**СОДЕРЖАНИЕ****Научный отдел****Математика**

- Букушева А. В.** Слоения на распределениях с финслеровой метрикой 247
- Волковая Т. А.** Синтез в полиномиальном ядре двух аналитических функционалов 251
- Ганенкова Е. Г.** Асимптотические значения аналитических функций, связанные с простым концом области определения 262
- Дудов С. И., Осипцев М. А.** О подходе к приближенному решению задачи наилучшего приближения выпуклого тела шаром фиксированного радиуса 267
- Ефремова Л. С.** Численное решение обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля с разрывным потенциалом 273
- Крусс Ю. С.** Об операторе дифференцирования на компактных нуль-мерных группах 279
- Лихачева Т. В.** Приближение функций в симметричных и связанных с ними гильбертовых пространствах линейными средними рядов Фурье 287
- Магомед-Касумов М. Г.** Приближение функций суммами Хаара в весовых пространствах Лебега и Соболева с переменным показателем 295
- Тюленева А. А.** Приближение интегралов Римана–Лиувилля алгебраическими полиномами на отрезке 305
- Фоминых А. В.** Градиентные методы решения задачи Коши для нелинейной системы ОДУ 311
- Шулежко О. В.** Новые свойства почти нильпотентного многообразия экспоненты два 316

Механика

- Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В.** Исследование гармонических волн в наследственно-упругом слое 321
- Ватульян А. О., Нестеров С. А.** Об особенностях идентификации термомеханических характеристик функционально-градиентных материалов 329
- Ливеровский Д. И., Шевырёв С. П.** Моделирование течения несжимаемой невязкой тяжёлой жидкости и на регулярной сетке в трёхмерном пространстве 335
- Панкратов И. А.** Применение метода Галёркина к решению линейных задач оптимального управления 340
- Снигерев Б. А., Тазюков Ф. Х.** Двухслойное течение расплавов полимеров в каналах фильер 349

Информатика

- Клячин В. А.** Оптимизация построения расчетной сетки для решения задачи локального криовоздействия с использованием многомерного геометрического хеширования на основе пакета NumPy 355

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017, раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки» Журнал выходит 4 раза в год

Заведующий редакцией
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Степанова Наталия Ивановна

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Ковалева Наталья Владимировна

Корректор
Юдина Инна Геннадиевна

Адрес редакции:
410012, Саратов, Астраханская, 83
Издательство Саратовского университета
Тел.: (845-2) 52-26-89, 52-26-85

Подписано в печать 10.09.14.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 13,95 (15,0).
Тираж 500 экз. Заказ 41.

Отпечатано в типографии
Издательства Саратовского университета

© Саратовский государственный университет, 2014



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 11 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: <http://mmi.sgu.ru>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

- Bukusheva A. V.** Foliation on Distribution with Finslerian Metric 247
- Volkovaya T. A.** Synthesis in the Polynomial Kernel of Two Analytic Functionals 251
- Ganenkova E. G.** Asymptotic Values of Analytic Functions Connected with a Prime End of a Domain 262
- Dudov S. I., Osipcev M. A.** On an Approach to Approximate Solving of the Problem for the Best Approximation for Compact Body by a Ball of Fixed Radius 267
- Efremova L. S.** Numerical Solution of Inverse Spectral Problems for Sturm–Liouville Operators with Discontinuous Potentials 273
- Kruss I. S.** On Differential Operator in Compact Zero-dimensional Groups 279
- Likhacheva T. V.** Approximation of Functions in Symmetrical and Connected Holder Spaces by Linear Means of Fourier – Vilenkin Series 287
- Magomed-Kasumov M. G.** Approximation of Functions by Fourier–Haar Sums in Weighted Variable Lebesgue and Sobolev Spaces 295
- Tyleneva A. A.** Approximation of the Riemann–Liouville Integrals by Algebraic Polynomials on the Segment 305
- Fominyh A. V.** The Gradient Methods for Solving the Cauchy Problem for a Nonlinear ODE System 311
- Shulezhko O. V.** New Properties of Almost Nilpotent Variety of Exponent 2 316

Mechanics

- Anofrikova N. S., Sergeeva N. V.** Investigation of Harmonic Waves in the Viscoelastic Layer 321
- Vatulyan A. O., Nesterov S. A.** About the Specifics of Identification Thermomechanical Characteristics of Functionally Graded Materials 329
- Liverovskiy D. I., Shevirev S. P.** Simulation of Incompressible Nonviscous Fluid on a Regular Grid in Three-dimensional Space 335
- Pankratov I. A.** Using Galerkin Method for Solving Linear Optimal Control Problems 340
- Snigerev B. A., Tazyukov F. Ch.** Double Layer of Polymer Melts in Channels of Dies 349

Computer Sciences

- Klyachin V. A.** Optimization of Calculus Mesh for Cryobiology Problem Based on Multidimensional Hashing Using NumPy 355



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»

Главный редактор

Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Стальмахов Андрей Всеволодович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Бабков Лев Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)

Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)

Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шамяионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL «IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»

Editor-in-Chief – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Stalmakhov A. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Babkov L. M. (Saratov, Russia)

Balash O. S. (Saratov, Russia)

Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)

Danilov V. N. (Saratov, Russia)

Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)

Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

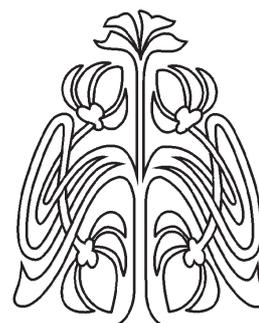
Makarov V. Z. (Saratov, Russia)

Prozorov V. V. (Saratov, Russia)

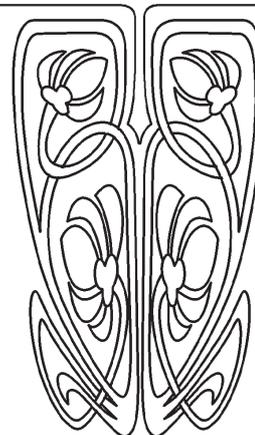
Ustyantsev V. B. (Saratov, Russia)

Shamionov R. M. (Saratov, Russia)

Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)



РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)
Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)
Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)
Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)
Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)
Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)
Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)
Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)
Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)
Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Саратов, Россия)
Роджерсон Грэм, PhD, профессор (Киль, Великобритания)
Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)
Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор (Екатеринбург, Россия)
Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)
Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)
Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)
Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)	Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)
Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)	Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)
Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)	Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)
Indeitsev D. A. (St.-Petersburg, Russia)	Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)
Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)	Speranskii D. V. (Moscow, Russia)
Kovalev V. A. (Moscow, Russia)	Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)
Lomakin E. V. (Moscow, Russia)	Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)
Manzhirov A. V. (Moscow, Russia)	Khromov A. P. (Saratov, Russia)
Matveenko V. P. (Perm, Russia)	Shalyto A. A. (St.-Petersburg, Russia)
Morozov N. F. (St.-Petersburg, Russia)	Shashkin A. I. (Voronezh, Russia)
Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)	Yurko V. A. (Saratov, Russia)



МАТЕМАТИКА

УДК 514.764

СЛОЕНИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ С ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ

А. В. Букушева

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, bukusheva@list.ru

На гладком многообразии M задается распределение D с допустимой финслеровой метрикой. Пусть F — слоение, заданное на M . На распределении D как на гладком многообразии слоению F соответствует слоение TF , с помощью этого слоения и связности над распределением определяется аналог внешнего дифференциала, применимый к формам специального вида.

Ключевые слова: субфинслерово многообразие, внутренняя связность, почти контактное метрическое пространство, когомологии.

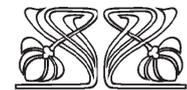
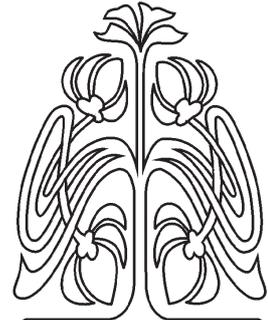
Касательное расслоение к финслерову многообразию богато естественным образом возникающими на нем геометрическими структурами. В последние годы особый интерес вызывает исследование слоений, определяемых на касательных расслоениях [1, 2]. С другой стороны, в самое последнее время введено [3] понятие распределения D с допустимой финслеровой метрикой. По аналогии с касательным расслоением на распределении D как на гладком многообразии возникают структуры, порождаемые структурами на базе. В частности, как показано в [3], на D определяется структура почти контактного метрического многообразия. В настоящей работе по аналогии с тем, как это делается в [1], рассматривается слоение, заданное на D , и изучаются его свойства.

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности n , $\Xi(M)$ — $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M . Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Для упрощения изложения тензорное поле в дальнейшем иногда называется тензором.

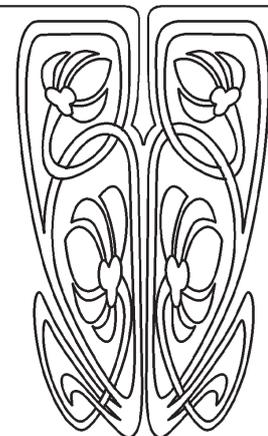
Определим совокупность $(\vec{\xi}, \eta)$ тензорных полей на M , где $\vec{\xi}$ и η вектор и ковектор соответственно так, что $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $d\eta(\vec{X}, \vec{\xi}) = 0$ для всех $\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(M)$.

Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η , $D^\perp = \text{span}(\vec{\xi})$ — его оснащение. В дальнейшем будем полагать, что ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D является невырожденной формой. В этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker \omega = \text{span}(\vec{\xi})$, и называется вектором Рибба.

Для исследования внутренней геометрии неголономного многообразия и, вообще, для изучения почти контактных метрических структур удобно использовать адаптированные координаты [2, 4]. Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$) ($a, b, c, e = 1, \dots, n - 1$) на многообразии M будем называть адаптированной к неголономному многообразию D , если $D^\perp = \text{span} \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)$. Нетрудно установить, что любые



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





две адаптированные карты связаны между собой преобразованиями вида: $x^a = x^a(x^{\bar{a}})$, $x^n = x^n(x^{\bar{a}}, x^{\bar{n}})$.

Пусть $P : TM \rightarrow D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему $D: D = \text{span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов (\vec{e}_a, ∂_n) и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что $\partial_n \Gamma_a^n = 0$.

Распределение D может рассматриваться как тотальное пространство векторного расслоения (M, D, π) , где $\pi : D \rightarrow M$ — естественная проекция. Каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X ставится в соответствие карта $\bar{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D , где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Таким образом, D есть гладкое многообразие размерности $2n - 1$.

Предположим, что на многообразии D задана функция $L(x^\alpha, x^{n+a})$ такая, что выполняются следующие условия:

- 1) L — гладкая положительная функция на $D^0 = D \setminus \vec{0}$;
- 2) L — положительна, однородна, степени 1 относительно слоевых координат;
- 3) квадратичная форма $L^2_{a..b} \xi^a \xi^b = \frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a} \partial x^{n+b}} \xi^a \xi^b$ положительно определена.

Назовем (M, D, F) субфинслеровым многообразием коразмерности 1.

Тензорное поле, заданное на многообразии M , назовем допустимым (к распределению D), если оно обращается в нуль каждый раз, когда его векторный аргумент принадлежит оснащению D^\perp , а ковекторный аргумент коллинеарен форме η . Координатное представление допустимого тензорного поля типа (p, q) в адаптированной карте имеет вид: $t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}$.

Рассмотрим D как пространство векторного расслоения. В этом случае, в частности, D является гладким многообразием размерности $2n - 1$. Как было показано в [5], наличие структуры субфинслерова пространства позволяет превратить D в почти контактное метрическое пространство. А именно определим на многообразии D почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta), D)$, полагая $\tilde{g}(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\vec{e}_a, \vec{e}_b)$, $\tilde{g}(\vec{e}_a, \partial_n) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_n) = 0$, $J(\vec{e}_a) = \partial_{n+a}$, $J(\partial_{n+a}) = -\vec{e}_a$, $J(\partial_n) = 0$, где $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, $\tilde{D} = HD \oplus VD$, VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D , а HD — горизонтальное распределение, определяемое внутренней нелинейной связностью финслерова типа. Векторные поля $(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a})$ определяют на D поле неголономных базисов, а формы $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+b} dx^c)$ — соответствующее поле кобазисов. Здесь $\Gamma_{bc}^a = \partial_{n+c} G_b^a$, где $G_b^a = \frac{\partial G^a}{\partial x^{n+b}}$, $G^a = \frac{1}{4} g^{ab} \left(\frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+b} \partial x^c} \partial x^{n+c} - \frac{\partial L^2}{\partial x^b} \right)$ [4]. Легко показать, что векторное поле ∂_n является полем Рибба для почти контактной метрической структуры $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$. Наличие почти контактной метрической структуры на D позволяет рассмотреть на этом многообразии дифференциальные формы специального вида. А именно будем называть допустимую (к распределению \tilde{D}) форму $(p + q)$ — формой, если она может быть отлична от нуля только в тех случаях, когда p ее аргументов принадлежат HD , а q аргументов — VD . Если $D = TM$, то формы такого типа рассматривались, например, в [1]. В нашем случае от форм типа (p, q) требуется больше, чем в [1], ядро заданных таким образом форм должно содержать вектор Рибба ∂_n . В этом случае форма типа (p, q) представляет собой допустимую форму к распределению \tilde{D} . Для того чтобы дифференциал такой формы давал снова допустимую форму, достаточно потребовать, чтобы частные производные от компонент формы вдоль поля Рибба обращались в нуль.

Пусть $\Omega^0(D)$ — кольцо гладких функций на D и $\Omega^{p,q}(D)$ — модуль допустимых (p, q) форм на многообразии (D, \tilde{g}) . Мы имеем следующее разложение модуля допустимых r -форм на D :

$$\Omega^r =_{p+q=r} \cup \Omega^{p,q}(D).$$

Локально форма $\omega \in \Omega^{p,q}(D)$ имеет следующее выражение:

$$\omega = \omega_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_q} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \wedge \theta^{n+1} \wedge \dots \wedge \theta^{n+q}.$$

Рассмотрим модуль (p, q) -форм и потребуем, чтобы $\frac{\partial}{\partial x^n}(\omega_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_q}) = 0$.



Вычислим дифференциал

$$d\theta^{n+a} = \sum_{k < j} R_{jk}^i dx^k \wedge dx^j + \sum_{k,j} \frac{G_j^i}{\partial y^k} \theta^{n+k} \wedge dx^j.$$

Пусть $d_{01} : \Omega^{p,q}(D) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(D)$ — отображение на (D, \tilde{g}) , локально определяемое следующим образом:

$$d_{01}\omega = \frac{\partial \omega_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_q}}{\partial x^{n+a}} \theta^{n+a} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \wedge \theta^{n+1} \wedge \dots \wedge \theta^{n+q}.$$

Нетрудно проверить, что определение d_{01} не зависит от выбора адаптированной системы координат. В результате очевидных вычислений получаем $d_{01}^2 = 0$.

Если $f \in \Omega^0(D)$, то локально имеем: $d_{01}f = \frac{\partial f}{\partial x^{n+a}} \theta^{n+a}$.

$(0, q)$ -форма называется d_{01} -точной, если существует форма $f \in \Omega^{0,q-1}(D)$ такая, что $\omega = d_{01}f$, и называется d_{01} -замкнутой, если $d_{01}\omega = 0$. Продолжая лемму Паункаре на наш случай, замечаем, что локально каждая d_{01} -замкнутая форма является точной.

Пусть $Z^{0,q}(D)$ — группа d_{01} -замкнутых $(0, q)$ -форм и $B^{0,q}(D)$ — группа d_{01} -точных форм. Ясно, что $B^{0,q}(D)$ — подгруппа группы $Z^{0,q}(D)$.

Группы когомологий де Рама, определяемые последовательностью

$$\Omega^0(D) \xrightarrow{d_{01}} \Omega^{0,1}(D) \xrightarrow{d_{01}} \Omega^{0,2}(D) \xrightarrow{d_{01}} \dots,$$

будем называть v -когомологиями. Здесь $d_{01}(\Omega^{0,q-1}(D)) = B^{0,q}(D)$, $\text{Ker } d_{01} = \{\omega \in \Omega^{0,q}(D), d_{01}\omega = 0\} = Z^{0,q}(D)$, $H_q^v(D) = Z^{0,q}(D)/B^{0,q}(D)$.

Рассмотрим субфинслерово многообразие (M, D, F) . Пусть $D' \subset D$ — инволютивное распределение размерности m_2 . В дальнейшем индексы изменяются следующим образом: $i = 1, \dots, m_1$, $u = m_1 + 1, \dots, n-1$, $m_1 + m_2 = n-1$. Среди адаптированных карт выберем такие, что $D' = \text{span}(\partial_u)$. Пусть \mathcal{F} — слоение, определяемое распределением D' . Любые две адаптированные карты связаны преобразованиями вида

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i), \quad x^{u'} = x^{u'}(x^i, x^u), \quad x^{n'} = x^{n'}(x^i, x^u, x^n).$$

Соответствующие локальные координаты на многообразии D примут вид $(x^i, x^u, x^n, x^{n+i}, x^{n+u})$. Зададим инволютивное распределение D'' равенством $D'' = \text{span}\left(\vec{\varepsilon}_u, \frac{\partial}{\partial x^{n+u}}\right)$. Инволютивность распределения D'' позволяет ввести в рассмотрение слоение \mathcal{F}_D таким образом, чтобы $T\mathcal{F}_D = D''$.

Будем говорить, что слоение \mathcal{F} совместимо с финслеровой структурой на D , если в локальных координатах в окрестности точки $(x^\alpha, x^{n+a}) \in D$ компоненты $g_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial x^{n+u} \partial x^{n+v}}$ являются элементами невырожденной матрицы. Кроме того, функции G^a удовлетворяют отношению $\frac{\partial G^a}{\partial x^{n+a}} = 0$.

Таким образом, $\vec{\varepsilon}_u = \frac{\partial}{\partial x^u}$.

Для уточнения форм типа (p, q) , определенных выше, и для определения нового аналога внешнего дифференциала введем в рассмотрение пространство $H\mathcal{F}_D = \text{span}(\vec{\varepsilon}_u)$, $HD = L_1 \oplus H\mathcal{F}_D$ и $L_1 = \text{span}(\vec{\xi}_i)$, где $\vec{\xi}_i = \vec{\varepsilon}_i - t_i^u \vec{\varepsilon}_u$.

Для вычисления коэффициентов t_i^u используются следующие равенства:

$$\tilde{g}(\vec{\xi}_i, \vec{\varepsilon}_v) = \tilde{g}(\vec{\varepsilon}_i - t_i^u \vec{\varepsilon}_u, \vec{\varepsilon}_v) = \tilde{g}(\vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_v) - t_i^u \tilde{g}(\vec{\varepsilon}_u, \vec{\varepsilon}_v) = 0.$$

Следующая цепочка импликаций позволяет получить явное выражение для t_i^u :

$$\tilde{g}_{iv} - t_i^v \tilde{g}_{uv} = 0 \Rightarrow g_{iv} - t_i^v g_{uv} = 0 \Rightarrow g_{iv} g^{vw} - t_i^u \delta_u^w = 0 \Rightarrow t_i^w = g_{iv} g^{vw}.$$

Векторные поля на TD , локально заданные как $\vec{\xi}_i = \vec{\varepsilon}_i - t_i^u \vec{\varepsilon}_u$, $\vec{\tau}_i = \partial_{n+i} - t_i^u \partial_{n+u}$, ортогональны $\{\vec{\varepsilon}_u\}$ и $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{n+u}}\right\}$ относительно метрики \tilde{g} , где $\{t_i^u\}$ есть решение системы $g_{iv} - t_i^v g_{uv} = 0$.



Таким образом, всякое векторное поле $\vec{X} \in \Gamma(TD)$ имеет следующее разложение:

$$\begin{aligned} \vec{X} &= X^a \vec{\varepsilon}_a + X^n \partial_n + X^{n+a} \partial_{n+a} = X^i \vec{\varepsilon}_i + X^u \vec{\varepsilon}_u + X^n \partial_n + X^{n+i} \partial_{n+i} + X^{n+u} \partial_{n+u} = \\ &= X^i \vec{\xi}_i + (X^u + t_i^u X^i) \vec{\varepsilon}_u + X^n \partial_n + X^{n+i} \vec{\tau}_i + (X^{n+u} + t_i^u X^{n+i}) \partial_{n+u}. \end{aligned}$$

Базис $(\vec{\xi}_i, \vec{\varepsilon}_u, \partial_n, \vec{\tau}_i, \partial_{n+u})$ адаптирован к \mathcal{F}_D и к вертикальному слоению. Обозначим через $T^\perp \mathcal{F}_D$ ортогональное к $T\mathcal{F}_D$ распределение относительно метрики Сасаки – Финслера \tilde{g} .

Введем в рассмотрение следующие векторные поля: вертикально-касательные, горизонтально-касательные, вертикально-трансверсальные, горизонтально-трансверсальные. Первые два типа векторных полей являются вертикальными и горизонтальными компонентами сечения $T\mathcal{F}_D$ соответственно. Два других типа – вертикальными и горизонтальными компонентами сечения $T^\perp \mathcal{F}_D$. Для введенных совокупностей векторных полей будем использовать соответственно следующие обозначения: $V\mathcal{F}_D, H\mathcal{F}_D, V^\perp \mathcal{F}_D, H^\perp \mathcal{F}_D$.

Таким образом, $\tilde{D} = H^\perp \mathcal{F}_D \oplus H\mathcal{F}_D \oplus \tilde{D}^\perp \oplus V^\perp \mathcal{F}_D \oplus V\mathcal{F}_D$. Локально $H^\perp \mathcal{F}_D = \text{span}(\vec{\xi}_i)$, $H\mathcal{F}_D = \text{span}(\vec{\varepsilon}_u)$, $\tilde{D}^\perp = \text{span}(\partial_n)$, $V^\perp \mathcal{F}_D = \text{span}(\vec{\tau}_i)$, $V\mathcal{F}_D = \text{span}(\partial_{n+u})$.

Кобазис, двойственный базису $(\vec{\xi}_i, \vec{\varepsilon}_u, \partial_n, \vec{\tau}_i, \partial_{n+u})$, имеет вид $(dx^i, \theta^u, \theta^n, \theta^{n+i}, \eta^u)$, где $\theta^u = dx^u + t_i^u dx^i$, $\eta^u = \theta^{n+u} + t_i^u \theta^{n+i}$.

$(0, q)$ -форму ω назовем $(0, s, t)$ -формой, если $s + t = q$, и она отлична от нуля только в том случае, когда s -аргументов в $V^\perp \mathcal{F}_D$ и t -аргументов в $V\mathcal{F}_D$.

Обозначим пространство $(0, s, t)$ -форм через $\Omega^{0,s,t}(D)$, тогда

$$\Omega^{0,q}(D) = \cup_{s+t=q} \Omega^{0,s,t}(D).$$

В результате действия дифференциала $d_{0,1}$ на $(0, s, t)$ -форму

$$\omega = \alpha_{i_1 \dots i_s u_1 \dots u_t} \theta^{n+i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{n+i_s} \wedge \eta^{u_1} \wedge \dots \wedge \eta^{u_t}$$

получаем:

$$\begin{aligned} d_{0,1}\omega &= \vec{\tau}_i (\alpha_{i_1 \dots i_s u_1 \dots u_t}) \theta^{n+i} \wedge \theta^{n+i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{n+i_s} \wedge \eta^{u_1} \wedge \dots \wedge \eta^{u_t} + \\ &+ (-1)^s \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_s u_1 \dots u_t}}{\partial x^{n+u}} \theta^{n+i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{n+i_s} \wedge \eta^u \wedge \eta^{u_1} \wedge \dots \wedge \eta^{u_t}. \end{aligned}$$

Используя полученное выражение, определим следующий аналог внешнего дифференциала:

$$d_{0,0,1} : \Omega^{0,s,t}(D) \rightarrow \Omega^{0,s,t+1}(D)$$

так, что

$$d_{0,0,1}\omega = (-1)^s \frac{\partial \alpha_{i_1 \dots i_s u_1 \dots u_t}}{\partial x^{n+u}} \theta^{n+i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{n+i_s} \wedge \eta^u \wedge \eta^{u_1} \wedge \dots \wedge \eta^{u_t}.$$

Из равенства $d_{0,1}^2 = 0$ следует $d_{0,0,1}^2 = 0$. Назовем фактор-группу

$$H_q^{v,t}(D) = Z^{0,0,q}(D) / B^{0,0,q}(D)$$

группой v, t -когомологией на D . Здесь $Z^{0,0,q}(D) = \{\omega \in \Omega^{0,0,q}(D), d_{0,0,1}\omega = 0\}$ – множество $d_{0,0,1}$ -замкнутых $(0, 0, q)$ -форм. Множество $B^{0,0,q}(D) = d_{0,0,1}(\Omega^{0,0,q-1}(D))$ называется множеством $d_{0,0,1}$ -точных $(0, 0, q)$ -форм.

Имеем следующие включения:

$$Z^{0,q}(D) \cap \Omega^{0,0,q}(D) \subset Z^{0,0,q}(D), \quad B^{0,q}(D) \cap \Omega^{0,0,q}(D) \subset B^{0,0,q}(D).$$

Аналогом леммы Пуанкаре для оператора $d_{0,0,1}$ является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть ω – $d_{0,0,1}$ -замкнутая $(0, 0, t)$ -форма. Для каждой открытой области $U \in D$ существует $\gamma \in \Omega^{0,0,t-1}(U)$ такая, что $\omega = d_{0,0,1}\gamma$.

Доказательство. Рассмотрим $(0, 0, t)$ -форму: $\omega = \alpha_{u_1 \dots u_t} \eta^{u_1} \wedge \dots \wedge \eta^{u_t}$. Из равенства $d_{0,0,1}\omega = 0$ следует $d_{0,1}\omega = \vec{\tau}_i (\alpha_{u_1 \dots u_t}) \theta^{n+i} \wedge \eta^{u_1} \wedge \dots \wedge \eta^{u_t}$, $d_{0,1}\omega = 0 \pmod{\theta^{n+1}, \dots, \theta^{n+i}}$.

Воспользуемся тем, что оператор $d_{0,1}$ удовлетворяет лемме Пуанкаре. Тогда найдется такая $(0, t-1)$ -форма φ , что

$$\omega = d_{0,0,1}\varphi \pmod{\theta^{n+1}, \dots, \theta^{n+i}}.$$



Пусть γ — $(0, 0, t - 1)$ -компонента φ . Тогда имеем следующее равенство:

$$\omega = d_{0,0,1}\gamma + \mu_{n+i}\theta^{n+i},$$

где μ_{n+i} — $(0, t - 1)$ -форма. Получим $\omega = d_{0,0,1}\gamma$, поэтому каждая $d_{0,0,1}$ -замкнутая является локально $d_{0,0,1}$ -точной. \square

Библиографический список

1. Manea A. Cohomology of foliated Finsler manifolds // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III : Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol 4(53), № 2. P. 23–30.
2. Bejancu A., Farran H. R. Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle // Reports on Math. Physics. 2006. Vol. 58, № 1. P. 131–146.
3. Vaisman I. Cohomology and differential forms. N. Y. : Marcel Dekker Inc., 1973.
4. Букушева А. В., Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 17–22.
5. Galaev S. V. Contact structures with admissible Finsler metrics // Physical Interpretation of Relativity Theory : Proc. of Intern. Meeting. Moscow, 4–7 July 2011. Moscow : BMSTU, 2012. P. 80–87.

Foliation on Distribution with Finslerian Metric

A. V. Bukusheva

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, bukusheva@list.ru

A distribution D with a admissible Finsler metric is defined on a smooth manifold X . Let F be a foliation on X . On the distribution of D as on a smooth manifold foliation F corresponds to the foliation TF . Using this foliation and connection over distribution we define analog exterior derivative. Exterior differential forms is applied to a special form.

Key words: sub Finslerian manifold, interior connection, almost contact metric space, cohomology.

References

1. Manea A. Cohomology of foliated Finsler manifolds. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III : Mathematics, Informatics, Physics*, 2011, vol. 4(53), no. 2, pp. 23–30.
2. Bejancu A., Farran H. R. Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle. *Reports on Math. Physics*, 2006, vol. 58, no. 1, pp. 131–146.
3. Vaisman I. *Cohomology and differential forms*. New York, Marcel Dekker Inc., 1973.
4. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost Contact Metric Structures Defined by Connection over Distribution with Admissible Finslerian Metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 17–22 (in Russian).
5. Galaev S. V. Contact structures with admissible Finsler metrics. *Physical Interpretation of Relativity Theory : Proc. of Intern. Meeting. Moscow, 4–7 July 2011*, Moscow, BMSTU, 2012, pp. 80–87.

УДК 517.5

СИНТЕЗ В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ЯДРЕ ДВУХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Т. А. Волковая

Преподаватель кафедры математики, информатики и методики их преподавания, Кубанский государственный университет, филиал в г. Славянске-на-Кубани, vta1987@yandex.ru

Пусть π — целая функция минимального типа при порядке $\rho = 1$, $\pi(D)$ — соответствующий дифференциальный оператор. Максимальное $\pi(D)$ -инвариантное подпространство ядра аналитического функционала называется его $S[\pi]$ -ядром. $S[\pi]$ -ядром системы аналитических функционалов называется пересечение их $S[\pi]$ -ядер. В статье описаны условия, при которых $S[\pi]$ -ядро двух аналитических функционалов допускает синтез по корневым элементам оператора $\pi(D)$.

