

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. А. Алдашев

Доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан, aldash51@mail.ru

В работе для модельного многомерного эллиптико-параболического уравнения показана однозначная разрешимость классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области.

Ключевые слова: уравнение, задача, область, функция.

Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задачи Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. Дальнейшее изучение этой задачи приведено в [2].

В работе для модельного многомерного эллиптико-параболического уравнения доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ — части поверхности Γ , лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть S — общая часть границ областей $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$, представляющая множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m .

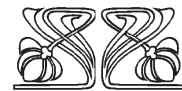
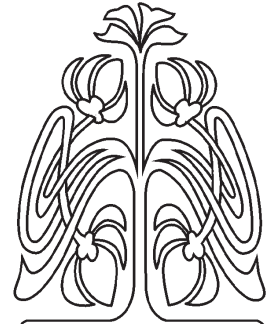
В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерное смешанное эллиптико-параболическое уравнение:

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u + u_{tt}, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

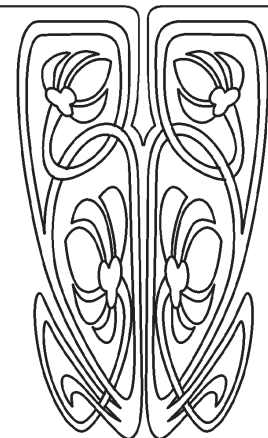
где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m, m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, 3, \dots, m-1, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega_{\alpha\beta}}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям:



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





$$u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), \quad u|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(t, \theta), \tag{3}$$

при этом $\varphi_1(1, \theta) = \psi_1(\alpha, \theta)$, $\varphi_2(1, \theta) = \psi_2(\beta, \theta)$, $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева.

Имеет место следующая лемма [3].

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам:

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Обозначим через $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_{2n}^k(t)$ коэффициенты ряда (4) разложений функций $\varphi_2(r, \theta)$, $\psi_2(t, \theta)$ соответственно. Тогда справедлива

Теорема. Если $\varphi_1(r, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $\psi_1(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $l > 3m/2$, то задача 1 однозначно разрешима.

Доказательство. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_t = 0, \tag{5}$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [3], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_β принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [3], будем иметь

$$\bar{u}_{nrr} + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr} - \bar{u}_{nt} - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{7}$$

при этом краевое условие (3) с учетом леммы 1 соответственно запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_{2n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots. \tag{8}$$

В (7), (8) произведем замену переменных $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_{2n}^k(t)$ и получим:

$$\bar{v}_{nrr} + \frac{m-1}{r} \bar{v}_{nr} - \bar{v}_{nt} - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{v}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \tag{9}$$

$$\bar{v}_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{10}$$



$$\bar{f}_n^k(r, t) = \psi_{2nt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} \psi_{2n}^k(t), \quad \varphi_{2n}^k(r) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r) - \psi_{2n}^k(\beta).$$

Произведя замену переменной $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{(1-m)/2} v_n^k(r, t)$, задачу (9), (10) приведем к следующей задаче:

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k - v_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = f_n^k(r, t), \quad (11)$$

$$v_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \quad (12)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4}, \quad f_n^k(r, t) = r^{(m-1)/2} \bar{f}_n^k(r, t), \quad \bar{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{(m-1)/2} \varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищем в виде

$$v_n^k(r, t) = v_{1n}^k r, t + v_{2n}^k(r, t),$$

где $v_{1n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{1n}^k = f_n^k r, t, \quad (13)$$

$$v_{1n}^k(r, \beta) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad (14)$$

а $v_{2n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \quad (15)$$

$$v_{2n}^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0. \quad (16)$$

Решение вышеуказанных задач аналогично [4] рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (17)$$

при этом пусть

$$f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) R_s(r), \quad \bar{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k R_s(r). \quad (18)$$

Подставляя (17) в (13), (14), с учетом (18) получим:

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (19)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (20)$$

$$T_{st} + \mu_{s,n} T_s = -a_{s,n}^k(t), \quad \beta < t < 0, \quad (21)$$

$$T_s(\beta) = 0. \quad (22)$$

Ограниченным решением задачи (19), (20) является [5]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (23)$$

где $\nu = n + (m-2)/2$, $\mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_{\nu}(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (21), (22) является

$$T_{s,n}(t) = (\exp(-\mu_{s,n}^2 t)) \int_t^{\beta} a_{s,n}^k(\xi) (\exp \mu_{s,n}^2 \xi) d\xi. \quad (24)$$

Подставляя (23) в (18) получим:

$$r^{-1/2} f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad r^{-1/2} \bar{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \quad (25)$$



Ряды (25) — разложения в ряды Фурье–Бесселя [6], если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_{\nu}(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad (26)$$

$$b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad (27)$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \dots$, — положительные нули функций Бесселя $J_{\nu}(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (17), (23), (24) получим решение задачи (13), (14)

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \quad (28)$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяется из (26).

Далее, подставляя (17) в (15), (16), с учетом (18) будем иметь задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 T_s = 0, \quad \beta < t < 0, \quad T_s(\beta) = b_{s,n}^k,$$

решением которого является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n}^k \exp \mu_{s,n}^2 (\beta - t). \quad (29)$$

Из (23), (29) получим:

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k \sqrt{r} (\exp \mu_{s,n}^2 (\beta - t) J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \quad (30)$$

где $b_{s,n}^k$ находится из (27).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (3) в области Ω_{β} является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{(1-m)/2} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \quad (31)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$, $v_{2n}^k(r, t)$ определяются из (28), (30).

Учитывая формулу $2J'_{\nu}(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$ [6], оценки [3, 4]

$$J_{\nu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{z^{3/2}} \right), \quad \nu \geq 0,$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{m/2-1+l}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad l = 0, 1, \dots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\psi_2(t, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta)$, как в [7], можно доказать, что полученное решение (31) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_{\beta}) \cap C^2(\Omega_{\beta})$.

Далее, из (28), (30), (31) при $t \rightarrow -0$ имеем:

$$u(r, \theta, t) = \tau(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (32)$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{2n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{(2-m)/2} \left[\int_0^{\beta} a_{s,n}^k(\xi) (\exp \mu_{s,n}^2 \xi) d\xi + b_{s,n}^k (\exp \mu_{s,n}^2 \beta) \right] J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n}r).$$

Из (26)–(28), (30), а также из лемм 1 и 2, вытекает, что $\tau(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $l > 3m/2$.



Таким образом, учитывая краевые условия (2) и (32), мы приходим в области Ω_α к задаче Дирихле для многомерного уравнения Лапласа:

$$\Delta_x u + u_{tt} = 0 \quad (33)$$

с данными

$$u|_S = \tau(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad (34)$$

которое имеет единственное решение в классе $C(\overline{\Omega_\alpha}) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ [7, 8].

В [7, 8] приводится явный вид решения (33), (34), поэтому можно записать представления решения и для задачи (1). Теорема доказана.

Библиографический список

1. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка // Сб. переводов. Математика. 1963. Т. 7, № 6. С. 99–121.
2. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2010. 360 с.
3. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977. 659 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 703 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : в 2 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Справочная математическая библиотека. М. : Наука, 1974. 297 с.
7. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. Новосиб. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 7–13.
8. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 3–7.

Well-posedness of the Dirichlet Problem in a Cylindrical Domain for Multidimensional Elliptic-parabolic Equation

S. A. Aldashev

Kazakh National Pedagogical University named after Abai, 13, Dostyk ave., 050010, Almaty, Kazakhstan, aldash51@mail.ru

A unique solvability of classic solutions to Dirichlet's problem in the cylindrical domain for the model multidimensional elliptic-parabolic equation is shown in the article.

Key words: equation, problem, domain, function.

References

1. Fikera G. K edinoi teorii kraevykh zadach dlia elliptiko-parabolicheskikh uravnenii vtorogo poriadka [The unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order]. *Sbornik perevodov. Matematika*. 1963, vol. 7, no. 6, pp. 99–121 (in Russian).
2. Oleinik O. A., Radkevich E. V. *Uravneniia s neotritsatel'noi kharakteristicheskoi formoi* [Equations with nonnegative characteristic form]. Moscow, Moscow Univ. Press, 2010, 360 p. (in Russian).
3. Mihlin S. G. *Mnogomernye singulyarnye integraly i integral'nye uravneniya* [Higher-dimensional singular integrals and integral equations]. Moscow, Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., 1962, 254 p. (in Russian).
4. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of mathematical physics*. Translated from the Russian by A. R. M. Robson and P. Basu. Reprint of the 1963 translation. New York, Dover Publications, Inc., 1990. 765 p.
5. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym* [Manual of ordinary differential equations]. Third revised edition. Translated from the German by S. V. Fomin. Moscow, Nauka, 1965, 703 p. (in Russian).
6. Beitmen G., Erdeii A. *Vysshie transtsendentnye*



funktsii. T. II: Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny [Higher transcendental functions. Vol. II: Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials]. Translated from the English by N. Ja. Vilenkin. Second edition, unrevised. Spravochnaya Matematicheskaya Biblioteka [Mathematical Reference Library]. Moscow, Nauka, 1974. 295 p. (in Russian).

7. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem

in the cylindric domain for one class of multi-dimensional elliptic equations. *Vestnik, Quart. J. of Novosibirsk State Univ. Ser. Math., mech., inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 7–13 (in Russian).

8. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for equation Laplace. *Izv. Saratov. Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 3–7 (in Russian).

УДК 517.95; 517.984

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

М. Ш. Бурлуцкая¹, А. П. Хромов²

¹ Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, bms2001@mail.ru

² Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Исследуется смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией в потенциале и с периодическими краевыми условиями. Получены уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи, на основе которых проводится обоснование применения метода Фурье. Используются приемы, позволяющие избежать исследования равномерной сходимости почленно продифференцированного формального решения по методу Фурье и получить классическое решение при минимальных требованиях на начальные данные задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение, асимптотика собственных значений и собственных функций, система Дирака.

В данной работе методом Фурье решается следующая смешанная задача с инволюцией:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + q(x)u(1 - x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (3)$$

где $q(x)$ — комплекснозначная функция из $C^1[0, 1]$ такая, что $q(0) = q(1)$, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным минимальным требованиям: $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$.

Как и в [1, 2], где также рассматривается простейшая смешанная задача с инволюцией при производной $u_x(x, t)$, применяя идеи А. Н. Крылова [3] и В. А. Черныгина [4], мы избегаем исследования равномерной сходимости почленно продифференцированного формального решения по методу Фурье. Это позволяет получить классическое решение задачи при минимальных требованиях на $\varphi(x)$.

1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

1. Введем оператор L :

$$Ly = l[y] = y'(x) + q(x)y(1 - x), \quad y(0) = y(1).$$

Рассмотрим соответствующую спектральную задачу $Ly = \lambda y$:

$$y'(x) + q(x)y(1 - x) = \lambda y(x), \quad (4)$$



$$y(0) = y(1). \quad (5)$$

Осуществим переход от системы (4)–(5) к системе Дирака. Положим $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T – знак транспонирования) и рассмотрим систему

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \quad (6)$$

где $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$ и $z_1(x) = z_2(1-x)$.

Лемма 1. Если $y(x)$ есть решение уравнения (4) и $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1-x)$, то $z(x)$ удовлетворяет системе Дирака (6) и условию

$$z_1(1/2) = z_2(1/2). \quad (7)$$

Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (6)–(7), то $y(x) = z_1(x)$ удовлетворяет уравнению (4).

Доказательство. Пусть $y(x)$ есть решение уравнения (4). Тогда очевидно, что $z(x)$ удовлетворяет системе (6)–(7). Запишем систему (6) покомпонентно:

$$z_1'(x) + q(x)z_2(x) = \lambda z_1(x), \quad (8)$$

$$-z_2'(x) + q(1-x)z_1(x) = \lambda z_2(x). \quad (9)$$

Заменяя в (8)–(9) x на $1-x$, приходим к системе

$$z_1'(1-x) + q(1-x)z_2(1-x) = \lambda z_1(1-x),$$

$$-z_2'(1-x) + q(x)z_1(1-x) = \lambda z_2(1-x),$$

из которой, положив $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$, где $u_1(x) = z_2(1-x)$, $u_2(x) = z_1(1-x)$, получим:

$$-u_2'(x) + q(1-x)u_1(x) = \lambda u_2(x),$$

$$u_1'(x) + q(x)u_2(x) = \lambda u_1(x).$$

Далее

$$u_1(1/2) = z_2(1/2) = z_1(1/2) = u_2(1/2).$$

Таким образом, $u(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одной и той же системе уравнений и $u(1/2) = z(1/2)$. Значит, $u(x) \equiv z(x)$, откуда, в частности, $z_2(x) = z_1(1-x)$. Поэтому из (8) получаем:

$$z_1'(x) + q(x)z_1(1-x) = \lambda z_1(x).$$

Лемма доказана. □

Из леммы 1 очевидным образом следует утверждение

Лемма 2. Число λ является собственным значением, а $y(x)$ – собственной функцией оператора L тогда и только тогда, когда $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T = (y(x), y(1-x))^T$ является ненулевым решением системы (6) с краевыми условиями:

$$z_1(0) = z_1(1), \quad z_1(1/2) = z_2(1/2). \quad (10)$$

2. Представим систему (6) в виде

$$z'(x) + Q(x)z(x) = \lambda Dz(x), \quad (11)$$

где $Q(x) = B^{-1}P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ -q(1-x) & 0 \end{pmatrix}$, $D = B^{-1} = \text{diag}(1, -1)$. Тогда (см. [2]) имеет место:

Теорема 1. Для общего решения системы (11) справедлива асимптотическая формула:

$$z(x, \lambda) = U(x, \lambda)e^{\lambda D x} c, \quad (12)$$



где $U(x, \lambda) = E + O(1/\lambda)$, E — единичная матрица, $c = (c_1, c_2)^T$ — произвольный постоянный вектор. Матрица $O(1/\lambda)$ регулярна по λ в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Re} \lambda \geq -h$, $\operatorname{Re} \lambda \leq h$ (h — любое фиксированное положительное число), и оценка $O(\cdot)$ равномерна по x .

Теорема 2 (уточнение теоремы 1). Если $\operatorname{Re} \lambda \geq -h$, то для $U(x, \lambda) = (u_{ij}(x))_1^2$ в формуле (12) справедливы асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} u_{11}(x) &= 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t)q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \\ u_{12}(x) &= \frac{1}{2\lambda} \left(q_2(x) - q_2(1)e^{-2\lambda(1-x)} + \int_x^1 e^{2\lambda(x-t)} q_2'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \\ u_{21}(x) &= -\frac{1}{2\lambda} \left(q_1(x) - q_1(0)e^{-2\lambda x} - \int_0^x e^{-2\lambda(x-t)} q_1'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \\ u_{22}(x) &= 1 - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t)q_2(t) dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \end{aligned}$$

где $q_2(x) = q(x)$, $q_1(x) = -q(1-x)$, $O(1/\lambda^2)$ регуляرنы при больших $|\lambda|$ и оценки $O(\cdot)$ равномерны по x .

Аналогичные формулы справедливы и при $\operatorname{Re} \lambda \leq h$.

Доказательство. Представим (6) по координатам в виде

$$u_1'(x) - \lambda u_1(x) = -q_2(x)u_2(x), \tag{13}$$

$$u_2'(x) + \lambda u_2(x) = -q_1(x)u_1(x). \tag{14}$$

Полагая $w_1(x) = u_1(x)e^{-\lambda x}$, $w_2(x) = u_2(x)e^{\lambda x}$, из (13) и (14) получим:

$$w_1(x) = c_1 - \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)w_2(t) dt, \tag{15}$$

$$w_2(x) = c_2 - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)w_1(t) dt. \tag{16}$$

Выполним подстановку (16) в (15):

$$w_1(x) = c_1 - c_2 \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) dt + \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t)w_1(t) dt \int_t^x e^{-2\lambda \tau} q_2(\tau) d\tau. \tag{17}$$

Полагая в (17) $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и учитывая, что

$$\int_t^x e^{-2\lambda \tau} q_2(\tau) d\tau = O(\lambda^{-1}e^{-2\lambda t}), \quad \int_0^x e^{2\lambda \tau} q_1(\tau) d\tau = O(\lambda^{-1}e^{2\lambda x}), \tag{18}$$

получим $w_1(x) = 1 + O(\lambda^{-1})$, а отсюда из (16) $w_2(x) = O(\lambda^{-1}e^{2\lambda x})$.

Далее, положим $c_2 = 1$ и подставим (15) в (16). Тогда

$$w_2(x) = 1 - \varphi(x, \lambda) \left[c_1 - \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)w_2(t) dt \right] + \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t)w_2(t)\varphi(t, \lambda) dt, \tag{19}$$

где $\varphi(x, \lambda) = \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) dt = O(\lambda^{-1}e^{2\lambda x})$. Полагая теперь в (19) $c_1 = \int_0^1 e^{-2\lambda t} q_2(t)w_2(t) dt$, получим, что $w_2(x) = 1 + O(\lambda^{-1})$, а тогда $w_1(x) = O(\lambda^{-1}e^{-2\lambda x})$. Отсюда, в частности, легко следует теорема 1.



Теперь дадим уточнение $w_1(x)$ и $w_2(x)$. В случае $c_1 = 1, c_2 = 0$ обозначим $w_1(x) = w_{11}(x), w_2(x) = w_{21}(x)$. Имеем:

$$\int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau) d\tau = -\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau) \Big|_t^x + \frac{1}{2\lambda} \int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2'(\tau) d\tau.$$

Тогда, подставляя найденную асимптотику для $w_1(x) = w_{11}(x)$ в (17) при $c_1 = 1, c_2 = 0$, получим:

$$w_1(x) = 1 - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) dt \int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau) d\tau + O(\lambda^{-2}). \quad (20)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) dt \int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) \left[-\frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda x} q_2(x) + \frac{1}{2\lambda} e^{-2\lambda t} q_2(t) \right] dt + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) \int_t^x e^{-2\lambda\tau} q_2'(\tau) d\tau = \\ &= O(\lambda^{-2}) + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t) q_2(t) dt + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x e^{-2\lambda\tau} q_2'(\tau) d\tau \int_0^\tau e^{2\lambda t} q_1(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t) q_2(t) dt + O(\lambda^{-2}), \end{aligned}$$

то из (20) получаем:

$$w_1(x) = 1 - \frac{1}{2\lambda} \int_0^x q_1(t) q_2(t) dt + O(\lambda^{-2}). \quad (21)$$

Подставим (21) в (16) при $c_2 = 0$:

$$\begin{aligned} w_2(x) = w_{21}(x) &= - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) dt + O(\lambda^{-2} e^{2\lambda x}) = \\ &= -\frac{1}{2\lambda} [e^{2\lambda x} q_1(x) - q_1(0) - \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) dt] + O(\lambda^{-2} e^{2\lambda x}). \end{aligned}$$

Аналогичные формулы получаются для $w_1(x) = w_{12}(x)$ и $w_2(x) = w_{22}(x)$ при втором выборе c_1 и c_2 . Образует матрицу $W(x, \lambda) = (w_{ij}(x))_1^2$. Тогда матрица $U(x, \lambda) = e^{\lambda D x} W(x, \lambda) e^{-\lambda D x}$ — искомая. \square

3. Получим асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора L .

Теорема 3. *Собственные значения оператора L , достаточно большие по модулю, простые и для них справедливы асимптотические формулы:*

$$\lambda_n = 2n\pi i + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots,$$

где n_0 — некоторое достаточно большое натуральное число.

Доказательство. По теореме 1 имеем для $z(x) = z(x, \lambda) = (z_1(x), z_2(x))^T$:

$$z_1(x) = c_1 u_{11}(x) e^{\lambda x} + c_2 u_{12}(x) e^{-\lambda x}, \quad z_2(x) = c_1 u_{21}(x) e^{\lambda x} + c_2 u_{22}(x) e^{-\lambda x}.$$

Так как $z_1(1) = z_2(0)$, то отсюда в силу краевых условий (10) получаем:

$$[u_{11}(0) - u_{21}(0)] c_1 + [u_{12}(0) - u_{22}(0)] c_2 = 0,$$



$$[u_{11}(1/2) - u_{21}(1/2)]e^{\lambda/2}c_1 + [u_{12}(1/2) - u_{22}(1/2)]e^{-\lambda/2}c_2 = 0.$$

Следовательно, уравнение для собственных значений имеет вид

$$\begin{vmatrix} u_{11}(0) - u_{21}(0) & u_{12}(0) - u_{22}(0) \\ [u_{11}(1/2) - u_{21}(1/2)]e^{\lambda/2} & [u_{12}(1/2) - u_{22}(1/2)]e^{-\lambda/2} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $e^\lambda = 1 + O(1/\lambda)$. □

Теперь с помощью теоремы 2 дадим более точные асимптотики собственных чисел. Всюду в дальнейшем через α будем обозначать различные константы, не зависящие от n (из конечного набора констант), через α_n такие константы, что $\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.

Лемма 3. Для любого целого числа k , любой функции $s(x) \in C[0, 1]$ и $p = \pm 1$ имеем:

$$e^{k\lambda_n} = \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\int_0^{1/2} e^{2p\lambda_n t} s(t) dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\int_0^1 e^{2p\lambda_n t} s(t) dt = \alpha_n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Эта лемма аналогична лемме 3 из [2].

Лемма 4. При $\lambda = \lambda_n$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$u_{11}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u_{12}(0) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n},$$

$$u_{22}(0) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u_{21}(0) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$u_{11}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha_n}{n}, \quad u_{12}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n},$$

$$u_{22}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u_{21}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}.$$

Теорема 4. Для собственных значений λ_n имеют место уточненные асимптотические формулы:

$$\lambda_n = 2n\pi i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots$$

Лемма 4 и теорема 4 есть дословное повторение соответствующих результатов из [2].

Далее, для собственных функций получим сначала грубую асимптотику.

Теорема 5. Для собственных функций оператора L имеют место асимптотические формулы:

$$y_n(x) = e^{2n\pi i x} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots,$$

где оценка $O(\cdot)$ равномерна по $x \in [0, 1]$.

Доказательство. В силу леммы 2 собственные функции есть $y_n(x) = z_1(x, \lambda_n) = c_1 u_{11}(x)e^{\lambda_n x} + c_2 u_{12}(x)e^{-\lambda_n x}$, где c_1 и c_2 связаны соотношением $z_1(0, \lambda_n) = z_2(0, \lambda_n)$. Отсюда имеем:

$$c_1[u_{11}(0) - u_{21}(0)] = c_2[u_{22}(0) - u_{12}(0)]. \tag{22}$$

Так как $u_{11}(0) - u_{21}(0) = 1 + O(1/n^2)$, $u_{22}(0) - u_{12}(0) = 1 + O(1/n)$, то (22) перейдет в $c_1[1 + O(1/n^2)] = c_2[1 + O(1/n)]$, откуда, полагая $c_2 = 1$, получим $c_1 = 1 + O(1/n)$ и поэтому

$$y_n(x) = \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] u_{11}(x)e^{\lambda_n x} + u_{12}(x)e^{-\lambda_n x} = e^{2n\pi i x} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{23} \quad \square$$



Теперь получим уточненные формулы для собственных функций.

Теорема 6. Для собственных функций $y_n(x)$ оператора L имеют место уточненные асимптотические формулы:

$$y_n(x) = e^{2n\pi ix} + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{1n}(x) &= \frac{1}{n} [b(x)e^{-2n\pi ix} + b(x)e^{2n\pi ix} + b(x)\alpha_n e^{-2n\pi ix} + b(x)\alpha_n e^{2n\pi ix}], \\ \Omega_{2n}(x) &= \frac{1}{n} [b(x) \int_0^x e^{2n\pi it} q_2' \left(\frac{x-t}{2} \right) dt + b(x) \int_0^x e^{-2n\pi it} q_2' \left(\frac{x+t}{2} \right) dt], \end{aligned}$$

оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0, 1]$, а через $b(x)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора.

Доказательство. Имеем:

$$y_n(x) = c_1 u_{11}(x) e^{\lambda_n x} + c_2 u_{12}(x) e^{-\lambda_n x},$$

где $c_2 = 1$, c_1 определяется из (22). Тогда по лемме 4 из (22) имеем $c_1 = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}$. Далее,

$$\begin{aligned} u_{11}(x) &= 1 + \frac{1}{n} b(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ e^{\pm \lambda_n x} &= e^{\pm 2n\pi ix} \left[1 + \frac{1}{n} b(x) + \frac{\alpha_n}{n} b(x) \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Поэтому получим:

$$c_1 u_{11}(x) e^{\lambda_n x} = e^{2n\pi ix} \left[1 + \frac{1}{n} b(x) + \frac{\alpha_n}{n} b(x) \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее, по теореме 2 имеем:

$$u_{12}(x) e^{-\lambda_n x} = \frac{1}{2\lambda} \left(q_2(x) e^{-\lambda_n x} - q_2(1) e^{-2\lambda_n} e^{\lambda_n x} + \int_x^1 e^{\lambda_n(x-2t)} q_2'(t) dt \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Так как $\frac{1}{2\lambda} = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, то

$$\frac{1}{2\lambda} q_2(x) e^{-\lambda_n x} = \frac{b(x)}{n} e^{-2n\pi ix} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{q_2(1)}{2\lambda} e^{-2\lambda_n} e^{\lambda_n x} = \frac{b(x)}{n} e^{2n\pi ix} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_x^1 e^{\lambda_n(x-2t)} q_2'(t) dt &= \int_x^1 e^{2n\pi i(x-2t)} q_2'(t) dt + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \int_x^1 e^{2n\pi i(x-2t)} q_2'(t) dt &= \int_0^1 e^{2n\pi i(x-2t)} q_2'(t) dt - \int_0^x e^{2n\pi i(x-2t)} q_2'(t) dt = \\ &= \alpha_n e^{2n\pi ix} - \int_0^x e^{2n\pi i(x-2t)} q_2'(t) dt. \end{aligned}$$

Но

$$\int_0^x e^{2n\pi i(x-2t)} q_2'(t) dt = \int_0^x e^{2n\pi i\tau} q_2' \left(\frac{x-\tau}{2} \right) d\tau + \int_0^x e^{-2n\pi i\tau} q_2' \left(\frac{x+\tau}{2} \right) d\tau.$$



Значит,

$$u_{12}(x)e^{-\lambda_n x} = \frac{b(x)}{n} e^{-2n\pi i x} + \frac{b(x)}{n} e^{2n\pi i x} + \frac{\alpha_n}{n} b(x) e^{2n\pi i x} + \\ + \frac{b(x)}{n} \int_0^x e^{2n\pi i \tau} q_2' \left(\frac{x-\tau}{2} \right) d\tau + \frac{b(x)}{n} \int_0^x e^{-2n\pi i \tau} q_2' \left(\frac{x+\tau}{2} \right) d\tau + O \left(\frac{1}{n^2} \right). \quad \square$$

4. Теперь нам надо провести аналогичные исследования для сопряженного оператора L^* .

Теорема 7. *Оператор L^* имеет вид*

$$L^* z = -z'(x) + \overline{q(1-x)} z(1-x), \quad z(0) = z(1).$$

Рассмотрим спектральную задачу для L^* :

$$-z'(x) + \overline{q(1-x)} z(1-x) = \lambda z(x), \quad z(0) = z(1).$$

Отсюда получаем:

$$z'(x) + p(x) z(1-x) = \mu z(x), \quad z(0) = z(1),$$

где $p(x) = -\overline{q(1-x)}$, $\mu = -\lambda$. Таким образом, получим схожую с исходной спектральную задачу, но теперь вместо $q(x)$ берем $p(x)$ и вместо λ берем $\mu = -\lambda$. Поэтому справедливы следующие факты.

Теорема 8. *Для собственных значений μ_n имеют место асимптотические формулы:*

$$\mu_n = 2n\pi i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots$$

Теорема 9. *Для собственных функций $z_{-n}(x)$ оператора L^* имеют место асимптотические формулы:*

$$z_{-n}(x) = e^{2n\pi i x} + O \left(\frac{1}{n} \right), \quad n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots,$$

и уточненные асимптотические формулы:

$$z_{-n}(x) = e^{2n\pi i x} + \tilde{\Omega}_{1n}(x) + \tilde{\Omega}_{2n}(x) + O \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

где

$$\tilde{\Omega}_{1n}(x) = \frac{1}{n} [b(x)e^{-2n\pi i x} + b(x)e^{2n\pi i x} + b(x)\alpha_n e^{-2n\pi i x} + b(x)\alpha_n e^{2n\pi i x}], \\ \tilde{\Omega}_{2n}(x) = \frac{1}{n} [b(x) \int_0^x e^{2n\pi i t} p_2' \left(\frac{x-t}{2} \right) dt + b(x) \int_0^x e^{-2n\pi i t} p_2' \left(\frac{x+t}{2} \right) dt],$$

$p_2(x)$ определяется так же, как и $q_2(x)$, только вместо $q(x)$ берем $p(x) = -\overline{q(1-x)}$. Учтено также, что $\lambda_n^* = -\lambda_n$.

Теорема 10. *Если $f(x) \in C^1[0, 1]$, $f(0) = f(1)$, то*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) - S_r(f, x)\|_\infty = 0,$$

где $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным функциям оператора L , $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L .

Этот результат получается переходом к системе Дирака с учетом того, что для последней краевые условия регулярны по Биркгофу.



2. КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

По методу Фурье формальное решение задачи (1)–(3) имеет вид

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi)(x) e^{\lambda t} d\lambda + \sum_{|\lambda_n|>r} \frac{(\varphi, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})} y_n(x) e^{\lambda_n t}, \quad (23)$$

где $r > 0$ фиксировано и таково, что при $|\lambda_n| > r$ все собственные значения простые.

Появление интеграла в (23) вызвано тем, что нумерация собственных значений λ_n привязана к их асимптотике (т. е. главный член асимптотики есть $2n\pi i$) и поэтому некоторое конечное число собственных значений с малыми модулями не занумеровано.

Выполним преобразование этого решения согласно приемам А. Н. Крылова и В. А. Чернытина.

1. Рассмотрим простейшую смешанную задачу, т. е. задачу (1)–(3) при $q(x) \equiv 0$:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x). \quad (24)$$

Общее решение дифференциального уравнения по методу характеристик есть $u(x, t) = F(x + t)$, где $F(x)$ — произвольная функция из $C^1(-\infty, +\infty)$. Из граничных и начальных условий имеем: $F(x + t)$ будет решением задачи (24) тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$,

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1) \quad (25)$$

и $F(x) = F(x + 1)$, причем $F(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0, 1]$. Условия (25) обеспечивают гладкость $F(x)$ и, тем самым, однозначную разрешимость задачи (24).

Теперь решим задачу (24) по методу Фурье. Формальное ее решение есть

$$u_0(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (\varphi, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i x} e^{2n\pi i t}. \quad (26)$$

Из условий на $\varphi(x)$ следует, что ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} (\varphi, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i \xi}$ сходится абсолютно и равномерно на всей оси, его сумма $F(\xi)$ равна $\varphi(\xi)$ при $\xi \in [0, 1]$ и $F(\xi) = F(\xi + 1)$. Из условий (25) получаем, что $F(\xi) \in C^1(-\infty, +\infty)$, и решение (24) есть

$$u_0(x, t) = F(x + t). \quad (27)$$

Представим теперь (26) в виде

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda^0 \varphi)(x) e^{\lambda t} d\lambda + \sum_{|2n\pi i|>r} (\varphi, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i x} e^{2n\pi i t}, \quad (28)$$

где $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, $L_0 = L$ при $q(x) \equiv 0$. Из (23), (27), (28) получаем следующее важное представление формального решения (23).

Теорема 11. Для формального решения (23) имеет место формула

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad (29)$$

где $u_0(x, t)$ есть (27) при $F(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $F(x) = F(x + 1)$ и $F(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0, 1]$,

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} ((R_\lambda - R_\lambda^0) \varphi)(x) e^{\lambda t} d\lambda, \quad (30)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{|\lambda_n|>r} \left[\frac{(\varphi, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})} y_n(x) e^{\lambda_n t} - (\varphi, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i(x+t)} \right]. \quad (31)$$



2. Покажем, что ряд (31) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t , сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и всем $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.

Лемма 5. Для $u_2(x, t)$ имеет место формула

$$u_2(x, t) = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{|\lambda_n| > r \\ |2n\pi i| > r}} \left[\frac{(g, z_{-n}) y_n(x) e^{\lambda_n t}}{(y_n, z_{-n})(\lambda_n - \mu_0)} - \frac{(g, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i(x+t)}}{2n\pi i - \mu_0} \right],$$

$$\Sigma_2 = \sum \frac{(g_2, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i(x+t)}}{(2n\pi i - \mu_0)^2},$$

и суммирование ряда Σ_2 идет по тем же n , что и ряда Σ_1 , μ_0 не является собственным значением операторов L и L_0 , $g = (L - \mu_0 E)\varphi$, $g_2 = (L_0 - \mu_0 E)g_1$, $g_1 = g - (L_0 - \mu_0 E)\varphi$.

Доказательство. Имеем $\varphi = R_{\mu_0} g$. Тогда $(L - \lambda E)\varphi = g + (\mu_0 - \lambda)\varphi$. Отсюда $\varphi = R_{\lambda} g + (\mu_0 - \lambda)R_{\lambda}\varphi$ и, значит,

$$R_{\lambda}\varphi = \frac{\varphi}{\mu_0 - \lambda} - \frac{R_{\lambda} g}{\mu_0 - \lambda}. \tag{32}$$

Так как $g_1 = q(x)\varphi(1-x)$, $q(x) \in C^1[0, 1]$, $q(0) = q(1)$, то $g_1 \in D_{L_0}$ (из области определения L_0). Следовательно, g_2 непрерывна, поэтому

$$R_{\lambda}^0 \varphi = \frac{\varphi}{\mu_0 - \lambda} - \frac{R_{\lambda}^0 (L_0 - \mu_0 E)\varphi}{\mu_0 - \lambda} = \frac{\varphi}{\mu_0 - \lambda} - \frac{R_{\lambda}^0 (g - g_1)}{\mu_0 - \lambda} = \frac{\varphi}{\mu_0 - \lambda} - \frac{R_{\lambda}^0 g}{\mu_0 - \lambda} + \frac{R_{\lambda}^0 g_1}{\mu_0 - \lambda}.$$

Но

$$R_{\lambda}^0 g_1 = R_{\lambda}^0 R_{\mu_0}^0 g_2 = \frac{R_{\mu_0}^0 g_2 - R_{\lambda}^0 g_2}{\mu_0 - \lambda} = \frac{g_1}{\mu_0 - \lambda} - \frac{1}{\mu_0 - \lambda} R_{\lambda}^0 g_2.$$

Отсюда получаем:

$$R_{\lambda}^0 \varphi = \frac{\varphi}{\mu_0 - \lambda} - \frac{R_{\lambda}^0 g}{\mu_0 - \lambda} + \frac{g_1}{(\mu_0 - \lambda)^2} - \frac{1}{(\mu_0 - \lambda)^2} R_{\lambda}^0 g_2. \tag{33}$$

Обозначим $\gamma_n = \{\lambda \mid |\lambda - 2n\pi i| = \delta\}$, где $\delta > 0$ достаточно мало, n — номер из суммы Σ_1 . Тогда, используя (32) и (33), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{(g, z_{-n}) y_n(x) e^{\lambda_n t}}{(y_n, z_{-n})} - (g, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i(x+t)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R_{\lambda}\varphi - R_{\lambda}^0 \varphi)(x) e^{\lambda t} d\lambda = \\ & = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{((R_{\lambda} - R_{\lambda}^0)g)(x) e^{\lambda t}}{\lambda - \mu_0} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{(R_{\lambda}^0 g_2)(x) e^{\lambda t}}{(\lambda - \mu_0)^2} d\lambda = \\ & = \frac{(g, z_{-n}) y_n(x) e^{\lambda_n t}}{(y_n, z_{-n})(\lambda_n - \mu_0)} - \frac{(g, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i(x+t)}}{(2n\pi i - \mu_0)} + \frac{(g_2, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i(x+t)}}{(2n\pi i - \mu_0)^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 6. Если $f(x) \in C[0, 1]$, то $(f, \tilde{\Omega}_{jn}) = \alpha_n/n$, $j = 1, 2$.

Эта лемма аналогична лемме 8 из [2].

Теорема 12. Ряд в (29) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и t сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.

Доказательство. По лемме 5 надо изучить ряды Σ_1 и Σ_2 . Согласно неравенствам Коши–Буняковского и Бесселя ряды $\frac{|(g, z_{-n})|}{|(y_n, z_{-n})| |\lambda_n - \mu_0|}$ и $\frac{|(g, e^{2n\pi i x})|}{|2n\pi i - \mu_0|}$ сходятся, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость рядов Σ_1 и Σ_2 . Абсолютная и равномерная сходимость продифференцированного по x и t ряда Σ_2 очевидна. Рассмотрим почленно продифференцированный по x ряд Σ_1 . По теореме 9 $(g, z_{-n}) = (g, e^{2n\pi i x}) + \alpha_n/n$. Далее, $y'_n(x) = 2n\pi i e^{2n\pi i x} + O(1)$, $(y_n, z_{-n}) = 1 + O(1/n)$, $\lambda_n - \mu_0 = (2n\pi i - \mu_0)[1 + O(1/n^2)]$, $e^{\lambda_n t} = e^{2n\pi i t} + O(1/n)$. Поэтому

$$\frac{(g, z_{-n}) y'_n(x) e^{\lambda_n t}}{(y_n, z_{-n})(\lambda_n - \mu_0)} = \frac{2n\pi i (g, e^{2n\pi i x}) e^{2n\pi i(x+t)}}{(2n\pi i - \mu_0)} + O\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)$$



и, тем самым, почленно продифференцированный по x ряд Σ_1 сходится абсолютно и равномерно. Аналогичный факт имеет место и в случае почленного дифференцирования ряда Σ_1 по t . \square

3. Теперь докажем основной результат.

Теорема 13. Если $q(x) \in C^1[0, 1]$, $q(0) = q(1)$, $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, то классическое решение задачи (1)–(3) существует и имеет вид (23).

Доказательство. Очевидно, что правая часть (23) удовлетворяет граничным и начальным условиям. Докажем, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1). Введем в рассмотрение оператор D :

$$Du = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Представим $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Отсюда следует, что $u(x, t)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-\infty, \infty]$. Далее имеем:

$$Du = Du_0 + Du_1 + D\Sigma_1 + D\Sigma_2 = q(x) \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_{\lambda}^0 \varphi)(1-x)e^{\lambda t} d\lambda \right) + D\Sigma_1.$$

Но

$$\begin{aligned} D\Sigma_1 &= \sum \frac{(g, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})} \frac{1}{\lambda_n - \mu_0} D(y_n(x)e^{\lambda_n t}) = \\ &= q(x) \sum \frac{(g, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})} \frac{1}{\lambda_n - \mu_0} y_n(1-x)e^{\lambda_n t} = q(x) \sum \frac{(\varphi, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})} y_n(1-x)e^{\lambda_n t}, \end{aligned}$$

т. е. $Du(x, t) = q(x)u(1-x, t)$. Теорема доказана. \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

Библиографический список

1. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. РАН. 2011. Т. 441, № 2. С. 151–154.
2. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Обоснование метода Фурье в смешанных задачах с инволюцией // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 3–12.
3. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
4. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.

Mixed Problem for Simplest Hyperbolic First Order Equations with Involution

M. Sh. Burlutskaya¹, A. P. Khromov²

¹Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 394006, Voronezh, Russia, bmsh2001@mail.ru

²Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

In this paper investigates the mixed problem for the first order differential equation with involution at the potential and with periodic boundary conditions. Using the received refined asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the corresponding spectral problem, the application of the Fourier method is substantiated. We used techniques, which allow to avoid investigation of the uniform convergence of the series, obtained by term by term differentiation of formal solution on method of Fourier. This allows to get a classical solution with minimal requirements on the initial data of the problem.

Key words: mixed problem, involution, Fourier method, classical solution, asymptotic form of eigenvalues and eigenfunctions, Dirac system.



References

1. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial-boundary Value Problems for First Order Hyperbolic Equations with Involution. *Doklady Mathematics* [Doklady Akademii Nauk], 2011, Vol. 84, no. 3, pp. 783–786.
2. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Substantiation of Fourier Method in Mixed Problem with Involution. *Izv. Saratov. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 4, pp. 3–12 (in Russian).
3. Krylov A. N. *O nekotorykh differencial'nykh uravneniyah matematicheskoy fiziki, imejushchih prilozhenija v tehniceskikh voprosah* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics Having Application to Technical Problems]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 368 p. (in Russian).
4. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoј zadache dlya uravnenij v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in the mixed boundary value problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991, 112 p. (in Russian).

УДК 514.133

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ ПЛОСКОСТИ \hat{H}

Л. Н. Ромакина

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, romakinaln@mail.ru

На гиперболической плоскости \hat{H} положительной кривизны в модели Кэли–Клейна исследованы параболические параллелограммы. Проведена их классификация, получены метрические соотношения между величинами углов и выражения длин ребер через меры углов при вершинах.

Ключевые слова: гиперболическая плоскость \hat{H} положительной кривизны, плоскость де Ситтера, параллелограмм, параболический параллелограмм.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования различных фигур гиперболической плоскости \hat{H} положительной кривизны в проективной модели Кэли–Клейна возрастает в связи с развитием теории разбиений данной плоскости [1–3] и необходимостью построения теории многогранников трехмерного гиперболического пространства положительной кривизны, являющегося проективной моделью трехмерного пространства де Ситтера (см., например, [4–8]) и содержащего, в частности, плоскости типа \hat{H} .

В работе [9] введены в рассмотрение параллелограммы гиперболической плоскости \hat{H} положительной кривизны. Как и на евклидовой плоскости, *параллелограммом* плоскости \hat{H} называем четырехвершинник, противоположные стороны которого параллельны. Параллельными в паре на плоскости \hat{H} могут быть либо две гиперболические прямые, либо гиперболическая и параболическая прямые. Поэтому все параллелограммы плоскости \hat{H} можно отнести к трем типам. Параллелограмм называем *гиперболическим*, если все его стороны гиперболические. Если параллелограмм содержит одну (две) параболическую сторону, называем его *параболическим (бипараболическим)*. Гиперболические параллелограммы исследованы в работе [9]. В данной статье продолжим начатое исследование и рассмотрим параболические параллелограммы. Покажем, что положение на абсолюте точек сторон определяет три инвариантных относительно фундаментальной группы G плоскости \hat{H} класса параболических параллелограммов. Для параллелограммов каждого класса определим типы углов и найдем метрические соотношения, связывающие меры ребер и меры углов при вершинах параллелограммов.

Основные понятия и формулы, используемые в работе, введены в статьях [9, 10] и монографии [11]. Напомним некоторые определения.

Каждый угол между смежными сторонами параллелограмма будем называть *углом при вершине* данных сторон, указывая при необходимости его тип. Угол при вершине параллелограмма назовем *внутренним*, если он содержит противоположную вершину параллелограмма. Угол, смежный с внутренним углом при вершине, назовем *внешним* углом параллелограмма при данной вершине.



Гиперболическая a и параболическая b прямые могут принадлежать либо гиперболическому (рис. 1, а), либо параболическому пучку (рис. 1, б). В первом случае абсолютная линия γ разбивает один из углов между прямыми a, b на плоскости P_2 , содержащей плоскость \hat{H} , на три связные части, две из которых полностью принадлежат плоскости \hat{H} . Каждую из этих частей называем *гиперболическим флагом* между прямыми a, b . По отношению друг к другу два гиперболические флага, образованные прямыми a, b , называем *вертикальными*. Дополнение пары вертикальных гиперболических флагов до плоскости \hat{H} , связное на \hat{H} множество, вместе с прямыми a, b называем *гиперболическим псевдофлагом* между прямыми a, b . Во втором случае прямые a, b образуют две симметричные относительно прямой a связные области — *параболические флаги*, смежные по отношению друг к другу. Гиперболические флаги, гиперболические псевдофлаги и параболические флаги неизмеримы на плоскости \hat{H} [10, 11].

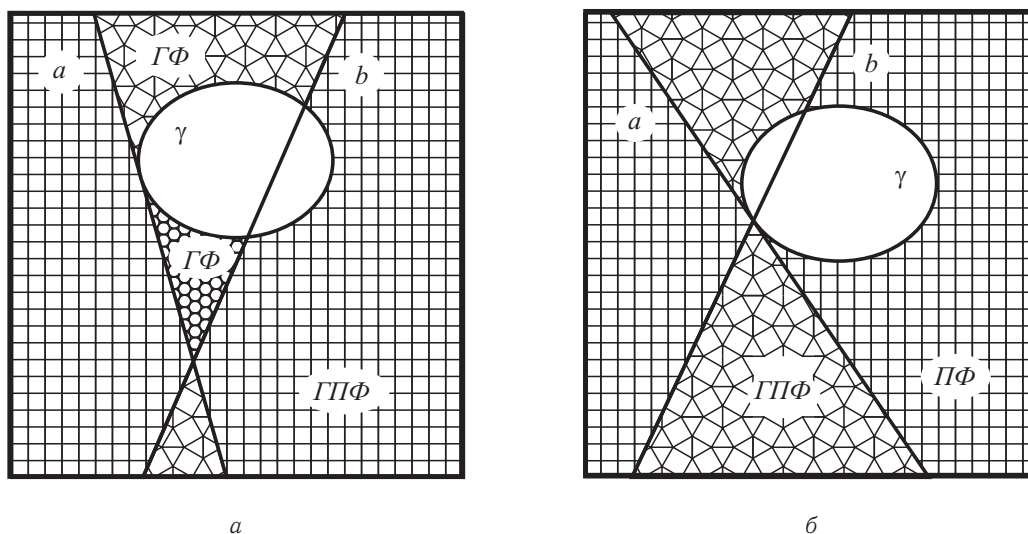


Рис. 1. Вертикальные гиперболические флаги (ГФ) и смежный с ними гиперболический псевдофлаг (ГПФ) (а); смежные параболические флаги (ПФ) (б)

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

Классификацию параллелограммов проводим по типу расположения на абсолюте несобственных точек их сторон.

Все стороны параболических параллелограммов содержат на абсолюте пять точек, две из которых — точки пересечения противоположных сторон. Обозначим их через Q и S . Все рассматриваемые параллелограммы — конечные, поэтому внутренние относительно γ хорды сторон параллелограммов не имеют общих внутренних относительно γ точек. Учитывая данный факт, с точностью до обозначения в парах противоположных сторон, получаем три типа расположения на абсолютной линии γ точек сторон параллелограмма:

- 1) точки Q, S разбивают γ на две дуги, одна из которых содержит точки параллельных гиперболических сторон, другая — точку гиперболической стороны, параллельной параболической стороне параллелограмма (рис. 2, а);
- 2) точки параллельных гиперболических сторон параллелограмма принадлежат разным дугам линии γ , образованным точками Q, S (рис. 2, б);
- 3) точки Q, S разбивают γ на две дуги, одна из которых не содержит точек сторон параллелограмма (рис. 2, в).

Соответственно типу 1)–3) расположения точек сторон на абсолюте параболический параллелограмм отнесем к классу $p(I), p(II), p(III)$.

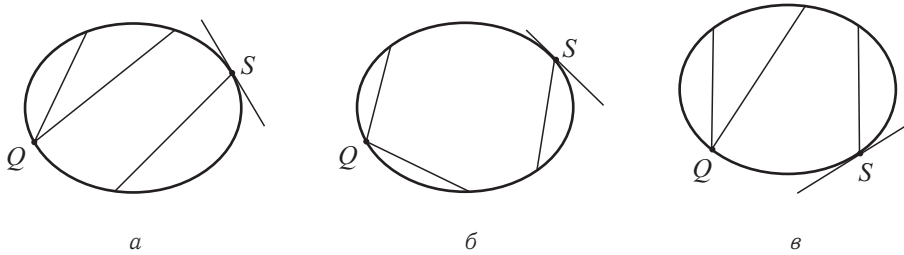


Рис. 2. Типы расположений на абсолюте точек сторон параболического параллелограмма класса: $p(I)$ (а), $p(II)$ (б), $p(III)$ (в)

2. СВОЙСТВА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

Ребро параболической стороны назовем *параболическим основанием*, а противоположное ему ребро — *гиперболическим основанием* параболического параллелограмма. Два других ребра параллелограмма назовем *боковыми*.

Пусть $ABCD$ — параболический параллелограмм с параболической стороной b :

$$\begin{aligned}
 AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \\
 a \cap c = Q, \quad b \cap d = S, \quad b \cap \gamma = S, \\
 a \cap \gamma = \{A_0, Q\}, \quad c \cap \gamma = \{C_0, Q\}, \quad d \cap \gamma = \{D_0, S\}.
 \end{aligned}$$

Обозначать вершины параллелограмма $ABCD$ (рис. 3) условимся так, чтобы правильно расположенными на γ (см. [9, параграф 2.9]) соответственно классу параллелограмма были точки упорядоченной системы:

$$\begin{aligned}
 p(I) : T_1 = \{Q, C_0, A_0, S, D_0\}, \quad p(II) : T_2 = \{Q, A_0, S, D_0, C_0\}, \\
 p(III) : T_3 = \{Q, A_0, C_0, D_0, S\}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

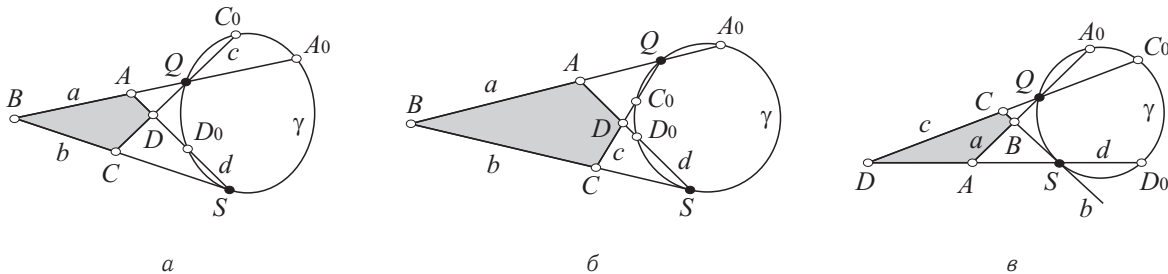


Рис. 3. Параболические параллелограммы класса: $p(I)$ (а); $p(II)$ (б); $p(III)$ (в)

Параллельные противоположные стороны a, c (b, d) параллелограмма $ABCD$ образуют неизмеримые углы: смежные полюсу и псевдополюсу (смежные параболические флаги). Параболическая сторона b образует со смежными сторонами параллелограмма неизмеримые углы: гиперболические флаги и гиперболические псевдофлаги. Углы при вершинах A, D параболического параллелограмма являются гиперболическими углами и гиперболическими псевдоуглами. Меры гиперболических псевдоуглов являются комплексными величинами и однозначно определены мерами смежных с ними гиперболических углов (см. [11, пп. 4.5.2–4.5.4]). Учитывая, что меры гиперболических углов являются действительными положительными числами, в метрические соотношения будем включать только меры гиперболических углов при вершинах параллелограммов, внутренних или внешних. Придерживаясь обозначений, введенных в работе [9], величины углов при вершинах параллелограммов будем обозначать теми же буквами, что и вершины. Величины внешних углов будем дополнительно помечать чертой над символом.



Теорема 1. Пусть $ABCD$ — параболический параллелограмм плоскости \hat{H} радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, точки соответствующей системы (1) которого правильно расположены на γ . Справедливы следующие утверждения.

1. Диагональная прямая BD в параболическом параллелограмме каждого класса является гиперболической. Диагональная прямая AC параллелограмма класса $p(II)$ является эллиптической. В параллелограммах классов $p(I)$, $p(III)$ диагональная прямая AC может быть любого типа.

2. Внутренний угол параллелограмма при вершине A (D) является гиперболическим псевдоуглом (углом). Внутренний угол параллелограмма при вершине B (C) является гиперболическим флагом (псевдофлагом).

3. Соответственно классу параллелограмма величины его гиперболических углов при вершинах удовлетворяют условию

$$p(I) : \bar{A} < D, \quad p(III) : \bar{A} > D. \quad (2)$$

4. Длины боковых ребер параллелограмма могут быть выражены через меры прилежащих гиперболических углов по следующим формулам:

$$|AB| = \rho \ln \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2}, \quad |CD| = \rho \ln \operatorname{cth} \frac{D}{2}. \quad (3)$$

5. Длина гиперболического основания соответственно классу параллелограмма равна

$$\begin{aligned} p(I) : |AD| &= \rho \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{th} \frac{D}{2} \right), & p(II) : |AD| &= \rho \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2} \right), \\ p(III) : |AD| &= \rho \ln \left(\operatorname{th} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Присоединим к параболическому параллелограмму $ABCD$ канонический репер $R = \{Q, S, A_3, A_0\}$ второго типа, где A_3 — полюс прямой QS относительно абсолюта. Координаты точек системы (1), вершин, сторон и диагональных прямых параллелограмма $ABCD$ (см. соответствующие координаты (15)–(19) из [9]) в репере R имеют вид

$$\begin{aligned} Q(1 : 0 : 0), \quad S(0 : 1 : 0), \quad A_0(1 : 1 : 1), \quad A(u : 1 : 1), \quad B(0 : 1 : 1), \quad C(0 : t : 1), \\ D(u : t : 1), \quad C_0(1 : t^2 : t), \quad D_0(u^2 : 1 : u), \quad t, u \in \mathbb{R}, \quad u < 1, \quad tu < 1, \\ a(0 : 1 : -1), \quad b(1 : 0 : 0), \quad c(0 : 1 : -t), \quad d(1 : 0 : -u), \\ AC(1 - t : -u : tu), \quad BD(1 - t : u : -u). \end{aligned} \quad (5)$$

Определим допустимые значения параметров t , u , при которых параллелограмм $ABCD$ относится к классу $p(I)$, $p(II)$, $p(III)$.

