективности работы каждого из способов распараллеливания.

Библиографический список

1. Лопатин А. С. Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике : межвуз. сб. СПб. : Изд-во СПбГУ, 2005. Вып. 1. С. 133–149.
2. Савин А. Н., Тимофеева Н. Е. Применение алгоритма оптимизации методом имитации отжига на системах параллельных и распределённых вычислений // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 110–116.
3. Kirkpatrick S. A., Gelatt C. D., Vecchi M. P. Optimization by simulated annealing // Science. N.S. 1983. Vol. 220, № 4598. P. 671–680.

The Effectiveness Analysis of Several Parallel Algorithms Based on Simulated Annealing Method of Global Optimization Problem Solving

A. V. Vysotsky, A. S. Tarakanov, K. I. Sholomov, N. E. Timofeeva, A. A. Eroftiev

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, alex_v2008@mail.ru, tarakanov.alexey@gmail.com, sholomov@mail.ru, timofeevane@info.sgu.ru, eroftiev.andrey@gmail.com

This article presents the results of the development of a parallel computing system and testing its capabilities applied to solving scientific and educational problems. Three parallel variants of the simulated annealing algorithm are proposed and implemented for multiextreme criterion function of two variables with explicit constraints. The reliability and performance of parallel versions of the algorithm, depending on their parameters and the number of working nodes in parallel computing system, is investigated. It is shown that proposed parallel variants of simulating annealing algorithm allow successful finding the global minimum of multiextreme criterion function.

Key words: global optimization, simulated annealing, multiextreme criterion function, explicit constraints, parallel computing.



References

1. Lopatin A. S. Simulated Annealing. *Stokhasticheskaia optimizatsiia v informatike : mezhvuz. sb.* [Stochastic Optimization in Informatics]. St. Petersburg, 2005, iss. 1, pp. 133–149 (in Russian).
2. Savin A. N., Timofeeva N. E. Using Optimization Algorithm Based on Simulated Annealing on Parallel and Distributed Computing Systems. *Izv. Sarat. Univ., N.S., Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 110–116 (in Russian).
3. Kirkpatrick S. A., Gelatt C. D., Vecchi M. P. Optimization by simulated annealing. *Science, N.S.*, 1983, vol. 220, no. 4598, pp. 671–680.

УДК 519.711, 519.712, 517.51

ОБ ОШИБКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕРЕВЬЯМИ СЦЕНАРИЕВ ЕДИНИЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Е. А. Захарова¹, С. П. Сидоров²

¹Аспирант кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, zakharova_e@yahoo.com

²Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sidorovsp@info.sgu.ru

Обозначим через Λ_n множество всех деревьев сценариев глубины 1 с числом сценариев n на $[0, 1]$. Пусть $X = (0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1)$ и обозначим $\Lambda_n(X)$ множество всех деревьев сценариев глубиной 1 с n сценариями $X = (0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1)$. Пусть G есть вероятностное распределение, определенное на $[0, 1]$, и H – некоторый класс измеримых на $[0, 1]$ функций. Положим $d_{H,X}(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n(X)} d_H(G, \tilde{G})$ и $d_H(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n} d_H(G, \tilde{G})$, где $d_H(G, \tilde{G}) := \sup_{h \in H} \left| \int h dG - \int h d\tilde{G} \right|$. Цель работы состоит в нахождении величин $d_H(G, X)$ и $d_H(G)$ для случая, когда множество H есть подмножество всех алгебраических многочленов степени не выше n . Таким образом, мы рассматриваем задачу приближения меры G деревом сценариев в смысле равенства первых n моментов.

Ключевые слова: деревья сценариев, метод моментов.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах портфельного инвестирования и управления риском используются методы стохастического программирования, при этом для генерации многомерных случайных величин, соответствующих реальным процессам (поведение на рынке ценных бумаг, управление коммунальными услугами, цены на топливо или электричество, доставка товаров и т.д.), используется определенный набор сценариев и соответствующих им вероятностей [1, 2]. В большинстве случаев количество таких сценариев слишком велико и их необходимо аппроксимировать некоторым набором с меньшим количеством сценариев, при этом возникает определенная погрешность. При использовании деревьев сценариев задается начальное количество сценариев и соответствующих им вероятностей выполнения этих сценариев. Данная проблема получила наибольшее развитие в начале 2000 годов [3]. Вслед за финансовым кризисом 1998 года появилась необходимость точнее просчитывать риски, в том числе и для сценариев с малой вероятностью, но увеличение количества допустимых сценариев влечет за собой усложнение моделей и трудности в ее компьютерном моделировании. Использование же деревьев сценариев дает возможность упростить модель.

В работе [4] особая важность придается алгоритмам генерации случайных чисел, рассматриваются случаи генерации достаточного количества случайных чисел, соответствующим параметрическим и непараметрическим стохастическим моделям. В статье [5] описывается метод, основанный на использовании нелинейного программирования. Главной идеей этого метода является сокращение разницы между статистическими свойствами случайных величин, что дает больший контроль над распределением.

В настоящей работе оценивается ошибка приближения произвольного непрерывного распределения деревьями сценариев единичной глубины, имеющих равные моменты фиксированных порядков.

Пусть G и \tilde{G} есть два вероятностных распределения, определенных на $[0, 1]$. Пусть H – некоторый класс измеримых на $[0, 1]$ функций.

Определим $d_H(G, \tilde{G})$ следующим образом:

$$d_H(G, \tilde{G}) = \sup_{h \in H} \left| \int h dG - \int h d\tilde{G} \right|. \quad (1)$$



Обозначим через Λ_n множество всех деревьев сценариев глубины 1 с числом сценариев n на $[0,1]$, т.е. дискретных вероятностных распределений, вероятностная масса которых сосредоточена не более чем в n точках отрезка $[0, 1]$.

Пусть $X = (0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1)$ есть некоторая система из n точек, принадлежащих отрезку $[0,1]$. $\Lambda_n(X)$ есть множество таких деревьев сценариев глубиной 1 с n сценариями $X = (0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1)$, т.е. дискретных вероятностных распределений, вероятностная масса которых сосредоточена в системе точек X .

Цель работы состоит в нахождении величин

$$d_{H,X}(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n(X)} d_H(G, \tilde{G}), \tag{2}$$

$$d_H(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n} d_H(G, \tilde{G}). \tag{3}$$

Величина $d_{H,X}(G)$ ($d_H(G)$) есть неустранимая ошибка приближения вероятностного распределения из класса $\Lambda_n(X)$ (соответственно Λ_n) в смысле расстояния (1).

В данной работе рассматривается случай, когда множество H есть множество \mathcal{P}_n всех алгебраических многочленов степени не выше n со старшим коэффициентом, равным 1.

Таким образом, мы рассматриваем задачи (2) и (3) как задачи приближения меры G деревом сценариев единичной глубины с n сценариями из $[0,1]$ в смысле равенства первых n моментов.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $X = (0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1)$ есть некоторая система из n точек, принадлежащих отрезку $[0,1]$.

Теорема. 1. Пусть дано вероятностное распределение G на $[0,1]$ и пусть $X = (0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1)$, тогда

$$d_{\mathcal{P}_n,X}(G) = \left| \int_0^1 \prod (t - x_i) dG(t) \right|. \tag{4}$$

2. Каково бы ни было вероятностное распределение G , справедливо равенство

$$d_{\mathcal{P}_n}(G) = 0.$$

Доказательство. Для произвольного вероятностного распределения G , определенного на $[0, 1]$, и некоторого класса H измеримых на $[0, 1]$ функций имеем:

$$d_{H,X}(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n(X)} d_H(G, \tilde{G}) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n(X)} \sup_{f \in H} \left| \int f dG - \int f d\tilde{G} \right|.$$

Из [6, с. 42] следует, что

$$\inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n(X)} \sup_{f \in H} \left| \int f dG - \int f d\tilde{G} \right| = \sup_{f \in H, \int f = 0} \left| \int f dG \right|,$$

где $\int f := (f(x_1), \dots, f(x_n))$ для $f \in C[0, 1]$.

В свою очередь, для $H = \mathcal{P}_n$ имеем

$$\sup_{f \in H, \int f = 0} \left| \int f dG \right| = \left| \int_0^1 \prod_{i=1}^n (t - x_i) dG(t) \right|,$$

и (4) установлено.

Согласно (4)

$$d_{\mathcal{P}_n,X}(G) = \left| \int_0^1 \prod_{i=1}^n (t - x_i) dG(t) \right|,$$

тогда

$$d_{\mathcal{P}_n}(G) = \inf_X \left| \int_0^1 \prod_{i=1}^n (t - x_i) dG(t) \right|.$$

Необходимо показать, что для всех вероятностных распределений найдется такая система точек X_0 , что $d_{\mathcal{P}_n,X_0}(G) = 0$.

Рассмотрим случай $n = 1$. Нам известно, что $\int_0^1 dG(t) = 1$, тогда нам необходимо найти такое значение x_1 , что

$$-\int_0^{x_1} (t - x_1) dG(t) = \int_{x_1}^1 (t - x_1) dG(t).$$



Имеем:

$$\int_0^1 (t - x_1) dG(t) = \int_0^{x_1} (t - x_1) dG(t) + \int_{x_1}^1 (t - x_1) dG(t) = 0.$$

Тогда

$$-\int_0^{x_1} t dG(t) - \int_{x_1}^1 t dG(t) + x_1 \int_0^{x_1} dG(t) + x_1 \int_{x_1}^1 dG(t) = 0.$$

Значит,

$$\int_0^{x_1} t dG(t) + \int_{x_1}^1 t dG(t) = x_1 \int_0^1 dG(t)$$

и

$$\int_0^{x_1} t dG(t) + \int_{x_1}^1 t dG(t) = x_1,$$

откуда

$$\int_0^1 t dG(t) = x_1.$$

А значит, мы нашли такое значение x_1 , что $d_{\mathcal{F}_n}(G) = 0$.

Рассмотрим случай $n = 2$. Нам необходимо доказать, что найдется такое значение x_1 , что

$$\int_0^1 (t - x_1)(t - x_2) dG(t) = 0.$$

Фиксируем значение x_2 , тогда

$$\int_0^{x_1} (t - x_1)(t - x_2) dG(t) + \int_{x_1}^1 (t - x_1)(t - x_2) dG(t) = 0,$$

или

$$\int_0^{x_1} t(t - x_2) dG(t) - \int_0^{x_1} x_1(t - x_2) dG(t) + \int_{x_1}^1 t(t - x_2) dG(t) - \int_{x_1}^1 x_1(t - x_2) dG(t) = 0.$$

Откуда получаем:

$$\int_0^1 t(t - x_2) dG(t) = x_1 \int_0^1 (t - x_2) dG(t).$$

Так как значение x_2 мы выбираем самостоятельно, то мы всегда можем подобрать его так, что $\int_0^1 (t - x_2) dG(t) \neq 0$, а значит,

$$x_1 = \frac{\int_0^1 t(t - x_2) dG(t)}{\int_0^1 (t - x_2) dG(t)}.$$

Таким образом, мы нашли такое значение x_1 , что $d_{\mathcal{F}_n}(G) = 0$.

Покажем теперь, что утверждение верно для общего случая, т. е. найдется такое значение x_1 , что

$$\int_0^1 \prod_{i=1}^n (t - x_i) dG(t) = 0.$$

Зафиксируем все точки x_i , кроме одной x_1 , тогда

$$\int_0^1 (t - x_1) \prod_{i=2}^n (t - x_i) dG(t) = 0.$$

Отсюда

$$\int_0^1 t \prod_{i=2}^n (t - x_i) dG(t) = x_1 \int_0^1 \prod_{i=2}^n (t - x_i) dG(t).$$

А значит,

$$x_1 = \frac{\int_0^1 t \prod_{i=2}^n (t - x_i) dG(t)}{\int_0^1 \prod_{i=2}^n (t - x_i) dG(t)},$$

так как мы самостоятельно фиксируем значения x_i и можем выбрать те значения, при которых $\int_0^1 \prod_{i=2}^n (t - x_i) dG(t) \neq 0$. Таким образом, мы нашли такое значение x_1 , при котором $\int_0^1 \prod_{i=1}^n (t - x_i) dG(t) \neq 0$. Теорема доказана.