Ключевые слова: спектральный синтез, дифференциальный оператор бесконечного порядка, инвариантные подпространства, подмодули целых функций.



ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — выпуклая область в \mathbf{C} ; H — пространство функций, аналитических в Ω , с топологией равномерной сходимости на компактах; H^* — сильное сопряженное к H ; $\pi(z)$ — целая функция минимального типа при порядке $\rho = 1$; $\pi(D)$ — соответствующий дифференциальный оператор бесконечного порядка. Считаем, что функция π отлична от константы. Следовательно, $\pi(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$. Оператор $\pi(D)$ является линейным непрерывным оператором, действующим из H в H . Замкнутое подпространство $W \subseteq H$ называем инвариантным, если $\pi(D)W \subseteq W$. Говорят, что замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает *спектральный синтез*, если оно совпадает с замыканием в H линейной оболочки корневых элементов оператора $\pi(D)$, содержащихся в W .

Пусть H^* — сильное сопряженное к пространству H , P — интерпретация H^* в терминах преобразований Лапласа. Известно, что пространство P совпадает с индуктивным пределом $P[1, H_\Omega)$, где H_Ω — сопряженная к опорной функции области Ω [1]. Оператор умножения на функцию π является непрерывным отображением из P в P . Это позволяет рассматривать P как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$. Из теоремы о биполяре вытекает, что между совокупностью $\{W\}$ замкнутых инвариантных подпространств в H и совокупностью $\{I\}$ замкнутых подмодулей в P можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу ортогональности:

$$I = T(W^0), \quad W = (T^{-1}(I))^0,$$

где T — преобразование Лапласа $H^* \rightarrow P$, W^0 — аннулятор W в H^* , T^{-1} — обратное преобразование $P \rightarrow H^*$, $(T^{-1}(I))^0$ — аннулятор $T^{-1}(I)$ в H . В работе А. Б. Шишкина [2] развивается общий метод, позволивший А. Н. Чернышеву [3] доказать *теорему двойственности*: замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда подмодуль $T(W^0)$ является обильным.

В работе [4] обильность замкнутого подмодуля в P расщепляется на три отдельных свойства: интенсивность, устойчивость и насыщенность. В работе [5] эти свойства подвергаются дополнительному исследованию. Используя описание ограниченных множеств в P , легко показать, что в этом пространстве выполняется аксиома *локальной равномерной устойчивости*: для любой точки $\lambda \in \mathbf{C}$ и любого ограниченного множества $B \subset P$ существуют окрестность U_λ точки λ и ограниченное множество $B' \subset P$ такие, что

$$f \in B, \quad \zeta \in U_\lambda, \quad \frac{f}{\pi - \zeta} \in H(\mathbf{C}) \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{\pi - \zeta} \in B'.$$

Это означает, что результаты статей [4] и [5] применимы к P .

Пусть $S \in H^*$. Замкнутое инвариантное подпространство

$$W_S := \{f \in H : \langle S, \pi(D)^k f \rangle = 0, \quad k = 0, 1, \dots\} \subseteq H$$

называется *полиномиальным ядром* функционала S (точнее, $\mathbf{C}[\pi]$ -ядром функционала S). Если $\pi(\zeta)$ — многочлен, то подпространство W_S совпадает с множеством решений однородного уравнения π -свертки $\langle S, f(z, h) \rangle = 0$, где $f(z, h)$ — π -сдвиг функции $f \in H$ на шаг h . В этом случае подпространство W_S допускает спектральный синтез ($\pi(\zeta) = \zeta$ [6], $\pi(\zeta) = \zeta^q$ [7], $\pi(\zeta) \in \mathbf{C}[\zeta]$ [8]). Случай π — целая функция минимального типа при порядке 1 рассмотрен Р. Г. Письменным [9]. Им же доказана следующая теорема: если существует уточненный порядок $\rho(r) \rightarrow \rho$, $0 < \rho < 1$, такой, что функция π является целой функцией вполне регулярного роста при этом уточненном порядке и индикатор $h(\theta)$ функции π при уточненном порядке $\rho(r)$ всюду положителен, то подпространство W_S допускает спектральный синтез.

Полиномиальным ядром (точнее, $\mathbf{C}[\pi]$ -ядром) системы функционалов $S_1, S_2 \in H^*$ называется замкнутое инвариантное подпространство $W_{S_1, S_2} := W_{S_1} \cap W_{S_2} \subseteq H$. Существуют системы из двух функционалов, $\mathbf{C}[\pi]$ -ядра которых не допускают спектральный синтез. Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ — преобразования Лапласа функционалов $S_1, S_2 \in H^*$ и отношение $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$ является мероморфной функцией от π . В настоящей работе найдены некоторые достаточные условия на целые функции \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 , при выполнении которых $\mathbf{C}[\pi]$ -ядро системы функционалов S_1, S_2 допускает спектральный синтез.



1. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Неотрицательную функцию μ , определенную в окрестности $+\infty$, называют *уточненным весом порядка* $\rho \in [0, +\infty)$, если она возрастает, дифференцируема в окрестности $+\infty$ и $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(r)}{\ln r} = \infty$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu'(r)r}{\mu(r)} = \rho$. Если μ — уточненный вес порядка ρ , то функция $\rho(r) := \frac{\ln \mu(r)}{\ln r}$ является уточненным порядком. При $\rho > 0$ верно и обратное, т. е. для любого уточненного порядка $\rho(r) \rightarrow \rho$ функция $\mu(r) := r^{\rho(r)}$ является уточненным весом порядка ρ . По известным свойствам уточненного порядка функция $\mu(r)r^{-\rho} = r^{\rho(r)-\rho}$ является медленно растущей, значит, равномерно по k из любого отрезка $[a; b] \subset (0; +\infty)$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(kr)(kr)^{-\rho}}{\mu(r)r^{-\rho}} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(kr)}{\mu(r)} = k^\rho. \quad (1)$$

Множество $E \subset \mathbf{C}$ называем *нуль-множеством*, если множество $|E| := \{|z| : z \in E\}$ имеет нулевую относительную меру.

Пусть π — целая функция вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho(r) \rightarrow \rho \in (0, 1)$ с всюду положительным индикатором, ν — обратная к функции $\mu(r) := r^{\rho(r)}$. Легко убедиться, что функция $\hat{\mu}(r) = \nu(\ln r)$ является уточненным весом нулевого порядка и существует такая константа $\kappa \geq 1$, что вне некоторого нуль-множества E выполняются оценки

$$\kappa^{-1} |z| \leq \hat{\mu}(|\pi(z)|) \leq \kappa |z|. \quad (2)$$

При этом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \hat{\mu}(r)}{\ln \ln r} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\hat{\mu}'(e^r)e^r r}{\hat{\mu}(e^r)} = \frac{1}{\rho} =: \hat{\rho} > 1. \quad (3)$$

Условие (3) означает, что функция $\hat{\mu}(e^r)$ является уточненным весом порядка $\hat{\rho}$. Значит, равномерно по k из любого отрезка $[a; b] \subset (0; +\infty)$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\hat{\mu}(e^{kr})}{\hat{\mu}(e^r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\hat{\mu}(r^k)}{\hat{\mu}(r)} = k^{\hat{\rho}} = k^{\frac{1}{\rho}}. \quad (4)$$

Пусть $\hat{\nu}(r) = \exp \mu(r)$ — обратная к функции $\hat{\mu}(r)$. Тогда функция $\ln \hat{\nu}(r)$ является обратной к функции $\hat{\mu}(e^r)$. Значит, функция $\ln \hat{\nu}(r)$ является уточненным весом порядка ρ . Следовательно, равномерно по k из любого отрезка $[a; b] \subset (0; +\infty)$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \hat{\nu}(kr)}{\ln \hat{\nu}(r)} = k^\rho. \quad (5)$$

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть \mathcal{F} и \mathcal{G} — целые функции, допускающие представления $\mathcal{F} = \varphi f F$, $\mathcal{G} = \varphi g G$, где φ , f , F , g , G — целые функции. Считаем, что функции f, F, g, G являются π -симметричными, т. е. $f := \hat{f} \circ \pi$, $F := \hat{F} \circ \pi$, $g := \hat{g} \circ \pi$, $G := \hat{G} \circ \pi$, где $\hat{f}, \hat{F}, \hat{g}, \hat{G}$ — некоторые целые функции. Пусть разложения Адамара для функций \hat{F} и \hat{G} имеют вид

$$\hat{F}(\zeta) = \prod_{\hat{\Lambda}} \left(1 - \frac{\zeta}{\hat{\lambda}_i}\right), \quad \hat{G}(\zeta) = \prod_{\hat{\Gamma}} \left(1 - \frac{\zeta}{\hat{\gamma}_i}\right),$$

где $\hat{\Lambda} := \{\hat{\lambda}_i\}$, $\hat{\Gamma} := \{\hat{\gamma}_i\}$ — последовательности нулей функций \hat{F} и \hat{G} соответственно, занумерованные каким-либо образом. Считаем, что все элементы последовательностей $\hat{\Lambda} := \{\hat{\lambda}_i\}$ и $\hat{\Gamma} := \{\hat{\gamma}_i\}$ лежат вне единичного круга, т. е. $t_0 := \min_{i \in \mathbf{N}} \min \{|\hat{\lambda}_i|, |\hat{\gamma}_i|\} \geq 1$.

Введем обозначения. Во-первых, пусть

$$\Delta_{\hat{\Lambda}} := \sup_n \frac{n}{\hat{\mu}(|\hat{\lambda}_n|)}, \quad \Delta_{\hat{\Gamma}} := \sup_n \frac{n}{\hat{\mu}(|\hat{\gamma}_n|)}, \quad \Delta := \max \{\Delta_{\hat{\Lambda}}; \Delta_{\hat{\Gamma}}\} < +\infty.$$

Во-вторых, для любого натурального n

$$L_n(z) := g(z)G_n(z)\mathcal{F}(z) - f(z)F_n(z)\mathcal{G}(z),$$



$$r_n(\delta) := (\kappa \hat{\mu}(R_n(\delta))), \quad R_n(\delta) := \exp \left\{ \left(4\kappa \frac{\Delta}{\delta} \right)^{\frac{2\rho}{1-\rho}} \ln t_n \right\},$$

где $t_n := \max_{i=1, \dots, n} \max \{ |\hat{\lambda}_i|, |\hat{\gamma}_i| \}$, $F_n := \hat{F}_n \circ \pi$, $G_n := \hat{G}_n \circ \pi$,

$$\hat{F}_n(\zeta) := \prod_{i \leq n} \left(1 - \frac{\zeta}{\hat{\lambda}_i} \right), \quad \hat{G}_n(\zeta) := \prod_{i \leq n} \left(1 - \frac{\zeta}{\hat{\gamma}_i} \right).$$

В-третьих, для оценки функции $L_n(z)$ воспользуемся специальными характеристиками:

$$S_n := \sum_{i \geq n} \left| \frac{1}{\hat{\gamma}_i} - \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \right|, \quad K_M := \max_{i \in M} \left\{ \max \left\{ \left| \frac{\hat{\lambda}_i}{\hat{\gamma}_i} \right|, \left| \frac{\hat{\gamma}_i}{\hat{\lambda}_i} \right| \right\} \right\},$$

где M — произвольное непустое множество натуральных чисел. Если $M = \emptyset$, то полагаем $K_M = 1$.

3. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ

Рассмотрим вспомогательные оценки для функций F_n , G_n и L_n в терминах характеристик S_n и K_M .

Лемма 1. При любых $\delta > 0$, достаточно больших натуральных n и z , удовлетворяющих условию $|z| \geq r_n(\delta)$, выполняются оценки:

$$\ln |F_n(z)| \leq \delta |z|, \quad \ln |G_n(z)| \leq \delta |z|, \tag{6}$$

$$|L_n(z)| \leq (|f(z)\mathcal{G}(z)| + |g(z)\mathcal{F}(z)|) e^{\delta |z|}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $n(t; \hat{\Lambda})$ — число точек $\hat{\lambda}_i \in \hat{\Lambda}$ в круге $\{\zeta : |\zeta| < t\}$. Покажем, что для любого $t \geq 0$ выполняется неравенство $n(t; \hat{\Lambda}) \leq \Delta \hat{\mu}(t)$. Для этого рассмотрим упорядочение $\hat{\Lambda} : \hat{\lambda}_{i_1}, \hat{\lambda}_{i_2}, \dots$, при котором $|\hat{\lambda}_{i_1}| \leq |\hat{\lambda}_{i_2}| \leq \dots$. Предположим, что в круге $|\zeta| \leq t$ содержится n точек $\hat{\lambda}_{i_1}, \dots, \hat{\lambda}_{i_n}$. Положим $i_0 := \max_{m=1, \dots, n} i_m$. Тогда по определению числа $\Delta_{\hat{\Lambda}}$ имеем $n(t; \hat{\Lambda}) = n \leq i_0 \leq \Delta_{\hat{\Lambda}} \hat{\mu}(|\hat{\lambda}_{i_0}|) \leq \Delta \hat{\mu}(t)$. Значит (см. [10, гл. I, § 4, лемма 2]),

$$\begin{aligned} \ln |\hat{F}_n(\zeta)| &\leq \sum_{i \leq n} \ln \left(1 + \left| \frac{\zeta}{\hat{\lambda}_i} \right| \right) = \int_0^{t_n} \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t} \right) dn(t; \hat{\Lambda}) \leq \\ &\leq n(t_n; \hat{\Lambda}) \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t_n} \right) + |\zeta| \int_0^{t_n} \frac{n(t; \hat{\Lambda})}{t(t + |\zeta|)} dt \leq n(t_n; \hat{\Lambda}) \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t_n} \right) + \int_1^{t_n} \frac{n(t; \hat{\Lambda})}{t} dt \leq \\ &\leq \Delta \hat{\mu}(t_n) \left(\ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t_n} \right) + \ln t_n \right) \leq \Delta \frac{\hat{\mu}(t_n)}{\hat{\mu}(|\zeta|)} \ln(t_n + |\zeta|) \hat{\mu}(|\zeta|). \end{aligned}$$

В силу (3) $\varepsilon := \frac{\hat{\rho} - 1}{2} > 0$. При $k = \frac{\ln |\zeta|}{\ln t_n} \in [1; +\infty)$ логарифмическая производная

$$\frac{\psi'_k(k; t_n)}{\psi(k; t_n)} = \frac{1}{k} \left(\frac{t_n^k}{t_n + t_n^k} \frac{\ln t_n^k}{\ln(t_n + t_n^k)} - \frac{\hat{\mu}'(t_n^k) t_n^k \ln t_n^k}{\hat{\mu}(t_n^k)} \right)$$

функции $\psi(k; t_n) := \frac{\hat{\mu}(t_n)}{\hat{\mu}(t_n^k)} \ln(t_n + t_n^k)$ (по переменной k) мажорируется функцией $\frac{1}{k} (1 - \hat{\rho} + \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{k}$ равномерно по достаточно большим t_n . Значит, при $k \geq 1$ и всех достаточно больших $t_n \geq 1$ выполняется неравенство

$$\ln \psi(k; t_n) = \int_1^k \frac{\psi'_k(t; t_n)}{\psi(t; t_n)} dt - \ln 2t_n \leq \ln \frac{1}{2k^\varepsilon}.$$

Следовательно, при $|\zeta| \geq t_n$ и достаточно больших n имеем:

$$\ln |\hat{F}_n(\zeta)| \leq \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\ln t_n}{\ln |\zeta|} \right)^\varepsilon \hat{\mu}(|\zeta|). \tag{8}$$



Пусть $\delta > 0$. Из (8) вытекает, что $\ln |\hat{F}_n(\zeta)| \leq \frac{\delta}{2\kappa} \hat{\mu}(|\zeta|)$ при достаточно большом n и $|\zeta| \geq R_n(\delta)$. Если $|z| \geq r_n(\delta)$ и $z \notin E$, то в силу (2) $|\zeta| = |\pi(z)| \geq \hat{\nu} \left(\frac{1}{\kappa} r_n(\delta) \right) \geq R_n(\delta)$, значит, $\ln |F_n(z)| = \ln |\hat{F}_n(\zeta)| \leq \frac{\delta}{2\kappa} \hat{\mu}(|\zeta|) = \frac{\delta}{2\kappa} \hat{\mu}(|\pi(z)|)$. Выберем окружности $|z| = t'_k$, которые не пересекаются с исключительным нуль-множеством E и удовлетворяют условиям: $t'_k < t'_{k+1} \leq 2t'_k$ и $t'_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Если $t'_k \leq |z| \leq t'_{k+1}$, то $\ln |F_n(z)| \leq \ln M_{F_n}(|z|) \leq \ln M_{F_n}(t'_{k+1}) \leq \frac{\delta}{2\kappa} \hat{\mu}(M_\pi(t'_{k+1})) \leq \frac{\delta}{2} t'_{k+1} \leq \delta t'_k \leq \delta |z|$. Так как $r_n(\delta) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то при достаточно большом n выполняется неравенство $r_n(\delta) \geq t'_1$, значит, для таких n и z , удовлетворяющих условию $|z| \geq r_n(\delta)$, выполняется оценка $\ln |F_n(z)| \leq \delta |z|$. Значит, первая из оценок (6) доказана. Вторая доказывается аналогично. Оценка (7) следует из оценок (6). Лемма доказана. \square

Для $\sigma > 0$, $\lambda \in \mathbf{C}$ обозначим через $D_\sigma(\lambda)$ замкнутый круг с центром в точке λ радиуса $\sigma|\lambda|$. Пусть M — некоторое множество натуральных чисел, $m := \min M$. Если $M \neq \emptyset$, то положим

$$E_M := \bigcup_{i \in M} \left(D_\sigma(\hat{\lambda}_i) \cup D_\sigma(\hat{\gamma}_i) \right), \quad \hat{F}_M(\zeta) := \prod_{i \in M} \left(1 - \frac{\zeta}{\hat{\lambda}_i} \right), \quad \hat{G}_M(\zeta) := \prod_{i \in M} \left(1 - \frac{\zeta}{\hat{\gamma}_i} \right).$$

Если $M = \emptyset$, то $E_M := \emptyset$, а \hat{F}_M и \hat{G}_M полагаем тождественно равными единице. Легко показать (см. [11]), что вне множества E_M

$$\left| \ln \left| \frac{\hat{G}_M(\zeta)}{\hat{F}_M(\zeta)} \right| \right| \leq \frac{1}{\sigma} S_m(|\zeta| + 1), \quad (9)$$

$$\left| 1 - \frac{\hat{G}_M(\zeta)}{\hat{F}_M(\zeta)} \right| \leq S'_m(|\zeta| + 1) \exp(S'_m(|\zeta| + 1)), \quad S'_m := \frac{\sqrt{2}\pi}{\sigma} S_m. \quad (10)$$

Пусть $0 < \sigma < 1/2$. Символом $M_n(\delta)$ обозначим множество значений индекса i , больших n , для которых хотя бы одно из чисел $|\hat{\lambda}_i|(1 - \sigma)$ и $|\hat{\gamma}_i|(1 - \sigma)$ не превосходит $R_n(\delta)$, а символом $N_n(\delta)$ обозначим множество $\{i > n : i \notin M_n(\delta)\}$. Множество кружков $E_{N_n(\delta)} = \bigcup_{i \in N_n(\delta)} \left(D_\sigma(\hat{\lambda}_i) \cup D_\sigma(\hat{\gamma}_i) \right)$ и круг $|\zeta| \leq R_n(\delta)$ не имеют общих точек, так как по определению множества $N_n(\delta)$

$$\min \{ |\zeta| : \zeta \in E_{N_n(\delta)} \} \geq \min \{ |\hat{\lambda}_i|(1 - \sigma), |\hat{\gamma}_i|(1 - \sigma) \} > R_n(\delta).$$

Выберем $\alpha > 1$ и обозначим через $r'_{n,\alpha}(\delta)$ число из отрезка $[r_n(\delta); (\kappa \hat{\mu}(R_n^\alpha(\delta)))]$, которое не лежит во множестве $|E|$. Такое число при достаточно больших n найдется, так как из (4) вытекает, что $(\kappa \hat{\mu}(R_n^\alpha(\delta))) r_n(\delta)^{-1} \rightarrow \alpha^{\hat{\rho}} > 1$. Для всех z из окружности $|z| = r'_{n,\alpha}(\delta)$ выполняется неравенство

$$|\pi(z)| \leq R'_{n,\alpha}(\delta) := 3K_{M_n(\delta)} R_n^{\alpha\kappa'}(\delta), \quad \kappa' := \kappa^{2\rho}.$$

Действительно, так как окружность $|z| = r'_{n,\alpha}(\delta)$ не пересекается с множеством E , то из (2) вытекают неравенства $|\pi(z)| \leq \hat{\nu}(\kappa r'_{n,\alpha}(\delta)^\rho) \leq \hat{\nu}(\kappa^2 \hat{\mu}(R_n^\alpha(\delta)))$. Значит (см. формулу (5)), при достаточно большом n выполняются неравенства $|\pi(z)| \leq R_n^{\alpha\kappa'}(\delta)$. Остальное вытекает из очевидных неравенств $3 \geq 1$ и $K_{M_n(\delta)} \geq 1$.

Если $M_n(\delta) \neq \emptyset$, то при любом $i \in M_n(\delta)$, по крайней мере, одно из чисел $|\hat{\lambda}_i|(1 - \sigma)$, $|\hat{\gamma}_i|(1 - \sigma)$ не превосходит $R_n(\delta)$. Предположим, что $|\hat{\lambda}_i|(1 - \sigma) \leq R_n(\delta)$. Из неравенства $K_{M_n(\delta)} \geq 1$ вытекает, что

$$|\hat{\lambda}_i|(1 + \sigma) \leq \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} R_n(\delta) \leq 3R_n^{\alpha\kappa'}(\delta) \leq 3K_{M_n(\delta)} R_n^{\alpha\kappa'}(\delta). \quad (11)$$

Так как при $i \in M_n(\delta)$ выполняется неравенство $|\hat{\gamma}_i| \leq K_{M_n(\delta)} |\lambda_i|$, то

$$|\hat{\gamma}_i|(1 + \sigma) \leq K_{M_n(\delta)} |\hat{\lambda}_i|(1 + \sigma) \leq 3K_{M_n(\delta)} R_n^{\alpha\kappa'}(\delta). \quad (12)$$

Из неравенств (11) и (12) вытекает, что при достаточно большом n множество $E_{M_n(\delta)}$ лежит в круге $|\zeta| \leq R'_{n,\alpha}(\delta)$.



В следующей лемме проводится оценка $L_n(z)$ при условии, что $|z| \leq r_n(\delta)$.

Лемма 2. *Предположим, что $\Delta < +\infty$. Для любых $\delta > 0$ и $\sigma \in (0; 1/2)$ при достаточно больших n в круге $|z| \leq r_n(\delta)$ верна следующая оценка:*

$$|L_n(z)| \leq C_\sigma S_n (R'_{n,\alpha}(\delta) + 1) M_{g\mathcal{F}} (r'_{n,\alpha}(\delta)) \exp \{ C_\sigma S_n (R'_{n,\alpha}(\delta) + 1) + \delta r_n(\delta) \},$$

где $C_\sigma = 2\sqrt{2}\pi/\sigma$.

Доказательство. Пусть $G^{(n)} := \hat{G}^{(n)} \circ \pi$, $F^{(n)} := \hat{F}^{(n)} \circ \pi$, где

$$\hat{F}^{(n)}(\zeta) = \prod_{i>n} \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda_i} \right), \quad \hat{G}^{(n)}(\zeta) = \prod_{i>n} \left(1 - \frac{\zeta}{\hat{\gamma}_i} \right).$$

Учитывая, что $\mathbf{N} \cap (n; +\infty) = M_n \cup N_n$, получим представления:

$$\hat{F}^{(n)}(\zeta) = \hat{F}_{M_n(\delta)}(\zeta) \hat{F}_{N_n(\delta)}(\zeta), \quad \hat{G}^{(n)}(\zeta) = \hat{G}_{M_n(\delta)}(\zeta) \hat{G}_{N_n(\delta)}(\zeta),$$

где функции $\hat{F}_{M_n(\delta)}$, $\hat{G}_{M_n(\delta)}$, $\hat{F}_{N_n(\delta)}$, $\hat{G}_{N_n(\delta)}$ определяются по множествам $M_n(\delta)$ и $N_n(\delta)$. Пусть $F_{M_n(\delta)} := \hat{F}_{M_n(\delta)} \circ \pi$, $F_{N_n(\delta)} := \hat{F}_{N_n(\delta)} \circ \pi$, $G_{M_n(\delta)} := \hat{G}_{M_n(\delta)} \circ \pi$, $G_{N_n(\delta)} := \hat{G}_{N_n(\delta)} \circ \pi$. Тогда для любого $z \in \tilde{\zeta} := \pi^{-1}(\zeta)$ комплексное число $L_n(z)$ можно представить в следующем виде:

$$g(z)G_n(z)\mathcal{F}(z) \left[\left(1 - \frac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)} \right) + \frac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)} \left(1 - \frac{G_{N_n(\delta)}(z)}{F_{N_n(\delta)}(z)} \right) \right].$$

Оценим это выражение в круге $|z| \leq r_n(\delta)$. В силу оценок (6) при достаточно больших n и $|z| \leq r_n(\delta)$ верно неравенство

$$|G_n(z)| \leq \max_{|z|=r_n(\delta)} |G_n(z)| \leq e^{\delta r_n(\delta)}. \tag{13}$$

Функция $g(z)\mathcal{F}(z) \left(1 - \frac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)} \right)$ целая, и окружность $|\zeta| = R'_n(\delta)$ охватывает исключительное множество $E_{M_n(\delta)}$, вне которого выполняется оценка (10) с $M = M_n(\delta)$. Поэтому для $|z| \leq r'_{n,\alpha}(\delta)$ и, тем более, при $|z| \leq r_n(\delta)$ с учетом того, что $\min M_n(\delta) > n$, получим:

$$\begin{aligned} \left| g(z)\mathcal{F}(z) \left(1 - \frac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)} \right) \right| &\leq M_{g\mathcal{F}}(r'_{n,\alpha}(\delta)) \max_{|\zeta|=R'_{n,\alpha}(\delta)} \left| 1 - \frac{\hat{G}_{M_n(\delta)}(\zeta)}{\hat{F}_{M_n(\delta)}(\zeta)} \right| \leq \\ &\leq M_{g\mathcal{F}}(r'_{n,\alpha}(\delta)) \sup_{|\zeta|=R'_{n,\alpha}(\delta)} \{ S'_n(|\zeta| + 1) \exp(S'_n(|\zeta| + 1)) \} \leq \\ &\leq M_{g\mathcal{F}}(r'_{n,\alpha}(\delta)) S'_n(R'_{n,\alpha}(\delta) + 1) \exp(S'_n(R'_{n,\alpha}(\delta) + 1)). \end{aligned} \tag{14}$$

Аналогично, используя оценку (9) с $M = M_n(\delta)$ и тот факт, что функция $g(z)\mathcal{F}(z) \frac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)}$ является целой, при $|r| \leq r'_{n,\alpha}(\delta)$ получим:

$$\left| g(z)\mathcal{F}(z) \frac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)} \right| \leq M_{g\mathcal{F}}(r'_{n,\alpha}(\delta)) \exp(S'_n(R'_{n,\alpha}(\delta) + 1)). \tag{15}$$

Из определения множества $N_n(\delta)$ следует, что множество $E_{N_n(\delta)}$ лежит вне круга $|\zeta| \leq R_n(\delta)$, следовательно, в этом круге функция $1 - \frac{\hat{G}_{N_n(\delta)}(\zeta)}{\hat{F}_{N_n(\delta)}(\zeta)}$ голоморфна и для нее выполняется оценка (10) с $M = N_n(\delta)$. Поэтому при $|z| \leq r_n(\delta)$ имеем:

$$\left| 1 - \frac{G_{N_n(\delta)}(z)}{F_{N_n(\delta)}(z)} \right| \leq \max_{|\zeta|=R_n(\delta)} \left| 1 - \frac{\hat{G}_{N_n(\delta)}(\zeta)}{\hat{F}_{N_n(\delta)}(\zeta)} \right| \leq S'_n(R'_{n,\alpha}(\delta) + 1) \exp(S'_n(R'_{n,\alpha}(\delta) + 1)). \tag{16}$$

Из выражения для $L_n(z)$ и оценок (13)–(16) получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |L_n(z)| &\leq 2S'_n(R'_{n,\alpha}(\delta) + 1) M_{g\mathcal{F}}(r'_{n,\alpha}(\delta)) \exp(2S'_n(R'_{n,\alpha}(\delta) + 1) + \delta r_n(\delta)) \leq \\ &\leq C_\sigma S_n (R'_{n,\alpha}(\delta) + 1) M_{g\mathcal{F}}(r'_{n,\alpha}(\delta)) \exp(C_\sigma S_n (R'_{n,\alpha}(\delta) + 1) + \delta r_n(\delta)). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □



4. ИТОГОВЫЕ ОЦЕНКИ

Предположим, что для функций φ, f, F, g, G выполнено следующее условие: существуют постоянная $C > 0$ и ограниченная тригонометрически выпуклая 2π -периодическая функция $h(\theta)$, такие, что для любых $z \in \mathbf{C}$

$$\max \{|f(z)\mathcal{G}(z)|; |g(z)\mathcal{F}(z)|\} \leq C \exp(h(\theta)|z|), \quad (17)$$

где $\theta := \arg z$. При этом предположении справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Если нулевые множества $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$ можно упорядочить так, что для некоторого $\delta > 0$ выполняется неравенство*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln S_n}{\hat{\mu}(t_n)} < -\hat{C}(\delta)(h + \delta), \quad (18)$$

где $\hat{C}(\delta) := \kappa^{1+2\rho} (2\kappa\Delta/\delta)^{\frac{2}{1-2\rho}}$, $h = \max_{\theta} h(\theta) - \min \{\min_{\theta} h(\theta); 0\}$, то существуют возрастающая последовательность $N_0 = \{n_j\}$ натуральных чисел и убывающая к нулю последовательность $\{\varepsilon_j\}$ такие, что $|L_{n_j}(z)| \leq \varepsilon_j \exp((h(\theta) + \delta)|z|)$ для любых $z \in \mathbf{C}$.