Положение на абсолюте точек системы (1) можно характеризовать числами

$$I_1 = (AQBA_0), \quad I_2 = (ASDD_0), \quad I_3 = (CQDC_0). \quad (6)$$

Для параболических параллелограммов соответственно их классу в принятых обозначениях получаем следующие неравенства для чисел (6):

$$\begin{aligned} p(I) : I_1 > 0, \quad I_2 > 0, \quad I_3 < 0, \\ p(II) : I_1 > 0, \quad I_2 > 0, \quad I_3 > 0, \\ p(III) : I_1 < 0, \quad I_2 > 0, \quad I_3 > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В репере R числа (6) в координатах (5) имеют выражения

$$I_1 = \frac{u}{u-1}, \quad I_2 = \frac{u(1-t)}{u-1}, \quad I_3 = tu. \quad (8)$$



С учетом неравенств из (7) и выражений (8) получаем допустимые значения параметров t, u координат вершин параболических параллелограммов соответствующего класса в репере R :

$$\begin{aligned} p(I) : & \quad t \in (0; 1), \quad u < 0, \quad tu < 0, \\ p(II) : & \quad t < 0, \quad u < 0, \quad tu \in (0; 1), \\ p(III) : & \quad t > 1, \quad u \in (0; 1), \quad tu \in (0; 1). \end{aligned} \tag{9}$$

При всех допустимых значениях (9) параметров t, u характеристика координат прямой BD (5) параболического параллелограмма каждого класса меньше нуля: $\Phi_{BD} = 4u(1-t) < 0$. Следовательно, в параболическом параллелограмме любого класса диагональная прямая BD является гиперболической.

Для координат диагональной прямой AC (5) $\Phi_{AC} = tu(4-tu) - 4u$.

При всех допустимых значениях (9) параметров t, u в параллелограмме класса $p(II)$ $\Phi_{AC} > 0$. Следовательно, диагональная прямая AC в параболическом параллелограмме класса $p(II)$ является эллиптической.

Для параллелограмма класса $p(I), p(III)$ зафиксируем по три пары $(t; u)$ параметров из допустимых значений (9):

$$\begin{aligned} p(I) : & \quad (1/2; -1), \quad (5/6; -1), \quad (2\sqrt{2} - 2; -1), \\ p(III) : & \quad (3/2; 1/2), \quad (11/10; 1/2), \quad (4 - 2\sqrt{2}; 1/2). \end{aligned} \tag{10}$$

Найдем соответствующие наборам (10) параметров $(t; u)$ характеристики координат прямой AC (5):

$$\begin{aligned} h(I) : & \quad \Phi_{AC} = 7/4, \quad \Phi_{AC} = -1/4, \quad \Phi_{AC} = 0, \\ h(III) : & \quad \Phi_{AC} = 7/16, \quad \Phi_{AC} = -41/400, \quad \Phi_{AC} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Наборы (11) согласно условиям (3) из [9] доказывают, что в параболическом параллелограмме класса $p(I), p(III)$ диагональная прямая AC может быть любого типа. Первое утверждение теоремы доказано.

Чтобы доказать второе утверждение теоремы, построим параболические прямые k_A, k_D , проходящие соответственно через вершины A, D параллелограмма, и параболические прямые k_B, k_C , проходящие соответственно через вершины B, C , отличные от прямой b . В репере R эти прямые можно задать координатами:

$$\begin{aligned} k_A \left((\sqrt{1-u} - 1)^2 : u^2 : 2u(\sqrt{1-u} - 1) \right), & \quad k_D \left((\sqrt{1-tu} - 1)^2 : u^2 : 2u(\sqrt{1-tu} - 1) \right), \\ k_B(1 : 4 : -4), & \quad k_C(t^2 : 4 : -4t). \end{aligned} \tag{12}$$

На основании условий (9), применяя координаты (5), (12), находим:

$$\begin{aligned} J_1 = (ad(AC)k_A) = \frac{u(t-1)}{(\sqrt{1-u}-1)^2} > 0, & \quad J_2 = (cd(BD)k_D) = \frac{u(1-t)}{(\sqrt{1-tu}-1)^2} < 0, \\ J_3 = (ab(BD)k_B) = \frac{4(1-t)}{u} < 0, & \quad J_4 = (cb(AC)k_C) = \frac{4(t-1)}{ut^2} > 0. \end{aligned}$$

Прямая AC (BD) не разделяет (разделяет) с прямой k_A (k_D) пару прямых a, d (c, d), так как $J_1 > 0$ ($J_2 < 0$). Поэтому прямая AC принадлежит полностью гиперболическому псевдоуглу (объединению гиперболических углов) между прямыми a, d (c, d). Следовательно, внутренний угол параллелограмма $ABCD$ при вершине A (D) является гиперболическим псевдоуглом (углом).

Прямая BD (AC) разделяет (не разделяет) с прямой k_B (k_C) пару прямых a, b (b, c), так как $J_3 < 0$ ($J_4 > 0$). Поэтому прямая BD принадлежит полностью объединению гиперболических флагов (гиперболическому псевдофлагу) между прямыми a, b (b, c). Следовательно, внутренний угол параллелограмма $ABCD$ при вершине B (C) является гиперболическим флагом (псевдофлагом). Второе утверждение теоремы доказано.



По формуле (5) из [9] выразим через параметры t, u величины гиперболических углов параллелограмма $ABCD$, внешнего \bar{A} и внутреннего D :

$$\operatorname{ch} \bar{A} = \epsilon_1 \frac{2-u}{u}, \quad \epsilon_1 = \pm 1, \quad \operatorname{ch} D = \epsilon_2 \frac{2-tu}{tu}, \quad \epsilon_2 = \pm 1. \quad (13)$$

Учитывая, что $\bar{A} \in \mathbb{R}_+, D \in \mathbb{R}_+$, согласно требованиям (9) определим числа ϵ_1, ϵ_2 из выражений (13). Соответственно классу параллелограмма получаем:

$$\begin{aligned} p(I) : \quad & \epsilon_1 = -1, \quad \epsilon_2 = -1, \\ p(II) : \quad & \epsilon_1 = -1, \quad \epsilon_2 = 1, \\ p(III) : \quad & \epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_2 = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Из равенств (13) при соответствующих значениях чисел ϵ_1, ϵ_2 (14) для параллелограмма заданного класса находим:

$$p(I) : \quad u = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} \bar{A}}, \quad tu = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} D}, \quad (15)$$

$$p(II) : \quad u = \frac{2}{1 - \operatorname{ch} \bar{A}}, \quad tu = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} D}, \quad (16)$$

$$p(III) : \quad u = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} \bar{A}}, \quad tu = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} D}. \quad (17)$$

Для параболических параллелограммов каждого класса согласно требованиям (9) $tu > u$. Записывая данное неравенство для t, u из (15), (17), получаем неравенства:

$$p(I) : \operatorname{ch} \bar{A} < \operatorname{ch} D; \quad p(III) : \operatorname{ch} \bar{A} > \operatorname{ch} D.$$

Таким образом, справедливы неравенства (2).

Для параллелограмма класса $p(II)$ условие $tu > u$ не приводит к соответствующему неравенству между величинами гиперболических углов при вершинах A, D . Утверждение 3 теоремы доказано.

По формуле (4) из [9], учитывая условия (9), найдем выражения длин боковых ребер AB, CD и гиперболического основания AD через параметры t, u :

$$\operatorname{ch} \frac{|AB|}{\rho} = \frac{2-u}{2\sqrt{1-u}}, \quad \operatorname{ch} \frac{|CD|}{\rho} = \frac{2-tu}{2\sqrt{1-tu}}, \quad \operatorname{ch} \frac{|AD|}{\rho} = \frac{2-u-tu}{2\sqrt{1-u}\sqrt{1-tu}}. \quad (18)$$

Исключая из равенств (15)–(18) параметры t, u , для параллелограмма каждого класса получаем:

$$e^{\frac{|AB|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2}, \quad e^{\frac{|CD|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{D}{2}. \quad (19)$$

Соответственно классу параллелограмма получаем:

$$\begin{aligned} p(I) : \quad & e^{\frac{|AD|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{th} \frac{D}{2}, \\ p(II) : \quad & e^{\frac{|AD|}{\rho}} = \operatorname{cth} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2}, \\ p(III) : \quad & e^{\frac{|AD|}{\rho}} = \operatorname{th} \frac{\bar{A}}{2} \operatorname{cth} \frac{D}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

На основании равенств (19), (20) справедливы формулы (3), (4). □

Длины боковых сторон параболического параллелограмма каждого класса выражены через меры его гиперболических углов при вершинах (см. равенства (3)) функцией $\beta(x) = \ln \operatorname{cth} \frac{x}{2}$. В работах [10; 11, п. 4.7.3] показано, что данная функция на плоскости \hat{H} радиуса кривизны ρ выражает зависимость величины β угла параллельности в точке относительно данной гиперболической прямой от расстояния x этой точки до полюса указанной прямой относительно абсолюта:

$$\beta(x) = \ln \operatorname{cth} \frac{x}{2\rho}.$$



Функция $\beta = \beta(x)$ названа *функцией угла параллельности* на плоскости \hat{H} [10] и является аналогом функции Лобачевского угла параллельности (см., например, [12]) на плоскости Лобачевского, т. е. на гиперболической плоскости отрицательной кривизны.

Поскольку на \mathbb{R}_+ функция $\beta = \beta(x)$ непрерывна и монотонно убывает, то согласно равенствам (3) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *На плоскости \hat{H} в параболическом параллелограмме каждого класса при большем боковом ребре лежит меньший гиперболический угол, и к большему гиперболическому углу прилежит меньшее боковое ребро.*

Из утверждений 2, 3 теоремы 1 и теоремы 2 следует теорема 3.

Теорема 3. *На плоскости \hat{H} к внутреннему гиперболическому флагу (гиперболическому псевдофлагу) при параболическом основании в параллелограмме класса $p(I)$ прилежит большее (меньшее) боковое ребро, в параллелограмме класса $p(III)$ — меньшее (большее) боковое ребро.*

Согласно равенствам (3), (4) соответственно классу параллелограмма выполняется равенство

$$\begin{aligned} p(I) : |AB| &= |AD| + |CD|, \\ p(II) : |AD| &= |AB| + |CD|, \\ p(III) : |CD| &= |AD| + |AB|. \end{aligned}$$

Поэтому на основании теоремы 3 справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *На плоскости \hat{H} в параллелограмме класса $p(I)$ ($p(III)$) длина бокового ребра, прилежащего к внутреннему гиперболическому флагу (гиперболическому псевдофлагу), равна сумме длин гиперболического основания и второго бокового ребра. В параллелограмме класса $p(II)$ длина гиперболического основания равна сумме длин боковых ребер.*

По утверждению 1 теоремы 1 диагональная прямая AC в параллелограмме $ABCD$ класса $p(I)$, $p(III)$ может принадлежать каждому из трех типов прямых плоскости \hat{H} . Тип прямой инвариантен во всех преобразованиях группы G . Следовательно, выполняется теорема 5.

Теорема 5. *На плоскости \hat{H} все параллелограммы каждого из классов $p(I)$, $p(III)$ образуют по три инвариантных относительно группы G рода.*

В зависимости от типа диагональной прямой AC (эллиптического (e), гиперболического (h), параболического (p)) параллелограммы классов $p(I)$, $p(III)$ отнесем соответственно к роду: $p(I)e$, $p(I)h$, $p(I)p$; $p(III)e$, $p(III)h$, $p(III)p$.

Параболическое основание параболического параллелограмма неизмеримо на \hat{H} , но с ним можно сопоставить действительное число, инвариантное относительно группы G , характеризующее положение основания по отношению к другим элементам параллелограмма. Определим это число.

Полярной мерой параболического основания параболического параллелограмма плоскости \hat{H} назовем простое отношение, в котором полярна относительно абсолюта точки пересечения диагоналей параллелограмма делит это основание, считая от вершины внутреннего гиперболического флага.

В принятых обозначениях вершиной внутреннего гиперболического флага согласно утверждению 2 теоремы 1 является вершина B . Полярную меру параболического основания BC параллелограмма $ABCD$ обозначим m_{BC}^* .

Теорема 6. *На плоскости \hat{H} полярная мера параболического основания параболического параллелограмма однозначно определена мерами гиперболических углов данного параллелограмма:*

$$p(I) : m_{BC}^* = -\frac{(2 \operatorname{ch} \bar{A} - 1)(\operatorname{ch} D - 1)}{(\operatorname{ch} \bar{A} - 1)(2 \operatorname{ch} D - 1)}, \quad (21)$$

$$p(II) : m_{BC}^* = -\frac{(2 \operatorname{ch} \bar{A} - 1)(\operatorname{ch} D + 1)}{(\operatorname{ch} \bar{A} - 1)(2 \operatorname{ch} D + 1)}, \quad (22)$$

$$p(III) : m_{BC}^* = -\frac{(2 \operatorname{ch} \bar{A} + 1)(\operatorname{ch} D + 1)}{(\operatorname{ch} \bar{A} + 1)(2 \operatorname{ch} D + 1)}. \quad (23)$$



Доказательство. В присоединенном репере R второго типа элементы параллелограмма $ABCD$ заданы координатами (5), точка O пересечения диагоналей параллелограмма имеет в R координаты $(u : 1 + t : 2)$. Поляра p точки O относительно абсолюта (см. уравнение (1) из [9]) задана координатами $(1 + t : u : -4)$.

Точка $O^* = BC \cap p$ в репере R имеет координаты $(0 : 4 : u)$. По определению полярной меры параболического основания с учетом связи простого отношения трех точек и сложного отношения четверки точек на параболической прямой получаем:

$$m_{BC}^* = (BC, O^*) = -(BCO^*S).$$

Следовательно, для параболического параллелограмма каждого класса

$$m_{BC}^* = -\frac{4 - u}{4 - tu}. \quad (24)$$

Подставляя в равенство (24) значения параметров t, u из соответствующих разложений (15)–(17), получим формулы (21)–(23). \square

Заметим, что согласно выражению (24) и условиям (9) полярная мера параболического основания каждого параболического параллелограмма удовлетворяет условию: $m_{BC}^* < -1$. Следовательно, поляра относительно абсолюта общей точки диагоналей параллелограмма не пересекает его параболическое основание, но пересекает луч параболической стороны, исходящий из вершины внутреннего гиперболического псевдофлага параллелограмма.

Библиографический список

1. Ромакина Л. Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны // *Мат. сб.* 2012. Т. 203, № 9. С. 83–116.
2. Ромакина Л. Н. Веерные триангуляции гиперболической плоскости положительной кривизны // *Мат. тр.* 2013. Т. 16, № 2. С. 142–168.
3. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 2 : Преобразования и простые разбиения. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 274 с.
4. De Sitter W. On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis // *Proc. Royal Acad. Amsterdam*, 1917. Vol. 19, iss. 2. P. 1217–1225.
5. Akutagawa K. On space-like hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space // *Math. Z.* 1987. Vol. 196. P. 13–19.
6. Montiel S. An integral inequality for compact space-like hypersurfaces in a de Sitter space and application to the case of constant mean curvature // *Indiana Univ. Math. J.* 1988. Vol. 37. P. 909–917.
7. Cho Yun. Trigonometry in extended hyperbolic space and extended de Sitter space // *Bull. Korean Math. Soc.* 2009. Vol. 46, № 6. P. 1099–1133. DOI : 10.4134/BKMS.2009.46.6.1099.
8. Asmus Im. Duality between hyperbolic and de Sitter geometry // *J. of Geometry.* 2009. Vol. 96, iss. 1–2. P. 11–40.
9. Ромакина Л. Н. Гиперболические параллелограммы плоскости \widehat{H} // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2013. Т. 13, вып. 3. С. 45–52.
10. Ромакина Л. Н. Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны // *Сиб. электрон. мат. изв.* 2013. Т. 10. С. 393–497.
11. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 244 с.
12. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М. : Наука, 1971.

Parabolic Parallelograms of the Plane \widehat{H}

L. N. Romakina

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, romakinaln@mail.ru

Parabolic parallelograms on a Hyperbolic Plane \widehat{H} with the positive curvature in the Cayley–Klein model are investigated. We conducted their classification, obtained the metric correlations between the measure of angles and the expressions of lengths of the edges through a measure of included angles.

Key words: hyperbolic plane \widehat{H} with positive curvature, de Sitter plane, parallelogram, parabolic parallelogram.



References

1. Romakina L. N. Simple partitions of a hyperbolic plane of positive curvature. *Sbornik : Mathematics*, 2012, vol. 203, no. 9, pp. 1310–1341. Available at : <http://dx.doi.org/10.1070/SM2012v203n09ABEH004266>.
2. Romakina L. N. Veerneye triangulatsii giperbolicheskoi ploskosti polozhitel'noi krivizny [Fan triangulations of hyperbolic plane positive curvature]. *Matematicheskie trudy*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 142–168 (in Russian).
3. Romakina L. N. *Geometriia giperbolicheskoi ploskosti polozhitel'noi krivizny : v 4 ch. Ch. 2 : Preobrazovaniia i prostye razbieniia* [Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 2 : Transformations and simple splittings]. Saratov, Saratov Univ. Press, 274 p. (in Russian).
4. De Sitter W. On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis. *Proc. Royal Acad. Amsterdam*, 1917, vol. 19, iss. 2, pp. 1217–1225.
5. Akutagawa K. On space-like hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space. *Math. Z.*, 1987, vol. 196, pp. 13–19.
6. Montiel S. An integral inequality for compact space-like hypersurfaces in a de Sitter space and application to the case of constant mean curvature. *Indiana Univ. Math. J.*, 1988, vol. 37, pp. 909–917.
7. Cho Yun. Trigonometry in extended hyperbolic space and extended de Sitter space. *Bull. Korean Math. Soc.*, 2009, vol. 46, no. 6, pp. 1099–1133. DOI : 10.4134/BKMS.2009.46.6.1099.
8. Asmus Im. Duality between hyperbolic and de Sitter geometry. *J. of Geometry*, 2009, vol. 96, iss. 1–2, pp. 11–40.
9. Romakina L. N. Hyperbolic parallelograms of the plane \hat{H} . *Izv. Sarat. Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 3, pp. 45–52 (in Russian).
10. Romakina L. N. Analogs of a formula of Lobachevsky for angle of parallelism on the hyperbolic plane of positive curvature. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2013, vol. 10, pp. 393–407 (in Russian). Available at : <http://semr.math.nsc.ru>
11. Romakina L. N. *Geometriia giperbolicheskoi ploskosti polozhitel'noi krivizny : v 4 ch. Ch. 1 : Trigonometriia* [Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature : in 4 pt. Pt. 1 : Trigonometry]. Saratov, Saratov Univ. Press., 244 p. (in Russian).
12. Efimov N. V. *Vysshaia geometriia* [The highest geometry]. Moscow, Nauka, 1971, 576 p. (in Russian).

УДК 517.9

О ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

И. И. Струкова

Аспирант кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, irina.k.post@yandex.ru

В работе изучаются медленно меняющиеся и периодические на бесконечности функции нескольких переменных со значениями в банаховом пространстве. Вводится понятие ряда Фурье периодической на бесконечности функции, изучаются свойства рядов Фурье и вопросы сходимости. Основные результаты статьи получены с существенным использованием теории изометрических представлений.

Ключевые слова: банахово пространство, банахова алгебра, медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции, ряд Фурье, модуль непрерывности.

ВВЕДЕНИЕ

Медленно меняющиеся и периодические на бесконечности функции естественным образом возникают как ограниченные решения некоторых классов разностных и дифференциальных уравнений. Основные результаты статьи связаны с гармоническим анализом периодических на бесконечности функций нескольких переменных со значениями в банаховом пространстве. Вводится понятие обобщенного ряда Фурье, коэффициенты которого являются медленно меняющимися на бесконечности функциями (не обязательно постоянными). Исследуются вопросы сходимости рядов Фурье. Получен ряд классических результатов о рядах Фурье в смысле Чезаро (теоремы 1 и 2). Одним из центральных результатов статьи является достаточное условие сходимости ряда Фурье в терминах модуля непрерывности (теорема 3).



1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\text{End } X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X .

Рассмотрим N -мерное евклидово пространство \mathbb{R}^N , элементы которого будем обозначать через $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Положим $|x| = \max_{i=1, N} |x_i|$.

Множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами будем называть *целочисленной решеткой* в \mathbb{R}^N , элементы \mathbb{Z}^N будем обозначать через $n = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ и положим $|n| = \max_{i=1, N} |n_i|$.

Символом $C_b = C_b(\mathbb{R}^N, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на \mathbb{R}^N функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \|f(x)\|_X$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b , $C_0 = C_0(\mathbb{R}^N, X)$ — замкнутое подпространство убывающих на бесконечности функций, т. е. таких, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = 0$.

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ рассмотрим группу $S : \mathbb{R}^N \rightarrow \text{End } C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ операторов, действующих по правилу

$$(S(h)f)(x) = f(x+h) = f(x_1+h_1, \dots, x_N+h_N), \quad x, h \in \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

Наряду с группой сдвигов S рассмотрим группы сдвигов $S_i : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$, $i = \overline{1, N}$, определенные формулой $(S_i(h)f)(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i+h, x_{i+1}, \dots, x_N)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $h \in \mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $(S(h)f - f) \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$ для любого $h \in \mathbb{R}^N$.

Примером таких функций являются:

$$1) f_1(x) = \prod_{i=1}^N \sin \ln(1+x_i^2), \quad x \in \mathbb{R}^N;$$

2) $f_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow X$, $f_2(x) = c + f_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, где c — вектор из банахова пространства X и f_0 — любая функция из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

В теории дифференциальных уравнений [1, разд. 3.6.3] использовалось эквивалентное (если рассматривать функции из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$) определение, при этом функции назывались *стационарными на бесконечности*. В статьях Пака [2, с. 123] и J. Karamata [3] положительная непрерывная функция $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ называлась *медленно меняющейся*, если при любом $\lambda > 0$ выполнено $\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$. Например, функции $\ln^\nu(x)$, $\ln \ln^\nu(x)$, \dots , где $\nu \in \mathbb{R}$, являются таковыми. Медленно меняющиеся функции находят свое применение в теории тригонометрических рядов (см. [4]), в теории вероятности [5], а также в теории целых функций [6].

Пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}_+^N$. Тогда символом Ω^N обозначим N -мерный параллелепипед $\Omega^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\omega_i/2 < x_i \leq \omega_i/2, i = 1, 2, \dots, N\}$. Символом $\omega\mathbb{Z}^N$ обозначим подгруппу \mathbb{R}^N , состоящую из элементов вида $(n_1\omega_1, \dots, n_N\omega_N)$, где $\omega \in \mathbb{R}_+^N$, $n \in \mathbb{Z}^N$.

Определение 2. Функцию $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ будем называть *периодической периода $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}_+^N$* (или ω -периодической), если для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$ выполнено условие $S(\alpha)f = f$.

Отметим, что это эквивалентно периодичности функции по каждому аргументу, независимо от остальных, т. е. $S_i(\omega_i)f = f$ для всех $i = \overline{1, N}$.

Определение 3. Функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ называется *периодической на бесконечности периода $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}_+^N$* (ω -периодической на бесконечности), если для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$ выполнено условие $(S(\alpha)f - f) \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$ (или, что эквивалентно, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \|f(x+\alpha) - f(x)\|_X = 0$).

Таким образом, каждая периодическая на бесконечности периода ω функция f является решением разностного уравнения вида $f(x+\omega) - f(x) = y(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, где $y \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, а каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция является периодической на бесконечности любого периода.



Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, а множество периодических на бесконечности периода ω функций — символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$. Оба множества образуют линейные замкнутые подпространства из банахова пространства $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$. Банахово пространство $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ непрерывных периодических периода ω функций, определенных на \mathbb{R}^N со значениями в X , образует замкнутое подпространство в $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$. Таким образом, имеют место включения

$$C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X) \subset C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X),$$

при этом все они инвариантны относительно операторов $S(h)$, $h \in \mathbb{R}^N$.

Если $X = \mathbb{C}$, то в обозначениях рассматриваемых функциональных пространств опускается символ X , например, $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N)$ обозначает пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Если X — банахова алгебра, то все введенные в рассмотрение функциональные пространства являются банаховыми алгебрами (с операцией поточечного умножения $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, для функций f, g из рассматриваемого пространства). Каждая из таких алгебр коммутативна, если коммутативна алгебра X , и является C^* -алгеброй, если X — C^* -алгебра. В частности, коммутативными C^* -алгебрами являются алгебры $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N)$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Далее введем определение ряда Фурье периодической на бесконечности функции. Для этого введем в рассмотрение функции $e_n : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ следующего вида:

$$e_n(x) = e^{i2\pi(\frac{n_1}{\omega_1}x_1 + \dots + \frac{n_N}{\omega_N}x_N)}, \quad n \in \mathbb{Z}^N, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Определение 4. Каноническим рядом Фурье функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} f_n(x)e_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

где функции $f_n : \mathbb{R}^N \rightarrow X$, $n \in \mathbb{Z}^N$, определяются формулами

$$f_n(x) = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int_{\Omega^N} f(x + \tau)e_{-n}(x + \tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad n \in \mathbb{Z}^N, \quad (2)$$

и называются каноническими коэффициентами Фурье функции f .

Ясно, что если $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, то $f_n(x) \equiv f_n = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int_{\Omega^N} f(x)e_{-n}(x)dx$, $x \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{Z}^N$, — обычные коэффициенты Фурье функции f .

Определение 5. Обобщенным рядом Фурье функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} y_n(x)e_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (3)$$

где y_n , $n \in \mathbb{Z}^N$ — такие функции из $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$, для которых $y_n - f_n \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, $n \in \mathbb{Z}^N$, а функции f_n , $n \in \mathbb{Z}^N$, определяются формулой (2).

Функции из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ и их ряды Фурье рассматривались в [7].

Лемма 1. Канонические коэффициенты Фурье f_n , $n \in \mathbb{Z}^N$, определенные формулой (2), являются медленно меняющимися на бесконечности функциями, т. е. $f_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, $n \in \mathbb{Z}^N$.

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$. Утверждение леммы напрямую следует из равенств

$$f_n(x + \alpha) - f_n(x) = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int_{\Omega^N} (S(\alpha)f - f)(x + \tau)e_{-n}(x + \tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad n \in \mathbb{Z}^N.$$

Лемма доказана.

Непосредственно из определения 5 и леммы 1 следует, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье обладают свойством: $y_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, $n \in \mathbb{Z}^N$.



Теорема 1 (теорема аппроксимации). Для любой функции $f \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}^N, X)$ существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \|f(x) - \sum_{|k| \leq n, k \in \mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) f_k(x) e_k(x) - f_n^0(x)\| = 0,$$

где $f_k, k \in \mathbb{Z}^N$, — канонические коэффициенты Фурье функции f .

Уточнением теоремы 1 является следующая

Теорема 2 (теорема аппроксимации). Для любой функции $f \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}^N, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ и последовательность функций (y_n) из $C_{sl, \infty}(\mathbb{R}^N, X)$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \|f(x) - \sum_{|k| \leq n, k \in \mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) y_k(x) e_k(x) - f_n^0(x)\| = 0.$$

При этом каждая из функций y_k ($k \in \mathbb{Z}^N$) эквивалентна функции f_k , определяемой формулой (2), и допускает продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа не выше ε .

Определение 6. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n(x) e_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

функции $f \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}^N, X)$ сходится к f относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$, если существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left\| f(x) - \sum_{|k| \leq n, k \in \mathbb{Z}^N} y_k(x) e_k(x) + f_n^0(x) \right\| = 0.$$

Важно отметить, что данное определение корректно, т.е. сходимость не зависит от выбора обобщенного ряда Фурье функции f . Это объясняется тем, что $y_n - f_n \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, где $f_n, n \in \mathbb{Z}^N$ — канонические коэффициенты Фурье функции f , определяемые по формуле (2).

Определение 7. Модулем непрерывности на бесконечности функции $f \in C_{b, u}(\mathbb{R}^N, X)$ называется функция $\omega_\infty(\cdot, f) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, определенная формулой

$$\omega_\infty(\delta, f) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sup_{|t| \leq \delta, |\tau| \geq \mu} \|f(t + \tau) - f(\tau)\|_\infty, \quad \delta \in \mathbb{R}_+.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Любой обобщенный ряд Фурье функции $f \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}^N, X)$ сходится к f относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_\infty\left(\frac{1}{n}, f\right) \ln^N n = 0.$$

Определение 8. Будем говорить, что функция $f \in C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}^N, X)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, если существует обобщенный ряд Фурье (3) этой функции такой, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \|y_n\| < \infty.$$

2. О ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ

Пусть \mathcal{X} — комплексное банахово пространство и $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ — сильно непрерывное изометрическое представление.



Пусть $L^1(\mathbb{R}^N)$ — банахова алгебра определенных на \mathbb{R}^N измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных функций со сверткой функций в качестве умножения $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$, $t \in \mathbb{R}^N$, $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Банахово пространство \mathcal{X} наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R}^N)$ -модуля с помощью формулы

$$fx = \int_{\mathbb{R}^N} f(s)T(-s)x ds, \quad x \in \mathcal{X}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^N). \quad (4)$$

Используемые далее понятия из спектральной теории модулей можно найти в статьях [8–19]. Через $\hat{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-i(\lambda, x)}dx$, $\lambda \in \mathbb{R}^N$, функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Определение 9. Спектром Бёрлинга вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из \mathbb{R}^N вида $\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R}^N : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}^N), \text{ для которой } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0\}$.

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R}^N \setminus \{\mu_0 \in \mathbb{R}^N : \text{существует функция } f \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ такая, что } \hat{f}(\mu_0) \neq 0 \text{ и } fx = 0\}$.

В [20] была установлена связь между структурными свойствами векторов из банаховых пространств и последовательностью их приближений.

Лемма 2 (см. [8, 9]). Для любых $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ и $x \in \mathcal{X}$ справедливы свойства:

1) из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ следует, что $x = 0$ ($L^1(\mathbb{R}^N)$ -модуль \mathcal{X} невырожден);

2) $\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из \mathbb{R}^N , причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3) $\Lambda(fx) \subset (\text{supp } \hat{f}) \cap \Lambda(x)$;

4) $fx = 0$, если $(\text{supp } \hat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\hat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;

5) $\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор x удовлетворяет равенствам $T(t)x = \exp(i(\lambda_0, t))x$, $t \in \mathbb{R}^N$, и $x \neq 0$.

Банахово пространство $C_b(\mathbb{R}^N, X)$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R}^N)$ -модуля (см. [8, 11]) с помощью операции свертки:

$$(f * x)(t) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)d\tau = \int_{\mathbb{R}^N} f(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}^N} f(t - \tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^N,$$

где $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$.

Отметим, что $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ является замкнутым подмодулем $C_b(\mathbb{R}^N, X)$, а структура банахова $L^1(\mathbb{R}^N)$ -модуля на нем задается формулой (4), где $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ и $T(t) = S(t)$, $t \in \mathbb{R}^N$.

Определение 10. Число $\lambda_0 \in \Lambda(x)$ отнесем к несущественному спектру $\Lambda_0(x)$ функции $x \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$, если существует функция $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $f * x \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$. Множество $\Lambda_{ess}(x) = \Lambda(x) \setminus \Lambda_0(x)$ назовем существенным спектром функции x .

Определение 11. Вектор $x_0 \in \mathcal{X}$ назовем периодическим вектором периода $\omega \in \mathbb{R}_+^N$ (относительно представления T), если для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$ справедливо равенство $T(\alpha)x_0 = x_0$.

Множество периодических (периода ω) векторов обозначим через $\mathcal{X}_\omega = \mathcal{X}_\omega(T)$. Оно образует замкнутое подпространство в \mathcal{X} , инвариантное относительно операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}^N$.

С использованием леммы 2 и теорем [8, теорема 1; 10, теорема 3.2.7] была получена следующая

Теорема 4. Для того, чтобы вектор $x_0 \in \mathcal{X}$ был периодическим периода $\omega \in \mathbb{R}_+^N$ (т. е. $x_0 \in \mathcal{X}_\omega$), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение

$$\Lambda(x_0) \subset \left(\frac{2\pi}{\omega_1}n_1, \dots, \frac{2\pi}{\omega_N}n_N \right), \quad n \in \mathbb{Z}^N.$$



Из равенств $T(t + \omega)x - T(t)x = T(t)(T(\omega)x - x) = 0$, $t \in \mathbb{R}^N$, для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$, следует, что функция $\varphi_x : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, является непрерывной периодической функцией. Рассмотрим ее ряд Фурье:

$$\varphi_x(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} x_n e_n(t), \quad t \in \mathbb{R}^N,$$

где

$$x_n = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int_{\Omega^N} T(\tau) x e_{-n}(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{Z}^N.$$

Определение 12. Ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} x_n \tag{5}$$

назовем *рядом Фурье* вектора $x \in \mathcal{X}_\omega$, а векторы x_n , $n \in \mathbb{Z}^N$ — *коэффициентами Фурье* вектора x .

Если ряд Фурье вектора $x \in \mathcal{X}$ абсолютно сходится, т.е. выполнено условие $\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \|x_n\| < \infty$, то справедливо равенство $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} x_n$.

Справедливо следующее утверждение

Лемма 3. Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ и $x \in \mathcal{X}_\omega$ вектор $fx \in \mathcal{X}_\omega$ и имеет ряд Фурье вида

$$fx \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \hat{f} \left(\frac{2\pi k_1}{\omega_1}, \dots, \frac{2\pi k_N}{\omega_N} \right) x_k.$$

Отметим работы [8] и [9], в которых многие классические результаты теории рядов Фурье для периодических функций обобщались на векторы из банаховых пространств, в которых действует однопараметрическая группа операторов.

Подпространство \mathcal{X}_ω периодических векторов и утверждения следующей леммы фактически рассматривались в монографии [21, теорема 16.7.2]. Из указанных источников следует

Лемма 4. Пусть $x \in \mathcal{X}_\omega$. Тогда операторы $P_n x = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int_{\Omega^N} T(\tau) x e_{-n}(\tau) d\tau$, $n \in \mathbb{Z}^N$, являются проекторами, $x_n = P_n x$, $n \in \mathbb{Z}^N$ — коэффициенты Фурье вектора x , $T(t)P_n = e_n(t)P_n$, $t \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{Z}^N$, и $\|P_n\| = 1$, если $P_n \neq 0$.

Лемма 5. Для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$ справедливо соотношение $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$, где x_n , $n \in \mathbb{Z}^N$ — коэффициенты Фурье вектора x .

Доказательство. Возьмем произвольный вектор x из множества $D = D(A_1^2 \dots A_N^2)$, где A_i , $i = \overline{1, N}$ — генератор полугруппы операторов $T_i : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$, $i = \overline{1, N}$. Тогда для коэффициентов Фурье x_n , $n \in \mathbb{Z}^N$, вектора x , для которых $n_1 \dots n_N \neq 0$, имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \left\| \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int_{\Omega^N} T(\tau) x e_{-n}(\tau) d\tau \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int_0^{\omega_1} \dots \int_0^{\omega_N} T_1(\tau_1) \dots T_N(\tau_N) x e^{-i \frac{2\pi n_1}{\omega_1} \tau_1} \dots e^{-i \frac{2\pi n_N}{\omega_N} \tau_N} d\tau_1 \dots d\tau_N \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_N} \int_0^{\omega_1} \dots \int_0^{\omega_N} T_1(\tau_1) \dots T_N(\tau_N) A_N^2 x \frac{\omega_N^2}{4\pi^2 n_N^2} e^{-i \frac{2\pi n_1}{\omega_1} \tau_1} \dots e^{-i \frac{2\pi n_N}{\omega_N} \tau_N} d\tau_1 \dots d\tau_N \right\| = \\ &= \left\| \frac{\omega_1 \dots \omega_N}{4^N \pi^{2N} n_1^2 \dots n_N^2} \int_0^{\omega_1} \dots \int_0^{\omega_N} T_1(\tau_1) \dots T_N(\tau_N) A_1^2 \dots A_N^2 x e^{-i \frac{2\pi n_1}{\omega_1} \tau_1} \dots e^{-i \frac{2\pi n_N}{\omega_N} \tau_N} d\tau_1 \dots d\tau_N \right\| \leq \\ &\leq \frac{\omega_1 \dots \omega_N}{(4\pi^2)^N} \frac{\|A_1^2 \dots A_N^2 x\|}{n_1^2 \dots n_N^2}, \end{aligned}$$

т.е. $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$. Поскольку D плотно в \mathcal{X}_ω , то свойство $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ верно для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$. Лемма доказана.



Определение 13. Функция $\omega(\cdot, x) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\omega(\delta, x) = \sup_{|t| \leq \delta} \|T(t)x - x\|$, называется *модулем непрерывности вектора x* .

Теорема 5. Для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$ с рядом Фурье вида (5) справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{|k| \leq n, k \in \mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) x_k\| = 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольный периодический вектор $x \in \mathcal{X}_\omega$. Рассмотрим функции $f_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ следующего вида:

$$f_n(h) = \prod_{i=1}^N f_n^{(i)}(h_i), \quad h \in \mathbb{R}^N, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$f_n^{(i)}(t) = \frac{\omega_i}{4\pi^4 t^2 (n+1)} \sin^2 \frac{(n+1)\pi t}{\omega_i}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Отметим, что преобразование Фурье данных функций имеет вид

$$\widehat{f}_n^{(i)}(\lambda) = \begin{cases} 1 - \frac{\omega_i |\lambda|}{2\pi(n+1)}, & |\lambda| \leq \frac{2\pi(n+1)}{\omega_i}, \\ 0, & |\lambda| > \frac{2\pi(n+1)}{\omega_i}, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Тогда

$$\widehat{f}_n^{(i)}\left(\frac{2\pi k_i}{\omega_i}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|k_i|}{n+1}, & |k_i| \leq n+1, \\ 0, & |k_i| > n+1, \end{cases} \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Из леммы 3 следует, что свертка функции f_n с вектором x определяется равенством

$$f_n x = \sum_{|k| \leq n, k \in \mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) x_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{|k| \leq n, k \in \mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) x_k\| &= \|x - f_n x\| = \left\| \int_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau) x d\tau - \int_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau) T(-\tau) x d\tau \right\| = \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau) (x - T(-\tau)x) d\tau \right\| \leq \left\| \int_{\Delta_n} f_n(\tau) \omega(\delta_n, x) d\tau \right\| + 2\|x\| \left\| \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Delta_n} f_n(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \omega(\delta_n, x) \int_{\Delta_n} f_n(\tau) d\tau + 2\|x\| \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Delta_n} f_n(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \omega(\delta_n, x) \int_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau) d\tau + \frac{2\|x\|}{(4\pi^4(n+1))^N} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Delta_n} \prod_{i=1}^N \frac{\omega_i}{\tau_i^2} \sin^2 \frac{(n+1)\pi \tau_i}{\omega_i} d\tau \leq \\ &\leq \omega(\delta_n, x) + \frac{2\|x\|}{(4\pi^4(n+1))^N} \prod_{i=1}^N \int_{|\tau_i| \geq \delta_n} \frac{\omega_i d\tau_i}{\tau_i^2} \leq \omega(\delta_n, x) + \frac{2^{N+1} \omega_1 \dots \omega_N \|x\|}{(4\pi^4(n+1)\delta_n)^N} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\Delta_n = \{t \in \mathbb{R}^N : |t| \leq \delta_n\}$, для любой последовательности $\{\delta_n\}_{n=0}^\infty$, удовлетворяющей условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)\delta_n = \infty.$$

Теорема доказана.



Теорема 6. Если $x \in \mathcal{X}_\omega$, то

$$\left\| x - \sum_{|k| \leq n, k \in \mathbb{Z}^N} x_k \right\| \leq \text{Const } \omega\left(\frac{1}{n}, x\right) \ln^N n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

В частности, ряд Фурье вектора x сходится к x , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(1/n, x) \ln^N n = 0$.

Доказательство. Из [22, с. 198] вытекает следующая оценка:

$$\left\| x - \sum_{|k| \leq n, k \in \mathbb{Z}^N} x_k \right\| \leq (L_n + 1) E_n[x], \quad (7)$$

где $L_n, n \geq 1$, — константы Лебега, для которых выполнено (см. [22, с. 115]) условие

$$L_n = 4\pi^{-2} \ln n + O(1) \simeq 4\pi^{-2} \ln n \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

а $E_n[x], n \geq 1$, — наилучшее приближение вектора x тригонометрическими полиномами порядка n .

Неравенство (7) показывает, что такое приближение вектора x не более чем в $L_n + 1$ раз хуже наилучшего.

Для дальнейших оценок требуются оценки для $E_n[x], n \geq 1$.

Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ вида $f(t) = \prod_{i=1}^N f_i(t_i), t \in \mathbb{R}^N$, где функции $f_i \in L^1(\mathbb{R}), i = \overline{1, N}$, обладают следующими свойствами:

- 1) $\widehat{f}_i(0) = 1, \widehat{f}_i(\lambda) = \widehat{f}_i(-\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$;
- 2) $\text{supp } \widehat{f}_i \subset [-1, 1]$;
- 3) $f_i \geq 0$;
- 4) $\int_{\mathbb{R}} |\tau| f_i(\tau) d\tau = M_i < \infty, i = \overline{1, N}$.

Отметим, что третье свойство нужно лишь для удобства доказательства, первое свойство позволяет обойтись и без него.

Пусть $M = \max_{i=1, \overline{1, N}} M_i$. Возьмем произвольное $\alpha > 0$ и введем обозначение $f_\alpha(t) = \alpha^N \prod_{i=1}^N f_i(\alpha t_i), t \in \mathbb{R}^N$. Тогда имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} E_\alpha[x] &\leq \|x - f_\alpha x\| = \left\| \int_{\mathbb{R}^N} (T(-\tau)x - x) f_\alpha(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau = \\ &= \int_{|\tau| \leq \alpha} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau + \int_{|\tau| \geq \alpha} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right) \int_{|\tau| \leq \alpha} f_\alpha(\tau) d\tau + \int_{|\tau| \geq \alpha} \|T_1(-\tau_1) \dots T_N(-\tau_N)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right) \int_{|\tau| \leq \alpha} f_\alpha(\tau) d\tau + \int_{|\tau_1| \geq \alpha} \dots \int_{|\tau_N| \geq \alpha} (\|T_1(-\tau_1) \dots T_N(-\tau_N)x - T_1(-\tau_1) \dots T_{N-1}(-\tau_{N-1})x\| + \dots + \\ &\quad + \|T_1(-\tau_1)T_2(-\tau_2)x - T_1(-\tau_1)x\| + \|T_1(-\tau_1)x - x\|) f_\alpha(\tau_1, \dots, \tau_N) d\tau_1 \dots d\tau_N \leq \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right) \left(N + 1 + \int_{|\tau_1| \geq \alpha} \dots \int_{|\tau_N| \geq \alpha} \alpha(|\tau_1| + \dots + |\tau_N|) f_\alpha(\tau_1, \dots, \tau_N) d\tau_1 \dots d\tau_N \right) \leq \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right) \left(N + 1 + \sum_{k=1}^N \int_{|\tau_1| \geq \alpha} \dots \int_{|\tau_N| \geq \alpha} \alpha |\tau_k| \alpha^N \prod_{i=1}^N f_i(\alpha t_i) d\tau_1 \dots d\tau_N \right) \leq \end{aligned}$$



$$\leq \omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right) \left(N + 1 + \sum_{k=1}^N M_k \prod_{\substack{i=1, i \neq k \\ |t| \geq \alpha}} \int f_i(t) dt \right) \leq \text{Const } \omega\left(\frac{1}{\alpha}, x\right).$$

Из последней оценки с использованием (7) и (8) получаем требуемую оценку (6). Теорема доказана.

Замечание 1. Для скалярных периодических функций оценка наилучшего приближения через ее модуль непрерывности была получена в [23].

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Далее через X обозначается банахова алгебра с единицей. Символом \mathcal{X} будем обозначать фактор-пространство $C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in x + C_0(\mathbb{R}^N, X)} \|y\|$, где $\tilde{x} = x + C_0(\mathbb{R}^N, X)$ — класс эквивалентности, содержащий функцию x .

Отметим, что банахово пространство \mathcal{X} становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом: $\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}$, $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{X}$.

В фактор-пространстве $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$ корректно определяется сильно непрерывная группа изометрий $\tilde{S} : \mathbb{R}^N \rightarrow \text{End}(C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X))$, действующая по правилу $\tilde{S}(h)\tilde{x} = \widetilde{S(h)x}$, $h \in \mathbb{R}^N$, $\tilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$, где $S(h)x$ — сдвиг функции x на вектор h , определяемый формулой (1).

Структура банахова $L^1(\mathbb{R}^N)$ -модуля на $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$ ($(C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X))$ в частности) наделяется формулой $f\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}^N} f(\tau)\tilde{S}(-\tau)\tilde{x}d\tau$, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

Непосредственно из определения представления \tilde{S} следует, что

$$\tilde{S}(\omega)\tilde{x} = \tilde{x}, \quad \tilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X).$$

Таким образом, функция $t \mapsto \tilde{S}(t)\tilde{x} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{X}$ является непрерывной периодической периода ω , т. е. она принадлежит банахову пространству $C_{\omega}(\mathbb{R}^N, \mathcal{X})$. Следовательно, имеет место

Лемма 6. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ является периодической на бесконечности периода ω тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\tilde{x} = x + C_0(\mathbb{R}^N, X)$ является периодическим вектором периода ω относительно представления $\tilde{S} \in \text{End } C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

Доказательства теорем 1–3 следуют из леммы 6 и теорем 5 и 6, где в качестве пространства \mathcal{X}_{ω} взято пространство $C_{\omega, \infty}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

Постановка задачи и теорема 4 выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00378), теорема 5 — при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-31196) остальные результаты — при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-11-00305).

Библиографический список

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука; Физматлит, 1970. 534 с.
2. Пак И. Н. О суммах тригонометрических рядов // УМН. 1980. Т. 35, № 2. С. 91–144.
3. Karamata J. Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux // Bulletin S. M. F. 1933. Vol. 61. P. 55–62.
4. Hardy G. H. A theorem concerning trigonometrical series // Journal L. M. S. 1928. Vol. 3. P. 12–13.
5. Seneta E. Regularly varying functions. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 508. Berlin : Springer-Verlag, 1976.
6. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.
7. Струкова И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 34–41.
8. Баскаков А. Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 2. С. 195–206.
9. Баскаков А. Г. Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 5. С. 942–952.
10. Баскаков А. Г. Об общих эргодических теоремах в банаховых модулях // Функци. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 3. С. 63–64.
11. Баскаков А. Г. О спектральном синтезе в банаховых модулях над коммутативными банаховыми алгебрами // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 4. С. 573–585.



12. Баскаков А. Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций // Мат. сб. 1984. Т. 124, № 1. С. 68–95.
13. Баскаков А. Г. Операторные эргодические теоремы и дополняемость подпространств банаховых пространств // Изв. вузов. Математика. 1988. Т. 32, № 11. С. 3–11.
14. Баскаков А. Г. Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Функциональный анализ и его прил. 1990. Т. 24, № 3. С. 64–65.
15. Баскаков А. Г. Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 17–26.
16. Баскаков А. Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 14–28.
17. Баскаков А. Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Изв. РАН. Сер. математическая. 1997. Т. 61, № 6. С. 3–26. DOI: 10.4213/im164.
18. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. 2004. Т. 9. С. 3–151.
19. Баскаков А. Г., Криштал И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. математическая. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. DOI: 10.4213/im639.
20. Купцов Н. П. Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // УМН. 1968. Т. 23, № 4. С. 117–178.
21. Hille E., Phillips R. S. Functional analysis and semigroups. AMS Colloquium Publications. Vol. 31, rev. ed. Providence, R.I. : American Math. Soc., 1957.
22. Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 615 с.
23. Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Preisschrift und Dissertation, Universität Göttingen, 1911.

About Harmonic Analysis of Periodic at Infinity Functions

I. I. Strukova

Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 394036, Voronezh, Russia, irina.k.post@yandex.ru

We consider slowly varying and periodic at infinity multivariable functions in Banach space. We introduce the notion of Fourier series of periodic at infinity function, study the properties of Fourier series and their convergence. Basic results are derived with the use of isometric representations theory.

Key words: Banach space, Banach algebra, slowly varying at infinity functions, periodic at infinity functions, Fourier series, modulus of continuity.

References

1. Daletsky Yu. L., Krein M. G. *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. Nonlinear Analysis and Its Applications*. Moscow, Nauka, 1970, 534 p. (in Russian).
2. Pak I. N. On the sums of trigonometric series. *Rus. Math. Surv.*, 1980, vol. 35, no. 2, pp. 105–168.
3. Karamata J. Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux. *Bulletin S. M. F.*, 1933, vol. 61, pp. 55–62.
4. Hardy G. H. A theorem concerning trigonometrical series. *Journal L. M. S.*, 1928, vol. 3, pp. 12–13.
5. Seneta E. *Regularly varying functions. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 508, Berlin, Springer-Verlag, 1976.
6. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostekhizdat, 1956, 632 p. (in Russian).
7. Strukova I.I. Wiener's theorem for periodic at infinity functions. *Izv. Saratov. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12. no. 4, pp. 34–41 (in Russian).
8. Baskakov A. G. Spectral tests for the almost periodicity of the solutions of functional equations. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 1–2, pp. 606–612.
9. Baskakov A. G. Bernštejn-type inequalities in abstract harmonic analysis. *Siberian Math. J.*, 1979, vol. 20, no. 5, pp. 665–672.
10. Baskakov A. G. General ergodic theorems in Banach modules. *J. Funct. Anal.*, 1980, vol. 14, no. 3, pp. 215–217.
11. Baskakov A. G. Spectral synthesis in Banach modules over commutative Banach algebras. *Math. Notes*, 1983, vol. 34, no. 3–4, pp. 776–782.
12. Baskakov A. G. Harmonic analysis of cosine and exponential operator-valued functions. *Math. of the USSR-Sbornik*, 1985, vol. 52, no. 1, pp. 63–90.
13. Baskakov A. G. Operator ergodic theorems and complementability of subspaces of Banach spaces. *Soviet Math. (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1988, vol. 32, no. 11, pp. 1–14.



14. Baskakov A. G. Wiener's theorem and asymptotic estimates for elements of inverse matrices. *Funct. Anal. Appl.*, 1990, vol. 24, no. 3, pp. 222–224.
15. Baskakov A. G. Abstract harmonic analysis and asymptotic estimates for elements of inverse matrices. *Math. Notes*, 1992, vol. 52, no. 2, pp. 764–771.
16. Baskakov A. G. Asymptotic estimates for elements of matrices of inverse operators, and harmonic analysis. *Siberian Math. J.*, 1997, vol. 38, no. 1, pp. 10–22.
17. Baskakov A. G. Estimates for the elements of inverse matrices, and the spectral analysis of linear operators. *Izv. Math.*, 1997, vol. 61, no. 6, pp. 1113–1135. DOI: 10.4213/im164.
18. Baskakov A. G. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci. (N. Y.)* 2006, vol. 137, no. 4, pp. 4885–5036.
19. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. DOI: 10.4213/im639.
20. Kupcov N. P. Direct and inverse theorems of approximation theory and semigroups of operators. *Uspehi Mat. Nauk.*, 1968, vol. 23, no. 4, pp. 117–178. (in Russian).
21. Hille E., Phillips R. S. Functional analysis and semigroups. *AMS Colloquium Publications*. Vol. 31, rev. ed. Providence, R.I., American Math. Soc., 1957.
22. Zygmund A. *Trigonometric series*. Cambridge Univ. Press, vol. 1, 1959. 615 p.
23. Jackson D. *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*. Preisschrift und Dissertation, Universität Gottingen, 1911.