Отметим, что аналогичные результаты имеют место и для случая, когда мера G задана на всей числовой прямой.



3. ПРИМЕРЫ

1. Рассмотрим случай равномерного распределения на $[0,1]$, т. е. $G(t) = t$. Тогда

$$d_{\mathcal{D}_n}(G) = \inf_X \left| \int_0^1 \prod_{i=0}^n (t - x_i) dG(t) \right| = \inf_X \left| \int_0^1 \prod_{i=0}^n (t - x_i) dt \right|.$$

Обозначим $\int_0^1 \prod_{i=0}^n (t - x_i) dt = A$, тогда

$$d_{\mathcal{D}_n}(t) = \inf_X |A|.$$

Рассмотрим уравнение $A = 0$ при $i = 2$:

$$\int_0^1 (t - x_1)(t - x_2) dt = 0.$$

Значит, $\frac{2}{3} - x_1 - x_2 + 2x_1x_2 = 0$. Пусть $x_1 = 1 - x_2$, тогда $2x_2^2 - 2x_2 + \frac{1}{3} = 0$, $D = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$,
 $x_1 = 1 - \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$.

2. Рассмотрим случай нормального распределения $N(0, 1)$ с функцией плотности $p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \exp(-t^2/2)$. Тогда дерево сценариев глубины 1 с четырьмя сценариями x_1, x_2, x_3, x_4 , имеющее равные с данным распределением моменты 1, 2, 3 и 4 порядков, удовлетворяет уравнению

$$\int_{\mathbb{R}} (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3)(t - x_4) \exp(-t^2/2) dt = 0.$$

Считая $-x_1 = x_4 > 0$ и фиксируя $-1 < x_2 < 0 < x_3 < 1$, получим:

$$\int_{\mathbb{R}} (t - x_2)(t - x_3)(t^2 - x_4^2) \exp(-t^2/2) dt = 0,$$

откуда $-x_1 = x_4 = \sqrt{\frac{3 + x_2x_3}{1 + x_2x_3}}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00238).

Библиографический список

1. Hochreiter R., Pflug G. Ch. Financial scenario generation for stochastic multi-stage decision processes as facility location problems // Annals of Operations Research. 2007. Vol. 152, № 1. P. 257–272.
2. Heitsch H., Römisch W. Scenario tree modeling for multistage stochastic programs // Math. Program. 2009. Vol. 118, № 2. P. 371–406.
3. Rockafellar R., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk // The Journal of Risk. 2000. Vol. 2, № 3. P. 21–41.
4. Dupacova J., Consigli G., Wallace S. W. Generating Scenarios for Multistage Stochastic Programs // Annals of Operations Research. 2000. Vol. 100. P. 25–53.
5. Hoyland K., Wallace S.W. Generating Scenario Trees for Multistage Decision Problems // Management Science. 2001. Vol. 47. P. 295–307.
6. Трауб Дж., Вожьянковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М. : Мир, 1983. 382 с.

On the Error of Approximation by Means of Scenario Trees with Depth 1

E. A. Zakharova, S. P. Sidorov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, zakharova_e@yahoo.com, sidorovsp@info.sgu.ru

Let Λ_n denote the set of scenario trees with depth 1 and n scenarios. Let $X = (0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1)$ and let $\Lambda_n(X)$ denote the set of all scenario trees of depth 1 with the scenarios $X = (0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1)$. Let G be a probability distribution defined on $[0, 1]$ and H be a subset of measurable functions defined on $[0, 1]$. Let $d_{H,X}(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n(X)} d_H(G, \tilde{G})$ and $d_H(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n} d_H(G, \tilde{G})$, where $d_H(G, \tilde{G}) := \sup_{h \in H} \left| \int h dG - \int h d\tilde{G} \right|$. The main goal of the paper is to estimate $d_{H,X}(G, X)$ and $d_H(G)$ in the case when the set H is a subset of all algebraical polynomials of degree $\leq n$. Thus, the paper is examined the error of approximation of a continuous distribution G by means of scenario trees with depth 1 and matching the first n moments.

Key words: scenario trees, method of moments.



References

1. Hochreiter R., Pflug G. Ch. Financial scenario generation for stochastic multi-stage decision processes as facility location problems. *Annals of Operations Research*, 2007, vol. 152, no. 1, pp. 257–272.
2. Heitsch H., Römisch W. Scenario tree modeling for multistage stochastic programs. *Math. Program.*, 2009, vol. 118, no. 2, pp. 371–406.
3. Rockafellar R., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *The Journal of Risk*, 2000, vol. 2, no. 3, pp. 21–41.
4. Dupacova J., Consigli G., Wallace S. W. Generating Scenarios for Multistage Stochastic Programs. *Annals of Operations Research*, 2000, vol. 100, pp. 25–53.
5. Hoyland K., Wallace S. W. Generating Scenario Trees for Multistage Decision Problems. *Management Science*, 2001, vol. 47, pp. 295–307.
6. Traub J. F., Woźniakowski H. *A general theory of optimal algorithms*. New York, Academic Press, 1980. 341p.

УДК 519.17

МИНИМАЛЬНЫЕ РЕБЕРНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПАЛЬМ

Д. Д. Комаров

Аспирант, ассистент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KomarovDD@gmail.com

Минимальные реберные расширения графов можно рассматривать как модель оптимальной реберной отказоустойчивой реализацией некоторой системы. Задача нахождения минимальных реберных расширений произвольного графа является NP-полной, поэтому представляет интерес нахождение классов графов, для которых возможно построить минимальное реберное расширение аналитически. Эта работа посвящена реберным 1-расширениям графов специального класса — класса пальм. В этой работе приводится вид реберного 1-расширения для некоторых пальм и доказывается его минимальность.

Ключевые слова: минимальные расширения графов.

Харари и Хейз в своей работе [1] рассматривают граф как модель некоторой технической системы в контексте отказоустойчивости. Вершины графа — ее элементы, а ребра — связи между элементами системы. Отказ связи системы рассматривается как удаление соответствующего этой связи ребра. При такой интерпретации минимальное реберное k -расширение графа, моделирующего некоторую систему Σ , является моделью оптимальной реберной k -отказоустойчивой реализации системы Σ . Задача нахождения минимального реберного расширения произвольного графа является NP-полной [2], поэтому представляет интерес нахождение классов графов, для которых возможно построить минимальное реберное расширение аналитически. В данной работе исследуется класс графов, являющийся особым подклассом деревьев, — класс пальм. Исследования будут ограничены рассмотрением минимальных реберных 1-расширений двулистных пальм (далее, говоря минимальное расширение, автор будет иметь в виду минимальное реберное 1-расширение). Дадим основные определения, которые будут использованы в работе.

Графом (неориентированным) называется пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное множество (множество вершин), а α — симметричное и антирефлексивное бинарное отношение на V' (множество ребер). Определения в основном даются по работе [3].

Про ребро $\{u, v\}$ графа G говорят, что оно *инцидентно* вершинам u и v .

Если ребро $\{u, v\}$ принадлежит бинарному отношению α графа G , то говорят, что вершина u *смежна с вершиной* v .

Степенью вершины u графа G называется число инцидентных ей ребер.

Подграфом графа $G = (V, \alpha)$ называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \subseteq V$ и $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$.

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое взаимно однозначное отображение $f : V_1 \rightarrow V_2$, что для любых $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие: $(u, v) \in \alpha_1 \Rightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$.

Назовем граф $G_3 = (V_3, \alpha_3)$ *реберным k -расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вложим в каждый подграф графа G_3 , получающийся удалением любых его k ребер.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k -расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) граф G^* является реберным k -расширением G ;
- 2) $|V^*| = |V|$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).



Путь длины k из вершины u в вершину v в графе $G = (V, \alpha)$ есть последовательность $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k), v_i \in V$, в которой $v_0 = u, v_k = v$ и $\{v_{i-1}, v_i\} \in \alpha$.

Циклом в графе называется путь $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$, в котором $v_0 = v_k$.

Граф, в котором нет циклов, называется ациклическим.

Вершина w графа G называется достижимой из вершины v , если либо $w = v$, либо существует путь из v в w .

Граф G называется связным, если любые две его вершины достижимы друг из друга.

Ациклический связный граф называется деревом.

Дерево с одной выделенной вершиной называется корневым деревом, а выделенная вершина называется корнем дерева. В дереве вершины степени 1 называются листьями.

Цепью P_n называется граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, и $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\}$.

Сверхстройным деревом называется корневое дерево, где степень всех вершин, кроме корня, не превосходит 2, а степень корня более 2.

Альтернативное определение:

Граф G называется сверхстройным деревом, если он является объединением $s (s > 2)$ цепей P_1, \dots, P_s с общей концевой вершиной (пример сверхстройных деревьев показан на рис. 1).

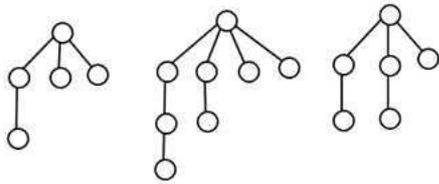


Рис. 1. Пример сверхстройных деревьев

Назовем сверхстройное дерево r -листной пальмой высоты r , если оно образовано объединением $s (s > 2)$ цепей P_1, \dots, P_s длинами m_1, \dots, m_s с общей концевой вершиной, причем одна из длин (не теряя общности, пусть это будет m_1) равна r , а остальные (m_2, \dots, m_s) равны 1 (пример пальм показан на рис. 2).

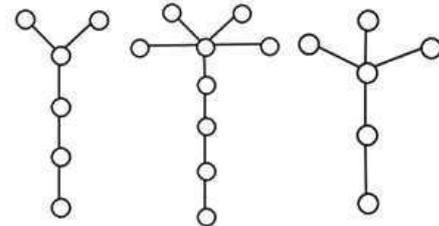


Рис. 2. Пример пальм

Приведем теорему о расширении сверхстройных деревьев высоты 2. Очевидно, что теорема будет верна и для пальм высоты 2.

Теорема 1. Пусть граф $G = (V, \alpha)$ — сверхстройное дерево, являющееся объединением $k (k > 0)$ цепей длины 2 и $n (n > 1)$ цепей длины 1. Построим граф $G^* = (V, \alpha^*)$ из G по следующей схеме (рис. 3): соединим с корнем все листья, расстояние от которых до корня равно 2; если n четное, то соединим попарно между собой все листья, расстояние от которых до корня равно 1; если n нечетное, то соединим один из листьев, расстояние от которого до корня равно 1, соединим с двумя такими же листьями, а остальные листья, расстояние от которых до корня равно 1, кроме трех, уже задействованных, соединим попарно между собой. Полученный граф G^* будет являться минимальным реберным 1-расширением графа G .

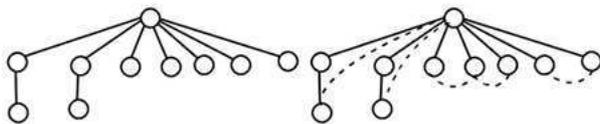


Рис. 3. Пример для теоремы 1

Если в рассмотренной теореме k (количество цепей длины 2) положить равным 1, то получим утверждение для пальм высоты 1.

Также так называемый звездный граф можно рассматривать как пальму высоты 1.

Теорема 2. Единственным с точностью до изоморфизма минимальным реберным расширением звездного графа G является граф G^* , полученный из графа G соединением двух произвольных его вершин степени 1 с каждой вершиной степени 1 (рис. 4).

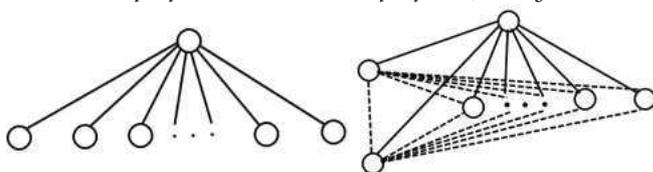


Рис. 4. Пример для теоремы 2

В рассмотренных выше теоремах была ограничена высота пальмы.