Доказательство. Из соотношения (18) вытекает, что найдутся $\alpha > 1$, $\delta' \in (0, \delta)$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $N_0 = \{n_j\}$ такая, что для любых j выполняется неравенство $\ln(1/S_{n_j}) > h'\hat{\mu}(t_{n_j})$, где $h' > \hat{C}(\delta')(h + \delta') > 0$, $\delta' \in (0, \delta)$. Поэтому для любых j имеем $S_{n_j} < \exp[-h'\hat{\mu}(t_{n_j})]$. Значит, для любого $r \in \mathbf{R}$ последовательность $S_{n_j} t_{n_j}^r$ сходится к нулю.

В силу нашего предположения (17) и оценки (7) для всех $n \geq n_0$ и $|z| \geq r_n(\delta')$ получим:

$$|L_n(z)| \leq (|f(z)\mathcal{G}(z)| + |g(z)\mathcal{F}(z)|) e^{\delta'|z|} \leq 2C \exp((h(\theta) + \delta')|z|). \quad (19)$$

Оценим характеристику $K_{M_n(\delta')}$. Из определения множества $M_n(\delta')$ вытекает, что при всех $i \in M_n(\delta')$ хотя бы одно из чисел $|\hat{\lambda}_i|$ или $|\hat{\gamma}_i|$ не превосходит $\frac{R_n(\delta')}{1-\sigma}$. Пусть, например, $|\hat{\lambda}_i| \leq \frac{R_n(\delta')}{1-\sigma}$. Тогда равномерно по $i \in M_n(\delta')$ выполняются неравенства

$$\left| 1 - \frac{\hat{\lambda}_i}{\hat{\gamma}_i} \right| \leq \left| \frac{1}{\hat{\lambda}_i} - \frac{1}{\hat{\gamma}_i} \right| |\hat{\lambda}_i| \leq S_n \frac{R_n(\delta')}{1-\sigma}.$$

Из этих неравенств вытекает, что $K_{M_{n_j}(\delta')} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$.

Фиксируем произвольное $\sigma \in (0, 1/2)$ и воспользуемся оценкой из леммы 2. Согласно этой оценке, при $|z| \leq r_n(\delta')$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |L_n(z)| &\leq C_{\sigma} S_n (R'_{n,\alpha}(\delta') + 1) M_{g\mathcal{F}}(r'_{n,\alpha}(\delta')) \exp \{C_{\sigma} S_n (R'_{n,\alpha}(\delta') + 1) + \delta' r_n(\delta')\} \leq \\ &\leq C C_{\sigma} S_n (R'_{n,\alpha}(\delta') + 1) \exp \{C_{\sigma} S_n (R'_{n,\alpha}(\delta') + 1) + \delta' r_n(\delta')\} \exp \{h_{\max} r'_{n,\alpha}(\delta')\}. \end{aligned}$$

Так как $\max_{\theta} h(\theta) r'_{n,\alpha}(\delta') \leq h r'_{n,\alpha}(\delta') + h(\theta)|z|$ при любом θ , то для любого θ при $|z| \leq r_n(\delta')$ и достаточно больших n выполняется неравенство

$$|L_n(z)| \leq \exp \left\{ \left(\frac{D_n}{\hat{\mu}(t_n)} + \frac{d_n}{\hat{\mu}(t_n)} \right) \hat{\mu}(t_n) \right\} \exp h(\theta)|z| =: \varepsilon_n \exp h(\theta)|z|,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{D_n}{\hat{\mu}(t_n)} &:= -\frac{\ln \frac{1}{S_n}}{\hat{\mu}(t_n)} + h \frac{r'_{n,\alpha}(\delta')}{\hat{\mu}(t_n)} + \delta' \frac{r_n(\delta')}{\hat{\mu}(t_n)} \leq -\frac{\ln \frac{1}{S_n}}{\hat{\mu}(t_n)} + \kappa \frac{\hat{\mu}(R'_n(\delta'))}{\hat{\mu}(t_n)} (h + \delta'), \\ \frac{d_n}{\hat{\mu}(t_n)} &:= \frac{\ln(C C_{\sigma} (R'_n(\delta') + 1)) + C_{\sigma} S_n (R'_n(\delta') + 1)}{\hat{\mu}(t_n)} \leq \\ &\leq \frac{\ln R'_n(\delta')}{\hat{\mu}(t_n)} + \frac{\ln 2 C C_{\sigma}}{\hat{\mu}(t_n)} + C_{\sigma} S_n R'_n(\delta') + C_{\sigma} S_n. \end{aligned}$$

Так как $K_{M_{n_j}(\delta')} \rightarrow 1$ и $S_{n_j} t_{n_j}^{\alpha} \rightarrow 0$ при любом $\alpha \in \mathbf{R}$, то $\frac{d_{n_j}}{\hat{\mu}(t_{n_j})} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Из определения $R_n(\delta)$ и соотношения (4) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{\mu}(R_n(\delta))}{\hat{\mu}(t_n)} = \left(4\kappa \frac{\Delta}{\delta} \right)^{\frac{2\rho}{\rho-1}} = \left(4\kappa \frac{\Delta}{\delta} \right)^{\frac{2}{1-\rho}}.$$



Значит, если α достаточно близко к единице, то начиная с некоторого номера

$$\frac{D_{n_j}}{\hat{\mu}(t_{n_j})} \leq \frac{\ln S_{n_j}}{\hat{\mu}(t_{n_j})} + \kappa \frac{\hat{\mu}(R_{n_j}^\alpha(\delta'))}{\hat{\mu}(t_{n_j})} (h + \delta') < -h' + \hat{C}(\delta') (h + \delta') < 0.$$

Это означает, что последовательность ε'_{n_j} сходится к нулю. При этом для всех $|z| \leq r_{n_j}(\delta')$ выполняется неравенство $|L_{n_j}(z)| \leq \varepsilon'_{n_j} \exp(h(\theta)|z|)$.

Далее, из оценки (19) следует, что для всех $|z| \geq r_{n_j}(\delta')$ будет выполняться неравенство

$$|L_{n_j}(z)| \leq \varepsilon''_{n_j} \exp((h(\theta) + \delta)|z|), \tag{20}$$

где $\varepsilon''_{n_j} := 2C \exp(-(\delta - \delta'')r_{n_j}(\delta')) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Для всех комплексных z получим $|L_{n_j}| \leq \varepsilon_j \times \exp((h(\theta) + \delta)|z|)$, причем $\varepsilon_j := \max\{\varepsilon'_{n_j}; \varepsilon''_{n_j}\} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Лемма доказана. \square

Далее рассмотрим некоторые дополнения к лемме 3. Во-первых, в лемме 3 предположение существования мажоранты $C \exp(h(\theta)|z|)$ для функций $f_{\mathcal{G}}$ и $g_{\mathcal{F}}$ можно заменить следующим предположением: функции $f_{\mathcal{G}}$ и $g_{\mathcal{F}}$ имеют конечный тип, а функцию $h(\theta)$ положить равной $\max\{h_{f_{\mathcal{G}}}(\theta), h_{g_{\mathcal{F}}}(\theta)\} + \varepsilon$, где $h_{f_{\mathcal{G}}}(\theta), h_{g_{\mathcal{F}}}(\theta)$ — индикаторы $f_{\mathcal{G}}$ и $g_{\mathcal{F}}$ соответственно и ε — произвольное положительное число.

Во-вторых, если $f_{\mathcal{G}}$ и $g_{\mathcal{F}}$ имеют конечный тип, то оценку (19) можно заменить оценкой $|L_{n_j}(z)| \leq 2C \exp\left(\left(\hat{h}(\theta) + \varepsilon + \delta''\right)|z|\right)$, где $\hat{h}(\theta) := \max\{h_{f_{\mathcal{G}}}(\theta); h_{g_{\mathcal{F}}}(\theta)\}$. Из этой оценки следует, что для $|z| \geq r_{n_j}(\delta')$ вместо (20) будет иметь место оценка $|L_{n_j}(z)| \leq \varepsilon''_j \exp\left(\left(\hat{h}(\theta) + \varepsilon + \delta\right)|z|\right)$. В остальном, повторяя доказательство леммы 3, приходим к заключению о справедливости следующей леммы.

Лемма 4. *В условиях леммы 3 для любого $\varepsilon > 0$ существуют возрастающая последовательность $N_0 = \{n_j\}$ натуральных чисел и убывающая к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_j\}$ такие, что для всех достаточно больших j выполнена оценка*

$$|L_{n_j}(z)| \leq \varepsilon_j \exp\left(\left(\hat{h}(\theta) + \varepsilon + \delta\right)|z|\right).$$

В-третьих, рассмотрим случай

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln S_n}{\hat{\mu}(t_n)} = -\infty. \tag{21}$$

Лемма 5. *Если нулевые множества $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$ можно упорядочить так, что выполняется условие (21), то в условиях леммы 3 существуют возрастающая последовательность $N_0 = \{n_j\}$ натуральных чисел и убывающая к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_j\}$ такие, что для любого $\delta > 0$ и всех достаточно больших j выполнена равномерная по z оценка $|L_{n_j}(z)| \leq \varepsilon_j \exp\left(\left(\hat{h}(\theta) + \delta\right)|z|\right)$.*

Доказательство. Так как функция $\hat{C}(\delta)$ убывает и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{C}(\delta) = +\infty$, то для любого $k \in \mathbf{N}$ существует единственное решение $\delta_k \in (0; 1)$ уравнения $\kappa \hat{C}(\delta)(h + 1) = k + \kappa \hat{C}(1)(h + 1)$. При этом последовательность $\{\delta_k\}$ убывает, стремится к нулю и для всех k

$$\kappa \hat{C}(\delta_k)(h + \delta_k) = \kappa \hat{C}(\delta_k)(h + 1) + \kappa \hat{C}(\delta_k)(\delta_k - 1) < \kappa \hat{C}(\delta_k)(h + 1) = k + \kappa \hat{C}(1)(h + 1).$$

В силу соотношения (21) можно считать, что для каждого $j \geq k$ выполнены неравенства

$$-\frac{\ln S_{n_j}}{\hat{\mu}(t_{n_j})} > h'_k > \kappa \hat{C}(\delta_k)(h + \delta_k),$$

где $h'_k := k + \kappa \hat{C}(1)(h + 1)$. Пусть $\varepsilon_k > 0$ и $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Ссылаясь на лемму 4, заключаем, что для любого $k \in \mathbf{N}$ существует убывающая к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_{k,j}\}$ такая, что для всех достаточно больших j выполняется равномерная по z оценка

$$|L_{n_j}(z)| \leq \varepsilon_{k,j} \exp\left(\left(\hat{h}(\theta) + \varepsilon_k + \delta_k\right)|z|\right).$$

Осталось для любого j положить $\varepsilon_j := \varepsilon_{j,j}$. Лемма доказана. \square



5. ПОДМОДУЛИ С ДВУМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

Пусть $O(\mathbf{C})$ — кольцо целых функций одной комплексной переменной с топологией равномерной сходимости на компактах, $O_\pi(\mathbf{C})$ — подкольцо $O(\mathbf{C})$, состоящее из π -симметричных целых функций, т. е. из целых функций, допускающих представление в виде композиции $c \circ \pi$, где $c \in O(\mathbf{C})$. Система элементов $f_1, \dots, f_n \in O(\mathbf{C})$ называется *независимой*, если выполняется импликация: если $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$ и $c_1, \dots, c_n \in O_\pi(\mathbf{C})$, то $c_1, \dots, c_n = 0$. Ранг множества $I \subseteq O(\mathbf{C})$ — это максимальное число элементов в независимых системах $f_1, \dots, f_n \in I$. Замкнутый подмодуль в P ранга 1 автоматически является интенсивным и насыщенным [5]. Это означает, что проверка обильности такого подмодуля в P сводится к проверке его устойчивости.

Пусть замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ порожден функциями \mathcal{F} и \mathcal{G} . Покажем, что ранг I равен 1. Если $f_1, f_2 \in I$, то $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$, где $c_1 := f_2/\varphi$, $c_2 := -f_1/\varphi$ — целые функции. Убедимся, что $c_1, c_2 \in O_\pi(\mathbf{C})$ на примере c_1 . Действительно, существуют обобщенные последовательности $r_1^\alpha := \hat{r}_1^\alpha \circ \pi$, $r_2^\alpha := \hat{r}_2^\alpha \circ \pi \in \mathbf{C}[\pi]$ такие, что $r_1^\alpha \mathcal{F} + r_2^\alpha \mathcal{G} = \varphi(r_1^\alpha f + r_2^\alpha g) \rightarrow f_2$ в топологии пространства P . Так как вложение $P \subseteq O(\mathbf{C})$ является непрерывным, то $r_1^\alpha f + r_2^\alpha g \rightarrow c_1$ в топологии пространства $O(\mathbf{C})$. Это означает, что обобщенная последовательность $\hat{r}_1^\alpha \hat{f} + \hat{r}_2^\alpha \hat{g}$ сходится к некоторой целой функции \hat{c}_1 в топологии пространства $O(\mathbf{C})$. При этом $c_1 = \hat{c}_1 \circ \pi$.

Фиксируем $\lambda \in \mathbf{C}$, для которой выполняется условие: найдется $z_0 \in \tilde{\lambda} := \pi^{-1}(\lambda)$ такое, что $\mathcal{F}(z_0)\mathcal{G}(z_0) \neq 0$. Символом $A(\lambda)$ обозначим совокупность векторов $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{C}^2$, для которых $a_1 \mathcal{F}(z) + a_2 \mathcal{G}(z) = 0$ при любом $z \in \tilde{\lambda}$. В силу предложения 5.5 из [5] замкнутый подмодуль I является устойчивым тогда и только тогда, когда для каждого вектора $a \in A(\lambda)$ существуют обобщенные последовательности $r_1^\alpha, r_2^\alpha \in \mathbf{C}[\pi]$, такие, что $r_1^\alpha|_{\tilde{\lambda}} = a_1$, $r_2^\alpha|_{\tilde{\lambda}} = a_2$ и $r_1^\alpha \mathcal{F} + r_2^\alpha \mathcal{G} \rightarrow 0$ в топологии P .

Теорема 1. *Если для некоторого $\delta > 0$ и некоторой ограниченной тригонометрически выпуклой 2π -периодической функции $h(\theta)$, удовлетворяющей условию $\hat{h}(\theta) + \delta < h(\theta) + \delta < H_\Omega(\theta)$, нулевые множества $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$ можно упорядочить так, что выполнено (18), то замкнутый подмодуль I , порождаемый функциями \mathcal{F} и \mathcal{G} , является обильным.*

Доказательство. Зафиксируем точку $z_0 \in \mathbf{C}$ такую, что $\mathcal{F}(z_0)\mathcal{G}(z_0) \neq 0$. Функции $\mathcal{F}(z)/\mathcal{F}(z_0)$, $\mathcal{G}(z)/\mathcal{G}(z_0)$ порождают тот же подмодуль I , что и исходные, кроме того, они удовлетворяют условиям теоремы вместе с функциями \mathcal{F} и \mathcal{G} . Поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $\mathcal{F}(z_0) = 1$, $\mathcal{G}(z_0) = 1$. Для доказательства теоремы достаточно построить последовательности $P_j, Q_j \in \mathbf{C}[\pi]$ такие, что

$$P_j \mathcal{F} - Q_j \mathcal{G} \rightarrow 0 \text{ в } P \text{ и } P_j(z_0) = Q_j(z_0) = 1. \quad (22)$$

Так как любой главный подмодуль в P является обильным, то существуют последовательности $p_m, q_m \in \mathbf{C}[\pi]$ такие, что $p_m \mathcal{F} \rightarrow g \mathcal{F}$ и $q_m \mathcal{G} \rightarrow f \mathcal{G}$ по норме $\|\psi(z)\| := \sup_{z \in \mathbf{C}} |\psi(z)| \exp(-h(\theta)|z|)$.

Пусть $N_0 := \{n_j\}$, $\{\varepsilon_j\}$ — последовательности из леммы 3. Положим $\tilde{P}_j(\zeta) := \hat{p}_{m_j}(\zeta)\hat{G}_{n_j}(\zeta)$, $\tilde{Q}_j(\zeta) := \hat{q}_{m_j}(\zeta)\hat{F}_{n_j}(\zeta)$. Здесь $\{k_j\}$, $\{l_j\}$, $\{m_j\}$ — возрастающие последовательности натуральных чисел, \hat{p}_{m_j} , \hat{q}_{m_j} — последовательности полиномов. Покажем, как выбрать эти последовательности, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) последовательность $\tilde{L}_j(z) := \tilde{P}_j(z)\mathcal{F}(z) - \tilde{Q}_j(z)\mathcal{G}(z)$, где $\tilde{P}_j := \hat{P}_j \circ \pi$, $\tilde{Q}_j := \hat{Q}_j \circ \pi$, сходится к нулю в топологии P ;

2) существуют $\alpha > 0$ и $j_0 \in \mathbf{N}$, для которых при $j \geq j_0$ выполняется неравенство $|\tilde{P}_j(z_0)| \geq \alpha$.

Пусть $p_{m_j} := \hat{p}_{m_j} \circ \pi$, $q_{m_j} := \hat{q}_{m_j} \circ \pi$. Функция $\tilde{L}_j(z)$ отличается от функции $L_{n_j}(z)$ функциональными множителями $g(z)$ и $f(z)$, которые заменены аппроксимирующими их π -симметричными многочленами $p_{m_j}(z)$ и $q_{m_j}(z)$ соответственно. Представим $\tilde{L}_j(z)$ в виде суммы

$$\tilde{L}_j^{(1)}(z) + \tilde{L}_j^{(2)}(z) + \tilde{L}_j^{(3)}(z),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{L}_j^{(1)}(z) &:= [p_{m_j}(z) - g(z)] G_{n_j}(z) \mathcal{F}(z), & \tilde{L}_j^{(2)}(z) &:= g(z) G_{n_j}(z) \mathcal{F}(z) - f(z) F_{n_j}(z) \mathcal{G}(z), \\ \tilde{L}_j^{(3)}(z) &:= [f(z) - q_{m_j}(z)] F_{n_j}(z) \mathcal{G}(z). \end{aligned}$$

$\tilde{L}_j^{(2)}(z)$ совпадает с $L_{n_j}(z)$. По лемме 4 $|\tilde{L}_j^{(2)}(z)| \leq \varepsilon_j \exp((h(\theta) + \delta)|z|)$ для любого $z \in \mathbf{C}$. При фиксированном n_j значение $m_j = m(n_j)$ подбирается так, чтобы выполнялись неравенства



$|\tilde{L}_j^{(1)}(z)| \leq \varepsilon_j \exp((h(\theta) + \delta)|z|)$, $|\tilde{L}_j^{(3)}(z)| \leq \varepsilon_j \exp((h(\theta) + \delta)|z|)$ при всех $z \in \mathbf{C}$. Из вышеизложенного следует, что для всех j верна равномерная по $z \in \mathbf{C}$ оценка $|\tilde{L}_j(z)| \leq 3\varepsilon_j \exp((h(\theta) + \delta)|z|)$, и, значит, при указанном выборе m_j выполняется условие 1).

Далее, $\hat{p}_{m_j}(\zeta_0) \tilde{G}_{n_j}(\zeta_0) = p_{m_j}(z_0) \tilde{G}_{n_j}(z_0) \rightarrow \mathcal{G}(z_0) = 1$ при $j \rightarrow \infty$. Поэтому при некоторых $\alpha > 0$ и $j_0 \geq j'$ для всех $j \geq j_0$ будет выполнено неравенство $|\tilde{P}_j(z_0)| = |p_{m_j}(z_0) \tilde{G}_{n_j}(z_0)| \geq \alpha$. Это означает, что выполняется условие 2).

Далее построим по функциям \tilde{P}_j и \tilde{Q}_j функции $P_j, Q_j \in \mathbf{C}[\pi]$ такие, что выполнены соотношения (22). Это можно сделать следующим образом. Положим $P_j(z) = (\pi(z) - a_j) \tilde{P}_j(z)$, $Q_j(z) = (\pi(z) - a_j) \tilde{Q}_j(z) - \frac{\tilde{Q}_j(z_0)}{\tilde{P}_j(z_0)} + 1$, где $a_j = \zeta_0 - \frac{1}{\tilde{P}_j(z_0)}$, $j \geq j_0$. Тогда $P_j(z_0) = Q_j(z_0) = 1$ и

$$P_j(z)\mathcal{F}(z) - Q_j(z)\mathcal{G}(z) = (\pi(z) - a_j) \left(\tilde{P}_j(z)\mathcal{F}(z) - \tilde{Q}_j(z)\mathcal{G}(z) \right) - \left(1 - \frac{\tilde{Q}_j(z_0)}{\tilde{P}_j(z_0)} \right) \mathcal{G}(z).$$

Так как $|\pi(z) - a_j| \leq |\pi(z)| + |\zeta_0| + \frac{1}{\alpha}$ при $j \geq j_0$, и $\tilde{P}_j\mathcal{F} - \tilde{Q}_j\mathcal{G} \rightarrow 0$ в P , то первое слагаемое в правой части равенства стремится к нулю в P . При этом в силу условий 1) и 2)

$$1 - \frac{\tilde{Q}_j(z_0)}{\tilde{P}_j(z_0)} = \frac{1}{\tilde{P}_j(z_0)} \left(\tilde{P}_j(z_0) - \tilde{Q}_j(z_0) \right) = \frac{1}{\tilde{P}_j(z_0)} \left(\tilde{P}_j(z_0)\mathcal{F}(z_0) - \tilde{Q}_j(z_0)\mathcal{G}(z_0) \right) \rightarrow 0.$$

Значит, и второе слагаемое стремится к нулю в P . Теорема доказана. \square

С уменьшением δ усиливаются требования на близость точек из $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$, а возможный рост функций $f\mathcal{G}$ и $g\mathcal{F}$ приближается к экстремальному.

Теорема 2. Если для некоторого $\delta > 0$ и некоторой ограниченной тригонометрически выпуклой 2π -периодической функции $h(\theta)$, удовлетворяющей условию $\hat{h}(\theta) + \delta < h(\theta) + \delta < H_\Omega(\theta)$, нулевые множества $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$ можно упорядочить так, что выполнено (21), то замкнутый $\mathbf{C}[\pi]$ -подмодуль $I \subseteq P$, порождаемый функциями \mathcal{F} и \mathcal{G} , является обильным.

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и доказательство теоремы 1, но при оценке функции $L_{n_j}(z)$ вместо леммы 4 нужно использовать лемму 5.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ К СПЕКТРАЛЬНОМУ СИНТЕЗУ

Пусть $S_1, S_2 \in H^*$, \mathcal{F}, \mathcal{G} — характеристические функции функционалов S_1 и S_2 соответственно. Из теоремы двойственности, теоремы 1 и теоремы 2 вытекает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если целые функции \mathcal{F} и \mathcal{G} удовлетворяют условиям теоремы 1 или теоремы 2, то $\mathbf{C}[\pi]$ — ядро W_{S_1, S_2} системы функционалов $S_1, S_2 \in H^*$ допускает спектральный синтез.

Рассмотрим примеры применения теоремы 3. Во-первых, пусть произведения $\mathcal{F}(z) = \varphi(z)f(z)$, $\mathcal{G}(z) = \varphi(z)g(z)$ и частное $\frac{\mathcal{F}(z)\mathcal{G}(z)}{\varphi(z)} = \varphi(z)f(z)g(z)$ принадлежат P . Здесь $f = \hat{f} \circ \pi$, $g = \hat{g} \circ \pi$ и $\varphi, \hat{f}, \hat{g}$ — целые функции экспоненциального типа. В этом случае $F(z) \equiv G(z) \equiv 1$, следовательно, $S_n = 0$. Все условия теоремы 2 выполнены, значит, подпространство W_{S_1, S_2} допускает спектральный синтез.

Во-вторых, в условиях предыдущего примера предположим, что функция φ имеет вполне регулярный рост и ее индикатор $h_\varphi(\theta)$ удовлетворяет неравенству

$$h_{\mathcal{F}}(\theta) + h_{\mathcal{G}}(\theta) - h_\varphi(\theta) < H_\Omega(\theta), \tag{23}$$

где $h_{\mathcal{F}}(\theta)$ и $h_{\mathcal{G}}(\theta)$ — индикаторы функций \mathcal{F} и \mathcal{G} соответственно. В этом случае $h_f(\theta) = h_{\mathcal{F}}(\theta) - h_\varphi(\theta)$, $h_g(\theta) = h_{\mathcal{G}}(\theta) - h_\varphi(\theta)$. Из неравенства (23) следует, что функции $g\mathcal{F}$ и $f\mathcal{G}$ принадлежат P . Таким образом, условия теоремы 2 выполнены, значит, подпространство W_{S_1, S_2} допускает спектральный синтез.

В-третьих, предположим, что образующие \mathcal{F} и \mathcal{G} являются π -симметричными функциями и произведение $\mathcal{F}\mathcal{G}$ принадлежит P . В этом случае выполнение условий теоремы 2 следует из естественных представлений $\mathcal{F} = f$, $\mathcal{G} = g$. Так что подпространство W_{S_1, S_2} допускает спектральный синтез.



В заключение автор выражает свою признательность профессору А. Б. Шишкину за постановку задачи и полезные консультации.

Библиографический список

1. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // *Мат. сб.* 1972. Т. 88, № 1. С. 3–30.
2. Шишкин А. Б. Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // *Мат. сб.* 1998. Т. 189, № 9. С. 143–160.
3. Чернышев А. Н. Спектральный синтез для бесконечного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // *Труды ФОРА*. 2001. № 6. С. 75–87.
4. Волковая Т. А., Шишкин А. Б. Локальное описание целых функций // *Исследования по математическому анализу. Итоги науки. Юг России. Мат. форум*. Т. 8, ч. 1. Владикавказ : ЮМИ ВНИЦ РАН, 2014. С. 218–230.
5. Волковая Т. А., Шишкин А. Б. Локальное описание целых функций. Подмодули ранга 1 // *Владикавказ. мат. журн.* 2014. Т. 16, № 2. С. 14–28.
6. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // *Мат. сб.* 1972. Т. 88, № 3. С. 331–362.
7. Мерзляков С. Г. О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно оператора кратного дифференцирования // *Мат. заметки*. 1986. Т. 40, № 5. С. 635–639.
8. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // *Мат. сб.* 1991. Т. 182, № 11. С. 1559–1588.
9. Письменный Р. Г. Главные подмодули и инвариантные подпространства аналитических функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Славянск-на-Кубани, 2010. 104 с.
10. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.
11. Абузьярова Н. Ф. Об одном свойстве подпространств, допускающих спектральный синтез // *Мат. сб.* 1999. Т. 190, № 4. С. 3–22.

Synthesis in the Polynomial Kernel of Two Analytic Functionals

T. A. Volkovaya

Kuban State University, Branch in Slavyansk-on-Kuban, 200, Kubanskaya str., Slavyansk-on-Kuban, 353560, Russia, vta1987@yandex.ru

Let π be an entire function of minimal type and order $\rho = 1$ and let $\pi(D)$ be the corresponding differential operator. Maximal $\pi(D)$ -invariant subspace of the kernel of an analytic functional is called its $C[\pi]$ -kernel. $C[\pi]$ -kernel of a system of analytic functionals is called the intersection of their $C[\pi]$ -kernels. The paper describes the conditions which allow synthesis of $C[\pi]$ -kernels of two analytical functionals with respect to the root elements of the differential operator $\pi(D)$.

Key words: spectral synthesis, differential operator of infinite order, invariant subspaces, submodules of entire functions.

References

1. Krasichkov-Ternovskii I. F. Invariant subspaces of analytic functions. II. Spectral synthesis of convex domains. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 88, no. 1, pp. 3–30.
2. Shishkin A. B. Spectral synthesis for systems of differential operators with constant coefficients. Duality theorem. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1998, vol. 189, no. 9, pp. 1423–1440.
3. Chernyshev A. N. Spectral synthesis for infinitely differential operator with constant coefficients. Duality theorem. *Trudi FORA*, 2001, vol. 6, pp. 75–87 (in Russian).
4. Volkovaya T. A., Shishkin A. B. Local description of entire functions. *Mathematical forum*, vol. 8. Sequence analysis and related problems of mathematical modeling. Vladikavkaz, UMI VSC RAS and RSO-A, 2014, pp. 218–230 (in Russian).
5. Volkovaya T. A., Shishkin A. B. Local description of entire functions. Submodules of rank 1. *Vladikavkaz. Math. Journal*, 2014, vol. 16, no. 2, pp. 14–28 (in Russian).
6. Krasichkov-Ternovskii I. F. Invariant subspaces of analytic functions. III. On the extension of spectral synthesis. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 88, no. 3, pp. 331–352.
7. Merzlyakov S. G. Invariant subspaces of the operator of multiple differentiation. *Math. Notes*, 1983, vol. 33, no. 5, pp. 701–713.
8. Krasichkov-Ternovskii I. F. Spectral synthesis in a complex domain for a differential operator with constant coefficients. I: A duality theorem. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1991, vol. 182, no. 11, pp. 1559–1587.
9. Pismenny R. G. *Glavnye podmoduli i invariantnye podprostranstva analiticheskikh funkciy* : dis. kand. fiz.-mat. nauk [Principal submodules and invariant subspaces analytic functions : Dr. phys. and math. sci. diss.]. Slavyansk-on-Kuban, 2010, 104 p. (in Russian).