УДК 517.518.82

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ С ВЕСОМ ЯКОБИ

М. С. Султанахмедов

Научный сотрудник, отдел математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, sultanakhmedov@gmail.com

Пусть $-1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{N-1} < \eta_N = 1$, $\lambda_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} (\eta_{j+1} - \eta_j)$. Работа посвящена исследованию свойств полиномов, образующих ортонормированную систему с весом Якоби $\kappa^{\alpha, \beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ на произвольной (не обязательно равномерной) сетке $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ такой, что $\eta_j \leq t_j \leq \eta_{j+1}$. В случае целых $\alpha, \beta \geq 0$ для построенных таким образом дискретных ортонормированных полиномов $\hat{P}_{n,N}^{\alpha, \beta}(t)$ ($n = 0, \dots, N-1$) при $n = O(\lambda_N^{-1/3})$ ($\lambda_N \rightarrow 0$) получена асимптотическая формула вида $\hat{P}_{n,N}^{\alpha, \beta}(t) = \hat{P}_n^{\alpha, \beta}(t) + v_{n,N}^{\alpha, \beta}(t)$, в которой $\hat{P}_n^{\alpha, \beta}(t)$ — классический полином Якоби, $v_{n,N}^{\alpha, \beta}(t)$ — остаточный член. В качестве следствия асимптотической формулы получена весовая оценка полиномов $\hat{P}_{n,N}^{\alpha, \beta}(t)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, неравномерная сетка, асимптотика, весовые оценки.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть

$$\begin{aligned} -1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{N-1} < \eta_N = 1, \\ \Delta \eta_j = \eta_{j+1} - \eta_j \quad (0 \leq j \leq N-1), \quad \lambda_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \Delta \eta_j. \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим сетку $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, в которой узлы t_j удовлетворяют условию

$$\eta_j \leq t_j \leq \eta_{j+1} \quad (0 \leq j \leq N-1), \tag{2}$$

причем $t_i \neq t_j$, если $i \neq j$. Для $\alpha, \beta \geq 0$ положим $\kappa^{\alpha, \beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\rho = \rho(t_j) = \kappa^{\alpha, \beta}(t_j) \Delta \eta_j$. Рассмотрим пространство $l_{2, \rho}(\Omega_N)$ дискретных функций вида $f : \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}$, в котором скалярное



произведение задано следующим образом:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)g(t_j)\rho(t_j) = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)g(t_j)\kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \Delta \eta_j. \quad (3)$$

Через $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ ($0 \leq n \leq N-1$) обозначим полиномы, образующие конечную ортонормированную систему относительно скалярного произведения (3), т. е.

$$\langle \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}, \hat{P}_{m,N}^{\alpha,\beta} \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t_j)\hat{P}_{m,N}^{\alpha,\beta}(t_j)\kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \Delta \eta_j = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Будем называть полиномы $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ ($0 \leq n \leq N-1$) дискретными ортонормированными полиномами Якоби. Основной целью данной работы является изучение асимптотических свойств $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ при $\lambda_N \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ в случае целых α, β . При $n = O(\lambda_N^{-1/3})$ нами получена формула вида

$$\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

где $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ — ортонормированный классический полином Якоби, $v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ — остаточный член, для которого установлена следующая оценка:

$$\left| v_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos \theta) \right| \leq c(\alpha, \beta, a) \left(\frac{3 - \lambda_N \chi (2n + \alpha + \beta)^2}{1 - \lambda_N^2 \chi^2 (2n + \alpha + \beta)^4} \right)^{1/2} \begin{cases} \theta^{-\alpha-1/2} n^{3/2} \sqrt{\lambda_N}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2, \\ n^{\alpha+2} \sqrt{\lambda_N}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1}, \end{cases}$$

где здесь и далее $c, c(\alpha), c(\alpha, \beta), c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ — положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, и различные в разных местах, χ — наименьшая константа в интегральном неравенстве Маркова об оценке интеграла от производной алгебраического полинома (см. (6)). В качестве следствия асимптотической формулы, получены весовые оценки для полиномов $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$.

Асимптотические свойства и весовые оценки полиномов, ортогональных на дискретных сетках, впервые были исследованы в работах И. И. Шарапудинова (см. работу [1] и библиографический список к ней). Им был внесен существенный вклад в асимптотическую теорию дискретных ортогональных полиномов, в частности классических полиномов Чебышева, Мейкснера, Кравчука, ортогональных на равномерных сетках. В работах И. И. Шарапудинова [2–5] и А. А. Нурмагомедова [6, 7] были проведены исследования асимптотических свойств полиномов, ортогональных на неравномерных сетках числовой оси. В частности, в работе [7] рассмотрены асимптотические свойства дискретных полиномов Якоби $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ с целыми α, β , ортогональных на неравномерных дискретных сетках Ω_N с $t_j = (\eta_j + \eta_{j+1})/2$ ($0 \leq j \leq N-1$). Как уже отмечалось выше, в настоящей работе рассматривается более общий случай, когда $\eta_j \leq t_j \leq \eta_{j+1}$ ($0 \leq j \leq N-1$). Другие аспекты асимптотической теории дискретных ортогональных полиномов отражены в работах [8–10] и библиографических списках к ним.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства классических полиномов Якоби, которые мы соберем в следующем параграфе.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ЯКОБИ

Определим многочлены Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) с помощью формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{\kappa^{\alpha,\beta}(t)} \frac{d^n}{dt^n} \{ \kappa^{\alpha,\beta}(t) \sigma^n(t) \},$$

где α, β — произвольные действительные числа, $\kappa^{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\sigma(t) = 1-t^2$.

Если $\alpha, \beta > -1$, то многочлены Якоби образуют ортогональную систему с весом $\kappa^{\alpha,\beta}(t)$, т. е.

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha,\beta}(t) P_m^{\alpha,\beta}(t) \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt = h_n^{\alpha,\beta} \delta_{nm},$$



где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

и, следовательно, $h_n^{\alpha,\beta} \asymp n^{-1}$ ($n = 1, 2, \dots$). Нам понадобится следующая весовая оценка ($-1 \leq t \leq 1$) [11]:

$$\sqrt{n} |P_n^{\alpha,\beta}(t)| \leq c(\alpha, \beta) \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n}\right)^{-\beta-1/2}, \quad (4)$$

из которой, в частности, следует, что

$$\begin{aligned} \sqrt{n} |P_n^{\alpha,\beta}(t)| &\leq c(\alpha, \beta)(1-t)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} & (0 \leq t \leq 1-n^{-2}), \\ \sqrt{n} |P_n^{\alpha,\beta}(t)| &\leq c(\alpha, \beta)n^{\alpha+1/2} & (1-n^{-2} \leq t \leq 1), \\ \sqrt{n} |P_n^{\alpha,\beta}(t)| &\leq c(\alpha, \beta)(1+t)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} & (-1+n^{-2} \leq t \leq 0), \\ \sqrt{n} |P_n^{\alpha,\beta}(t)| &\leq c(\alpha, \beta)n^{\beta+1/2} & (-1 \leq t \leq -1+n^{-2}). \end{aligned}$$

Соответствующие ортонормированные полиномы Якоби обозначим через $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$, т.е. $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) = (h_n^{\alpha,\beta})^{-1/2} P_n^{\alpha,\beta}(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\{\eta_j\}_{j=0}^N, \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ — системы узлов, удовлетворяющие условиям (1) и (2) соответственно, $f(x)$ — абсолютно непрерывная функция, заданная на $[-1, 1]$. Тогда имеет место следующий аналог формулы Эйлера–Маклорена:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \Delta \eta_j + r_N(f),$$

где для остаточного члена справедлива оценка

$$|r_N(f)| \leq \lambda_N \int_{-1}^1 |f'(t)| dt.$$

Доказательство. Для абсолютно непрерывной функции $f(x)$ имеем:

$$f(x) = f(t_j) + \int_{t_j}^x f'(t) dt.$$

Отсюда для любого сегмента $[\eta_j, \eta_{j+1}]$ справедливо

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} f(x) dx = f(t_j) \Delta \eta_j + \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} dx \int_{t_j}^x f'(t) dt.$$

Рассмотрим интеграл в правой части этого равенства

$$\begin{aligned} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} dx \int_{t_j}^x f'(t) dt &= \int_{t_j}^{\eta_{j+1}} dx \int_{t_j}^x f'(t) dt - \int_{\eta_j}^{t_j} dx \int_x^{t_j} f'(t) dt = \\ &= \int_{t_j}^{\eta_{j+1}} f'(t) dt \int_t^{\eta_{j+1}} dx - \int_{\eta_j}^{t_j} f'(t) dt \int_{\eta_j}^t dx = \int_{t_j}^{\eta_{j+1}} f'(t)(\eta_{j+1} - t) dt - \int_{\eta_j}^{t_j} f'(t)(t - \eta_j) dt. \end{aligned}$$



Таким образом, получаем:

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} f(x) dx = f(t_j) \Delta \eta_j + r_{N,j}(f),$$

где остаточный член

$$\begin{aligned} |r_{N,j}(f)| &= \left| \int_{t_j}^{\eta_{j+1}} f'(t)(\eta_{j+1} - t) dt - \int_{\eta_j}^{t_j} f'(t)(t - \eta_j) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{t_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)|(\eta_{j+1} - t) dt + \int_{\eta_j}^{t_j} |f'(t)|(t - \eta_j) dt \leq \\ &\leq \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)|(\eta_{j+1} - t) dt + \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)|(t - \eta_j) dt, \end{aligned}$$

и отсюда

$$|r_{N,j}(f)| \leq \Delta \eta_j \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)| dt. \quad (5)$$

В то же время имеем:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} f(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \Delta \eta_j + \sum_{j=0}^{N-1} r_{N,j}(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \Delta \eta_j + r_N(f).$$

Поэтому, воспользовавшись оценкой (5), выводим

$$|r_N(f)| \leq \sum_{j=0}^{N-1} |r_{N,j}(f)| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \Delta \eta_j \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)| dt \leq \lambda_N \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)| dt = \lambda_N \int_{-1}^1 |f'(t)| dt.$$

Лемма доказана.

Далее нам понадобится обобщение на интегральную метрику неравенства Маркова для оценки производной алгебраического многочлена (см. [12, 13]), имеющее для $r = 1$ следующий вид:

$$\int_{-1}^1 |q'_m(t)| dt \leq c(m)m^2 \int_{-1}^1 |q_m(t)| dt, \quad (6)$$

где $q_m(t)$ — произвольный алгебраический полином степени m . Для каждого m наименьшую из констант $c(m)$, удовлетворяющих неравенству (6), обозначим через χ_m , т.е.

$$\chi_m = \sup_{q_m} \frac{\int_{-1}^1 |q'_m(t)| dt}{m^2 \int_{-1}^1 |q_m(t)| dt},$$

где верхняя грань берется по всем полиномам $q_m(t)$ степени не выше m и не равных нулю тождественно. В работе Н. К. Бари [12] было показано, что $\chi = \sup_{m \geq 1} \chi_m < \infty$. С учетом этого факта из

неравенства (6) мы выводим

$$\int_{-1}^1 |q'_m(t)| dt \leq \chi m^2 \int_{-1}^1 |q_m(t)| dt. \quad (7)$$



Лемма 2. Пусть $\lambda_N \chi (2n + \alpha + \beta)^2 < 1$. Тогда для дискретных полиномов Якоби в случае целых $\alpha, \beta \geq 0$ имеет место равенство

$$\int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt = 1 + R_{n,N}, \tag{8}$$

в котором для остаточного члена справедлива оценка

$$|R_{n,N}| \leq \frac{\lambda_N \chi (2n + \alpha + \beta)^2}{1 - \lambda_N \chi (2n + \alpha + \beta)^2}.$$

Доказательство. Применим к левой части (8) лемму 1:

$$\int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t_j) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \Delta \eta_j + r_N(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}), \tag{9}$$

где

$$|r_N(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta})| \leq \lambda_N \int_{-1}^1 \left| \left(\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) \right)' \right| dt. \tag{10}$$

Поскольку для целых $\alpha, \beta \geq 0$ выражение $\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)$ представляет собой алгебраический полином степени $m = 2n + \alpha + \beta$, то в силу интегрального неравенства Маркова (7) имеем:

$$\int_{-1}^1 \left| \left(\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) \right)' \right| dt \leq \chi m^2 \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt. \tag{11}$$

Тогда из (10) и (11) следует, что

$$|r_N(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta})| \leq \lambda_N \chi m^2 \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt.$$

Отсюда и из (9) выводим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt &\leq 1 + \lambda_N \chi m^2 \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt, \\ \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt &\leq \frac{1}{1 - \lambda_N \chi m^2} = 1 + \frac{\lambda_N \chi m^2}{1 - \lambda_N \chi m^2}. \end{aligned}$$

Сопоставляя это неравенство с (8), убеждаемся в справедливости леммы 2.

Лемма 3. Имеет место следующее неравенство:

$$\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}} \geq 1 - \frac{\lambda_N \chi (2n + \alpha + \beta)^2}{1 + \lambda_N \chi (2n + \alpha + \beta)^2},$$

где $k_n^{\alpha,\beta}, k_{n,N}^{\alpha,\beta}$ — старшие коэффициенты полиномов $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}$ и $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}$ соответственно.

Доказательство. В силу свойства экстремальности ортогональных полиномов имеем:

$$\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}} = \frac{1}{k_n^{\alpha,\beta} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t_j) / k_{n,N}^{\alpha,\beta} \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \Delta \eta_j \right)^{1/2}} \geq$$



$$\geq \frac{1}{k_n^{\alpha,\beta} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t_j)/k_n^{\alpha,\beta} \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \Delta \eta_j \right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t_j) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \Delta \eta_j \right)^{1/2}}. \quad (12)$$

Воспользовавшись леммой 1, находим:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t_j) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \Delta \eta_j = \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt - r_N = 1 - r_N \leq 1 + |r_N|,$$

где

$$|r_N| = |r_N \left(\left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta} \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta} \right)| \leq \lambda_N \int_{-1}^1 \left| \left(\left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) \right)' \right| dt. \quad (13)$$

Сопоставляя (13) с неравенством (7), получаем

$$|r_N| \leq \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2 \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt = \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2. \quad (14)$$

Таким образом, из (12) и (14) следует

$$\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}} \geq \frac{1}{(1 + \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2)^{1/2}} \geq \frac{1}{1 + \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2} = 1 - \frac{\lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2}{1 + \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. При целых $\alpha, \beta \geq 0$ и $\lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2 < 1$ имеет место следующая оценка сверху

$$\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}} \leq \frac{1}{(1 - \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2)^{1/2}}.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся интегральным неравенством Коши–Буняковского и леммой 2:

$$\begin{aligned} \frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}} &= \int_{-1}^1 \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt \leq \left(\int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 \left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{(1 - \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Ниже нам понадобится следующее

Утверждение 1. Пусть $\alpha, \beta > -1$, $M_n(x)$ — произвольный полином степени n , подчиненный условию

$$\int_{-1}^1 \kappa^{\alpha,\beta}(x) |M_n(x)|^2 dx = 1.$$

Тогда имеет место следующая оценка:

$$|M_n(\cos(\theta))| \leq c(\alpha, \beta, a) \begin{cases} n^{\alpha+1}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1}, \\ \theta^{-\alpha-1/2} n^{1/2}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases} \quad (15)$$

Аналогичные оценки справедливы на отрезке $\theta \in [\pi/2, \pi]$.

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [11, §7.71, теорема 7.71.2].



3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$

Далее, для краткости все рассуждения мы будем проводить на отрезке $\theta \in [0, \pi/2]$, для отрезка $\theta \in [\pi/2, \pi]$ они получаются абсолютно аналогично.

Теорема 1. Пусть $0 \leq \alpha, \beta$ — целые, $\lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2 < 1$. Тогда имеет место равенство:

$$\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

где для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha,\beta}$ имеет место оценка (здесь $t = \cos \theta$)

$$\left| v_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos \theta) \right| \leq c(\alpha, \beta, a) \left(\frac{3 - \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2}{1 - \lambda_N^2 \chi^2(2n + \alpha + \beta)^4} \right)^{1/2} \begin{cases} n^{\alpha+2} \sqrt{\lambda_N}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1}, \\ \theta^{-\alpha-1/2} n^{3/2} \sqrt{\lambda_N}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) - \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt = \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt + \\ & + \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt - 2 \int_{-1}^1 \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt = I_1 + 1 - 2I_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Оценим сначала интеграл I_1 , для чего воспользуемся леммой 1. Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) \Delta \eta_j + r_N(I_1), \\ |r_N(I_1)| &= \left| r_N \left(\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta} \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta} \right) \right| \leq \lambda_N \int_{-1}^1 \left| \left(\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) \right)' \right| dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда в силу неравенства (7) получим:

$$|r_N(I_1)| \leq \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2 \int_{-1}^1 \left| \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) \right| dt.$$

Тогда из (17) находим

$$I_1 \leq 1 + \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2 I_1.$$

Откуда

$$I_1 \leq \frac{1}{1 - \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2} = 1 + \frac{\lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2}{1 - \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2}. \quad (18)$$

Перейдем к оценке интеграла I_2 :

$$I_2 = \int_{-1}^1 \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt = \frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}} \int_{-1}^1 \left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt = \frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}}.$$

Воспользуемся леммой 3, тогда:

$$I_2 \geq 1 - \frac{\lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2}{1 + \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2}. \quad (19)$$

Сопоставляя (18) и (19) с (16), получим:

$$\int_{-1}^1 \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) - \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt \leq \frac{\lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2}{1 - \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2} + \frac{2\lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2}{1 + \lambda_N \chi(2n + \alpha + \beta)^2} = A,$$



где

$$A = \lambda_N \chi (2n + \alpha + \beta)^2 \frac{3 - \lambda_N \chi (2n + \alpha + \beta)^2}{1 - \lambda_N^2 \chi^2 (2n + \alpha + \beta)^4}.$$

В силу того что по условию теоремы $A \neq 0$, можем записать

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) - \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)}{\sqrt{A}} \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) dt \leq 1.$$

Откуда, воспользовавшись (15), выводим ($t = \cos \theta$):

$$\left| \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos \theta) - \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(\cos \theta) \right| \leq c(\alpha, \beta, a) \sqrt{A} \begin{cases} n^{\alpha+1}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1}, \\ \theta^{-\alpha-1/2} n^{1/2}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Подставляя сюда значение A , приходим к искомой оценке. Теорема доказана.

Обозначим для краткости

$$B = \left(\frac{3 - \lambda_N \chi (2n + \alpha + \beta)^2}{1 - \lambda_N^2 \chi^2 (2n + \alpha + \beta)^4} \right)^{1/2}.$$

Следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $0 \leq \alpha, \beta$ — целые и $\lambda_N \chi (2n + \alpha + \beta)^2 < 1$, тогда существует постоянная $c(\alpha, \beta, a)$ такая, что:

$$\left| \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos \theta) \right| \leq c(\alpha, \beta, a) \left(1 + B \sqrt{n^3 \lambda_N} \right) \begin{cases} n^{\alpha+1/2}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1}, \\ \theta^{-\alpha-1/2}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Доказательство. Весовая оценка (4) для ортонормированных классических полиномов Якоби $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}$ принимает вид

$$\left| \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(\cos \theta) \right| \leq c(\alpha, \beta, a) \begin{cases} n^{\alpha+1/2}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1}, \\ \theta^{-\alpha-1/2}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Тогда, пользуясь теоремой 1, проведем следующую оценку

$$\begin{aligned} \left| \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos \theta) \right| &\leq \left| \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(\cos \theta) + v_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos \theta) \right| \leq \\ &\leq \begin{cases} c(\alpha, \beta, a) n^{\alpha+1/2} + c(\alpha, \beta, a) B n^{\alpha+2} \sqrt{\lambda_N}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1} \\ c(\alpha, \beta, a) \theta^{-\alpha-1/2} + c(\alpha, \beta, a) B n^{3/2} \theta^{-\alpha-1/2} \sqrt{\lambda_N}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases} \leq \\ &\leq c(\alpha, \beta, a) \left(1 + B \sqrt{n^3 \lambda_N} \right) \begin{cases} n^{\alpha+1/2}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1}, \\ \theta^{-\alpha-1/2}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность И. И. Шарапудинову за постановку задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00191-а).

Библиографический список

1. Шарапудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : ДНЦ РАН, 2004. 276 с.
2. Шарапудинов И. И. Асимптотика полиномов, ортогональных на сетках из единичной окружности и числовой прямой // Современные проблемы математики, механики, информатики : материалы междунар. науч. конф. Тула : Изд-во ТулГУ, 2009. С. 100–106.



3. Шарапудинов И. И. Некоторые свойства полиномов, ортогональных на неравномерных сетках из единичной окружности и отрезка // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 15-й Саратов. зим. шк., посвящ. 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ. Саратов : Научная книга, 2010. С. 187.
4. Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства полиномов, ортогональных на конечных сетках единичной окружности // Вестн. Дагестан. науч. центра. 2011. № 42. С. 5–14.
5. Шарапудинов И. И. Полиномы, ортогональные на сетках из единичной окружности и числовой оси // Дагестан. электрон. мат. изв. 2013. Т. 1. С. 1–55.
6. Нурмагомедов А. А. Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 1. С. 25–31.
7. Нурмагомедов А. А. Асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n^{\alpha, \beta}(x)$, ортогональных на произвольных сетках в случае целых α и β // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 10–19.
8. Baik J., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Miller P. D. Discrete orthogonal polynomials. Asymptotics and applications. Princeton : Princeton Univ. Press, 2007. 184 p.
9. Ou C., Wong R. The Riemann-Hilbert approach to global asymptotics of discrete orthogonal polynomials with infinite nodes // Analysis and Applications. 2010. Vol. 8. P. 247–286.
10. Ferreira C., López J.L., Sinusia E.P. Asymptotic relations between the Hahn-type polynomials and Meixner-Pollaczek, Jacobi, Meixner and Krawtchouk polynomials // J. of Comp. and Appl. Math. 2008. Vol. 217. P. 88–109.
11. Сега Г. Ортогональные многочлены. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 500 с.
12. Бари Н.К. Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1954. Т. 18, № 2. С. 159–176.
13. Конягин С.В. О неравенстве В. А. Маркова для многочленов в метрике L // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1980. № 145. С. 117–125.

Asymptotic Properties and Weighted Estimation of Polynomials, Orthogonal on the Nonuniform Grids with Jacobi Weight

M. S. Sultanakhmedov

Department of mathematics and computer science, Daghestan scientific center, 45, M. Gadzhieva str., 367000, Makhachkala, Daghestan, Russia, sultanakhmedov@gmail.com

Let $-1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{N-1} < \eta_N = 1$, $\lambda_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} (\eta_{j+1} - \eta_j)$. Current work is devoted to investigation of properties of polynomials, orthogonal with Jacobi weight $\kappa^{\alpha, \beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ on nonuniform grid $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, where $\eta_j \leq t_j \leq \eta_{j+1}$. In case of integer $\alpha, \beta \geq 0$ for such discrete orthonormal polynomials $\hat{P}_{n,N}^{\alpha, \beta}(t)$ ($n = 0, \dots, N-1$) asymptotic formula $\hat{P}_{n,N}^{\alpha, \beta}(t) = \hat{P}_n^{\alpha, \beta}(t) + v_{n,N}^{\alpha, \beta}(t)$ with $n = O(\lambda_N^{-1/3})$ ($\lambda_N \rightarrow 0$) was obtained, where $\hat{P}_n^{\alpha, \beta}(t)$ — classical Jacobi polynomial, $v_{n,N}^{\alpha, \beta}(t)$ — remainder term. As corollary of asymptotic formula it was deduced weighted estimation of $\hat{P}_{n,N}^{\alpha, \beta}(t)$ polynomials on segment $[-1, 1]$.

Key words: orthogonal polynomials, nonuniform grid, asymptotic formula, weighted estimation.

References

1. Sharapudinov I. I. Smeshannye riady po ortogonal'nym polinomam. Teoriia i prilozheniia [Mixed series of orthogonal polynomials. Theory and applications]. Makhachkala, 2004, 276 p. (in Russian).
2. Sharapudinov I. I. Asimptotika polinmov, ortogonal'nykh na setkakh iz edinichnoi okruzhnosti i chislovoi priamoi [Asymptotics of polynomials orthogonal on grids of the unit circle and the number line]. *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: materialy mezhdunar. nauch. konf.* Russia, Tula, 2009, pp. 100-106 (in Russian).
3. Sharapudinov I. I. Nekotorye svoistva polinmov, ortogonal'nykh na neravnomernykh setkakh iz edinichnoi okruzhnosti i otrezka [Some properties of polynomials orthogonal on nonuniform grids of the unit circle and the segment]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia. Materialy 15-i Saratovskoi zimnei shkoly, posviashchennoi 125-letiiu so dnia rozhdeniia V. V. Golubeva i 100-letiiu SGU.* Saratov, 2010, pp. 187 (in Russian).
4. Sharapudinov I. I. Asymptotic properties of the polynomials orthogonal on the finite nets of the unite circle [Asimptoticheskie svoistva polinmov, ortogonal'nykh na konechnykh setkakh edinichnoi okruzhnosti]. *Vestnik Dagestanskogo nauchnogo tsentra*, 2011, no. 42, pp. 5–14 (in Russian).



5. Sharapudinov I. I. Polynomials, orthogonal on grids from unit circle and number axis. *Dagestanskije elektронные математические известия* [Daghestan electronic mathematical reports], 2013, vol. 1, pp. 1–55 (in Russian).
6. Nurmagedov A. A. About approximation polynomials, orthogonal on random grids. *Izv. Saratov. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 1, pp. 25–31 (in Russian).
7. Nurmagedov A. A. Asymptotic properties of polynomials $\hat{p}_n^{\alpha, \beta}(x)$, orthogonal on any sets in the case of integers α and β . *Izv. Saratov. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 2, pp. 10–19 (in Russian).
8. Baik J., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Miller P. D. *Discrete orthogonal polynomials. Asymptotics and applications*. Princeton, Princeton Univ. Press, 2007, 184 p.
9. Ou C., Wong R. The Riemann–Hilbert approach to global asymptotics of discrete orthogonal polynomials with infinite nodes. *Analysis and Applications*, 2010, vol. 8, pp. 247–286.
10. Ferreira C., López J. L., Sinusía E. P. Asymptotic relations between the Hahn-type polynomials and Meixner–Pollaczek, Jacobi, Meixner and Krawtchouk polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, vol. 217, pp. 88–109.
11. Szegő G. *Orthogonal Polynomials*. AMS Colloq. Publ, 1939, vol. 23, 154 p.
12. Bari N. K. Generalization of inequalities of S. N. Bernshtein and A. A. Markov. *Izv. AS USSR. Ser. matem.*, 1954, vol. 18, no. 2, pp. 159–176 (in Russian).
13. Konyagin S. V. V. A. Markov’s inequality for polynomials in the metric of L [О неравенстве V. A. Маркова для многочленов в метрике L]. *Trudy Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova*, 1980, no. 145, pp. 117–125 (in Russian).

УДК 517.5

ПРОЕКТИВНОЕ И ИНЪЕКТИВНОЕ ОПИСАНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

А. Б. Шишкин

Доктор физико-математических наук, профессор, Кубанский государственный университет, филиал в г. Славянске-на-Кубани, Shishkin-home@mail.ru

Исследования инвариантных подпространств дифференциальных операторов бесконечного порядка в комплексной области породили целый ряд вопросов, связанных с переходом к двойственным задачам. Настоящая работа посвящена преодолению этих трудностей.

Ключевые слова: инвариантные подпространства, спектральный синтез, локальное описание, инъективное описание, проективное описание, двойственность.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть H — произвольное локально выпуклое пространство над полем \mathbb{C} , $\pi : H \rightarrow H$ — линейный непрерывный оператор. Подпространство $W \subseteq H$ называется инвариантным относительно оператора π (далее просто инвариантным или π -инвариантным), если $\pi W \subseteq W$. Основной вопрос по отношению к произвольному замкнутому π -инвариантному подпространству $W \subseteq H$: возможно ли инъективное (внутреннее) описание этого подпространства, например, в терминах корневых подпространств оператора π ? Корневым подпространством оператора π , отвечающим собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$, называется непустое подпространство $\{x \in H : (\pi - \lambda)^n x = 0, n \in \mathbb{N}\}$. Элементы этого подпространства принято называть корневыми. Говорят, что замкнутое π -инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает спектральный синтез, если замыкание линейной оболочки корневых элементов оператора π , лежащих в W , совпадает с W . Задача спектрального синтеза для оператора π состоит в нахождении условий, при которых замкнутое π -инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает спектральный синтез.

Если H — конечномерное пространство, то любое инвариантное подпространство является прямой суммой конечного множества корневых подпространств. Из теоремы Гильберта–Шмидта о спектраль-



ном разложении самосопряженного компактного оператора в гильбертовом пространстве [1] вытекает, что любое инвариантное подпространство такого оператора является прямой суммой не более чем счетного множества корневых подпространств. Известно, что уже среди компактных операторов, действующих даже в сепарабельном гильбертовом пространстве, есть такие, которые не имеют ни одного корневого элемента. Поэтому дальнейшие исследования по спектральному синтезу связаны с изучением конкретных операторов и даже конкретных инвариантных подпространств.

Пусть Ω — открытое множество в \mathbf{C} ; $H := H(\Omega)$ — пространство функций, локально аналитических в Ω , с топологией равномерной сходимости на компактах; $\pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — целая функция минимального типа при порядке $\rho = 1$. Символом $\pi(D)$ обозначим дифференциальный оператор бесконечного порядка $\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k$ с постоянными коэффициентами. Результат действия $\pi(D)f$ оператора $\pi(D)$ на элемент $f \in H$ лежит в H . Это позволяет рассматривать $\pi(D)$ как оператор, действующий из H в H . Он является линейным и непрерывным. Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$, $\tilde{\lambda}$ — π -слой $\pi^{-1}(\lambda)$, $\zeta \in \tilde{\lambda}$. Экспоненциальный одночлен вида $\exp \zeta z$ является собственным элементом оператора $\pi(D)$ (соответствующим собственному значению λ). Алгебраический спектр оператора $\pi(D)$ совпадает с \mathbf{C} . Экспоненциальные одночлены вида $z^j \exp \zeta z$, $\zeta \in \tilde{\lambda}$ являются корневыми элементами оператора $\pi(D)$ (соответствующими собственному значению $\lambda \in \mathbf{C}$). Корневое подпространство оператора $\pi(D)$, соответствующее собственному значению $\lambda \in \mathbf{C}$, совпадает с замыканием в H подпространства, натянутого на множество всех экспоненциальных одночленов вида $z^j \exp \zeta z$, $\zeta \in \tilde{\lambda}$. Это означает, что задача спектрального синтеза для оператора $\pi(D)$ эквивалентна следующей задаче: при каких условиях, каждый элемент замкнутого $\pi(D)$ -инвариантного подпространства $W \subseteq H$ можно аппроксимировать в топологии H линейными комбинациями экспоненциальных одночленов вида $z^j \exp \zeta z$, $\zeta \in \tilde{\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{C}$, лежащими в W .

Впервые задача спектрального синтеза для оператора дифференцирования D была рассмотрена Л. Шварцем (L. Schwartz) в его известной монографии о периодических в среднем функциях [2]. С задачей спектрального синтеза для оператора D тесно связана задача спектрального синтеза для оператора, порождаемого умножением на независимую переменную. Речь идет об операторе Λ^* , сопряженном оператору $P \rightarrow P | \varphi(\lambda) \rightarrow \lambda \varphi(\lambda)$, где P — локально выпуклое пространство целых функций, с ограничением на рост. Впервые постановка задачи для оператора Λ^* и ее исследование проведены в работе В. А. Ткаченко [3]. Дальнейшие исследования по спектральному синтезу в комплексной области связаны с переходом от оператора дифференцирования к оператору кратного дифференцирования D^q . Первое исследование задачи спектрального синтеза для оператора кратного дифференцирования проведено С. Г. Мерзляковым [4]. Первое исследование $(\Lambda^q)^*$ -инвариантных подпространств проведено в работе А. Б. Шишкина [5]. В работе И. Ф. Красичкова-Терновского [6] впервые рассмотрена более общая задача — задача спектрального синтеза для дифференциального оператора $\pi(D)$ конечного порядка. В работе А. Б. Шишкина [7] инициирован случай систем $\pi_1(D), \dots, \pi_n(D)$ дифференциальных операторов конечного порядка.

Основной метод решения задач спектрального синтеза в комплексной области — *метод аннуляторных подмодулей*, развитый в работах И. Ф. Красичкова-Терновского еще в 1971 году. Этот метод предполагает переход от задачи спектрального синтеза к эквивалентной двойственной задаче — задаче локального описания подмодулей целых функций.

Первые исследования инвариантных подпространств дифференциальных операторов бесконечного порядка породили целый ряд вопросов, связанных с переходом к двойственным задачам. Настоящая работа посвящена преодолению этих трудностей.

В первом параграфе изложена схема двойственного перехода для случая: G — открытое множество в комплексной плоскости, π — произвольная локально аналитическая в G функция. Эта схема связана с общей схемой двойственности из статьи А. Б. Шишкина [8], предполагающей переход к общим задачам проективного и инъективного описаний. Во втором параграфе доказывается теорема двойственности, осуществляющая переход от задачи спектрального синтеза к задаче локального описания при тех же условиях. В частном случае эта теорема доказана ранее А. Н. Чернышевым [9]. В третьем



параграфе доказывается специальная теорема двойственности, предполагающая дополнительно, что открытое множество G допускает собственное исчерпание. В четвертом параграфе рассматриваются полиномиальные ядра и полиномиальные оболочки конечных систем (системы однородных уравнений π -свертки и π^* -свертки). Задачи проективного и инъективного описаний для них сводятся к задачам полиномиальной аппроксимации (полноты).

1. ПРОЕКТИВНОЕ И ИНЪЕКТИВНОЕ ОПИСАНИЯ

Пусть G — открытое множество в \mathbf{C} , π — локально аналитическая в G функция, Λ — полный образ $\pi(G)$. Считаем, что Λ — односвязная область. Для любого $\lambda \in \Lambda$ символом $\tilde{\lambda}$ обозначаем π -слой $\pi^{-1}(\lambda) = \{z \in G: \pi(z) = \lambda\}$, а для любого конечного множества $\omega \subseteq \tilde{\lambda}$ символом Z_ω обозначаем декартово произведение $\mathbf{Z}_+ \times \omega$, где \mathbf{Z}_+ — множество неотрицательных целых чисел. Считаем, что каждый π -слой $\tilde{\lambda}$ и декартово произведение Z_ω наделены дискретными топологиями. Значит, конечные множества и только они являются компактными в $\tilde{\lambda}$ и в Z_ω .

1.1. Пространства M_ω и N_ω . Обозначим через M_ω пространство всех комплексных функций $a = a(j, \zeta)$ на Z_ω с топологией равномерной сходимости на компактах. Пространство M_ω является рефлексивным. Обозначим через N_ω его сильное сопряженное пространство. По запасу элементов пространство N_ω совпадает с пространством всех комплексных функций $b = b(j, \zeta)$ на Z_ω с компактными носителями. Топология пространства N_ω совпадает с топологией индуктивного предела относительно вложений $N_{\omega,d} \subseteq N_\omega$, где d — компакт в Z_ω , $N_{\omega,d}$ — пространство всех комплексных функций на Z_ω , носители которых лежат в d , с топологией, порождаемой обычной \sup -нормой $\|b\|_{\omega,d} = \sup_{(j,\zeta) \in Z_\omega} |b(j, \zeta)|$. Билинейная форма, приводящая пространства M_ω и N_ω в двойственность, имеет вид

$$\langle a, b \rangle = \sum_{(j,\zeta) \in Z_\omega} a(j, \zeta) b(j, \zeta), \quad a \in M_\omega, \quad b \in N_\omega.$$

Пространство M_ω является топологической алгеброй с произведением:

$$(a_1 \times a_2)(j, \zeta) = \sum_{j=k+n} a_1(k, \zeta) a_2(n, \zeta).$$

Это позволяет рассматривать M_ω как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\bar{\pi}]$ многочленов от функции $\bar{\pi}(j, \zeta) = \frac{1}{j!} \pi^{(j)}(\zeta)$, а N_ω — как топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbf{C}[\bar{\pi}^*]$, где $\bar{\pi}^*$ — эндоморфизм N_ω , сопряженный с умножением элементов M_ω на функцию $\bar{\pi}$.

1.2. Отображения m_ω и n_ω . Пусть $O(G)$ — алгебра всех локально аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах, $O(G)^*$ — сильное сопряженное к пространству $O(G)$. Оператор умножения на функцию π является непрерывным эндоморфизмом $O(G)$, его сопряженный оператор π^* является непрерывным эндоморфизмом $O(G)^*$. Это позволяет рассматривать пространство $O(G)$ как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ многочленов от π , а пространство $O(G)^*$ — как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi^*]$ многочленов от π^* . Подмодули в $O(G)^*$ традиционно называются π^* -инвариантными подпространствами.

Рассмотрим непрерывное взаимно однозначное отображение $m_\omega: O(G) \rightarrow M_\omega$, которое каждому элементу $f \in O(G)$ ставит в соответствие функцию $\frac{1}{j!} f^{(j)}(\zeta)$, $(j, \zeta) \in Z_\omega$. Его сопряженное отображение $n_\omega: N_\omega \rightarrow O(G)^*$ является взаимно однозначным. Из равенств

$$\langle f, n_\omega(b) \rangle = \langle m_\omega(f), b \rangle = \sum_{(j,\zeta) \in Z_\omega} b(j, \zeta) \frac{1}{j!} f^{(j)}(\zeta)$$

вытекает, что отображение n_ω каждому элементу $b \in N_\omega$ ставит в соответствие сумму $\sum_{(j,\zeta) \in Z_\omega} b(j, \zeta) \delta_\zeta^{(j)}$,

где $\delta_\zeta^{(j)}$ — функционал $f \rightarrow \frac{1}{j!} f^{(j)}(\zeta)$.

По формуле Лейбница для каждого $f \in O(G)$ и $\zeta \in G$ справедливы равенства

$$\frac{1}{j!} (\pi f)^{(j)}(\zeta) = \frac{1}{j!} \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} \pi^{(j-n)}(\zeta) f^{(n)}(\zeta) = \sum_{j=k+n} \frac{1}{k!} \pi^{(k)}(\zeta) \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta).$$



Из этих равенств вытекает, что $m_\omega(\pi f) = \bar{\pi} m_\omega(f)$, т. е. отображение m_ω является модульным гомоморфизмом $O(G)$ в M_ω . Переходя к сопряженным отображениям, получаем $n_\omega(\bar{\pi}^* b) = \pi^* n_\omega(b)$ для любого $b \in N_\omega$, т. е. отображение n_ω является модульным гомоморфизмом N_ω в $O(G)^*$.

1.3. Схема двойственности. Пусть P — всюду плотное подпространство $O(G)$, наделенное отделимой локально выпуклой топологией, мажорирующей индуцированную топологию; P^* — сильное сопряженное к P . Из сделанных предположений вытекает, что пространство $O(G)^*$ можно отождествить с подпространством в P^* и говорить о непрерывном вложении $O(G)^* \subseteq P^*$.

Считаем, что пространство P является полурефлексивным. При этом предположении в силу известной теоремы о биполяре имеет место *общий принцип двойственности*: между совокупностью $\{I\}$ всех замкнутых подпространств в P и совокупностью $\{W\}$ всех замкнутых подпространств в P^* можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу ортогональности $I^0 = W$, $W^0 = I$. Здесь I^0 — аннулятор подпространства $I \subseteq P$ в пространстве P^* , а W^0 — аннулятор подпространства $W \subseteq P^*$ в пространстве P .

Выберем произвольное замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ и обозначим через W_ω максимальный замкнутый подмодуль в N_ω , образ которого при отображении n_ω лежит в W . Подмодули $W_\omega \subseteq N_\omega$, $\omega \in \tilde{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, называются *инъективными подмодулями* подпространства W . Говорят, что подпространство W *допускает инъективное описание*, если W совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на множество $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \in \tilde{\lambda}} n_\omega(W_\omega)$. Согласно принципу аппроксимации [10], для проверки того, что замкнутое подпространство W допускает инъективное описание, достаточно убедиться в выполнимости включения

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{\omega \in \tilde{\lambda}} n_\omega(W_\omega)^0 \subseteq W^0, \tag{1}$$

где $n_\omega(W_\omega)^0$, W^0 — аннуляторы в P подпространств $n_\omega(W_\omega)$ и W соответственно.

Далее, выберем произвольное замкнутое подпространство $I \subseteq P$ и обозначим I_ω минимальный замкнутый подмодуль в M_ω , включающий множество $m_\omega(I)$. Подмодули $I_\omega \subseteq M_\omega$, $\omega \in \tilde{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, будем называть *проективными подмодулями* подпространства I . Говорим, что подпространство I *допускает проективное описание*, если оно совпадает с пересечением $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{\omega \in \tilde{\lambda}} (P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega))$. Из определения проективного подмодуля I_ω вытекает включение $I \subseteq m_\omega^{-1}(I_\omega)$, значит, для проверки того, что замкнутое подпространство $I \subseteq P$ допускает проективное описание, достаточно убедиться в справедливости включения

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{\omega \in \tilde{\lambda}} (P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega)) \subseteq I. \tag{2}$$

Лемма 1. *Инъективный подмодуль $W_\omega \subseteq N_\omega$ замкнутого подпространства $W \subseteq P^*$ и проективный подмодуль $I_\omega \subseteq M_\omega$ его аннулятора $I = W^0 \subseteq P$ связаны правилом ортогональности $I_\omega^0 = W_\omega$, $W_\omega^0 = I_\omega$.*

Доказательство. Зафиксируем $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \in \tilde{\lambda}$. Рассмотрим инъективный подмодуль $W_\omega \subseteq N_\omega$ замкнутого подпространства $W \subseteq P^*$ и проективный подмодуль $I_\omega \subseteq M_\omega$ его аннулятора $I = W^0 \subseteq P$. Легко убедиться, что аннулятор W_ω^0 является замкнутым подмодулем в M_ω , а аннулятор I_ω^0 является замкнутым подмодулем в N_ω . Из определений W_ω и I_ω вытекают включения $n_\omega(W_\omega) \subseteq W$ и $m_\omega(I) \subseteq I_\omega$. По свойствам сопряженных отображений $m_\omega(W_\omega^0) \subseteq W_\omega^0$ и $n_\omega(I_\omega^0) \subseteq I^0$. В силу рефлексивности P по теореме о биполяре $W^0 = I^{00} = I$. Значит, $m_\omega(I) \subseteq W_\omega^0$ и $n_\omega(I_\omega^0) \subseteq W$. Первое из последних включений и свойство минимальности I_ω дают включение $I_\omega \subseteq W_\omega^0$, т. е. $W_\omega \subseteq I_\omega^0$. Второе включение и свойство максимальности W_ω влекут включение $I_\omega^0 \subseteq W_\omega$. Таким образом, $W_\omega = I_\omega^0$, и по теореме о биполяре $W_\omega^0 = I_\omega$. \square

Теорема 1 (схема двойственности). *Замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает инъективное описание тогда и только тогда, когда его аннулятор $I = W^0 \subseteq P$ допускает проективное описание.*

Доказательство. Предположим, что замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает инъективное описание. Нам нужно показать, что в этом случае замкнутое подпространство $I = W^0 \subseteq P$ допус-



кает проективное описание. Для этого достаточно доказать справедливость включения (2). Пусть $f \in P$ и $f \in m_\omega^{-1}(I_\omega)$ для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \in \tilde{\lambda}$. По лемме 1 $I_\omega = W_\omega^0$, значит, $m_\omega(f) \in I_\omega$ и $m_\omega(f) \in W_\omega^0$. Пусть $b \in W_\omega$, тогда $\langle f, n_\omega(b) \rangle = \langle m_\omega(f), b \rangle = 0$. Следовательно, $f \in n_\omega(W_\omega)^0$ для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \in \tilde{\lambda}$. По предположению подпространство W допускает инъективное описание. Поэтому оно совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на объединение $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \in \tilde{\lambda}} n_\omega(W_\omega)$. Следовательно, f аннулирует W , т. е. $f \in I$. Тем самым справедливость включения (2) доказана.

Обратно, пусть замкнутое подпространство $I = W^0$ допускает проективное описание. Нужно показать, что W допускает инъективное описание. Для этого достаточно доказать выполнимость включения (1). Пусть $f \in n_\omega(W_\omega)^0 \subseteq P$ и $b \in W_\omega$. Тогда $\langle m_\omega(f), b \rangle = \langle f, n_\omega(b) \rangle = 0$. Значит, $m_\omega(f) \in (W_\omega)^0$. Но $(W_\omega)^0 = I_\omega$, следовательно, $m_\omega(f) \in I_\omega$ и $f \in m_\omega^{-1}(I_\omega)$. Если включение $f \in (n_\omega(W_\omega))^0$ имеет место для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \in \tilde{\lambda}$, то и включение $f \in m_\omega^{-1}(I_\omega)$ будет выполнено для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \in \tilde{\lambda}$. Так как подпространство I допускает проективное описание, то $I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{\omega \in \tilde{\lambda}} (P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega))$, значит, будет выполнено включение $f \in I$. Что и доказывает справедливость включения (1). \square

2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ И ЛОКАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ

2.1. Спектральный синтез. Если $\lambda \in \Lambda$ и $(j, \zeta) \in \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}$, то при достаточно большом $k \in \mathbf{N}$ для любой функции $f \in O(G)$ имеем $\langle (\pi^* - \lambda)^k \delta_\zeta^{(j)}, f \rangle = \langle \delta_\zeta^{(j)}, (\pi - \lambda)^k f \rangle = 0$. Это означает, что функционал $\delta_\zeta^{(j)}$ является корневым элементом оператора π^* . Следовательно, спектр оператора π^* включает множество Λ . Если $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \Lambda$, то операция умножения $f \rightarrow (\pi - \lambda)f$ осуществляет изоморфизм $O(G)$. Поэтому сопряженная операция $s \rightarrow (\pi^* - \lambda)s$ осуществляет изоморфизм $O(G)^*$. Следовательно, точка $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \Lambda$ не лежит в спектре оператора π^* , т. е. спектр оператора π^* совпадает с Λ .

Предложение 1. Для любого $\lambda \in \Lambda$ корневое подпространство Δ_λ совпадает с линейной оболочкой множества $\{\delta_\zeta^{(j)} : (j, \zeta) \in \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}\}$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $k \in \mathbf{N}$. Из очевидного соотношения $\langle (\pi^* - \lambda)^k s, f \rangle = \langle s, (\pi - \lambda)^k f \rangle$ вытекает, что множество решений $s \in O(G)^*$ уравнения $(\pi^* - \lambda)^k s = 0$ совпадает с аннулятором идеала $I_{\lambda, k} \subseteq O(G)$, порождаемого функцией $(\pi - \lambda)^k$. Наделим множество

$$Z_{\lambda, k} = \{(j, \zeta) \in \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda} : f^{(j)}(\zeta) = 0 \forall f \in I_{\lambda, k}\}$$

дискретной топологией и обозначим через $M_{\lambda, k}$ пространство всех комплексных функций на $Z_{\lambda, k}$ с топологией компактной сходимости, а $O(G)/I_{\lambda, k}$ — фактор-пространство $O(G)$ по подпространству $I_{\lambda, k}$. отображение $m_{\lambda, k} : O(G)/I_{\lambda, k} \rightarrow M_{\lambda, k}$, которое каждому классу смежности \tilde{f} ставит в соответствие функцию $\frac{1}{j!} f^{(j)}(\zeta)$, $f \in \tilde{f}$, на $Z_{\lambda, k}$, является линейным и топологическим изоморфизмом. Сильное сопряженное к $O(G)/I_{\lambda, k}$ совпадает с аннулятором $I_{\lambda, k}^0 \subseteq O(G)^*$ идеала $I_{\lambda, k}$, наделенным индуцированной из $O(G)^*$ топологией. Сильное сопряженное к $M_{\lambda, k}$ совпадает с пространством $M_{\lambda, k}^*$ всех комплексных функций на $Z_{\lambda, k}$ с компактными носителями. отображение $m_{\lambda, k}^*$, сопряженное к $m_{\lambda, k}$, является изоморфизмом $I_{\lambda, k}^0$ и $M_{\lambda, k}^*$. Значит, для любых $f \in O(G)$ и $s \in I_{\lambda, k}^0$ справедливы соотношения

$$\langle s, f \rangle = \langle m_{\lambda, k}^*(c), \tilde{f} \rangle = \langle c, m_{\lambda, k}(\tilde{f}) \rangle = \sum_{(j, \zeta) \in Z_{\lambda, k}} c(j, \zeta) \frac{1}{j!} f^{(j)}(\zeta),$$

где $c = (m_{\lambda, k}^*)^{-1}(s) \in M_{\lambda, k}^*$. Эти соотношения показывают, что $I_{\lambda, k}^0$ совпадает с подпространством в $O(G)^*$, натянутым на множество $\{\delta_\zeta^{(j)} : (j, \zeta) \in Z_{\lambda, k}\}$. Осталось заметить, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_{\lambda, k} = \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}$. Следовательно, корневое подпространство Δ_λ совпадает с линейной оболочкой множества $\{\delta_\zeta^{(j)} : (j, \zeta) \in \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}\}$. \square

Говорим, что корневой элемент $s \in \Delta_\lambda$ погружен в подпространство $W \subseteq P^*$, если все корневые элементы $(\pi^* - \lambda)^j s$, $j = 0, 1, \dots$ лежат в W . Замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает спектральный синтез (синтез по корневым элементам оператора π^*), если оно совпадает с замыканием в P^* линейной оболочки множества корневых элементов оператора π^* , погруженных в W . *Задача*



спектрального синтеза (для оператора π^*) состоит в определении условий, при которых замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает спектральный синтез.

Рассмотрим вопрос влияния на спектральный синтез модульной структуры в P . Если P замкнуто относительно умножения на функцию π и оператор умножения на функцию π непрерывен в топологии P , то можно рассматривать пространство P как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ многочленов от π . Сужение на пространство P оператора умножения на функцию π обозначим $\tilde{\pi}$, его сопряженный оператор обозначим $\tilde{\pi}^*$. Оператор $\tilde{\pi}^*$, вообще говоря, имеет свой запас корневых элементов и, следовательно, порождает свою задачу спектрального синтеза. Однако при выполнении аксиомы устойчивости (относительно деления на $\pi - \lambda$)

$$f \in P, \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad \frac{f}{\pi - \lambda} \in O(G) \quad \implies \quad \frac{f}{\pi - \lambda} \in P$$

эта задача эквивалентна задаче спектрального синтеза для оператора π^* . Это вытекает из следующих предложений.

Предложение 2. Спектр $\tilde{\Lambda}$ оператора $\tilde{\pi}^* : P^* \rightarrow P^*$ совпадает со спектром Λ оператора $\pi^* : O(G)^* \rightarrow O(G)^*$.

Доказательство. Прежде всего, из включения $O^*(G) \subseteq P^*$ вытекает включение $\Lambda \subseteq \tilde{\Lambda}$. Допустим, что существует ненулевое $s \in P^*$, удовлетворяющее уравнению $(\tilde{\pi}^* - \lambda)s = 0$ при $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \Lambda$. Тогда $\langle s, (\tilde{\pi} - \lambda)f \rangle = 0$ для любого $f \in P$. Таким образом, s аннулирует любой элемент вида $(\tilde{\pi} - \lambda)f$, $f \in P$. Из аксиомы устойчивости вытекает, что s аннулирует любой элемент из P вида $(\pi - \lambda)f$, $f \in O(G)$, т.е. s аннулирует P , значит, $s = 0$. Это противоречие и доказывает, что $\Lambda = \tilde{\Lambda}$. \square

Предложение 3. Корневое подпространство $\tilde{\Delta}_\lambda$ оператора $\tilde{\pi}^*$, соответствующее собственному значению $\lambda \in \Lambda$, совпадает с замыканием $\overline{\Delta_\lambda}$ в P^* корневого подпространства Δ_λ оператора π^* .

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Lambda$, $s \in P^*$, $f \in P$ и $\langle (\tilde{\pi}^* - \lambda)^k s, f \rangle = 0$. Из соотношения $\langle (\tilde{\pi}^* - \lambda)^k s, f \rangle = \langle s, (\tilde{\pi} - \lambda)^k f \rangle$ и аксиомы устойчивости вытекает, что множество решений $s \in P^*$ уравнения $\langle (\tilde{\pi}^* - \lambda)^k s, f \rangle = 0$ совпадает с аннулятором $(P \cap I_{\lambda,k})^0 \subseteq P^*$, где $I_{\lambda,k}$ — идеал в $O(G)$, порождаемый функцией $(\pi - \lambda)^k$. При этом $(P \cap I_{\lambda,k})^0 = \overline{I_{\lambda,k}^0}$, где $\overline{I_{\lambda,k}^0}$ — замыкание в P^* аннулятора $I_{\lambda,k}^0 \subseteq O(G)$ идеала $I_{\lambda,k}$. Выше показано, что $I_{\lambda,k}^0$ совпадает с подпространством в $O(G)^*$, натянутым на множество $\{\delta_\zeta^{(j)} : (j, \zeta) \in Z_{\lambda,k}\}$. Следовательно, $\tilde{\Delta}_\lambda$ совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на множество $\{\delta_\zeta^{(j)} : (j, \zeta) \in \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}\}$, т.е. $\tilde{\Delta}_\lambda = \overline{\Delta_\lambda}$. \square

Если P обладает структурой топологического модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то P^* обладает структурой топологического модуля над кольцом $\mathbf{C}[\tilde{\pi}^*]$. Замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$, допускающее спектральный синтез по корневым элементам оператора $\tilde{\pi}^*$, является инвариантным подпространством (подмодулем) в P^* . Корневой элемент s оператора $\tilde{\pi}^*$ погружен в инвариантное подпространство W тогда и только тогда, когда он принадлежит W . Следовательно, замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$, допускающее спектральный синтез по корневым элементам оператора $\tilde{\pi}^*$, совпадает с замыканием в P^* линейной оболочки множества корневых элементов оператора π^* , принадлежащих W .