Далее уделим внимание случаю, где ограничения накладывается на количество листьев пальмы.



Рассмотрим двулистную пальму. Субъективно граф, наиболее похожий на двулистную пальму, для которого существуют результаты относительного его минимальных расширений, является цепью. Задача о нахождении минимальных расширений цепи полностью решена [1].

Теорема 3. Единственным с точностью до изоморфизма минимальным расширением n -звенной цепи является $(n + 1)$ -звенный цикл (рис. 5).

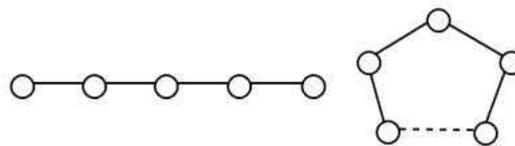


Рис. 5. Пример для теоремы 3

Рассмотрим минимальное реберное расширение 2-листных пальм.

Для формулировки следующей теоремы введем понятие *рогатого цикла*.

Граф, полученный из n -звенного цикла и k 3-звенных циклов, таким образом, что каждый из 3-звенных циклов имеет ровно одно общее ребро с n -звенным циклом и ни один из 3-звенных циклов не имеет общих ребер с другими 3-звенными циклами, назовем *рогатым циклом* длины n с k рогами. При этом назовем k -звенный цикл *телом* рогатого цикла, а 3-звенные циклы назовем его *рогами* (рис. 6).

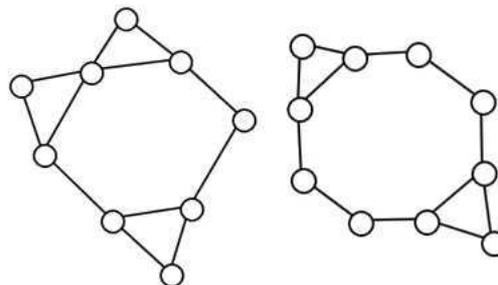


Рис. 6. Пример рогатых циклов

Назовем *разреженность* рогатого цикла длину максимального пути между вершинами, принадлежащими разным рогам рогатого цикла, проходящего по ребрам, не принадлежащим ни одному из рогов рогатого цикла.

На рис. 6 показаны рогатый цикл длины 6 с 3 рогами и разреженностью 2 (слева) и рогатый цикл длины 8 с 2 рогами и разреженностью 3 (справа).

Теорема 4. Пусть дан граф G — 2-листная пальма высоты n , $n > 3$. Тогда рогатый цикл G_1 с количеством рогов $p = \left\lceil \frac{n - 4}{6} \right\rceil + 2$, длиной $n_1 = n - p + 3$ и разреженностью меньше 5, будет являться минимальным расширением графа G .

Доказательство. Для начала покажем, что рогатые циклы с параметрами, описанными в формулировке теоремы, существуют.

Для возможности построения рогатого цикла длиной n_1 с количеством рогов p достаточно, чтобы выполнялось $n_1 \geq p$.

Очевидно, что при $n > 3$ для n_1 и p из формулировки теоремы это соотношение выполняется всегда.

Для того чтобы рогатый цикл длины n_1 с количеством рогов p мог иметь разреженность меньше некоторого k , вполне очевидно необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение: $n_1 \leq (k + 1)p$. В частном случае для $k = 5$ соотношение будет иметь вид

$$n_1 \leq 5p. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь выражения для длины рогатого цикла и количества рогов из формулировки теоремы

$$p = \left\lceil \frac{n - 4}{6} \right\rceil + 2, \tag{2}$$

$$n_1 = n - p + 3. \tag{3}$$

Из (3) следует

$$n = n_1 + p - 3. \tag{4}$$

Подставив (4) в (2), получим:

$$p = \left\lceil \frac{n_1 + p - 7}{6} \right\rceil + 2.$$



Так как p целое, то его можно внести под знак целой части, тогда получим:

$$\left[\frac{n_1 + p - 7}{6} - p + 2 \right] = 0,$$

$$\left[\frac{n_1 - 5p + 5}{6} \right] = 0. \tag{5}$$

Из соотношения (5) следует

$$n_1 - 5p + 5 < 6,$$

$$n_1 < 5p + 1. \tag{6}$$

Так как n_1 и p целые, то из (6) следует (1).

Таким образом, мы показали, что рогатые циклы с параметрами, описанными в формулировке теоремы, существуют для любого n .

Теперь покажем, что G_1 является расширением G . Всего существует 8 вариантов по удалению одного ребра из рогатого цикла с разреженностью меньше 5. Рассмотрим все из них (рис. 7, а-з).

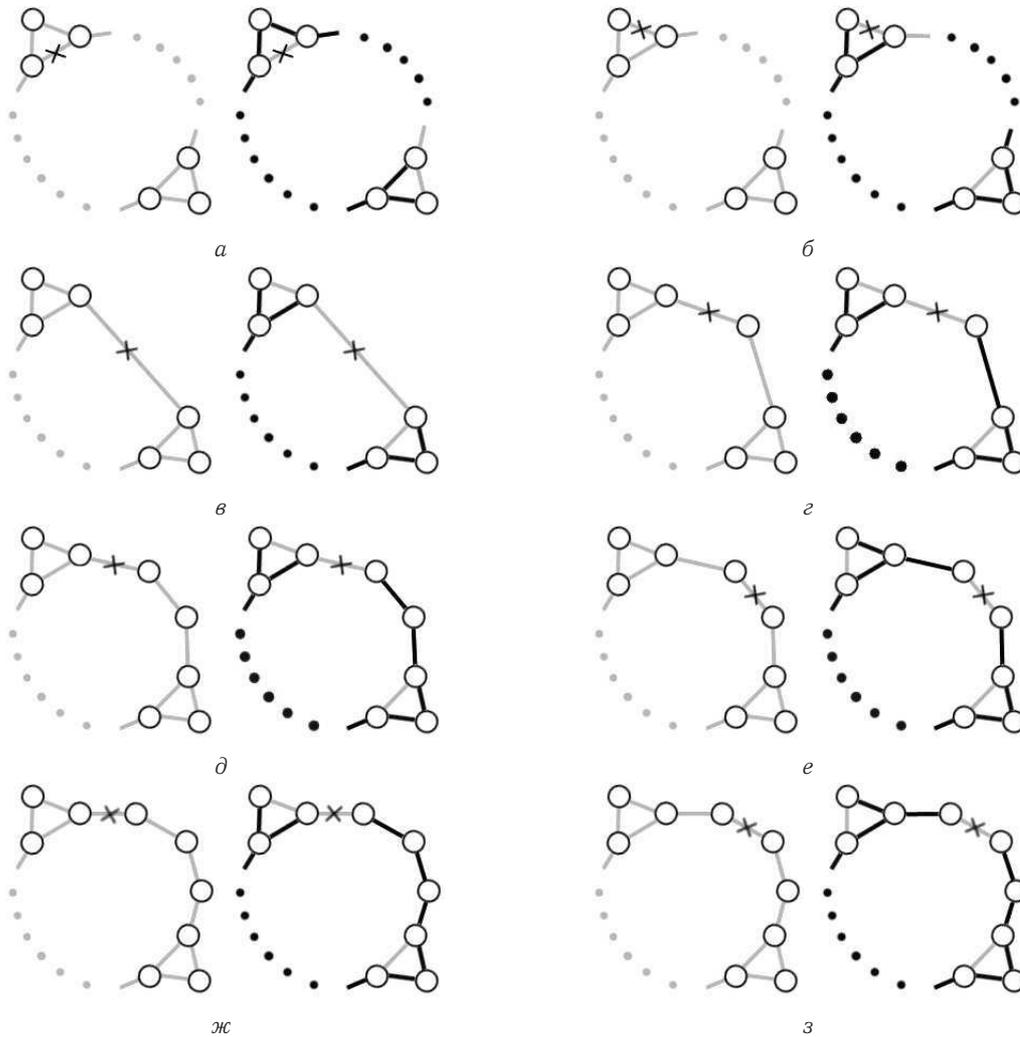


Рис. 7. Схемы удаления ребра

Для схемы удаления ребра, показанного на рис. 7, а-з слева, вложение можно осуществить по схеме, показанной на рис. 7, а-з справа (черный цвет обозначает используемые при вложении ребра, серый — не используемые).

Таким образом, мы доказали что граф G_1 является расширением графа G .



Граф G_1 имеет $(p + 1)$ или, если записать иначе, $\left\lfloor \frac{n - 4}{6} \right\rfloor + 3$ дополнительных ребер по сравнению с G . Покажем, что это минимальное из возможного количество дополнительных ребер.

Утверждение 1. В минимальном расширении графа G не может быть более 3 подряд идущих вершин степени 2. Действительно, рассмотрим 4 подряд идущие вершины степени 2 (рис. 8).

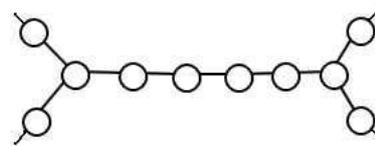


Рис. 8. 4 подряд идущие вершины степени 2

При удалении центрального ребра мы получим две вершины степени 1, каждая из которых при вложении G сможет быть лишь окончанием ствола пальмы, но никак не листом. Но у пальмы лишь один ствол, значит, утверждение верно.

Утверждение 2. Минимальное расширение G должно содержать цикл длиной, равной $n + 2$. Действительно, если будет отсутствовать цикл длиной большей или равной $n + 2$, то найдется ребро, при удалении которого будет невозможно вложить цепь длины $n + 1$ (ствол пальмы и один лист), а соответственно и двулистную пальму высоты n .

Утверждение 3. Минимальное расширение графа G содержит либо больше двух вершин степени 3, либо хотя бы одну вершину степени больше 3. Действительно, если расширение графа G содержит всего две вершины степени 3 и не одной вершины степени больше 3, то эти две вершины смежные, и можно удалить ребро, соединяющее эти две вершины. В этом случае вложение осуществится будет невозможно.

Рассмотрим две вершины, степени больше 2, принадлежащие циклу длины $n + 2$, причем между этими вершинами по ходу цикла находятся только вершины степени 2 и их не менее 2 (рис. 9).

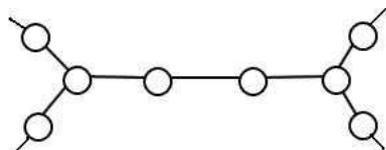


Рис. 9. Вершины, степени больше 2

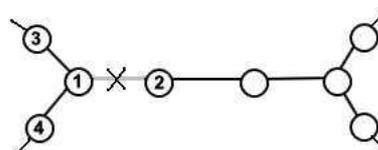


Рис. 10. Схема удаления ребра

В этом случае при вложении вершина 2 может быть лишь окончанием ствола пальмы. А вершина 1 (так как она является предшественницей вершины 2 в обходе по циклу) сможет быть только листом. Тогда либо вершина 3, либо вершина 4 (в зависимости от того, какая из них идет за вершиной 1 в обходе по циклу) должна быть степени больше 2. Резюмируя вышесказанное и учитывая утверждение 1, получим, что в рассмотренном случае (между двумя вершинами степени больше 2 находится только вершины степени 2 и их не менее 2), на каждые $5(4+1)$ вершин цикла должно приходиться 2 вершины степени больше 2 или в пересчете на дополнительные ребра — должно быть одно дополнительное ребро. Значит, оптимальнее, когда между вершинами степени больше 2 при обходе по циклу не более 1 вершины степени 2. В этом случае на каждые $6(4+2)$ вершин цикла должно приходиться 2 вершины степени больше 2, т. е. одно дополнительное ребро.

Собирая все утверждения и рассуждения вместе, получим:

1. Для обеспечения утверждения 2 необходимо, по крайней мере, 1 дополнительное ребро.
2. Для обеспечения утверждения 3 необходимо, по крайней мере, 2 дополнительных ребра.
3. Расширение графа G должно содержать цикл длины $n + 2$, где, по крайней мере, 2 из 6 последовательных вершин имеют степень больше 2 — для обеспечения этого необходимо по крайней мере $\left\lfloor \frac{n + 2 - 6}{6} \right\rfloor$ дополнительных ребер.