10. Levin B. Ja. *Distribution of Zeros of Entire Functions*. Translations of Math. Monographs, vol. 5, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1964; revised ed. 1980.

11. Abuzyarova N. F. A property of subspaces admitting spectral synthesis. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1999, vol. 190, no. 4, pp. 3–22.

УДК 517.54

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОСТЫМ КОНЦОМ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Е. Г. Ганенкова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Петрозаводский государственный университет, g_ek@inbox.ru

В 1954 г. М. Хайнс (M. Heins) доказал, что если A — аналитическое множество, содержащее бесконечность, то существует целая функция, для которой A является асимптотическим множеством. В статье получен аналог теоремы Хайнса: для произвольной многосвязной плоской области D с изолированным граничным фрагментом, аналитического множества A , содержащего бесконечность, и простого конца области D с носителем p построен пример аналитической в D функции, для которой множество асимптотических значений, связанных с p , совпадает с A .

Ключевые слова: асимптотическое значение, простой конец, аналитическая функция, аналитическое множество.

Пусть D — область из \mathbb{C} , f — определенная в D функция, $z_0 \in \partial D$ — достижимая граничная точка, т. е. существует кривая, лежащая в D , кроме конца z_0 .

Определение 1 [1, гл. 1.6, с. 21; 2, с. 336]. Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *асимптотическим значением* функции f в точке z_0 , если существует кривая Γ_a , целиком лежащая в D , кроме своего конца z_0 , такая, что

$$\lim_{\Gamma_a \ni z \rightarrow z_0} f(z) = a.$$

Кривая Γ_a называется *асимптотической кривой*, соответствующей асимптотическому значению a . Множество всех асимптотических значений (*асимптотическое множество*) функции f в точке z_0 обозначается $As(f, z_0)$.

По теореме Иверсена (F. Iversen) [1, гл. 1.6, с. 23; 3; 4, гл. 5.1, с. 224] для непостоянной целой функции f асимптотическое множество $As(f, \infty)$ содержит бесконечность. Также это множество является аналитическим (в смысле Суслина) [5], т. е. может быть представлено в виде

$$A = \bigcup_{(n_1, n_2, \dots)} \{A_{n_1} \cap A_{n_1 n_2} \cap A_{n_1 n_2 n_3} \cap \dots\},$$

где $A_{n_1 \dots n_k}$ — замкнутые множества, а объединение берется по всевозможным наборам (n_1, n_2, \dots) натуральных чисел (более подробную информацию об аналитических множествах можно найти, например, в [6, гл. VIII, § 32; 7, с. 135]).

В 1918 г. В. Гросс (W. Gross) [8] построил пример целой функции, множеством асимптотических значений которой является расширенная комплексная плоскость. В 1954 г. М. Хайнс (M. Heins) [9] доказал, что для любого аналитического множества A , $\infty \in A$, существует целая функция, асимптотическое множество которой совпадает с A .

В [10, 11] рассматривались функции более общего вида: аналитические в некоторой плоской области произвольной связности с изолированным граничным фрагментом.

Определение 2 [12]. Область $D \subset \mathbb{C}$ имеет *изолированный граничный фрагмент*, если выполняется одно из условий:

- (I) существуют континуум $K \subset \partial D$ и открытое множество U такие, что $K \subset U$ и $(\partial D \setminus K) \cap U = \emptyset$;
- (II) существуют простая кривая $\Gamma \subset \partial D$ с различными концами ξ, η и открытый круг B такие, что $\xi, \eta \in \partial B$, $\Gamma \setminus \{\xi, \eta\} \subset B$ и $(\partial D \setminus \Gamma) \cap B = \emptyset$.
- (III) существует изолированная точка множества ∂D .

Если выполняется условие (I), (II) или (III), то говорят, что D имеет изолированный граничный фрагмент I, II или III рода соответственно.

В [11] был получен следующий аналог результата М. Хайнса.



Теорема А. Пусть D — область с изолированным граничным фрагментом F . Пусть точка $z_0 \in F$. Если F — фрагмент I рода, то будем дополнительно предполагать, что z_0 — достижимая граничная точка, являющаяся носителем некоторого простого конца области D . Пусть A — аналитическое множество, содержащее бесконечность. Тогда существуют аналитическая и однолистная в D функция φ и целая функция Φ , для которых $As(\Phi \circ \varphi, z_0) = A$. Если A — бесконечное множество, то

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0} \frac{\ln \ln |\Phi(\varphi(z))|}{\ln |\varphi(z)|} = \infty.$$

Ранее в [10] теорема А была доказана в случае $A = \overline{\mathbb{C}}$.

Напомним определение простого конца односвязной области. Для этого введем необходимые определения (см., например, [1, гл. 9, с. 220; 13, гл. II, § 3, с. 42; 14, гл. 2.4, с. 27]).

Определение 3. Простая кривая с концами на границе односвязной области D_0 , остальные точки которой лежат в D_0 , называется *разрезом* области D_0 .

Определение 4. Последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ разрезов области D_0 называется *цепью* разрезов, если выполнены следующие условия:

- 1) никакие два разреза не имеют общих точек (включая и их концы);
- 2) разрез C_n разделяет область D_0 на две подобласти, одна из которых содержит C_{n-1} , другая C_{n+1} ;
- 3) $\text{diam } C_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{C'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторые цепи разрезов области D_0 . Через V_n (V'_n), $n = 1, 2, \dots$, будем обозначать ту из двух компонент $D_0 \setminus C_n$ ($D_0 \setminus C'_n$), которая не содержит разреза C_0 (C'_0).

Определение 5. Две цепи $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{C'_n\}_{n=1}^{\infty}$ называются *эквивалентными*, если для достаточно большого m существует такой номер n , что $V_n \subset V'_m$ и $V'_n \subset V_m$.

Определение 6. *Простым концом* односвязной области D_0 называется класс эквивалентных цепей, *носитель* простого конца определяется как $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n$.

Заметим, что носитель простого конца области D_0 — множество на ∂D_0 , которое может быть континуальным.

В теореме А под носителем p простого конца области D (может быть многосвязной) понимается носитель p простого конца односвязной области D_0 , обладающей свойствами $D \subset D_0$, $\partial D_0 = K$ — граничная компонента области D , содержащая p .

Кроме асимптотических значений функции в точке рассматривают также асимптотические значения, связанные с подмножеством E на ∂D . Пусть D — плоская область, $E \subset \partial D$, f — определенная в D функция.

Определение 7 [2, с. 337]. Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *асимптотическим значением* функции f , *связанным с E* , если существует кривая $\Gamma_a \subset D$ с параметризацией $v_a(t)$, $t \in [0; 1)$, $\text{dist}(v_a(t), E) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 1$ — такая, что

$$\lim_{\substack{\text{dist}(z, E) \rightarrow 0 \\ z \in \Gamma_a}} f(z) = a.$$

Множество всех таких значений обозначают $As(f, E)$.

Обобщим теорему А, заменяя граничную точку z_0 области D носителем некоторого простого конца.

Теорема 1. Пусть D — область с изолированным граничным фрагментом F , $p \in F$ — носитель простого конца области D . Пусть A — аналитическое множество, содержащее бесконечность. Тогда существуют аналитическая и однолистная в D функция φ и целая функция Φ такие, что $As(\Phi \circ \varphi, p) = A$. Если A — бесконечное множество, то

$$\overline{\lim}_{\text{dist}(z, p) \rightarrow 0} \frac{\ln \ln |\Phi(\varphi(z))|}{\ln |\varphi(z)|} = \infty.$$

Доказательство. Пусть D — область с изолированным граничным фрагментом F , $p \in F$ — носитель простого конца области D . Чтобы доказать теорему 1 достаточно рассмотреть случай фрагмента I рода. Если же F — фрагмент II или III рода, то носителем простого конца $p \in F$ всегда является точка, т. е. получаем утверждение известной теоремы А.



Рассмотрим односвязную область D_0 такую, что $\partial D_0 = F$, $D \subset D_0$. По теореме Римана существует аналитическая функция ψ , однолистная, отображающая D_0 на верхнюю полуплоскость $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$. Функцию ψ подберем так, чтобы простому концу области D с носителем p соответствовала точка $0 \in \partial\Pi$. Это соответствие следует понимать так (см., например, [13, гл. II, § 3; 14, с. 31]): $\Pi \ni z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $\text{dist}(\psi^{-1}(z_n), p) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому, если γ — кривая в Π с концом в нуле и параметризацией $\nu(t), t \in [0; 1)$, то $\psi^{-1}(\gamma)$ — кривая в D_0 , причем $\text{dist}(\psi^{-1}(\nu(t)), p) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 1-$.

Обозначим $D_1 = \psi(D)$. Тогда $D_1 \subset \Pi$ и в силу того что F — изолированный граничный фрагмент, $\partial D_1 \setminus \mathbb{R}$ содержится в некотором компактном множестве из Π . Поэтому существует полукруг

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho, \text{Im}z > 0\},$$

целиком лежащий в D_1 .

Применим к D_1 аналитическую функцию:

$$w(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Образом D_1 под действием $w(z)$ является область D_2 , содержащаяся в области $H = \mathbb{C} \setminus \{t, t \geq 0\}$, причем $\partial D_2 \setminus \{t, t \geq 0\}$ содержится в круге $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/\rho^2\}$.

Пусть Φ — целая функция, построенная в [9], такая, что $\text{As}(\Phi, \infty) = A$. Пусть γ_a — ее асимптотические кривые, соответствующие $a \in A$. В [11] исследовалось местоположение кривых γ_a . Было показано, что существует простая кривая l , идущая в бесконечность, и такая, что $\gamma_a \cap l = \emptyset$ для всех $a \in A$. Обозначим $G = \mathbb{C} \setminus l$. По теореме Римана существует аналитическая однолистная функция τ , отображающая H на G . Функцию τ подберем таким образом, что $H \ni w_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $G \ni \tau(w_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $D_3 = \tau(D_2) \subset G$ и $\partial D_3 \setminus l$ лежит в некотором круге $K = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| < R\}$.

Чтобы построить искомую аналитическую и однолистную в D функцию φ , возьмем суперпозицию $\varphi = \tau \circ w \circ \psi$. По построению φ отображает D на D_3 и простому концу области D (т. е. области D_0) с носителем p соответствует бесконечность. Для $a \in A$ положим

$$\Gamma_a = \varphi^{-1}(\gamma_a \cap K).$$

Тогда

$$\lim_{\substack{\text{dist}(z,p) \rightarrow 0 \\ z \in \Gamma_a}} \Phi(\varphi(z)) = \lim_{\gamma_a \ni \tau \rightarrow \infty} \Phi(\tau) = a,$$

т. е. $\text{As}(\Phi \circ \varphi, p) = A$.

Если A — бесконечное множество, то по теореме Л. В. Альфорса (L. V. Ahlfors) [15] (см. также [4, с. 234]) Φ — функция бесконечного порядка. Это означает, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \max_{|t|=r} |\Phi(t)|}{\ln r} = \infty.$$

Следовательно, существует последовательность $t_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |\Phi(t_n)|}{\ln |t_n|} = \infty.$$

Предположим, что существует ее подпоследовательность $\{t_n\}$ (сохраним обозначение), содержащаяся в D_3 . В [11] показано, что свойство $\gamma_a \cap l = \emptyset, \forall a \in A$, выполняется не только для кривой l , но и для некоторой другой кривой l' , идущей в бесконечность, $l \cap l' = \emptyset$. Поэтому, если подпоследовательности $\{t_n\} \subset D_3$ не существует, мы добьемся нужного свойства ($\{t_n\} \subset D_3$) заменой l на l' в определении области G .

Пусть $z_n = \varphi^{-1}(t_n)$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln |\Phi(\varphi(z_n))|}{\ln |\varphi(z_n)|} = \infty.$$



Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\text{dist}(z,p) \rightarrow 0} \frac{\ln \ln |\Phi(\varphi(z))|}{\ln |\varphi(z)|} = \infty. \quad \square$$

Следствие. Если в теореме 1 взять непустое аналитическое множество A , не обязательно содержащее бесконечность, то можно построить мероморфную в D функцию f , обладающую свойством $As(f, p) = A$. Таковой является функция

$$\frac{1}{\Phi \circ \varphi(z)} + a_0,$$

где $a_0 \in A$, а Φ и φ — функции из теоремы 1, для которых

$$As(\Phi \circ \varphi, p) = \tilde{A} = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = \frac{1}{z - a_0}, z \in A \right\}, \quad \infty \in \tilde{A}.$$

Пусть f — функция, аналитическая в плоской области D с изолированным граничным фрагментом F . Рассмотрим множество простых концов с носителями $p_\alpha \in F$, для которых множество $As(f, p_\alpha)$ состоит более, чем из одной точки. Множество таких простых концов не более чем счетно. Этот факт следует из теоремы Ф. Бейджмила (F. Bagemihl) о точках неопределенности [16] (см. также [1, гл. 4.7, с. 118]).

В приведенной теореме 2 для заданных аналитического множества A , $\infty \in A$ и области D с изолированным граничным фрагментом F I рода строится пример аналитической в D функции f , обладающей свойством $As(f, p_n) = A_n$ для некоторой последовательности простых концов с носителями $p_n \in F$, где $A_1 = A$, а множества A_n , $n = 2, 3, \dots$, — аналитические множества, полученные из A линейным преобразованием. Таким образом, в случае, когда $A = \overline{\mathbb{C}}$, получаем пример функции, имеющей максимальное асимптотическое множество для максимального по мощности множества простых концов с носителями на F . Результат, подобный теореме 2 (теорема В), был получен в [11] для области с фрагментом II рода (носителем простого конца в этом случае всегда является точка, а в теореме 2 p_n — это, вообще говоря, континуальные множества).

Теорема В. Пусть D — область с изолированным граничным фрагментом F II рода, A — аналитическое множество, $\infty \in A$. Тогда существуют аналитическая в D функция f и счетное множество точек $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, принадлежащих F , такие, что $As(f, z_n) = A_n$, где $A_1 = A$, $A_n = c^{1-n}A + b_n$, $n = 2, 3, \dots$, c — любая константа, обладающая свойством $|c| > 1$ и b_n — некоторые константы.

С помощью теоремы В докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть D — область с изолированным граничным фрагментом F I рода, A — аналитическое множество, $\infty \in A$. Тогда существует последовательность простых концов области D с носителями $p_n \in F$ и аналитическая в D функция f , обладающая свойством $As(f, p_n) = A_n$, где $A_1 = A$, $A_n = c^{1-n}A + b_n$, $n = 2, 3, \dots$, c — любая константа, обладающая свойством $|c| > 1$, b_n — некоторые константы.

Доказательство. Рассмотрим односвязную область D_0 такую, что $\partial D_0 = F$ и $D \subset D_0$. Отобразим ее с помощью некоторой аналитической однолистной функции g на единичный круг Δ . Тогда $D_1 = g(D) \subset \Delta$ — область с изолированным граничным фрагментом II рода. Этим фрагментом является дуга $\Gamma \subset \partial \Delta$. По теореме В существуют последовательность $w_n \in \Gamma$ и аналитическая в D_1 функция h , для которых $As(h, w_n) = A_n$. По теореме о соответствии границ (см., например, [13, гл. II, § 3; 14, с. 30]) точкам $w_n \in \Gamma$ соответствуют простые концы области D с носителями $p_n \in F$.

Пусть $\gamma_{a,n}$ — кривые из D_1 с концом в w_n такие, что

$$\lim_{\gamma_{a,n} \ni w \rightarrow w_n} h(w) = c^{1-n}a + b_n, \quad a \in A.$$

Тогда $\Gamma_{a,n} = g^{-1}(\gamma_{a,n})$ — кривые в D с параметризацией $\nu_{a,n}(t)$, $t \in [0; 1)$, такие, что

$$\text{dist}(\nu_{a,n}(t), p_n) \xrightarrow{t \rightarrow 1-} 0.$$

Следовательно, для всех $a \in A$

$$\lim_{\substack{\text{dist}(z, p_n) \rightarrow 0 \\ z \in \Gamma_{a,n}}} h(g(z)) = \lim_{\gamma_{a,n} \ni w \rightarrow w_n} h(w) = c^{1-n}a + b_n.$$

Поэтому $As(h \circ g, p_n) = A_n$, $n = 1, 2, \dots$, т. е. $f = h \circ g$ — искомая функция. □



Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00510) и программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

Библиографический список

1. Коллингвуд Э., Ловатер Л. Теория предельных множеств. М. : Мир, 1971. 312 с.
2. Математическая энциклопедия / гл. ред. И. М. Виноградов : в 5 т. Т. 1. А–Г. М. : Сов. энцикл., 1977. 576 с.
3. Iversen F. Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Helsinki : Imprimerie de la Société de littérature finnoise, 1914.
4. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М. : Наука, 1970. 592 с.
5. Mazurkiewicz S. Sur les points singuliers d'une fonction analytique // Fund. Math. 1931. Vol. 17, iss. 1. P. 26–29.
6. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М. ; Л. : Объединенное науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 1937. 305 с.
7. Sierpinski W. General topology. Toronto : Univ. Toronto Press, 1952. 304 p.
8. Gross W. Eine ganze Funktion, für die jede Komplexe Zahl Konvergenzwert ist // Math. Ann. 1918. Vol. 79, iss. 1–2. P. 201–208.
9. Heins M. The set of asymptotic values of an entire function // Proc. of the Scandinavian Math. Congress. Lund, 1953, 1954. P. 56–60.
10. Ganenkova E. G., Starkov V. V. Asymptotic values of functions, analytic in planar domains // Проблемы анализа. Issues of Analysis. 2013. Т. 2(20), № 1. С. 38–42.
11. Ganenkova E. G., Starkov V. V. Analytic in planar domains functions with preassigned asymptotic set // J. Appl. Anal. 2014. Vol. 20, iss. 1. P. 7–14. DOI: 10.1515/jaa2014-0002.
12. Liczberski P., Starkov V. V. On locally biholomorphic mappings from multi-connected onto simply connected domains // Ann. Polon. Math. 2005. Vol. 85, № 2. P. 135–143.
13. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966. 628 с.
14. Pommerenke Ch. Boundary behaviour of conformal maps. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1992. 301 p.
15. Ahlfors L. V. Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen // Acta Soc. Sci. Fenn. Nova Series A. 1930. Vol. 1, № 9. P. 1–40.
16. Bagemihl F. Curvilinear cluster sets of arbitrary functions // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1955. Vol. 41, № 6. P. 379–382.

Asymptotic Values of Analytic Functions Connected with a Prime End of a Domain

E. G. Ganenkova

Petrozavodsk State University, 33, Lenina ave., Petrozavodsk, 185910, Russia, g_ek@inbox.ru

In 1954 M. Heins proved that for any analytic set A , containing the infinity, there exists an entire function with asymptotic set A . In the article we prove the following analog of Heins's theorem: for a multi-connected planar domain D with an isolated boundary fragment, an analytic set A , $\infty \in A$, and a prime end of D with impression p there exists an analytic in D function f such that A is the set of asymptotic values of f connected with p .

Key words: asymptotic set, prime end, analytic function, analytic set.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-01-00510) and by the program of strategic development of Petrozavodsk State University in the framework of implementation of complex of measures on development scientific research.

References

1. Collingwood E. F., Lohwater A. J. *The theory of cluster sets*. Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press, 1966, 213 p. (Rus. ed. : Collingwood E., Lohwater A. *Teoriya predel'nykh mnozhestv*. Moscow, Mir, 1971, 312 p.)
2. *Encyclopedia of Mathematics* : ed. I. M. Vinogradov, Vol. 1 : A–G, Moscow, Sovetskaja Jenciklopedija, 1977, 576 p. (in Russian).
3. Iversen F. *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, Helsinki, Imprimerie de la Société de littérature finnoise, 1914.
4. Goldberg A. A., Ostrovskii I. V. *Value Distribution of Meromorphic Functions*. Transl. Math. Mono., vol. 236, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2008, 499 p. (Rus. ed. : Goldberg A. A., Ostrovskii I. V. *Raspredelenie znachenii meromorfnykh funktsii*. Moscow, Nauka, 1970, 592 p.)
5. Mazurkiewicz S. Sur les points singuliers d'une fonction analytique. *Fund. Math.*, 1931, vol. 17, iss. 1, pp. 26–29.
6. Hausdorff F. *Teoriya mnozhestv* [Set theory]. Moscow, Leningrad, Ob'edinennoe nauchno-tehnicheskoe izdatel'stvo NKTP USSR, 1937, 305 p. (in Russian).



7. Sierpinski W. *General topology*. Toronto, Univ. Toronto Press, 1952, 304 p.
8. Gross W. Eine ganze Funktion, für die jede Komplexe Zahl Konvergenzwert ist. *Math. Ann.*, 1918, vol. 79, iss. 1–2, pp. 201–208.
9. Heins M. The set of asymptotic values of an entire function. *Proceedings of the Scandinavian Math. Congress*, Lund, 1953, 1954, pp. 56–60.
10. Ganenkova E. G., Starkov V. V. Asymptotic values of functions, analytic in planar domains. *Issues of Analysis*, 2013, vol. 2(20), no. 1, pp. 38–42.
11. Ganenkova E. G., Starkov V. V. Analytic in planar domains functions with preassigned asymptotic set. *J. Appl. Anal.*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 7–14. DOI: 10.1515/jaa2014-0002.
12. Liczberski P., Starkov V. V. On locally biholomorphic mappings from multi-connected onto simply connected domains. *Ann. Polon. Math.*, 2005, vol. 85, no. 2, pp. 135–143.
13. Goluzin G. M. *Geometricheskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo* [Geometric theory of functions of complex variables]. Moscow, Nauka, 1966, 628 p.
14. Pommerenke Ch. *Boundary behaviour of conformal maps*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1992, 301 p.
15. Ahlfors L. V. Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. *Acta Soc. Sci. Fenn. Nova Series A*, 1930, vol. 1, no. 9, pp. 1–40.
16. Bagemihl F. Curvilinear cluster sets of arbitrary functions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1955, vol. 41, no. 6, pp. 379–382.

УДК 519.853

О ПОДХОДЕ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ШАРОМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

С. И. Дудов¹, М. А. Осипцев²

¹ Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, DudovSI@info.sgu.ru

² Старший преподаватель кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Osipcevm@gmail.com

Рассматривается конечномерная задача о наилучшем приближении в метрике Хаусдорфа выпуклого тела шаром произвольной нормы с фиксированным радиусом. Показано, что в случае, когда приближаемое тело и шар нормы являются многогранниками, задача сводится к задаче линейного программирования. Это позволяет предложить получение приближённого решения задачи через предварительную аппроксимацию приближаемого компакта и единичного шара нормы многогранниками.

Ключевые слова: выпуклое тело, метрика Хаусдорфа, функция расстояния, аппроксимация, субдифференциал.

1. Пусть D — заданное выпуклое тело из конечномерного действительного пространства \mathbb{R}^p , а $n(x)$ — некоторая норма на \mathbb{R}^p . Рассматривается задача

$$\phi(x, r) \equiv h(D, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (1)$$

Здесь $Bn(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) \leq r\}$ — шар радиуса r с центром в точке x ,

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} n(a - b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} n(a - b) \right\} — \quad (2)$$

расстояние Хаусдорфа между множествами A и B , индуцированное нормой $n(\cdot)$.

Впервые задача о приближении выпуклого компакта евклидовым шаром в метрике Хаусдорфа, причём произвольного радиуса, т. е. когда функция $\phi(x, r)$ минимизируется по $(x, r) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+$, рассматривалась в [1]. Для случая произвольной нормы эта задача исследовалась в работе [2].

В работе [3] показано, что задача (1) своими решениями для значений радиуса r из определённых диапазонов, выражает решения задач об описанном и вписанном шарах для D и задачи наилучшего приближения шаром произвольного радиуса. Авторам известны и другие задачи по шаровым оценкам выпуклого компакта (например, задача об асферичности [4]), на которое распространяется это универсальное свойство задачи (1).

Важное значение имеет полученная в [2] формула, выражающая расстояние Хаусдорфа (2) между выпуклым компактом D и шаром $Bn(x, r)$:

$$h(D, Bn(x, R)) = \max\{R(x) - r, P(x) + r\}. \quad (3)$$



Здесь функция $R(x)$ выражает расстояние в норме $n(\cdot)$ от точки x до самой удалённой от неё точки из D , т. е.

$$R(x) = \max_{y \in D} n(x - y),$$

а функция $P(x)$ определяется формулой

$$P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x),$$

где $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p} \setminus D$, $\rho_A(x) = \min_{y \in A} n(x - y)$ — расстояние от точки x до множества A в норме $n(\cdot)$.

Известно [5–7], что функции $R(x)$ и $\rho_D(x)$ выпуклы на \mathbb{R}^p , а $\rho_\Omega(x)$ вогнута на D . Функция $P(x)$, введённая в [8], также является выпуклой на \mathbb{R}^p . Эти факты позволяют считать задачу (1) задачей выпуклого программирования и применять для её численного решения широкий спектр методов оптимизации, например [6, 9], используя формулы субдифференциалов функций $R(x)$ и $P(x)$ (см., например, [2]).

Цель данной работы — показать, что в случае, когда выпуклое тело D и шар нормы $n(\cdot)$ являются многогранниками, задача (1) сводится к задаче линейного программирования. Этот факт может быть положен в основу подхода к получению приближённого решения задачи (1) через предварительную аппроксимацию компакта D и единичного шара нормы $n(\cdot)$ многогранниками. Отметим, что данный приём уже применялся для других задач по шаровым оценкам выпуклого компакта, например, [4, 10].

В работе будут использованы следующие обозначения:

\bar{A} , $\text{int } A$, $\text{co } A$ — замыкание, внутренность, выпуклая оболочка множества A ;

$\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение элементов x и y ;

$K(x, A)$ — конус возможных направлений множества A в точке x ;

K^+ — сопряжённый конус к конусу K ;

$K(A)$ — коническая оболочка множества A ;

$\partial f(x)$ — субдифференциал выпуклой функции в точке x ;

$n^*(x)$ — полярная норма по отношению к норме $n(\cdot)$;

$0_p = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$, $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

2. Если шар нормы $n(\cdot)$ является многогранником, норма представима в виде

$$n(x) = \max_{i=1, m} |\langle B_i, x \rangle|. \quad (4)$$

При этом вектора $\{\pm B_i : i = \overline{1, m}\}$ — это нормали к граням многогранников, являющихся шарами. Естественно считать $\{\pm B_i : i = \overline{1, m}\}$ угловыми точками множества $M = \text{co}\{\pm B_i : i = \overline{1, m}\}$ и $0_p \in \text{int } M$. Очевидно, полярная норма $n^*(v) = \max_{n(x) \leq 1} \langle v, x \rangle$ является функцией Минковского множества M .

Для нормы (4) легко получается представление функции $R(x)$ в виде максимума от аффинных функций:

$$R(x) = \max_{i=1, m} \max\{\langle B_i, x \rangle - b_{i_1}, b_{i_2} - \langle B_i, x \rangle\}, \quad (5)$$

где $b_{i_1} = \min_{y \in D} \langle B_i, y \rangle$, $b_{i_2} = \max_{y \in D} \langle B_i, y \rangle$.

Пусть также выпуклое тело D является многогранником, заданным в виде

$$D = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_j, y \rangle \leq a_j, j = \overline{1, l}\}, \quad (6)$$

где $A_j \in \mathbb{R}^p$, $a_j \in \mathbb{R}$. Предполагается, что $0_p \in \text{int } \text{co}\{A_j : j = \overline{1, l}\}$, а также без потери общности $n^*(A_j) = 1$, $j = \overline{1, l}$. Очевидно, для точки $x \in D$ справедливо

$$\rho_\Omega(x) = \min_{j=1, l} \rho_{\omega_j}(x), \quad (7)$$

где $\omega_j = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_j, y \rangle - a_j = 0\}$, $j = \overline{1, l}$, — гиперплоскости, образующие грани многогранника D . Известно, что

$$\rho_{\omega_j}(x) = \frac{\langle A_j, y \rangle - a_j}{n^*(A_j)}. \quad (8)$$



Поэтому из (6)–(8), учитывая $n^*(A_j) = 1$, получаем:

$$\rho_\Omega(x) = \min_{j=1, l} \{a_j - \langle A_j, x \rangle\}, \quad \forall x \in D. \quad (9)$$

3. Теперь, как и для функции $R(x)$ (см. (5)), получим представление функции $P(x)$ в виде максимума от аффинных функций. Обозначим $G(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^p : \rho_D(x) \leq \alpha\}$. Нетрудно доказать, что справедлива

Лемма 1. Если $\alpha \geq 0$, то

$$G(\alpha) = D + Bn(0_p, \alpha). \quad (10)$$

Поскольку множества D и $Bn(0_p, \alpha)$ являются многогранниками, то из леммы 1 вытекает, что и множество $G(\alpha)$ также является многогранником. Предположим, что нам известно его представление в виде

$$G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j, y \rangle \leq d_j(\alpha), j = \overline{1, k}\}, \quad (11)$$

где $C_j \in \mathbb{R}^p$, $d_j(\alpha) \in \mathbb{R}$, $n^*(C_j) = 1$ и все гиперплоскости

$$\{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j, y \rangle = d_j(\alpha), j = \overline{1, k}\}$$

являются опорными к $G(\alpha)$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что набор нормалей $\{C_j : j = \overline{1, k}\}$ к граням многогранника $G(\alpha)$ можно считать инвариантными относительно значений $\alpha > 0$. Как следует из (4), (6) и (10), в этот набор входят $\{A_j : j = \overline{1, l}\}$ и $\{B_i : i = \overline{1, m}\}$, но при этом, как показывают простые примеры, могут содержаться и другие элементы. Вопрос практического получения набора $\{C_j : j = \overline{1, k}\}$ обсудим в § 4.