2.2. Спектральный синтез и инъективное описание. Выберем произвольное замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ и обозначим через W' подпространство

$$\{s \in O(G)^* : r^* s \in W \text{ для любых } r^* \in \mathbf{C}[\pi^*]\}.$$

Замечаем, что

- W' — максимальное инвариантное подпространство $O(G)^*$, лежащее в W . Действительно, пусть V — инвариантное подпространство $O(G)^*$ и $V \subseteq W$. Но тогда для любых $s \in V$ и $r^* \in \mathbf{C}[\pi^*]$ будет выполнено включение $r^* s \in V \subseteq W$, значит, $s \in W'$ и $V \subseteq W'$. Кроме того,
- W' — замкнутое подпространство $O(G)^*$.

Действительно, пусть V — замыкание подпространства W' в $O(G)^*$. Так как W' — инвариантное подпространство $O(G)^*$, а модуль $O(G)^*$ является топологическим, то V — инвариантное подпространство $O(G)^*$. Из непрерывности вложения $O(G)^* \subseteq P^*$ вытекает, что $V \subseteq W$. Из свойства максимальности подпространства W' следует включение $V \subseteq W'$, т.е. $V = W'$.



Лемма 2. *Инъективный подмодуль W_ω замкнутого подпространства $W \subseteq P^*$ совпадает с прообразом $n_\omega^{-1}(W')$.*

Доказательство. Действительно, отображение n_ω является модульным гомоморфизмом, значит, $n_\omega^{-1}(W')$ — замкнутый подмодуль в N_ω и его образ $n_\omega(n_\omega^{-1}(W'))$ лежит в W . По определению W_ω имеем $n_\omega^{-1}(W') \subseteq W_\omega$. С другой стороны, по определению инъективного подмодуля W_ω образ $n_\omega(W_\omega)$ является инвариантным подпространством $O(G)^*$ и лежит в W . По свойству максимальности W' имеем $n_\omega(W_\omega) \subseteq W'$ и $W_\omega \subseteq n_\omega^{-1}(W')$. Отсюда вытекает, что

$$W_\omega = n_\omega^{-1}(W'). \quad (3)$$

Лемма доказана. \square

Предложение 4. *Замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает инъективное описание тогда и только тогда, когда оно допускает спектральный синтез.*

Доказательство. Для произвольных $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \in \tilde{\lambda}$ обозначим через Δ_ω линейную оболочку множества $\{\delta_\zeta^{(j)} : (j, \zeta) \in Z_\omega\}$. Замечаем, что $\bigcup_{\omega \in \tilde{\lambda}} Z_\omega = \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}$, значит, корневое подпространство Δ_λ совпадает с линейной оболочкой множества $\bigcup_{\omega \in \tilde{\lambda}} \Delta_\omega$. Из (3) вытекает, что замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает инъективное описание, тогда и только тогда, когда оно совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на множество

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \in \tilde{\lambda}} n_\omega(W_\omega) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \in \tilde{\lambda}} n_\omega(n_\omega^{-1}(W')).$$

Замечаем, что образ $n_\omega(N_\omega)$ совпадает с Δ_ω . Значит, $n_\omega^{-1}(W') = n_\omega^{-1}(W' \cap \Delta_\omega)$ и $n_\omega(n_\omega^{-1}(W')) = W' \cap \Delta_\omega$. Следовательно, замкнутое подпространство $W \subseteq P^*$ допускает инъективное описание, тогда и только тогда, когда оно совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на множество

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \in \tilde{\lambda}} (W' \cap \Delta_\omega) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (W' \cap \Delta_\lambda),$$

т. е. допускает спектральный синтез по корневым элементам оператора π^* . Предложение доказано. \square

2.3. Локальное описание. Выберем $\lambda \in \Lambda$, $\omega \in \tilde{\lambda}$ и обозначим: $O(\omega)$ — кольцо ростков функций, локально аналитических в точках множества ω , $O_\pi(\omega)$ — подкольцо $O(\omega)$, состоящее из ростков вида $f \circ \pi$, $f \in O(\omega)$. Легко увидеть, что кольцо $O_\pi(\omega)$ изоморфно кольцу $O(\lambda)$ ростков функций, аналитических в точке λ . Рассматриваем $O(\omega)$ как модуль над кольцом $O_\pi(\omega)$.

Введем в $O(\omega)$ отделимую локально выпуклую топологию, порожденную счетным набором полунорм $u \rightarrow \frac{1}{j!} |u^{(j)}(\zeta)|$, $(j, \zeta) \in Z_\omega$. Легко проверить, что произведение элементов $O(\omega)$ на элементы кольца $O_\pi(\omega)$ непрерывно в топологии $O(\omega)$, следовательно, $O_\pi(\omega)$ -модуль $O(\omega)$ является топологическим.

Предложение 5. *Любой подмодуль в $O_\pi(\omega)$ -модуле $O(\omega)$ замкнут в топологии $O(\omega)$.*

Доказательство. По предложению 2 из [11, гл. V, С] существует окрестность U множества ω такая, что сужение π_U отображения π на множество U является собственным отображением на некоторое открытое множество $V \subseteq \mathbf{C}$. Следовательно, тройка (U, π_U, V) — аналитическое накрытие [11, гл. III, В, теорема 21]. При этом можно считать, что слой $\pi_U^{-1}(\lambda) \subseteq \tilde{\lambda}$ совпадает с ω . Точка λ может оказаться критической точкой накрытия (U, π_U, V) , однако все другие точки из V мы вправе считать простыми. Число точек в простых слоях накрытия (U, π_U, V) обозначим ν . Пусть $O^\nu(\lambda)$ — декартово произведение ν копий кольца $O(\lambda)$. Топологизируем $O^\nu(\lambda)$ с помощью счетного набора полунорм $v = (v_0, \dots, v_{p-1}) \rightarrow \frac{1}{j!} |v_i^{(j)}(\lambda)|$, каждая из которых определяется выбором точки (j, i) из декартова произведения $\mathbf{Z}_+ \times \{0, \dots, \nu - 1\}$, и рассматриваем $O^\nu(\lambda)$ как топологический модуль над кольцом $O(\lambda)$. По лемме 3 из [8] любой элемент $u \in O(\omega)$ единственным образом представляется в виде

$$u = \sum_{i=0}^{p-1} z^i u_i, \quad u_i \in O_\pi(\omega).$$



Это представление определяет отображение

$$\sigma_{\lambda, \omega} : O(\omega) \rightarrow O^\nu(\lambda)|u \rightarrow (v_0, \dots, v_{p-1}),$$

где v_i определяется однозначно из соотношения $u_i = v_i \circ \pi_U$. Отображение $\sigma_{\lambda, \omega}$ является модульным изоморфизмом. Используя правило для нахождения производной сложной функции и предельный переход по $\xi \rightarrow \lambda$, если точка λ является критической точкой накрытия (U, π_U, V) , можно убедиться в том, что отображение $\sigma_{\lambda, \omega}$ является и топологическим изоморфизмом. В силу векторного варианта [12, теорема 6.3.5] леммы Круля [10] всякий подмодуль топологического $O(\lambda)$ -модуля $O^\nu(\lambda)$ замкнут. В силу непрерывности отображения $\sigma_{\lambda, \omega}$ любой подмодуль в $O_\pi(\omega)$ -модуле $O(\omega)$ замкнут. Лемма доказана. \square

Пусть I — подпространство в P , $\omega \in \tilde{\lambda}$. Обозначим $I(\omega)$ подмодуль $O(\omega)$, порождаемый I . Отметим, что согласно определению подмодуль $I(\omega)$ исчерпывается элементами $O(\omega)$, допускающими представление в виде конечной комбинации $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$, где $a_j \in O_\pi(\omega)$, $f_j \in I$. Подмодуль $I(\omega) \subseteq O(\omega)$ называется *локальным подмодулем* I (ассоциированным с ω). Подпространство I допускает локальное описание (описание по семейству $O_\pi(\omega)$ -модулей $O(\omega)$, $\omega \in \tilde{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$), если оно совпадает с пересечением $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{\omega \in \tilde{\lambda}} (P \cap I(\omega))$.

2.4. Локальное описание и проективное описание. Пусть I — замкнутое подпространство в P , $I[\pi]$ — подмодуль в $O(G)$, порождаемый I , I' — замкнутый подмодуль в $O(G)$, порождаемый I . Согласно определению подмодуль I' совпадает с замыканием $I[\pi]$ в топологии $O(G)$ и является минимальным замкнутым подмодулем в $O(G)$, содержащим I .

Лемма 3. *Проективный подмодуль I_ω подпространства $I \subseteq P$ совпадает с замыканием $\overline{m_\omega(I')}$ образа $m_\omega(I')$ в топологии M_ω .*

Доказательство. Действительно, так как $I \subseteq I'$, то $m_\omega(I) \subseteq m_\omega(I') \subseteq \overline{m_\omega(I')}$. При этом $\overline{m_\omega(I')}$ является замкнутым подмодулем в M_ω . По определению I_ω имеем $I_\omega \subseteq \overline{m_\omega(I')}$. С другой стороны, если $a \in m_\omega(I')$, то $m_\omega^{-1}(a) \in I'$. Значит, существует последовательность $f_n \in I[\pi]$, сходящаяся к $m_\omega^{-1}(a)$ в топологии пространства $O(G)$. В силу непрерывности отображения m_ω последовательность $m_\omega(f_n) \in I_\omega$ сходится к a в топологии M_ω . Следовательно, $m_\omega(I') \subseteq I_\omega$ и $\overline{m_\omega(I')} \subseteq I_\omega$. Таким образом,

$$I_\omega = \overline{m_\omega(I')}. \tag{4}$$

Лемма доказана. \square

Предложение 6. *Замкнутое подпространство $I \subseteq P$ допускает локальное описание тогда и только тогда, когда оно допускает проективное описание.*

Доказательство. отождествим элементы пространства $O(G)$ с порождаемыми ими ростками из $O(\omega)$. Получаем возможность говорить о вложении $O(G)$ в $O(\omega)$. Убедимся, что подмодуль $I(\omega)$ совпадает с замыканием $\overline{I'}$ подмодуля I' в топологии $O(\omega)$. Действительно, так как вложение $O(G) \subseteq O(\omega)$ является непрерывным, то замыкание $I[\pi]$ в топологии $O(\omega)$ совпадает с замыканием I' в этой топологии. При этом $I[\pi] \subseteq I(\omega)$, значит, $\overline{I'} = \overline{I[\pi]} \subseteq \overline{I(\omega)}$. Но по предложению 5 $\overline{I(\omega)} = I(\omega)$. Следовательно, $\overline{I'} \subseteq I(\omega)$. Докажем выполнимость обратного включения $I(\omega) \subseteq \overline{I'}$. Пусть $u \in I(\omega)$. В некоторой окрестности множества ω элемент u допускает представление в виде конечной суммы $\sum c_n u_n$, где $c_n = C_n \circ \pi$, C_n — голоморфны в некоторой окрестности точки λ , $u_n \in I$. Обозначим через $c_n^{(k)}$ композицию $C_n^{(k)} \circ \pi$, где $C_n^{(k)}$ — частичная суммы разложения C_n в степенной ряд в окрестности точки λ . Так как $c_n^{(k)} \in \mathbf{C}[\pi]$, то $u^{(k)} = \sum c_n^{(k)} u_n \in I'$. Легко проверить, что последовательность $u^{(k)}$ сходится к u в топологии $O(\omega)$. Отсюда вытекает, что u принадлежит замыканию $\overline{I'}$ подмодуля I' в топологии $O(\omega)$. Значит, $I(\omega) \subseteq \overline{I'}$. Таким образом, доказано, что $I(\omega) = \overline{I'}$. Пусть $\eta_\omega : O(G) \rightarrow O(\omega)$ — отображение вложения. Тогда

$$I(\omega) = \overline{\eta_\omega(I')}. \tag{5}$$

Наконец, пусть μ_ω — отображение $O(\omega) \rightarrow M_\omega$, которое каждому ростку $u \in O(\omega)$ ставит в соответствие комплексную функцию $a(j, \zeta) = \frac{1}{j!} u^{(j)}(\zeta)$, определенную на множестве Z_ω . Отображения η_ω ,



μ_ω являются взаимно однозначными, и, кроме того, отображение μ_ω есть топологический изоморфизм $O(\omega)$ на полный образ $M'_\omega = \mu_\omega(O(\omega))$ с топологией, индуцированной из M_ω . Из очевидного соотношения $m_\omega = \mu_\omega \circ \eta_\omega$ следует, что $\eta_\omega = \mu_\omega^{-1} \circ m_\omega$ и $\eta_\omega^{-1} = m_\omega^{-1} \circ \mu_\omega$. Из (5) вытекает, что

$$\eta_\omega^{-1}(I(\omega)) = m_\omega^{-1} \circ \mu_\omega(I(\omega)) = m_\omega^{-1} \circ \mu_\omega(\overline{\eta_\omega(I')}).$$

Но отображение μ_ω есть топологический изоморфизм $O(\omega)$ на M'_ω , значит,

$$m_\omega^{-1} \circ \mu_\omega(\overline{\eta_\omega(I')}) = m_\omega^{-1}(\overline{\mu_\omega \circ \eta_\omega(I')}) = m_\omega^{-1}(\overline{m_\omega(I')}).$$

Из (4) получаем $\eta_\omega^{-1}(I(\omega)) = m_\omega^{-1}(I_\omega)$. Осталось заметить, что $P \cap I(\omega) = P \cap \eta_\omega^{-1}(I(\omega)) = P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega)$. Предложение доказано. \square

2.5. Теорема двойственности. Пусть W — замкнутое подпространство в P^* , I — аннулятор W^0 подпространства W в P .

Теорема 2 (теорема двойственности). *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) W допускает спектральный синтез,
- 2) W допускает инъективное описание,
- 3) I допускает проективное описание,
- 4) I допускает локальное описание.

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 2) следует из предложения 4. Эквивалентность утверждений 3) и 4) следует из предложения 6. Эквивалентность утверждений 2) и 3) следует из схемы двойственности. Теорема доказана. \square

3. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ

Для любого множества $V \subseteq \mathbf{C}$ прообраз $\pi^{-1}(V)$ совпадает с множеством $\{z \in G : \pi(z) \in V\}$. Множество $U \subseteq G$ будем называть π -симметричным, если $U = \pi^{-1}(\pi(U))$. По свойствам прообразов совокупность $\{U\}$ всех открытых π -симметричных подмножеств G образует топологию τ_π . Множество G и пустое множество являются π -симметричными, т. е. $\emptyset, G \in \tau_\pi$.

3.1. π -симметричные представления. Функцию f , заданную на π -симметричном множестве U , будем называть π -симметричной, если она представляется в виде композиции $g \circ \pi$, где g — некоторая локально голоморфная на $\pi(U)$ функция. Совокупность $O_\pi(U)$ всех π -симметричных на U функций образует кольцо, которое, очевидно, является подкольцом кольца $O(U)$ всех функций, локально голоморфных на U . При этом совокупность $\{O(U)\}$ вместе с гомоморфизмами сужения образует предпучок колец над (G, τ_π) . Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $\tilde{\lambda} = \{z \in G : \pi(z) = \lambda\}$. Слой предпучка $\{O(U)\}$ в точке $z \in \tilde{\lambda}$ совпадает с кольцом $O(\tilde{\lambda})$ и не зависит от выбора точки $z \in \tilde{\lambda}$. С другой стороны, совокупность $\{O_\pi(U)\}$ вместе с гомоморфизмами сужения тоже образует предпучок колец над (G, τ_π) . Слой этого предпучка в точке $z \in \tilde{\lambda}$ совпадает с кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$.

Выделение класса π -симметричных функций связано со специальными представлениями локально аналитических на G функций. Предположим, что функция π осуществляет собственное отображение G на Λ . По свойствам собственных голоморфных отображений тройка (G, π, Λ) является *аналитическим накрытием*: существует замкнутое дискретное множество $\sigma \subset \Lambda$ такое, что сужение π на $G \setminus \pi^{-1}(\sigma)$ является локально биголоморфным ν -листным накрытием над $\Lambda \setminus \sigma$. Точки $\lambda \in \Lambda \setminus \sigma$ называются *обыкновенными*, а соответствующие им π -слои $\tilde{\lambda}$ — *простыми*. Простые π -слои состоят из ν различных точек. Упорядочение простого π -слоя удобно записывать в виде конечной последовательности $z_0, \dots, z_{\nu-1}$. Элементы этой последовательности зависят от точки $\lambda \in \Lambda \setminus \sigma$. При этом отображения $\lambda \rightarrow z_k(\lambda)$, $k = 0, \dots, \nu - 1$, аналитичны в окрестности каждой обыкновенной точки (и зависят от выбора этой точки).

Пусть $z \in G \setminus \pi^{-1}(\sigma)$, $z_0, \dots, z_{\nu-1}$ — упорядочение простого π -слоя, содержащего z . Выберем произвольный элемент $f \in O(G)$ и рассмотрим функцию $f_k(z) = \frac{\Delta_k(f)}{\Delta}$, где $\Delta = \prod_{0 \leq k < j < \nu-1} (z_j - z_k) -$



определитель Вандермонда, $\Delta_k(f)$ — определитель, полученный заменой k -го столбца в определителе Δ на столбец из $f(z_0), \dots, f(z_{\nu-1})$. Функция f_k является аналитической в точках из $G \setminus \pi^{-1}(\sigma)$. Легко убедиться (см [6, предложение 2.3]), что она допускает однозначное аналитическое продолжение до функции голоморфной в G и представляет элемент кольца $O_\pi(G)$. Отсюда вытекает, что любая функция $f \in O(G)$ единственным образом представляется в виде

$$f = \sum_{k=0}^{\nu-1} z^k f_k, \quad f_k \in O_\pi(G). \tag{6}$$

Действительно, согласно известным свойствам определителей на декартовой степени G^ν имеют место тождества $f(z_j)\Delta \equiv \sum_{k=0}^{\nu-1} z_j^k \Delta_k(f)$, $j = 0, \dots, \nu - 1$. Так как $\Delta \neq 0$ и $z \in \{z_0, \dots, z_{\nu-1}\}$, то $f(z) = \sum_{k=0}^{\nu-1} z^k f_k(z)$, где $f_k = \frac{\Delta_k(f)}{\Delta} \in O_\pi(G)$. Единственность представления (6) следует из того, что соотношения $f(z_j) = \sum_{k=0}^{\nu-1} z_j^k f_k(z_j)$, $j = 0, \dots, \nu - 1$, определяют значения $f^{(k)}(z_j)$ однозначно.

Выберем произвольную точку $\lambda \in \Lambda$. Легко убедиться, что существует фундаментальная система $\{U_j\}$ π -симметричных окрестностей слоя $\tilde{\lambda}$. При этом тройки $(U, \pi, \pi(U))$, $U \in \{U_j\}$, являются аналитическими накрытиями. Это дает возможность переписать представление (6) в локальной форме. Точнее, любой элемент $u \in O(\tilde{\lambda})$ единственным образом представляется в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\nu} z^k u_k, \quad u_k \in O_\pi(\tilde{\lambda}). \tag{7}$$

Если $\lambda \in \Lambda \setminus \sigma$, то росток u_k порожден отношением $\Delta_k(f)/\Delta$, $f \in u$, если же $\lambda \in \sigma$, то росток u_k порожден аналитическим продолжением этого отношения в точки множества $\tilde{\lambda}$.

3.2. Модульные изоморфизмы. Из представления (6) вытекает, что отображение

$$\chi_G : O^\nu(\Lambda) \rightarrow O(G) \Big| (\varphi_k) \rightarrow \sum_{k=1}^{\nu} z^k (\varphi_k \circ \pi),$$

где $O^\nu(\Lambda)$ — декартова степень $O(\Lambda)$, является биективным. Пусть $\lambda \in \Lambda$; $O(\lambda)$ — кольцо ростков функций, голоморфных в окрестностях λ ; $O^\nu(\lambda)$ — декартова степень $O(\lambda)$. Из представления (7) вытекает, что отображение χ_G распространяется (с сохранением биективности) на локальные объекты

$$\chi_{\tilde{\lambda}} : O^\nu(\lambda) \rightarrow O(\tilde{\lambda}) \Big| (v_k) \rightarrow \sum_{k=1}^{\nu} z^k (v_k \circ \pi).$$

Наделяем $O(\Lambda)$ топологией равномерной сходимости на компактах; $O(\lambda)$ — топологией, порождаемой полунормами $u \rightarrow \frac{1}{j!} |u^{(j)}(\lambda)|$, $j \in \mathbf{Z}_+$; $O(\tilde{\lambda})$ — топологией, порождаемой полунормами $v \rightarrow \frac{1}{j!} |v^{(j)}(z)|$, $(j, z) \in \mathbf{Z}_+ \times \tilde{\lambda}$; $O^\nu(\Lambda)$ и $O^\nu(\lambda)$ — топологиями произведения. Рассматриваем $O^\nu(\Lambda)$ — как модуль над кольцом многочленов $\mathbf{C}[z]$, $O(\tilde{\lambda})$ — как модуль над кольцом $O_\pi(\tilde{\lambda})$, $O^\nu(\lambda)$ — как модуль над кольцом $O(\lambda)$. Легко убедиться, что все указанные модули являются топологическими. Отображение χ_G осуществляет алгебраический и топологический изоморфизм $\mathbf{C}[z]$ -модуля $O^\nu(\Lambda)$ и $\mathbf{C}[\pi]$ -модуля $O(G)$, а отображение χ_ζ осуществляет алгебраический и топологический изоморфизм $O(\lambda)$ -модуля $O^\nu(\lambda)$ и $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуля $O(\tilde{\lambda})$. При этом для любого $\varphi \in O^\nu(\Lambda)$ выполняется соотношение

$$\eta_{\tilde{\lambda}}(\chi_G(\varphi)) = \chi_{\tilde{\lambda}}(\vartheta_\lambda(\varphi)), \tag{8}$$

где $\vartheta_\lambda, \eta_{\tilde{\lambda}}$ — это отображения вложения $O^\nu(\Lambda) \rightarrow O^\nu(\lambda)$, $O(G) \rightarrow O(\tilde{\lambda})$ соответственно. Из этого соотношения, в свою очередь, вытекает, что для любого $v \in \vartheta_\lambda(O^\nu(\Lambda)) \subset O^\nu(\lambda)$ выполняется соотношение

$$\chi_G(\vartheta_\lambda^{-1}(v)) = \eta_{\tilde{\lambda}}^{-1}(\chi_\lambda(v)). \tag{9}$$



3.3. Закрытые подмодули в $O(G)$. Локально выпуклая алгебра $O(\Lambda)$ является равномерно устойчивой: для любой окрестности нуля $V \subseteq O(\Lambda)$ существует окрестность нуля $U \subseteq O(\Lambda)$ такая, что справедлива импликация

$$f \in U, \quad \lambda \in \Lambda, \quad \frac{f(z)}{z - \lambda} \in O(\Lambda) \quad \implies \quad \frac{f(z)}{z - \lambda} \in V.$$

Действительно, для любого $f \in O(\Lambda)$ и любого компакта $K \Subset \Lambda$ имеем:

$$\max_{z \in K} \left| \frac{f(z)}{z - \lambda} \right| \leq \frac{2}{\varepsilon} \max_{z \in K_\varepsilon} |f(z)|,$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(K, \partial\Lambda)$, $K_\varepsilon = \{z : \rho(z, K) \leq \varepsilon\} \Subset \Lambda$.

Равномерно устойчивые алгебры изучались ранее. Известно, например, что любой замкнутый подмодуль в $O(\Lambda)$ -модуле $O^\nu(\Lambda)$ допускает описание по семейству $O(\lambda)$ -модулей $O^\nu(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ [13, предложение 6.13]. В частности, любой замкнутый идеал в алгебре $O(\Lambda)$ допускает описание по семейству локальных колец $O(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ [13, предложение 6.11]. Построенные выше модульные изоморфизмы позволяют извлечь из этого следующее предложение.

Предложение 7. *Если отображение $\pi : G \rightarrow \Lambda$ является собственным, то всякий замкнутый подмодуль в $O(G)$ допускает локальное описание.*

Доказательство. Пусть I — замкнутый подмодуль в $O(G)$. Прообраз $J = \chi_G^{-1}(I)$ является замкнутым подмодулем в $\mathbf{C}[z]$ -модуле $O^\nu(\Lambda)$. Так как многочлены плотны в $O(\Lambda)$, то J — замкнутый подмодуль в $O(\Lambda)$ -модуле $O^\nu(\Lambda)$. По предложению 6.13 из [13] J совпадает с пересечением $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \vartheta_\lambda^{-1}(J(\lambda))$, где $J(\lambda)$ — подмодуль $O(\lambda)$ -модуля $O^\nu(\lambda)$, порождаемый $\vartheta_\lambda(J)$. Локальный подмодуль $J(\lambda)$ состоит из всевозможных конечных комбинаций $b_1\vartheta_\lambda(\varphi_1) + \dots + b_n\vartheta_\lambda(\varphi_n)$, $b_j \in O(\lambda)$, $\varphi_j \in I$. В силу соотношения (8)

$$\chi_{\tilde{\lambda}}(b_1\vartheta_\lambda(\varphi_1) + \dots + b_n\vartheta_\lambda(\varphi_n)) = c_1\eta_{\tilde{\lambda}}(f_1) + \dots + c_n\eta_{\tilde{\lambda}}(f_n),$$

где $c_j = b_j \circ \pi$, $f_j = \chi_G(\varphi_j)$. Значит, для любого $\lambda \in \Lambda$ локальные подмодули $I(\tilde{\lambda})$ и $J(\lambda)$ связаны очевидным соотношением $I(\tilde{\lambda}) = \chi_{\tilde{\lambda}}(J(\lambda))$. При этом $I = \chi_G(J)$. Отсюда и соотношения (9) вытекает, что

$$I = \chi_G(J) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \chi_G(\vartheta_\lambda^{-1}(J(\lambda))) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \eta_{\tilde{\lambda}}^{-1}(\chi_{\tilde{\lambda}}(J(\lambda))) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \eta_{\tilde{\lambda}}^{-1}(I(\tilde{\lambda})).$$

Предложение доказано. □

3.4. Собственные исчерпания. Говорим, что открытое множество G допускает собственное исчерпание, если существуют открытые множества $G^{(n)} \subseteq \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям:

- $G^{(1)} \subseteq G^{(2)} \subseteq \dots \subseteq G$;
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} G^{(n)} = G$;
- сужение π на каждое множество $G^{(n)}$ является собственным отображением на некоторую односвязную область $\Lambda^{(n)} = \pi(G^{(n)})$.

Если G допускает собственное исчерпание, то $\Lambda^{(1)} \subseteq \Lambda^{(2)} \subseteq \dots \subseteq \Lambda$, $\Lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda^{(n)}$. При этом, как легко убедиться, Λ — односвязная область в \mathbf{C} .

Ослабим начальные условия на выбор функции π и не будем предполагать, что отображение $\pi : G \rightarrow \Lambda$ является собственным, но предположим, что множество G допускает собственное исчерпание. Обозначим через $O(G^{(n)})$ пространство локально аналитических на $G^{(n)}$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Понятно, что имеют место непрерывные вложения $O(G^{(1)}) \supseteq O(G^{(2)}) \supseteq \dots \supseteq O(G^{(n)})$ и $O(G^{(n)}) = \bigcap_{m=1}^{\infty} O(G^{(m)})$. Пусть I — замкнутый подмодуль в $O(G)$, $I^{(n)}$ — замыкание I в $O(G^{(n)})$. Пространство $O(G^{(n)})$ обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, $I^{(n)}$ — замкнутый подмодуль в $O(G^{(n)})$. Из определения подмодулей $I^{(n)}$ вытекает, что $I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^{(n)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (O(G) \cap I^{(n)})$. Из предложения 7 и предложения 6 вытекает, что подмодуль $I^{(n)} \subseteq O(G^{(n)})$ допускает проективное описание. Это означает, что

$$I^{(n)} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda^{(n)}} \bigcap_{\omega \in \tilde{\Lambda}^{(n)}} \left(m_\omega^{(n)} \right)^{-1} \left(I_\omega^{(n)} \right),$$



где $\tilde{\lambda}^{(n)} = \tilde{\lambda} \cap G^{(n)}$, $m_\omega^{(n)}$ — отображение $O(G^{(n)}) \rightarrow M_\omega$, которое каждому элементу $f \in O(G^{(n)})$ ставит в соответствие функцию $\frac{1}{j!} f^{(j)}(\zeta)$, $(j, \zeta) \in Z_\omega$, $I_\omega^{(n)}$ — проективный подмодуль $I^{(n)}$ в M_ω . Значит,

$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} (O(G) \cap I^{(n)}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\lambda \in \Lambda^{(n)}} \bigcap_{\omega \in \tilde{\lambda}^{(n)}} \left(O(G) \cap \left(m_\omega^{(n)} \right)^{-1} \left(I_\omega^{(n)} \right) \right).$$

Осталось заметить, что $O(G) \cap \left(m_\omega^{(n)} \right)^{-1} \left(I_\omega^{(n)} \right) = m_\omega^{-1} \left(I_\omega^{(n)} \right)$, а в силу (4) $I_\omega^{(n)} = \overline{m_\omega(I^{(n)})} = I_\omega$. Следовательно,

$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\lambda \in \Lambda^{(n)}} \bigcap_{\omega \in \tilde{\lambda}^{(n)}} m_\omega^{-1} \left(I_\omega \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{\omega \in \tilde{\lambda}} m_\omega^{-1} \left(I_\omega \right).$$

Таким образом, нами доказано следующее предложение.

Предложение 8. Если открытое множество G допускает собственное исчерпание, то всякий замкнутый подмодуль в $O(G)$ допускает проективное описание.

3.5. Специальная теорема двойственности. Пусть I — замкнутое подпространство P ; I' — замкнутый подмодуль в $O(G)$, порождаемый I ; W — аннулятор I в P^* ; $W' = \{s \in O(G)^* : r^*s \in W, \forall r^* \in \mathbf{C}[\pi^*]\}$; $\overline{W'}$ — замыкание W' в топологии P^* .

Лемма 4. Подмодуль $I' \subseteq O(G)$ и инвариантное подпространство $W' \subseteq O(G)^*$ связаны правилом ортогональности $W' = (I')^0$, $I' = (W')^0$.

Доказательство. Из определений W' и I' вытекают включения $\kappa(W') \subseteq W$ и $\kappa^*(I) \subseteq I'$, где κ — отображение вложения $P \subseteq O(G)$, κ^* — его сопряженное отображение (отображение вложения $H^* \subseteq O(G)^*$). По свойствам аннуляторов $\kappa(W^0) \subseteq (W')^0$ и $\kappa^*((I')^0) \subseteq I^0$. По теореме о биполяре $W^0 = I^{00} = I$. Значит, $\kappa(I) \subseteq (W')^0$ и $\kappa^*((I')^0) \subseteq W$. Первое из последних включений и свойство минимальности I' дают включение $I' \subseteq (W')^0$, т. е. $W' \subseteq (I')^0$. Второе включение и свойство максимильности W' влекут включение $(I')^0 \subseteq W'$. Таким образом, $W' = (I')^0$, а по теореме о биполяре $I' = (W')^0$. \square

Теорема 3. Если открытое множество G допускает собственное исчерпание, то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) I допускает локальное описание;
- 2) I допускает проективное описание;
- 3) $I = P \cap I'$;
- 4) $W = \overline{W'}$;
- 5) W допускает инъективное описание;
- 6) W допускает спектральный синтез.

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1), 2), 5) и 6) вытекает из теоремы двойственности.

Убедимся в эквивалентности утверждений 2) и 3). Предположим, что подпространство I допускает проективное описание и $f \in P \cap I'$. Тогда в силу (4) $m_\omega(f) \in m_\omega(I') \subseteq I_\omega$ и $f \in P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega)$ для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \in \tilde{\lambda}$. Значит, $f \in I$. Таким образом, доказано включение $P \cap I' \subseteq I$. Так как обратное включение, очевидно, выполнено, то $I = P \cap I'$. Обратно. Пусть $f \in P \cap m_\omega^{-1}(I_\omega)$ для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \in \tilde{\lambda}$. Из (4) вытекает, что проективные подмодули I_ω и I'_ω совпадают. Следовательно, $f \in m_\omega^{-1}(I'_\omega)$ для любых $\lambda \in \Lambda$ и $\omega \in \tilde{\lambda}$. По предложению 8 подмодуль I' допускает проективное описание. Значит, $f \in I'$ и $f \in P \cap I'$. Из равенства $I = P \cap I'$ вытекает, что $f \in I$. Это означает, что подмодуль I допускает проективное описание.

Далее убедимся в эквивалентности утверждений 4) и 5). Пусть $W = \overline{W'}$. Из предложения 8 и теоремы двойственности вытекает, что замкнутое инвариантное подпространство $W' \subseteq O(G)^*$ допускает инъективное описание, значит, W' совпадает с замыканием в $O(G)^*$ подпространства, натянутого на множество $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \in \tilde{\lambda}} n_\omega(W'_\omega)$. Из (3) вытекает, что инъективные подмодули W_ω и W'_ω совпадают. Следовательно, W совпадает с замыканием в P^* подпространства, натянутого на множество $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \in \tilde{\lambda}} n_\omega(W_\omega)$, т. е. подпространство W допускает инъективное описание. Обратно, пусть $s \in W$.



Так как по предположению подпространство W допускает инъективное описание, то s можно аппроксимировать в P^* линейными комбинациями элементов множества $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\omega \in \tilde{\lambda}} n_{\omega}(W'_{\omega})$, содержащегося в W' . Значит, $W \subseteq \overline{W'}$. Обратное вложение, очевидно, выполнено. Теорема доказана. \square

4. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОБОЛОЧКИ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ЯДРА

4.1. $\mathbf{C}[\pi]$ -оболочки и $\mathbf{C}[\pi]$ -ядра. Выберем конечную систему f_1, \dots, f_{ν} элементов из $O(G)$ и обозначим \mathbf{f} ν -функцию $(f_1, \dots, f_{\nu}) \in O(G)^{\nu}$. Пусть $O_{\mathbf{f}}$ — пространство всех ν -функций $\mathbf{g} \in O(\Lambda)^{\nu}$, для которых сумма

$$(\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f} = (g_1 \circ \pi) f_1 + \dots + (g_{\nu} \circ \pi) f_{\nu}$$

принадлежит P .

Если r_1, \dots, r_{ν} — многочлены, то ν -функцию $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{\nu})$ называем ν -многочленом (или ν -полиномом). Степень ν -полинома \mathbf{r} определяется как наибольшая из степеней полиномов r_1, \dots, r_{ν} . Пространство $O_{\mathbf{f}}$ не является пустым. Оно, например, содержит ν -полином нулевой степени $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Если $f_1, \dots, f_{\nu} \in P$, то пространство $O_{\mathbf{f}}$ содержит все ν -полиномы нулевой степени и может содержать все или отдельные ν -полиномы положительной степени, например, если пространство P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то пространство $O_{\mathbf{f}}$ содержит все ν -полиномы.

Совокупность $J_{\mathbf{f}}$ всех элементов из P , допускающих представление в виде $(\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f}$, где \mathbf{r} — ν -полином, называем $\mathbf{C}[\pi]$ -оболочкой множества $\{f_1, \dots, f_{\nu}\}$ в пространстве P , а ее замыкание $I_{\mathbf{f}} = \overline{J_{\mathbf{f}}}$ в топологии P называем замкнутой $\mathbf{C}[\pi]$ -оболочкой множества $\{f_1, \dots, f_{\nu}\}$ в пространстве P .

Совокупности $J_{\mathbf{f}}$ и $I_{\mathbf{f}}$ являются подпространствами в P . Если $f_1, \dots, f_{\nu} \in P$ и $O_{\mathbf{f}}$ не содержит ν -полиномов положительной степени, то $J_{\mathbf{f}}$ совпадает с подпространством в P порождаемым множеством $\{f_1, \dots, f_{\nu}\}$. Если $f_1, \dots, f_{\nu} \in P$ и P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то $J_{\mathbf{f}}$ совпадает с подмодулем в P порождаемым множеством $\{f_1, \dots, f_{\nu}\}$.

Совокупность $W_{\mathbf{f}}$ всех функционалов $s \in P^*$, для которых $\langle s, (\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f} \rangle = 0$ при любом выборе ν -полинома $\mathbf{r} \in O_{\mathbf{f}}$, называем $\mathbf{C}[\pi]$ -ядром множества $\{f_1, \dots, f_{\nu}\}$ в пространстве P^* .

Совокупность $W_{\mathbf{f}}$ является замкнутым подпространством в P^* . Если $f_1, \dots, f_{\nu} \in P$ и $O_{\mathbf{f}}$ не содержит ν -полиномов положительной степени, то $W_{\mathbf{f}}$ совпадает с пересечением ядер функционалов $s \rightarrow \langle s, f_j \rangle$, $j = 1, \dots, \nu$. Если $f_1, \dots, f_{\nu} \in P$ и P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то $O_{\mathbf{f}}$ содержит все ν -полиномы. При этом $W_{\mathbf{f}}$ совпадает с пересечением ядер функционалов $s \rightarrow \langle s, (\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f} \rangle$, где \mathbf{r} — произвольный ν -полином.

Предположим, что система функций f_1, \dots, f_{ν} является независимой над кольцом $O_{\pi}(G) = \{g \circ \pi : g \in O(\Lambda)\}$, т. е. справедлива импликация

$$(\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{g} \in O(\Lambda)^{\nu} \implies \mathbf{g} = \mathbf{0}.$$

Из этого предположения вытекает, что отображение $O(\Lambda)^{\nu} \rightarrow O(G) | \mathbf{g} \rightarrow (\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f}$ является взаимно однозначным. Таковым же будет сужение

$$u_{\mathbf{f}} : O_{\mathbf{f}} \rightarrow P | \mathbf{g} \rightarrow (\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f}$$

этого отображения на подпространство $O_{\mathbf{f}}$. Наделим $O_{\mathbf{f}}$ локально выпуклой топологией, индуцированной из P отображением $u_{\mathbf{f}}$. Тогда отображение $u_{\mathbf{f}}$ и обратное отображение

$$u_{\mathbf{f}}^{-1} : P \rightarrow O_{\mathbf{f}} | (\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{g}$$

будут непрерывными. Понятно, что область определения отображения $u_{\mathbf{f}}^{-1}$ может не совпадать со всем пространством P .

Лемма 5. Подпространства $I_{\mathbf{f}} \subseteq P$ и $W_{\mathbf{f}} \subseteq P^*$ связаны правилом ортогональности $I_{\mathbf{f}}^0 = W_{\mathbf{f}}$, $W_{\mathbf{f}}^0 = I_{\mathbf{f}}$. Здесь $I_{\mathbf{f}}^0$ — аннулятор $I_{\mathbf{f}}$ в P^* , $W_{\mathbf{f}}^0$ — аннулятор $W_{\mathbf{f}}$ в P^* .



Доказательство. Действительно, если $s \in W_{\mathbf{f}}$, то $\langle s, (\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f} \rangle = 0$ для любого ν -многочлена \mathbf{r} из $O_{\mathbf{f}}$. Значит, s принадлежит аннулятору $J_{\mathbf{f}}^0 \subseteq P^*$, т. е. $W_{\mathbf{f}} \subseteq J_{\mathbf{f}}^0$, и по свойствам поляра $W_{\mathbf{f}}^0 \supseteq J_{\mathbf{f}}^{00} = I_{\mathbf{f}}$. С другой стороны, если $s \in J_{\mathbf{f}}^0$, то $s \in W_{\mathbf{f}}$, значит, $J_{\mathbf{f}}^0 \subseteq W_{\mathbf{f}}$ и по свойствам поляра $I_{\mathbf{f}} = J_{\mathbf{f}}^{00} \supseteq W_{\mathbf{f}}^0$. Следовательно, $I_{\mathbf{f}} = W_{\mathbf{f}}^0$, $I_{\mathbf{f}}^0 = W_{\mathbf{f}}^{00} = W_{\mathbf{f}}$. \square

Теорема 4. Если открытое множество G допускает собственное исчерпание, P — модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, $f_1, \dots, f_\nu \in P$ и образ $u_{\mathbf{f}}(O_{\mathbf{f}})$ замкнут в пространстве P^* , то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) ν -многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{f}}$;
- 2) замкнутое подпространство $I_{\mathbf{f}}$ допускает проективное описание;
- 3) замкнутое подпространство $W_{\mathbf{f}}$ допускает инъективное описание.

Доказательство. Убедимся в справедливости импликации 1) \Rightarrow 2). Пусть ν -многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{f}}$. Покажем, что подпространство $I_{\mathbf{f}}$ допускает проективное описание. В силу специальной теоремы двойственности нам достаточно показать, что $I_{\mathbf{f}} = P \cap I'_{\mathbf{f}}$, где $I'_{\mathbf{f}}$ — замкнутый подмодуль в $O(G)$, порождаемый $I_{\mathbf{f}}$. Так как вложение $I_{\mathbf{f}} \subseteq P \cap I'_{\mathbf{f}}$ следует из определения $I'_{\mathbf{f}}$, то докажем лишь выполнимость обратного вложения. Пусть $f \in P \cap I'_{\mathbf{f}}$. Тогда f можно аппроксимировать в топологии $O(G)$ элементами вида $(r_1 \circ \pi) \varphi_1 + \dots + (r_k \circ \pi) \varphi_k$, где r_1, \dots, r_k — полиномы, $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in I_{\mathbf{f}}$. По определению $I_{\mathbf{f}}$ функции $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ можно аппроксимировать в топологии P функциями вида $(\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f}$, где \mathbf{r} — ν -полиномы из $O_{\mathbf{f}}$, значит, функцию f можно аппроксимировать в топологии P элементами подпространства $u_{\mathbf{f}}(O_{\mathbf{f}})$. Но по условию образ $u_{\mathbf{f}}(O_{\mathbf{f}})$ замкнут в пространстве P , значит, при некотором $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{f}}$ имеем представление $f = (\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f}$. По предположению ν -многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{f}}$ и, кроме того, отображение $u_{\mathbf{f}}$ является непрерывным, следовательно, f можно аппроксимировать в топологии P элементами вида $(\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f}$, где \mathbf{r} — ν -многочлен из $O_{\mathbf{f}}$, т. е. $f \in I_{\mathbf{f}}$. Таким образом $P \cap I'_{\mathbf{f}} \subseteq I_{\mathbf{f}}$ и, следовательно, $I_{\mathbf{f}} = P \cap I'_{\mathbf{f}}$. Проверим выполнимость импликации 2) \Rightarrow 1). Пусть замкнутое подпространство $I_{\mathbf{f}}$ допускает проективное описание. По специальной теореме двойственности это означает, что $I_{\mathbf{f}} = P \cap I'_{\mathbf{f}}$. Выберем произвольную ν -функцию $\mathbf{g} \in O_{\mathbf{f}}$. Из определения $O_{\mathbf{f}}$ вытекает, что $(\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f} \in P$. Покажем, что $(\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f} \in I'_{\mathbf{f}}$. Так как Λ — односвязная область, то по теореме Рунге ν -многочлены \mathbf{r} плотны в пространстве $O(\Lambda)^\nu$. Отсюда следует, что функцию $(\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f}$ можно аппроксимировать в топологии $O(G)$ функциями вида $(\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f}$, где \mathbf{r} — ν -многочлен. Из того, что P — модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ и $f_1, \dots, f_\nu \in P$ вытекает, что функции $(\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f}$, где \mathbf{r} — ν -многочлен, принадлежат $I_{\mathbf{f}}$. Это означает, что функция $(\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f}$ принадлежит $I'_{\mathbf{f}}$. Следовательно, $(\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f} \in P \cap I'_{\mathbf{f}} = I_{\mathbf{f}}$. Из определения $I_{\mathbf{f}}$ вытекает, что функцию $(\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f}$ можно аппроксимировать в топологии P элементами вида $(\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f}$, где \mathbf{r} — ν -многочлен. Из непрерывности обратного отображения $u_{\mathbf{f}}^{-1}$ вытекает, что \mathbf{g} можно аппроксимировать в топологии $O_{\mathbf{f}}$ ν -многочленами.

Эквивалентность утверждений 2) и 3) следует из леммы 5 и теоремы двойственности. \square

Замечание. При доказательстве импликации 1) \Rightarrow 2) мы не использовали условий: P — модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ и $f_1, \dots, f_\nu \in P$. Значит, импликация 1) \Rightarrow 2), следовательно, и импликация 1) \Rightarrow 3) остаются справедливыми без этих условий.

4.2. π -свертка. Обозначим через $O_{\mathbf{f}}^*$ сильное сопряженное к пространству $O_{\mathbf{f}}$. Сопряженный оператор

$$u_{\mathbf{f}}^* : P^* \rightarrow O_{\mathbf{f}}^* | s \rightarrow \langle s, (\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f} \rangle$$

будем называть π -сверткой (ν -функции $\mathbf{f} \subseteq O(G)^\nu$ и функционала $s \in P^*$). Оператор $u_{\mathbf{f}}^*$ является непрерывным. Значит, множество W решений однородного уравнения π -свертки $u_{\mathbf{f}}^* s = 0$, $s \in P^*$ является замкнутым подпространством P^* . Обозначим I аннулятор этого подпространства в пространстве P .

Предложение 9. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) ν -многочлены плотны в пространстве $O_{\mathbf{f}}$;
- 2) $W = W_{\mathbf{f}}$;
- 3) $I = I_{\mathbf{f}}$.



Доказательство. Прежде всего убедимся в справедливости импликации 1) \Rightarrow 2). Пусть ν -многочлены плотны в пространстве O_f . Если $s \in W$, то $\langle u_f^* s, \mathbf{g} \rangle = \langle s, (\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f} \rangle = 0$ при любом $\mathbf{g} \in O_f$. Значит, $\langle s, (\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f} \rangle = 0$ для любого ν -многочлена $\mathbf{r} \in O_f$. Отсюда следует, что подпространство W содержится в $\mathbf{C}[\pi]$ -ядре W_f множества $\{f_1, \dots, f_\nu\}$ в пространстве P^* , т. е. $W \subseteq W_f$. Обратно, пусть функционал $s \in P^*$ принадлежит W_f , значит, $\langle s, (\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f} \rangle = 0$ для любого ν -многочлена $\mathbf{r} \in O_f$. По предположению любую ν -функцию $\mathbf{g} \in O_f$ можно аппроксимировать в топологии O_f ν -многочленами \mathbf{r} . В силу непрерывности оператора u_f равенство $\langle s, (\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f} \rangle = 0$ будет иметь место для любого $\mathbf{g} \in O_f$, а это означает, что $s \in W$, т. е. $W_f \subseteq W$. Следовательно, $W = W_f$.

Справедливость импликации 2) \Rightarrow 3) вытекает из леммы 5 и следующих соотношений $I = W^0 = W_f^0 = I_f$.

Проверим импликацию 3) \Rightarrow 1). Пусть $I = I_f$. Подпространство W совпадает с ядром оператора u_f^* . По свойствам сопряженных отображений его аннулятор $I \subseteq P$ совпадает с замыканием в P полного образа $u_f(O_f)$, т. е. множества элементов вида $(\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in O_f$. Значит, любой элемент из P вида $(\mathbf{g} \circ \pi) \mathbf{f}$, $\mathbf{g} \in O_f$, принадлежит I_f и может быть аппроксимирован в P элементами вида $(\mathbf{r} \circ \pi) \mathbf{f}$, где \mathbf{r} — ν -многочлен. В силу непрерывности обратного оператора u_f^{-1} в O_f плотны ν -многочлены. \square

Следствие 1. Если открытое множество G допускает собственное исчерпание, ν -многочлены плотны в пространстве O_f и образ $u_f(O_f)$ замкнут в пространстве P , то замкнутое подпространство W допускает инъективное описание.

Доказательство. Если ν -многочлены плотны в пространстве O_f , то по предложению 9 $W = W_f$. Значит, по теореме 4 (см. замечание) подпространство W допускает инъективное описание. \square

4.3. $\mathbf{C}[\pi^*]$ -оболочки и $\mathbf{C}[\pi^*]$ -ядра. Выберем конечную систему элементов s_1, \dots, s_ν из P^* и обозначим \mathbf{s} ν -функционал $(s_1, \dots, s_\nu) \in (P^*)^\nu = (P^\nu)^*$. Для произвольной ν -функции $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_\nu) \in O(\Lambda)^\nu$ символом $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ обозначаем функционал

$$f \rightarrow \langle \mathbf{s}, (\mathbf{g} \circ \pi) f \rangle = \langle s_1, (g_1 \circ \pi) f \rangle + \dots + \langle s_\nu, (g_\nu \circ \pi) f \rangle.$$

Этот функционал определен, по крайней мере, на тех элементах $f \in P$, для которых вектор

$$(\mathbf{g} \circ \pi) f = ((g_1 \circ \pi) f, \dots, (g_\nu \circ \pi) f)$$

принадлежит P^ν . Говорим, что функционал $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ принадлежит P^* и пишем $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s} \in P^*$, если множество $\{f \in P : (\mathbf{g} \circ \pi) f \in P^\nu\}$ плотно в P и функционал $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ продолжается до непрерывного функционала на пространстве P . Говорим, что функционал $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ принадлежит $O(G)^*$ и пишем $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s} \in O(G)^*$, если множество $\{f \in P : (\mathbf{g} \circ \pi) f \in P^\nu\}$ плотно в P (значит, плотно и в $O(G)$) и функционал $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ продолжается до непрерывного функционала на пространстве $O(G)$. ν -полином $\mathbf{r} \in O_s$ называем допустимым, если функционал $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ принадлежит $O(G)^*$.

Пусть \mathcal{O}_{s_j} — пространство всех функций $g \in O(\Lambda)$, для которых $(g \circ \pi)^* s_j \in P^*$; E_{s_j} — подпространство \mathcal{O}_{s_j} , состоящее из всех функций g , для которых $(g \circ \pi)^* s_j = 0$; O_{s_j} — факторпространство $\mathcal{O}_{s_j}/E_{s_j}$; O_s — декартово произведение $O_{s_1} \times \dots \times O_{s_\nu}$. Договоримся использовать упрощенную терминологию, в которой элементы факторпространства $\mathcal{O}_{s_j}/E_{s_j}$ (классы эквивалентности) отождествляются с их представителями из \mathcal{O}_{s_j} . Говорим, что функция g из $O(\Lambda)$ принадлежит O_{s_j} , если $g \in \mathcal{O}_{s_j}$, т. е. класс эквивалентности, порождаемый функцией g , принадлежит O_{s_j} . Говорим, что ν -функция $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_\nu)$ из $O(\Lambda)^\nu$ принадлежит O_s , если $g_j \in O_{s_j}$ для всякого $j \in \{1, \dots, \nu\}$.

Пространство O_s не является пустым. Оно содержит, например, ν -полином нулевой степени $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, который, очевидно, является допустимым. Если $s_1, \dots, s_\nu \in O(G)^*$, то пространство O_s содержит все ν -многочлены нулевой степени и может содержать все или отдельные ν -многочлены положительной степени, например, если пространство P обладает структурой топологического модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то пространство O_s содержит все ν -полиномы. Действительно, если $s_1, \dots, s_\nu \in O(G)^*$ и P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то для любого ν -полинома \mathbf{r} множество $\{f \in P : (\mathbf{r} \circ \pi) f \in P^\nu\}$ совпадает с P . При этом функционал $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ непрерывен на пространстве $O(G)$ (значит, и на пространстве P), т. е. все ν -полиномы лежат в O_s и являются допустимыми.



Совокупность I_s всех функций $f \in P$, для которых

$$\langle (\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}, f \rangle = \langle \mathbf{s}, (\mathbf{r} \circ \pi) f \rangle = 0$$

при любом выборе ν -многочлена \mathbf{r} из O_s , называем $\mathbf{C}[\pi^*]$ -ядром множества $\{s_1, \dots, s_\nu\}$ в пространстве P . Совокупность I_s является замкнутым подпространством в P . Если $s_1, \dots, s_\nu \in O(G)^*$ и O_s не содержит ν -полиномов положительной степени, то I_s совпадает с пересечением ядер функционалов $f \rightarrow \langle s_j, f \rangle$, $j = 1, \dots, \nu$. Если $s_1, \dots, s_\nu \in O(G)^*$ и P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то I_s совпадает с пересечением ядер функционалов $f \rightarrow \langle \mathbf{s}, (\mathbf{r} \circ \pi) f \rangle$, где \mathbf{r} — произвольный ν -полином.