Таким образом, минимальное расширение графа G должно иметь, по крайней мере, $1 + 2 \left\lfloor \frac{n + 2 - 6}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n - 4}{6} \right\rfloor + 3$ дополнительных ребер.

Что и требовалось доказать — граф G_1 является минимальным расширением графа G . □



Библиографический список

1. Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // *Networks*. 1993. № 23. P. 135–142.
2. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // *Мат. заметки*. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650.
3. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 368 с.

Minimal Edge Extensions of Palm Trees

D. D. Komarov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, KomarovDD@gmail.com

Minimal edge extension of graphs can be regarded as a model of optimal edge fault tolerant implementation of a system. The problem of finding the minimal edge extensions of an arbitrary graph is NP-complete, that's why it is of interest to find classes of graphs for which it is possible to build a minimal edge extension analytically. This paper is about of the one-edge extensions of a graphs from a special class named palm trees. In this paper presents a kind of one-edge extension for some palm trees and the proof that it is minimal.

Key words: minimal extensions of graphs.

References

1. Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs. *Networks*, 1993, no. 23, pp. 135–142.
2. Abrosimov M. B. Complexity of some problems associated with the extension of graphs. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, no. 5, pp. 643–650.
3. Bogomolov A. M., Saliy V. N. Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997, 368 p. (in Russian).

УДК 621.397.74

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ВОЗДЕЙСТВИЯ ИСКАЖЕНИЙ НА OFDM/QAM-СИГНАЛ

А. А. Львов¹, В. В. Киселёв²

¹Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматики и телемеханики, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., alvova@mail.ru

²Кандидат технических наук, ассистент кафедры автоматики и телемеханики, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., kiva@live.ru

В работе рассмотрены математические модели каналов связи с помехами различного типа, их влияние на рабочие точки констелляционных диаграмм в системах с OFDM/QAM сигналами, даны рекомендации по мониторингу каналов.

Ключевые слова: качество канала, мониторинг, математические модели, помехи, констелляционная диаграмма.

Современные системы связи, включая системы и сети цифрового телерадиовещания, характеризуются передачей сжатых потоков информации в реальном времени. Для высокоскоростной передачи цифровых данных положительно зарекомендовала себя технология OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing — частотное уплотнение с ортогональными поднесущими) в тандеме с QAM-модуляцией (Quadrature Amplitude Modulation — квадратурно-амплитудная модуляция). Как и другие телекоммуникационные технологии, OFDM/QAM чувствительна к искажениям сигнала, что проявляется в увеличении частоты появления ошибочных битов (Bit Error Rate — BER). Следовательно, одной из важнейших задач, которые необходимо решать при проектировании подобных систем, является анализ степени и результатов воздействия искажений на передаваемый сигнал.

OFDM/QAM сигнал описывается уравнением [1]:

$$z(t) = \operatorname{Re} \left[\exp(2\pi jft) \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{h=H_{\min}}^{H_{\max}} (C_{r,s,h} \times \Psi_{r,s,h}(t)) \right], \quad (1)$$



$$\Psi_{r,s,h}(t) = \begin{cases} \exp(2\pi j h'(t - T_g - sT_s - NrT_s)/T_u) & \text{для } (s + Nr)T_s \leq t \leq (s + Nr + 1)T_s, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2)$$

$$h' = h - (H_{\max} + H_{\min})/2, \quad (3)$$

$$T_s = T_u + T_g, \quad (4)$$

где N — количество OFDM-символов в кадре передачи; h — номер поднесущей частоты; H_{\min} и H_{\max} — соответственно минимальное и максимальное значения поднесущей частоты (нижняя и верхняя границы); s — номер OFDM-символа, r — номер кадра передачи; T_g — длительность защитного интервала; T_u — длительность полезной части OFDM-символа; T_s — длительность OFDM-символа; f — опорная частота передатчика; $C_{r,s,h}$ — значение QAM-ячейки для поднесущей частоты h в символе s кадра r .

Сигнал $z^*(t)$ на входе приёмного устройства имеет вид [2]

$$z^*(t) = z(t) + n(t), \quad (5)$$

где $n(t)$ — функция, описывающая аддитивный сигнал помех и искажения в канале связи, на входе которого действует полезный сигнал $z(t)$.

Обратное преобразование даёт:

$$C_{r,s,h}^* = \exp(-2\pi j f t) \sum_{\tau=(s+Nr)T_s}^{(s+Nr+1)T_s} (z^*(\tau) \times [\Psi_{r,s,h}(\tau)]^{-1}), \quad (6)$$

где $C_{r,s,h}^*$ в общем виде можно представить:

$$C_{r,s,h}^* = C_{r,s,h} + n_{r,s,h}, \quad (7)$$

где $n_{r,s,h}$ — составляющая $n(t)$, накладываемая на $C_{r,s,h}$ в символе s частотной поднесущей h кадра r после преобразования (6).

Так как $C_{r,s,h}^*$ является комплексным числом, то его вещественную и мнимую части в (7) удобно представить в виде матрицы компонентов:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} \{C_{r,s,h}^*\} \\ \operatorname{Im} \{C_{r,s,h}^*\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \{C_{r,s,h}\} \\ \operatorname{Im} \{C_{r,s,h}\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \{n_{r,s,h}\} \\ \operatorname{Im} \{n_{r,s,h}\} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В работе [3] на основе (1), (6) и (8) получена матрица линейного преобразования QAM-сигнала в OFDM-канале с аддитивным гауссовым шумом:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} \{C_{r,s,h}^*\} \\ \operatorname{Im} \{C_{r,s,h}^*\} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{offset} & -\sin \theta_{offset} \\ \sin \theta_{offset} & \cos \theta_{offset} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} k_E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k_S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \{C_{r,s,h}\} \\ \operatorname{Im} \{C_{r,s,h}\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \cos \phi \\ A \sin \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \{n_h\} \\ \operatorname{Im} \{n_h\} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где K — коэффициент ослабления (затухания) сигнала; θ_i — угол поворота модуляционного созвездия (конstellационной диаграммы) (дрожание фазы), являющийся случайной переменной с гауссовым распределением с нулевым средним значением и дисперсией σ_i^2 ($\theta_i \sim N(0, \sigma_i^2)$); θ_{offset} — угол вращения модуляционного созвездия вокруг своей оси (фазовый сдвиг); k_E — коэффициент усиления для вещественного канала относительно мнимого (несогласованность амплитуд); k_S — угол отклонения от ортогональности вещественной и мнимой компонент канала (квадратурная ошибка); A и ϕ — соответственно амплитуда и фаза ложного сигнала (интерференция); n_h — аддитивный гауссов шум на частотной поднесущей h .

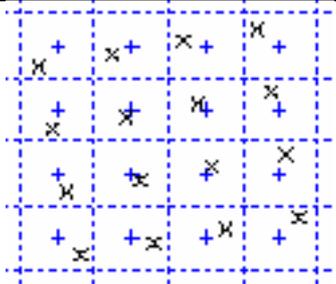
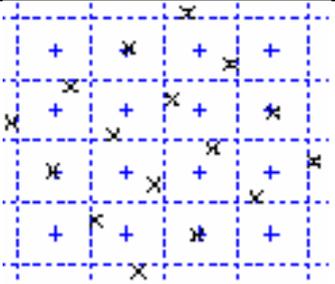
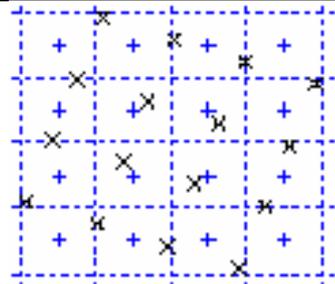
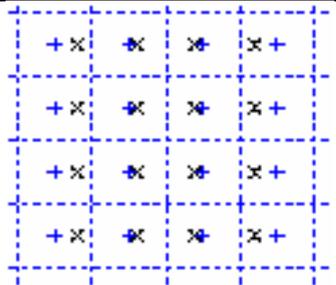
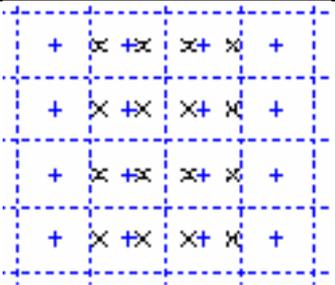
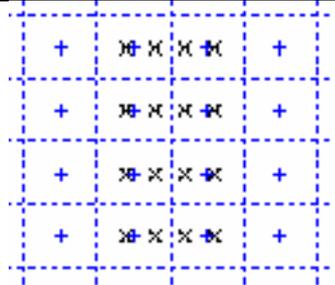
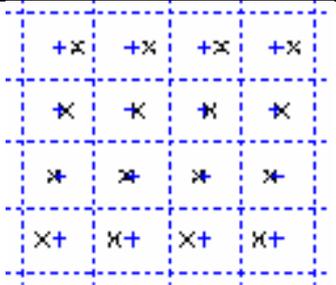
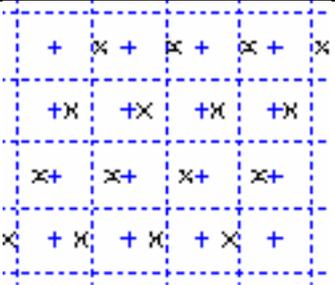
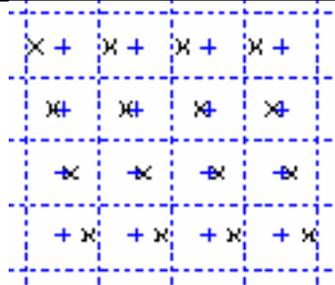
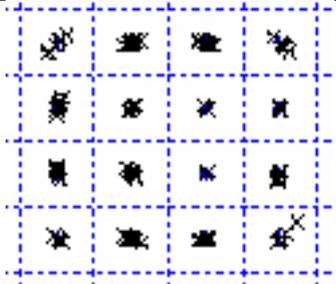
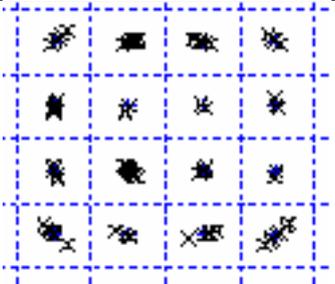
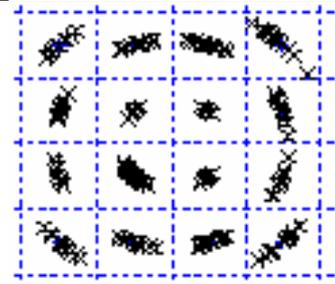
В таблице представлены модуляционные созвездия для 16-QAM, полученные путём численного моделирования на основе уравнения (9).