Лемма 2. Для точек $x \notin D$ справедлива формула

$$\rho_D(x) = \max_{j=1, k} \{\langle C_j, x \rangle - c_j\}, \quad (12)$$

где $c_j = \max_{y \in D} \langle C_j, y \rangle$.

Доказательство. Гиперплоскости

$$\pi_j \equiv \{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j, y \rangle = c_j\}, \quad j = \overline{1, k}$$

являются опорными для тела D , причём

$$D \subset \pi_j^+ \equiv \{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j, y \rangle \leq c_j\}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Поэтому имеют место неравенства

$$\rho_D(x) \geq \rho_{\pi_j^+}(x), \quad j = \overline{1, k}. \quad (13)$$

Поскольку $n^*(C_j) = 1$, то, учитывая формулу (8) расстояния от точки до гиперплоскости, получаем:

$$\rho_{\pi_j^+}(x) = \max\{0, \langle C_j, x \rangle - c_j\}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует

$$\rho_D(x) \geq \max_{j=1, k} \{\langle C_j, x \rangle - c_j\}. \quad (15)$$

Точка $x \notin D$ является граничной для множества $G(\alpha)$ при $\alpha = \rho_D(x)$, а значит, ввиду представления $G(\alpha)$ в виде (11),

$$J(x) \equiv \{j \in [1 : k] : \langle C_j, x \rangle = d_j(\alpha)\} \neq \emptyset.$$

Покажем, что для произвольного индекса $j_0 \in J(x)$ выполняется

$$\rho_D(x) = \rho_{\pi_{j_0}^+}(x). \quad (16)$$

Предположим противное, т. е. учитывая (13),

$$\rho_D(x) > \rho_{\pi_{j_0}^+}(x). \quad (17)$$



Пусть точка y_0 принадлежит проекции точки x на гиперплоскость π_{j_0} :

$$\langle C_{j_0}, y_0 \rangle = c_{j_0}, \quad n(x - y_0) = \rho_{\pi_{j_0}}(x). \quad (18)$$

Гиперплоскость π_{j_0} является опорной к D , а гиперплоскость $\{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_{j_0}, y \rangle = d_{j_0}(\alpha)\}$, содержащая точку x , является опорной к $G(\alpha)$. Поэтому из (10), (11) следует $D \subset \text{int}G(\alpha)$, а следовательно,

$$\langle C_{j_0}, x \rangle > \langle C_{j_0}, y_0 \rangle, \quad (19)$$

$$\rho_{\pi_{j_0}^+}(x) = \rho_{\pi_{j_0}}(x) = \langle C_{j_0}, x \rangle - c_{j_0}. \quad (20)$$

Пусть точка $z \in \pi_{j_0} \cap D$. Рассмотрим точку

$$z^* = z + \frac{\rho_D(x)}{n(x - y_0)}(x - y_0) \in D + Bn(0_p, \alpha). \quad (21)$$

Поскольку точки z и y_0 содержатся в π_{j_0} , то $\langle C_{j_0}, z \rangle = \langle C_{j_0}, y_0 \rangle$. Учитывая также $\langle C_{j_0}, x \rangle = d_{j_0}(\alpha)$, из (17)–(21) получаем:

$$\langle C_{j_0}, z^* \rangle = \langle C_{j_0}, z \rangle + \frac{\rho_D(x)}{n(x - y_0)} \langle C_{j_0}, x - y_0 \rangle = \left(\frac{\rho_D(x)}{n(x - y_0)} - 1 \right) \langle C_{j_0}, x - y_0 \rangle + d_{j_0}(\alpha) > d_{j_0}(\alpha).$$

Это противоречит тому, что $z^* \in D + Bn(0_p, \alpha)$ ввиду (10), (11). Тем самым мы доказали справедливость равенства (16). А тогда ввиду (20) имеем:

$$\rho_D(x) = \langle C_{j_0}, x \rangle - c_{j_0}. \quad (22)$$

Из (15) и (22) получаем (12). Лемма доказана.

Теорема 1. Для любого $x \in \mathbb{R}^p$ справедлива формула

$$P(x) = \max_{j=1, k} \{ \langle C_j, x \rangle - c_j \}, \quad (23)$$

где $\{C_j : j = \overline{1, k}\}$ — нормали к граням многогранника $G(\alpha)$ в представлении (11), причём $n^*(C_j) = 1$, а $c_j = \max_{y \in D} \langle C_j, y \rangle$.

Доказательство. Гиперплоскости $\pi_j = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j, y \rangle = c_j\}$, $j = \overline{1, k}$, являются опорными к D . Поэтому расстояние от точки $x \in D$ до любой из них не меньше чем до множества $\Omega = \mathbb{R}^p \setminus D$. Таким образом, имеем:

$$\rho_\Omega(x) \leq \min_{j=1, k} \rho_{\pi_j}(x) = \min_{j=1, k} \{c_j - \langle C_j, x \rangle\}, \quad x \in D. \quad (24)$$

Как указывалось в замечании 1, набор $\{A_j : j = \overline{1, l}\}$ входит в набор нормалей $\{C_j : j = \overline{1, k}\}$. Поэтому и опорные гиперплоскости $\omega_j = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_j, y \rangle = a_j\}$, $j = \overline{1, l}$ к многограннику D (см. (6)) входят в набор $\{\pi_j : j = \overline{1, k}\}$. А тогда из (9) и (24) следует

$$\rho_\Omega(x) = \min_{j=1, k} \{c_j - \langle C_j, x \rangle\}, \quad \forall x \in D. \quad (25)$$

Теперь из (12) и (25) для функции $P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x)$ получаем формулу (23). Теорема доказана.

4. Рассмотрим вопрос практического отыскания набора нормалей $\{C_j : j = \overline{1, k}\}$ через заданные наборы нормалей $\{A_j : j = \overline{1, l}\}$ в (6) и $\{B_j : j = \overline{1, m}\}$ в (4).

Известна [7] формула субдифференциала функции $\rho_D(x)$ для точки $x \notin D$:

$$\partial \rho_D(x) = \partial n(x - z) \bigcap -K^+(z, D), \quad (26)$$

где z — любая точка из $Q^p(x, D) = \{y \in D : n(x - y) = \rho_D(x)\}$. Исходя из задания тела D в виде (6), нетрудно получить формулу [6, гл. 2, § 6]

$$-K^+(z, D) = K(\text{co}\{A_j : j \in I(z)\}). \quad (27)$$



Здесь $I(z) = \{j \in [1 : l] : \langle A_j, z \rangle = a_j\}$. Известна также формула субдифференциала нормы [5]:

$$\partial n(x) = \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^p : n^*(v) \leq 1\}, & \text{если } x = 0_p, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : n^*(v) = 1, \langle v, x \rangle = n(x)\}, & \text{если } x \neq 0_p. \end{cases} \quad (28)$$

Из формы (4) представления нормы $n(\cdot)$ вытекает, что многогранник $M = \text{co}\{\pm B_i : i = \overline{1, m}\}$ является единичным шаром полярной нормы, т.е. $M = \{v \in \mathbb{R}^p : n^*(v) \leq 1\}$. Поэтому в силу (28) возможными значениями для $\partial n(x)$ при $x \neq 0_p$ являются вершины и грани многогранника M размерности от 1 до p . Таким образом, пересечение многогранника $\partial n(x - z)$ с многогранным конусом (27) также является многогранником.

С другой стороны, с соответствии с субдифференциальным исчислением (см. например, [6, гл. 1, § 5]) из (12) следует

$$\partial \rho_D(x) = \text{co}\{C_j : j \in J^p(x)\}, \quad x \notin D, \quad (29)$$

где $J^p(x) = \{j \in [1 : k] : \rho_D(x) = \langle C_j, x \rangle - c_j\}$. Это означает, что вектора $\{C_j : j = \overline{1, k}\}$ является вершинами для многогранников $\partial \rho_D(x)$ в различных точках $x \notin D$. Таким образом, сравнение (26) и (29) говорит о том, что для отыскания набора нормалей $\{C_j : j = \overline{1, k}\}$ достаточно найти вершины многогранников вида $\partial n(x - z) \cap K(\text{co}\{A_j : j \in I(z)\})$, которых в силу конечности наборов $\{A_j : j = \overline{1, l}\}$ и $\{B_j : j = \overline{1, m}\}$ также конечное число.

5. Формулы (3), (5) и (23) позволяют записать задачу (1) в виде

$$\phi(x, r) = \max_{\substack{j=\overline{1, k} \\ i=\overline{1, m}}} \{\langle B_i, x \rangle - b_{i_1} - r, b_{i_2} - \langle B_i, x \rangle - r, \langle C_j, x \rangle - c_j + r\} \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \quad (30)$$

где $b_{i_1} = \min_{y \in D} \langle B_i, y \rangle$, $b_{i_2} = \max_{y \in D} \langle B_i, y \rangle$, $c_j = \max_{y \in D} \langle C_j, y \rangle$.

Известным приёмом (см., например, [11]) это задача сводится к задаче линейного программирования.

Теорема 2. Задача (30) эквивалентна задаче

$$\begin{cases} z \rightarrow \min \\ \langle B_i, x \rangle - b_{i_1} - r \leq z, & i = \overline{1, m}, \\ b_{i_2} - \langle B_i, x \rangle - r \leq z, & i = \overline{1, m}, \\ \langle C_j, x \rangle - c_j + r \leq z, & j = \overline{1, k}. \end{cases} \quad (31)$$

При этом, если x^* — одно из решений задачи (30), то $\widehat{x^*} = (x^*, z^*) \in \mathbb{R}^{p+1}$, где $z^* = \phi(x^*, r)$, одно из решений (31). И наоборот, если $\widehat{x^*} = (x^*, z^*)$ — одно из решений задачи (31), то x^* — одно из решений задачи (30), а $z^* = \phi(x^*, r)$ — оптимальное значение целевой функции $\phi(x, r)$.

В итоге мы можем предложить следующий подход к получению приближённого решения задачи (1). Следует аппроксимировать выпуклое тело многогранником, представив его в виде (6), а также аппроксимировать единичный шар нормы $n(\cdot)$, представив его в виде $Bn(0_p, 1) = \{x \in \mathbb{R}^p : \langle \pm B_i, x \rangle \leq 1, i = \overline{1, m}\}$.

Отметим, наличие широкого спектра методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел (см. например, обзор [12]). После этого остаётся решить задачу линейного программирования вида (31). Конечно, при этом возникает вопрос об устойчивости решения задачи (1) и его чувствительности к погрешности приближения тела D и единичного шара нормы многогранниками.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00238, 13-01-00175).



Библиографический список

1. Никольский М. С., Силин Д. Б. О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 338–354.
2. Дудов С. И., Златорунская И. В. Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13–38. DOI: 10.4213/sm513.
3. Дудов С. И. Взаимосвязь некоторых задач по оценке выпуклого компакта шаром // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 1. С. 43–58. DOI: 10.4213/sm1479.
4. Дудов С. И., Мещерякова Е. А. О методе приближённого решения задачи об асферичности выпуклого тела // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2013. Т. 53, № 10. С. 1668–1678. DOI: 10.7868/S0044466913100050.
5. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980.
6. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981.
7. Дудов С. И. Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Мат. заметки. 1997. Т. 64, № 4. С. 530–542. DOI: 10.4213/mzm1532.
8. Hiriart-Urruty J. B. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces // Math. Oper. Research. 1979. Vol. 4, № 1. P. 79–97.
9. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М. : МЦНМО, 2011.
10. Dudov S. I., Zlatorunskaya I. V. Best approximation of compact set by a ball in an arbitrary norm // Adv. Math. Res. 2003. Vol. 2. P. 81–114.
11. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М. : Наука, 1964.
12. Bronstein E. M. Approximation of convex sets by polytopes // J. of Math. Sciences. 2008. Vol. 153, № 6. P. 727–762. DOI: 10.1007/s10958-008-9144-x.

On an Approach to Approximate Solving of the Problem for the Best Approximation for Compact Body by a Ball of Fixed Radius

S. I. Dudov, M. A. Osipcev

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, Dudov@info.sgu.ru, Osipcevm@gmail.com

In this paper, we consider the problem of the best approximation of a compact body by a fixed radius ball with respect to an arbitrary norm in the Hausdorff metric. This problem is reduced to a linear programming problem in the case, when compact body and ball of the norm are polytops.

Key words: convex compact body, Hausdorff metric, function of distance, approximation, subdifferential.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-00238, 13-01-00175).

References

1. Nilol'skii M. S., Silin D. B. On the best approximation of a convex compact set by elements of addial. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, vol. 211, pp. 306–321.
2. Dudov S. I., Zlatorunskaya I. V. Best approximation of compact set by a ball in an arbitrary norm. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 10, pp. 1433–1458. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM2000v191n10ABEH000513>.
3. Dudov S. I. Relations between several problems of estimating convex compacta by balls. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 1, pp. 43–58. DOI: <http://dx.doi.org/10.1070/SM2007v198n01ABEH003828>.
4. Dudov S. I., Meshcheryakova E. A. Method for finding an approximate solution of the asphericity problem for a convex body. *Comp. Math. and Math. Physics*, 2013, vol. 53, no. 10, pp. 1483–1493. DOI: 10.1134/S0965542513100059.
5. Pschemichnyi B. N. *Vypuklyj analiz i jekstremal'nye zadachi* [Convex Analysis and Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1980 (in Russian).
6. Dem'yanov V. F., Vasil'ev L. V. *Nondifferetiable optimization*. New York, Optimization software, Inc., Publications Division, 1985.
7. Dudov S. I. Subdifferentiability and superdifferentiability of distance functions. *Math. Notes*, 1997, vol. 61, no. 4, pp. 440–450. DOI: 10.1007/BF02354988.
8. Hiriart-Urruty J. B. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces. *Math. Oper. Research*, 1979, vol. 4, no. 1, pp. 79–97.
9. Vasil'ev F. P. *Metody optimizacii* [Methods of Optimization]. Moscow, MCSMO, 2011 (in Russian).
10. Dudov S. I., Zlatorunskaya I. V. Best approximation of compact set by a ball in an arbitrary norm. *Adv. Math. Res.*, 2003, vol. 2, pp. 81–114.
11. Zuhovickij S. I., Avdeeva L. I. *Linejnoe i vypukloe programmirovanie* [Linear and convex programming]. Moscow, Nauka, 1964 (in Russian).
12. Bronstein E. M. Approximation of convex sets by polytopes. *J. of Math. Sciences*, 2008, vol. 153, no. 6, pp. 727–762. DOI: 10.1007/s10958-008-9144-x.



УДК 517.984

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Л. С. Ефремова

Студентка магистратуры кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, liubov.efremova@gmail.com

В статье рассматривается дифференциальный оператор Штурма – Лиувилля с потенциалом, имеющим конечное число точек разрыва первого рода. Конечной целью является численное восстановление потенциала такого вида. Основным результатом представленной статьи — доказанная теорема и процедура, указывающие способ получения характеристик разрыва из начальных данных. Далее, используя полученные сведения о разрывах в ранее известных алгоритмах численного решения данной обратной задачи, например, в обобщенной итерационной схеме Ранделла – Сакса, приходим к улучшению точности восстановления потенциала на всем отрезке.

Ключевые слова: оператор Штурма – Лиувилля, обратная задача, разрывный потенциал, численное решение.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена численному решению обратной задачи для оператора Штурма – Лиувилля с разрывным потенциалом.

Решение обратной задачи заключается в восстановлении потенциала по некоторым спектральным характеристикам. Данные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики, имеют множество приложений в физике и в других областях естественных наук. Наиболее полные результаты в спектральной теории дифференциальных операторов получены для оператора Штурма – Лиувилля.

Теоретическая сторона вопроса решения обратной задачи для данного оператора достаточно хорошо изучена [1, 2]. Получены теоремы единственности восстановления дифференциального уравнения по спектральным данным, известны различные методы восстановления потенциала: метод Гельфанда – Левитана, метод спектральных отображений, метод эталонных моделей, метод Борга.

Однако с точки зрения численной реализации приведенные выше методы решения обратных задач не являются эффективными. Как следствие, стали появляться работы, посвященные численным аспектам решения обратных задач для оператора Штурма – Лиувилля [3–5].

Численные методы восстановления потенциала в случае его непрерывности показывают хорошие результаты. В противном случае их использование приводит к ухудшению точности на всем отрезке. Рафлер (M. Rafter) и Бёкманн (C. Böckmann) в своей работе [4] предложили использовать обобщенную схему Ранделла – Сакса [5], которая в случае наличия информации о характеристиках разрыва использует адаптированный под эти данные модельный потенциал, что приводит к улучшению точности восстановления потенциала. Однако возникает вопрос о том, где взять необходимую априорную информацию о разрывах. Основной целью настоящей работы как раз и является описание процедуры, позволяющей найти характеристики разрывов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ НАХОЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗРЫВА

Рассмотрим на отрезке $[0, \pi]$ дифференциальное уравнение Штурма – Лиувилля:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y. \quad (1)$$

Пусть $(\mu_n)_{n \geq 1}$, $(\nu_n)_{n \geq 0}$ — спектры краевых задач для уравнения Штурма – Лиувилля с граничными условиями $y(0) = y(\pi) = 0$ и $y(0) = y'(\pi) = 0$ соответственно. По теореме Борга [6] задание двух этих множеств определяет $q(x)$ единственным образом.

Предположим, потенциал $q(x)$ представим в виде

$$q(x) = q_1(x) + \sum_{a_j < x} h_j, \quad (2)$$

где $q_1(x) \in AC[0, \pi]$.



Определим вспомогательное множество собственных значений $(\lambda_n)_{n \geq 1}$:

$$\begin{aligned} \lambda_{2n+1} &= \nu_n, & n \geq 0, \\ \lambda_{2n} &= \mu_n, & n \geq 1. \end{aligned}$$

Если продолжить потенциал $q(x)$ с $[0, \pi]$ на $[0, 2\pi]$ следующим образом

$$q(2\pi - x) = q(x), \quad x \in [0, \pi],$$

то ясно, что $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ является спектром задачи Дирихле уравнения (1) на отрезке $[0, 2\pi]$.

Как известно, асимптотические формулы для $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ имеют следующий вид [6]:

$$\lambda_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + A + c_n,$$

где $A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(x) dx$, $c_n = o(1)$, $n \rightarrow \infty$.

Так как нам даны $(\lambda_n)_{n \geq 1}$, значение A может быть получено по формуле

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{2N} \frac{b_n}{N+1},$$

где $b_n = \lambda_n - (n/2)^2$ известны для любого n .

Определим следующую функцию:

$$p_N(x) := -\frac{2\pi i}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} c_n n e^{inx},$$

где $c_n = \lambda_n - (n/2)^2 - A$ — данные, полученные из собственных значений.

Далее будет доказано, что при стремлении числа собственных значений к бесконечности значение функции $|p_N(x)|$ во всех точках, не совпадающих с точками разрыва, стремится к нулю. Однако на практике мы можем использовать лишь конечное число точек спектра, в силу чего у функции $|p_N(x)|$ при любом конечном N имеются дополнительные локальные максимумы, возникает так называемый эффект боковых лепестков. Очевидно, это приводит к затруднениям в обнаружении разрывов в случае, когда их несколько. Для устранения данной проблемы необходимо подавить боковые лепестки.

Запишем функцию $p_N(x)$ в виде

$$p_N(x) = -\frac{2\pi i}{N+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{n,N} c_n n e^{inx},$$

где $w_{n,N}$ — «оконая функция» [7], в нашем случае — прямоугольная, т. е. $w_{n,N} = 1$ при $N \leq n \leq 2N$ и $w_{n,N} = 0$ в противном случае. Проводя аналогию с наблюдением за спектром ограниченного во времени сигнала [7], делаем следующий вывод: чтобы подавить боковые лепестки, нужно изменить «оконую функцию» $w_{n,N}$, а именно сделать ее более гладкой.

Окончательно получаем следующую конструкцию:

$$p_N(x) = -\frac{2\pi i}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} \frac{w_{n,N} c_n n e^{inx}}{\beta_N}, \tag{3}$$

где $\beta_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N}$ — коэффициент ослабления [7].

Теорема 1. Пусть $p_N(x)$ — функция, определенная в (3), где последовательность $w_{n,N}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\frac{1}{N} \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{inx} \rightarrow 0$ равномерно на $[-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$ для любого $\delta > 0$;
- 2) $C_1 < |\beta_N| < C_2$, где C_1, C_2 — некоторые положительные константы.



Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_N(a_j) = h_j, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} p_N(x) = 0, \quad x \neq a_j,$$

где сходимость является равномерной на любом множестве вида $[0, \pi] \setminus \bigcup_{j=1}^m (a_j - \delta, a_j + \delta)$, $\delta > 0$.

Доказательство. Известно [8], что

$$\lambda_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(x)[1 - \cos(nx)] dx + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Используя представление (2) для потенциала, получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} h_1[1 - \cos(nx)] dx + \dots + \frac{1}{\pi} \int_{a_{m-1}}^{a_m} [h_1 + \dots + h_{m-1}][1 - \cos(nx)] dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{a_m}^{\pi} [h_1 + \dots + h_m][1 - \cos(nx)] dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_1(x)[1 - \cos(nx)] dx + o\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{h_1(a_2 - a_1)}{\pi} + \dots + \frac{(h_1 + \dots + h_{m-1})(a_m - a_{m-1})}{\pi} + \\ &+ \frac{(h_1 + \dots + h_m)(\pi - a_m)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_1(x) dx - \\ &- \frac{h_1 \cdot [\sin(na_2) - \sin(na_1)]}{\pi n} - \dots - \frac{(h_1 + \dots + h_{m-1}) \cdot [\sin(na_m) - \sin(na_{m-1})]}{\pi n} + \\ &+ \frac{(h_1 + \dots + h_m) \cdot \sin(na_m)}{\pi n} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_1(x) \cos(nx) dx + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{h_1 \cdot [\sin(na_2) - \sin(na_1)]}{\pi n} - \dots - \frac{(h_1 + \dots + h_{m-1}) \cdot [\sin(na_m) - \sin(na_{m-1})]}{\pi n} + \\ &+ \frac{(h_1 + \dots + h_m) \cdot \sin(na_m)}{\pi n} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_1(x) \cos(nx) dx + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} &-\frac{2\pi i}{\beta_N \cdot (N+1)} \sum_{n=N}^{2N} \left[-\frac{h_1 \cdot [\sin(na_2) - \sin(na_1)]}{\pi n} - \dots - \right. \\ &\left. - \frac{(h_1 + \dots + h_{m-1}) \cdot [\sin(na_m) - \sin(na_{m-1})]}{\pi n} + \frac{(h_1 + \dots + h_m) \cdot \sin(na_m)}{\pi n} \right] w_{n,N} n e^{inx} = \\ &= \frac{h_1}{\beta_N \cdot (N+1)} \left[\sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x-a_1)} - \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x+a_1)} \right] + \dots + \\ &+ \frac{h_m}{\beta_N \cdot (N+1)} \left[\sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x-a_m)} - \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x+a_m)} \right]. \end{aligned}$$

Тогда функция $p_N(x)$ имеет вид:

$$p_N(x) = p_N^*(x) + h_{1N}(x) + h_{2N}(x),$$

где

$$p_N^*(x) = \sum_{j=1}^m \frac{h_j}{\beta_N \cdot (N+1)} \left[\sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x-a_j)} - \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x+a_j)} \right],$$



$$h_{1N}(x) = \frac{2i}{\beta_N \cdot (N+1)} \sum_{n=N}^{2N} \int_0^\pi q_1(y) \cos(ny) dy \cdot w_{n,N} \cdot n \cdot e^{inx},$$

$$h_{2N}(x) = \frac{2\pi i}{\beta_N \cdot (N+1)} \sum_{n=N}^{2N} \varepsilon_n \cdot w_{n,N} \cdot n \cdot e^{inx},$$

ε_n удовлетворяют условию $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \varepsilon_n = 0$.

Рассмотрим каждое из трех получившихся слагаемых.

1. В силу условий 1) и 2) для последовательности $w_{n,N}$: при $N \rightarrow \infty$ функция $p_N^*(x)$ имеет ненулевые слагаемые только в точках $x = a_j$:

$$p_N^*(a_j) = \frac{h_j}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} \frac{w_{n,N}}{\beta_N}, \quad \text{где} \quad \beta_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N}.$$

Получаем:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_N^*(a_j) = h_j,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_N^*(x) = 0, \quad x \neq a_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

2. Учитывая, что $q_1(x) \in AC[0, \pi]$, и используя теорему Римана – Лебега, получаем

$$|h_{1N}(x)| = \left| \frac{2i}{\beta_N \cdot (N+1)} \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot n \cdot \int_0^\pi q_1(y) \cos(ny) dy \cdot e^{inx} \right| \leq$$

$$\leq \frac{C}{N} \cdot \sum_{n=N}^{2N} \left| n \cdot \frac{\sin ny}{n} q_1(y) \Big|_0^\pi - n \cdot \frac{1}{n} \cdot \int_0^\pi \sin ny \cdot q_1'(y) dy \right| =$$

$$= \frac{C}{N} \cdot \sum_{n=N}^{2N} \left| \int_0^\pi \sin ny \cdot q_1'(y) dy \right| = o(1), \quad N \rightarrow \infty,$$

где $C = 2C_2/C_1$.

Следовательно, $h_{1N}(x) = o(1)$, $N \rightarrow \infty$.

3. Далее,

$$|h_{2N}(x)| = \left| \frac{2\pi i}{\beta_N \cdot (N+1)} \sum_{n=N}^{2N} \varepsilon_n \cdot w_{n,N} \cdot n \cdot e^{inx} \right| \leq \frac{C}{N} \cdot \sum_{n=N}^{2N} |n \cdot \varepsilon_n| \leq C \cdot \frac{2N-N}{N} \cdot N \cdot \max_{N \leq n \leq 2N} |\varepsilon_n|,$$

где $C = 2\pi C_2/C_1$.

Тогда $\lim_{N \rightarrow \infty} C \cdot N \cdot \max_{N \leq n \leq 2N} |\varepsilon_n| = 0$. Получаем, что $h_{2N}(x) = o(1)$, $N \rightarrow \infty$.

Из пп. 1–3 заключаем, что теорема 1 доказана. \square

Следствие 1. Пусть известно, что $a_1 \in [A_1, B_1], \dots, a_m \in [A_m, B_m]$, где A_k, B_k – некоторые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < A_1 < B_1 < A_2 < B_2 < \dots < A_m < B_m < \pi$. Для всех $\delta > 0$ существует $N(\delta) = N_\delta$ такое, что: если $N > N_\delta$ и x^* является точкой глобального максимума функции $|p_N(x)|$ на $[A_j, B_j]$, то $x^* \in (a_j - \delta, a_j + \delta)$.

2. ПРОЦЕДУРА НАХОЖДЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗРЫВОВ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА

Пусть даны $(\mu_n)_{n \geq 1}, (\nu_n)_{n \geq 0}, [A_1, B_1], \dots, [A_m, B_m]$. Известно, что потенциал $q(x)$ имеет вид (2). Требуется восстановить потенциал $q(x)$.

Алгоритм 1.

1. Определяем $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ следующим образом:

$$\lambda_{2n+1} = \nu_n, \quad n \geq 0,$$

$$\lambda_{2n} = \mu_n, \quad n \geq 1.$$



2. Вычисляем A , используя формулу $A = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{2N} b_n / (N + 1)$, где $b_n = \lambda_n - (n/2)^2$.
3. Находим $c_n = \lambda_n - (n/2)^2 - A$.
4. Конструируем функцию $p_N(x)$ по формуле (3).
5. На каждом отрезке $[A_j, B_j]$ приближенно находим точку разрыва $a_j, j = 1, \dots, m$ как глобальный максимум функции $|p_N(x)|$ на этом интервале.
6. Для каждого скачка приближенно находим его высоту $h_j, j = 1, \dots, m$, как $h_j = p_N(a_j)$.
7. Применяем обобщенный итерационный алгоритм Ранделла – Сакса, где в качестве модельного потенциала берется $\tilde{q} = \sum_{a_j < x} h_j + C$, C выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^\pi \tilde{q}(x) dx = \int_0^\pi q(x) dx.$$

3. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим потенциал следующего вида:

$$q(x) = \begin{cases} x(\pi - x) + 3, & 0 \leq x \leq 1, \\ x(\pi - x), & 1 < x \leq \pi. \end{cases} \quad (4)$$

На рис. 1 представлена функция $|p_N(x)|$ при $N = 22$. Здесь и далее в данном параграфе в качестве $w_{n,N}$ была взята последовательность вида $w_{n,N} = 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi(n - 1.5N)}{N + 1}\right)$. Легко проверить, что она удовлетворяет условиям, указанным в теореме 1.