Совокупность V_s всех элементов из P^* , допускающих представление в виде $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где \mathbf{r} — некоторый ν -полином из O_s , называем $\mathbf{C}[\pi^*]$ -оболочкой множества $\{s_1, \dots, s_\nu\}$ в пространстве P^* , а ее замыкание $W_s = \overline{V_s}$ в топологии P^* называем замкнутой $\mathbf{C}[\pi^*]$ -оболочкой множества $\{s_1, \dots, s_\nu\}$ в пространстве P^* . Совокупности V_s и W_s являются подпространствами в P^* . Если $s_1, \dots, s_\nu \in O(G)^*$ и O_s не содержит ν -полиномов положительной степени, то V_s совпадает с подпространством в P^* порождаемым множеством $\{s_1, \dots, s_\nu\}$. Если $s_1, \dots, s_\nu \in O(G)^*$ и P обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, то P^* обладает структурой модуля над кольцом $\mathbf{C}[\pi^*]$ и V_s совпадает с подмодулем в P^* порождаемым множеством $\{s_1, \dots, s_\nu\}$. Предположим, что система функционалов s_1, \dots, s_ν является независимой, т. е. справедлива импликация

$$(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s} = 0, \quad \mathbf{g} \in O_s \implies \mathbf{g} = \mathbf{0}.$$

Из этого предположения вытекает, что отображение

$$u_s : O_s \rightarrow P^* \mid \mathbf{g} \rightarrow (\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$$

является взаимно однозначным. Наделим O_s локально выпуклой топологией, индуцированной из P^* отображением u_s . Тогда отображение u_s и обратное отображение

$$u_s^{-1} : P^* \rightarrow O_s \mid (\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{g}$$

будут непрерывными. Понятно, что область определения отображения u_s^{-1} может не совпадать со всем пространством P^* .

Лемма 6. Подпространства $W_s \subseteq P^*$ и $I_s \subseteq P$ связаны правилом ортогональности $W_s^0 = I_s$, $I_s^0 = W_s$. Здесь W_s^0 — аннулятор W_s в P , I_s^0 — аннулятор I_s в P^* .

Доказательство. Если $f \in I_s$, то $\langle (\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}, f \rangle = 0$ для любого ν -многочлена \mathbf{r} из O_s . Значит, f принадлежит аннулятору $V_s^0 \subseteq P$, т. е. $I_s \subseteq V_s^0$, и по свойствам поляра $I_s^0 \supseteq V_s^{00} = W_s$. С другой стороны, если $f \in V_s^0$, то $f \in I_s$, значит, $V_s^0 \subseteq I_s$ и по свойствам поляра $W_s = V_s^{00} \supseteq I_s^0$. Следовательно, $W_s = I_s^0$ и $W_s^0 = I_s^{00} = I_s$. \square

Теорема 5. Если открытое множество G допускает собственное исчерпание, P — модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, $s_1, \dots, s_\nu \in O(G)^*$ и образ $u_s(O_s)$ замкнут в пространстве P^* , то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) допустимые ν -многочлены плотны в пространстве O_s ;
- 2) замкнутое подпространство W_s допускает инъективное описание;
- 3) замкнутое подпространство I_s допускает проективное описание.

Доказательство. Убедимся в справедливости импликации 1) \Rightarrow 2). Предположим, что допустимые ν -многочлены плотны в пространстве O_s . Покажем, что замкнутое подпространство $W_s \subseteq P^*$ допускает инъективное описание. В силу специальной теоремы двойственности нам достаточно показать, что $W_s = \overline{W'_s}$, где $W'_s = \{s \in O(G)^* : r^* s \in W_s \forall r^* \in \mathbf{C}[\pi^*]\}$ — максимальное инвариантное подпространство $O(G)^*$, лежащее в W_s , $\overline{W'_s}$ — замыкание W'_s в топологии P^* . Вложение $W'_s \subseteq W_s$ и, следовательно, вложение $\overline{W'_s} \subseteq W_s$ вытекает непосредственно из определения подпространства W'_s . Докажем выполнимость обратного вложения $W_s \subseteq \overline{W'_s}$. Если $s \in W_s$, то по определению W_s функционал s можно аппроксимировать в топологии P^* элементами из P^* вида $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где \mathbf{r} — ν -полином



из O_s . Значит, s можно аппроксимировать в топологии P^* элементами множества $u_s(O_s)$. Но по условию это множество замкнуто в пространстве P^* , значит, при некотором $\mathbf{g} \in O_s$ имеем представление $s = (\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$. По предположению допустимые ν -многочлены плотны в пространстве O_s и отображение u_s является непрерывным, следовательно, s можно аппроксимировать в топологии P^* элементами $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s} \in O(G)^*$, где \mathbf{r} — допустимый ν -многочлен из O_s . Легко проверить, что эти элементы принадлежат W'_s , значит, $s \in \overline{W'_s}$. Таким образом, $W_s = \overline{W'_s}$. Проверим выполнимость импликации 2) \Rightarrow 1). Пусть $W_s = \overline{W'_s}$ и $\mathbf{g} \in O_s$. Из определения O_s вытекает, что $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s} \in P^*$. Покажем, что $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s} \in W_s$. Так как Λ — односвязная область, то по теореме Рунге ν -многочлены \mathbf{r} плотны в пространстве $O(\Lambda)^\nu$. Отсюда следует, что функционал $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ можно аппроксимировать в топологии $O(G)^*$ функционалами вида $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где \mathbf{r} — ν -многочлен. Из условия, что P — модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$ и $s_1, \dots, s_\nu \in P^*$ вытекает, что функционалы $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где \mathbf{r} — ν -многочлен, принадлежат W'_s . Это означает, что функционал $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ принадлежит W_s . Из определения W_s вытекает, что функционал $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$ можно аппроксимировать в топологии P^* элементами вида $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где \mathbf{r} — ν -многочлен. Так как в данной ситуации любой ν -многочлен является допустимым, то из непрерывности обратного отображения u_s^{-1} вытекает, что \mathbf{g} можно аппроксимировать в топологии O_s допустимыми ν -многочленами.

Эквивалентность утверждений 2) и 3) следует из леммы 6 и теоремы двойственности. \square

Замечание. При доказательстве импликации 1) \Rightarrow 2) мы не использовали условий: P — модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$, $s_1, \dots, s_\nu \in O(G)^*$. Значит, импликация 1) \Rightarrow 2), следовательно, и импликация 1) \Rightarrow 3) остаются справедливыми без этих условий.

4.4. π^* -свертка. Обозначим O_s^* сильное сопряженное к пространству O_s . Сопряженный оператор

$$u_s^* : P \rightarrow O_s^* | f \rightarrow \langle \mathbf{s}, (\mathbf{g} \circ \pi) f \rangle$$

будем называть π^* -сверткой (функции $f \subseteq P$ и ν -функционала $\mathbf{s} \in (O(G)^\nu)^*$). Оператор u_s^* является непрерывным. Значит, множество I решений однородного уравнения π^* -свертки $u_s^* f = 0$, $f \in P$, является замкнутым подпространством P . Обозначим через W аннулятор этого подпространства в пространстве P^* .

Предложение 10. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) ν -многочлены плотны в пространстве O_s ,
- 2) $I = I_s$,
- 3) $W = W_s$.

Доказательство. Прежде всего убедимся в справедливости импликации 1) \Rightarrow 2). Пусть ν -многочлены плотны в пространстве O_s . Если $f \in I$, то $\langle u_s^* f, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{s}, (\mathbf{g} \circ \pi) f \rangle = 0$ при любом $\mathbf{g} \in O_s$. Значит, $\langle \mathbf{s}, (\mathbf{r} \circ \pi) f \rangle = 0$ для любого ν -многочлена $\mathbf{r} \in O_s$. Отсюда следует, что подпространство I содержится в $\mathbf{C}[\pi^*]$ -ядре J_s множества $\{s_1, \dots, s_\nu\}$ и, значит, содержится в замкнутом $\mathbf{C}[\pi^*]$ -ядре I_s множества $\{s_1, \dots, s_\nu\}$. Обратно. Пусть функция $f \in P$ принадлежит I_s , значит, $\langle \mathbf{s}, (\mathbf{r} \circ \pi) f \rangle = 0$ для любого ν -многочлена $\mathbf{r} \in O_s$. По предположению любую ν -функцию $\mathbf{g} \in O_s$ можно аппроксимировать в топологии O_s ν -многочленами \mathbf{r} . В силу непрерывности оператора u_s равенство $\langle \mathbf{s}, (\mathbf{g} \circ \pi) f \rangle = 0$ будет иметь место для любого $\mathbf{g} \in O_s$, а это означает, что $f \in I$, значит, $I_s \subseteq I$. Таким образом, $I = I_s$.

Справедливость импликации 2) \Rightarrow 3) вытекает из леммы 6 и следующих соотношений $W = I^0 = I_s^0 = W_s$.

Проверим импликацию 3) \Rightarrow 1). Подпространство I совпадает с ядром оператора u_s^* . По свойствам сопряженных отображений его аннулятор $W \subseteq P^*$ совпадает с замыканием в P^* полного образа $u_s(O_s)$, т.е. с замыканием множества элементов вида $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, $\mathbf{g} \in O_s$. В силу равенства $W = W_s$ любой элемент из P^* вида $(\mathbf{g} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, $\mathbf{g} \in O_s$, принадлежит W_s и может быть аппроксимирован в P^* элементами вида $(\mathbf{r} \circ \pi)^* \mathbf{s}$, где \mathbf{r} — ν -многочлен из O_s . В силу непрерывности обратного оператора u_s^{-1} в O_s плотны ν -многочлены. \square



Библиографический список

1. Rellich F. Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen // *Math. Ann.* 1934. Vol. 110. P. 342–356.
2. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moyennepériodiques // *Ann. of Math. (2)*. 1947. Vol. 48. P. 857–929.
3. Ткаченко В. А. Спектральная теория в пространствах аналитических функционалов для операторов, порождаемых умножением на независимую переменную // *Мат. сб.* 1980. Т. 112(154), № 3(7). С. 421–466.
4. Мерзляков С. Г. Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования // *Мат. заметки*. 1983. Т. 33, № 5. С. 701–713.
5. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной // *Мат. сб.* 1991. Т. 182, № 6. С. 828–848.
6. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // *Мат. сб.* 1991. Т. 182, № 11. С. 1559–1588.
7. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // *Мат. сб.* 2003. Т. 194, № 12. С. 123–160.
8. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // *Мат. сб.* 1998. Т. 189, № 9. С. 143–160.
9. Чернышев А. Н. Спектральный синтез для бесконечного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // *Труды ФОРА*. 2001. № 6. С. 75–87.
10. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М. : Мир, 1969.
11. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М. : Мир, 1969.
12. Хермандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М. : Мир, 1968.
13. Красичков-Терновский И. Ф. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II // *Изв. АН СССР. Сер. математическая*. 1979. Т. 43, № 2. С. 309–341.

Projective and Injective Descriptions in the Complex Domain. Duality

A. B. Shishkin

Kuban State University, 119/7, 2, Krasnodarskaya str., 353560, Slavyansk-on-Kuban, Russia, Shishkin-home@mail.ru

Research of a invariant subspaces of a differential operators infinite order in a complex domain generated many issues, related with transition to dual problems. This work devoted overcome these difficulties

Key words: invariant subspaces, spectral synthesis, local description, projective description, injective description, duality.

References

1. Rellich F. Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen. *Math. Ann.*, 1934, vol. 110, pp. 342–356.
2. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moyennepériodiques. *Ann. of Math. (2)*, 1947, vol. 48, pp. 857–929.
3. Tkachenko V. A. Spectral theory in spaces of analytic functionals for operators generated by multiplication by the independent variable. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 387–427.
4. Merzlyakov S. G., Invariant subspaces of the operator of multiple differentiation. *Mathematical Notes*, 1983, vol. 33, no. 5, pp. 701–713.
5. Shishkin A. B. Spectral synthesis for an operator generated by multiplication by a power of the independent variable. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1992, vol. 73, no. 1, pp. 211–229.
6. Krasichkov-Ternovskii I. F. Spectral synthesis in a complex domain for a differential operator with constant coefficients. I : A duality theorem. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1993, vol. 74, no. 2, pp. 309–335.
7. Shishkin A. B. Spectral synthesis for systems of differential operators with constant coefficients. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 2003, vol. 194, no. 12, pp. 1865–1898.
8. Shishkin A. B. Spectral synthesis for systems of differential operators with constant coefficients. Duality theorem. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1998, vol. 189, no. 9, pp. 1423–1440.
9. Chernyshev A. N. Spectral synthesis for infinitely differential operator with constant coefficients. Duality theorem. *Trudi FORA*, 2001, vol. 6, pp. 75–87 (in Russian).
10. Edwards R. E. *Functional Analysis. Theory and Applications*. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1965.
11. Gunning R. C., Rossi H. *Analytic functions of several*



complex variables. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965, 317 p. (Rus. ed. : Gunning R., Rossi Kh. *Analiticheskie funktsii mnogikh kompleksnykh peremennykh*. Moscow, Mir, 1969, 395 p.)

12. Hermander L. *An introduction to the theory of functions of several complex variables* (Rus. ed. :

Hermander L. *Vvedenie v teoriyu funktsii neskol'kikh kompleksnykh peremennykh*. Moscow, Mir, 1968, 279 p.)

13. Krasichkov-Ternovskii I. F. Local description of closed ideals and submodules of analytic functions of one variable. II. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1980, vol. 14, no. 2, pp. 289–316.

УДК 517.984

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФЕ-ЕЖЕ

В. А. Юрко

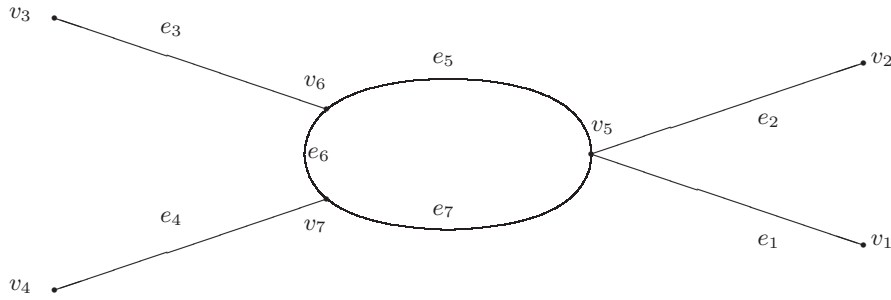
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки во внутренних вершинах и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах. Приведена теорема единственности восстановления потенциалов по заданным спектральным характеристикам, получено конструктивное решение обратной задачи.

Ключевые слова: граф-еж, операторы Штурма–Лиувилля, обратные спектральные задачи.

1. В статье исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов второго порядка на графе-еже, имеющих цикл и произвольное число граничных ребер. При этом рассматриваются обобщенные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Прямые и обратные задачи для дифференциальных операторов на графах (пространственных сетях) часто возникают в естествознании и технике (см. [1–4]). Отметим, что обратные спектральные задачи восстановления дифференциальных операторов *на деревьях* (т. е. на графах без циклов) исследовались в [3–4]. Более сложные задачи на графах с циклом изучались в [5–7] и других работах, но только в весьма частном случае так называемых *стандартных условий склейки*. В частности, задачи на графе-еже рассматривались в [6]. В данной статье рассматриваются операторы Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки (см. определения в п. 2). Этот класс условий склейки встречается в приложениях и порождает новые качественные трудности в исследовании нелинейных коэффициентных обратных задач. Для изучения этого класса обратных задач мы развиваем идеи метода спектральных отображений [8–9]. Кроме того, важную роль в исследовании играет вспомогательная обратная задача для квазипериодических операторов с условиями разрыва во внутренних точках. Основными результатами данной работы являются теорема единственности и конструктивная процедура построения решения обратной задачи для операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже с обобщенными условиями склейки во внутренних вершинах и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах.

2. Рассмотрим компактный граф G в \mathbf{R}^m с множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где e_0 — цикл, $\mathcal{E}' = \{e_1, \dots, e_r\}$ — граничные ребра. Пусть $\{v_1, \dots, v_{r+N}\}$ — множество вершин, где $V = \{v_1, \dots, v_r\}$, $v_k \in e_k$ — граничные вершины, а $U = \{v_{r+1}, \dots, v_{r+N}\}$ — внутренние вершины, $U = \mathcal{E}' \cap e_0$. Цикл e_0 состоит из N частей: $e_0 = e_{r+1} \cup \dots \cup e_{r+N}$, $e_{r+k} = [v_{r+k}, v_{r+k+1}]$, $k = \overline{1, N}$, $v_{r+N+1} := v_{r+1}$. Каждое граничное ребро e_j , $j = \overline{1, r}$ имеет начальную точку в v_j и конечную точку на множестве U . Множество \mathcal{E}' состоит из N групп ребер: $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_N$, $\mathcal{E}_k \cap e_0 = v_{r+k}$. Пусть r_k — число ребер в \mathcal{E}_k ; $r = r_1 + \dots + r_N$. Обозначим $m_0 = 1$, $m_k = r_1 + \dots + r_k$, $k = \overline{1, N}$. Тогда $\mathcal{E}_k = \{e_j\}$, $j = \overline{m_{k-1} + 1, m_k}$. Ребро $e_j \in \mathcal{E}_k$ представляет собой отрезок $e_j = [v_j, v_{r+k}]$. Например, граф G с $N = 3$ и $r = 4$ изображен на рисунке.



Пусть T_j — длина ребра e_j , $j = \overline{1, r + N}$, а $T := T_{r+1} + \dots + T_{r+N}$ — длина цикла e_0 . Положим $b_0 = 0$, $b_k = T_{r+1} + \dots + T_{r+k}$, $k = \overline{1, N}$. Тогда $b_N = T$. Каждое ребро e_j , $j = \overline{1, r + N}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, T_j]$, где $x_j = 0$ соответствует вершине v_j . Весь цикл e_0 параметризуется параметром $x \in [0, T]$, где $x = x_{r+j} + b_{j-1}$ при $x_{r+j} \in [0, T_{r+j}]$, $j = \overline{1, N}$.

Интегрируемая функция Y на G имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1, r+N}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, T_j]$ определена на ребре e_j . Функция $y(x)$, $x \in [0, T]$, на цикле e_0 имеет вид $y(x) = y_{r+j}(x_{r+j})$, $j = \overline{1, N}$. Пусть $Q = \{q_j\}_{j=\overline{1, r+N}}$ — интегрируемая вещественная функция на G ; Q называется потенциалом. Функция $q(x)$, $x \in [0, T]$, имеет вид $q(x) = q_{r+j}(x_{r+j})$, $j = \overline{1, N}$. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на G :

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in [0, T_j], \quad j = \overline{1, r + N}, \quad (1)$$

где λ — спектральный параметр, функции y_j , y_j' , $j = \overline{1, r + N}$ — абсолютно непрерывны на $[0, T_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в каждой внутренней вершине $v_{\mu+1}$, $\mu = \overline{r + 1, r + N}$:

$$\left. \begin{aligned} y_{\mu+1}(0) &= \alpha_j y_j(T_j) \quad \text{для всех} \quad e_j \in \mathcal{E}'_{\mu-r+1}, \\ y'_{\mu+1}(0) - h_{\mu+1} y_{\mu+1}(0) &= \sum_{e_j \in \mathcal{E}'_{\mu-r+1}} \beta_j y'_j(T_j), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

причем $y_{r+N+1} := y_{r+1}$, $h_{r+N+1} := h_{r+1}$, $\mathcal{E}_{N+1} := \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_{\mu-r+1} := \mathcal{E}_{\mu-r+1} \cup e_\mu$. Здесь α_j , b_j и h_j — вещественные числа, $\alpha_j \beta_j \neq 0$. Для определенности пусть $\alpha_j \beta_j > 0$. Условия (2) являются обобщениями, так называемых стандартных условий склейки (см. [6]), где $\alpha_j = \beta_j = 1$, $h_j = 0$.

Рассмотрим краевую задачу B_0 на G для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями Дирихле в граничных вершинах v_1, \dots, v_r :

$$y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, r}.$$

Через $\Lambda_0 = \{\lambda_{n0}\}_{n \geq 0}$ обозначим собственные значения (с учетом кратностей) задачи B_0 . Рассмотрим также краевые задачи B_{ν_1, \dots, ν_p} , $p = \overline{1, r}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями:

$$y'_k(0) = 0, \quad k = \nu_1, \dots, \nu_p, \quad y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad j \neq \nu_1, \dots, \nu_p.$$

Пусть $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p} := \{\lambda_{n, \nu_1, \dots, \nu_p}\}_{n \geq 0}$ — спектр задачи B_{ν_1, \dots, ν_p} .

Важную роль при решении обратных задач на графе играет вспомогательная квазипериодическая краевая задача на цикле с условиями разрыва во внутренних точках. Параметры этой задачи зависят от параметров задачи B_0 . Точнее, введем вещественные числа γ_j , η_j ($j = \overline{1, N - 1}$), h , α , β по



формулам

$$\left. \begin{aligned} \gamma_j &= \sqrt{\frac{\alpha_{r+j}}{\beta_{r+j}}}, & \eta_j &= \gamma_j h_{r+j+1}, & j &= \overline{1, N-1}, & h &= h_{r+1}, \\ \alpha &= \alpha_{r+N} \prod_{j=1}^{N-1} \gamma_j \prod_{j=1}^{N-1} \beta_{r+j}, & \beta &= \prod_{j=1}^{N-1} \gamma_j \prod_{j=1}^N \beta_{r+j}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ясно, что $\alpha\beta > 0$, $\gamma_j > 0$, $j = \overline{1, N-1}$. Используя эти параметры, рассмотрим краевую задачу B на цикле e_0 :

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, T), \quad (4)$$

$$y(0) = \alpha y(T), \quad y'(0) - h y(0) = \beta y'(T), \quad (5)$$

$$y(b_j + 0) = \gamma_j y(b_j - 0), \quad y'(b_j + 0) = \gamma_j^{-1} y'(b_j - 0) + \eta_j y(b_j - 0), \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (6)$$

Пусть $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ — решения уравнения (4), удовлетворяющие условиям разрыва (6) и начальным условиям $S(0, \lambda) = C'(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = C(0, \lambda) = 1$. Положим $\varphi(x, \lambda) = C(x, \lambda) + hS(x, \lambda)$. Собственные значения $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ задачи B совпадают с нулями характеристической функции:

$$a(\lambda) = \alpha\varphi(T, \lambda) + \beta S'(T, \lambda) - (1 + \alpha\beta). \quad (7)$$

Обозначим $d(\lambda) := S(T, \lambda)$, $Q(\lambda) = \alpha\varphi(T, \lambda) - \beta S'(T, \lambda)$. Все нули $\{z_n\}_{n \geq 1}$ целой функции $d(\lambda)$ являются простыми, т.е. $\dot{d}(z_n) \neq 0$, где $\dot{d}(\lambda) := \frac{d}{d\lambda} d(\lambda)$. Положим $M_n = -d_1(z_n) \cdot \dot{d}(z_n)$, где $d_1(\lambda) := C(T, \lambda)$. Последовательность $\{M_n\}_{n \geq 1}$ называется последовательностью Вейля. Обозначим $\omega_n = \text{sign } Q(z_n)$, $\Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$.

Выберем и зафиксируем по одному ребру $e_{\xi_i} \in \mathcal{E}_i$ из каждого блока \mathcal{E}_i , $i = \overline{1, N}$, т.е. $m_{i-1} + 1 \leq \xi_i \leq m_i$. Через $\xi := \{k : k = \xi_1, \dots, \xi_N\}$ обозначим множество индексов ξ_i , $i = \overline{1, N}$. Пусть α_j и β_j , $j = \overline{1, r+N}$, известны априори. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. Даны $2^N + r - N$ спектров Λ_j , $j = \overline{0, r}$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$ и Ω , построить потенциал Q на G и $H := [h_j]_{j=\overline{r+1, r+N}}$.

Эта обратная задача является обобщением классических обратных задач для операторов Штурма-Лиувилля на интервале и на графах.

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с q рассмотрим потенциал \tilde{q} . Условимся, что если некоторый символ a обозначает объект, относящийся к q , то \tilde{a} будет обозначать аналогичный объект, относящийся к \tilde{q} .

Теорема 1. Если $\Lambda_j = \tilde{\Lambda}_j$, $j = \overline{0, r}$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$, $\Omega = \tilde{\Omega}$, то $Q = \tilde{Q}$ и $H = \tilde{H}$.

Эта теорема будет доказана в п. 4. Мы также дадим там конструктивную процедуру решения обратной задачи 1. В п. 3 мы изучим свойства спектральных характеристик и приведем вспомогательные утверждения.

3. Пусть $S_j(x_j, \lambda)$, $C_j(x_j, \lambda)$, $j = \overline{1, r+N}$, $x_j \in [0, T_j]$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях:

$$S_j(0, \lambda) = C'_j(0, \lambda) = 0, \quad S'_j(0, \lambda) = C_j(0, \lambda) = 1. \quad (8)$$

При каждом $x_j \in [0, T_j]$ функции $S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $j = \overline{1, r+N}$, $\nu = 0, 1$ являются целыми по λ порядка $1/2$.

Теорема 2. При $k = \overline{1, N-1}$, $\nu = 0, 1$ справедливы соотношения

$$S^{(\nu)}(b_{k+1} - 0, \lambda) = \gamma_k S(b_k - 0, \lambda) C_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda) + \gamma_k^{-1} S'(b_k - 0, \lambda) S_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda) +$$



$$+\eta_k S(b_k - 0, \lambda) S_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda), \tag{9}$$

$$C^{(\nu)}(b_{k+1} - 0, \lambda) = \gamma_k C(b_k - 0, \lambda) C_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda) + \gamma_k^{-1} C'(b_k - 0, \lambda) S_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda) + \eta_k C(b_k - 0, \lambda) S_{r+k+1}^{(\nu)}(T_{r+k+1}, \lambda). \tag{10}$$

В самом деле, зафиксируем $k = \overline{1, N-1}$. Let $x \in [b_k, b_{k+1}]$, т.е. $x = x_{r+k+1} + b_k$, $x_{r+k+1} \in [0, T_{r+k+1}]$. Используя фундаментальную систему решений $S_{r+k+1}(x_{r+k+1}, \lambda)$, $C_{r+k+1}(x_{r+k+1}, \lambda)$, на e_{r+k+1} , получаем:

$$S^{(\nu)}(x, \lambda) = A(\lambda) C_{r+k+1}^{(\nu)}(x_{r+k+1}, \lambda) + B(\lambda) S_{r+k+1}^{(\nu)}(x_{r+k+1}, \lambda), \quad \nu = 0, 1.$$

Учитывая условия (8) при $j = r + k + 1$, находим коэффициенты $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ и приходим к (9). Соотношение (10) доказывается аналогично.

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\tau := \text{Im } \rho \geq 0$, $\Pi := \{\rho : \tau \geq 0\}$, $\Pi_\delta := \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}$, $\delta \in (0, \pi/2)$. Следующая теорема описывает асимптотическое поведение $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ на каждом интервале $x \in (b_j, b_{j+1})$ (см. [10]).

Теорема 3. *Фиксируем $j = \overline{1, N-1}$. При $x \in (b_j, b_{j+1})$, $\nu = 0, 1$, $m = 1, 2$, $|\rho| \rightarrow \infty$ имеем:*

$$S^{(\nu)}(x, \lambda) = \left(\prod_{k=1}^j \xi_k^+ \right) \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left(\frac{\sin \rho x}{\rho} + \sum_{k=1}^j \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq j} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\xi_{\mu_i}^-}{\xi_{\mu_i}^+} \right) \frac{\sin(\rho \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x))}{\rho} \right) + O(\rho^{\nu+m-3} e^{\tau x}),$$

$$C^{(\nu)}(x, \lambda) = \left(\prod_{k=1}^j \xi_k^+ \right) \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left(\cos \rho x + \sum_{k=1}^j \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq j} \left(\prod_{i=1}^k \frac{\xi_{\mu_i}^-}{\xi_{\mu_i}^+} \right) \cos(\rho \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x)) \right) + O(\rho^{\nu+m-3} e^{\tau x}),$$

где

$$\xi_j^\pm := \frac{\gamma_j + \gamma_j^{-1}}{2}, \quad \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x) := 2 \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} b_{\mu_i} + (-1)^k x.$$

Используя теорему 1, получаем при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \Pi_\delta$:

$$a(\lambda) = \frac{(\alpha + \beta)\xi}{2} e^{-i\rho T} [1], \quad d(\lambda) = -\frac{\xi}{2i\rho} e^{-i\rho T} [1], \quad \xi := \prod_{j=1}^{N-1} \xi_j^+. \tag{11}$$

Кроме того,

$$a(\lambda) = O(e^{\tau T}), \quad d(\lambda) = O(\rho^{-1} e^{\tau T}), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \Pi. \tag{12}$$

Фиксируем $k = \overline{1, r}$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{1, r+N}}$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее (2) и краевым условиям:

$$\Phi_{kj}(0, \lambda) = \delta_{jk}, \quad j = \overline{1, r}, \tag{13}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Обозначим $M_k(\lambda) := \Phi'_{kk}(0, \lambda)$, $k = \overline{1, r}$. Функция $M_k(\lambda)$ называется *функцией Вейля* относительно граничной вершины v_k . Положим $M_{kj}^1(\lambda) := \Phi_{kj}(0, \lambda)$, $M_{kj}^0(\lambda) := \Phi'_{kj}(0, \lambda)$. Тогда

$$\Phi_{kj}(x_j, \lambda) = M_{kj}^1(\lambda) C_j(x_j, \lambda) + M_{kj}^0(\lambda) S_j(x_j, \lambda), \quad x_j \in [0, T_j], \quad j = \overline{1, r+N}, \quad k = \overline{1, r}. \tag{14}$$

В частности, $M_{kk}^1(\lambda) = 1$, $M_{kk}^0(\lambda) = M_k(\lambda)$. Подставляя (14) в (2) и (13), получаем линейную алгебраическую систему D_k относительно $M_{kj}^\nu(\lambda)$, $\nu = 0, 1$, $j = \overline{1, r+N}$. Определитель $\Delta_0(\lambda)$ системы D_k не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = \sigma(\lambda) \left(a_0(\lambda) + \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq N} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda) \prod_{i=1}^k \left(\sum_{e_j \in \mathcal{E}_{\mu_i}} \Omega_j(\lambda) \right) \right), \tag{15}$$



где

$$\sigma(\lambda) = \prod_{j=1}^r (\alpha_j S_j(T_j, \lambda)), \quad \Omega_j(\lambda) = \frac{\beta_j S_j'(T_j, \lambda)}{\alpha_j S_j(T_j, \lambda)}, \quad (16)$$

$$a_0(\lambda) = a(\lambda), \quad a_1(\lambda) = \alpha d(\lambda). \quad (17)$$

Отметим, что коэффициенты $a_0(\lambda)$ и $a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda)$ в (17) зависят только от $S_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ и $C_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ при $j = \overline{r+1, r+N}$, и (17) следует из теоремы 2. Нам не потребуются конкретные формулы для остальных коэффициентов $a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda)$. Функция $\Delta_0(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи B_0 . Функция $\Delta_0(\lambda)$ называется характеристической функцией для B_0 . Пусть $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$, $p = \overline{1, r}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$ получаются из $\Delta_0(\lambda)$ заменой $S_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ на $C_j^{(\nu)}(T_j, \lambda)$ при $j = \nu_1, \dots, \nu_p$, $\nu = 0, 1$. Точнее,

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) &= \sigma_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) \left(a_0(\lambda) + \sum_{k=1}^N \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq N} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(\lambda) \times \right. \\ &\times \left. \prod_{i=1}^k \left(\sum_{e_j \in \mathcal{E}_{\mu_i}, j \neq \nu_1, \dots, \nu_p} \Omega_j(\lambda) + \sum_{e_j \in \mathcal{E}_{\mu_i}, j = \nu_1, \dots, \nu_p} \Omega_j^0(\lambda) \right) \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\sigma_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) = \prod_{j=1, j \neq \nu_1, \dots, \nu_p}^r (\alpha_j S_j(T_j, \lambda)) \prod_{j=\nu_1, \dots, \nu_p} (\alpha_j C_j(T_j, \lambda)), \quad \Omega_j^0(\lambda) = \frac{\beta_j C_j'(T_j, \lambda)}{\alpha_j C_j(T_j, \lambda)}. \quad (19)$$

Функция $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи B_{ν_1, \dots, ν_p} . Функция $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$ называется характеристической функцией для B_{ν_1, \dots, ν_p} .

Решая алгебраическую систему D_k по формулам Крамера, получаем $M_{kj}^s(\lambda) = \Delta_{kj}^s(\lambda) / \Delta_0(\lambda)$, $s = 0, 1$, $j = \overline{1, r+N}$, где определитель $\Delta_{kj}^s(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой столбца при $M_{kj}^s(\lambda)$ на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}, \quad k = \overline{1, r}. \quad (20)$$

Равномерно по $x_j \in [0, T_j]$ имеем (см. [8]):

$$S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2i\rho} \left((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] - (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1] \right), \quad \rho \in \Pi, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (21)$$

$$C_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2} \left((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] + (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1] \right), \quad \rho \in \Pi, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Кроме того, при каждом фиксированном $x_k \in [0, T_k]$:

$$\Phi_{kk}^{(\nu)}(x_k, \lambda) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_k)[1], \quad \rho \in \Pi_\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty.$$

В частности, $M_k(\lambda) = (i\rho)[1]$, $\rho \in \Pi_\delta$, $|\rho| \rightarrow \infty$.

Используя (15), (21), (22), (11) и (12), известным методом (см., например, [9]) получаем следующие свойства характеристической функции $\Delta_0(\lambda)$ и собственных значений Λ_0 краевой задачи B_0 .

1. При $\rho \in \Pi$, $|\rho| \rightarrow \infty$,

$$\Delta_0(\lambda) = O\left(|\rho|^{-r} \exp\left(\tau \sum_{j=1}^{r+N} T_j\right)\right).$$

2. Существуют $h > 0$, $C_h > 0$, такие, что

$$|\Delta_0(\lambda)| \geq C_h |\rho|^{-r} \exp\left(\tau \sum_{j=1}^{r+N} T_j\right)$$



при $\tau \geq h$. Следовательно, собственные значения $\lambda_{n0} = \rho_{n0}^2$ лежат в области $0 \leq \tau < h$.

3. При $n \rightarrow \infty$

$$\rho_{n0} = \rho_{n0}^0 + O\left(\frac{1}{\rho_{n0}^0}\right),$$

где $\lambda_{n0}^0 = (\rho_{n0}^0)^2$ – собственные значения краевой задачи B_0 с $Q = 0$ и $H = 0$.

Характеристические функции $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$ имеют аналогичные свойства. В частности, при $\rho \in \Pi$, $|\rho| \rightarrow \infty$, имеем:

$$\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) = O\left(|\rho|^{p-r} \exp\left(\tau \sum_{j=1}^{r+N} T_j\right)\right).$$

Используя свойства характеристических функций и теорему Адамара, получаем, что задание спектра Λ_0 однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_0(\lambda)$, т.е. если $\Lambda_0 = \tilde{\Lambda}_0$, то $\Delta_0(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_0(\lambda)$. Аналогично, если $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, то $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$. Характеристические функции могут быть построены с помощью соответствующих бесконечных произведений (подробнее см. [8]).

4. В этом параграфе мы получим конструктивную процедуру решения обратной задачи 1 и докажем его единственность.

Фиксируем $k = \overline{1, r}$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу IP(k) на ребре e_k .

IP(k). Даны два спектра Λ_0 и Λ_k , построить $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$.

Теорема 4. Фиксируем $k = \overline{1, r}$. Задание двух спектров Λ_0 и Λ_k однозначно определяет потенциал q_k на ребре e_k .

Решение задачи IP(k) может быть получено методом спектральных отображений [8–9].

Теперь изучим следующую вспомогательную обратную задачу IP(0) на цикле e_0 . Рассмотрим краевую задачу B вида (4)–(6), где параметры задачи B_0 определяются из (3), причем α, β известны.

IP(0). Даны $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ и Ω , построить $q(x)$, $x \in [0, T]$, h, γ_j и η_j , $j = \overline{1, N-1}$.

Эта обратная задача решена в [10], где получено следующее утверждение.

Теорема 5. Задание $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ и Ω однозначно определяет $q(x)$, h, γ_j и η_j , $j = \overline{1, N-1}$. Решение задачи IP(0) может быть найдено по следующему алгоритму.

Алгоритм 1.

1. Строим $D(\lambda) = a(\lambda) + (1 + \alpha\beta)$.

2. Находим нули $\{z_n\}_{n \geq 1}$ целой функции $d(\lambda)$.

3. Вычисляем $Q(z_n)$ по формуле $Q(z_n) = \omega_n \sqrt{D^2(z_n) - 4\alpha\beta}$.

4. Строим $d_1(z_n) = (D(z_n) + Q(z_n))/(2\alpha)$.

5. Вычисляем последовательность Вейля $\{M_n\}_{n \geq 1}$ по формуле $M_n = -d_1(z_n)/\dot{d}(z_n)$.

6. По данным $\{z_n, M_n\}_{n \geq 1}$ строим $q(x), \gamma_j, \eta_j$, $j = \overline{1, N-1}$, решая разрывную обратную задачу (см. [11]).

7. Находим $S(T, \lambda)$, $S'(T, \lambda)$ и $C(T, \lambda)$.

8. Вычисляем h , используя (7).

Перейдем к решению обратной задачи 1. Сначала дадим доказательство теоремы 1. Пусть $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0, r}$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p} = \tilde{\Lambda}_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$ и $\Omega = \tilde{\Omega}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_k(\lambda) &\equiv \tilde{\Delta}_k(\lambda), & k &= \overline{0, r}, \\ \Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) &\equiv \tilde{\Delta}_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda), & p &= \overline{2, N}, & 1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r, & \nu_j \in \xi. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу (3) имеем $\gamma_j = \tilde{\gamma}_j$, $j = \overline{1, N-1}$, $\alpha = \tilde{\alpha}$, $\beta = \tilde{\beta}$. Используя теорему 4, получаем $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, T_k]$, и, следовательно,

$$C_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{C}_k(x_k, \lambda), \quad S_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{S}_k(x_k, \lambda), \quad k = \overline{1, r}. \quad (23)$$



В силу (16), (19) и (23) имеем:

$$\sigma(\lambda) \equiv \tilde{\sigma}(\lambda), \quad \sigma_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda) \equiv \tilde{\sigma}_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda), \quad \Omega_j(\lambda) \equiv \tilde{\Omega}_j(\lambda), \quad \Omega_j^0(\lambda) \equiv \tilde{\Omega}_j^0(\lambda), \quad j = \overline{1, r}.$$

Используя (15) и (18), получаем, в частности, $a_0(\lambda) = \tilde{a}(\lambda)$, $a_1(\lambda) = \tilde{a}_1(\lambda)$. С учетом (17) это дает

$$a(\lambda) = \tilde{a}(\lambda), \quad d(\lambda) = \tilde{d}(\lambda).$$

Из теоремы 5 следует, что $q_k(x_k) = \tilde{q}_k(x_k)$ п. в. на $[0, T_k]$, $k = \overline{r+1, r+N}$, $h = \tilde{h}$, $\eta_j = \tilde{\eta}_j$, $j = \overline{1, N-1}$. Учитывая (3), получаем $H = \tilde{H}$. Теорема 1 доказана.

Решение обратной задачи 1 может быть найдено по следующему алгоритму.

Алгоритм 2. Даны Λ_k , $k = \overline{0, r}$, $\Lambda_{\nu_1, \dots, \nu_p}$, $p = \overline{2, N}$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq r$, $\nu_j \in \xi$, Ω .

1. Строим $\Delta_k(\lambda)$ и $\Delta_{\nu_1, \dots, \nu_p}(\lambda)$.
2. Вычисляем γ_j , $j = \overline{1, N-1}$, α и β , используя (3).
3. При каждом $k = \overline{1, r}$ решаем обратную задачу IP(k) и находим $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$.
4. Для $k = \overline{1, r}$ строим $C_k(x_k, \lambda)$ и $S_k(x_k, \lambda)$, $x_k \in [0, T_k]$.
5. Вычисляем $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$, используя (15), (17) и (18).
6. По $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ и Ω строим $q_k(x_k)$, $[0, T_k]$, $k = \overline{r+1, r+N}$, h и η_j , $j = \overline{1, N-1}$.
7. Используя (3), строим H .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00134).

Библиографический список

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.
2. Langese J. E., Leugering G., Schmidt J. P. G. Modelling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures. Boston, Birkhäuser, 1994.
3. Belishev M. I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. Vol. 20. P. 647–672.
4. Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs // Inverse Problems. 2005. Vol. 21. P. 1075–1086.
5. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators on graphs with a cycle // Operators and Matrices. 2008. Vol. 2, № 4. С. 543–553.
6. Юрко В. А. Обратная задача для операторов Штурма–Лиувилля на графе-еже // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 3. С. 459–471.
7. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators on bush-type graphs // Inverse Problems. 2009. Vol. 25, № 10, 105008. 14 p.
8. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
9. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
10. Yurko V. A. Quasi-periodic boundary value problems with discontinuity conditions inside the interval // Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, SM–DU–767. Universität Duisburg–Essen, 2013. P. 1–7.
11. Yurko V. A. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems // Integral Transforms and Special Functions. 2000. Vol. 10, № 2. P. 141–164.

On an Inverse Problem for Differential Operators on Hedgehog-Type Graphs

V. A. Yurko

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, YurkoVA@info.sgu.ru

An inverse spectral problem is studied for Sturm–Liouville differential operators on hedgehog-type graphs with generalized matching conditions in the interior vertices and with Dirichlet boundary conditions in the boundary vertices. A uniqueness theorem of recovering potentials from given spectral characteristics is provided, and a constructive solution for the inverse problem is obtained.

Key words: hedgehog-type graphs, Sturm–Liouville operators, inverse spectral problems.



References

1. Pokornyj Ju. V., Penkin O. M., Prjadiev V. L., Borovskih A. V., Lazarev K. P., Shabrov S. A. *Differencial'nye uravneniya na geometricheskikh grafah* [Differential equations on the geometric graphs]. Moscow, Fizmatlit, 2004 (in Russian).
2. Langese J. E., Leugering G., Schmidt J. P. G. *Modelling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*. Boston, Birkhäuser, 1994. DOI : 10.1007/978-1-4612-0273-8.
3. Belishev M. I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method. *Inverse Problems*, 2004, vol. 20, pp. 647–672. DOI: 10.1088/0266-5611/20/3/002.
4. Yurko V. A. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs. *Inverse Problems*, 2005, vol. 21, pp. 1075–1086. DOI : 10.1088/0266-5611/21/3/017.
5. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators on graphs with a cycle. *Operators and Matrices*, 2008, vol. 2, no. 4, pp. 543–553. DOI: 10.7153/oam-02-34.
6. Yurko V. A. Inverse problem for Sturm–Liouville operators on hedgehog-type graphs. *Math. Notes*, 2011, vol. 89, no. 3, pp. 438–449. DOI : 10.1134/S000143461103014X.
7. Yurko V. A. Inverse problems for Sturm–Liouville operators on bush-type graphs. *Inverse Problems*, 2009, vol. 25, no. 10, 105008, 14 p. DOI: 10.1088/0266-5611/25/10/105008.
8. Yurko V. A. *Vvedenie v teoriju obratnykh spektral'nykh zadach* [Introduction to the inverse spectral problems theory]. Moscow, Fizmatlit, 2007 (in Russian).
9. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002.
10. Yurko V. A. Quasi-periodic boundary value problems with discontinuity conditions inside the interval. *Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik*, SM–DU–767, Universität Duisburg–Essen, 2013, pp. 1–7.
11. Yurko V. A. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems. *Integral Transforms and Special Functions*, 2000, vol. 10, no. 2, pp. 141–164. DOI : 10.1080/10652460008819282.



МЕХАНИКА

УДК 539.32

НОВЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МНОГОСЛОЙНОГО ГРАФЕНА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

О. Е. Глухова¹, А. В. Доль², А. С. Колесникова³, В. В. Шунаев⁴

¹Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой радиотехники и электродинамики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, oeglukhova@yandex.ru

²Программист отдела математического моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, dzero@pisem.net

³Программист отдела математического моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, kolesnikova.88@mail.ru

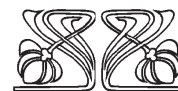
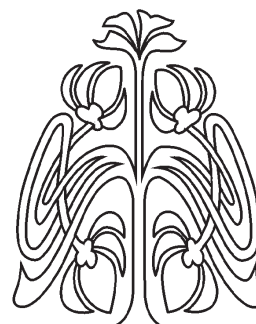
⁴Аспирант кафедры радиотехники и электродинамики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, vshunaev@list.ru

Предложен новый подход к исследованию механических свойств многослойного графена. В основе метода лежит идея о том, что ван-дер-ваальсовое взаимодействие между графеновыми листами можно моделировать фиктивным слоем сплошной среды. Напряженно-деформированное состояние многослойного графена описывалось стационарными уравнениями Навье–Ламе. Данный подход был успешно апробирован при моделировании прогиба многослойного графенового листа. В рамках выбранного приближения, согласно которому графеновые слои рассматривались как линейно-упругий материал, для каждого участка кривой, аппроксимирующей зависимость стрелы прогиба графена от приложенной силы, подбирался свой набор упругих констант.

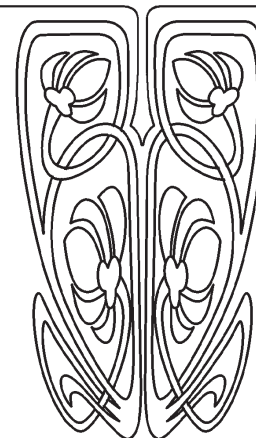
Ключевые слова: многослойный графен, метод конечных элементов, прогиб, модуль упругости, ван-дер-ваальсовое взаимодействие.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широкий спектр применения многослойного графена и монослоя графена обусловлен их высокой теплопроводностью и подвижностью зарядов, а также уникальными механическими свойствами. В связи с этим актуальной задачей является исследование прочностных свойств этих структур, а также анализ их поведения во время деформации. Для изучения механических свойств графеновых листов ведутся теоретические [1–3] и экспериментальные [4] исследования по наноиндентированию материала. С. Lee с соавторами [4] экспериментально определили модули Юнга монослойного и бислойного графена (1.04 и 0.98 ТПа) с помощью иглы атомно-силового микроскопа, а также установили, что зависимость величины приложенной силы от стрелы прогиба описывается кубической параболой. В связи с тем, что эксперименты по наноинденти-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





рованию графеновых листов являются чрезвычайно дорогостоящими и уникальными, их пытаются заменить теоретическими исследованиями. Например, в работе [1] результаты эксперимента, представленные в работе [4], воспроизведены с помощью теории нелинейной гиперупругости для случая наноиנדентирования. Zhao Wang с соавторами [2] с помощью метода молекулярной динамики, основанного на потенциале AIREBO, показали, что свободный графен, не лежащий на подложке, способен прогибаться под действием внешнего электрического поля. В этой работе было установлено, что прогиб графенового листа определяется напряженностью поля и резко возрастает с увеличением длины пластины. В работе [3] представлена зависимость стрелы прогиба от приложенной силы.

Основной проблемой при моделировании наноиנדентирования графеновых листов молекулярно-механическими методами является необходимость длительных расчетов траектории атомов. До настоящего времени в рамках теории сплошной среды исследований графеновых слоев не проводилось, хотя ее применение значительно бы ускорило исследование процесса индентирования. В связи с этим целью данной работы является создание модели прогиба моно- и бислойного графена в рамках теории сплошной среды методом конечных элементов. В рамках теории сплошной среды в качестве модели графеновых слоев используется модель линейно-упругого материала со своим набором упругих констант, что позволит упростить расчет по сравнению с моделью в работе [5].

1. ПРОГИБ ГРАФЕНОВОГО ЛИСТА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Многие исследователи используют метод конечных элементов для расчетов графеновых пластин и трубок [5–7] в связи с тем, что графеновый лист, состоящий из конечного числа атомов углерода, может рассматриваться как тонкая упругая пластина в рамках теории больших деформаций. Результаты расчетов методом молекулярной динамики показали, что кривая зависимости приложенной силы от стрелы прогиба изменяется по нелинейному закону [3]. Эту кривую, состоящую из пяти участков, можно аппроксимировать ломаной (рис. 1), и тогда на каждом таком участке можно считать поведение материала близким к идеально упругому. Это позволяет использовать модель линейно-упругого материала с набором упругих констант для каждого отрезка. Погрешность аппроксимации на первом отрезке составила порядка 5%.

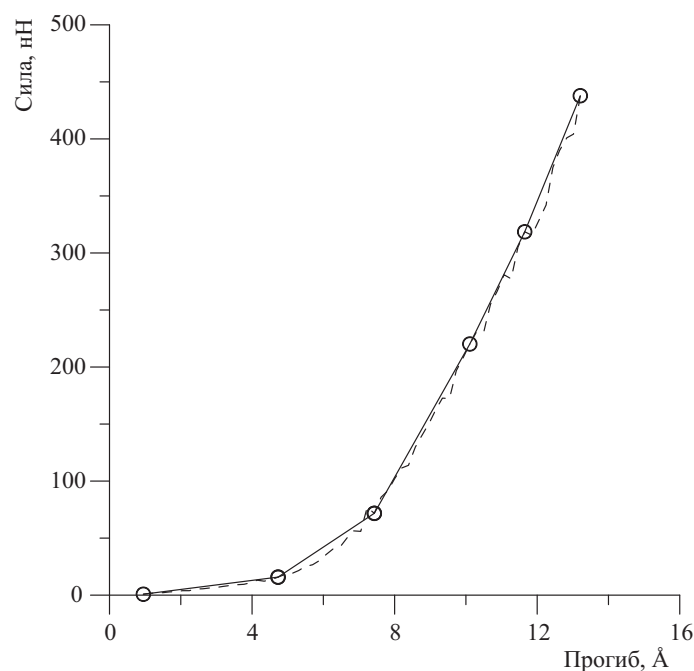


Рис. 1. Аппроксимация кривой зависимости стрелы прогиба от приложенной силы ломаной линией



Для определения упругих констант на первом участке кривой был проведен ряд численных расчетов в программном пакете конечно-элементного моделирования ANSYS. Решалась задача о прогибе пластины с шарнирно закрепленными краями сосредоточенной силой, приложенной в центре. Длина пластины бралась равной 4.118 нм, ширина 3.69 нм, а толщина 0.34 нм. Такие параметры были взяты потому, что на момент исследований уже имелись данные по моделированию прогиба аналогичной пластины методами молекулярной динамики.

Решалась задача о статическом нагружении пластины в предположении о линейной зависимости между напряжениями и деформациями с учетом конечных деформаций.

Конечно-элементная сетка подбиралась таким образом, чтобы погрешность в расчете максимального прогиба не превышала 0.1 нм. Для разбиения модели использовались гексаэдрические элементы SOLID 185. Размер ребра элемента у края пластины составил 0.1 нм. При этом толщина элемента составляла 0.01 нм. В центре пластины сетка сгущалась для увеличения точности расчетов. Минимальный размер ребра элемента в области сгущения составил 0.01 нм.

Методом бинарного поиска подбирался такой модуль Юнга, чтобы величина прогиба совпала со значениями, полученными методом молекулярной динамики (рис. 2).

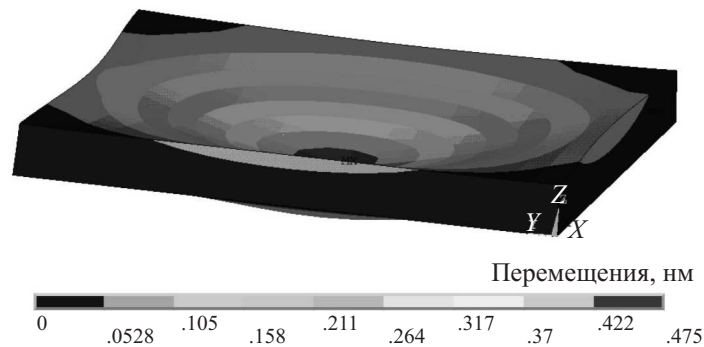


Рис. 2. Расчет прогиба графенового листа в ANSYS

В результате расчетов для первого отрезка кривой было получено значение модуля упругости графенового листа 5.6 ТПа. Аналогично были подобраны упругие константы для остальных отрезков аппроксимирующей ломаной. Подобранные механические константы, можно проводить дальнейшие расчеты для прогиба многослойного графена методом конечных элементов. Коэффициент Пуассона принимался для каждого участка равным 0.3. Расчеты на каждом последующем участке ломаной необходимо проводить на геометрических моделях, полученных на предыдущем этапе, то есть деформированных предыдущей нагрузкой. Такие расчеты следует проводить с использованием нескольких шагов нагружения. Для второго отрезка значение модуля упругости графенового листа составляет 11.5 ТПа, для третьего — 16.9 ТПа, а для последующих — приблизительно 17 ТПа.