Аппроксимируя (9) на случай малых углов фазы, когда $\sin \theta_{offset} \approx \theta_{offset}$ и $\cos \theta_{offset} \approx 1$, без учёта дрожания фазы, и рассматривая эффекты, вызванные различными видами помех как некоррелированные, получим следующие математические ожидания компонентов $C_{r,s,h}^*$:

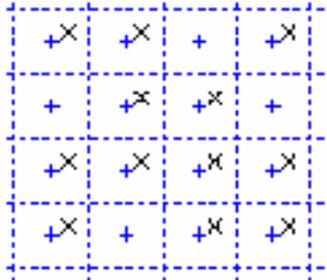
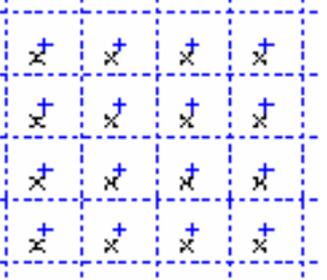
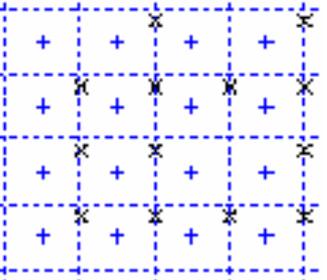
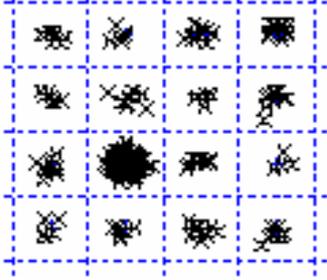
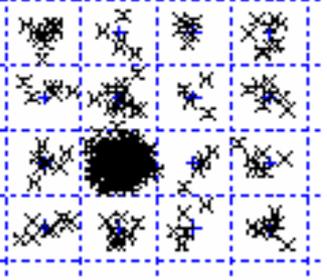
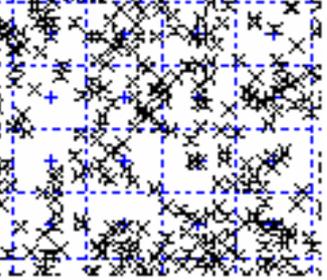
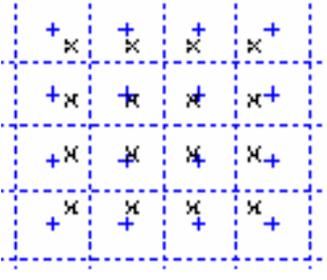
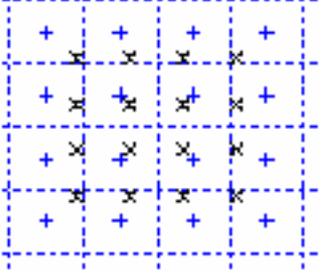
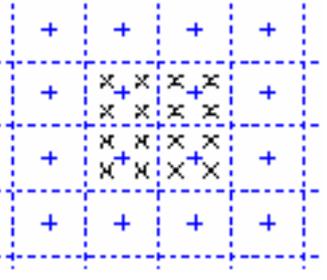
$$\begin{aligned}
 M \left[\operatorname{Re} \{C_{r,s,h}^*\} \right] &= M [Kk_E \operatorname{Re} \{C_{r,s,h}\} - K(k_E k_S - \theta_{offset}) \operatorname{Im} \{C_{r,s,h}\}], \\
 M \left[\operatorname{Im} \{C_{r,s,h}^*\} \right] &= M [Kk_E \theta_{offset} \operatorname{Re} \{C_{r,s,h}\} - K(k_E k_S - \theta_{offset} + 1) \operatorname{Im} \{C_{r,s,h}\}].
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Примеры искажений конstellационной диаграммы для 16-QAM

Искажения	Модуляционные созвездия		
Фазовый сдвиг	 $\theta_{offset} = 0.1884$	 $\theta_{offset} = 0.6280$	 $\theta_{offset} = 1.2246$
Несоогласованность амплитуд	 $k_E = 0.80$	 $k_E = 0.60$	 $k_E = 0.40$
Квадратурная ошибка	 $k_S = 0.16$	 $k_S = 0.42$	 $k_S = -0.24$
Дрожание фазы	 $\sigma_i^2 = 0.042$	 $\sigma_i^2 = 0.064$	 $\sigma_i^2 = 0.100$



Окончание таблицы

Искажения	Модуляционные созвездия		
Интерференционные искажения	 <p>$A = 0.5, \phi = 0.5652$</p>	 <p>$A = 0.5, \phi = 0.3332$</p>	 <p>$A = 0.9, \phi = 0.5652$</p>
Гауссов шум	 <p>$n_h = 0.20$</p>	 <p>$n_h = 0.34$</p>	 <p>$n_h = 0.64$</p>
Ослабление	 <p>$K = 0.83$</p>	 <p>$K = 0.72$</p>	 <p>$K = 0.47$</p>

Примечание. Маркер «+» — сигнал без наложенных искажений; маркер «x» — тот же сигнал, но с внесёнными искажениями; штриховые линии ограничивают области безошибочного распознавания символов сигнала; углы $\theta_i, \theta_{offset}, k_S$ и ϕ — в радианах; коэффициенты K, k_E, A и n_h нормированы.

Анализируя множество принятых символов $C_{r,s,h}^*$, за время передачи кадра NT_s можно оценить параметры K, k_E, k_S и θ_{offset} .

Дисперсия дрожания фазы σ_i^2 определяется из выражения ковариации вещественной и мнимой частей принятого символа $C_{r,s,h}^*$:

$$Cov[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}, \text{Im}\{C_{r,s,h}^*\}] = -K^2 k_E \sigma_i^2 (\text{Re}\{C_{r,s,h}\} \text{Im}\{C_{r,s,h}\} + [\text{Re}\{C_{r,s,h}\}]^2 k_S). \quad (11)$$

Амплитуда A интерферирующего сигнала находится вычислением момента 4-го порядка $m_4[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}]$ и квадрата дисперсии $D[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}]$:

$$A = \sqrt[4]{8D[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}]^2 - \frac{8}{3}m_4[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}]}. \quad (12)$$

Влияние гауссова шума можно оценить, вычислив дисперсию вещественной и мнимой составляющих $C_{r,s,h}^*$:

$$D[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}] = K^2 [\text{Im}\{C_{r,s,h}\}]^2 \sigma_i^2 + D[\text{Re}\{n_h\}] + \frac{A^2}{2},$$



$$D[\text{Im}\{C_{r,s,h}^*\}] = K^2 \left([\text{Re}\{C_{r,s,h}\}]^2 + k_S^2 [\text{Im}\{C_{r,s,h}\}]^2 + 2k_S \text{Re}\{C_{r,s,h}\} \text{Im}\{C_{r,s,h}\} \right) \times \\ \times k_E^2 \sigma_i^2 + D[\text{Im}\{n_h\}] + \frac{A^2}{2}. \quad (13)$$

Проведена верификация (10)–(13) при воздействии на сигнал одного (диаграммы на рис. 1) и одновременном действии двух (рис. 2) типов искажений и аддитивного гауссова шума при различном соотношении сигнал/шум.

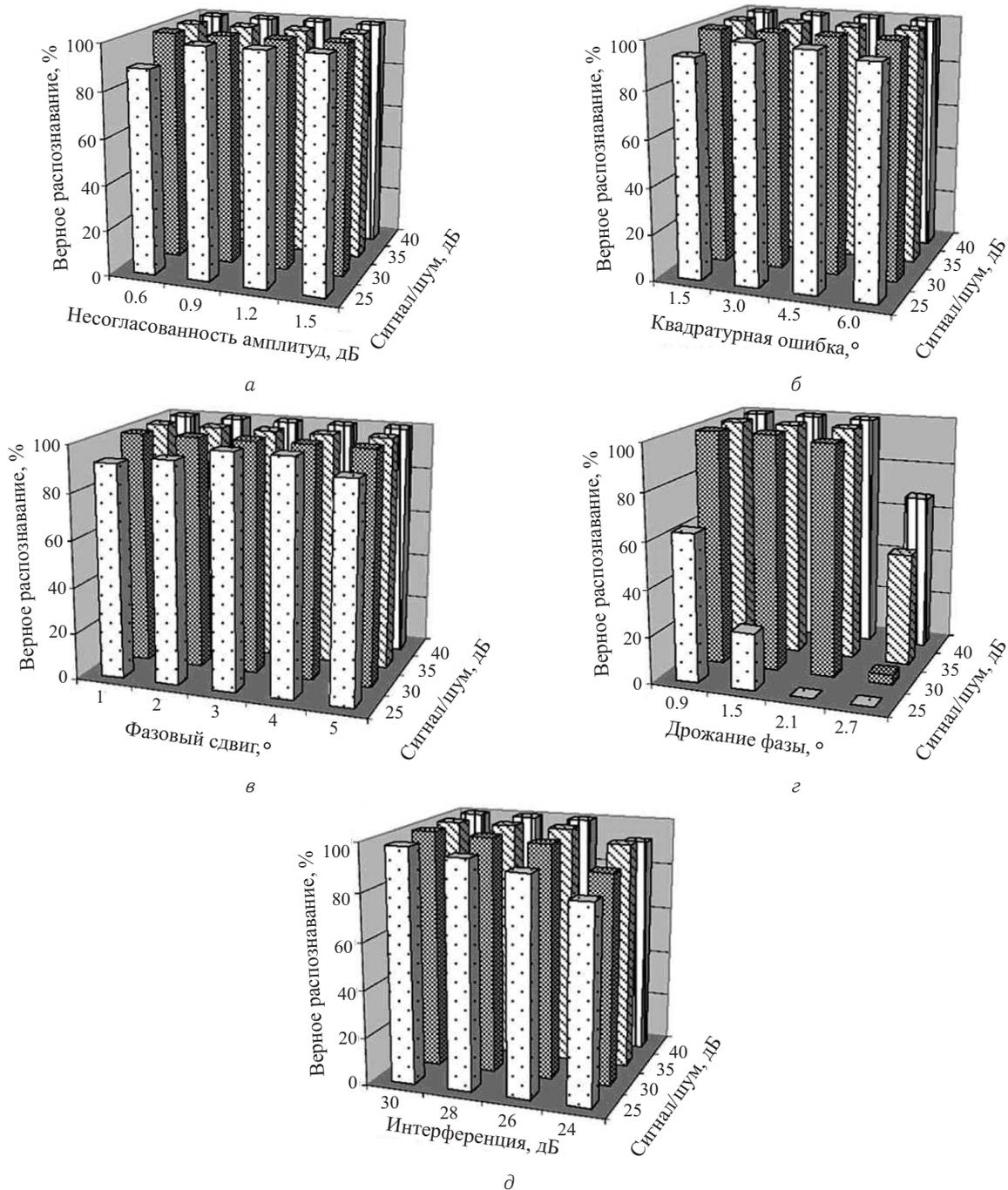


Рис. 1. Результаты моделирования при действии на сигнал одного типа искажений: а — несогласованность амплитуд; б — квадратурная ошибка; в — интерференционные искажения; г — фазовый сдвиг; д — дрожание фазы

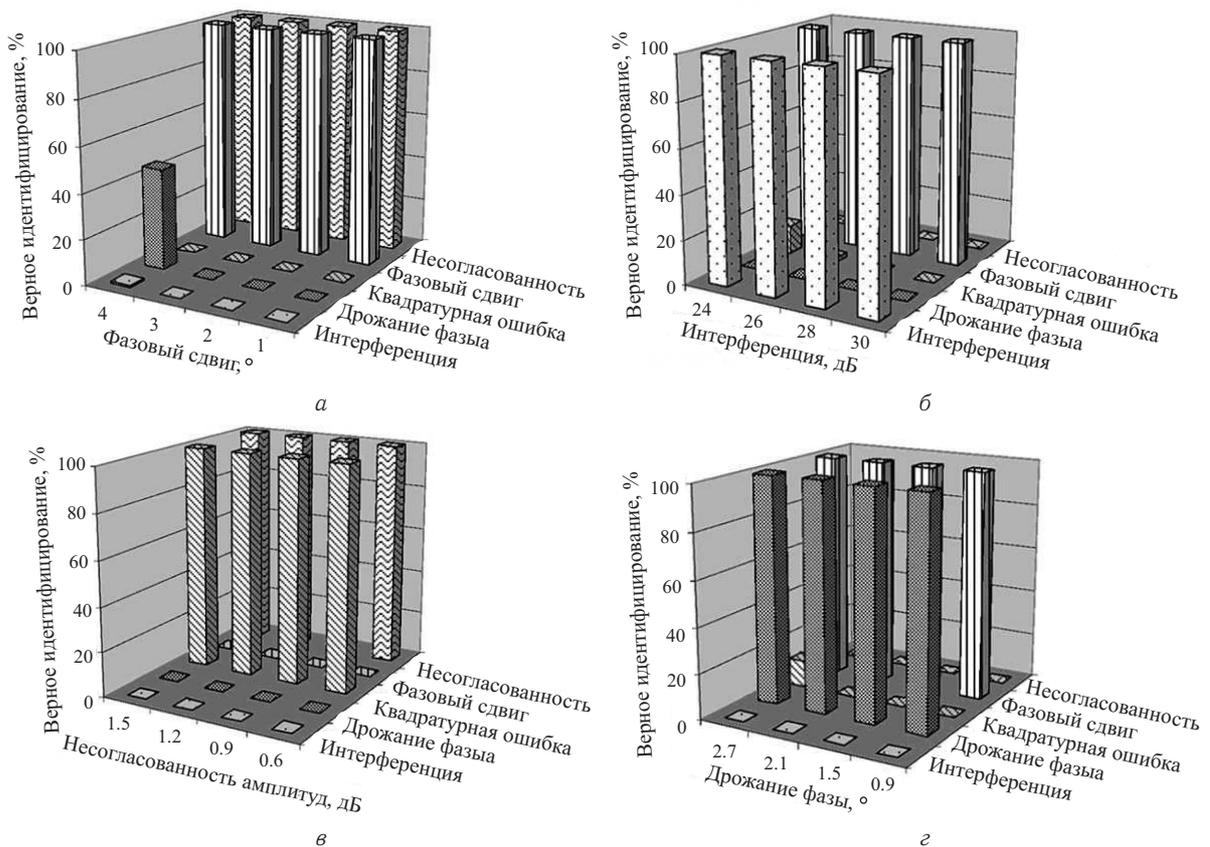


Рис. 2. Результаты моделирования при действии на сигнал двух типов искажений: *а* — несогласованность амплитуд 1.2 дБ и сдвиг фазы 0° – 4° ; *б* — сдвиг фазы 3° и интерференционные искажения 24–30 дБ; *в* — квадратурная ошибка 3° и несогласованность амплитуд 0.6–1.5 дБ; *г* — сдвиг фазы 1.5° и дрожание фазы 0.9° – 2.7°