Видно, что глобальный максимум $|p_N(x)|$ характеризует разрыв потенциала (4). Отсюда приближенно находим точку разрыва $a_1 = 2.007$ и высоту скачка $h_1 = 2.989$.

Рис. 2 демонстрирует восстановленный потенциал (4). Для восстановления используется обобщенная итерационная схема Ранделла – Сакса: a – с модельным потенциалом, не учитывающим знания о параметрах разрыва; b – с модельным потенциалом, адаптированным под найденные свойства.

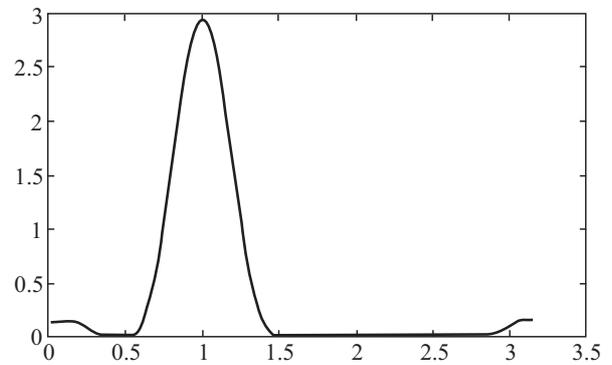


Рис. 1. График функции $|p_N(x)|$ при $N = 22$ в случае потенциала (4)

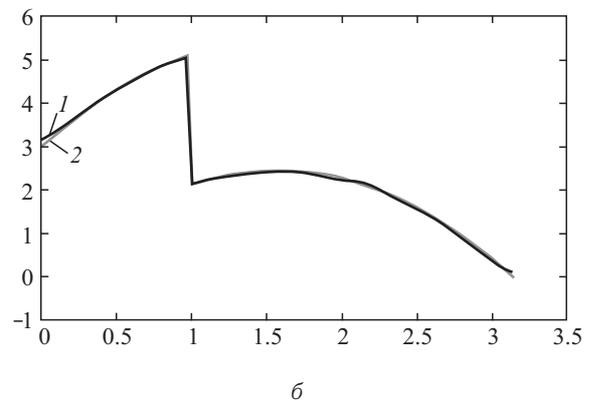
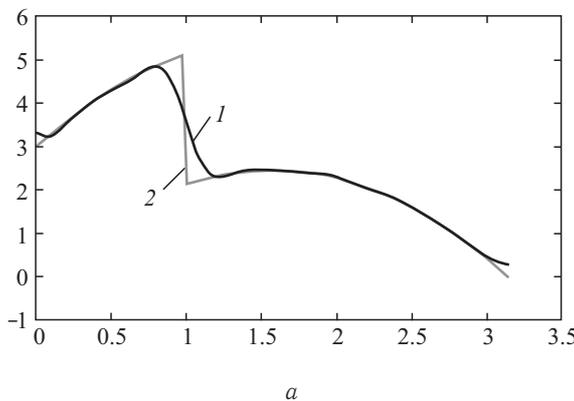


Рис. 2. Восстановленный потенциал (4) с помощью алгоритма Ранделла – Сакса (1 – восстановленный потенциал; 2 – точная функция): a – с модельным потенциалом $\tilde{q} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx$, b – с модельным потенциалом, адаптированным под найденные характеристики разрыва: $a_1 = 2.007, h_1 = 2.989$



Сведения об абсолютных и относительных погрешностях приведены в следующей таблице.

Абсолютные и относительные погрешности

График	L_2		L_∞	
	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
Рис. 2, а	0.45866	0.08927	1.37606	0.26923
Рис. 2, б	0.05212	0.01014	0.16371	0.03203

Теперь обратимся к случаю, когда потенциал $q(x)$ имеет несколько точек разрыва первого рода. Рассмотрим

$$q(x) = \begin{cases} x(\pi - x) + 2, & 0 \leq x \leq 0.7, \\ x(\pi - x), & 0.7 < x \leq 1.5, \\ x(\pi - x) + 0.5, & 1.5 < x \leq \pi. \end{cases} \quad (5)$$

Для потенциала (5) функция $|p_N(x)|$ имеет вид, указанный на рис. 3.

А для потенциала

$$q(x) = \begin{cases} x(\pi - x) + 1, & 0 \leq x \leq 0.65, \\ x(\pi - x), & 0.65 < x \leq 1.5, \\ x(\pi - x) + 2, & 1.5 < x \leq 2.3, \\ x(\pi - x) + 3, & 2.3 < x \leq \pi. \end{cases} \quad (6)$$

функция $|p_N(x)|$ представлена на рис. 4.

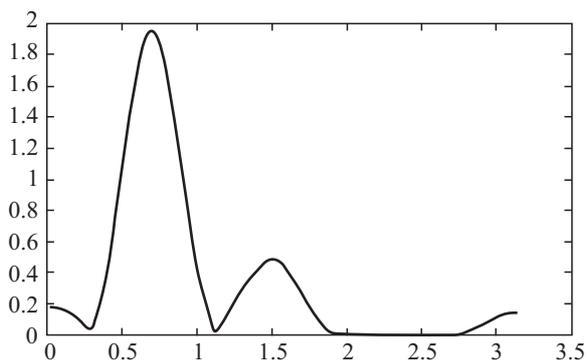


Рис. 3. График функции $|p_N(x)|$ при $N = 26$ в случае потенциала (5)

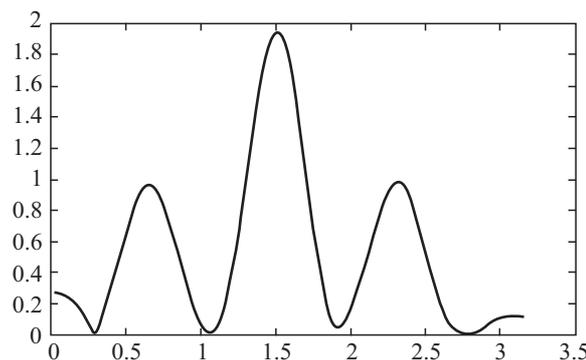


Рис. 4. График функции $|p_N(x)|$ при $N = 27$ в случае потенциала (6)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе впервые был представлен теоретически обоснованный метод отыскания параметров разрыва искомого потенциала по спектральным характеристикам, а также приведен численный алгоритм отыскания этих параметров. Полученные сведения дают возможность применения обобщенной итерационной схемы Ранделла – Сакса и других алгоритмов для получения более точного численного решения обратной спектральной задачи на отрезке в случае оператора Штурма – Лиувилля с потенциалом, имеющим конечное число точек разрыва первого рода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-31042).

Библиографический список

1. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. : Наука, 1984. 240 с.
2. Марченко В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 331 с.
3. Ignatiev M. Yu., Yurko V. A. Numerical methods for solving inverse Sturm – Liouville problems // Results in Math. 2008. Vol. 52. P. 63–74. DOI: 10.1007/s00025-007-0276-y.
4. Rafler M., Böckmann C. Reconstruction method for inverse Sturm – Liouville problems with discontinuous potentials // Inverse Problems. 2007. Vol. 23, № 3. P. 933–946. DOI: 10.1088/0266-5611/23/3/006.



5. Rundell W., Sacks P. E. Reconstruction techniques for classical inverse Sturm – Liouville problems // *Mathematics of Computation*. 1992. Vol. 58, № 197. P. 161–183. DOI: 10.1090/S0025-5718-1992-1106979-0.
6. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm – Liouville Problems and Their Applications*. Huntington ; N.Y. : NOVA Science Publ., 2001. 305 p.
7. Oppenheim A. B., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов : пер. с англ. М. : Связь, 1979. 416 с.
8. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма – Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // *Изв. РАН. Сер. математическая*. 2000. Т. 64, № 4. С. 47–108. DOI: 10.4213/im295

Numerical Solution of Inverse Spectral Problems for Sturm – Liouville Operators with Discontinuous Potentials

L. S. Efremova

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, liubov.efremova@gmail.com

We consider Sturm – Liouville differential operator with potential having a finite number of simple discontinuities. This paper is devoted to the numerical solution of such inverse spectral problems. The main result of this work is a procedure that is able to recover both the points of discontinuities as well as the heights of the jumps. Following, using these results, we may apply a suitable numerical method (for example, the generalized Rundell – Sacks algorithm with a special form of the reference potential) to reconstruct the potential more precisely.

Key words: Sturm – Liouville differential operator, inverse spectral problem, discontinuous potential, numerical solution.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-01-31042).

References

1. Levitan B. M. *Inverse Sturm – Liouville Problems*. Utrecht, VNU Sci. Press, 1987, 240 p.
2. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville operators and applications*. Basel, Birkhäuser, 1986. 367 p.
3. Ignatiev M. Yu., Yurko V. A. Numerical methods for solving inverse Sturm – Liouville problems. *Results in Math.*, 2008, vol. 52, pp. 63–74. DOI: 10.1007/s00025-007-0276-y.
4. Rafler M., Böckmann C. Reconstruction method for inverse Sturm – Liouville problems with discontinuous potentials. *Inverse Problems*, 2007, vol. 23, no. 3, pp. 933–946. DOI: 10.1088/0266-5611/23/3/006.
5. Rundell W., Sacks P. E. Reconstruction techniques for classical inverse Sturm – Liouville problems. *Mathematics of Computation*, 1992, vol. 58, no. 197, pp. 161–183. DOI: 10.1090/S0025-5718-1992-1106979-0.
6. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm – Liouville Problems and Their Applications*. Huntington, New York, NOVA Science Publ., 2001, 305 p.
7. Oppenheim A. V., Schafer R. W. *Discrete-time Signal Processing*. Prentice-Hall, 1975, 585 p.
8. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm – Liouville boundary-value problem on a segment with a summable potential. *Izvestiya : Mathematics*, 2000, vol. 64, iss. 4, pp. 695–754. DOI: <http://dx.doi.org/10.4213/im295>.

УДК 517.51

ОБ ОПЕРАТОРЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА КОМПАКТНЫХ НУЛЬ-МЕРНЫХ ГРУППАХ

Ю. С. Крусс

Аспирант кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KrussUS@gmail.com

Для одномерного случая указаны условия, при которых оператор дифференцирования не зависит от ортонормированной системы, с помощью которой определен. Для многомерного случая указаны условия, при которых оператор дифференцирования не зависит от способа преобразования многомерной компактной нуль-мерной группы в одномерную. Получен явный вид аннуляторов в многомерной компактной нуль-мерной группе.

Ключевые слова: нуль-мерные группы, псевдодифференциальный оператор, сильная \mathcal{R} -ичная производная, сильный \mathcal{R} -ичный интеграл.



ВВЕДЕНИЕ

Р. L. Butzer и Н. J. Wagner [1] ввели понятие сильной двоичной производной $D(f)$ для функций, интегрируемых на двоичной группе Кантора. Б. И. Голубов [2] обобщил это определение на случай функций, интегрируемых на \mathbb{R}^+ или (что то же самое) на локально компактной двоичной группе, и определил как производную, так и обобщенный сильный интеграл. С. С. Волосивец [3] определил на \mathbb{R}^+ модифицированную сильную \mathbf{P} -ичную производную и модифицированный сильный \mathbf{P} -ичный интеграл.

Понятия модифицированной сильной \mathbf{P} -ичной производной и модифицированного сильного \mathbf{P} -ичного интеграла тесно связаны с понятием псевдодифференциального оператора $D_\varphi(f, x) = (\varphi(\chi)\hat{f}(\chi))^\vee(x)$, определяемого символом φ . Выбирая подходящим образом символ φ , можно получить как модифицированную сильную \mathbf{P} -ичную производную, так и модифицированный сильный \mathbf{P} -ичный интеграл. На этом пути сразу получаем, что композиция операторов дифференцирования и интегрирования в любом порядке дает тождественный оператор. На компактной группе оператор дифференцирования умножает ряд Фурье по системе характеров дифференцируемой функции на некоторую последовательность (символ). В 2002 г. С. В. Козырев обнаружил, что система Хаара представляет собой собственные функции псевдодифференциального оператора, определенного в поле p -адических чисел [4]. Поэтому возникает вопрос: как действует оператор дифференцирования на ряд Фурье – Хаара? В предлагаемой работе найдены условия на символ, при которых результат дифференцирования не зависит от выбранной нами системы (теорема 3).

В многомерном случае стоит несколько иная задача. Многомерную группу можно преобразовать в одномерную разными способами [5–6], получая при этом различные основные цепочки подгрупп. В связи с чем возникает вопрос: при каких условиях оператор дифференцирования не зависит от того, какой способ преобразования многомерной группы в одномерную мы используем? Ответ на этот вопрос дается в теореме 5. Для доказательства этой теоремы найдено явное представление аннуляторов основной цепочки произведения групп \mathbb{G} (теорема 4).

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $(G, \dot{+})$ — компактная аддитивная топологическая группа, топология в которой задана счетной системой вложенных подгрупп:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots, \quad (1)$$

таких, что $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$ (0 — нулевой элемент группы G). Таким образом, базу топологии в G образуют смежные классы $(G_n \dot{+} h)$ ($n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, h \in G$), из которых любые два либо не пересекаются, либо один включается в другой. Такую группу называют нуль-мерной. Из компактности G следует, что все фактор-группы $G_n \setminus G_{n+1}$ конечны. Обозначим через p_n порядок такой фактор-группы. Можно считать, что все p_n — простые числа, так как, в противном случае, используя теорему Силова, можно уплотнить цепочку подгрупп так, что порядки фактор-групп $G_n \setminus G_{n+1}$ станут простыми числами. Обозначим $m_0 = 1$, $m_{n+1} = m_n p_n$. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ группа G есть дизъюнктное объединение m_n смежных классов $G_n \dot{+} h_i$, ($i = \overline{0, m_n - 1}$). Все смежные классы в объединении с пустым множеством образуют полукольцо K . На K можно ввести меру μ равенством $\mu(G_n \dot{+} h_i) = \mu G_n = 1/m_n$. После этого меру μ можно продолжить на σ -алгебру μ^* измеримых множеств, например, по схеме Каратеодори. Получим меру, инвариантную относительно сдвига. На борелевских множествах она совпадает с мерой Хаара.

На G можно определить интеграл по схеме Лебега, который инвариантен относительно сдвига и является абсолютно сходящимся. Характеры группы G будем обозначать через χ , а группу всех характеров — через X . Совокупность характеров χ таких, что $\chi(x) = 1$ для любого $x \in G_n$, называют аннулятором группы G_n и обозначают G_n^\perp . Аннуляторы образуют возрастающую цепочку подгрупп группы X :

$$\{1\} = G_0^\perp \subset G_1^\perp \subset G_2^\perp \subset \dots \subset G_n^\perp \subset \dots, \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n^\perp = X.$$



Фактор-группы $G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ конечны и имеют порядок p_n . При каждом $n \in \mathbb{N}_0$ выберем элемент $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ и зафиксируем. Каждый элемент $x \in G_0$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n (a_n = \overline{0, p_n - 1}),$$

где сходимость понимается в смысле топологии, порожденной цепочной подгрупп (1). При каждом $n \in \mathbb{N}_0$ выберем характер $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ и зафиксируем. Функции r_n называются функциями Радемахера. Тогда характер $\chi \in X$ однозначно представим в виде

$$\chi = \prod_{n=0}^{\infty} (r_n)^{\alpha_n} (\alpha_n = \overline{0, p_n - 1}), \tag{2}$$

причем в произведении (2) лишь конечное число α_n отлично от нуля, т. е.

$$\chi = \prod_{n=0}^M (r_n)^{\alpha_n}, \tag{3}$$

число M определяется характером χ . В группе характеров можно ввести нумерацию следующим образом: если χ представлен в виде (3), то поставим ему в соответствие число

$$n = \sum_{k=0}^M \alpha_k m_k$$

и соответствующий характер будем обозначать через χ_n .

Определим на группе G систему функций Хаара следующим образом [7]. Положим $H_0(x) \equiv 1$, $H_{jm_s+k} = \sqrt{(m_s)} r_s^j(x \dot{-} q) 1_{G_s}(x \dot{-} q)$, где $j = \overline{1, p_s - 1}$, $s = 0, 1, \dots$, $k = \overline{0, m_s - 1}$, k и q связаны соотношением $k = a_0 m_0 + a_1 m_1 + \dots + a_{s-1} m_{s-1}$, $q = a_0 g_0 + a_1 g_1 + \dots + a_{s-1} g_{s-1}$, $a_n = \overline{0, p_n - 1}$.

Определение 1 [3]. Пусть функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $T_n(\gamma, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \chi_k(x)$, $\gamma = (\gamma_i)_{i=0}^\infty$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$. Если для функции $f \in L_1(G)$ существует функция $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ из $L_1(G)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| (T_n(\gamma, \cdot) * f)(x) - g(x) \|_{L_1} = 0, \tag{4}$$

то g называется *сильной производной функции f по системе характеров относительно последовательности $(\gamma_i)_{i=0}^\infty$* и обозначается $g = D_\gamma^x f$.

Определение 2. Пусть функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathbf{K}_n(\mathbf{f}) = \int_G f(t) K_n(\gamma, x, t) dt$, $K_n(\gamma, x, t) = \gamma_0 + \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^{p_s-1} \sum_{k=0}^{m_s-1} \gamma_j m_{s+k} H_{jm_s+k}(x) \overline{H_{jm_s+k}(t)}$, $\gamma = (\gamma_i)_{i=0}^\infty$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$. Если для функции $f \in L_1(G)$ существует функция $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ из $L_1(G)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| \mathbf{K}_n(\mathbf{f}) - g(x) \|_{L_1} = 0, \tag{5}$$

то g называется *сильной производной функции f по системе Хаара относительно последовательности $(\gamma_i)_{i=0}^\infty$* и обозначается $g = D_\gamma^H f$.

Замечание 1. В определениях 1 и 2 оператор, который функции f ставит в соответствие ее сильную производную g , обычно называют псевдодифференциальным оператором, а последовательность $\gamma = (\gamma_i)_{i=0}^\infty$ — символом.

Замечание 2. Следует отметить, что в определении 1 (определении 2) на последовательность $\gamma = (\gamma_i)_{i=0}^\infty$ не наложено никаких ограничений, кроме $\gamma_i \in \mathbb{R}$, поэтому мы можем рассматривать последовательность следующего вида: $(\gamma_i^l)_{i=0}^\infty$, где l означает показатель степени, $l \in \mathbb{Z}$. Если для такой последовательности условие (4) (условие (5)) выполнено, то в случае $l > 0$ функцию $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ будем называть сильной производной порядка l функции f по системе характеров (системе Хаара) относительно последовательности $(\gamma_i^l)_{i=0}^\infty$ и обозначать $g = D_{\gamma^l}^x f$ ($g = D_{\gamma^l}^H f$). А в случае $l < 0$ функцию $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ будем называть неопределенным сильным интегралом порядка l функции f по системе характеров (системе Хаара) относительно последовательности $(\gamma_i^l)_{i=0}^\infty$ и обозначать $g = D_{1/\gamma^l}^x f$ ($g = D_{1/\gamma^l}^H f$).



Более того, мы можем вместо последовательности $(\gamma_i)_{i=0}^\infty$ рассматривать последовательность $(1/\gamma_i^l)_{i=0}^\infty$ $l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. В этом случае при $l > 0$ функцию g будем называть сильной производной дробного порядка l функции f по системе характеров (системе Хаара) относительно последовательности $(\gamma_i^l)_{i=0}^\infty$ и обозначать $g = D_{\gamma^l}^X f$ ($g = D_{\gamma^l}^H f$). В случае $l < 0$ функцию g будем называть неопределенным сильным интегралом дробного порядка l функции f по системе характеров (системе Хаара) относительно последовательности $(\gamma_i^l)_{i=0}^\infty$ и обозначать $g = D_{1/\gamma^l}^X f$ ($g = D_{1/\gamma^l}^H f$).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $f \in L_1(G)$ дифференцируема в смысле определения 1 и пусть g из $L_1(G)$ — ее сильная производная по системе характеров относительно последовательности $\gamma = (\gamma_i)_{i=0}^\infty$. Пусть $\sum_{k=0}^\infty c_k \chi_k$ — ряд Фурье функции f , тогда ряд Фурье функции g имеет вид $\sum_{k=0}^\infty \gamma_k c_k \chi_k$, причем

$$g = \sum_{k=0}^\infty \gamma_k c_k \chi_k.$$

Доказательство. Рассмотрим свертку $(T_l(\gamma, \cdot) * f)(x)$:

$$\begin{aligned} (T_l(\gamma, \cdot) * f)(x) &= \int_G f(t) T_l(\gamma, x-t) d\mu(t) = \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_k \int_G f(t) \chi_k(x-t) d\mu(t) = \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_k \chi_k(x) \int_G f(t) \overline{\chi_k(t)} d\mu(t) = \sum_{k=0}^{l-1} \gamma_k c_k \chi_k(x). \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что ряд Фурье свертки $(T_l(\gamma, \cdot) * f)(x)$ сходится к самой свертке: $\sum_{k=0}^{l-1} \gamma_k c_k \chi_k = (T_l(\gamma, \cdot) * f)(x)$. Так как g — сильная производная функции f по системе характеров, то согласно определению 1 справедливо равенство (4). Следовательно, ряд Фурье функции g имеет вид $\sum_{k=0}^\infty \gamma_k c_k \chi_k$ и $g = \sum_{k=0}^\infty \gamma_k c_k \chi_k$, сходимость понимается в смысле нормы в L_1 . \square

Следствие. Пусть $f \in L_1(G)$ и пусть ее ряд Фурье имеет вид: $\sum_{k=0}^\infty c_k \chi_k$. Если существует последовательность $\gamma = (\gamma_i)_{i=0}^\infty$, такая что функция f дифференцируема в смысле определения 1, а ее сильная производная g интегрируема (см. замечание 2 к определениям 1, 2), то справедливо следующее равенство $\sum_{k=0}^\infty c_k \chi_k = f(x)$.

Теорема 2. Пусть $f \in L_1(G)$ дифференцируема в смысле определения 2 и пусть g из $L_1(G)$ — ее сильная производная по системе Хаара. Пусть $\sum_{k=0}^\infty d_k H_k$ — ряд Фурье функции f , тогда ряд Фурье функции g имеет вид $\sum_{k=0}^\infty \gamma_k d_k H_k$, причем $g = \sum_{k=0}^\infty \gamma_k d_k H_k$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathbf{K}_n(\mathbf{f})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n(\mathbf{f}) &= \int_G f(t) \left(\gamma_0 + \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^{p_s-1} \sum_{k=0}^{m_s-1} \gamma_{jm_s+k} H_{jm_s+k}(x) \overline{H_{jm_s+k}(t)} \right) d\mu(t) = \\ &= \gamma_0 \int_G f(t) d\mu(t) + \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^{p_s-1} \sum_{k=0}^{m_s-1} \gamma_{jm_s+k} H_{jm_s+k}(x) \int_G f(t) \overline{H_{jm_s+k}(t)} d\mu(t) = \\ &= \gamma_0 d_0 + \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^{p_s-1} \sum_{k=0}^{m_s-1} \gamma_{jm_s+k} d_{jm_s+k} H_{jm_s+k}(x). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что ряд Фурье функции $\mathbf{K}_n(\mathbf{f})$ имеет вид

$$\gamma_0 d_0 + \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^{p_s-1} \sum_{k=0}^{m_s-1} \gamma_{jm_s+k} d_{jm_s+k} H_{jm_s+k}(x),$$



т. е. сходится к самой функции $\mathbf{K}_n(\mathbf{f})$. Так как g — сильная производная функции f по системе Хаара, следовательно, справедливо равенство (5). Но тогда ряд Фурье функции g имеет вид

$$\gamma_0 d_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_s-1} \sum_{k=0}^{m_s-1} \gamma_{jm_s+k} d_{jm_s+k} H_{jm_s+k}(x) \quad \text{и} \quad g = \gamma_0 g_0 + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_s-1} \sum_{k=0}^{m_s-1} \gamma_{jm_s+k} d_{jm_s+k} H_{jm_s+k}(x),$$

сходимость понимается в смысле нормы в L_1 . □

Следствие. Пусть $f \in L_1(G)$ и ее ряд Фурье имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k$. Если существует последовательность $\gamma = (\gamma_i)_{i=0}^{\infty}$ такая, что функция f дифференцируема в смысле определения 2, а ее сильная производная g интегрируема (см. замечание 2 к определениям 1, 2), то справедливо следующее равенство: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k = f(x)$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 3. Пусть функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L_1(G)$. Пусть f дифференцируема в смысле определений 1 и 2 и $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \chi_k$ — ряд Фурье функции f по системе характеров, $\sum_{k=0}^{\infty} d_k H_k$ — ряд Фурье функции f по системе Хаара. Тогда, если коэффициенты γ_k удовлетворяют условиям:

$$\gamma_{m_n} = \gamma_{m_n+1} = \dots = \gamma_{m_{n+1}-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

то

$$D_{\gamma}^{\chi} f = D_{\gamma}^H f,$$

где $D_{\gamma}^{\chi} f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \gamma_k \chi_k$ — ряд Фурье производной функции f по системе характеров, $D_{\gamma}^H f = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \gamma_k H_k$ — ряд Фурье производной функции f по системе Хаара.

Доказательство. Рассмотрим частные суммы с номерами m_n рядов Фурье по системе характеров и системе Хаара:

$$S_{m_n}^{\chi} = \sum_{k=0}^{m_n-1} c_k \chi_k, \quad S_{m_n}^H = \sum_{k=0}^{m_n-1} d_k H_k.$$

Известно, что и система характеров, и система Хаара являются полными ортонормированными, следовательно, каждую функцию одной системы можно раскладывать в ряд Фурье по другой системе, т. е. если $k = \overline{0, m_n - 1}$, то $\chi_k = \sum_{i=0}^{m_n-1} a_{ki} H_i$, причем в силу ортонормированности систем матрица (a_{ki}) — ортогональная. Рассмотрим частную сумму с номером m_n ряда Фурье по системе характеров:

$$\begin{aligned} S_{m_n}^{\chi} &= \sum_{k=0}^{m_n-1} c_k \chi_k = \sum_{k=0}^{m_n-1} (f, \chi_k) \chi_k = \sum_{k=0}^{m_n-1} (f, \sum_{i=0}^{m_n-1} a_{ki} H_i) \sum_{j=0}^{m_n-1} a_{kj} H_j = \\ &= \sum_{j=0}^{m_n-1} H_j \sum_{i=0}^{m_n-1} (f, H_i) \sum_{k=0}^{m_n-1} \overline{a_{ki}} a_{kj} = \sum_{j=0}^{m_n-1} (f, H_j) H_j = \sum_{j=0}^{m_n-1} d_j H_j = S_{m_n}^H. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что частные суммы с номерами m_n рядов Фурье по системе характеров и системе Хаара совпадают. Рассмотрим теперь ряд Фурье производной функции f по системе характеров:

$$\begin{aligned} c_0 \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=m_{n-1}}^{m_n-1} c_i \gamma_i \chi_i &= c_0 \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{m_{n-1}} \sum_{i=m_{n-1}}^{m_n-1} c_i \chi_i = \\ &= \gamma_0 d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{m_{n-1}} \sum_{i=m_{n-1}}^{m_n-1} d_i H_i = \gamma_0 d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=m_{n-1}}^{m_n-1} d_i \gamma_i H_i. \end{aligned}$$

Следовательно, используя теоремы 1 и 2, мы получаем, что $D_{\gamma}^{\chi} f = D_{\gamma}^H f$. □



4. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть $(G, \dot{+})$ — компактная нуль-мерная группа, определенная в § 1. Ограничимся рассмотрением случая, когда все $p_n = p$. Обозначим через $\mathbb{G} = G^d = G \times G \times \dots \times G$ прямое произведение d экземпляров группы G . Ясно, что элементами \mathbb{G} являются d -мерные векторы, координаты которых — элементы группы G . Прямое произведение d экземпляров подгруппы G_n обозначим через $\mathbb{G}_{nd} = G_n^d = G_n \times G_n \times \dots \times G_n$. Отметим, что данные подгруппы удовлетворяют свойству:

$$\mathbb{G} = G_0^d \supset G_1^d \supset \dots \supset G_n^d \supset \dots \quad (\mathbb{G} = \mathbb{G}_0 \supset \mathbb{G}_d \supset \dots \supset \mathbb{G}_{nd} \supset \dots),$$

однако фактор-группы $\mathbb{G}_{nd}/\mathbb{G}_{(n+1)d}$ имеют порядок p^d , который не является простым числом. Поэтому такая цепочка не является основной. Пополним данную цепочку новыми подгруппами следующим образом [5, 6]. Пусть $\mathbb{G}_{(n+1)d} \subset \mathbb{G}_{nd}$. Возьмем элемент $\bar{g}_{(n+1)d-1} \in \mathbb{G}_{nd}/\mathbb{G}_{(n+1)d}$, $\bar{g}_{(n+1)d-1} = (a_{1,1}g_n, a_{1,2}g_n, \dots, a_{1,d}g_n)$, где (g_n) — базисная последовательность в одномерной группе G , $a_{1,j} = \overline{0, p-1}$. Теперь образуем новую подгруппу $\mathbb{G}_{(n+1)d-1}$ следующим образом:

$$\mathbb{G}_{(n+1)d-1} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} \mathbb{G}_{(n+1)d} \dot{+} j\bar{g}_{(n+1)d-1}.$$

Таким образом, мы получили новую подгруппу, которая удовлетворяет следующим свойствам: $\mathbb{G}_{(n+1)d} \subset \mathbb{G}_{(n+1)d-1} \subset \mathbb{G}_{nd}$, $(\mathbb{G}_{(n+1)d-1}/\mathbb{G}_{(n+1)d})^\# = p$ и $(\mathbb{G}_{nd}/\mathbb{G}_{(n+1)d-1})^\# = p^{d-1}$. Если $d > 2$, продолжим наши построения. Выберем элемент $\bar{g}_{(n+1)d-2} = (a_{2,1}g_n, a_{2,2}g_n, \dots, a_{2,d}g_n) \in \mathbb{G}_{nd}/\mathbb{G}_{(n+1)d-1}$, $a_{2,j} = \overline{0, p-1}$ таким образом, чтобы он был линейно независим с элементом $\bar{g}_{(n+1)d-1}$. С его помощью построим новую подгруппу:

$$\mathbb{G}_{(n+1)d-2} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} \mathbb{G}_{(n+1)d-1} \dot{+} j\bar{g}_{(n+1)d-2}$$

такую, что

$$\mathbb{G}_{(n+1)d} \subset \mathbb{G}_{(n+1)d-1} \subset \mathbb{G}_{(n+1)d-2} \subset \mathbb{G}_{nd}, \quad (\mathbb{G}_{(n+1)d-2}/\mathbb{G}_{(n+1)d-1})^\# = p, \\ (\mathbb{G}_{nd}/\mathbb{G}_{(n+1)d-2})^\# = p^{d-2}.$$

Продолжая наши рассуждения, мы получим последовательность вложенных подгрупп, а именно

$$\mathbb{G}_{nd} \supset \mathbb{G}_{(n+1)d-d+1} \supset \dots \supset \mathbb{G}_{(n+1)d-1} \supset \mathbb{G}_{(n+1)d},$$

удовлетворяющих условию $(\mathbb{G}_{(n+1)d-j} \setminus \mathbb{G}_{(n+1)d-j+1})^\# = p$. Таким образом, мы получили, что для того чтобы пополнить цепочку в d -мерной группе \mathbb{G} , необходимо использовать невырожденную матрицу A . Матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \dots & a_{d,d} \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что на каждом шаге n мы используем одну и ту же матрицу A . Однако саму матрицу A можно выбирать по-разному. От того какую мы матрицу выберем, зависит структура тех подгрупп, которыми мы пополняем цепочку подгрупп.