2. ПРОГИБ ДВУСЛОЙНОГО ГРАФЕНА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Основной сложностью при конечно-элементном моделировании прогиба многослойного графена является учет ван-дер-ваальсового взаимодействия между атомами углерода различных слоев. Это связано с тем, что моделирование проводится в рамках теории сплошной среды, которая не позволяет рассматривать в отдельности каждый атом. Однако без учета взаимодействия Ван-дер-Ваальса невозможно правильно осуществить прогиб нескольких (в частности, двух) графеновых листов. Описанная проблема была решена путем введения между двумя листами графена фиктивного слоя, который описывает взаимодействие Ван-дер-Ваальса. Для данного слоя, материал которого считался линейно-упругим, изотропным, упругие константы подбирались так, чтобы значения прогибов верхней и нижней пластин для каждой нагрузки совпадали с величинами, полученными в результате численного эксперимента методом молекулярной динамики [3]. Упругие константы слоев графена принимались равными значениям, полученным в п. 1. Методом бинарного поиска было установле-



но, что модуль Юнга фиктивного слоя равен 25 ГПа. В этом случае величины прогиба верхней и нижней пластин графена при действии на них силы в 12 нН оказалась равными 0.13 нм и 0.104 нм соответственно (рис. 3). Эти значения совпадают с результатами, полученными с помощью метода молекулярной динамики [3].

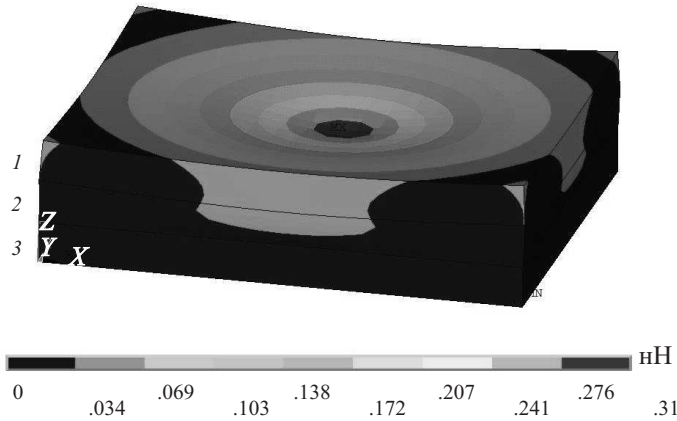


Рис. 3. Прогиб двуслойного графена приложенной силой 12 нН: 1 — верхний слой графена, 2 — «прослойка», 3 — нижний слой графена

3. ВЫВОДЫ

В данной работе на основании проведенных нами численных экспериментов по прогибу моно- и многослойного графена предложена модель, имитирующая диполь-дипольное взаимодействие листов графена виртуальным слоем сплошной среды. К достоинствам метода можно отнести значительное сокращение времени расчетов и снижение требований к вычислительному оборудованию. Установлено, что значение модуля упругости фиктивного слоя, моделирующего ван-дер-ваальсово взаимодействие, составляет 25 ГПа. Воспроизведение прогиба моно- и бислойного графена в рамках теории сплошной среды отвечает численному эксперименту, проведенному в работе [3] методом молекулярной динамики. Полученные значения могут быть в дальнейшем использованы для расчета более сложных систем, в частности, для прогиба трех и более графеновых пластин.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-02-00807, № 13-08-00986, № 14-01-31429, № 14-01-31508) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009—2013 годы», XLI очередь мероприятия 1.2.1, технические науки, номер соглашения 14.В37.21.1094, Президентской стипендии 2013–2016 гг. (проект СП–2302.2013.1).

Библиографический список

1. Gil A. J., Adhikari S., Scarpa F., Bonet J. The formation of wrinkles in single-layer graphene sheets under nanoindentation // J. Phys. Condens. Matter. 2010. Vol. 22, № 14. P. 145302-1–145302-6. DOI: 10.1088/0953-8984/22/14/145302.
2. Wang Z., Laetitia P., Jamil E. Deflection of suspended graphene by a transverse electric field // Phys. Rev. B. 2009. Vol. 81, iss. 15. P. 155405-1–155405-5.
3. Глухова О. Е., Шунаев В. В. Исследование прочности на разрыв моно- и бислойного графена // Нано- и микросистемная техника. 2012. № 7. С. 25–29.
4. Lee C., Wei X., Li Q., Carpick R., Kysar J. W., Hone J. Elastic and frictional properties of graphene // Physica Status Solidi. 2009. Vol. 246, № 11–12. P. 2562–2567.
5. Rouhi S., Ansari R. Atomistic finite element model for axial buckling and vibration analysis of single-layered graphene sheets // Physica E : Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2012. Vol. 44, iss. 4. P. 764–772.
6. Mikhailov S. Physics and Applications of Graphene – Theory. Rijeka, Croatia : InTech, 2011. 534 p.
7. Nahas M. N., Abd-Rabou M. Finite element modeling of carbon nanotubes // Intern. J. of Mech. and Mechatronics IJMME-IJENS. 2010. Vol. 10, № 3. P. 19–24.



The New Approach to Investigation of Multilayer Graphene Mechanical Properties by the Finite-element Method

O. E. Glukhova, A. V. Dol', A. S. Kolesnikova, V. V. Shunaev

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, oeglukhova@yandex.ru, dzero@pisem.net, kolesnikova.88@mail.ru, vshunaev@list.ru

A new approach to investigate the mechanical properties of multilayer graphene was suggested. The method is based on the idea that the van der Waals interaction between the graphene sheets can be simulated by a fictitious layer of continuum. The stress-strain state of multilayer graphene is described by stationary equations of Navier–Lame. This approach has been successfully tested on graphene deflection. The graphene layers were considered as linear-elastic material. For each part of the curve that approximates the dependence of the graphene deflection on the applied force, corresponding elastic constants of graphene layers were found.

Key words: multilayer graphene, finite element method, deflection, modulus of elasticity, van der Waals interactions.

References

1. Gil A. J., Adhikari S., Scarpa F., Bonet J. The formation of wrinkles in single-layer graphene sheets under nanoindentation. *J. Phys. Condens. Matter.*, 2010, vol. 22, no. 14, pp. 145302-1–145302-6. DOI: 10.1088/0953-8984/22/14/145302.
2. Wang Z., Laetitia P., Jamil E. Deflection of suspended graphene by a transverse electric field. *Physical Review B.*, 2009, vol. 81, iss. 15, pp. 155405-1–155405-5.
3. Glukhova O. E., Shunaev V. V. Investigation of the tensile strength of mono- and bilayer graphene. *J. Nano and microsystem technique*, 2012, no. 7, pp. 25–29 (in Russian).
4. Lee C., Wei X., Li Q., Carpick R., Kysar J. W., Hone J. Elastic and frictional properties of graphene. *Physica Status Solidi*, 2009, vol. 246, no. 11–12, pp. 2562–2567.
5. Rouhi S., Ansari R. Atomistic finite element model for axial buckling and vibration analysis of single-layered graphene sheets. *Physica E : Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2012, vol. 44, iss. 4, pp. 764–772.
6. Mikhailov S. *Physics and Applications of Graphene – Theory*. Rijeka, Croatia, InTech, 2011, 534 p.
7. Nahas M. N., Abd-Rabou M. Finite element modeling of carbon nanotubes. *Intern. J. of Mechanical and Mechatronics IJMM-IJENS*, 2010, vol. 10, no. 3, pp. 19–24.

УДК 539.374

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗАННЫХ ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В МИКРОПОЛЯРНЫХ КОНТИНУУМАХ ПЕРВОГО ТИПА

В. А. Ковалев¹, Е. В. Мурашкин², Ю. Н. Радаев³

¹Доктор физико-математических наук, профессор кафедры управления проектами и инвестициями, Московский городской университет управления Правительства Москвы, vlad_koval@mail.ru

²Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

³Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

В представляемой работе в рамках линейной теории обобщенной микрополярной термоупругости первого типа (GNI/CTE) с помощью связанной системы уравнений движения и теплопроводности выполнен анализ плоских гармонических связанных термоупругих волн перемещений, микровращений и температуры. Исследованы также закономерности распространения волновых поверхностей слабых разрывов перемещений, микровращений и температуры в термоупругом микрополярном континууме первого типа. Вычислены нормальные скорости распространения указанных волновых поверхностей. Получено и проанализировано с помощью пакета символьных вычислений *Mathematica* детерминантное уравнение для определения волновых чисел (постоянных распространения (PC)) плоских гармонических связанных термоупругих волн перемещений, микровращений и температуры. Факторизация полученного частотного полиномиального уравнения 14-й степени позволила свести его к биквадратному и бикубическому уравнениям относительно волновых чисел. Для волновых чисел поперечных и продольных волн получены алгебраические формы, содержащие многозначные комплексные квадратные и кубические радикалы.

Ключевые слова: микрополярная термоупругость, континуум первого типа, слабый разрыв, продольная волна, поперечная волна, волновое число, частотное уравнение.



ВВЕДЕНИЕ

Проблемы деформации континуумов, когда наряду с обычными перемещениями \mathbf{u} возможны также микровращения ϕ , постоянно привлекают внимание исследователей, начиная с классической работы Э. Коссера и Ф. Коссера (E. et F. Cosserat) [1]. В подобных моделях, в отличие от классических теорий, состояние континуума описывается несимметричными тензорами деформаций и напряжений, поэтому упругие тела в рамках несимметричной теории характеризуются достаточно большим числом определяющих упругих постоянных. Необходимость подобного усложнения объясняется невозможностью в рамках классической теории упругости (и пьезоэластичности) объяснить, например, аномальный пьезоэффект в кварце, дисперсию упругих волн, а также ряд других экспериментально наблюдаемых упругих свойств чистых кристаллов.

В настоящее время быстро развиваются математические модели термоупругого поведения твердых тел (GN-термоупругость), основанные на различных модификациях закона теплопроводности Фурье. При этом ставится цель получения связанных гиперболических уравнений термоупругости, которые гарантировали бы выполнение следующих условий: 1) конечность скорости распространения теплового сигнала; 2) возможность пространственного распространения теплового импульса без затухания; 3) отсутствие искажения волны в смысле получения решений классического даламберовского типа с сохраняющимся профилем. Одно из таких направлений связано с публикациями [2, 3]. GN-теории термоупругости можно разделить на три различных варианта: термоупругость, основанную на законе теплопроводности Фурье, с бесконечно большой скоростью распространения экспоненциально затухающего теплового сигнала (континуум первого типа, GNI/СТЕ); термоупругость с сохраняющейся энергией и конечной скоростью распространения термических волн «второго звука» (континуум второго типа, GNII, гиперболическая термоупругость); третий вариант (континуум третьего типа, GNIII) смешанный и включает первые два в качестве предельных случаев. Очевидно, что GNIII-теория охватывает более широкий круг моделируемых явлений по сравнению с классической теорией теплопроводности Фурье. Отметим, что GNII — единственная известная в настоящее время термодинамически корректная теория, которая позволяет описать теплопроводность в твердом теле как волновой процесс, не сопровождающийся рассеянием энергии, и сформулировать математическую модель процесса теплопроводности в твердых телах с помощью системы гиперболических уравнений в частных производных, обеспечивающих (в силу своей аналитической классификации) конечную скорость распространения тепла.

Полный анализ плоских гармонических GNI/СТЕ-термоупругих волн был выполнен в статье [4], было показано, что для каждой частоты всегда имеется ровно два комплексных волновых числа, вещественная и мнимая части которых строго положительны. Плоские волны в GNII-термоупругих средах исследованы в работе [5]. Плоские термоупругие волны «второго звука» характеризуются четырьмя вещественными волновыми числами, два из которых положительны. В работе [6] проведен анализ волновых чисел плоских гармонических связанных термоупругих волн, которые описываются линейными уравнениями GNIII-термоупругости. Все указанные исследования [4–6] проводились в рамках линейной симметричной упругости. Они подытожены в монографии [7].

В настоящем исследовании ставится задача вычисления волновых чисел плоских гармонических термоупругих волн в GNI/СТЕ-термоупругих микрополярных средах при наличии микровращений. Исследованы также закономерности распространения поверхностей слабых разрывов перемещений, микровращений и температуры в термоупругом микрополярном континууме первого типа. Вычислены скорости распространения поверхностей слабых разрывов. Получено и проанализировано с помощью пакета символьных вычислений *Mathematica* детерминантное уравнение для определения волновых чисел плоских гармонических связанных термоупругих волн перемещений, микровращений и температуры. Факторизация полученного частотного полиномиального уравнения 14-й степени позволила свести его к биквадратному и бикубическому уравнениям относительно волновых чисел, что затем без труда позволяет найти волновые числа плоских гармонических связанных термоупругих поперечных и продольных волн.



1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПЕРВОГО ТИПА (GNI/СТЕ)

Воспользуемся моделью термоупругого микрополярного континуума первого типа (см., например, [8, 9]). В этом случае векторы перемещений \mathbf{u} и микровращений ϕ связаны с несимметричным тензором деформации \mathbf{e} и тензором изгиба–кручения $\mathbf{\Gamma}$ соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \nabla \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} \cdot \phi, \\ \mathbf{\Gamma} &= \nabla \otimes \phi, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\epsilon}$ — кососимметричный тензор Леви–Чивита третьего ранга, ∇ — трехмерный оператор Гамильтона (набла Гамильтона).

Несимметричный тензор силовых напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и тензор моментных напряжений \mathbf{m} вычисляются согласно определяющему закону GNI/СТЕ-термоупругости:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (\mu + \eta)\mathbf{e} + (\mu - \eta)\mathbf{e}^T + (\lambda \text{tr} \mathbf{e} - \alpha \theta)\mathbf{I}, \\ \mathbf{m} &= (\gamma + \varepsilon)\mathbf{\Gamma} + (\gamma - \varepsilon)\mathbf{\Gamma}^T + (\beta \text{tr} \mathbf{\Gamma} - \varsigma \theta)\mathbf{I}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{I} — единичный тензор; $\lambda, \mu, \eta, \gamma, \beta, \varepsilon$ — изотермические определяющие постоянные микрополярной термоупругой среды первого типа; α, ς — определяющие постоянные, обеспечивающие связанность уравнений движения и теплопроводности. Постоянные α, ς зависят не только от механических свойств среды, но и от термических свойств.

Уравнения движения микрополярной среды запишем в предположении отсутствия массовых сил и массовых моментов:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \nabla \cdot \mathbf{m} &= \mathfrak{J} \ddot{\phi}. \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ — плотность среды, \mathfrak{J} — мера микроинерции среды при вращении, точка над символом обозначает частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных координатах.

Уравнения движения (3) следует дополнить уравнением теплопроводности. Его нетрудно получить, воспользовавшись законом распространения тепла Фурье, который устанавливает пропорциональность вектора потока тепла \mathbf{h} и отрицательного градиента температуры θ :

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta,$$

где Λ_* — коэффициент теплопроводности, $\Lambda_* > 0$.

Если подставить напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{m} из формул (2) в уравнения движения (3) и выразить тензоры $\mathbf{\Gamma}$ и \mathbf{e} через перемещения \mathbf{u} и микровращения ϕ , то получим замкнутую систему связанных уравнений движения и теплопроводности для линейного изотропного микрополярного термоупругого тела первого типа при условии отсутствия массовых сил, моментов и источников тепла [8, 10]:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu - \eta) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mu + \eta) \nabla^2 \mathbf{u} + 2\eta \nabla \times \phi - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ (\beta + \gamma - \varepsilon) \nabla \nabla \cdot \phi + (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \phi - 4\eta \phi + 2\eta \nabla \times \mathbf{u} - \varsigma \nabla \theta - \mathfrak{J} \ddot{\phi} = \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \theta - \frac{\kappa}{\Lambda_*} \dot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda_*} \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \frac{\varsigma}{\Lambda_*} \nabla \cdot \dot{\phi} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ — трехмерный оператор Лапласа, θ — приращение температуры над отсчетной температурой, θ_0 — отсчетная температура, Λ_* — коэффициент теплопроводности (коэффициент термической диффузии), κ — теплоемкость (на единицу объема) при постоянной деформации.

Как указывалось выше, отличные от нуля определяющие постоянные α, ς обеспечивают связанность уравнений микрополярной термоупругости. Обычно считается, что $\varsigma = 0$ [10]. Ради полноты анализа мы сохраним эту определяющую постоянную во всех дальнейших рассуждениях.

Скалярное уравнение в системе (4) называется обобщенным уравнением теплопроводности, сопряженным с уравнениями движения (первое и второе уравнения в системе (4)).



2. СЛАБЫЕ РАЗРЫВЫ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ТЕРМОУПРУГОМ МИКРОПОЛЯРНОМ КОНТИНУУМЕ ПЕРВОГО ТИПА

Исследуем сначала закономерности распространения слабых разрывов перемещений \mathbf{u} , микровращений ϕ и температуры θ в термоупругом микрополярном континууме первого типа. Отметим, что система дифференциальных уравнений в частных производных (4) содержит частные производные не выше второго порядка. Пусть в трехмерном пространстве с нормальной скоростью G распространяется фронт (волновая поверхность) слабых разрывов перемещений \mathbf{u} , микровращений ϕ и температуры θ . Обозначим через \mathbf{n} единичный вектор нормали к указанной волновой поверхности. Тогда геометрические и кинематические условия совместности второго порядка Адамара—Томаса будут иметь вид¹

$$\begin{aligned} [\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{u}] &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}, & [\nabla \otimes \nabla \otimes \phi] &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{S}, \\ [\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}] &= -G\mathbf{n} \otimes \mathbf{A}, & [\nabla \otimes \dot{\phi}] &= -G\mathbf{n} \otimes \mathbf{S}, \\ [\dot{\mathbf{u}}] &= G^2\mathbf{A}, & [\dot{\phi}] &= G^2\mathbf{S}, \\ [\nabla \otimes \nabla \theta] &= B\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (5)$$

где квадратные скобки обозначают скачок при переходе через поверхность слабого разрыва. $B, \mathbf{A}, \mathbf{S}$ — некоторые поля, определенные на этой поверхности, причем равенства $B = 0, \mathbf{A} = \mathbf{0}, \mathbf{S} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность действительно является поверхностью слабого разрыва. Уравнения (4) вместе с (5) дают следующие соотношения, связывающие скачки частных производных второго порядка от перемещений \mathbf{u} , микровращений ϕ и температуры θ при переходе через волновую поверхность:

$$\begin{cases} (\rho G^2 - (\mu + \eta))\mathbf{A} - (\lambda + \mu - \eta)\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{0}, \\ (\mathfrak{J}G^2 - (\gamma + \varepsilon))\mathbf{S} - (\beta + \gamma - \varepsilon)\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) = \mathbf{0}, \\ B - \frac{\alpha G}{\Lambda_*}\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*}\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Вычислим далее проекции системы (6) на нормальное \mathbf{n} и касательное $\boldsymbol{\tau}$ направления к волновой поверхности. При проектировании системы уравнений (6) третье скалярное уравнение не изменится. Проекция векторных уравнений (6) на нормальное направление \mathbf{n} приводит к следующей однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} (\rho G^2 - (\lambda + 2\mu))(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) = 0, \\ (\mathfrak{J}G^2 - (\beta + 2\gamma))(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) = 0, \\ B - \frac{\alpha G}{\Lambda_*}\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*}\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Если $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = 0$, тогда $B = 0$ и, возвращаясь к (6), получаем, что скалярное уравнение в (6) удовлетворяется тождественно; если оба множителя при векторах поляризации отличны от нуля, то $\mathbf{A} = \mathbf{0}, \mathbf{S} = \mathbf{0}$, и поверхность не является поверхностью слабого разрыва.

В итоге остается три различных случая:

I случай — $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \neq 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = 0$;

II случай — $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \neq 0$;

III случай — $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \neq 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \neq 0$.

Рассмотрим последовательно каждый из перечисленных выше случаев. В первом случае выполнение первого уравнения системы (7) возможно только на волновой поверхности, распространяющейся с нормальной скоростью:

$$G = c_{\parallel}, \quad (8)$$

где $c_{\parallel} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$.

¹Соответствующая теория геометрических и кинематических условий совместности изложена, например, в известной монографии, см.: Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.



В этом случае нормальная скорость распространения поверхности слабого разрыва G (8) оказывается равной скорости чисто упругих продольных волн c_{\parallel} . Кроме того, согласно третьему уравнению системы (7) при переходе через указанную волновую поверхность поле температур также претерпевает слабый разрыв:

$$B = \frac{\alpha G}{\Lambda_*} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}.$$

Второй случай подразумевает наличие слабого разрыва микровращений $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \neq 0$. Тогда выполнение второго уравнения системы (7) возможно только на поверхности слабого разрыва, распространяющейся с нормальной скоростью:

$$G = c_{\parallel}^{\mu\mu}, \quad (9)$$

где $c_{\parallel}^{\mu\mu} = \sqrt{(\beta + 2\gamma)/\mathfrak{J}}$ есть скорость волны кручения. Как и в предыдущем случае, указанный слабый разрыв микровращений связан со слабым разрывом поля температур третьим уравнением системы (7):

$$B = \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}.$$

Таким образом, определяющие постоянные α , ς характеризуют интенсивность слабого температурного разрыва.

В третьем случае множители при $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$ должны одновременно обращаться в нуль, что невозможно, если $c_{\parallel} \neq c_{\parallel}^{\mu\mu}$. Ясно, что при этом рассматриваемая поверхность не будет волновой. Если континуум можно охарактеризовать определяющим равенством $c_{\parallel} = c_{\parallel}^{\mu\mu}$, то волновая поверхность будет волной, распространяющейся со скоростью

$$G = c_{\parallel} = c_{\parallel}^{\mu\mu},$$

а слабый разрыв поля температуры находится из условия

$$B = \frac{\alpha G}{\Lambda_*} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} + \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}. \quad (10)$$

Соотношение (10) подразумевает возможность бездиссипативного распространения продольной волны при выполнении условия $B = 0$, т. е. когда

$$\frac{\alpha}{\varsigma} = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}}.$$

Вычислим проекцию системы уравнений (6) на произвольное касательное направление $\boldsymbol{\tau}$ к волновой поверхности, третье скалярное уравнение переписывается без изменений:

$$\begin{cases} (\rho G^2 - (\mu + \eta))(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}) = 0, \\ (\mathfrak{J} G^2 - (\gamma + \varepsilon))(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{S}) = 0, \\ B - \frac{\alpha G}{\Lambda_*} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Вновь возможны три различных случая:

I случай — $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A} \neq 0$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{S} = 0$;

II случай — $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A} = 0$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{S} \neq 0$;

III случай — $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A} \neq 0$, $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{S} \neq 0$.

Первый случай подразумевает наличие слабого разрыва перемещений, который возможен лишь на поверхности, распространяющейся со скоростью

$$G = c_{\perp}^{\mu}, \quad (12)$$

где $c_{\perp}^{\mu} = \sqrt{(\mu + \eta)/\rho}$.

Заметим, что при равенстве нулю определяющей микрополярной постоянной η скорость G (12) в точности совпадает со скоростью чисто упругой поперечной волны $c_{\perp} = \sqrt{\mu/\rho}$.



Во втором случае второе уравнение системы (11) позволяет определить скорость распространения слабого разрыва микровращений:

$$G = c_{\perp}^{\mu\mu}, \quad (13)$$

где

$$c_{\perp}^{\mu\mu} = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{\mathfrak{J}}}.$$

Заметим, что слабый разрыв температуры никак не связан с касательными составляющими слабого разрыва полей \mathbf{u} , ϕ .

В третьем случае множители при $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}$ и $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{S}$ не могут одновременно обращаться в нуль, если $c_{\perp}^{\mu} \neq c_{\perp}^{\mu\mu}$. Если континуум допускает совпадение скоростей поперечных волн $c_{\perp}^{\mu} = c_{\perp}^{\mu\mu}$, то скорость распространения волновой поверхности оказывается равной

$$G = c_{\perp}^{\mu} = c_{\perp}^{\mu\mu}.$$

Слабый разрыв поля температуры вновь определяется из условия (10) и он исчезает при отсутствии нормальных проекций векторов поляризации.

Отметим, что в случаях (12), (13) поверхности слабых разрывов в термоупругой микрополярной среде типа GNI/STE могут распространяться в отсутствие слабых разрывов температурного поля, что означает бездиссипативный механизм распространения подобных поверхностей.

3. ПЛОСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ СВЯЗАННЫЕ ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ В МИКРОПОЛЯРНОМ КОНТИНУУМЕ ПЕРВОГО ТИПА

Плоская гармоническая связанная микрополярная термоупругая волна обладает достаточно простой аналитической структурой вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \phi = \mathbf{S}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad \theta = Be^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (14)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор, ω — циклическая частота; \mathbf{A} , \mathbf{S} — векторы поляризации волны; B — амплитуда отклонений температуры от отсчетной температуры. Не следует путать с обозначениями п. 2, где \mathbf{A} , \mathbf{S} , B — величины слабых разрывов полей перемещений, микровращений и температуры соответственно. Волновое число k (модуль волнового вектора \mathbf{k} или постоянная распространения волны) может быть как вещественной величиной, так и комплексной.

Заметим, что в физической литературе волновым числом обычно называется $\text{Re } k$; величина $\text{Im } k$ называется коэффициентом затухания. С волновым числом k связана также следующая терминология:

$$\begin{aligned} \text{фазовая скорость волны} & \quad - \quad \frac{\omega}{\text{Re } k}, \\ \text{глубина проникания волны} & \quad - \quad \frac{1}{\text{Im } k}, \\ \text{коэффициент потерь} & \quad - \quad 4\pi \left| \frac{\text{Im } k}{\text{Re } k} \right|. \end{aligned}$$

Подставив выражения (14) в дифференциальные уравнения (4), а также учитывая, что

$$\nabla = i\mathbf{k}, \quad \partial/\partial t = -i\omega,$$

получим приведенную ниже систему уравнений, связывающую волновой вектор \mathbf{k} , циклическую частоту ω , векторы поляризации плоской волны \mathbf{A} , \mathbf{S} и амплитуду B :

$$\begin{cases} (\rho\omega^2 - (\mu + \eta)k^2)\mathbf{A} - (\lambda + \mu - \eta)\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + 2\eta i\mathbf{k} \times \mathbf{S} - \alpha i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ (\mathfrak{J}\omega^2 - 4\eta - (\gamma + \varepsilon)k^2)\mathbf{S} - (\beta + \gamma - \varepsilon)\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) + 2\eta i\mathbf{k} \times \mathbf{A} - \zeta i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ \left(\frac{\kappa}{\Lambda_*} i\omega - k^2 \right) B - \frac{\alpha}{\Lambda_*} \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{A} - \frac{\zeta}{\Lambda_*} \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{S} = 0. \end{cases} \quad (15)$$



Полученную систему линейных уравнений перепишем как следующую формальную линейную алгебраическую систему уравнений относительно комплексных амплитуд:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

где вводится формальный вектор-столбец $\mathbf{a} = (\mathbf{A}, \mathbf{S}, B)^T$.

В том случае, когда волновой вектор \mathbf{k} сонаправлен с одной из координатных осей (например, с декартовой осью x_3), а этого всегда можно добиться за счет поворота координатных осей, комплексная матрица \mathbf{D} будет обладать достаточно простой структурой. Несложные вычисления показывают, что матрица \mathbf{D} будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & d_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 & 0 & d_{37} \\ 0 & d_{42} & 0 & d_{44} & 0 & 0 & 0 \\ d_{51} & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} & d_{67} \\ 0 & 0 & d_{73} & 0 & 0 & d_{76} & d_{77} \end{pmatrix}.$$

Не будем пока останавливаться на конкретизации элементов d_{ij} матрицы \mathbf{D} . Преобразуем ее, прежде всего, к блочному виду. Если переставить местами 3-ю и 5-ю строки матрицы \mathbf{D} и 3-й и 5-й столбцы, а затем 2-ю и 3-ю строки и 2-й и 3-й столбцы, то матрица приводится к блочно-диагональной форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_3 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Здесь составляющие блоки $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ представляются через элементы d_{ij} исходной матрицы \mathbf{D} следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{15} \\ d_{51} & d_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\perp}^{\mu 2} k^2 - \omega^2 & \frac{2i\eta k}{\rho} \\ -\frac{2i\eta k}{\mathfrak{J}} & c_{\perp}^{\mu 2} k^2 - \omega^2 + \frac{4\eta}{\mathfrak{J}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_2 &= \begin{pmatrix} d_{22} & d_{24} \\ d_{42} & d_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\perp}^{\mu 2} k^2 - \omega^2 & -\frac{2i\eta k}{\rho} \\ \frac{2i\eta k}{\mathfrak{J}} & c_{\perp}^{\mu 2} k^2 - \omega^2 + \frac{4\eta}{\mathfrak{J}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_3 &= \begin{pmatrix} d_{33} & 0 & d_{37} \\ 0 & d_{66} & d_{15} \\ d_{73} & d_{76} & d_{77} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\parallel}^2 k^2 - \omega^2 & 0 & \frac{i\alpha k}{\rho} \\ 0 & c_{\parallel}^{\mu 2} k^2 - \omega^2 + \frac{4\eta}{\mathfrak{J}} & \frac{i\zeta k}{\mathfrak{J}} \\ \frac{\alpha\omega k}{\Lambda_*} & \frac{\zeta\omega k}{\Lambda_*} & k^2 - \frac{i\omega}{l_*^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для нетривиальной разрешимости системы (16) необходимо выполнение условия равенства нулю определителя матрицы \mathbf{D} . Учитывая представление (17), определитель вычисляется проще. При этом, очевидно, выполняется равенство

$$\det \mathbf{D}_1 = \det \mathbf{D}_2.$$

В результате определитель матрицы \mathbf{D} получается как

$$\det \mathbf{D} = (\det \mathbf{D}_1)^2 \det \mathbf{D}_3 = (d_{11}d_{55} - d_{15}d_{51})^2 (d_{33}d_{66}d_{77} - d_{33}d_{67}d_{76} - d_{66}d_{37}d_{73}). \quad (18)$$

Вычисления были проверены в системе символьных вычислений *Mathematica*. Процедура факторизации дает тот же результат (18). Условие $\det \mathbf{D} = 0$ будет выполнено, если хотя бы один из



сомножителей в формуле (18) будет равен нулю, что приводит к биквадратному $\det \mathbf{D}_1 = 0$ и бикубическому $\det \mathbf{D}_3 = 0$ уравнениям относительно неизвестного волнового числа k . Причем из биквадратного уравнения определяются скорости распространения поперечных волн, а из бикубического — скорости продольных волн.

4. ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В КONTИНУУМАХ ПЕРВОГО ТИПА

Исследование распространения плоских гармонических поперечных волн начнем с нахождения корней (волновых чисел) биквадратного уравнения:

$$\det \mathbf{D}_1 = d_{11}d_{55} - d_{15}d_{51} = (c_{\perp}^{\mu 2}k^2 - \omega^2)(c_{\perp}^{\mu \mu 2}k^2 - \omega^2 + \Omega^2) - \frac{\Omega^2 k^2 \eta}{\rho} = 0, \quad (19)$$

где вводится постоянная, имеющая размерность циклической частоты:

$$\Omega^2 = \frac{4\eta}{\mathfrak{J}}.$$

Дальнейшее исследование уравнения (19) удобно проводить, вводя следующие обозначения: волновые числа, соответствующие распространению поперечных волн:

$$k_{\perp}^{\mu \mu} = \frac{\omega}{c_{\perp}^{\mu \mu}}, \quad k_{\perp}^{\mu} = \frac{\omega}{c_{\perp}^{\mu}};$$

отношения скоростей поперечных волн:

$$\widetilde{k}_{\perp}^2 = \frac{c_{\perp}^{\mu 2}}{c_{\perp}^{\mu \mu 2}}, \quad \widetilde{k}_{\perp}^{\mu 2} = \frac{c_{\perp}^2}{c_{\perp}^{\mu 2}};$$

характерные безразмерные постоянные:

$$h_1^2 = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2, \quad h_2^2 = h_1^2 \widetilde{k}_{\perp}^{\mu 2} - 1 - \widetilde{k}_{\perp}^2.$$

Тогда в новых переменных уравнение (19) примет более компактный вид:

$$\frac{k^4}{k_{\perp}^{\mu 4}} + h_2^2 \frac{k^2}{k_{\perp}^{\mu 2}} + (1 - h_1^2) \widetilde{k}_{\perp}^2 = 0. \quad (20)$$

Квадраты волновых чисел поперечной плоской гармонической волны находятся из уравнения (20) в виде

$$2 \frac{k^2}{k_{\perp}^{\mu 2}} = -h_2^2 \pm \sqrt{\mathfrak{D}}, \quad (21)$$

где

$$\mathfrak{D} = h_2^4 - 4(1 - h_1^2) \widetilde{k}_{\perp}^2.$$

Дискриминант \mathfrak{D} всегда положителен [10], поэтому при произвольной частоте уравнение (20) имеет два вещественных квадрата волновых чисел. С помощью теоремы Виета можно показать, что при $\omega < \Omega$ имеется один положительный квадрат волнового числа k , а при $\omega > \Omega$ — два положительных квадрата. Отсюда следует, что при $\omega < \Omega$ существует одна поперечная волна, при $\omega > \Omega$ — две поперечные волны, распространяющиеся без диссипации энергии.

Окончательно можно выписать значения волновых чисел, соответствующих поперечным волнам: если $\omega > \Omega$

$$\sqrt{2} \frac{k_{1,2;3,4}}{k_{\perp}^{\mu}} = \pm \sqrt{-h_2^2 \pm \sqrt{\mathfrak{D}}};$$

если $\omega < \Omega$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \frac{k_{1,2}}{k_{\perp}^{\mu}} = \pm \sqrt{-h_2^2 + \sqrt{\mathfrak{D}}}, \\ \sqrt{2} \frac{k_{3,4}}{k_{\perp}^{\mu}} = \pm i \sqrt{h_2^2 + \sqrt{\mathfrak{D}}}. \end{cases} \quad (22)$$



5. ВОЛНОВЫЕ ЧИСЛА ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В КОНТИНУУМАХ ПЕРВОГО ТИПА

Проанализируем второй множитель $\det \mathbf{D}_3$ в формуле (18). Приравняв нулю определитель матрицы \mathbf{D}_3 , получим бикубическое уравнение для определения волновых чисел плоских гармонических связанных термоупругих волн. Вычислив определитель, имеем:

$$\det \mathbf{D}_3 = (\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2)(\mathfrak{J}\omega^2 - 4\eta - (\beta + 2\gamma)k^2) \left(i\frac{\omega}{l_*^2} - k^2 \right) - \frac{i\omega\alpha^2 k^2}{\Lambda_*} (\mathfrak{J}\omega^2 - 4\eta - (\beta + 2\gamma)k^2) - \frac{i\zeta^2 k^2 \omega}{\Lambda_*} (\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2). \quad (23)$$

Введем следующие обозначения для упрощения анализа корней уравнения (23): волновые числа:

$$k_{\parallel}^{\mu\mu} = \frac{\omega}{c_{\parallel}^{\mu\mu}}, \quad k_{\parallel} = \frac{\omega}{c_{\parallel}};$$

отношения скоростей поперечных волн:

$$\tilde{k}_{\parallel} = \frac{k_{\parallel}^{\mu\mu}}{k_{\parallel}} = \frac{c_{\parallel}}{c_{\parallel}^{\mu\mu}};$$

постоянные, характеризующие связанность механических и тепловых эффектов:

$$s_1^2 = \frac{\alpha^2}{\omega\Lambda_*\rho}, \quad s_1^{\zeta^2} = \frac{\zeta^2}{\omega\Lambda_*\mathfrak{J}},$$

безразмерные постоянные:

$$\tilde{k}_1^2 = \tilde{k}_{\parallel}^2 (1 - h_1^2), \quad Q_1^2 = \frac{\omega}{l_*^2 k_{\parallel}^2},$$

$$Q_2^2 = Q_1^2 + \tilde{k}_{\parallel}^2 s_1^{\zeta^2} + s_1^2, \quad Q_3^2 = Q_1^2 (\tilde{k}_1^2 + 1) + \tilde{k}_{\parallel}^2 (s_1^{\zeta^2} + s_1^2 (1 - h_1^2)).$$

В итоге, проведя необходимые аналитические преобразования, получим более компактную форму уравнения $\det \mathbf{D}_3 = 0$:

$$\frac{k^6}{k_{\parallel}^6} - (1 + \tilde{k}_1^2 + iQ_2^2) \frac{k^4}{k_{\parallel}^4} + (\tilde{k}_1^2 + iQ_3^2) \frac{k^2}{k_{\parallel}^2} - iQ_1^2 \tilde{k}_1^2 = 0. \quad (24)$$

Заменой

$$\frac{k^2}{k_{\parallel}^2} = Y + \frac{1 + \tilde{k}_1^2 + iQ_2^2}{3}$$

можно свести бикубическое уравнение (24) к неполному кубическому уравнению:

$$Y^3 + pY + q = 0, \quad (25)$$

где коэффициенты уравнения

$$p = \text{Re } p + i \text{Im } p, \quad q = \text{Re } q + i \text{Im } q$$

определяются формулами

$$\text{Re } p = \tilde{k}_1^2 - \frac{1}{3} \left((1 + \tilde{k}_1^2)^2 - Q_2^4 \right),$$

$$\text{Im } p = Q_3^2 - \frac{2}{3} Q_2^2 (1 + \tilde{k}_1^2),$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Re} q &= \left(-\frac{2}{27} \tilde{k}_1^4 + \frac{1}{9} \tilde{k}_1^2 + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} Q_2^4 \right) \tilde{k}_1^2 - \frac{2}{27} - \frac{1}{3} Q_3^2 Q_2^2 + \frac{2}{27} Q_2^4, \\ \operatorname{Im} q &= \left(\frac{1}{3} Q_3^2 - Q_1^2 - \frac{1}{9} Q_2^2 - \frac{2}{9} \tilde{k}_1^2 Q_2^2 \right) \tilde{k}_1^2 - \frac{2}{9} Q_2^2 + \frac{1}{3} Q_3^2 + \frac{2}{27} Q_2^6. \end{aligned}$$

Решение неполного кубического уравнения (25) можно найти согласно формулам Кардано. Приведем указанное решение в канонической алгебраической форме:

$$Y_1 = a + b, \quad Y_{2,3} = -\frac{1}{2}(a + b) \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}, \\ \operatorname{Re} \mathfrak{D}_1 &= \frac{1}{4}(\operatorname{Re} q)^2 - \frac{1}{4}(\operatorname{Im} q)^2 + \frac{1}{27}(\operatorname{Re} p)^3 - \frac{1}{9}(\operatorname{Re} p)(\operatorname{Im} p)^2, \\ \operatorname{Im} \mathfrak{D}_1 &= \frac{1}{2}(\operatorname{Re} q)(\operatorname{Im} q) + \frac{1}{9}(\operatorname{Re} p)^2(\operatorname{Im} p) - \frac{1}{27}(\operatorname{Im} p)^3. \end{aligned}$$

Достаточно выбрать одно из значений квадратного корня $\sqrt{\mathfrak{D}_1}$. Воспользуемся далее известной формулой для нахождения квадратного корня из комплекснозначного выражения $p = \operatorname{Re} p + i \operatorname{Im} p$. Положив $\sqrt{p} = z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, имеем ровно два значения для \sqrt{p} , которые вычисляются согласно формулам

$$\sqrt{2} \operatorname{Re} z = \pm \sqrt{\operatorname{Re} p + \sqrt{(\operatorname{Re} p)^2 + (\operatorname{Im} p)^2}}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{\operatorname{Im} p}{2 \operatorname{Re} z}. \quad (27)$$

Находим также

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \operatorname{Re} \sqrt{\mathfrak{D}_1} &= \sqrt{\operatorname{Re} \mathfrak{D}_1 + \sqrt{(\operatorname{Re} \mathfrak{D}_1)^2 + (\operatorname{Im} \mathfrak{D}_1)^2}}, \\ \operatorname{Im} \sqrt{\mathfrak{D}_1} &= \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{D}_1}{2 \operatorname{Re} \sqrt{\mathfrak{D}_1}}. \end{aligned}$$

Применяя формулы (26) для каждого из трех значений величины a , необходимо подбирать такое значение b , для которого выполняется условие

$$ab = -p/3.$$

Следуя указанной схеме, получаются все три корня неполного кубического уравнения.

Остается разрешить использованную выше подстановку относительно волнового числа и получить окончательные формулы:

$$\frac{k_{1,2,3;4,5}}{k_{\parallel}} = \pm \sqrt{Y_{1,2,3} + \frac{1 + \tilde{k}_1^2 + i Q_2^2}{3}}. \quad (28)$$

Значения волновых чисел (22), (28), полученные при исследовании бикубического (24) и биквадратного (20) уравнений, можно впоследствии использовать при отделении однозначных ветвей многозначных квадратных и кубических радикалов на комплексной плоскости $k = \operatorname{Re} k + i \operatorname{Im} k$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).

Библиографический список

1. Cosserat E. et F. Theorie des corps deformables. Paris : an elastic solid // J. Therm. Stress. 1992. Vol. 15. P. 253–264. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
2. Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in 3. Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without



- energy dissipation // *J. Elasticity*. 1993. Vol. 31. P. 189–208.
4. Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Гармонические связанные СТЕ-термоупругие волны в свободном цилиндрическом волноводе // *Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер.* 2008. № 8/1(67). С. 411–459.
5. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 2. С. 94–128.
6. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые числа плоских GNIII-термоупругих волн и неравенства, обеспечивающие их нормальность // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 46–53.
7. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.
8. Nowacki W. *Theory of asymmetric elasticity*. Oxford : Pergamon Press, 1986. 384 p.
9. Eringen A. C. *Microcontinuum field theories. Vol. 1. Foundations and Solids*. Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer, 1999. 325 p.
10. Новацкий В. Теория упругости. М. : Мир, 1975. 872 с.

A Mathematical Theory of Plane Harmonic Coupled Thermoelastic Waves in Type-I Micropolar Continua

V. A. Kovalev¹, E. V. Murashkin², Yu. N. Radayev³

¹Moscow Metropolitan Governance University, 28, Sretenka str., 107045, Moscow, Russia, vlad_koval@mail.ru

²Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

³Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

The present paper is devoted to an analysis of plane harmonic coupled thermoelastic waves of displacements, microrotations and temperature propagating in continua. The analysis is carried out in the framework of linear type-I (GNI/CTE) theory of thermoelastic micropolar continuum. Additional microrotations and moment stresses are taken into consideration. Propagating wave surfaces of weak discontinuities of displacements, microrotations, and temperature are studied by compatibility conditions technique due to Hadamard and Thomas. Wavenumbers (complex propagation constants (CPC)) of plane harmonic coupled thermoelastic waves are obtained. In order to determine the wavenumbers a bicubic and a biquadratic algebraic equations are derived for waves of displacements, microrotations, and temperature. Those equations are then analyzed by the computer algebra system *Mathematica*. Algebraic forms expressed by complex multivalued square and cubic radicals are obtained for wavenumbers of transverse and longitudinal thermoelastic waves.

Key words: micropolar thermoelasticity, type-I continuum, weak discontinuity, longitudinal wave, transverse wave, wavenumber, frequency equation.

References

1. Cosserat E. et F. *Theories of deformable bodies*. Paris, Scientific Library A. Hermann et Fils, 1909, 242 p.
2. Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in an elastic solid. *J. Therm. Stress*. 1992, vol. 15, pp. 253–264.
3. Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation. *J. Elasticity*. 1993, vol. 31, pp. 189–208.
4. Radayev Yu. N., Semenov D. A. Harmonic coupled CTE-thermoelastic waves in a free cylindrical waveguide. *Vestn. Samar. Gos. Univ. Natural sciences ser.*, 2008, no. 8/1(67), pp. 411–459 (in Russian).
5. Kovalev V. A., Radayev Yu. N., Semenov D. A. Coupled dynamic problems in hyperbolic thermoelasticity. *Izv. Saratov. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 10, iss. 4, pt. 2, pp. 94–128 (in Russian).
6. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. Wavenumbers of plane GNIII-thermoelastic waves and inequality, providing their normality. *Izv. Saratov. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 3, pp. 46–53 (in Russian).
7. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave problems of field theory and thermomechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, 328 p. (in Russian).
8. Nowacki W. *Theory of asymmetric elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, 384 p.
9. Eringen A. C. *Microcontinuum field theories. Vol. 1. Foundations and Solids*. Berlin ; Heidelberg ; N. Y., Springer, 1999, 325 p.
10. Nowacki W. *Theory of elasticity*. Moscow, Mir, 1975, 872 p. (in Russian).



УДК 531.38, 681.5

ДУАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ И БИКВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ НА ПРИМЕРЕ СТЭНФОРДСКОГО МАНИПУЛЯТОРА. II

Е. И. Ломовцева¹, Ю. Н. Челноков²

¹Аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, LomovtsevaEI@yandex.ru

²Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, chelnokovyun@info.sgu.ru

На примере стэнфордского манипулятора рассматривается методология решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления, приводятся решение обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора с использованием простейшего закона управления и пример численного решения, демонстрирующий эффективность применения бикватернионной теории кинематического управления к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов. Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой задачи кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора рассмотрены в [1].

Ключевые слова: робот-манипулятор, обратная задача кинематики, бикватернион, кватернион, кинематические уравнения, кинематическое управление движением.

Продолжение (см. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 82–89).

ВВЕДЕНИЕ

Обратная задача кинематики робота-манипулятора заключается в определении обобщенных координат робота-манипулятора по известному угловому и линейному местоположению схвата манипулятора. Обратные задачи кинематики роботов-манипуляторов сводятся к решению алгебраических систем, состоящих из шести трансцендентных уравнений. Эти системы имеют сложную структуру и в большинстве случаев не решаются аналитически, а при их численном решении возникают значительные трудности, связанные с плохой сходимостью, а также с неоднозначностью решения. Поэтому при проектировании многих существующих роботов-манипуляторов их кинематические схемы выбирались такими, чтобы обратные задачи кинематики решались аналитически. Такой выбор кинематических схем не оптимален с функциональной точки зрения. Поэтому поиск эффективных методов решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов продолжает оставаться актуальным.

В статье развивается новый метод решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов, предложенный в [2]. Он основывается на использовании бикватернионной кинематической теории управления движением свободного твердого тела по принципу обратной связи и заключается в решении задачи Коши для дифференциальных кинематических уравнений движения робота-манипулятора. При этом содержащиеся в этих уравнениях векторы абсолютных линейной и угловой скоростей схвата робота-манипулятора рассматриваются как управления и формируются по принципу обратной связи в виде некоторых функций обобщенных координат таким образом, чтобы любое выбранное (программное) положение схвата робота-манипулятора было асимптотически устойчивым в целом. Тогда любое частное решение дифференциальных кинематических уравнений будет стремиться асимптотически устойчивым образом к требуемой точке пространства обобщенных координат, отвечающей заданному положению схвата робота-манипулятора. Поэтому в результате решения задачи Коши для любых заданных начальных значений обобщенных координат робота-манипулятора из их рабочих диапазонов его обобщенные координаты примут в конечный момент времени значения, отвечающие (с заданной степенью точности) требуемому положению схвата робота-манипулятора, и, следовательно, обратная задача кинематики будет решена.

Достоинства используемого метода: единственность решения (если оно существует) для выбранного закона кинематического управления и заданного начального состояния манипулятора, высокая точность решения и высокое быстродействие, а также то, что этот метод, в отличие от других известных, является неитерационным.



1. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ СТЭНФОРДСКОГО МАНИПУЛЯТОРА

Введем в рассмотрение следующие системы координат: XYZ — основная система координат, связанная с основанием манипулятора; $X_6Y_6Z_6$ — система координат, жестко связанная с выходным звеном манипулятора (с началом в некоторой выбранной точке звена O_6); $X^{np}Y^{np}Z^{np}$ — опорная (программная) система координат, задающая требуемое конечное положение схвата робота-манипулятора. В качестве шести обобщенных координат выступают углы относительных поворотов звеньев φ_i ($i = 1, 2, 4, 5, 6$) и переменная d_3 , характеризующая линейное перемещение 3-го звена относительно 2-го [3]. Обозначим обобщенные координаты манипулятора через q_i :

$$q_i = \varphi_i, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6; \quad q_3 = d_3.$$

Взаимное положение введенных систем координат зададим нормированными бикватернионами $\mathbf{N} = \nu + s\nu^0$, $\mathbf{M} = \mu + s\mu^0$ (или $\mathbf{M}^* = \mu^* + s\mu^{0*}$), $\mathbf{\Lambda} = \lambda + s\lambda^0$, конечных перемещений в соответствии со схемой перемещений

$$\begin{aligned} XYZ &\xrightarrow{\mathbf{N}} X^{np}Y^{np}Z^{np} \xrightarrow{\mathbf{M}(\mathbf{M}^*)} X_6Y_6Z_6, & XYZ &\xrightarrow{\mathbf{\Lambda}} X_6Y_6Z_6 \\ \mathbf{\Lambda} &= \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i}_1 + \Lambda_2\mathbf{i}_2 + \Lambda_3\mathbf{i}_3 = \lambda + s\lambda^0, \\ \mathbf{N} &= N_0 + N_1\mathbf{i}_1 + N_2\mathbf{i}_2 + N_3\mathbf{i}_3 = \nu + s\nu^0, \\ \mathbf{M} &= M_0 + M_1\mathbf{i}_1 + M_2\mathbf{i}_2 + M_3\mathbf{i}_3 = \mu + s\mu^0, \\ \lambda &= \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3, & \lambda^0 &= \lambda_0^0 + \lambda_1^0\mathbf{i}_1 + \lambda_2^0\mathbf{i}_2 + \lambda_3^0\mathbf{i}_3, \\ \nu &= \nu_0 + \nu_1\mathbf{i}_1 + \nu_2\mathbf{i}_2 + \nu_3\mathbf{i}_3, & \nu^0 &= \nu_0^0 + \nu_1^0\mathbf{i}_1 + \nu_2^0\mathbf{i}_2 + \nu_3^0\mathbf{i}_3, \\ \mu &= \mu_0 + \mu_1\mathbf{i}_1 + \mu_2\mathbf{i}_2 + \mu_3\mathbf{i}_3, & \mu^0 &= \mu_0^0 + \mu_1^0\mathbf{i}_1 + \mu_2^0\mathbf{i}_2 + \mu_3^0\mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона; s — символ (комплексность) Клиффорда, обладающий свойством $s^2 = 0$; $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{N})$ — собственный бикватернион винтового конечного перемещения выходного звена манипулятора $X_6Y_6Z_6$ (программной системы координат) относительно основной системы координат XYZ , являющийся комплексной комбинацией кватерниона $\lambda(\nu)$ поворота выходного звена манипулятора (программной системы координат $X^{np}Y^{np}Z^{np}$) в основной системе координат и кватерниона $\lambda^0(\nu^0)$, характеризующего поступательное перемещение выходного звена (программной системы координат) в этой же системе координат; \mathbf{M}^* — собственный бикватернион винтового конечного перемещения выходного звена манипулятора относительно программной системы координат $X^{np}Y^{np}Z^{np}$, являющийся комплексной комбинацией собственного кватерниона μ^* ориентации выходного звена в программной системе координат и кватерниона μ^{0*} , характеризующего поступательное перемещение выходного звена в этой системе координат. Термин «собственный бикватернион» означает, что каждый из бикватернионов $\mathbf{\Lambda}, \mathbf{N}, \mathbf{M}^*$ определен своими компонентами в своей, преобразуемой этим бикватернионом, системе координат. Обозначим через \mathbf{M} бикватернион винтового конечного перемещения выходного звена манипулятора относительно программной системы координат $X^{np}Y^{np}Z^{np}$, определенный своими компонентами в основной системе координат XYZ .

Бикватернион $\mathbf{\Lambda}$, характеризующий положение выходного звена манипулятора в основной системе координат в соответствии со схемой перемещений (1) и бикватернионной формулой сложения конечных перемещений, определенных в одном базисе (XYZ), может быть представлен в виде [4]

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M} \circ \mathbf{N}, \quad (2)$$

а в соответствии с бикватернионной формулой сложения конечных перемещений, каждый из которых определен в своем преобразуемом базисе, — в виде [4]:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{N} \circ \mathbf{M}^*. \quad (3)$$

Здесь \circ — символ кватернионного умножения.

Подчеркнем, что в формуле (2) фигурирует бикватернион ошибки местоположения \mathbf{M} , характеризующий отклонение действительного положения (углового и линейного) выходного звена манипулятора $X_6Y_6Z_6$ от требуемого программного $X^{np}Y^{np}Z^{np}$, определенный своими компонентами



$M_j = \mu_j + s\mu_j^0$ в основной системе координат XYZ , а в формуле (3) — бикватернион ошибки местоположения \mathbf{M}^* , определенный своими компонентами $M_j^* = \mu_j^* + s\mu_j^{0*}$ в связанном базисе $X_6Y_6Z_6$ (а следовательно, и в программном базисе $X^{pp}Y^{pp}Z^{pp}$).

В соответствии с (2) и (3) бикватернионы \mathbf{M} и \mathbf{M}^* находятся по формулам

$$\mathbf{M} = \Lambda \circ \bar{\mathbf{N}}, \quad (4)$$

$$\mathbf{M}^* = \bar{\mathbf{N}} \circ \Lambda. \quad (5)$$

Здесь и далее верхняя черта означает символ сопряжения (в вышеприведенных формулах все бикватернионы полагаются нормированными, поэтому обратные бикватернионы равны сопряженным).