Были сгенерированы группы из 200 сигналов для каждого значения помехи и величины шума, а также пары искажений различной величины. Каждая диаграмма получена на основе 1500 тестов. Результаты первого моделирования представлены в виде диаграмм процентов правильного распознавания символов: сколько раз символ правильно идентифицирован при наличии помехи, а остальные определены как отсутствующие. Видно, что для каждого типа искажений в подавляющем большинстве случаев получены высокие результаты идентификации. Низкие результаты получены лишь при значительном уровне помех и малой величине отношения сигнал/шум: причина кроется в том, что некоторые символы модуляционного созвездия попали за область (ячейку) их верного распознавания.

Результаты второго моделирования получены при фиксированном значении одной помехи и изменении величины другой и представлены в виде диаграмм процентов правильной идентификации при паре искажений. В результатах также преобладает высокий процент верной идентификации. Колонки с низким значением процентов идентификации относятся к искажениям, которые не были добавлены: причина, как и в предыдущем случае, в том, что наблюдаемые символы вытеснились за границы ячеек верного распознавания.

Таким образом, с помощью соотношений (10)–(13), полученных из математической модели (1), возможно производить анализ степени воздействия типовых искажений на исходный OFDM/QAM-сигнал, а также выявлять эти самые искажения в уже принятом сигнале, что позволит в последующем осуществлять коррекцию принятого сигнала с целью повышения достоверности и скорости передачи информации.

Библиографический список

1. Киселёв В. В., Светлов М. С. Математическая модель канала передачи данных системы цифрового телерадиовещания // Проблемы управления, передачи и обработки информации (АТМ ТКИ-50) : сб. тр. междунар. науч. конф. / Саратов. гос. техн. ун-т. Саратов, 2009. С. 250–252.



2. Киселёв В. В., Львов А. А., Светлов М. С. Особенности моделирования одночастотных сетей цифрового телерадиовещания стандарта DVB-T // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2010. № 4(51). С. 145–150.

3. Киселёв В. В., Львов А. А., Светлов М. С., Мухамбетжанов А. С. Мониторинг каналов в системах с OFDM/QAM сигналами // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2010. № 4(50). С. 13–17.

Numerical Modelling and the Analysis of Impact of Distortions on OFDM/QAM-signal

A. A. Lvov, V. V. Kiselev

Saratov State Technical University, Russia, 410054, Saratov, Politekhnikeskaya st., 77, alvova@mail.ru, kiva@live.ru

In this work mathematical models of communication channels with various interferences, their influence on constellation diagrams' points in systems with OFDM/QAM signals are considered, recommendations about channel monitoring are made.

Key words: communication channel quality, monitoring, mathematic models, interferences, constellation diagram.

Библиографический список

1. Kiselev V. V., Svetlov M. S. Mathematical model of a data link of system of digital TV and radio broadcasting. *Collection of works of the international scientific conference ATM TKI-50*, Saratov, 2009, pp. 250–252 (in Russian).
2. Kiselev V. V., Lvov A. A., Svetlov M. S. Features of modeling of single-frequency networks of digital TV and radio broadcasting of the DVB-T standard. *Vestnik*

Saratov. Gos. Tekhn. Univ., 2010, no. 4(51), pp. 145–150 (in Russian).

3. Kiselev V. V., Lvov A. A., Svetlov M. S., Mukhambetzhonov A. S. Monitoring of channels in systems with OFDM/QAM signals. *Vestnik Saratov. Gos. Tekhn. Univ.*, 2010, № 4(50), pp. 13–17 (in Russian).

PERSONALIA

ПРОФЕССОР А. О. ВАТУЛЯН. К 60-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

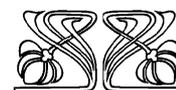
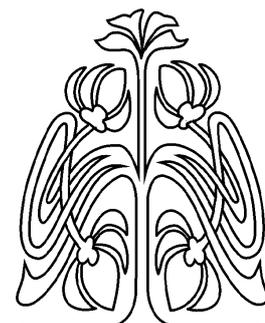
8 октября 2013 г. исполняется 60 лет известному российскому ученому доктору физико-математических наук, профессору Александру Ованесовичу Ватульяну. Вся его жизнь, профессиональная и научная деятельность связаны с Ростовским государственным университетом (в настоящее время — Южный федеральный университет (ЮФУ)). А. О. Ватульян — заведующий кафедрой теории упругости ЮФУ, автор более 350 научных работ по различным проблемам механики деформируемого твердого тела, среди которых 5 монографий и учебников. Под его научным руководством было подготовлено 22 кандидата и 2 доктора наук. В качестве основных направлений научной деятельности А. О. Ватульяна следует отметить обратные граничные, геометрические и коэффициентные задачи математической физики, метод граничных интегральных уравнений в механике деформируемого твердого тела, прямые и обратные задачи для моделей электроупругости и термоэлектроупругости, математические модели биомеханики.

Александр Ованесович Ватульян родился 8 октября 1953 г. в городе Ростове-на-Дону в семье служащих. Его отец — Ватульян Аванес Христофорович — выпускник физико-математического факультета Ростовского государственного университета (РГУ), проработал более 50 лет на кафедре теоретической механики Новочеркасского политехнического института. Мать — Ватульян (Прудникова) Людмила Сергеевна — преподаватель английского языка.

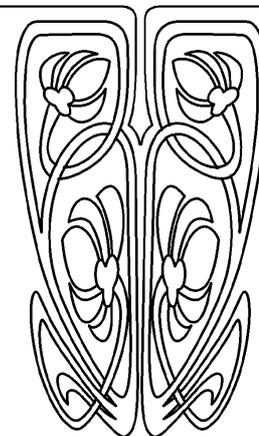
С 1961 г. А. О. Ватульян обучается в г. Новочеркасске. В 1970 г. он с золотой медалью заканчивает среднюю школу № 7 там же и без вступительных экзаменов (как победитель олимпиады по математике) был зачислен на первый курс механико-математического факультета Ростовского государственного университета на специальность «механика». В 1975 г. А. О. Ватульян становится выпускником механико-математического факультета Ростовского государственного университета, получает диплом с отличием. Сразу же поступает в аспирантуру РГУ, по окончании которой, в 1978 г., под руководством профессора В. А. Бабешко защищает кандидатскую диссертационную работу на тему «Смешанные статические и динамические задачи теории упругости для ортотропного слоя». После этого ему присуждается ученая степень кандидата физико-математических наук.

С осени 1978 г. А. О. Ватульян работает в должности ассистента кафедры теории упругости Ростовского госуниверситета, с 1985 г. — доцент; в 1989—1991 гг. —заместитель декана механико-математического факультета по научной работе.

С 1991 по 1993 г. А. О. Ватульян обучается в докторантуре при РГУ и досрочно, в 1993 г., защищает докторскую диссертационную работу на тему «Метод граничных интегральных уравнений в динамических задачах анизотропной теории упругости и электроупругости» по специальности 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела. Научным консультантом работы был академик РАН И. И. Ворович. В 1995 г. А. О. Ватульяну было присвоено ученое звание профессора по кафедре теории упругости.



ПРИЛОЖЕНИЯ





Затем в 1995—1996 гг. он работает в должности заведующего кафедрой высшей математики Донского государственного технического университета (ДГТУ). Здесь он читает курсы «Высшая математика» и «Математический анализ» для студентов.

В 90-е гг. А. О. Ватульян — обладатель трех Соросовских грантов по математике (1997, 1998, 2000 гг.) и звания Соросовского профессора, автор ряда статей в Соросовском образовательном журнале.

С осени 2001 г. и по настоящее время профессор А. О. Ватульян — заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета, профессор кафедры прикладной математики ДГТУ. Отметим, что кафедра теории упругости в Ростовском госуниверситете была основана в 1961 г., основатель кафедры — доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН И. И. Ворович. В настоящее время кафедра является одной из ведущих в России в плане подготовки специалистов высшей квалификации в области механики деформируемого твердого тела. За время своего существования на кафедре и в Институте механики и прикладной математики И. И. Воровичем и его учениками была создана известная своими достижениями научная школа, включающая более 45 докторов и 170 кандидатов наук.

Нынешний состав кафедры теории упругости — 7 профессоров, докторов наук, среди которых А. О. Ватульян, Л. М. Зубов, Д. Н. Карпинский, Л. П. Лебедев, Э. Н. Потетюнко, Ю. А. Устинов, М. И. Чебаков и 7 кандидатов наук, причем 5 из них моложе 35 лет. На кафедре были разработаны и читаются современные оригинальные курсы механики сплошной среды, электроупругости, нелинейных задач теории упругости, механика разрушения, обратных задач механики, теории оболочек, компьютерной биомеханики, теории и технологий МКЭ.

Научные интересы А. О. Ватульяна лежат в области классических и неклассических моделей механики сплошной среды. Особого внимания заслуживают его работы, посвященные исследованию задач о колебаниях анизотропных упругих и электроупругих слоистых сред со смешанными граничными условиями при наличии полостей и трещин. Для этого класса задач А. О. Ватульяном был развит метод граничных интегральных уравнений на основе предложенных им интегральных представлений фундаментальных решений, разработана экономичная реализация метода граничных элементов для сред с анизотропией различного типа.

Для конечных тел предложен метод построения граничных уравнений для анизотропных сред, не требующих знания фундаментальных решений.

С начала 90-х гг. А. О. Ватульян начал активно заниматься обратными задачами для различных моделей. На первом этапе это были геометрические задачи об определении геометрии полостей и трещин в упругой среде по данным акустического зондирования, при этом важные результаты получены как при построении соответствующих операторных уравнений, так и при развитии вычислительных схем, необходимых для нахождения решений возникающих при этом некорректных задач. Исследован ряд задач о реконструкции полостей и трещин. Кроме того, целый спектр результатов был получен для граничных обратных задач об идентификации нагрузок.

В дальнейшем исследование обратных задач было перенесено на наиболее сложный класс задач — коэффициентные задачи механики деформируемого твердого тела, как для моделей неоднородной теории упругости, так и для моделей связанных полей — термоупругости, электроупругости, пороупругости. Укажем здесь как на новые постановки задач этого класса и формулировку операторных соотношений для возникающих нелинейных некорректных проблем, так и формулировку слабых постановок, доказательство обобщенных соотношений взаимности, на основе которых удалось разработать весьма эффективные итерационные схемы для решения многих линейных задач механики деформируемого твердого тела. На основе сочетания метода линеаризации и регуляризованных процедур нахождения обратных к вполне непрерывным операторам А. О. Ватульяном был решен ряд важных задач об идентификации одномерных законов неоднородности для стержневых, слоистых структур по данным акустического зондирования.