Теорема 4. Пусть \mathbb{G} есть d -мерная группа. Обозначим:

$$M = \{ \chi_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = \chi_{\alpha_1}(x^1) \chi_{\alpha_2}(x^2) \dots \chi_{\alpha_d}(x^d), \quad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d), \quad \alpha_j = \overline{0, m_{n+1} - 1} \\ \chi_{\alpha_1}(a_{1,1}g_n) \chi_{\alpha_2}(a_{1,2}g_n) \dots \chi_{\alpha_d}(a_{1,d}g_n) = 1, \quad \chi_{\alpha_1}(a_{2,1}g_n) \chi_{\alpha_2}(a_{2,2}g_n) \dots \chi_{\alpha_d}(a_{2,d}g_n) = 1, \dots \\ \chi_{\alpha_1}(a_{k,1}g_n) \chi_{\alpha_2}(a_{k,2}g_n) \dots \chi_{\alpha_d}(a_{k,d}g_n) = 1, \quad \chi_{\alpha_j} \in G_{n+1}^\perp \},$$

тогда $\mathbb{G}_{(n+1)d-k}^\perp = M$.

Доказательство. Для того чтобы доказать равенство двух множеств, докажем два включения. Покажем, что $M \subset \mathbb{G}_{(n+1)d-k}^\perp$. Рассмотрим произвольный элемент $\bar{x} \in \mathbb{G}_{(n+1)d-k}^\perp$: $\bar{x} = \bar{x}_{k-1} \dot{+} \dot{+} j_{k-1}(a_{k,1}g_n, \dots, a_{k,d}g_n)$, где $\bar{x}_{k-1} \in \mathbb{G}_{(n+1)d-k+1}^\perp$, $j_{k-1} = \overline{0, p-1}$. В свою очередь, элемент $\bar{x}_{k-1} =$



$= \bar{x}_{k-2} \dot{+} j_{k-2}(a_{k-1,1g_n}, \dots, a_{k-1,dg_n})$, где $\bar{x}_{k-2} \in \mathbb{G}_{(n+1)d-k+2}$, $j_{k-2} = \overline{0, p-1}$. Продолжая наши рассуждения мы дойдем до элемента $\bar{x}_1 \in \mathbb{G}_{(n+1)d-1}$, который можно представить в виде $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 \dot{+} j_0(a_{1,1g_n}, \dots, a_{1,dg_n})$, где $\bar{x}_0 \in \mathbb{G}_{(n+1)d}$, $j_0 = \overline{0, p-1}$. Таким образом, мы получили следующее представление элемента:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 \dot{+} j_0(a_{1,1g_n}, \dots, a_{1,dg_n}) \dot{+} \dots \dot{+} j_{k-2}(a_{k-1,1g_n}, \dots, a_{k-1,dg_n}) \dot{+} j_{k-1}(a_{k,1g_n}, \dots, a_{k,dg_n}).$$

Теперь выберем произвольный элемент $\chi_{\bar{x}} \in M$, зафиксируем и рассмотрим его значение на элементе \bar{x} :

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{x}}(\bar{x}) &= \chi_{\bar{x}}(\bar{x}_0) \chi_{\bar{x}}(j_0(a_{1,1g_n}, \dots, a_{1,dg_n})) \times \dots \\ &\dots \times \chi_{\bar{x}}(j_{k-1}(a_{k-1,1g_n}, \dots, a_{k-1,dg_n})) \chi_{\bar{x}}(j_k(a_{k,1g_n}, \dots, a_{k,dg_n})). \end{aligned}$$

Первый множитель $\chi_{\bar{x}}(\bar{x}_0) = 1$, так как $\bar{x}_0 \in \mathbb{G}_{(n+1)d}$, т.е. $x_0^{(j)} \in G_{n+1}$ и $\chi_{\alpha_j} \in G_{n+1}^\perp$. Остальные множители также равны единице, поскольку это прямо следует из определения множества M . Таким образом, мы установили, что для любого $\bar{x} \in \mathbb{G}_{(n+1)d-k}$ $\chi_{\bar{x}}(\bar{x}) = 1$, следовательно, $\chi_{\bar{x}} \in \mathbb{G}_{(n+1)d-k}^\perp$. А так как $\chi_{\bar{x}}$ произвольный, следовательно, $M \subset \mathbb{G}_{(n+1)d-k}$.

Прежде чем показать обратное включение, определим вид характеров в многомерной группе. Рассмотрим произвольный характер $\chi \in \mathbb{G}_{(n+1)d}^\perp$. Рассмотрим элемент $\bar{x} \in \mathbb{G}_{(n+1)d}$, его можно представить в виде $\bar{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}) = (x^{(1)}, 0, \dots, 0) \dot{+} (0, x^{(2)}, \dots, 0) \dot{+} (0, 0, \dots, x^{(d)})$. При таком разложении каждый из сомножителей можно рассматривать как одномерный элемент из G_{n+1} . Рассмотрим значение характера на этом элементе $\chi(\bar{x}) = \chi((x^{(1)}, 0, \dots, 0)) \chi((0, x^{(2)}, \dots, 0)) \dots \chi((0, 0, \dots, x^{(d)}))$. Поскольку в правой части равенства участвуют вектора, которые мы обусловились считать одномерными, то вместо χ можно рассмотреть одномерные характеры χ_{α_j} , т.е. записать: $\chi(\bar{x}) = \chi_{\alpha_1}(x^{(1)}) \chi_{\alpha_2}(x^{(2)}) \dots \chi_{\alpha_d}(x^{(d)})$. Проверим, сохраняются ли при этом все свойства характера χ . Используя свойства одномерных характеров, можно сразу получить, что при таком представлении $|\chi(\bar{x})| = 1$ и $\chi(\bar{x} \dot{+} \bar{y}) = \chi(\bar{x}) \chi(\bar{y})$. Рассмотрим элемент $\bar{x} \in \mathbb{G}_{(n+1)d}$, следовательно, по определению аннулятора $\chi(\bar{x}) = 1$. Так как $\chi \in \mathbb{G}_{(n+1)d}^\perp$, следовательно, на любом элементе из $\mathbb{G}_{(n+1)d}$ значение характера должно быть равным единице. Рассмотрим $\bar{x} \in \mathbb{G}_{(n+1)d}$, его координаты — $x^{(j)} \in G_{n+1}$. Для того чтобы сохранилось свойство $\chi(\bar{x}) = 1$, необходимо, чтобы наши одномерные характеры, участвующие в представлении многомерного характера, были из аннулятора G_{n+1}^\perp . Таким образом, мы получили, что любой многомерный характер можно представить в виде произведения одномерных. Докажем теперь, что $\mathbb{G}_{(n+1)d-k} \subset M$. Пусть $\chi \in \mathbb{G}_{(n+1)d-k}$. Следовательно, по определению аннулятора на любом элементе $\bar{x} \in \mathbb{G}_{(n+1)d-k}$ $\chi(\bar{x}) = 1$. Рассмотрим $\chi(a_{1,1g_n}, a_{1,2g_n}, \dots, a_{1,dg_n}) = \chi(\bar{g}_{(n+1)d-1}) = 1$, так как $\bar{g}_{(n+1)d-1} \in \mathbb{G}_{(n+1)d-1} \subset \mathbb{G}_{(n+1)d-k}$. $\chi(a_{2,1g_n}, a_{2,2g_n}, \dots, a_{2,dg_n}) = \chi(\bar{g}_{(n+1)d-2}) = 1$, так как $\bar{g}_{(n+1)d-2} \in \mathbb{G}_{(n+1)d-2} \subset \mathbb{G}_{(n+1)d-k}$. $\chi(a_{k,1g_n}, a_{k,2g_n}, \dots, a_{k,dg_n}) = \chi(\bar{g}_{(n+1)d-k}) = 1$, так как $\bar{g}_{(n+1)d-k} \in \mathbb{G}_{(n+1)d-k} \subset \mathbb{G}_{(n+1)d-k}$. Таким образом, получили, что $\chi \in M$, т.е. $\mathbb{G}_{(n+1)d-k} \subset M$. Мы доказали два включения, следовательно, $\mathbb{G}_{(n+1)d-k} = M$. \square

Замечание. Аннуляторы \mathbb{G}_{nd}^\perp имеют более простой вид, а именно

$$\mathbb{G}_{nd}^\perp = \{\chi_{\bar{x}}(\bar{x}) = \chi_{\alpha_1}(x^{(1)}) \chi_{\alpha_2}(x^{(2)}) \dots \chi_{\alpha_d}(x^{(d)}), \chi_{\alpha_j} \in G_n^\perp\}.$$

После того как в $\mathbb{G} = G^d$ мы дополнили цепочку подгрупп до основной

$$\mathbb{G}_{nd} \supset \mathbb{G}_{(n+1)d-d+1} \supset \dots \supset \mathbb{G}_{(n+1)d-1} \supset \mathbb{G}_{(n+1)d}$$

и определили вид аннуляторов группы \mathbb{G} , мы можем рассматривать нашу многомерную группу \mathbb{G} как одномерную. Используя при пополнении цепочки подгрупп разные матрицы, мы получим различные группы G . Если на таких различных группах, образованных из одной многомерной, определять производные в смысле определений 1 и 2, то на каждой из образованных группах эти производные будут отличаться. Однако существует способ определения производной таким образом, чтобы она не зависела от матрицы, с помощью которой образуются дополнительные подгруппы.

Определение 3. Пусть функция $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L_1(G)$,

$$T_l(\gamma, \bar{x}) = \sum_{n=0}^{l-1} \sum_{\substack{\bar{k}: k_j=0, m_{n+1}-1, \\ \max_j k_j \geq m_n}} \gamma_{\bar{k}} \chi_{\bar{k}}(\bar{x}),$$



$\gamma = (\gamma_{\bar{i}})$, $\bar{i} = (i_1, i_2, \dots, i_d)$, $i_j \in \mathbb{N}_0$, $\gamma_{\bar{i}} \in \mathbb{R}$. Если для функции $f \in L_1(G)$ существует функция $g : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}$ из $L_1(G)$ такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|(T_l(\gamma, \cdot) * f)(\bar{x}) - g(\bar{x})\|_{L_1} = 0,$$

то g называется *сильной производной функции f по системе характеров относительно последовательности $(\gamma_{\bar{i}})$* и обозначается $g = D_{\bar{\gamma}}^{\infty} f$.

Покажем теперь, что, используя определение 3 в многомерной группе, мы получим производные, которые не зависят от способа пополнения основной цепочки подгрупп (т. е. от матрицы A).

Теорема 5. Пусть G — компактная нуль-мерная группа. Пусть \mathbb{G} — d -мерная группа, образованная прямым произведением d копий группы G . Цепочку подгрупп $\mathbb{G}_0 \supset \mathbb{G}_d \supset \dots \supset \mathbb{G}_{nd} \supset \dots$ будем пополнять разными способами с помощью матриц A_1 и A_2 . Пусть $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}$, пусть g_1, g_2 — сильные производные в смысле определения 3, построенные по разным матрицам A_1 и A_2 соответственно. Если последовательность $(\gamma_{\bar{k}})$ в определении 3 выбрать таким образом, чтобы $\gamma_{\bar{k}}$ принимали постоянное значение при $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d)$ таких, что их координаты $(k_j) = \overline{0, m_{n+1} - 1}$, $\max_j k_j \geq m_n$, тогда $g_1 = g_2$.

Доказательство. Используя определение 3 и доказательство, аналогичное теоремам 1 и 2, мы можем установить, что

$$g_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\bar{k}: k_j=0, m_{n+1}-1, \\ \max_j k_j \geq m_n}} \gamma_{\bar{k}} \chi_{\bar{k}}(\bar{x}), \quad g_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\bar{l}: l_j=0, m_{n+1}-1, \\ \max_j l_j \geq m_n}} \gamma_{\bar{l}} \chi_{\bar{l}}(\bar{x}).$$

Обратимся теперь к теореме 4, в которой был показан вид аннуляторов $\mathbb{G}_{(n+1)d-k}^{\perp}$. Рассмотрим сначала аннулятор вида $\mathbb{G}_{nd}^{\perp} = \{\chi_{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = \chi_{\alpha_1}(x^1) \chi_{\alpha_2}(x^2) \dots \chi_{\alpha_d}(x^d), \chi_{\alpha_j} \in G_{n+1}^{\perp}\}$ и определим, какие характеры (с какими векторными номерами) попали в этот аннулятор. Для одномерных групп известно, что $G_n^{\perp} = \{\chi_k, k = \overline{0, m_n - 1}\}$. Следовательно, $\mathbb{G}_{nd}^{\perp} = \{\chi_{\bar{\alpha}}(\bar{x}), \bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d), \alpha_j = \overline{0, m_n - 1}\}$. Рассмотрим теперь аннуляторы для подгрупп, которые мы получаем в результате пополнения цепочки до основной. Из теоремы 4 следует, что в аннулятор $\mathbb{G}_{(n+1)d-k}^{\perp}$ попадают не все характеры с номерами $\bar{\alpha} : \alpha_j = \overline{0, m_{n+1} - 1}$, а какие-то из них, которые удовлетворяют условиям $\chi_{\alpha_1}(a_{1,1}g_n) \times \dots \times \chi_{\alpha_d}(a_{1,d}g_n) = 1$, $\chi_{\alpha_2}(a_{2,1}g_n) \chi_{\alpha_2}(a_{2,2}g_n) \dots \chi_{\alpha_d}(a_{2,d}g_n) = 1, \dots, \chi_{\alpha_k}(a_{k,1}g_n) \times \dots \times \chi_{\alpha_k}(a_{k,2}g_n) \dots \chi_{\alpha_d}(a_{k,d}g_n) = 1$. Если мы строим пополнения по различным матрицам, то соответственно эти условия также различны, поскольку определяются матрицами. Следовательно, аннуляторы $\mathbb{G}_{(n+1)d-k}^{\perp}$, построенные по разным матрицам, отличаются друг от друга набором характеров, которые в них попали. Однако если мы рассматриваем аннуляторы с номером nd , то при различных пополнениях, туда попадает один и тот же набор характеров. Соответственно если мы будем рассматривать пачки

$$\sum_{\substack{\bar{k}: k_j=0, m_{n+1}-1, \\ \max_j k_j \geq m_n}} \gamma_{\bar{k}} \chi_{\bar{k}}(\bar{x}),$$

в которых $\gamma_{\bar{k}} = \text{const}$, то такие суммы одинаковые. Отсюда несложно показать, что $g_1 = g_2$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

Библиографический список

- Butzer P. L. Wagner H. J. Walsh–Fourier series and the concept of a derivative // Appl. Anal. 1973. Vol. 3, № 1. P. 29–46.
- Голубов Б. И. О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 4. С. 37–60.
- Волосивец С. С. Модифицированный \mathbf{P} -ичный интеграл и модифицированная \mathbf{P} -ичная производная для функций, определенных на полуоси // Изв. вузов. Математика. 2005. № 6. С. 28–39.
- Козырев С. В. Теория всплесков как p -адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. математическая. 2002. Т. 66, № 2. С. 149–158.
- Lukomskii S. F. Haar system on a product of zero-dimensional compact group // Centr. Eur. J. Math. 2011. Vol. 9, № 3. P. 627–639.
- Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on product of



zero-dimensional Abelian groups // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 385. P. 1162–1178.

7. Лукомский С. Ф. О рядах Хаара на компактной нуль-

мерной группе // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1.

С. 14–19.

On Differential Operator in Compact Zero-dimensional Groups

I. S. Kruss

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, KrussUS@gmail.com

We define strong derivative on zero-dimensional compact group and find conditions under which the differential operator does not depend from an orthonormal system that defines this derivative. For multidimensional case we find conditions under which the differential operator does not depend from method of conversion multidimensional group in one-dimensional group. We obtain a clear view of annihilators in a multidimensional compact zero-dimensional group.

Key words: zero-dimensional groups, pseudo-differential operator, strong \mathbf{P} -adic derivative, strong \mathbf{P} -adic integral.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00102).

References

1. Butzer P. L. Wagner H. J. Walsh – Fourier series and the concept of a derivative. *Appl. Anal.*, 1973, vol. 3. no. 1, pp. 29–46.
2. Golubov B. I. A modified strong dyadic integral and derivative. *Sbornik: Mathematics*, 2002, vol. 193, no. 4, pp. 507–529. DOI: 10.4213/sm643.
3. Volosivets S. S. A modified P -adic integral and a modified P -adic derivative for functions defined on a half-axis. *Russian Math. [Izvestiya VUZ. Matematika]*, 2005. vol. 49, no. 6. pp. 25–36.
4. Kozyrev S. V. Wavelet theory as p -adic spectral analysis. *Izv. Math.*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 367–376. DOI: 10.4213/im381.
5. Lukomskii S. F. Haar system on a product of zero-dimensional compact group. *Centr. Eur. J. Math.*, 2011, vol. 9, no. 3, pp. 627–639.
6. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on product of zero-dimensional Abelian groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 385, pp. 1162–1178.
7. Lukomskii S. F. Haar series on compact zero-dimensional abelian group. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, no. 1, pp. 14–19 (in Russian).

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СИММЕТРИЧНЫХ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ГЕЛЬДЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Т. В. Лихачева

Аспирантка кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, lofinaT@mail.ru

В статье некоторые методы суммирования применяются к рядам Фурье–Виленкина в так называемых симметричных пространствах. Эти методы используют треугольные матрицы, суммы по строкам которых стремятся к нулю, с некоторыми ограничениями на разности коэффициентов. Тригонометрические аналоги наших результатов принадлежат М. Л. Митталу, Б. Э. Родесу, А. Гувену и др.

Ключевые слова: система Виленкина, линейные средние, пространство Гельдера, симметричное (перестановочно-инвариантное) пространство.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2 \leq p_n \leq N$ при $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \cdots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{Z}(p_n) = \{0, 1, \dots, p_n - 1\}$. Каждое число $x \in [0, 1)$ может быть представлено в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n / m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z}(p_n). \quad (1)$$



Если $x = k/m_j$, $0 < k < m_j$, $k, j \in \mathbb{N}$, то мы берем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Для $x, y \in [0, 1)$ вида (1) положим $x \oplus y = z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n/m_n$, $z_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, $z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}$. В случае, когда $z_n = p_n - 1$, $n > n_0$, операция $x \oplus y$ не определена. Аналогично определяется обратная операция $x \ominus y$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq k_i < p_i. \quad (2)$$

Для $x \in [0, 1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$, записанных в виде (1) и (2), соответственно имеем:

$$\chi_k(x) = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j).$$

Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, называемая системой Виленкина, ортонормирована и полна в $L^1[0, 1)$. Кроме того, при фиксированном $x \in [0, 1)$ для почти всех $y \in [0, 1)$ и всех $k \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства $\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y)$, $\chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}$. Эти свойства можно найти в [1, § 1.5].

Пусть $f \in L^1[0, 1)$. Коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ задаются формулами $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)} dt$, $n \in \mathbb{Z}_+$; $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Сверткой функций

$f, g \in L^1[0, 1]$ называется $f * g(x) = \int_0^1 f(x \ominus t)g(t) dt$. Справедливо равенство $S_n(f)(x) = f * D_n(x)$, где

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x); \text{ для } \sigma_n(f) = \sum_{k=1}^n S_k(f)/n \text{ имеем: } \sigma_n(f)(x) = f * F_n(x), \text{ где } F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)/n, n \in \mathbb{N}.$$

Банахово пространство E измеримых по Лебегу функций называется симметричным, если

- 1) из неравенства $|f(x)| < |g(x)|$ п. в. на $[0, 1)$ и $g \in E$ следует, что $f \in E$ и $\|f\|_E < \|g\|_E$;
- 2) если f и g равноизмеримы и $g \in E$, то $f \in E$ и $\|f\|_E = \|g\|_E$.

Известно, что такое пространство E вложено в $L^1[0, 1)$ и что оператор растяжения $(\sigma_\tau f)(t) := f(t/\tau)X_{[0,1)}(t/\tau)$ непрерывен в E . Здесь X_μ — индикатор множества μ . Пределы

$$\alpha_E := \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{E \rightarrow E}}{\ln \tau}, \quad \beta_E := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_{E \rightarrow E}}{\ln \tau}$$

всегда существуют и называются соответственно верхним и нижним индексом Бойда пространства E . При этом всегда выполняется $0 \leq \alpha_E \leq \beta_E \leq 1$ [2, гл. 2]. В случае, когда $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$, пространство E обладает рядом хороших свойств, например, $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot \ominus h) - f(\cdot)\|_E = 0$ для любой $f \in E$ [3, с. 135]. Этот факт позволяет ввести модуль непрерывности и наилучшее приближение в E

$$\omega^*(f, \delta)_E = \sup_{0 < h < \delta} \|f(\cdot \ominus h) - f(\cdot)\|_E, \quad \mathcal{E}_n(f)_E := \inf \left\{ \|f - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \chi_i\|_E, a_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Эти величины связаны неравенством типа А. В. Ефимова [3, формула (2')].

$$2^{-1} \omega^*(f, 1/m_n)_E \leq \mathcal{E}_{m_n} \leq \|f - S_{m_n}(f)\|_E \leq \omega^*(f, 1/m_n)_E. \quad (3)$$

Кроме того, при $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$ справедливо обобщенное неравенство Минковского:

$$\left\| \int_0^1 f(\cdot, y) dy \right\|_E \leq \int_0^1 \|f(\cdot, y)\|_E dy \quad (4)$$

[2, гл. 2, введение]. Некоторые другие свойства таких пространств E установлены в леммах 3 и 4 и упомянуты в их доказательствах.

Если $\omega(t)$ возрастает и непрерывна на $[0, 1]$, $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ при $t > 0$, то будем обозначать как $\omega \in \Phi$. Функция $\omega \in \Phi$ принадлежит классу Бари – Стечкина B_1 , если $\delta \int_{\delta}^1 t^{-2} \omega(t) dt = O(\omega(\delta))$,



$\delta \in (0, 1)$. Будем говорить, что $\omega \in \Phi$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если $\omega(2t) \leq C\omega(t)$, $t \in [0, 1/2]$. По определению $H_E^\omega = \{f \in E : \omega^*(f, t)_E \leq C\omega(t)\}$, где $\omega \in \Phi$ и C не зависит от $t \in [0, 1]$.

Для $\omega \in \Phi$ пространство H_E^ω с нормой $\|f\|_{E, \omega} = \|f\|_E + \sup_{0 < h < 1} \omega^*(f, h)_E / \omega(h)$ является банаховым. Если ω удовлетворяет Δ_2 -условию, то выражение $\|f\|_{E, \omega} = \|f\|_E + \sup_{0 < h < 1} \|f(\cdot) - f(\cdot \ominus h)\|_E / \omega(h)$ задает эквивалентную норму в H_E^ω .

Пусть $A = \{a_{nk}\}_{n,k=1}^\infty$ — нижнетреугольная матрица с неотрицательными элементами и $s_n(A) = \sum_{k=1}^n a_{n,k}$.

Обычно для треугольных матриц требуют выполнения условия $S_n(A) = 1$, следуя [4, 5], мы требуем только $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(A) = 1$. Введем А-преобразование ряда Фурье $f \in L^1[0, 1)$ формулой

$$T_n(f)(x) = \sum_{k=1}^\infty a_{n,k} S_k(f)(x).$$

В работе [6] изучались оценки нормы $\|f - T_n(f)\|_E$ при $E = L^p[0, 1)$ в терминах $\omega^*(f, a_{n,0})$ или $\omega^*(f, a_{n,n})$. При этом рассматривались условия обобщенной монотонности $\{a_{n,k}\}_{n=1}^\infty$ типа RBVS [7]. Здесь изучаются другие условия на коэффициенты $\{a_{n,k}\}_{n=1}^\infty$, приспособленные к особенностям нормы пространства E , в частности к сходимости $S_n(f)$ к f в E . Полученные результаты, как и в [7], применяются к приближениям в гельдеровых метриках.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Функция $f(t)$ почти возрастает (почти убывает) на $[a, b]$, если существует $K > 0$ такое, что $f(u) \leq Kf(v)$ ($Kf(u) \geq f(v)$) при $a \leq u \leq v \leq b$. Аналогично определяется почти возрастание (убывание) для последовательностей.

Лемма 1 [8]. Для $\omega \in \Phi$ следующие три условия равносильны

$$\sum_{k=1}^n \omega(1/k) = O(n\omega(1/n)), \quad n \in \mathbb{N}; \tag{B_1}$$

$$\delta \int_{\delta}^1 t^{-2} \omega(t) dt = O(\omega(\delta)), \quad \delta \in (0, 1); \tag{Z_1}$$

$$\exists \alpha \in (0, 1) : t^{\alpha-1} \omega(t) \text{ почти убывает.} \tag{S_1}$$

Замечание 1. Из условия (S_1) следует, что $(2t)^{\alpha-1} \omega(2t) \leq Kt^{\alpha-1} \omega(t)$, откуда следует $\omega(2t) \leq 2^{\alpha-1} K \omega(t)$, т. е. выполнение Δ_2 -условия.

Лемма 2. Пусть $A = \{a_{n,k}\}_{n,k=1}^\infty$ — нижнетреугольная матрица с неотрицательными элементами и $\omega \in B_1$. Если 1) $\{a_{n,k}\}_{k=1}^n$ почти убывает при всех $n \in \mathbb{N}$ и $na_{n,1} = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$; или 2) $\{a_{n,k}\}_{k=1}^n$ почти возрастает при всех $n \in \mathbb{N}$ и $na_{n, [n/2]} = O(1)$; и в обоих случаях $s_n(A) = O(1)$ при $n \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{k=1}^n a_{nk} \omega(1/k) = O(\omega(1/n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. 1. В силу условия (B_1) и неравенства $a_{n,k} \leq Ka_{n,1}$ при всех $k \in \mathbb{Z} \cap [1, n]$, получаем:

$$\sum_{k=1}^n a_{n,k} \omega(1/k) \leq Ka_{n,1} \sum_{k=1}^n \omega(1/k) = O(na_{n,1} \omega(1/n)) = O(\omega(1/n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Согласно условию почти возрастания $\{a_{n,k}\}_{k=1}^n$ имеем: $a_{n,k} \leq Ka_{n, [n/2]}$ при всех $1 \leq k \leq [n/2]$. Используя Δ_2 -условие для ω (см. замечание 1), ограниченность $s_n(A)$, $\omega \in B_1$, находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{nk} \omega(1/k) &= \left(\sum_{k=1}^{[n/2]} + \sum_{k=[n/2]+1}^n \right) a_{n,k} \omega(1/k) \leq Ka_{n, [n/2]} \sum_{k=1}^{[n/2]} \omega(1/n) + \\ &+ \omega(1/[n/2]) \sum_{k=[n/2]+1}^n a_{n,k} = O(na_{n, [n/2]+1} \omega(1/[n/2])) + O(\omega(1/[n/2])) = O(\omega(1/n)), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.



Будем писать что существует $f^{[1]} \in E$, если $f \in E$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k\hat{f}(k)\chi_k$ является рядом Фурье функции $f^{[1]} = g \in E$.