Бикватернионы Λ_i относительных конечных перемещений звеньев манипулятора, найденные в первой части статьи [1], являются функциями обобщенных координат:

$$\Lambda_i = \Lambda_i(q_i), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (6)$$

Тогда бикватернион Λ , характеризующий конечное положение выходного звена робота-манипулятора в основной системе координат, будет иметь вид

$$\Lambda(q_1, q_2, \dots, q_6) = \Lambda_1(q_1) \circ \Lambda_2(q_2) \circ \Lambda_3(q_3) \circ \Lambda_4(q_4) \circ \Lambda_5(q_5) \circ \Lambda_6(q_6). \quad (7)$$

Обозначим через ω (ω^{pp}) и $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ($\mathbf{v}^{pp} = \frac{d\mathbf{r}^{pp}}{dt}$) векторы мгновенной угловой и линейной скоростей движения выходного звена манипулятора (программной системы координат $X^{pp}Y^{pp}Z^{pp}$) относительно основной системы координат XYZ . Полагаем, что векторы ω^{pp} и \mathbf{v}^{pp} заданы своими проекциями $\omega_i^{pp} = \omega_i^{pp}(t)$ и $v_i^{pp} = v_i^{pp}(t)$ в программной системе координат $X^{pp}Y^{pp}Z^{pp}$, а векторы ω и \mathbf{v} определены своими проекциями ω_i и v_i в связанной системе координат $X_6Y_6Z_6$.

Мотор (ω, \mathbf{v}) мгновенного винта скоростей \mathbf{U} (кинематического винта) выходного звена манипулятора, отнесенный к полюсу O_6 , равен дуальному вектору $\omega + s\mathbf{v}$, а мотор $(\omega^{pp}, \mathbf{v}^{pp})$ мгновенного винта скоростей \mathbf{U}^{pp} (кинематического винта) программной системы координат, отнесенный к полюсу O_{pp} , равен дуальному вектору $\omega^{pp} + s\mathbf{v}^{pp}$.

Под задачей управления движением манипулятора будем понимать задачу приведения связанной с выходным звеном манипулятора системы координат $X_6Y_6Z_6$ к системе координат $X_{pp}Y_{pp}Z_{pp}$, движущейся с программным (заданным) мгновенным винтом скоростей $\mathbf{U}^{pp}(t)$ по программной траектории $N = N(t)$. Рассматриваем кинематическую постановку задачи управления: полагаем, что управление движением осуществляется за счет сообщения выходному звену мгновенного винта скоростей \mathbf{U} .

При такой постановке задачи управления движением манипулятора в качестве математической модели движения принимаются кинематические уравнения движения стэнфордского манипулятора. Эти уравнения были найдены в первой части статьи и имеют вид матричного нелинейного дифференциального уравнения:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 & \dot{\varphi}_2 & \dot{d}_3 & \dot{\varphi}_4 & \dot{\varphi}_5 & \dot{\varphi}_6 \end{pmatrix}^T = A^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T \quad (8)$$

относительно переменных $\varphi_1, \varphi_2, d_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$. Матрица A является функцией обобщенных координат: $A = A(q_1, q_2, \dots, q_6)$ и приведена в явном виде в [1].

В качестве управлений выступают дуальные ортогональные проекции $U_i = \omega_i + sv_i$ кинематического винта выходного звена на связанные с ним координатные оси. Управления U_i складываются из программных управлений $U_i^{pp}(t)$ и стабилизирующих (корректирующих) управлений δU_i или ΔU_i [2]. Величины $U_i^{pp}(t)$ (программные управления) полагаются заданными дуальными функциями времени. Законы управлений δU_i или ΔU_i строятся с использованием принципа обратной связи, т. е. в виде некоторых функций компонент бикватерниона ошибки местоположения \mathbf{M} или \mathbf{M}^* , таким образом, чтобы выходное звено манипулятора переходило из любого выбранного начального положения в любое заданное конечное асимптотически устойчивым образом, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{M}(t) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty \quad \text{или} \quad \text{условие} \quad \mathbf{M}^*(t) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$



В такой постановке обратная задача кинематики формулируется как задача Коши для системы дифференциальных уравнений (8) при условии, что управления ω_k и v_k обеспечивают асимптотическую устойчивость в целом любого заданного положения выходного звена робота-манипулятора. В результате решения задачи Коши для любых заданных начальных значений обобщенных координат манипулятора из их рабочих диапазонов его обобщенные координаты примут в конечный момент времени значения, отвечающие (с заданной степенью точности) требуемому положению схвата робота-манипулятора, и, следовательно, обратная задача кинематики будет решена.

Величины ω_k и v_k являются компонентами отображения:

$$\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x = \mathbf{U}_z^{\text{np}}(t) + \delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_z^{\text{np}} + \Delta\mathbf{U}_x = \mathbf{M}^{*-1} \circ \mathbf{U}_z^{\text{np}}(t) \circ \mathbf{M}^* + \Delta\mathbf{U}_x$$

кинематического винта \mathbf{U} выходного звена манипулятора на связанные с ним координатные оси. В рассматриваемой обратной задаче программное управление $\mathbf{U}_z^{\text{np}}(t) \equiv 0$, поэтому построение управления

$$\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x = \delta\mathbf{U}_x = \Delta\mathbf{U}_x$$

может быть выполнено в соответствии с теорией построения стабилизирующего управления, предложенной Ю. Н. Челноковым. В случае использования нормированных бикватернионов конечных перемещений простейший закон управления имеет вид [2]

$$\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x = - \left(2 \frac{K_{oc}^*}{M_0^*} \right) \mathbf{M}_{sc}^*, \quad (9)$$

$$\mathbf{M}^* = M_0^* + \mathbf{M}_{sc}^* = \bar{\mathbf{N}} \circ \boldsymbol{\Lambda}(t). \quad (10)$$

Здесь M_0^* и \mathbf{M}_{sc}^* — скалярная и винтовая части собственного бикватерниона ошибки положения выходного звена манипулятора \mathbf{M}^* , определенного своими компонентами M_j^* в системе координат $X_6 Y_6 Z_6$, связанной с выходным звеном манипулятора; $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{const}$ — бикватернион, характеризующий программное (требуемое) положение выходного звена, $\boldsymbol{\Lambda}$ — бикватернион текущего положения схвата манипулятора, который находится через текущие значения обобщенных координат манипулятора, $K_{oc}^* = k + sk_0$ — дуальный коэффициент усиления обратной связи.

В случае использования при построении управлений ненормированных бикватернионов конечных перемещений может быть использован простейший закон управления, имеющий вид [2]

$$\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x = K_{oc} T^{-1} \mathit{screw}(\bar{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \mathbf{N}), \quad (11)$$

где screw — винтовая часть бикватерниона (\cdot), T — тензор (модуль) ненормированного бикватерниона положения выходного звена манипулятора, удовлетворяющий дифференциальному уравнению:

$$2 \frac{dT}{dt} = K_{oc} [\mathit{scal}(\bar{\boldsymbol{\Lambda}} \circ \mathbf{N}) - T], \quad T(t_0) = 1. \quad (12)$$

Здесь scal — скалярная часть бикватерниона (\cdot).

Подчеркнем, что в соотношениях (9)–(11) и в уравнении (12) фигурирует нормированный бикватернион $\boldsymbol{\Lambda}$ текущего (углового и линейного) положения выходного звена манипулятора, который находится через обобщенные координаты манипулятора по формулам (2), (3), а постоянный нормированный бикватернион \mathbf{N} программной ориентации выходного звена является заданным. Отметим, что если закон управления (9) содержит особую точку в пространстве обобщенных координат, в которой мгновенный эйлеров угол поворота выходного звена относительно его программного положения равен (для текущего момента времени t) π рад, то закон управления (11), (12) является регулярным всюду (не содержащим особых точек).

2. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ

Бикватернион ошибки местоположения можно представить в виде

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{m} + s\mathbf{m}_0 = (m^0 + m^1 \mathbf{i}_1 + m^2 \mathbf{i}_2 + m^3 \mathbf{i}_3) + s(m_0^0 + m_0^1 \mathbf{i}_1 + m_0^2 \mathbf{i}_2 + m_0^3 \mathbf{i}_3) =$$



$$= (m^0 + sm_0^0) + (m^1 + sm_0^1)\mathbf{i}_1 + (m^2 + sm_0^2)\mathbf{i}_2 + (m^3 + sm_0^3)\mathbf{i}_3 = M_0^* + \mathbf{M}_{sc}^*,$$

где скалярная и винтовая части бикватерниона ошибки местоположения имеют вид

$$M_0^* = m^0 + sm_0^0, \tag{13}$$

$$\mathbf{M}_{sc}^* = (m^1 + sm_0^1)\mathbf{i}_1 + (m^2 + sm_0^2)\mathbf{i}_2 + (m^3 + sm_0^3)\mathbf{i}_3. \tag{14}$$

Будем формировать управление движением выходного звена манипулятора по формуле (9). С учетом соотношений (13), (14) закон управления можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_x = & - \left(2 \frac{K_{oc}^*}{M_0^*} \right) \mathbf{M}_{sc}^* = \left(-2 \frac{k}{m^0} - 2s \frac{k_0 m^0 - km_0^0}{(m^0)^2} \right) (m^1 + sm_0^1)\mathbf{i}_1 + \\ & + \left(-2 \frac{k}{m^0} - 2s \frac{k_0 m^0 - km_0^0}{(m^0)^2} \right) (m^2 + sm_0^2)\mathbf{i}_2 + \left(-2 \frac{k}{m^0} - 2s \frac{k_0 m^0 - km_0^0}{(m^0)^2} \right) (m^3 + sm_0^3)\mathbf{i}_3. \end{aligned} \tag{15}$$

Выделяя в (15) главную $\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3$ и моментную $\mathbf{v}_x = v_1\mathbf{i}_1 + v_2\mathbf{i}_2 + v_3\mathbf{i}_3$ части, получим следующие законы формирования требуемых проекций ω_k и v_k угловой и линейной скоростей движения выходного звена манипулятора (управлений)

$$\omega_j = -2 \frac{km^j}{m^0}, \quad v_j = \frac{-2km^0 m_0^j - 2k_0 m^0 m^j + 2km_0^0 m^j}{(m^0)^2}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{16}$$

Алгоритм решения обратной задачи кинематики заключается в численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (8), дополненных соотношениями (16), формулой (5) и бикватернионными соотношениями для нахождения текущего значения бикватерниона Λ положения схвата манипулятора, полученными в [1]. Используемые законы управления ω_k и v_k , построенные по принципу обратной связи, гарантируют асимптотически устойчивый выход схвата робота-манипулятора в требуемое конечное положение, заданное бикватернионом $\mathbf{N} = \Lambda^*$ с требуемой степенью точности. Значения обобщенных координат q_i , соответствующие этому конечному положению схвата, и будут одним из решений обратной задачи манипулятора.

Блок-схема численного решения обратной задачи кинематики приведена на рис. 1. Бикватернион \mathbf{N} находится таким же образом, как и бикватернион Λ для значений обобщенных координат, отвечающих программному положению выходного звена манипулятора

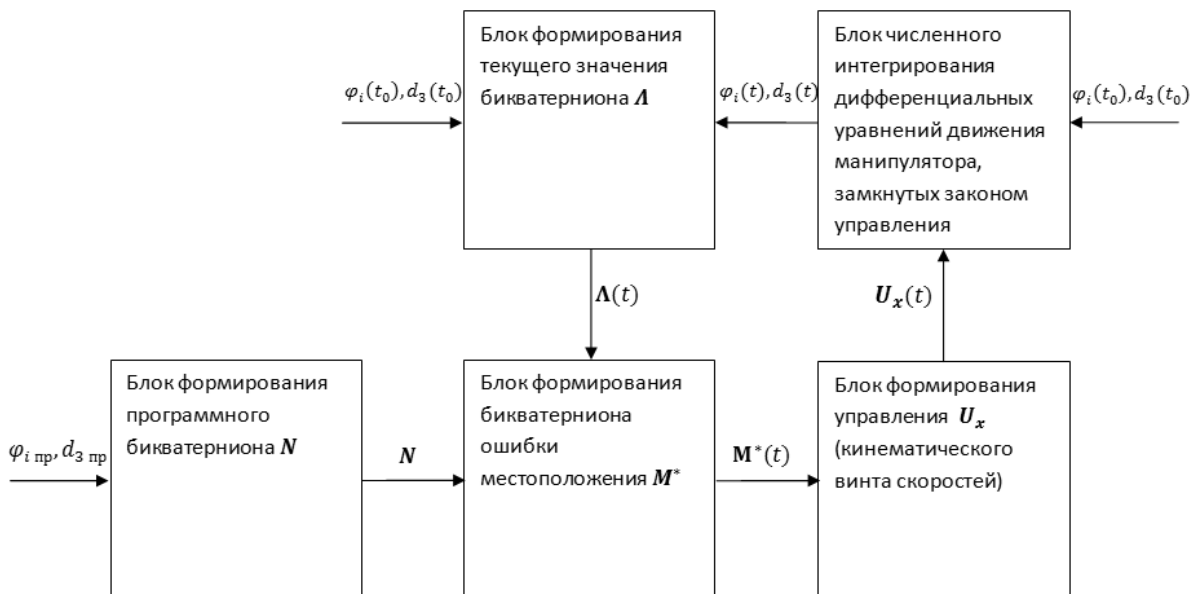


Рис. 1. Блок-схема численного решения обратной задачи кинематики



3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрено численное решение обратной задачи кинематики для заданного местоположения выходного звена, соответствующего следующим численным значениям обобщенных координат робота-манипулятора: $\varphi_1 = 20^\circ$, $\varphi_2 = 40^\circ$, $d_3 = 0.3$ м, $\varphi_4 = -35^\circ$, $\varphi_5 = 60^\circ$, $\varphi_6 = -45^\circ$ или в радианной мере $\varphi_1 = 0.349$, $\varphi_2 = 0.698$, $d_3 = 0.3$ м, $\varphi_4 = 0.611$, $\varphi_5 = 1.047$, $\varphi_6 = -0.785$. Такому положению конечного звена манипулятора соответствует следующее значение бикватерниона ориентации:

$$\mathbf{N} = (0, 181938 - 0, 718084\mathbf{i}_1 + 0, 117974\mathbf{i}_2 + 0, 661314\mathbf{i}_3) + \\ + s(-0, 017347 + 0, 005780\mathbf{i}_1 - 0, 017376\mathbf{i}_2 + 0, 014148\mathbf{i}_3).$$

Начальное положение схвата манипулятора задавалось фазовыми координатами: $\varphi_1 = -30^\circ$, $\varphi_2 = 15^\circ$, $d_3 = 0.1$ м, $\varphi_4 = 36^\circ$, $\varphi_5 = -90^\circ$, $\varphi_6 = 45^\circ$ или в радианной мере $\varphi_1 = -0.524$, $\varphi_2 = 0.261$, $d_3 = 0.1$ м, $\varphi_4 = 0.628$, $\varphi_5 = -1.571$, $\varphi_6 = 0.785$. Точность решения задачи полагалась равной 10^{-6} . Шаг интегрирования задавался равным 0.01 с. Коэффициент усиления обратной связи был выбран равным единице: $K_{oc} = 1$.

Графики изменения обобщенных координат главной и моментной частей бикватерниона ошибки местоположения, главной и моментной частей дуального управления приведены на рис. 2–4.

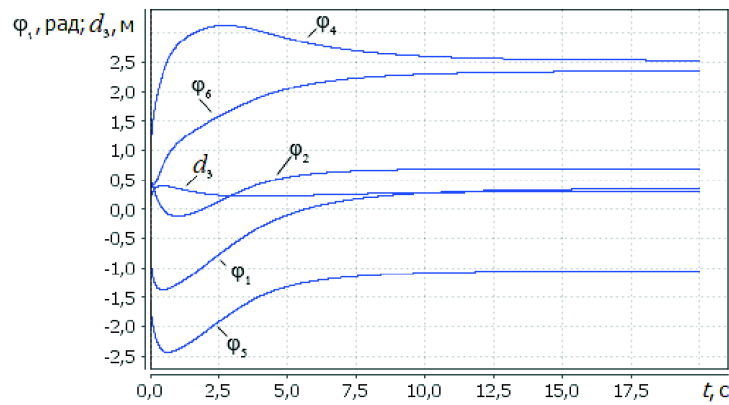


Рис. 2. Графики изменения обобщенных координат

Отметим, что в силу неоднозначности решения обратной задачи кинематики полученные значения фазовых координат могут отличаться от значений, по которым вычислялся бикватернион конечного положения выходного звена.

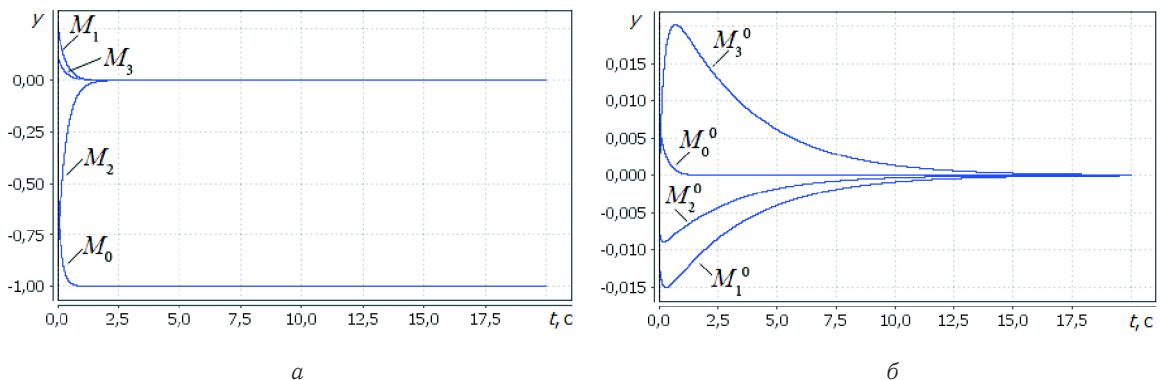


Рис. 3. Графики изменения компонент главной (а) и моментной (б) частей бикватерниона ошибки местоположения

Компоненты бикватерниона ошибки местоположения выходного звена в ходе численного решения приняли следующие значения:

$$M_0 = -1, \quad M_i = 0, \quad M_j^0 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$



что соответствует нашим ожиданиям. Отметим, что одной и той же требуемой ориентации выходного звена манипулятора отвечают два значения компоненты M_0 : $M_0 = \pm 1$. В нашем случае оказалось, что $M_0 = -1$.

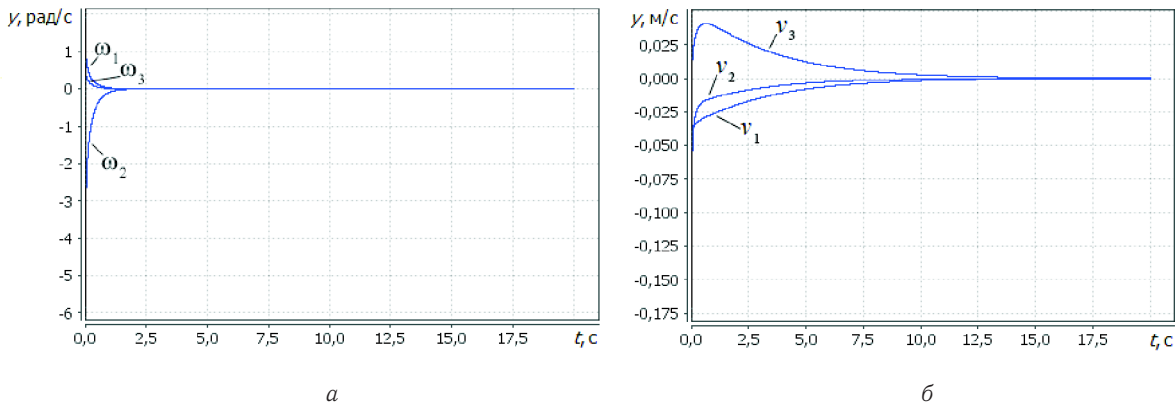


Рис. 4. Графики изменения компонент главной (а) и моментной (б) частей управления

Компоненты управления в процессе управляемого движения асимптотически стремятся к нулю. Также ведут себя компоненты M_k, M_k^0 ($k = 1, 2, 3$).

В результате численного решения был получен следующий бикватернион конечного положения:

$$\Lambda = (0, 181938 - 0, 718084i_1 + 0, 117974i_2 + 0, 661314i_3) + s(-0, 017347 + 0, 005780i_1 - 0, 017376i_2 + 0, 014148i_3).$$

Видно, что главные и моментные части бикватерниона программного положения \mathbf{N} и бикватерниона Λ , полученного в результате численного решения, совпадают с точностью до шестого знака (что соответствует заявленной точности решения).

Требуемая точность решения достигается примерно за 40 секунд, однако в графиках на рис. 2–4 для большей наглядности рассматриваются первые 20 секунд решения задачи, когда компоненты исследуемых величин претерпевают наибольшие изменения. Из графиков видно, что требуемая точность по главной части достигается значительно быстрее, чем по моментной. Это означает, что при решении обратной задачи кинематики с использованием бикватернионной теории кинематического управления следует брать разные коэффициенты усиления обратной связи для главной и моментной частей.

Отметим также, что на начальном этапе интегрирования наблюдаются аperiodические процессы.

Проведенное исследование доказывает эффективность применения бикватернионной теории кинематического управления для решения обратной задачи кинематики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165).

Библиографический список

1. Ломовцева Е. И., Челноков Ю. Н. Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора. I // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 82–89.
2. Челноков Ю. Н. Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 38–58.
3. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. М.: Мир, 1989. 621 с.
4. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия движения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. 236 с.



Dual Matrix and Biquaternion Methods of Solving Direct and Inverse Kinematics Problems of Manipulators for Example Stanford Robot Arm. II

E. I. Lomovtseva, Yu. N. Chelnokov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, LomovtsevaEI@yandex.ru, chelnokovyun@info.sgu.ru

The methodology of solving the inverse kinematics problem of manipulators by using biquaternion theory of kinematics control is shown on the example of Stanford robot arm. Solving of the inverse kinematics problem of Stanford robot arm is performed using the simplest control law. The analysis of numerical solution results is made. The efficacy of applying the theory of kinematics control for solving the inverse kinematics problem of manipulators is proved. Dual matrix and biquaternion methods of solving direct kinematics problem of manipulators were considered in [1].

Key words: robot-manipulator, direct kinematics problem, dual direction cosine matrix, biquaternion, quaternion, kinematic equations.

References

1. Lomovtseva E. I., Chelnokov Yu. N. Dual Matrix and Biquaternion Methods of Solving Direct and Inverse Kinematics Problems of Manipulators, for Example Stanford Robot Arm. I. *Izv. Saratov. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 4, pp. 82–89 (in Russian).
2. Chelnokov Yu. N. Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics. *Mechanics of Solids* [Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela], 2013, vol. 48, no. 1, pp. 31–46.
3. Fu K. S., Gonzalez R. C., Lee C. S. G. *Robotics : Control, Sensing, Vision, and Intelligence*. McGraw-Hill, Inc, 1987, 580 p.
4. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mehaniki tverdogo tela i ih prilozhenija. Geometrija dvizhenija* [Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of a Rigid Body and their Applications. Geometry of Motion.] Saratov, Saratov Univ. Press, 2006, 236 p. (in Russian).

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ОТ НЕРАВНОМЕРНОЙ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

А. А. Мочалин

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., a.mochalin@inbox.ru

На базе полубезмоментной теории В. З. Власова рассматривается задача об устойчивости цилиндрической конструктивно-ортотропной оболочки переменной вдоль образующей толщины при действии осесимметричного изменяющегося вдоль оси оболочки радиального давления. При одном соотношении изменения толщины и давления получено точное решение для нахождения одной из величин в законе изменения давления, при которой происходит потеря устойчивости оболочки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, теория оболочек, устойчивость оболочек, радиальная нагрузка, критическое давление, толщина оболочка, теория упругости.

1. В линейной теории цилиндрических оболочек широкое применение нашла полубезмоментная теория В. З. Власова, учитывающая особенности напряженного состояния оболочек, длина которых находится в пределах $D < l < 8D$, где D — диаметр оболочки, l — её длина. В основе этой теории лежат две гипотезы — статическая и геометрическая, позволяющие существенно упростить уравнения, описывающие состояние устойчивости оболочки. Считается, что удлинение в окружном направлении и углы сдвига в срединной поверхности равны нулю, полагаются равными нулю перерезывающая сила и изгибающий момент в осевом направлении, а также крутящий момент.

На основе гипотез полубезмоментной теории цилиндрических оболочек В. З. Власова [1] рассмотрим конструктивно-ортотропную неоднородную оболочку под действием неравномерной радиальной



нагрузки. Уравнение совместности деформаций и уравнение равновесия после несложных преобразований переписывается в виде

$$R \frac{\partial^4 \varepsilon_1}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varkappa_2}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$R \frac{\partial^4 M_2}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = P, \quad (2)$$

$$P = -\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} - R \frac{\partial^2 q_n}{\partial y^2},$$

где x — координата, откладываемая по образующей, y — координата, откладываемая по дуге поперечного круга цилиндра.

Соотношения упругости с учетом допущений полубезмоментной теории В. З. Власова запишутся в форме

$$T_1 \approx Ehm_1 \varepsilon_1, \quad M_2 = Dn^2 n_2 \varkappa_2.$$

Упругие усилия и моменты связаны с деформациями срединной поверхности соотношениями (2).

Введем безразмерные переменные $\xi = x/l$, $\theta = y/R$ (l — длина оболочки) и функцию Φ , связанную с компонентами поля перемещений $\bar{U}(u, v, w)$ равенствами

$$u = -\frac{1}{l} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi \partial \theta^2}, \quad v = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad w = \frac{1}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4}.$$

Тогда

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{l^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \theta^2}, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \theta^6} \right), \quad (3)$$

$$T_1 = -\frac{Eh}{l^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \theta^2}, \quad M_2 = -\frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \theta^6} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} \right).$$

Подстановка (3) тождественно удовлетворяет уравнению (1), а уравнение (2) переписывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[h(\xi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right] + \frac{Dl^4}{ER^6} \Omega \Omega \Phi + \frac{l^4}{E} \int_0^\theta \int_0^\theta P^* d\theta d\theta = 0. \quad (4)$$

Здесь $P^* = -\frac{1}{l} \frac{\partial q_1}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial q_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 q_n}{\partial \theta^2} \right)$, а $\Omega = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$ — дифференциальный оператор В. З. Власова.

Уравнением (4) будем пользоваться при исследовании устойчивости цилиндрических оболочек средней и большой длины под действием радиальной нагрузки и интегрировать при граничных условиях, зависящих от способа закрепления торцов оболочки.

2. Пусть оболочка находится под действием неравномерной радиальной нагрузки $q = q_0(1 + \alpha\xi)^{-6}$. Компонента нагрузки q_n в этом случае определится выражением $q_n = -q_0 R \varkappa_2 (1 + \alpha\xi)^{-6}$, где параметр q_0 подлежит определению.

Выбирая функцию Φ в форме $\Phi = X(\xi) \sin k\theta$, где k — число волн вдоль окружности оболочки при потере устойчивости, и задавая закон изменения толщины в виде $h(\xi) = h_0(1 + \alpha\xi)^{-2}$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[(1 + \alpha\xi)^{-2} \frac{d^2 X}{d\xi^2} \right] - \lambda^4 (1 + \alpha\xi)^{-6} X = 0, \quad (5)$$

где

$$\lambda^4 = \frac{q_0 k^4 l^4}{ER^3 h_0} (k^2 - 1) - \frac{l^4 h_0^2 (k^2 - 1) k^4}{12R^6 (1 - \nu^2)}.$$

Уравнение (5) после введения новой переменной $z = \ln(1 + \alpha\xi)$ и новой функции $W(z)$ соотношением $X = We^{-z/6}$ может быть приведено к дифференциальному уравнению четвертого порядка с



постоянными коэффициентами:

$$W^{(4)} - \frac{10}{3}W^{(3)} + \frac{25}{6}W^{(2)} + \frac{89}{54}W' - \left(\frac{\lambda^4}{\alpha^4} - \frac{145}{1296}\right)W = 0,$$

характеристическое уравнение для которого запишется в виде

$$(\delta^2 + a\delta + c)(\delta^2 + b\delta + d) = 0,$$

где величины a, b, c, d связаны равенствами

$$a + b = -\frac{10}{3}, \quad ab + c + d = \frac{25}{6}, \quad bc + da = \frac{89}{54}, \quad cd = \frac{145}{1296} - \frac{\lambda^4}{\alpha^4}$$

и равны

$$a = b = -\frac{5}{3}, \quad c = \frac{25\alpha^2 \mp \sqrt{600\alpha^4 + 1296\lambda^4}}{36\alpha^2}, \quad d = \frac{25\alpha^2 \pm \sqrt{600\alpha^4 + 1296\lambda^4}}{36\alpha^2}.$$

Выражение для функции $X(\xi)$ примет вид

$$X(\xi) = (1 + \alpha\xi)^{2/3} (C_1 \sin(\delta \cdot \ln(1 + \alpha\xi)) + C_2 \cos(\delta \cdot \ln(1 + \alpha\xi)) + C_3 \operatorname{sh}(\delta \cdot \ln(1 + \alpha\xi)) + C_4 \operatorname{ch}(\delta \cdot \ln(1 + \alpha\xi))),$$

где $\delta = \frac{\sqrt[4]{600\alpha^4 + 1296\lambda^4}}{6\alpha}$.

Рассмотрим два вида граничных условий: жесткое закрепление и свободное опирание краёв оболочки.

В случае жесткого закрепления краёв граничные условия имеют вид

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \xi = 1$$

или

$$X(\xi) = 0, \quad \frac{dX(\xi)}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \xi = 1.$$

Если края оболочки свободно оперты, то следует удовлетворять условиям вида

$$u = 0, \quad T_1 = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \xi = 1$$

или

$$X(\xi) = 0, \quad \frac{d^2 X(\xi)}{d\xi^2} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \xi = 1.$$

Подчиняя общее решение уравнения граничным условиям и требуя совместности системы однородных уравнений, получаем соотношения для определения собственных значений для жесткого закрепления в форме

$$\delta \ln(1 + \alpha) = 4.73,$$

а в случае свободного опирания краев — в форме

$$\sin(\delta \ln(1 + \alpha)) = 0.$$

Для очень длинных оболочек ($R/l \rightarrow 0$) величина q_0 нечувствительна к виду закрепления и равна

$$q_0 = \frac{Eh_0^3(k^2 - 1)}{R^3 12(1 - \nu^2)}.$$

После минимизации по k^2 ($k^2 \gg 1$) для оболочек средней длины получаем формулу для вычисления критического давления:

$$q_0^* = \sqrt[4]{\beta_0} E \left(\frac{h_0}{R}\right)^{5/2} \frac{R}{l} \frac{\sqrt{6}}{9(1 - \mu^{*2})^{3/4}} \sqrt[4]{\frac{n_2^3}{m_1}} \quad (6)$$



где величина β_0 в случае жесткого закрепления равна

$$\beta_0 = \left(\frac{4.73\alpha}{\ln(1+\alpha)} \right)^4 - \frac{75}{162}\alpha^4,$$

а в случае свободного опирания краев —

$$\beta_0 = \left(\frac{\pi\alpha}{\ln(1+\alpha)} \right)^4 - \frac{75}{162}\alpha^4,$$

$$\mu^* = \mu/n.$$

Формулу (6) можно переписать для жесткого закрепления краев в форме

$$q_0^* = 4.73EK(\alpha)(h_0/R)^{5/2} \frac{R}{l} \frac{\sqrt{6}}{9(1-\mu^*2)^{3/4}} \sqrt[4]{\frac{n_2^3}{m_1}}, \quad (7)$$

а для свободного опирания торцов соответственно в виде

$$q_0^* = \pi EK(\alpha)(h_0/R)^{5/2} \frac{R}{l} \frac{\sqrt{6}}{9(1-\mu^*2)^{3/4}} \sqrt[4]{\frac{n_2^3}{m_1}}. \quad (8)$$

Значения коэффициента $K(\alpha)$ для некоторых значений α приведены в таблице.

α	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$K(\alpha)$	0.750	0.798	0.847	0.888	0.950	1	1.049	1.093	1.136	1.173	1.20

На основании полученных результатов можно сделать следующий вывод.

Значения критического давления неоднородной цилиндрической оболочки под действием неравномерного давления, изменяющегося по закону изменения жесткости, пропорциональны критическому давлению оболочки постоянной толщины с коэффициентом пропорциональности $K(\alpha)$, и при увеличении отношения толщин h_1/h_0 на концах оболочки критическое давление уменьшается, а при его уменьшении критическое давление увеличивается.

Библиографический список

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. М. : ГИТТЛ, 1949. 784 с.
2. Бурмистров Е. Ф. Симметричная деформация конструктивно-ортоотропных оболочек вращения. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1962. 108 с.
3. Мочалин А. А. Устойчивость полубезмоментной цилиндрической оболочки переменной толщины // Изв. вузов. Машиностроение. 1975. № 11. С. 27–31.
4. Штейнберг М. В. Расчет круговых цилиндрических оболочек с толщиной переменной в направлении образующей // Прикладная механика. 1965. Т. 1, вып. 7. С. 67–72.

The Stability of the Constructive-orthotropic Heterogeneous Cylindrical Shell under Uneven Radial Load

A. A. Mochalin

Saratov State Technical University, 77, Polytechnicheskaya str., 410054, Saratov, Russia, a.mochalin@inbox.ru

On the base half-moment Vlasov theory the problem of stability of cylindrical homogeneous shell with variation of thickness at radial symmetrical radial pressure varied along axis distance. At one relation between thickness and pressure values the accurate solution was produced for one values in pressure variation law when stability of shell is sailed.

Key words: cylindrical shell, theory of shells, stability of shells, radial loading, critical pressure, shell thickness, the theory of elasticity.



References

1. Vlasov V. Z. *Obshchaia teoriia obolochek* [General theory of shells]. Moscow, Gos. izd. teh. teor. lit., 1949, 784 p. (in Russian).
2. Burmistrov E. F. *Simmetrichnaia deformatsiia konstruktivno-ortotropnykh obolochek vrashcheniia* [Symmetric deformation of structurally orthotropic shells of revolution]. Saratov, Saratov. Univ. Press, 1962. 108 p. (in Russian).
3. Mochalin A. A. Sustainability semi-momentless cylindrical shell of variable thickness. *Izv. vuzov. Mashinostroenie*, 1975, no. 11, pp. 27–31 (in Russian).
4. Shteinberg M. V. Calculation of circular cylindrical shells with variable thickness in the direction of forming. *Prikladnaia mekhanika*, 1965, vol. 1, iss. 7, pp. 67–72 (in Russian).

УДК 539.274

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ НАГРУЖЕНИЯ ПОЛОГО ШАРА В УСЛОВИЯХ БОЛЬШИХ УПРУГОПОЛЗУЧИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Е. В. Мурашкин

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

Предложена модель больших упругоползучих деформаций. Разделение тензора полных деформаций альманси определяется уравнениями изменения обратимой и необратимой его составляющих. Рассмотрено сферически симметричное деформирование полого шара в процессе установившейся ползучести. Получена разрешающая система уравнений рассматриваемой краевой задачи. Предложен способ определения нагружающего усилия вызывающего заданное деформированное состояние. По заданным законам изменения поля перемещений построены функции внешнего нагружающего усилия.

Ключевые слова: большие деформации, ползучесть, упругость, релаксация.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость повышения точности математического описания процессов, происходящих при технологической обработке и эксплуатации металлоизделий, вынуждает учитывать упругие свойства материалов на всех стадиях жизненного цикла изделия. Рассмотрение задач в классических моделях малых деформаций невозможно, когда относительное изменение формы рассматриваемого тела велико. Одной из таких характерных задач, где нельзя обойтись без применения модели больших деформаций, является задача о моделировании процессов в окрестности микропоры в металле, происходящих под действием интенсивного давления. Актуальность данной задачи обусловлена обнаруженным на опыте эффектом существенного повышения эксплуатационных характеристик металла при интенсивном всестороннем сжатии образцов [1] «залечивания» микродефектов сплошности. Попытки смоделировать процесс залечивания микропоры в металле делались неоднократно, в том числе и на основе модели больших упругопластических деформаций [2], обладающей эффектом приспособляемости к периодическим нагружениям по циклу «нагрузка – разгрузка» [3].

В настоящей работе решена задача о сферически симметричном сжатии шара с микропорой в центре. Условие несжимаемости среды определяет кинематику среды с точностью до неизвестной функции времени, что позволяет по известному закону деформирования определить процесс нагружения, вызывающий заданное деформированное состояние.

1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

За основу возьмем модель больших упругопластических деформаций [3], основные кинематические соотношения которой в прямоугольной декартовой системе пространственных (эйлеровых)



координат могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik})e_{kj} + e_{ik}(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}) \right), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \quad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_m u_{i,m}, \\ r_{ij} &= w_{ij} + z_{ij}(e_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}), \\ d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}. \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношениях (1), u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; e_{ij} и p_{ij} — обратимая и необратимая составляющие тензора полных деформаций Альманси d_{ij} ; $\frac{D}{Dt}$ — объективная производная тензоров по времени; источник ε_{ij}^p в уравнении изменения тензора p_{ij} — тензор скоростей необратимых деформаций, $z_{ij} = -z_{ji}$ — нелинейная часть тензора вращений, полностью выписанная в [3], определяющая его отличие от тензора жесткого вращения w_{ij} .

Следуя формализму неравновесной термодинамики, напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, и для рассматриваемого случая несжимаемой среды данные зависимости записываются в виде

$$\sigma_{ij} = -p_1 \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}). \quad (2)$$

В соотношениях (1) p_1 — добавочное гидростатическое давление, W — упругий потенциал, который для изотропной среды принимается в форме

$$\begin{aligned} W &= (a - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - kJ_1J_2 - \zeta J_1^2, \\ J_1 &= e_{jj} - \frac{1}{2}e_{ij}e_{ji}, \quad J_2 = e_{ij}e_{ji} - e_{ij}e_{jk}e_{ki} + \frac{1}{4}e_{ij}e_{jk}e_{ks}e_{si}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\lambda, \mu, a, b, \theta$ — упругие модули среды.

Принимаем, что компоненты тензора скоростей необратимых деформаций связаны с компонентами напряжений законом ползучести Нортон [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^p &= \frac{dV(\Sigma)}{d\sigma_{ij}}, \quad V(\Sigma) = B\Sigma(\sigma_{ij})^n, \\ \Sigma &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь B и n — заданные постоянные, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. РАЗРЕШАЮЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим шар начального радиуса R_0 с одиночным сферическим дефектом сплошности (микрора) начального радиуса r_0 в центре шара. Процесс деформирования задается краевыми условиями:

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -P(t), \quad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0, \quad (5)$$

в которых σ_{rr} — радиальная компонента тензора напряжений в сферической системе координат (r, φ, θ) . $R(t) \gg r_0$ — радиус сферической поверхности, на которой задается внешнее давление, $s(t)$ — текущий радиус границы микропоры.

Кинематика среды согласно принятому условию несжимаемости определяется с точностью до неизвестной функции $\varphi(t)$:

$$u_r = r - (r^3 + \varphi(t))^{1/3}, \quad \varphi(t) = s_0^3 - s^3(t) = R_0^3 - R^3(t), \quad (6)$$



где $u = u_r$ — единственная не равная нулю компонента вектора перемещений.

Согласно формулам (2) и (3) компоненты напряжений с точностью до неизвестной функции добавочного гидростатического давления вычисляются зависимостями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & -p_1 + g_1 e_{rr} + g_2 e_{rr}^2 - g_3 e_{rr} e_{\theta\theta} + g_4 e_{rr}^3 + g_5 e_{rr} e_{\theta\theta}^2 + g_6 e_{rr}^2 e_{\theta\theta} - g_7 e_{rr}^4 + \\ & + g_8 \left(e_{rr} e_{\theta\theta}^4 - 4 e_{rr} e_{\theta\theta}^3 + 2 e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^3 - \frac{1}{2} e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^4 \right) - g_9 e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^2 + g_{10} \left(3 e_{rr}^5 - \frac{1}{2} e_{rr}^6 \right) + \\ & + 2 g_{11} \left(e_{rr}^4 e_{\theta\theta} + 2 e_{rr}^3 e_{\theta\theta}^2 - 4 e_{rr}^3 e_{\theta\theta} - \frac{1}{2} e_{rr}^4 e_{\theta\theta}^2 \right), \\ \sigma_{\theta\theta} = & -p_1 + g_1 e_{\theta\theta} + g_{12} e_{\theta\theta}^2 - \frac{1}{2} g_3 e_{rr} e_{\theta\theta}^2 + g_{13} e_{\theta\theta}^3 + g_{18} \left(e_{\theta\theta}^5 - \frac{1}{6} e_{\theta\theta}^6 \right) + \\ & + g_{11} \left(\frac{1}{4} e_{rr}^4 e_{\theta\theta}^2 - 2 e_{rr}^3 e_{\theta\theta} + \frac{1}{2} e_{rr}^4 e_{\theta\theta} - e_{rr}^3 e_{\theta\theta}^2 \right) + g_{15} e_{rr} e_{\theta\theta}^2 - g_{16} e_{\theta\theta}^4 + \\ & + g_{14} e_{rr}^2 e_{\theta\theta} - g_{17} e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^2 + g_8 \left(2 e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^3 + e_{rr} e_{\theta\theta}^4 - \frac{1}{2} e_{rr}^2 e_{\theta\theta}^4 - 4 e_{rr} e_{\theta\theta}^3 \right), \\ g_1 = & 2\mu, \quad g_2 = \mu + 4a + 4b + 2k, \quad g_3 = 4(2b + k), \\ g_4 = & 4 \left(a + b + 2k + \frac{3}{2}\zeta \right), \quad g_5 = 2(2b + 3k + 12\zeta), \quad g_6 = g_5 + 4k, \\ g_7 = & a + b + \frac{19}{2}k + 9\zeta, \quad g_8 = k + 6\zeta, \quad g_9 = 2b + 7k + 24\zeta, \quad g_{10} = \frac{3}{2}(k + \zeta), \\ g_{11} = & k + 3\zeta, \quad g_{12} = \mu + 4a + 8b + 4k, \quad g_{18} = 9(k + 2\zeta), \\ g_{13} = & 4(a + 2b + 4k + 6\zeta), \quad g_{14} = \frac{1}{2}g_5 - 6\zeta, \quad g_{15} = \frac{1}{2}g_6 + 12\zeta, \\ g_{16} = & a + 2b + 19k + 36\zeta, \quad g_{17} = b + \frac{7}{2} + 15\zeta, \quad p_1 = P - \frac{\partial W}{\partial J_1}. \end{aligned}$$

Компоненты полных деформаций по известному полю перемещений (6) находятся соотношениями

$$\begin{aligned} d_{rr} = \frac{1}{2} \left(1 - H^{-4/3} \right), \quad d_{\theta\theta} = d_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \left(1 - H^{2/3} \right), \quad H = 1 + \frac{\varphi(t)}{r^3}, \quad (7) \\ d_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 2d_{rr}}} \right). \end{aligned}$$

Согласно кинематическим зависимостям (1) имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^p = \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} (1 - 2p_{\theta\theta})^{-1}, \quad (8) \\ e_{rr} = 1 - x^{-2/3}, \quad e_{\theta\theta} = 1 - x^{1/3}, \quad x = \left(\frac{1 - 2p_{rr}}{1 - 2d_{rr}} \right)^3 = H^4 (1 - 2p_{rr})^3. \end{aligned}$$

Подстановка (7) и (8) в определяющие соотношения (4) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dp_{rr}}{dt} (1 - 2p_{rr})^{-1} = Bn \Sigma^{n-1} \left(1 - H^{-\frac{8}{3}} (1 - 2p_{rr})^{-2}, 1 - H^{\frac{1}{3}} (1 - 2p_{rr}) \right), \\ \Sigma(a, b) = g_1(a - b) - g_2 a^2 + g_{12} b^2 + g_4 a^3 - g_{13} b^3 + \frac{1}{2} g_3 \left(\frac{1}{2} a b^2 - a b \right) + \\ + g_{19} \left(a^2 b - \frac{1}{2} a^2 b^2 \right) + g_{10} \left(3b^5 - \frac{1}{2} a^6 \right) + \frac{1}{3} g_{18} \left(\frac{1}{2} a^6 - 3b^5 \right) - g_7 a^4 + \\ + \frac{3}{4} g_{11} \left(a^4 b + 2a^3 b^2 - \frac{1}{2} a^4 b^2 - 4a^3 b \right) + g_{16} b^4, \quad (9) \\ g_{19} = 2b + 7k + 18\zeta. \end{aligned}$$

Уравнение (9) в каждой точке среды $s(t) \leq r \leq R(t)$ является обыкновенным дифференциальным уравнением для вычисления компоненты необратимых деформаций p_{rr} (или $p_{\theta\theta}$). С другой стороны,



компоненты напряжений находятся интегрированием уравнения движения:

$$\sigma_{rr,r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\rho_0 \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{3r^2} + \frac{2}{9} \frac{\dot{\varphi}^2(t)}{r^5} \right),$$

используя второе граничное условие (5). Вычислив напряжения на внешней границе согласно первому граничному условию (5), получаем интегродифференциальную связь между нагружающим давлением $P(t)$ и функцией $\varphi(t)$:

$$P(t) = 2 \int_{s(t)}^{R(t)} \frac{\Sigma(e_{rr}, e_{\theta\theta})}{r} dr - \rho_0 \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{3} \left(\frac{1}{R(t)} - \frac{1}{s(t)} \right) + \frac{\dot{\varphi}^2(t)}{18} \left(\frac{1}{R(t)^4} - \frac{1}{s(t)^4} \right) \right). \quad (10)$$

Численные расчеты удобнее провести в безразмерных переменных:

$$\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \frac{t}{R_0}, \quad f(\tau) = \frac{\varphi(t)}{R_0^3}, \quad \Pi(\tau) = \frac{P(t)}{\mu}, \quad y = \frac{r}{R_0}.$$

Ниже будут приведены результаты расчетов, когда постоянным материала были предписаны следующие значения:

$$\alpha\mu^{-1} = 0.9, \quad \beta\mu^{-1} = 4, \quad \xi\mu^{-1} = 20, \quad \chi\mu^{-1} = 80, \quad n = 3, \\ B_0 = nB\rho_0R_0\mu^{n-2} = 3.5, \quad k\mu^{-1} = 0.003, \quad s_0R_0^{-1} = 0.03.$$

Функция $f(t)$, определяющая кинематику среды, выбиралась следующим образом:

$$f_1(\tau) = 269 \cdot 10^{-7} (1 - e^{-\tau^2/250}), \quad f_2(\tau) = r_0^3 (1 - e^{-\tau^2/250}), \\ f_3(\tau) = 269 \cdot 10^{-7} \left(1 - e^{-p_3(\tau/22)} \right), \quad p_3(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}.$$

На рис. 1 и 2 проиллюстрированы изменения границы микропоры и нагружающего усилия соответственно при функциях, определяющих поле перемещений (f_1 — сплошная линия, f_2 — штриховая линия, f_3 — пунктирная линия).

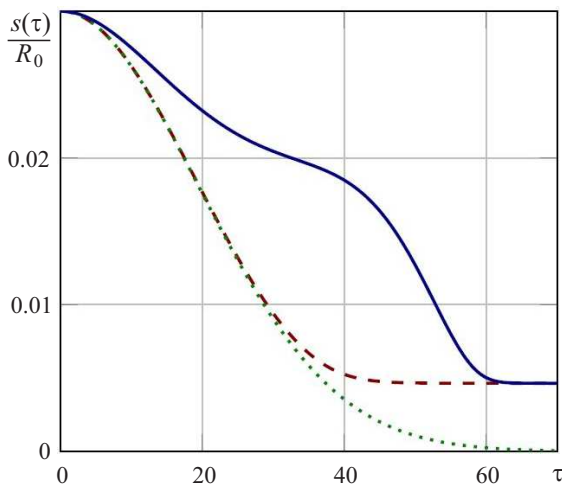


Рис. 1. Динамика границы микропоры

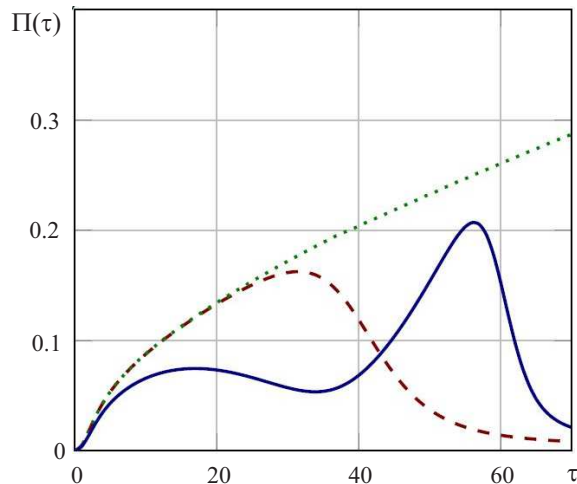


Рис. 2. Изменения нагружающего усилия

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная модель процесса нелинейной ползучести при больших деформациях основана на модели больших упругопластических деформаций, в которой разделение полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие является следствием понятных термодинамических принципов,



что является существенным преимуществом примененного подхода. Решенные задачи о ползучести, релаксации напряжений и разгрузке в шаре с одиночным сферическим дефектом сплошности имеют своей целью описание экспериментально известного процесса залечивания микропор.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-33064 мол_а_вед).

Библиографический список

1. Горелов В. И. Исследование влияний высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // Прикладная механика и техническая физика. 1984. № 5. С. 157–158.
2. Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
3. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // Докл. АН. 2000. Т. 375, № 6. С. 767–769.

The Loading Parameters Calculation of a Hollow Sphere at the Large Elastocreep Deformations

E. V. Murashkin

Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

We presented a model of large elastocreep deformations. Separation of Almansi strain tensor is determined by the quadratic form of reversible and irreversible components. We consider spherically symmetric deformation of a hollow sphere in the steady creep process. Numerical solution of boundary-value problem was obtained. A method for determining loading force on the deformed state was proposed. Functions of the external loading force according to the laws of a given change in the displacement field were constructed.

Key words: large deformation, creep, relaxation, elasticity.

References

1. Gorelov V. I. Effect of high pressure on mechanical characteristics of aluminum alloys. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1984, vol. 25, iss. 5, pp. 813–814.
2. Burenin A. A., Bykovtsev G. I., Kovtanyuk L. V. A simple model of finite strain in an elastoplastic medium. *Doklady physics*, 1996, vol. 41, no. 3, pp. 127–129.
3. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Polonik M. V. The possibility of reiterated plastic flow at the overall unloading of an elastoplastic medium. *Doklady physics*, 2000, vol. 45, no. 12, pp. 694–696.

УДК 519.654

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Р. Т. Файзуллин¹, Р. Р. Файзуллин²

¹ Доктор технических наук, профессор кафедры комплексной защиты информации, Омский государственный технический университет, r.t.faizullin@mail.ru

² Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры комплексной защиты информации, Омский государственный технический университет, strannik11@list.ru

Предложены способы восстановления функциональной зависимости с заданным разрывом. Приведены примеры применения алгоритма построения функций с особенностью. Первый способ основан на формальной минимизации функции методом случайного поиска. Второй использует информативность данных.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, разрыв, особенность.



Метод наименьших квадратов (МНК) широко используется для решения различных задач прикладной математики и техники: многомерных задач аппроксимации зависимостей массивов [2], обобщений МНК для нелинейных задач [1], задачи уравнивания [6], разнообразных аппроксимаций [3–5]. Также метод лежит в основе построения фильтра Калмана–Бюсси [7].

Особый интерес представляет случай, когда функциональная зависимость, которая связывает условия эксперимента и проведенные измерения, предполагает наличие особенностей с известными характеристиками. Задачи, возникающие в этом случае, разнообразны и их следует рассматривать по мере усложнения. Очевидный первый шаг — это задача нахождения точки разрыва первого рода для функции с ограниченной вариацией, заданной с ошибками. Эта проблема полностью решена в работах Агеева и его учеников. Она имеет отношение к проблеме восстановления контуров на изображениях, например, [8]. Следующим шагом является решение задач с дополнительными условиями на разрывах, например, задача с заданным разрывом функции.

В качестве первого примера рассмотрим следующую простую задачу (см. [9]). Пусть известно, что на некотором интервале функциональная зависимость между условиями эксперимента и результатом измерений имеет вид: $f(x) = A_1x + B_1$, а на другом интервале $f(x) = A_2x + B_2$. Необходимо найти точку, в которой происходит излом или, иначе говоря, известен разрыв первого рода производной при наличии ошибок измерения. Эта задача имеет непосредственное отношение к практике: в проблеме определения смены тренда в техническом анализе или в задаче определения аварийного участка на трассе магистрального продуктопровода. Функции $f(x) = A_i x + B_i$ определяют так называемые линии гидравлического уклона, где δ определяют ошибки датчиков, $F = f + \delta$ — показания датчиков. Точка излома характеризует место аварии или истечения транспортируемого носителя (горячей воды, нефти и т. п.), а значение разрыва производной — расход истекаемого продукта. Заметим, что разрыва самой функции не предполагается, кроме особо оговоренных случаев. Следует подчеркнуть важность проблемы для практики, определение места прорыва в итоге определяется визуально, при облете на вертолете.