Важным обобщающим этапом его научно-исследовательской работы явилась книга, посвященная исследованию различных типов обратных задач в механике деформируемого твердого тела. Она была создана на основе специального курса для студентов-механиков РГУ, вышла в 2007 г. в Издательстве «Физматлит». А. О. Ватульян — автор следующих монографий и учебников:

Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М. : Физматлит, 2007. 223 с.





Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. Ростов н/Д : Изд-во Южного федерального университета, 2009. 176 с.

Ватульян А. О., Беляк О. А., Сухов Д. Ю., Явруян О. В. Обратные и некорректные задачи : учебник. Ростов н/Д : Изд-во Южного федерального университета, 2011. 232 с.

Ватульян А. О., Денина О. В. Обратные коэффициентные задачи для стержней. Методы определения неоднородных свойств упругих стержней на основе акустического зондирования. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2011. 104 с.

Ватульян А. О., Колосова Е. М. Фундаментальные решения для анизотропной среды и их приложения. Интегральные представления фундаментальных и сингулярных решений для двумерных задач, способы их использования для численного решения краевых задач. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2011. 140 с.

В последние годы общие результаты, связанные с решением обратных коэффициентных задач, с успехом применяются к важным прикладным задачам идентификации неоднородного предварительного напряженного состояния, для идентификации свойств тканей в биомеханике, в первую очередь, для определения свойств костного регенерата, а также при анализе колебаний биомеханических конструкций, использующихся при хирургическом лечении переломов. Кроме того, А. О. Ватульян разработал теоретические основы идентификации упругих и вязких свойств кожного покрова на основе акустического мониторинга.

Большое внимание профессор А. О. Ватульян уделяет научно-педагогической и организационной работе, подготовке молодых ученых и специалистов. С 2006 г. он является членом Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, активно участвует в организации и проведении научных конференций и школ (ежегодные начиная с 1995 г. конференции «Современные проблемы механики сплошной среды»; с 2006 г. — «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете»). А. О. Ватульян — вице-президент Ростовского математического общества (с 1998 г.), с 2012 г. заведует отделом дифференциальных уравнений Южного математического института РАН (г. Владикавказ), руководитель 8 научных и 3 издательских грантов РФФИ, член трех диссертационных советов при ЮФУ и ДГТУ.

А. О. Ватульян — человек с широким кругозором, его опыт и высочайшая научная квалификация высокого оцениваются в профессиональном сообществе ученых-механиков России.

Редколлегия журнала поздравляет Александра Ованесовича Ватульяна с 60-летием и желает здоровья и дальнейших творческих успехов в науке и образовательной деятельности.

Л. Ю. Коссович, Ю. Н. Радаев

Список научных работ А. О. Ватульяна

Ватульян А. О. Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя // ПММ. 1977. Т. 41, вып. 4. С. 727–734.

Ватульян А. О. О действии жесткого штампа на ортотропный слой // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1978. Т. XXXI, № 4. С. 31–42.

Ватульян А. О., Овсепян В. В., Пряхина О. Д. Контактная динамическая задача для ортотропного цилиндра // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1983. Т. XXXVI, № 4. С. 47–55.

Ватульян А. О., Кубликов В. Л. О граничных интегральных уравнениях в электроупругости // ПММ. 1989. Т. 53, вып. 6. С. 1037–1041.

Ватульян А. О., Гусева И. А., Сюнякова И. М. О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. СКНЦ. Сер. Ест. науки. 1989. № 2. С. 81–85.

Ватульян А. О., Гетман И. П., Лапицкая Н. Б. Об изгибе пьезоэлектрической биморфной пластины // Прикладная механика. 1991. Т. 27, № 10. С. 101–105.

Ватульян А. О. О граничных интегральных уравнениях 1-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 3. С. 312–314.

Ватульян А. О., Гусева И. А. О восстановлении формы полости в ортотропной полуплоскости по заданному на границе волновому полю // ПММ. 1993. № 4. С. 154–157.

Ватульян А. О., Гусева И. А. О колебаниях ортотропной полуплоскости с полостью // ПМТФ. 1993. № 2. С. 123–127.

Ватульян А. О., Сюнякова И. М. О колебаниях массивной заглубленной плиты на поверхности ортотропной среды // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 6. С. 68–73.



Ватульян А. О., Соболев Б. В. Об одном эффективном методе построения разрывных смещений в задачах механики для тел конечных размеров // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 6. С. 62–69.

Ватульян А. О., Коренский С. А. О восстановлении формы приповерхностного дефекта в полупространстве // Докл. РАН. 1995. Т. 334, № 6. С. 753–755.

Ватульян А. О., Наседкин А. В., Скалиух А. С., Соловьев А. Н., Лапицкая Н. Б. Управление поверхностью секционированной биморфной пластины // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 131–136.

Ватульян А. О., Коренский С. А. Метод линеаризации в обратной задаче для среды со свободной границей // Акустический журнал. 1995. Т. 41, № 3. С. 395–399.

Vatulyan A. O., Kublikov V. L. Boundary element method in electroelasticity // Boundary Elements Communications. 1995. Vol. 6. P. 59–61.

Ватульян А. О., Кирютенко А. Ю., Наседкин А. В. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэластостатике // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 135–142.

Ватульян А. О., Коробейник М. Ю. О граничных интегральных уравнениях в магнитоэластостатике // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 5. С. 600–602.

Ватульян А. О. Фундаментальные решения в нестационарных задачах электроупругости // ПММ. 1996. Т. 60, вып. 2. С. 309–312.

Ватульян А. О., Коренский С. А. Метод линеаризации в геометрических обратных проблемах теории упругости // ПММ. 1997. Т. 61, вып. 4. С. 639–646.

Ватульян А. О., Шамшин В. М. Новый вариант граничных интегральных уравнений и их применение к динамическим пространственным задачам теории упругости // ПММ. 1998. Т. 62, вып. 3. С. 112–119.

Ватульян А. О., Садчиков Е. В. О граничных интегральных уравнениях в акустике // Акустический журнал. 1998. Вып. 3. С. 326–330.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Новая формулировка граничных интегральных уравнений первого рода в электроупругости // ПММ. 1999. Т. 63, вып. 6. С. 860–868.

Ватульян А. О. О некоторых закономерностях поведения решений в термоэластостатике // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 1999. № 3. С. 28–31.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Об одном способе определения пьезомодуля при неоднородной поляризации // ПМТФ. 1999. № 3. С. 204–210.

Ватульян А. О., Садчиков Е. В. О новой формулировке граничных интегральных уравнений в задачах о колебаниях анизотропных тел // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1999. № 2. С. 78–84.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Восстановление поля в анизотропной упругой среде // Акустический журнал. 2000. Т. 46, № 4. С. 449–453.

Ватульян А. О., Ворович И. И., Соловьев А. Н. Об одном классе граничных задач в динамической теории упругости // ПММ. 2000. Т. 46, № 3. С. 373–380.

Ватульян А. О. Граничные интегральные уравнения для эллиптических операторов // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2000. № 3. С. 34–37.

Ватульян А. О., Баранов И. В., Гусева И. А. Идентификация трещиноподобного дефекта в ортотропном слое // Дефектоскопия. 2001. № 10. С. 48–52.

Ватульян А. О., Драгилев В. М., Драгилева Л. Л. Восстановление динамических контактных напряжений в упругом слое по смещениям его свободной поверхности // Акустический журнал. 2001. Т. 47, № 6. С. 829–834.

Ватульян А. О. Динамические контактные задачи для анизотропных тел // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 303–310.

Ватульян А. О., Рынкова А. А. Об оптимальном выборе электродного покрытия в биморфных пьезоэлементах // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2001. Спецвып. Математическое моделирование. С. 41–43.

Ватульян А. О. К теории граничных обратных задач в теории упругости // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2001. Спецвып. С. 31–35.

Ватульян А. О., Рынкова А. А. Колебания пьезоэлектрического биморфа с внутренним разрезным электродом // ПМТФ. 2001. № 1. С. 184–189.

Ватульян А. О., Красников В. В. Колебания ортотропной полуплоскости с криволинейной трещиной // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 5. С. 82–90.



Ватульян А. О., Домброва О. Б., Жиров В. Е. К определению неоднородной поляризации для электроупругого стержня // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2002. № 4. С. 7–9.

Ватульян А. О., Ковалева В. В. Вариационный принцип термоэлектроупругости и его применение в задаче о колебаниях тонкостенного элемента // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 196–201.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н., Ковалев О. В. Новый метод ГИУ в краевых задачах для эллиптических операторов и его численная реализация // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7, № 1. С. 54–65.

Ватульян А. О., Баранов И. В. Идентификация трещины в ортотропной среде // Механика твердого тела : межведомств. сб. науч. тр. Донецк : ИПММ НАН Украины. 2003. Т. 33. С. 133–137.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Некоторые полужавные алгоритмы реконструкции интерфейсных трещин // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2003. № 3. С. 20–24.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Реконструкция трещин в анизотропной упругой среде // Механика и трибология транспортных систем : сб. докл. Междунар. конгресса : в 2 т. Т. 1. Ростов н/Д : РГУПС, 2003. С. 184–187.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Идентификация плоских трещин в упругой среде // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС. 2003. № 1. С. 23–28.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Определение ориентации плоских трещин в упругом теле // Теоретическая и прикладная механика. Харьков : Основа, 2003. Т. 37. С. 141–145.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Принцип взаимности и его применение в задачах неразрушающего контроля // Матем. модел. вычислительная механика и геофизика : тр. III шк.-семинара. Ростов н/Д : Изд-во ЦВВР, 2004. С. 7–21.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. О реконструкции трещин с взаимодействующими берегами // Дефектоскопия. 2004. № 10. С. 62–69.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Обратные задачи теории трещин в твердых телах // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2004. Спецвып. Математика и механика сплошной среды. С. 74–80.

Ватульян А. О., Баранов И. В., Булгуриян О. В. Интегральные уравнения для упругого слоя с трещиной произвольной конфигурации и их исследование // Вестник ДГТУ. 2004. Т. 4, № 3. С. 257–269.

Ватульян А. О. О колебаниях упругих тел с малыми дефектами // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2004. Спецвып. С. 19–22.

Ватульян А. О., Козаренко А. И. О граничной обратной задаче для конечного упругого тела // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2004. Вып. 3. С. 34–38.

Ватульян А. О., Чебакова Е. М. Фундаментальные решения для ортотропной среды в случае установившихся колебаний // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 5. С. 131–139.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Об определении размера дефекта в составном упругом теле // Дефектоскопия. 2004. № 5. С. 15–23.

52. *Ватульян А. О.* Об определении конфигурации трещины в анизотропной среде // ПММ. 2004. Т. 68, № 1. С. 180–188.

Ватульян А. О., Драгилев В. М., Драгилева Л. Л. Восстановление динамических напряжений, действующих на вязкоупругий слой // Акустический журнал. 2005. Т. 51, № 6. С. 742–748.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Идентификация неоднородностей в твердых телах // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. тех. науки. Спецвып. Проблемы машиностроения. 2005. С. 23–27.

Ватульян А. О., Углич П. С. Обратная геометрическая задача для упруго-жидкой среды // Акустический вестн. 2005. Т. 8, № 4. С. 20–28.

Ватульян А. О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 3. С. 343–345.

Ватульян А. О., Баранов И. В. Об определении конфигурации трещины в анизотропной упругой среде // Акустический журнал. 2005. № 4. С. 456–462.

Ватульян А. О., Чебакова Е. М. Фундаментальные решения для анизотропной среды в случае установившихся колебаний // Теоретическая и прикладная механика. Донецк : Изд-во Донецк. нац. ун-та, 2005. Вып. 40. С. 174–178.

Ватульян А. О., Булгуриян О. В. Асимптотический анализ обратных задач теории трещин // Теоретическая и прикладная механика. Донецк : Изд-во Донецк. нац. ун-та, 2005. Вып. 40. С. 179–183.



Ватульян А. О., Соловьев А. Н. О реконструкции плоских трещин в анизотропном упругом теле // ПММ. 2005. № 3. С. 552–561.

Ватульян А. О., Явруян О. В. Реконструкция наклонных трещин в слое // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2005. № 2. С. 36–39.

Ватульян А. О., Суворова О. А. Об обратной задаче для упругого слоя с полостью // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС. 2005. № 1. С. 10–15.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Реконструкция модулей упругости в неоднородных телах по данным частотного зондирования // Теоретическая и прикладная механика Донецк : Изд-во Донецк. нац. ун-та, 2006. Вып. 42. С. 118–123.

Ватульян А. О., Сатуновский П. С. О реконструкции модуля сдвига при анализе колебаний неоднородного по толщине слоя // Теоретическая и прикладная механика. Донецк : Изд-во Донецк. нац. ун-та, 2006. Вып. 42. С. 124–129.

Ватульян А. О., Беляк О. А. Асимптотический подход к решению обратной задачи о реконструкции полости в упругом слое // Вестн. Донец. ун-та. Сер. А. Ест. науки. 2006. Вып. 1. С. 73–76.

Ватульян А. О. Обратные задачи в теории упругости // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС. 2006. Спецвып. С. 11–17.

Ватульян А. О., Беляк О. А. К реконструкции малых полостей в упругом слое // Дефектоскопия. 2006. № 10. С. 33–39.

Ватульян А. О., Углич П. С. О колебаниях упругой полосы с неровной нижней границей // Акустический журнал. 2006. № 6. С. 777–783.

Ватульян А. О. К формулировке интегральных уравнений в проблеме идентификации предварительного напряженного состояния // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС. 2006. № 2. С. 23–25.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Об итерационном подходе в обратных задачах теории упругости // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС. 2006. № 1. С. 23–29.

Ватульян А. О., Явруян О. В. Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // ПММ. 2006. № 4. С. 714–724.

Ватульян А. О., Двоскин М. А., Сатуновский П. С. О колебаниях неоднородного упругого слоя // ПМТФ. 2006. № 3. С. 157–164.

Баранов И. В., Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред // Вычислительные технологии. 2006. № 3. С. 14–26.

Ватульян А. О., Бочарова О. В., Жарков Р. С. Реконструкция малых полостей в упругих стержнях // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Ест. науки. 2006. № 2. С. 28–32.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н. О реконструкции плоских трещин в упругом теплопроводном теле с учетом взаимодействия их берегов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2006. № 1. С. 149–160.

Ватульян А. О., Аникина Т. А. Акустические методы контроля регенерации костной ткани // Экологический вестн. ЧЭС. 2007. № 3. С. 10–17.

Ватульян А. О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер. Ест. науки. 2007. № 4 (54). С. 93–103.

Ватульян А. О., Явруян О. В. Идентификация композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 2. С. 174–180.

Ватульян А. О., Домброва О. Б., Жиров В. Е. Обратные задачи для неоднородно поляризованных пьезоэлектрических стержней // ПММ. 2007. № 1. С. 93–101.

Ватульян А. О., Рыикова А. А. Об одной модели изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с разрезными электродами и ее приложениях // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 4. С. 14–122.

Ватульян А. О., Сатуновский П. С. Об определении упругих модулей при анализе колебаний неоднородного слоя // Докл. РАН. 2007. Т. 414. № 1. С. 36–38.

Ватульян А. О. Реконструкция модулей упругости в поперечно-неоднородном волноводе // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Акустика и волны. Киев : Наук. думка, 2007. С. 56–64.

Ватульян А. О., Солуянов Н. О. Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 152–158.



Ватульян А. О., Азарова П. А., Явруян О. В. Идентификация параметров наклонной прямолинейной трещины в вязкоупругом слое // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. № 3. С. 461–472.

Ватульян А. О., Олифер Н. А., Пономарева А. Д. Идентификация модулей упругости и ее приложения к реконструкции свойств биологических тканей // Экологический вестн. ЧЭС. 2008. № 1. С. 12–17.

Ватульян А. О., Бочарова О. В. Обратные задачи для упругого неоднородного стержня // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Ест. науки. 2008. № 3. С. 33–37.

Ватульян А. О. О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел // Докл. РАН. 2008. Т. 422, № 2. С. 182–184.

Ватульян А. О., Беляк О. А. Об асимптотическом подходе при расчете волновых полей в анизотропном слое с полостью // Теоретическая и прикладная механика. Донецк : Изд-во Донецк. нац. ун-та, 2008. Вып. 43. С. 130–134.

Ватульян А. О., Бочарова О. В. О методах идентификации неоднородных свойств упругих стержней // Теоретическая и прикладная механика. Донецк : Изд-во Донецк. нац. ун-та, 2008. Вып. 43. С. 168–175.

Ватульян А. О., Дударев В. В. О некоторых проблемах реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в упругих телах // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 2. С. 25–32.

Ватульян А. О., Дударев В. В. О реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в стержне // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС. 2009. № 3. С. 18–23.

Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном подходе при восстановлении коэффициентов переноса // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Ест. науки. 2009. № 3. С. 39–43.

Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС. 2009. № 3. С. 24–30.

Ватульян А. О. О некоторых постановках обратных коэффициентных задач для линейных операторов // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Ест. науки. 2009. Спецвып. Актуальные проблемы механики. С. 50–54.

Ватульян А. О. О различных постановках обратных коэффициентных задач для линейных операторов в частных производных с переменными коэффициентами // Математический форум. Т. 3. Исследования по математическому анализу. Владикавказ : ВНИЦ РАН и РСО-А, 2009. С. 55–66.

Ватульян А. О. Об адаптационной теории упругости и ее приложениях // Поляховские чтения : тр. V междунар. конф. СПб. : Изд-во СПбГУ, 2009. С. 263–268.

Ватульян А. О., Боброва А. Н. Об определении закона изменения модуля Юнга при анализе продольных колебаний стержня // Вестн. ДГТУ. 2009. № 4. С. 613–621.

Ватульян А. О., Соловьев А. Н., Спожакин А. С., Шевцов С. Н. Реконструкция дефектов в слоистых композитах // Вестн. ДГТУ. 2009. Т. 9, № 2. С. 3–14.

Ватульян А. О., Беляк О. А. О различных способах реконструкции полости в ортотропном слое // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 181–189.

Ватульян А. О. О вариационном подходе при исследовании обратных коэффициентных задач в теории упругости // Владикавказ. мат. журнал. 2009. Т. 11, вып. 1. С. 3–8.

Ватульян А. О., Бочарова О. В. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. 2009. Т. 55, № 3. С. 281–288.

Ватульян А. О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. 2010. № 6. С. 911–918.

Ватульян А. О., Бурьян А. Ю., Осипов А. В. Об идентификации переменной жесткости при анализе поперечных колебаний балки // Вестн. ДГТУ. 2010. Т. 10, № 6. С. 825–833.

Ватульян А. О. Об итерационных процессах в коэффициентных обратных задачах // Исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и их приложениям. Владикавказ : ВНИЦ РАН и РСО-А, 2010. С. 20–32. (Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 4.)

Ватульян А. О., Ляпин А. А. Динамическая теорема взаимности и фундаментальные решения для пороупругих сред. // Вестн. ЧЭС. 2010. № 4. С. 23–28.

Аникина Т. А., Богачев И. В., Ватульян А. О. Об определении неоднородных реологических свойств балок // Вестн. ДГТУ. 2010. № 7. С. 1016–1023.



Ватульян А. О., Недин Р. Д. К идентификации неоднородных предварительных напряжений // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2011. № 1. С. 38–34.

Аникина Т. А., Богачев И. В., Ватульян А. О. Идентификация неоднородных характеристик вязкоупругих стержней при изгибных колебаниях // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. № 1. С. 107–115.

Ватульян А. О. Обратные коэффициентные задачи в механике // Вестн. Нижегород. ун-та им. Лобачевского. 2011. № 4(4). С. 1418–1420.

Ватульян А. О., Лапина П. А. Об асимптотическом анализе задачи о реконструкции трещины в вязкоупругом слое // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС. 2011. № 3. С. 21–29.

Ватульян А. О., Ляпин А. А. О вариационной постановке задач пороупругости в случае установившихся колебаний // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Ест. науки. 2011. № 4. С. 20–23.

Soloviev A. N., Vatulyan A. O. Non-classical BIEM in Electroelasticity and Inverse Coefficient Problem // Piezoceramic Materials and Devices. Nova Science Publishers. 2011. Ch. 1. P. 1–51.

Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В. Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акустический журнал. 2011. Т. 57, № 6 С. 723–730.

Nedin R., Vatulyan A. On the Reconstruction of Inhomogeneous Initial Stresses in Plates // Advanced Structured Materials. Vol. 15. Shell-like Structures — Nonclassical Theories and Applications. Springer, 2011. P. 165–182.

Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об особенностях идентификации неоднородных свойств термоупругих тел // Экологический вестн. науч. центров ЧЭС. 2011. № 1. С. 36–43.

Dudarev V. V., Vatulyan A. O. On the reconstruction of inhomogeneous prestress fields // ZAMM — Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2011. Vol. 91, iss. 6. P. 485–492.

Ватульян А. О., Денина О. В. Об одном способе определения упругих характеристик для неоднородных тел // ПМТФ. 2012. № 2. С. 137–147.

Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном подходе к восстановлению свойств термоупругих тел // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Ест. науки. 2012. № 4. С. 25–29.

Ватульян А. О., Дударев В. В. О реконструкции неоднородных свойств пьезоэлектрических тел // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5, № 4. С. 259–264.

Богачёв И. В., Ватульян А. О. Обратные коэффициентные задачи для диссипативных операторов и идентификация свойств вязкоупругих материалов // Владикавказ. мат. журнал. 2012. № 3. С. 31–44.

Богачёв И. В., Ватульян А. О., Явруян О. В. Идентификация свойств неоднородной электроупругой среды // ПММ. 2012. Т. 76, № 5. С. 860–866.

Богачёв И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В., Явруян О. В. Об определении свойств неоднородных электроупругих тел // Теоретическая и прикладная механика. 2012. № 4(50). С. 46–52.

Аникина Т. А., Ватульян А. О., Углич П. С. Определение характеристик неоднородной пластины // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17. № 6. С. 26–36.

Ватульян А. О., Сухов Д. Ю. Об одном методе определения параметров упругих потенциалов // Экологический вестн. ЧЭС. 2012. № 4. С. 27–32.

Ватульян А. О., Гукасян Л. С. О задаче Коши для уравнения в частных производных первого порядка и ее приложениях в теории обратных задач // Вестн. ДГТУ. 2012. № 7. С. 11–20.

Nedin R., Vatulyan A. Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // Solids and Structures. 2013. Vol. 50, iss. 13. P. 2107–2114.

Ватульян А. О., Ляпин А. А. Об обратных коэффициентных задачах пороупругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 2. С. 114–121.



Подписка на I полугодие 2014 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017,
раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки».
Журнал выходит 4 раза в год.

Подписка оформляется по заявочным письмам
непосредственно в редакции журнала.

Заявки направлять по адресу:

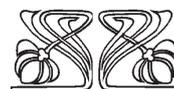
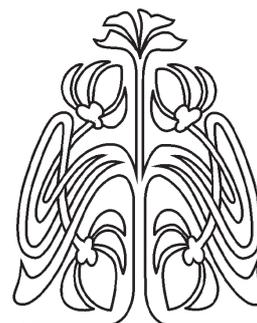
410012, Саратов, Астраханская, 83.

Редакция журнала «Известия Саратовского университета».

Тел. (845-2) 52-26-85, 52-50-04; факс (845-2) 27-85-29;

e-mail: mmi@sgu.ru

Каталожная цена одного выпуска 350 руб.



ПРИЛОЖЕНИЯ