Другим содержательным примером может служить задача представления целочисленных данных конечным рядом Фурье. Данные можно представить как набор целочисленных точек на плоскости и построить кусочно-линейную, выпуклую функцию f , которой они будут принадлежать.

Поясним это подробнее. Пусть нам заданы $2N$ целых чисел z_i . Образует набор N точек на плоскости, координаты которых задаются по правилу: $x_j = z_{2i}$, $y_j = z_{2i+1}$. Далее, упорядочим их по величине тангенса угла наклона к оси Ox y_j/x_j . Перейдем к координатам (u, v) по правилам: $u_1 = x_s$, $v_1 = y_s$, для всех j таких, что $y_s/x_s \geq y_j/x_j$, $u_{j+1} = u_j + x_m$, $v_{j+1} = v_j + y_m$, где m — номер точки, следующей по убыванию тангенса угла наклона к оси x . Очевидно, что по полученным точкам можно построить выпуклую, монотонно возрастающую, кусочно-линейную функцию.

Функция эта приближается частичной суммой тригонометрического ряда Фурье. Зная u_j , можно попытаться восстановить y_i с помощью МНК и учетом того, что полученная функция монотонно возрастающая и выпуклая и ее значения целочисленны. Отметим, что недостающий «хвост» ряда Фурье — это аналог ошибки измерений в классическом МНК.

Предположим, что известны: точка a на интервале $[0, L]$, значение разрыва функции D в точке a и вид функциональной зависимости. В этом случае можно применить МНК к обоим интервалам, разделенным точкой разрыва. Тогда, например, в случае линейных зависимостей знание значения разрыва очевидным образом позволяет получить систему из пяти уравнений для четырех неизвестных:

$$\begin{aligned} A_1 \sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 + B_1 \sum_{i=1}^{N_1} x_i &= \sum_{i=1}^{N_1} x_i y_i, \\ A_1 \sum_{i=1}^{N_1} x_i + B_1 N_1 &= \sum_{i=1}^{N_1} y_i, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 A_2 \sum_{i=N_1+1}^N x_i^2 + B_2 \sum_{i=N_1+1}^N x_i &= \sum_{i=N_1+1}^N x_i y_i, \\
 A_2 \sum_{i=N_1+1}^N x_i + B_2(N - N_1) &= \sum_{i=N_1+1}^N y_i, \\
 |A_1 x + B_1 - A_2 x - B_2| &= D.
 \end{aligned}$$

Стандартный способ решения такой системы — это минимизация функции:

$$F(A_1, A_2, B_1, B_2, x) = \left(A_1 \sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 + B_1 \sum_{i=1}^{N_1} x_i - \sum_{i=1}^{N_1} x_i y_i \right)^2 + \dots + (|A_1 x + B_1 - A_2 x - B_2| - D)^2.$$

Данный подход возможно обобщить для случая разрыва производной. Добавляется 6-е уравнение $|A_1 - A_2| = C$ и слагаемое в функцию $(C - |A_1 - A_2|)^2$.

Обратим внимание на трудности в решении задачи: нормы, присутствующие в выражении для функции, различны, функция не дифференцируема.

Первым шагом алгоритма будет являться нахождение точки с разрывом функции первого рода. Отрезок $[0, L]$ разбивается на два интервала: $[0, \bar{a}]$, $(\bar{a}, L]$, где \bar{a} достаточно мало, и на каждом интервале находится решение МНК как функции f_1, f_2 . Считаем расстояние между ними в норме l_2 . Затем пошагово увеличиваем \bar{a} и для каждого значения \bar{a} вычисляем сумму квадратов отклонений:

$$S = \sum_{i=1}^{N_1} (y_i - A_1 x_i - B_1)^2 + \sum_{i=N_1+1}^N (y_i - A_2 x_i - B_2)^2.$$

Минимальное значение S будет соответствовать наиболее подходящему значению \bar{a} .

Для поиска нескольких особенностей методику можно модифицировать, выбирается маска $L = \bar{a} + K\Delta s$, т. е. отрезок длины \bar{a} , достаточно малый по сравнению с L , и последовательно смещая его с шагом Δs , получаем предположительные точки особенностей $a_m, m = 1, \dots, K$, с величинами разрывов производной $D_m, m = 1, \dots, K$. Далее, упорядочение по величине разрыва позволяет выявить скачок при некотором m_p . Это позволяет отделить изломы от артефактов.

Рассмотрим работу алгоритма на конкретном примере. Пусть задан фиксированный набор точек, координаты которых принимают значения, приведенные в следующей таблице.

Пример экспериментальной зависимости, маскирующей линию гидравлического уклона под влиянием нестационарных процессов

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	13	10	11	9	7	10	8	6	7	8	4	3
№	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
x	12	13	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25
y	5	2	1	3	16	2	1	-1	2	0	1	-1

Проведем поиск точки разрыва функции первого рода из условия $D \rightarrow \min$, иначе говоря, отрезок $[0, L]$ разбивается на два интервала: $[0, \bar{a}]$, $(\bar{a}, L]$, где \bar{a} достаточно мало, и на каждом интервале находится решение МНК как линейной функции f_1, f_2 . Считаем расстояние между ними в норме, согласованной с l_2 . Затем пошагово увеличиваем \bar{a} и для каждого значения \bar{a} вычисляем соответствующее D . В результате получаем набор чисел D , выбираем минимальное и находим x_m — координату этого «минимального разрыва», которая равна 16.67. Другими словами, это место, где нами ставится граница между приближающимися точки отрезками, из условия, что их концы в точке с абсциссой x_m находятся на минимальном расстоянии. Мы можем видеть на рис. 1, что концы этих отрезков довольно близки друг к другу, расчет дает величину 0.13 для расстояния между ними.

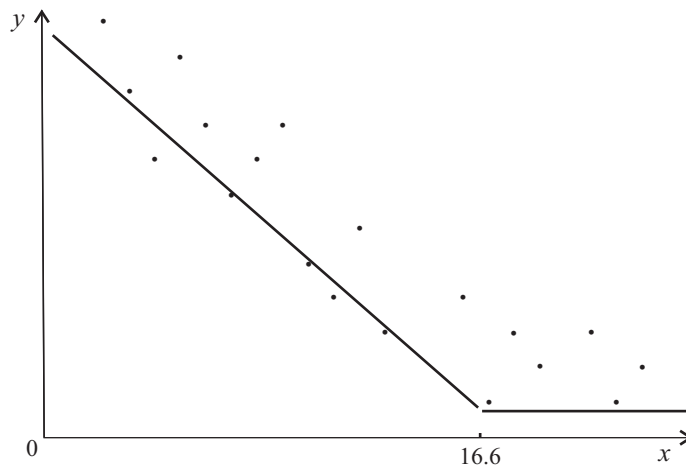


Рис. 1. График приближенной функции с разрывом

Отметим, что справа от перпендикуляра, восстановленного к Ox в точке 16.6, расположено существенно меньше половины точек из таблицы.

Допустим в реальной задаче, к примеру в расчете напоров, нам надо получить неразрывный график функции, т. е. разрыв функции мы желаем установить в $D = 0$. Если рассмотреть подход, связанный с минимизацией функции $F(A_1, A_2, B_1, B_2, x)$ методом случайного поиска, то уже при двух-трех итерациях получаются неуплучшаемые результаты. Будем искать коэффициенты двух приближающих прямых A_i и B_i относительно него. Рассматриваем вначале точку пространства переменных, получаемую из соображений минимума разрыва по вертикали: $A_1 = -0.646$, $B_1 = 11.613$, $A_2 = 0$, $B_2 = 0.714$, $x = 16.66$. Среднеквадратичное отклонение для таких параметров равно 2.938. Проводим итерационный процесс случайного поиска на каждой итерации, создавая около текущей точки t 10 новых пробных точек $A_1^i + \delta_1$, $B_1^i + \delta_2$, $A_2^i + \delta_3$, $B_2^i + \delta_4$, $x^i + \delta_5$. Все δ_j^i равномерно распределены в промежутке $[-c_i, c_i]$, $c_1 = 0.1$, $c_{i+1} = c_i/2$. В 10 полученных точках рассчитывается значение функции F , из них (включая стартовую) выбирается точка с минимальным значением этой функции, она берётся за стартовую для новой итерации. В примере, когда были проведены 3 итерации, среднеквадратичное отклонение в сумме по обеим сторонам для итоговой точки разрыва составило 0.25. Отдельный вопрос составляет допустимость получаемых при случайном поиске решений, т. е. точное значение $D = 0$ получить не удастся. Но для второй рассмотренной задачи определения целочисленной точки это не существенно.

Другой способ основан на том соображении, что информативность различных частей данных различна. Обратимся к рассмотренному численному примеру. Очевидно, что полученная линейная зависимость слева заслуживает большего доверия, чем линейная зависимость справа. Дисперсия параметров прямой меньше в силу большего числа данных слева и оправданных гипотез о нормальности и отсутствии систематической ошибки.

Это позволяет решить проблему за счет небольшого изменения правой части графика. Мы будем рассчитывать минимум суммы квадратов расстояний точек до правого отрезка прямой $S_2 = \sum_{i=N_1+1}^N (y_i - A_3x_i - B_3)^2$ с условием, что ему принадлежит точка (x_m, y_m) , правая граница левого отрезка. Фактически, мы «поднимаем» левый край второго отрезка до совмещения с правым краем первого через равенство $A_1x_m + B_1 = y_m = A_3x_m + B_3$, а затем вычислим из соображений минимизации суммы квадратов отклонений S_2 угловой коэффициент второго отрезка A_3 . Результат изображен на рис. 2. Отличие между первоначальным и повернутым правыми отрезками равняется 3.5. Это существенно больше, чем в первом подходе, но здесь неявно учитывается информативность данных.

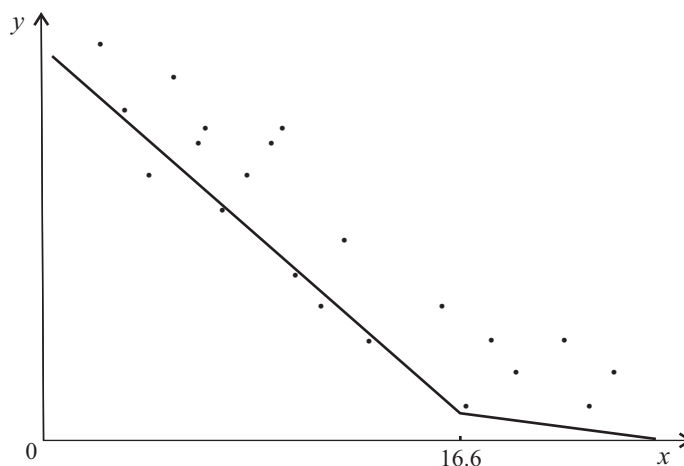


Рис. 2. График приближенной функции с условием точной склейки

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены два способа восстановления функциональной зависимости с заданным разрывом. Первый опирается на формальную минимизацию методом случайного поиска недифференцируемой функции, зависящей от параметров состыкованных функциональных зависимостей и места разрыва. Второй — на различную информативность данных по обеим частям разрыва.

Библиографический список

1. Мусатов М. В., Львов А. А. Анализ моделей метода наименьших квадратов и методов получения оценок // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2009. Т. 4, № 2. С. 137–140.
2. Кветной Р. Н., Бойко А. Р., Степова Т. А. Многомерная полиномиальная аппроксимация зависимостей заданных массивами интервальных данных по методу наименьших квадратов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2011. № 3. С. 103–106.
3. Джагаров Ю. А. Программный модуль для расчета аппроксимирующих полиномов по методу наименьших квадратов // Программные продукты и системы. 2005. № 3. С. 14.
4. Суханов Д. Я., Суханов А. Я. Метод итерационной настройки многослойной нейронной сети на основе метода наименьших квадратов // Докл. Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники. 2004. № 2. С. 111–115.
5. Милов В. Р. Адаптивная обработка сигналов на основе рекуррентного алгоритма с регуляризацией по методу наименьших квадратов // Изв. вузов. Приборостроение. 2003. Т. 46, № 10. С. 11–17.
6. Тао Хуасюе, Юй Шенвень, Ли Пин Новая модель решения задачи уравнивания по методу нелинейных динамических наименьших квадратов // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2001. № 7. С. 157–160.
7. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана–Бьюси. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1982.
8. Агеев А. Л., Антонова Т. В. О локализации разрывов первого рода для функций ограниченной вариации // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 56–68.
9. Логинов К. В., Мызников А. М., Файзуллин Р. Т. Расчет, оптимизация и управление режимами работы больших гидравлических сетей // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 9. С. 92–106.

The Restoration of Functional Relationships with a Given Singularity

R. T. Faizullin, R. R. Faizullin

Omsk State Technical University, 11, Mira ave., 644050, Omsk, Russia, r.t.faizullin@mail.ru, strannik11@list.ru

Provided methods recovery of functional dependence with a specified discontinuity. Application of the algorithm of building function with given discontinuity is shown. The first method is based on a formal function minimization by random search. The second uses the information content of the data.

Key words: least squares method, discontinuity, singularity.



References

1. Musatov M. V., L'vov A. A. Model Analysis of the Least Squares Method and Methods to Obtain Estimates. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta* [Bulletin of the Saratov State Technical University], 2009, vol. 4, no. 2, pp. 137–140 (in Russian).
2. Kvetnoj R. N., Bojko A. R., Stepova T. A. A Multivariate Polynomial Approximation of the Dependencies of the Specified Array of Interval Data on Method Least Squares. *Visnik Vinnic'kogo politehničnogo institutu* [Bulletin of Vinnica Polytechnical Institute], 2011, no. 3, pp.103–106 (in Russian).
3. Dzhagarov Ju. A. Programmnyj modul' dlja rasčeta approksimirujushhih polinomov po metodu naimen'shih kvadratov [The Software Module for the Calculation of Approximating Polynomials by the Method of Least Squares]. *Programmnye produkty i sistemy* [Program products and systems], 2005, no. 3, pp. 14 (in Russian).
4. Suhanov D. Ja., Suhanov A. Ja. The Method of Iterative Tuning Multilayer Neural Network Based on the Method of Least Squares. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravlenija i radioelektroniki* [Reports of Tomsk State University of Control Systems and Radio Electronics], 2004, no. 2, pp. 111–115 (in Russian).
5. Milov V. R. Adaptive Signal Processing Based on Recursive Algorithm with Regularization of the Least Squares. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Priborostroenie*, 2003, vol. 46, no. 10, pp. 11–17 (in Russian).
6. Tao Huasjue, Juj Shenven', Li Pin. A New Model for the Solution of the Equalization Method of Nonlinear Dynamic Least Squares. *Gornyj informacionno-analiticheskiy bjulleten' (naučno-tehničeskij zhurnal)* [Mining informational and analytical bulletin (scientific and technical journal)], 2001, no. 7, pp. 157–160 (in Russian).
7. Brammer K., Ziffling G. *Fil'tr Kalmana–B'jusi* [Kalman-Bucy filter]. Moscow, Nauka, 1982 (in Russian).
8. Ageev A. L., Antonova T. V. Localization of Discontinuities of the First Kind for the Functions with Bounded Variation. *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. of the IMM of Ural department of RAS], 2012, vol. 18, no. 1, pp. 56–68 (in Russian).
9. Loginov K. V., Myznikov A. M., Fajzullin R. T. Calculation, optimization and control modes of the large hydraulic networks. *Matem. modelirovanie* [Math. modeling], 2006, vol. 18, iss. 9, pp. 92–106 (in Russian).



ИНФОРМАТИКА

УДК 501.1

РАСПОЗНАВАНИЕ ВХОДОВ ЛИНЕЙНОГО АВТОМАТА ПО НЕЧЕТКИМ ВЫХОДАМ

Д. В. Сперанский

Доктор технических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Московский государственный университет путей сообщений, Speranskiy.DV@gmail.com

Предложен метод решения задачи распознавания неизвестных входных последовательностей линейного автомата при наблюдении нечетких выходов.

Ключевые слова: автомат без потери информации, системы линейных уравнений с нечеткими переменными над полем $GF(p)$.

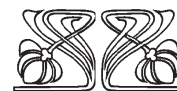
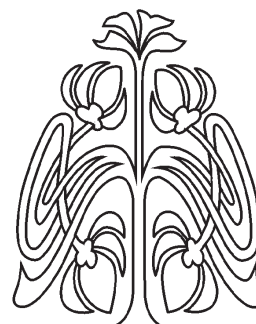
ВВЕДЕНИЕ

Названная в заголовке статьи задача возникает в ряде практических приложений. Так, устройства, описываемые моделью линейного автомата (ЛА), могут быть использованы как каналы связи, в которых осуществляется кодирование передаваемой информации. Использование таких каналов очевидно имеет смысл в том случае, если получаемая на выходе информация может быть декодирована. Кроме того, устройства, обладающие возможностью декодирования получаемой информации, позволяют применять для них простые и вместе с тем эффективные схемы встроенного контроля (СВК). Такие СВК основаны на принципе сравнения входных сигналов, восстановленных по наблюдаемым выходам с реальными сигналами, поступающими на входы устройства. Очевидно, что рассогласование восстановленных и реальных сигналов свидетельствует о неправильном функционировании контролируемого устройства.

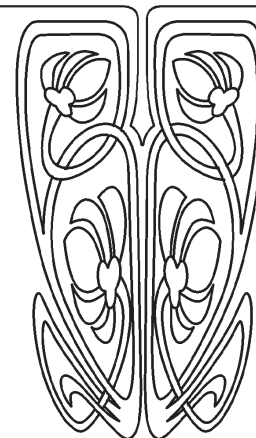
Класс автоматов (в общем случае нелинейных), для которых возможно распознавание неизвестных входных слов, был впервые введен Д. А. Ниффман [1] и назван классом автоматов без потери информации (БПИ). При этом предполагалась помимо знания выходных слов и его начального состояния возможность проведения дополнительного эксперимента.

В [2] было введено определение ЛА БПИ, распознавание неизвестных входных слов которого (в отличие от [1]) не требовало проведения дополнительного эксперимента. В [3] доказано, что для ЛА два упомянутых определения автомата БПИ эквивалентны.

При решении задачи распознавания неизвестных входных слов в [1, 2] использовался классический математический аппарат, базирующийся на операциях с точными значениями величин (данных), на традиционной математической логике и т. д. Однако информация о реальной системе, для которой строится модель ЛА, не всегда удовлетворяет упомянутым требованиям по объективным причинам.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Например, исходные данные (в частности, значения выходных сигналов ЛА) могут быть неточными (нечеткими) из-за несовершенства измерительной аппаратуры. В этих условиях важно наличие средств для отражения упомянутой нечеткости (неопределенности).

Возникшее в последние 50 лет понимание необходимости разработки математического аппарата для работы с неопределенностями различного типа привело к возникновению новых дисциплин, в частности, интервального анализа [4]. Задача, упомянутая в заголовке предлагаемой статьи в условиях неопределенностей интервального типа, была исследована в [5]. Важной вехой на пути создания подходящего математического аппарата для работы с неопределенностями других типов явилось создание Л. Заде (L. A. Zadeh) концепции нечетких множеств [6]. На этой основе начали развиваться нечеткая логика, нечеткая теория управления, нечеткая алгебра, нечеткая арифметика и т.д. Что касается нечеткой арифметики, развитой для операций с вещественными числами, то с основными ее результатами можно ознакомиться, например, по обобщающим работам [7–10].

Поскольку в предлагаемой статье объектом исследования является ЛА, заданный над полем $GF(p)$, то необходимо будет ввести соответствующие операции над элементами поля $GF(p)$ и исследовать особенности нечеткой арифметики над этим полем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является ЛА [2, 3], заданный над полем $GF(p)$, где p — простое число, следующими уравнениями переходов и выходов:

$$\bar{s}(t+1) = A\bar{s}(t) + B\bar{u}(t), \quad (1)$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{s}(t) + D\bar{u}(t). \quad (2)$$

Здесь t — момент дискретного времени; $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times l}$, $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, $D = [d_{ij}]_{m \times l}$ — характеристические матрицы. Элементы всех этих матриц — это элементы поля $GF(p)$. Входной вектор $\bar{u}(t)$, выходной вектор $\bar{y}(t)$ и вектор-состояние $\bar{s}(t)$ представляют собой упорядоченные наборы столбцы из элементов того же поля:

$$\bar{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_l(t)]', \quad \bar{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]', \quad \bar{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_n(t)]'.$$

Известно [2, 3], что конечное состояние ЛА и выходная реакция ЛА в результате подачи входной последовательности $\bar{u}(0), \bar{u}(1), \dots, \bar{u}(t)$ длины $t+1$ при начальном состоянии $\bar{s}(0)$ вычисляются по формулам:

$$\bar{s}(t+1) = A^{t+1}\bar{s}(0) + A^t B\bar{u}(0) + \dots + AB\bar{u}(t-1) + B\bar{u}(t), \quad (3)$$

$$\bar{y}(t) = CA^t\bar{s}(0) + CA^{t-1}B\bar{u}(0) + \dots + CB\bar{u}(t-1) + D\bar{u}(t). \quad (4)$$

В [2] рассматривалась следующая задача: у заданного ЛА БПИ известно его начальное состояние и на его выходах может наблюдаться реакция на неизвестную входную последовательность. По этим данным требуется распознать упомянутую входную последовательность.

В этой классической задаче наблюдаемый выходной сигнал $\bar{y}(t)$ был представлен в виде упорядоченной совокупности точных значений его координат. В предлагаемой статье рассматривается та же задача распознавания, но в предположении, что наблюдаемый выход ЛА есть вектор $\bar{y}(t)$, представленный в виде $\bar{y}(t) = [y_1^*, \dots, y_m^*]$, где y_i^* — нечеткие числа (например, «примерно k »). Условимся далее интерпретировать каждый элемент поля $GF(p)$ как «четкое» число из множества $\{0, 1, \dots, p-1\}$, считая его представителем соответствующего класса чисел по модулю p .

2. НЕЧЕТКАЯ АРИФМЕТИКА НАД ПОЛЕМ $GF(p)$

Известно [11], что нечеткие числа могут быть представлены в различных формах (табличной, графической и др.). Ниже будет использоваться так называемая L - R форма представления, которая отличается простотой и удобством выполнения операций над нечеткими числами. (Условимся, что все используемые в статье, но не определяемые в ней, понятия и термины понимаются в смысле [11].)



Поскольку при решении рассматриваемой задачи потребуется выполнять арифметические операции над нечеткими числами в поле $GF(p)$, нам придется их ввести. При определении правил вычисления в такой нечеткой арифметике будет использован известный принцип обобщения Л. Заде, который, в частности, детально описан в [11].

Условимся, что в поле $GF(p)$ нечеткое число A представляется в L - R форме вида $A = (m, \alpha, \beta)$, в которой степень принадлежности элемента x нечеткому множеству A есть

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L((m-x)/\alpha), & \forall x \leq m, \alpha > 0, \\ R((x-m)/\beta), & \forall x \geq m, \beta > 0. \end{cases}$$

Здесь L и R — некоторые функции от x (например, показательные, экспоненциальные, линейные и т. п.), m — номинальное значение нечеткого числа, α и β — левая и правая границы интервала нечеткости соответственно. Это означает, что все носители числа A лежат в интервале $(m-\alpha, m+\beta)$. Такое число графически может быть изображено в аналоге декартовой системы координат. На оси абсцисс OX этой системы располагаются последовательно в возрастающем порядке периодически повторяющиеся элементы $GF(p) = \{0, 1, \dots, p-1\}$. На оси ординат OY этой системы располагаются значения функции принадлежности $\mu_A(x) \in [0, 1]$ элементов нечеткого множества A . Носители x числа A лежат в интервале с центром в точке m , а величины α и β есть соответственно левое и правое смещения, определяющие границы этого интервала. Таким образом, L - R представление числа A в выбранном нами варианте в графическом изображении имеет треугольную форму.

Заметим, что в L - R представлении нечетких чисел в поле $GF(p)$ параметры α и β не могут быть произвольными (как это было в случае нечетких вещественных чисел в [11]).

Введем теперь операцию сложения нечетких чисел в $GF(p)$. Пусть A_1 и A_2 — нечеткие числа, тогда их сумма также есть нечеткое число, которое задается выражением

$$(A_1 + A_2)(y) = \bigvee_{y=x_1+x_2} [A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)], \quad \forall x_1, x_2, y \in GF(p). \quad (5)$$

В этой записи $A_1(x)$ ($A_2(x)$) — элементы x_1 (x_2) из множества носителей нечеткого числа A_1 (A_2), $(A_1 + A_2)(y)$ — элемент y из множества носителей нечеткого числа $(A_1 + A_2)$. Символы \wedge и \vee соответствуют операторам пересечения и объединения множеств на основе одной из известных норм.

Функцию принадлежности для суммы определим так:

$$\mu_{A_1+A_2}(y) = \max_{y=x_1+x_2} \{ \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2) \} \}, \quad \forall x_1, x_2, y \in GF(p). \quad (6)$$

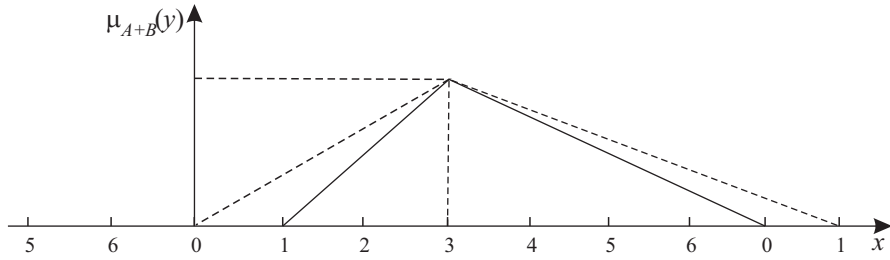
Понятно, что сложение нечетких чисел по формулам (5) и (6) есть трудоемкий процесс. По этой причине вместо него ниже предлагается упрощенный механизм вычисления характеристических параметров суммы, использующий L - R представление слагаемых. Этот механизм базируется на аналоге соответствующего механизма для нечетких вещественных чисел с учетом принципа обобщения, сформулированного Л. Заде.

Напомним, что для вещественных чисел L - R представление суммы нечетких чисел A и B в треугольной форме имеет следующий вид [11]:

$$(A + B) = (m_A + m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B). \quad (7)$$

Здесь индекс параметра указывает нечеткое число, к которому этот индекс относится.

Сохраняя этот механизм вычисления параметров для $GF(p)$, следует иметь в виду, что формальное применение формулы (7) может привести к получению интервала нечеткости, длина которого будет больше $p-1$. Например, рассмотрим в поле $GF(p)$ при $p=7$ два нечетких числа $A = (1, 2, 3)$ и $B = (2, 1, 2)$. Применение формулы (7) по правилам традиционной арифметики приводит к следующему результату: $(A + B) = (1 + 2, 2 + 1, 3 + 2) = (3, 3, 5)$. На рисунке представлено графическое изображение этого числа.



L-R представление числа $A + B = (3, 3, 5)$ до и после сжатия интервала нечеткости

Пунктиром представлено графическое изображение с учетом того, что $\alpha_{A+B} = 3$ и $\beta_{A+B} = 5$ являются смещениями от точки $m_{A+B} = 3$ на оси абсцисс влево и вправо соответственно (если m_{A+B} будет больше $p - 1$, то сумма берется по модулю p). Из этого рисунка видно, что длина интервала нечеткости Δ равна 8 и точками этого интервала являются, в частности, два элемента 0 и два элемента 1 поля $GF(p)$. Чтобы обеспечить корректность результатов суммирования для поля $GF(p)$, необходимо сжать этот интервал, превратив его в интервал $\bar{\Delta}$ длиной $p - 1 = 6$. Понятно, что такое сжатие естественно осуществлять на основе принципа пропорциональности. Проиллюстрируем его на нашем примере. Поскольку левый полуинтервал Δ имеет длину $\alpha_{A+B} = 3$, то соответствующий ему полуинтервал в $\bar{\Delta}$ должен иметь длину $(|\bar{\Delta}|/|\Delta|) \cdot \alpha_{A+B} = \frac{6}{8} \cdot 3 = 2.25$, а правый полуинтервал — длину $(|\bar{\Delta}|/|\Delta|) \cdot \beta_{A+B} = \frac{6}{8} \cdot 5 = 3.75$. Осуществив округление полученных результатов до целых чисел 2 и 4 соответственно, получаем искомое *L-R* представление суммы $A = (3, 2, 4)$. Графическое изображение этого нечеткого числа представлено на рисунке сплошными линиями.

Обратимся теперь к вопросу задания функции принадлежности $\mu_{A+B}(y)$ элементов нечеткого множества $(A + B)$. От соответствующей процедуры естественно потребовать, во-первых, чтобы она имела невысокую трудоемкость и обеспечивала гладкую зависимость $\mu_{A+B}(y)$ при изменении слагаемых. Обоим этим требованиям удовлетворяет простейшая кусочно-линейная функция, которая и будет нами использована. Проиллюстрируем ее построение на рассмотренном выше примере.

Опорными точками графика (вида, представленного на рисунке) кусочно-линейной функции $\mu_{A+B}(y)$ будут служить точки $M_0(m_A + m_B, 1)$, $M_1(\alpha_{A+B}, 0)$, $M_2(\beta_{A+B}, 0)$. Координаты этих точек очевидным образом формируются из выражения (7). Для нашего примера эти точки таковы: $M_0(3, 1)$, $M_1(1, 0)$, $M_2(0, 0)$. Отметим, что две последние точки лежат на оси абсцисс и являются границами интервала $\bar{\Delta}$. График этой функции состоит из четырех отрезков прямых: два из них лежат на оси абсцисс, а два других — отрезки (M_0, M_1) и (M_0, M_2) . Аналитические выражения для отрезков прямых (M_0, M_1) и (M_0, M_2) получим, используя аппарат аналитической геометрии. С этой целью «наложим» на ось абсцисс на рисунке ось 0 декартовой системы координат. Очевидно, что в общем случае в новой системе координаты точек M_1 и M_2 могут трансформироваться. Так, в нашем примере они превращаются в $M_1(1, 0)$ и $M_2(7, 0)$. С учетом этого уравнения прямых (M_0, M_1) и (M_0, M_2) имеют вид $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ и $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$. При вычислении значений представленной ниже функции принадлежности следует помнить, что элементам $GF(p)$ $x = 1, 2, \dots, 6$ соответствуют вещественные числа $1, 2, \dots, 6$, а элементу $0 \in GF(p)$ — вещественное число 7. С учетом сказанного получаем аналитическое представление функции принадлежности:

$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}, & \text{если } 3 < x \leq 7, \\ 0, & \text{если } x > 7. \end{cases}$$

Естественно, что вычисление значений этой функции производится по правилам традиционной арифметики.



Перейдем теперь к определению операции умножения нечетких чисел над полем $GF(p)$, которое в принципе можно сформулировать с помощью аналога формулы (5). Однако, как и в случае операции сложения, используем упрощенный механизм с учетом принципа обобщения Л. Заде. Напомним [11], что для вещественных чисел L - R представление произведения нечетких чисел A и B в треугольной форме $(AB) = (m_{AB}, \alpha_{AB}, \beta_{AB})$ его параметры вычисляются по формулам

$$m_{AB} = m_A \cdot m_B, \quad \alpha_{AB} = m_A \alpha_B + m_B \alpha_A - \alpha_A \alpha_B, \quad \beta_{AB} = m_A \beta_B + m_B \beta_A + \beta_A \beta_B. \quad (8)$$

Если результат перемножения приводит к интервалу нечеткости длины больше $p - 1$, то сжимаем его тем же способом, что описан выше для суммирования. Полная аналогия с суммированием имеет место также и при получении аналитического выражения для функции принадлежности (кусочно-линейного типа) произведения.

Так, например, произведение нечетких чисел $A = (5, 3, 2)$ и $B = (2, 1, 2)$ при $p = 7$ в соответствии с формулой (8) имеют следующие параметры:

$$m_{AB} = 5 \cdot 2 = 10, \quad \alpha_{AB} = 8, \quad \beta_{AB} = 14.$$

Величина m_{AB} по модулю 7 равна 3. Длина интервала нечеткости в десятичной системе счисления равна $8 + 14 = 22$. Сжимая этот интервал до длины $7 - 1 = 6$, получаем скорректированные границы интервала нечеткости: $\alpha_{AB} = \frac{6}{22} \cdot 8 = 2.09$, $\beta_{AB} = \frac{6}{22} \cdot 14 = 3.8$. Округляя дробные значения до целых чисел 2 и 4, получаем искомое L - R представление произведения $(A \cdot B) = (3, 2, 4)$.

Условимся считать два нечетких треугольных числа равными, если у них равны соответствующие параметры. Это есть следствие того, что функция принадлежности для нечеткого числа над полем $GF(p)$ определяется однозначно по описанному выше алгоритму на основе его параметров.

Отметим, наконец, что для определенных выше операций сложения и умножения нечетких чисел над полем $GF(p)$, как нетрудно доказать, оказываются справедливыми свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

3. РАСПОЗНАВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

В [2] приведено условие того, что линейный автомат является автоматом БПИ: для того чтобы ЛА являлся автоматом БПИ, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы D равнялся l , где l — число входных каналов ЛА.

Доказательство теоремы следует из метода нахождения неизвестной входной последовательности, который состоит в пошаговом распознавании входных слов $\bar{u}(0), \bar{u}(1), \dots$. На первом шаге, поскольку известны начальное состояние $\bar{s}(0)$ ЛА и наблюдаемый выходной вектор $\bar{y}(0)$ в ответ на подачу неизвестного входного вектора $\bar{u}(0)$, последний однозначно определяется из системы

$$\bar{y}(0) - C\bar{s}(0) = D\bar{u}(0). \quad (9)$$

Из алгебры известно, что для этого и должно выполняться условие приведенной выше теоремы. Если вектор $\bar{u}(0)$ распознан, то по формуле (1) вычисляется следующее состояние $\bar{s}(1)$ ЛА и из системы

$$\bar{y}(1) - C\bar{s}(1) = D\bar{u}(1)$$

находится входной вектор $\bar{u}(1)$. Далее процесс распознавания продолжается аналогичным образом.

Итак, нахождение неизвестной входной последовательности длины $k + 1$ с учетом формул (3) и (4) сводится к решению следующих систем линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{aligned} D\bar{u}(0) &= \bar{y}(0) - C\bar{s}(0), \\ D\bar{u}(1) &= C\bar{A}\bar{s}(0) - \bar{y}(1) - C\bar{B}\bar{u}(0), \\ &\dots \\ D\bar{u}(k) &= C\bar{A}^k \bar{s}(0) - \bar{y}(k) - \dots - C\bar{B}\bar{u}(k-1). \end{aligned} \quad (10)$$



Рассмотрим правую часть первой системы из (10). В ней в соответствии с постановкой задачи слагаемое $C\bar{s}(0)$ есть четкое число из поля $GF(p)$, а слагаемое $\bar{y}(0)$ — нечеткое. Понятно, что четкое число можно рассматривать как частный случай нечеткого, у которого в треугольном R - L представлении $A(m, \alpha, \beta)$ параметры α и β равны нулю. Тогда сложение и умножение двух чисел, одно из которых есть четкое, а второе — нечеткое, в качестве результата дает нечеткое число. Очевидно, что это относится и ко всем другим системам из (10).

В общем случае каждую систему из (10) можно представить в виде

$$D \cdot X = V, \tag{11}$$

где D — матрица из четких чисел, а X и V — векторы-столбцы, компоненты которых есть нечеткие числа, причем вектор X есть искомый вектор.

Заменяем систему (11), записанную в матричной форме, на эквивалентную ей систему, записанную в координатной форме:

$$\begin{aligned} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1l}x_l &= v_1(\text{mod } p), \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \dots + d_{2l}x_l &= v_2(\text{mod } p), \\ &\dots \\ d_{m1}x_1 + d_{m2}x_2 + \dots + d_{ml}x_l &= v_m(\text{mod } p). \end{aligned} \tag{12}$$

Понятно, что решение этой системы сравнений будет множество классов чисел по модулю p . Поскольку число решений этой системы конечно, то в принципе они могут быть найдены методом перебора. Этот метод даже при сравнительно небольших p трудоемок, поэтому желательно иметь в арсенале более эффективные методы. Отметим, что задача решения системы типа (12) относится к алгебре и теории чисел и для ее решения ныне известен целый ряд различных методов. В частности, один из возможных подходов к решению связан с интерпретацией (12) как системы уравнений в целых или натуральных числах. В этом случае возможно применение аналога метода Гаусса, преобразующего систему к ступенчатой форме.

Отметим, что известен также быстрый алгоритм решения названной системы, описанный в [12]. В литературе приведены данные апробации этого алгоритма, подтверждающие его высокое быстродействие.

Проиллюстрируем на простом примере, каким образом может быть построена система вида (12). Пусть задана следующая система вида (11) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (m_1, \alpha_1, \beta_1) \\ (m_2, \alpha_2, \beta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2, 0, 4) \\ (6, 1, 3) \\ (5, 3, 4) \end{bmatrix},$$

где первая слева матрица состоит из четких чисел — элементов поля $GF(p)$ при $p = 7$, вторая слева матрица содержит неизвестные нечеткие числа в $GF(p)$, третья матрица состоит из четких чисел в $GF(p)$.

Для перевода в координатную форму этой системы воспользуемся формулами (7) и (8) с учетом, что элементы первой системы есть четкие числа, т. е. границы α и β интервалов нечеткости для них равны нулю. После выполнения соответствующих вычислений получим следующие равенства по модулю $p = 7$:

$$\begin{aligned} (4m_1 + 5m_2, 4\alpha_1 + 5\alpha_2, 4\beta_1 + 5\beta_2) &= (2, 0, 4), \\ (2m_1 + 3m_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\beta_1 + 3\beta_2) &= (6, 1, 3), \\ (m_1 + m_2, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2) &= (5, 3, 4). \end{aligned}$$



Исходя из определения равенства двух нечетких чисел, приведенного выше, приходим к такой системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 4m_1 + 5m_2 = 2, & & 4\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0, & & 4\beta_1 + 5\beta_2 = 4, \\ 2m_1 + 3m_2 = 6, & & 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1, & & 2\beta_1 + 3\beta_2 = 3, \\ m_1 + m_2 = 5, & & \alpha_1 + \alpha_2 = 3, & & \beta_1 + \beta_2 = 4. \end{aligned} \quad (13)$$

Эту систему можно решить методом перебора: $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 2$.

Итак, искомые нечеткие числа в поле $GF(7)$ (неизвестные входные векторы ЛА) таковы: $(2, 1, 2)$ и $(3, 2, 2)$.

Заметим, что системы вида (13) в общем случае могут и не иметь решения. Таким образом, для распознавания неизвестной входной последовательности ЛА в рассматриваемой постановке задачи условия теоремы, приведенной в начале п. 3, в общем случае являются только необходимыми, но не достаточными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в статье результаты свидетельствуют о том, что поиск решения задачи распознавания в рассматриваемой постановке оказывается более трудоемким, чем в классической постановке. Кроме того, при выполнении необходимых и достаточных условий разрешимости классической задачи рассматриваемая здесь задача может и не иметь решения.

Библиографический список

1. Huffman D. A. Canonical forms for information-lossless finite-state logical machines // Information Theory, IRE Transactions on. 1959. Vol. 5, № 5. P. 41–59. DOI: 10.1109/TIT.1959.1057537.
2. Гилл А. Линейные последовательностные машины. Анализ, синтез и приложения. М. : Наука, 1974. 288 с.
3. Сперанский Д. В. Лекции по теории экспериментов с конечными автоматами. М. : Интернет-университет информационных технологий : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 287 с.
4. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М. : Мир, 1987. 912 с.
5. Сперанский Д. В. Задача распознавания входного слова линейного автомата в интервальной постановке // Автоматика и вычислительная техника. 2012. № 2. С. 50–56.
6. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. № 8. P. 338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.
7. Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers : An overview // Analysis of Fuzzy Information, Vol. I : Mathematics and Logic. Boca Raton, FL : CRC Press, 1988. P. 3–39.
8. Kaufman A., Gupta M. M. Introduction to fuzzy arithmetic : theory and applications. N. Y. : Van Nostrand Reinhold Co., 1991. 351 p.
9. Kandel A. Fuzzy Mathematical Techniques with Applications. Boston, MA, USA : Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1986. 274 p.
10. Hanss M. Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications. Berlin ; Heidelberg : Springer Publishing Company, Inc., 2010. 256 p.
11. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 798 с.
12. Dixon J. D. Exact Solution of Linear Equations Using P-Adic Expansions // Numerische Mathematik. 1982. Vol. 40, № 1. P. 137–142. DOI: 10.1007/BF01459082.

Recognition of a Linear Automaton Outputs by the Fuzzy Outputs

D. V. Speranskiy

Moscow State University of Railway Engineering, 2/22, Chasovaya str., 125993, Moscow, Russia, Speranskiy.DV@gmail.com

A method is proposed to solve the recognition problem for unknown input sequences of a linear automaton when observed the fuzzy outputs.

Key words: information lossless automaton, systems of a linear equation with fuzzy variables over the field $GF(p)$.

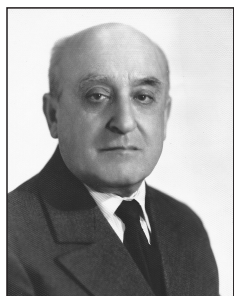


References

1. Huffman D. A. Canonical forms for information-lossless finite-state logical machines *Information Theory, IRE Transactions on*, 1959, vol. 5, no. 5, pp. 41–59. DOI: 10.1109/TIT.1959.1057537.
2. Gill A. *Linear sequential circuits: analysis, synthesis, and applications*. New York, McGraw-Hill, 1962, 215 p.
3. Speranskij D. V. *Lekcii po teorii jeksperimentov s konechnymi avtomatami* [Lecture on the theory of experiments with finite automata]. Moscow, Internet-Universitet Informacionnyh Tehnologij, BINOM. Laboratorija znaniij, 2010, 287 p. (in Russian).
4. Alefeld G., Herzberger J. *Introduction to interval computations*. New York, Academic Press, 1983, 333 p.
5. Speransky D. V. Fuzzy automaton finite state recognition. *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 46, iss. 5, pp. 185–190. DOI: 10.3103/S0146411612050070.
6. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, no. 8, pp. 338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.
7. Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers: An overview. *Analysis of Fuzzy Information, Vol. I: Mathematics and Logic*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1988, pp. 3–39.
8. Kaufman A., Gupta M. M. *Introduction to fuzzy arithmetic: theory and applications*. New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1991, 351 p.
9. Kandel A. *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*. Boston, MA, USA, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1986, 274 p.
10. Hanss M. *Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications*. Berlin, Heidelberg, Springer Publishing Company, Incorporated, 2010. 256 p.
11. Piegat A. *Fuzzy Modeling and Control*. Heidelberg, Germany, Physica-Verlag GmbH. 2010, 728 p. (Rus. ed. : Piegat A. *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie*. Moscow, BINOM, Laboratoriia znaniij, 2013, 798 p.)
12. Dixon J. D. Exact Solution of Linear Equations Using P-Adic Expansions. *Numerische Mathematik*, 1982, vol. 40, no. 1, pp. 137–142. DOI: 10.1007/BF01459082.

PERSONALIA

АЛЕКСАНДР ЕВГЕНЬЕВИЧ ЛИБЕР

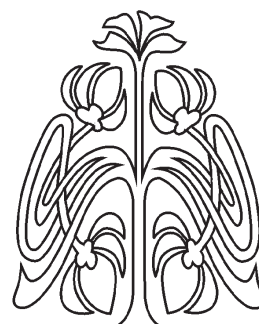


23 января 2014 г. исполнилось сто лет со дня рождения Александра Евгеньевича Либера — яркого представителя саратовской геометрической школы, крупного ученого, получившего важнейшие результаты в дифференциальной геометрии и алгебре. Всех, кто его знал, покоряли присущие ему доброжелательность, интеллигентность, широкая образованность. Александр Евгеньевич был человеком большой души, прекрасным педагогом, кумиром многих поколений студенческой молодежи. Сегодня, как и много лет назад, благодарные слушатели с любовью вспоминают его безукоризненно методически выверенные лекции, умение придать геометрическим образам наглядность и трогательную надолго запоминающуюся красоту.

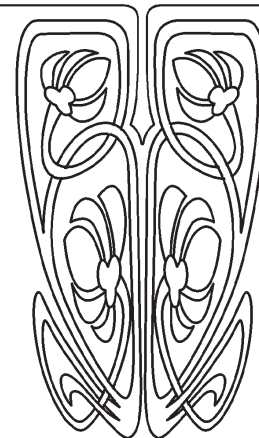
Александр Евгеньевич Либер родился 23 января 1914 г. в Полтаве в семье служащего. После Октябрьской революции он вместе с семьей переезжает в Нижний Новгород, где в 1930 г. оканчивает среднюю школу, а в 1932 г. — политехникум связи. После окончания техникума Александр Евгеньевич работает старшим радиотехником ширококвотельной радиостанции в городе Куйбышеве (в настоящее время Самара). В сентябре 1933 г. Александр Евгеньевич поступает на физико-математический факультет Саратовского университета. С тех пор вся его дальнейшая творческая деятельность была связана с университетом, с кафедрой геометрии.

Уже в студенческие годы проявился яркий исследовательский талант Александра Евгеньевича. Его первая печатная работа давала полное решение трудной задачи, связанной с вопросом о возможности представления многомерного пространства Лобачевского в виде поверхности в евклидовом пространстве подходящей размерности. О важности полученного результата говорит также и тот факт, что резюме этой студенческой работы было помещено в Известиях Парижской академии наук.

После окончания Саратовского университета в 1938 г. А. Е. Либер становится первым аспирантом профессора В. В. Вагнера. Внимание молодого ученого привлекает теория сетей — одно из главных направлений дифференциальной геометрии того времени. Глубокие результаты в этой области им были получены в дипломной работе,



ПРИЛОЖЕНИЯ





которые и легли в основу кандидатской диссертации. В 1939 г. Александр Евгеньевич прерывает работу над диссертацией в связи с участием в военных действиях на Халхин-Голе. Весной 1941 г. после возвращения в университет А. Е. Либера заканчивает работу над диссертацией, содержащей важные результаты по теории сетей, получивших высокую оценку специалистов.

18 июня 1941 г. А. Е. Либера блестяще защищает кандидатскую диссертацию, а уже 24 июня 1941 г. отправляется на фронт. А. Е. Либера прошел всю войну, участвовал в Сталинградской битве, был награжден многими орденами и медалями, среди которых орден Красной Звезды, медали «За боевые заслуги», «За взятие Берлина».

После окончания войны, в конце 1945 г., Александр Евгеньевич возвращается в Саратовский университет, где начинает работать доцентом кафедры геометрии. Еще в аспирантские годы проявились замечательные педагогические способности А. Е. Либера, теперь им представилась возможность раскрыться в полной мере. Он начинает читать ряд основных общих и специальных лекционных курсов. Одновременно с этим продолжает вести интенсивную научно-исследовательскую работу.

Цикл работ, выполненных в эти годы, создает А. Е. Либера заслуженную репутацию одного из крупнейших советских геометров, хорошо известного не только в нашей стране, но и за рубежом. Он принимает участие во всесоюзных и международных совещаниях и конгрессах. Несколько лет главное место в исследованиях А. Е. Либера занимает разработка общей теории поверхностей произвольной размерности многомерной дифференциальной геометрии. Попытки, которые делались другими авторами для построения такой теории, не увенчались успехом. Применяя новые методы, А. Е. Либера решает эту трудную задачу. Построенная им новая геометрическая теория вошла в содержание докторской диссертации, защищенной А. Е. Либера в 1957 г. в Московском университете. Научные интересы Александра Евгеньевича не ограничивались только дифференциальной геометрией. Ряд ярких и значительных результатов был получен им в смежных областях алгебры. Среди многих кандидатских диссертаций, выполненных под руководством А. Е. Либера, наряду с геометрическими работами, имеются исследования по алгебраической тематике.

Александром Евгеньевичем был разработан и с большим мастерством прочитан ряд общих и специальных курсов, на которых воспитывались студенты разных поколений, разных отделений факультетов. В лекциях Александра Евгеньевича сочетались безупречная логика изложения с яркой увлекательностью, неожиданными парадоксальными замечаниями, позволяющими с новой точки зрения увидеть суть дела. Лекции читались в эмоционально приподнятой атмосфере, создающей у слушателей волнующие ощущения совместного творчества.

Отражением педагогического таланта А. Е. Либера явились созданные им учебники и учебные пособия. Его книга по тензорному анализу, написанная с большим мастерством и вниманием к читателю, является до сего времени любимым учебником студентов по дифференциальной геометрии.

Неоценим вклад профессора А. Е. Либера в формирование и развитие саратовской геометрической школы. Интенсивно и плодотворно ведя научные исследования, он с большим энтузиазмом и инициативой руководил студенческими кружками, факультативами, научной работой начинающих исследователей, аспирантов, молодых сотрудников кафедры.

А. Е. Либера на протяжении многих лет возглавлял городской научно-исследовательский семинар, был членом редколлегии межвузовского научного сборника, членом бюро Всесоюзного геометрического семинара им. Г. Ф. Лаптева при ВИНТИ, в 1978–1979 гг. заведовал кафедрой геометрии СГУ. Обладая огромной эрудицией, большим жизненным опытом, исключительным личным обаянием, Александр Евгеньевич был незаменимым добрым советчиком во многих жизненных ситуациях. За советом к нему шли сотрудники, студенческая молодежь, аспиранты. И все находили огромное удовольствие в общении с ним. Либера никогда не навязывал своей точки зрения, несколькими тактичными замечаниями он мог дать мысли иное направление, и тогда часто удавалось найти правильное решение.

Деятельность Александра Евгеньевича Либера в науке, воспитании и образовании оставила глубокий след в сердцах его учеников и всех тех, кто был рядом с ним.

Коллектив кафедры геометрии

**Избранные труды А. Е. Либеры**

- Либер А. Е.* О классе римановых пространств постоянной отрицательной кривизны // Учен. зап. Саратов. ун-та. Математика. Механика. 1938. Т. 1, вып. 2. С. 105–122.
- Либер А. Е.* Первые целые алгебраические интегралы уравнений геодезических // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31, № 9. С. 840–841.
- Либер А. Е.* О вложении римановых многообразий постоянной кривизны друг в друга // Докл. АН СССР. 1947. Т. 55, № 4. С. 295–297.
- Либер А. Е.* Ортогональные сети на поверхности // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1948. Вып. 6. С. 21.
- Либер А. Е.* О пространствах линейной аффинной связности с однопараметрическими группами голономии // Докл. АН СССР. 1948. Т. 66, № 6. С. 1045–1046.
- Либер А. Е.* О классификации аффинной связности в пространстве двух измерений // Мат. сб. 1950. Т. 27(69), № 2. С. 249–266.
- Либер А. Е.* О комитантах геометрических дифференциальных объектов // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80, № 4. С. 529–532.
- Либер А. Е.* К теории поверхностей в центрально-аффинном (векторном) пространстве // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85, № 1. С. 37–40.
- Либер А. Е.* О двумерных пространствах с алгебраической метрикой // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1952. Вып. 9. С. 319–350.
- Либер А. Е.* К теории поверхностей в проективном пространстве // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 2. С. 137–140.
- Либер А. Е.* О симметрических обобщенных группах // Мат. сб. 1953. Т. 33(75), № 3. С. 531–544.
- Либер А. Е.* К теории обобщенных групп // Докл. АН СССР. 1954. Т. 97, № 1. С. 25–28.
- Либер А. Е.* К теории поверхностей в геометрическом n -пространстве с заданной фундаментальной группой // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1956. Вып. 10. С. 193–226.
- Либер А. Е.* О дифференциальных комитантах некоторых линейных объектов // Изв. вузов. Математика. 1960. № 6. С. 158–162.
- Либер А. Е.* К тензорной теории тканей на поверхности // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1970. Вып. 15. С. 29–46.
- Либер А. Е.* О характеристических объектах специальных однопараметрических подгрупп линейной группы // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1972. Вып. 16. С. 240–250.
- Либер А. Е.* К теории сетей в многомерном пространстве // Дифференциальная геометрия : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1974. Вып. 1. С. 72–84.
- Либер А. Е.* О чебышевских сетях и чебышевских пространствах // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1974. Вып. 17. С. 177–183.
- Либер А. Е.* Об инвариантной нормализации одного класса поверхностей проективного пространства // Изв. вузов. Математика. 1974. № 5. С. 144–147.
- Либер А. Е.* О тензорной характеристике одного класса конформно-евклидовых римановых пространств // Дифференциальная геометрия : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1977. Вып. 3. С. 43–50.
- Либер А. Е.* К теории двумерных поверхностей в многомерных пространствах // Дифференциальная геометрия : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1980. Вып. 5. С. 46–53.
- Либер А. Е.* О некоторых относительных инвариантах многомерной поверхности проективного пространства // Дифференциальная геометрия : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1983. Вып. 7. С. 44–50.
- Либер А. Е.* К теории тензорных структур // Дифференциальная геометрия : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1985. Вып. 8. С. 45–51.