Лемма 3. Пусть E — симметричное пространство, $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$ и существует $f^{[1]} \in E$. Тогда $\|S_n(f) - \sigma_n(f)\|_E = O(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Легко видеть, что $\sigma_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - k/n)\hat{f}(k)\chi_k$, поэтому

$$\|S_n(f) - \sigma_n(f)\|_E = n^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{n-1} k\hat{f}(k)\chi_k \right\|_E = n^{-1} \|S_n(f^{[1]})\|_E. \quad (5)$$

Согласно [9, теоремы 2.6.3, 2.3.11], если $0 < 1/p_2 < \alpha_E \leq \beta_E < 1/p_1 < 1$, то имеют место непрерывные вложения $L^{p_2}[0, 1] \subset E \subset L^{p_1}[0, 1]$ и E является интеполяционным между $L^{p_1}[0, 1]$ и $L^{p_2}[0, 1]$. В частности, из равномерной ограниченности операторов $S_n(f)$ на $L^{p_1}[0, 1]$ и $L^{p_2}[0, 1]$ [10, 11]) следует равномерная ограниченность этих операторов на E . Поэтому $\|S_n(f^{[1]})\|_E = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$, и из (5) следует утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть E — симметричное пространство, $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$, $\omega \in \Phi$ удовлетворяет Δ_2 -условию, $f \in H_E^{\omega}$. Тогда

$$\|f - S_n(f)\|_E = O(\omega(1/n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Как установлено, при доказательстве леммы 3 $\|S_n(f)\|_E \leq C_1 \|f\|_E$, откуда стандартным образом выводится неравенство $\|f - S_n(f)\|_E \leq (1 + C_1)\mathcal{E}_n(f)_E$. В силу неравенства типа А. В. Ефимова (3), ограниченности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и Δ_2 -условия на ω получаем при $m_k \leq n < m_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathcal{E}_n(f)_E \leq \mathcal{E}_{m_k}(f)_E \leq \omega^*(f, 1/m_k)_E \leq C_2 \omega(1/m_k) \leq C_3 \omega(1/m_{k+1}) \leq C_3 \omega(1/n)$$

для $n \in \mathbb{N}$. Из последнего легко вытекает утверждение леммы.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Везде далее E — симметричное пространство такое, что $0 < \alpha_E \leq \beta_E < 1$, A — нижнетреугольная матрица с $a_{n,k} \geq 0$.

Теорема 1. Пусть $\omega \in B_1$, $f \in H_E^{\omega}$, $|s_n(A) - 1| = O(\omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$. Если A удовлетворяет условию 1) или условию 2) леммы 2, то

$$\|f - T_n(f)\|_E = O(\omega(1/n)).$$

Доказательство. По определению T_n имеем:

$$T_n(f) - f = \sum_{k=1}^n a_{n,k} S_k(f) - f = \sum_{k=1}^n a_{n,k} (S_k(f) - f) + (s_n(A) - 1)f.$$

Тогда согласно леммам 4 и 2 получаем

$$\begin{aligned} \|T_n(f) - f\|_E &\leq \sum_{k=1}^n a_{n,k} \|S_k(f) - f\|_E + |s_n(A) - 1| \|f\|_E = \\ &= O\left(\sum_{k=1}^n a_{n,k} \omega(1/k) + \omega(1/n)\right) = O(\omega(1/n)), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\omega \in B_1$, $f \in H_E^{\omega}$ и A такова, что $|s_n(A) - 1| = O(\omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть также выполняется одно из условий:

1) $n \sum_{k=1}^n |a_{n,k} - a_{n,k+1}| = O(1)$,

2) $\sum_{k=1}^n k |a_{n,k} - a_{n,k+1}| = O(1)$, $\{k |a_{n,k} - a_{n,k+1}|\}_{k=1}^n$ почти возрастает и

$$n^2 |a_{n, [n/2]} - a_{n, [n/2]+1}| = O(1),$$



3) $\{k|a_{n,k} - a_{n,k+1}|\}_{k=1}^n$ почти убывает и $n^2|a_{n,1} - a_{n,2}| = O(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Тогда $\|f - T_n(f)\|_E = O(\omega(1/n))$.

Доказательство. Снова по лемме 4 имеем:

$$\|T_n(f) - f\|_E \leq \sum_{k=1}^n a_{n,k} \|S_k(f) - f\|_E + |s_n(A) - 1| \|f\|_E = O\left(\sum_{k=1}^n a_{n,k} \omega(1/k) + \omega(1/n)\right). \quad (6)$$

В силу преобразования Абеля и условия (B_1) получаем:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n a_{n,k} \omega(1/k)\right) &= O\left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \sum_{i=1}^k \omega(1/i) + a_{n,n} \sum_{i=1}^n \omega(1/i)\right) = \\ &= O\left(\sum_{k=1}^n |a_{n,k} - a_{n,k+1}| k \omega(1/k)\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь учтено, что $a_{n,n+1} = 0$.

Из условия $\omega \in B_1$ и (S_1) следует, что $C_1 n^{1-\alpha} \omega(1/n) \geq k^{1-\alpha} \omega(1/k)$ при некотором $\alpha \in (0, 1)$ и $n \geq k > 1$, откуда вытекает неравенство $k \omega(1/k) \leq C_1 (k/n)^\alpha n \omega(1/n) \leq C_1 n \omega(1/n)$. Поэтому при выполнении условия 1) правая часть (7) есть $O(\omega(1/n))$ и, подставляя полученное соотношение в (6), получаем:

$$\|T_n(f) - f\|_E = O(\omega(1/n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В случаях 2) и 3) применяем лемму 2 к последовательности $\{k|a_{n,k} - a_{n,k+1}|\}_{k=1}^n$. Теорема доказана.

В качестве приложения теорем 1 и 2 рассмотрим средние Нерлунда – Вороного рядов Фурье – Виленкина. Пусть $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность положительных чисел, а элементы $A = \{a_{n,k}\}$ задаются формулой $a_{n,k} = q_{n-k+1} \left(\sum_{i=1}^n q_i\right)^{-1}$, $1 \leq k \leq n$, и $a_{n,k} = 0$, $k \geq n + 1$ ([12, гл. 4]).

Соответствующие А-суммы $T_n(f)$ обозначим через $N_n(f)$.

Следствие 1. Пусть $\omega \in B_1$, $f \in H_E^\omega$, и выполняется одно из условий

1) $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ почти убывает и $nq_n \leq C \sum_{i=1}^n q_i$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ почти возрастает и $nq_1 \leq C \sum_{i=1}^n q_i$, $n \in \mathbb{N}$;

3) $n \sum_{k=1}^{n-1} (|q_k - q_{k-1}| + q_1) = O\left(\sum_{k=1}^n q_k\right)$.

Тогда $\|N_n(f) - f\|_E = O(\omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Заметим, что в данном случае $s_n(A) = 1$ и что почти убывание (возрастание) $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ соответствует почти возрастанию (убыванию) $\{a_{n,k}\}_{n=1}^\infty$. Поэтому достаточность условий 1) и 2) следует из теоремы 1. Далее

$$\sum_{k=1}^n |a_{n,k} - a_{n,k+1}| = \sum_{k=1}^{n-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| + a_{n,n} = \left(\sum_{i=1}^n q_i\right)^{-1} \left(q_1 + \sum_{i=1}^{n-1} |q_{n+1-k} - q_{n-k}|\right).$$

С помощью теоремы 2 устанавливаем достаточность условия 3). Следствие доказано.

В работах [4, 5] для приближения линейными средними тригонометрических рядов Фурье отдельно рассматривались $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ и $\omega(t) = t$. При этом использовался факт, что $f \in Lip(1, p)$, равносильно тому, что f эквивалентна абсолютно непрерывной функции f_0 и $f'_0 \in L_{2\pi}^p$. В нашем случае такой эквивалентности нет и мы используем класс $W^1 E = \{f \in E : \exists f^{[1]} \in E\}$.

Теорема 3. Пусть $f \in W^1 E$, $|s_n(A) - 1| = O(1/n)$, и выполнено одно из следующих трех условий:

1) $n \sum_{k=1}^n |a_{n,k} - a_{n,k+1}| = O(1)$;

2) $\{a_{n,k}\}_{k=1}^n$ убывает по k и $na_{n,1} = O(1)$;

3) $\{a_{n,k}\}_{k=1}^n$ возрастает по k ; для $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\|f - T_n(f)\|_E = O(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.



Доказательство. Согласно лемме 5 из [13] для $f \in W^1 E$

$$\omega^*(f, 1/m_r)_E = O(m_r^{-1} \omega^*(f^{[1]}, 1/m_r)_E) = O(m_r^{-1}), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу установленного при доказательстве леммы 4 неравенства $\|f - S_n(f)\|_E \leq C_1 \mathcal{E}_n(f)_E$, неравенства типа А. В. Ефимова (3) и Δ_2 -условия для $\omega(t) = t$ легко следует $\|f - S_n(f)\|_E = O(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Мы можем записать:

$$\|T_n(f) - f\|_E \leq \|T_n(f) - S_n(f)\|_E + \|S_n(f) - f\|_E = \|T_n(f) - S_n(f)\|_E + O(1/n).$$

Введем обозначение $A_{n,i} = \sum_{k=i+1}^n a_{n,k}$. С помощью преобразования Абеля находим, что

$$\begin{aligned} T_n(f) - S_n(f) &= \sum_{k=1}^n a_{n,k} \sum_{i=0}^{k-1} \hat{f}(i) \chi_i - \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(i) \chi_i = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=i+1}^n a_{n,k} - \sum_{k=1}^n a_{n,k} \right) \hat{f}(i) \chi_i + (s_n(A) - 1) S_n(f), \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \|T_n(f) - S_n(f)\|_E &= \left\| \sum_{i=1}^{n-1} i^{-1} (A_{n,i} - A_{n,0}) i \hat{f}(i) \chi_i \right\|_E + O(1/n) = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n-2} (b_{n,i} - b_{n,i+1}) \sum_{j=1}^i j \hat{f}(j) \chi_j + b_{n,n-1} \sum_{j=1}^{n-1} j \hat{f}(j) \chi_j \right\|_E + O(1/n), \end{aligned} \quad (8)$$

где $b_{n,i} = i^{-1} (A_{n,i} - A_{n,0})$. В силу условия $f^{[1]} \in E$ имеем: $\left\| \sum_{j=1}^i j \hat{f}(j) \chi_j \right\|_E = \|S_{i+1}(f^{[1]})\|_E = O(1)$.

В то же время

$$\begin{aligned} |b_{n,i} - b_{n,i+1}| &= |i^{-1} (A_{n,i} - A_{n,i+1}) + (i(i+1))^{-1} (A_{n,i+1} - A_{n,0})| = \\ &= (i(i+1))^{-1} \left| (i+1) a_{n,i+1} - \sum_{j=1}^{i+1} a_{n,j} \right| = (i(i+1))^{-1} \left| \sum_{j=1}^i \sum_{k=j}^i (a_{n,k+1} - a_{n,k}) \right| \leq \\ &\leq (i(i+1))^{-1} \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k |a_{n,k+1} - a_{n,k}| = (i(i+1))^{-1} \sum_{k=1}^i k |a_{n,k+1} - a_{n,k}|. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично

$$b_{n,n-1} = (n-1)^{-1} \left| \sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k} \right| = O(1/n), \quad n \geq 2.$$

Подставляя (9) и последние оценки в (8), получаем в случае 1)

$$\begin{aligned} \|T_n(f) - S_n(f)\|_E &= O \left(\sum_{i=1}^{n-2} (i(i+1))^{-1} \sum_{k=1}^i k |a_{n,k+1} - a_{n,k}| \right) + O(1/n) = \\ &= O \left(\sum_{k=1}^{n-2} \sum_{i=k}^{\infty} (i(i+1))^{-1} k |a_{n,k+1} - a_{n,k}| \right) + O(1/n) = O \left(\sum_{k=1}^{n-2} |a_{n,k+1} - a_{n,k}| \right) + O(1/n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Если $\{a_{n,k}\}_{k=1}^n$ убывает или возрастает, то в силу второго равенства в (9) все $|b_{n,i} - b_{n,i+1}|$ раскрываются с одним знаком и $\sum_{i=1}^{n-2} |b_{n,i} - b_{n,i+1}| = |b_{n,1} - b_{n,n-1}|$.



При этом, если $\{a_{n,k}\}_{k=1}^n$ возрастает, то $a_{n,1} \leq \sum_{k=1}^n a_{n,k}/n = O(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Выше установлено, что $b_{n,n-1} = O(1/n)$, $n \geq 2$. Поскольку $|b_{n,1}| = |A_{n,1} - A_{n,0}| = |a_{n,1}|$, то из условий 2) и 3) следует, что $\sum_{i=1}^{n-2} |b_{n,i} - b_{n,i+1}| = O(1/n)$, откуда вытекает утверждение теоремы.

Замечание 2. Для $E = L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, $p_i = 2$ и $T_n(f) = \sigma_n(f)$ известно, что $\|f - T_n(f)\|_E \neq o(1/n)$ для функции, отличной от постоянной п. в. [14, теорема 2 (iii)]. Поэтому мы не рассматриваем $\omega(t) = o(t)$, $t \rightarrow 0$.

Замечание 3. Теорема 1 является аналогом теоремы 1 из [5], теорема 2, по-видимому, не имеет тригонометрического аналога. Пункт 1) теоремы 3 является частичным аналогом теоремы 2 из [5], а пункты 2), 3) соответствуют пункту (ii) теоремы 4 в [4].

Теорема 4 является обобщением теоремы 8 из [7], где рассматривался случай $\omega(t) = t^\alpha$, $\mu(t) = t^\beta$, $0 < \beta < \alpha$.

Теорема 4. Пусть $\omega \in \Phi$ удовлетворяет Δ_2 -условию, $\mu \in \Phi$, и при этом $\lambda(t) = \omega(t)/\mu(t)$ возрастает на $(0, 1)$ и $\lambda(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \lambda(t) = 0$. Тогда для $f \in H_E^\omega$ справедливо соотношение

$$\|f - T_n(f)\|_{E,\mu} = O(\mu^{-1}(1/n)\|f - T_n(f)\|_E + \lambda(1/n)(1 + \|T_n\|_{E \rightarrow E})).$$

Доказательство. Поскольку $T_n(f)(x \ominus h) = T_n(f(\cdot \ominus h))(x)$, то при $h \geq 1/n$ имеем:

$$\begin{aligned} \mu^{-1}(h)\|T_n(f)(x) - f(x) - T_n(f)(x \ominus h) + f(x \ominus h)\|_E &\leq 2\mu^{-1}(h)\|T_n(f) - f\|_E \leq \\ &\leq 2\mu^{-1}(1/n)\|T_n(f) - f\|_E. \end{aligned} \quad (10)$$

Если же $0 < h < 1/n$, то

$$\|T_n(f)(\cdot) - f(\cdot) - T_n(f)(\cdot \ominus h) + f(\cdot \ominus h)\|_E \leq \|T_n(f(\cdot) - f(\cdot \ominus h))\|_E + \|f(\cdot) - f(\cdot \ominus h)\|_E$$

и

$$\begin{aligned} \mu^{-1}(h)\|T_n(f)(\cdot) - f(\cdot) - T_n(f)(\cdot \ominus h) + f(\cdot \ominus h)\|_E &\leq (1 + \|T_n\|_{E \rightarrow E})\omega(2h)/\mu(h) \leq \\ &\leq C_1(1 + \|T_n\|_{E \rightarrow E})\omega(h)/\mu(h) \leq C_1(1 + \|T_n\|_{E \rightarrow E})\lambda(h) \leq C_1(1 + \|T_n\|_{E \rightarrow E})\lambda(1/n), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (11)$$

Объединяя оценки (10) и (11), получаем утверждение теоремы.

Следствие 2. Пусть соотношения $\omega \in B_1$, матрица удовлетворяет условиям теоремы 1 или теоремы 2, $\mu \in \Phi$ такова, что $\lambda(t) = \omega(t)/\mu(t)$ возрастает на $(0, 1)$ и $\lambda(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \lambda(t) = 0$. Тогда для $f \in H_E^\omega$ имеет место соотношение

$$\|f - T_n(f)\|_{E,\mu} = O(\lambda(1/n)).$$

Доказательство. Из $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(A) = 1$ следует, что $\|T_n(f)\|_E \leq s_n(A) \sup_k \|S_k(f)\|_E = O(\|f\|_E)$, т. е. $\|T_n\|_{E \rightarrow E} = O(1)$. Из теоремы 1 и 2 выводим оценку

$$\mu^{-1}(1/n)\|f - T_n(f)\|_E = O(\omega(1/n)/\mu(1/n)) = O(\lambda(1/n)).$$

Следствие доказано.

Следствие 3. Пусть $f \in W^1E$, матрица удовлетворяет условиям теоремы 3, $\mu \in \Phi$ такова, что $t/\mu(t)$ возрастает на $(0, 1)$ и $\lambda(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \lambda(t) = 0$. Тогда для $f \in H_E^\omega$ имеет место соотношение

$$\|f - T_n(f)\|_{E,\mu} = O(\lambda(1/n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Библиографический список

1. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 544 с.
2. Крейн С. Г., Петунин Ю. И, Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1987. 400 с.
3. Volosivets S. S. On Hardy and Bellman transforms of series with respect to multiplicative systems in symmetric spaces // Analysis Math. 2009. Vol. 35, № 2. P. 131–148.



4. Mittal M. L., Rhoades B. E., Mishra V. N., Singh V. Using infinite matrix to approximate functions of class $Lip(\alpha, p)$ using trigonometric polynomials // *J. Math. Anal. Appl.* 2007. Vol. 326, № 1. P. 667–676.
5. Guven A. Trigonometric approximation in reflexive Orlicz spaces // *Anal. Theory Appl.* 2011. Vol. 27, № 2. P. 125–137.
6. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Holder and L^p norm // *East J. Approximations.* 2009. Vol. 15, № 2. P. 143–158.
7. Leindler L. On the degree of approximation of continuous functions // *Acta Math. Hungar.* 2004. Vol. 104. P. 105–113.
8. Бару Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // *Тр. Моск. мат. о-ва.* 1956. Т. 5. С. 488–522
9. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces II.* Berlin : Springer, 1973. 243 p.
10. Schipp F. On L^p -norm convergence of series with respect to product systems // *Anal. Math.* 1976. Т. 2. С. 49–64.
11. Simon C. Verallgemeinerte Walsch – Fourierreihen // *Acta Math. Hungar.* 1976. Vol. 27, № 3–4. P. 329–341.
12. Харду Г. Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
13. Zelin H. The derivatives and integrals of fractional order in Walsh – Fourier analysis with application to approximation theory // *J. Approx. Theory.* 1983. Vol. 39, № 3. P. 261–273.
14. Fridli S. On the rate of convergence of Cesaro means of Walsh – Fourier series // *J. Approx. Theory.* 1994. Vol. 76, № 1. P. 31–53.

Approximation of Functions in Symmetrical and Connected Holder Spaces by Linear Means of Fourier – Vilenkin Series

T. V. Likhacheva

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, lofinaT@mail.ru

In this paper some summation methods are applied to Fourier-Vilenkin series in so called symmetric spaces. These methods use triangular matrix with sums in rows tending to zero and with some conditions on difference of coefficients. The trigonometric counterpart of our results are due to M. L. Mittal, B. E. Rhoades, A. Guven, etc.

Key words: Vilenkin system, symmetrical (rearrangement invariant) space, Hölder space, linear mean.

References

1. Golubov B., Efimov A., Skvortsov V. *Walsh series and transforms.* Dodrecht; Boston; London, Kluwer Academic Publishers, 1991, 368 p. (Rus. ed. : Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Riady i preobrazovaniia Uolsha. Teoriia i primeneniia.* Moscow, Nauka, 1987, 544 p.)
2. Krein S., Petunin J., Semenov E. *Interpolation of linear operators.* Translations Math. Monographs, vol. 55, Providene, R.I., Amer. Math. Soc., 1992. (Rus. ed. : Krein S. G., Petunin Iu. I., Semenov E. M. *Interpoliatsiia lineinykh operatorov.* Moscow, Nauka, 1987, 400 p.)
3. Volosivets S. S. On Hardy and Bellman transforms of series with respect to multiplicative systems in symmetric spaces. *Analysis Math.* 2009, vol. 35, no. 2, pp. 131–148.
4. Mittal M. L., Rhoades B. E., Mishra V. N., Singh V. Using infinite matrix to approximate functions of class $Lip(\alpha, p)$ using trigonometric polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 326, no. 1, pp. 667–676.
5. Guven A. Trigonometric approximation in reflexive Orlicz spaces. *Anal. Theory Appl.*, 2011, vol. 27, no. 2, pp. 125–137.
6. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Holder and L^p norm. *East J. Approximations*, 2009, vol. 15. no. 2. pp. 143–158.
7. Leindler L. On the degree of approximation of continuous functions. *Acta Math. Hungar.*, 2004, vol. 104, pp. 105–113.
8. Bari N. K., Stechkin S. B. Nailuchshie priblizheniia i differentsial'nye svoistva dvukh sopriazhennykh funktsii. [Best approximations and differential properties of two conjugate functions]. *Trudy Mosk. mat. obshchestva*, 1956, vol. 5, pp. 488–522 (in Russian).
9. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces II.* Berlin, Springer, 1973, 243 p.
10. Schipp F. On L^p -norm convergence of series with respect to product systems. *Anal. Math.*, 1976, vol. 2, pp. 49–64.
11. Simon P. Verallgemeinerte Walsch – Fourierreihen. *Acta Math. Hungar.*, 1976, vol. 27, no. 3–4, pp. 329–341.
12. Hardy G. H. *Divergent Series.* New York, Oxford Univ. Press, 1949, 395 p. (Rus. ed. : Hardy G. *Raskhodiashchiesia riady.* Moscow, Izd-vo inostr. literatury, 1951, 505 p.)
13. Zelin H. The derivatives and integrals of fractional order in Walsh-Fourier analysis with application to approximation theory. *J. Approx. Theory.*, 1983, vol 39, no. 3, pp. 261–273.
14. Fridli S. On the rate of convergence of Cesaro means of Walsh – Fourier series. *J. Approx. Theory.*, 1994, vol. 76, no. 1, pp. 31–53.



УДК 517.521

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ХААРА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА И СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

М. Г. Магомед-Касумов

Научный сотрудник отдела математики и информатики Дагестанского научного центра РАН, Махачкала, rasuldev@gmail.com

Рассматриваются весовые пространства Лебега $L_w^{p(x)}$ и Соболева $W_{p(\cdot),w}$, показатель $p(x) \geq 1$ и вес $w(x)$ которых удовлетворяют условиям, обеспечивающим базисность системы Хаара в $L_w^{p(x)}$. Для функций из этих пространств получены оценки скорости сходимости сумм Фурье–Хаара. Оценки даны в терминах модуля непрерывности $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot),w}$, основанного на усредненном сдвиге (функции Стеклова).

Ключевые слова: весовое пространство, пространство Лебега, пространство Соболева, переменный показатель, модуль непрерывности, функция Стеклова, прямые теоремы теории приближений, скорость сходимости, суммы Фурье–Хаара, условие Макенхоупта.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $p(x)$ — измеримая на E функция такая, что $1 \leq \underline{p}(E) \leq \bar{p}(E) < \infty$. Здесь и далее символами $\underline{p}(M)$, $\bar{p}(M)$ будем обозначать $\operatorname{ess\,inf}_{x \in M} p(x)$ и $\operatorname{ess\,sup}_{x \in M} p(x)$ соответственно. Пусть $w(x)$ — неотрицательная почти всюду (п. в.) положительная суммируемая функция (вес). Через $L_w^{p(x)}(E)$ обозначим пространство измеримых функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \infty$. Пространство $L_w^{p(x)}(E)$ представляет собой линейное нормированное пространство, в котором одну из эквивалентных норм можно определить равенством (см. [1–4])

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(E) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1 \right\}.$$

В данной работе рассмотрена задача о приближении функций суммами Фурье–Хаара в весовых пространствах Лебега $L_w^{p(x)} = L_w^{p(x)}([0, 1])$ с переменным показателем $p(x)$ и весом $w(x)$. Далее, если речь идет об отрезке $[0, 1]$, то существенную верхнюю и нижнюю грани функции $p(x)$ будем обозначать кратко \bar{p} и \underline{p} соответственно. Через $c, c(p), c(p, w)$ будут обозначаться константы, зависящие лишь от величин в скобках и, вообще говоря, различные в разных местах. Результаты данной статьи являются обобщениями на весовой случай результатов, полученных в статье [5].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом параграфе приводятся некоторые свойства весовых пространств Лебега с переменным показателем.

Лемма 1. *Множество непрерывных функций $C[0, 1]$ всюду плотно в $L_w^{p(x)}$.*

Доказательство. Доказательство проведем в три шага. Сначала 1) докажем, что пространство ограниченных функций всюду плотно в $L_w^{p(x)}$, затем 2) покажем, что всякая ограниченная функция может быть сколь угодно точно приближена функциями с конечным числом значений. И наконец, 3) заметим, что функции с конечным числом значений можно с любой степенью точности приближать непрерывными функциями.

1. Отметим сначала, что всякая ограниченная измеримая функция $g(x)$, определенная на отрезке $[0, 1]$, будет принадлежать $L_w^{p(x)}$:

$$|g(x)| \leq c \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 |g(x)|^{p(x)} w(x) dx \leq (c+1)^{\bar{p}} \int_0^1 w(x) dx < \infty.$$



Возьмем теперь произвольную функцию $f(x) \in L_w^{p(x)}$. В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого множества $E \subset [0, 1]$ с мерой $\mu(E) < \delta$ интеграл $\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \varepsilon$. С другой стороны, $f(x)$ — измеримая функция, поэтому, пользуясь C -свойством Лузина, мы можем утверждать, что для данного $\delta > 0$ всегда найдется замкнутое множество $F_\delta \subset [0, 1]$ с мерой $\mu(F_\delta) > 1 - \delta$, на котором $f(x)$ будет непрерывной. Рассмотрим следующую функцию:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F_\delta, \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus F_\delta. \end{cases}$$

Из сказанного видно, что $g(x)$ — ограниченная измеримая функция, причем

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^{p(x)} w(x) dx = \int_{[0,1] \setminus F_\delta} |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \varepsilon,$$

так как $\mu([0, 1] \setminus F_\delta) < \delta$. Это и означает, что множество ограниченных функций всюду плотно в $L_w^{p(x)}$.

2. Любую ограниченную измеримую функцию $g(x)$ можно с любой степенью точности равномерно приблизить функциями с конечным числом значений. Действительно, задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, разобьем множество значений $[A, B]$ функции $g(x)$ на интервалы длиной меньше чем ε :

$$A = y_0 < y_1 < \dots < y_N = B, \quad y_{j+1} - y_j < \varepsilon.$$

Рассмотрим множества $e_j = \{x : y_j \leq g(x) < y_{j+1}\}$, $j = \overline{0, N-1}$, $e_N = \{x : g(x) = y_N\}$. Введем функцию $h(x)$, положив $h(x) = y_j$, $x \in e_j$. Ясно, что $h(x)$ — функция, принимающая конечное число значений, и $|g(x) - h(x)| < \varepsilon$, $x \in [0, 1]$. Следовательно, функции с конечным числом значений также образуют в $L_w^{p(x)}$ всюду плотное множество.

3. Покажем теперь, что всякую функцию $h(x)$, имеющую конечное число значений, можно как угодно точно приблизить в $L_w^{p(x)}$ непрерывными функциями. Поскольку функцию с конечным числом значений можно представить как линейную комбинацию характеристических функций $\chi_M(x)$, то доказательство достаточно провести только для $\chi_M(x)$.

Пусть $M \subset [0, 1]$ — измеримое множество и

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

Поскольку рассматривается обычная мера Лебега на прямой, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такие множества F_M — замкнутое и G_M — открытое, что

$$F_M \subset M \subset G_M \quad \text{и} \quad \mu(G_M) - \mu(F_M) < \varepsilon.$$

Определим теперь функцию

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\rho(x, [0, 1] \setminus G_M)}{\rho(x, [0, 1] \setminus G_M) + \rho(x, F_M)}.$$

Легко заметить, что введенная функция является непрерывной, равна 1 на множестве F_M , 0 вне множества G_M и не превосходит 1 на $G_M \setminus F_M$. Поэтому разность $|\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|$ отлична от нуля только на $G_M \setminus F_M$, причем $|\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leq 1$, $x \in G_M \setminus F_M$. Отсюда имеем:

$$\int_0^1 |\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|^{p(x)} w(x) dx = \int_{G_M \setminus F_M} |\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|^{p(x)} w(x) dx \leq \int_{G_M \setminus F_M} w(x) dx.$$

Но $w(x) \in L^1$, поэтому в силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега за счет выбора ε последний интеграл в приведенной формуле можно сделать сколь угодно малым. \square



Почти дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы в [1], можно показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. Если $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q}(E) < \infty$, то для любой функции $f \in L_w^{q(x)}(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot),w} \leq r_{p,q}^w \|f\|_{q(\cdot),w},$$

где

$$r_{p,q}^w \leq \frac{1}{\underline{\alpha}} + \frac{\int_E w(x) dx}{\underline{\alpha}^*} \quad \left(\alpha(x) = \frac{q(x)}{p(x)}, \quad \alpha^*(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) - 1} \right).$$

Нам также понадобится следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $f(x, t)$ — измеримая функция, заданная на декартовом произведении $E_1 \times E_2$ множеств E_1 и E_2 , на которых заданы конечные меры μ_1 и μ_2 соответственно. Тогда справедливо неравенство

$$\left\| \int_{E_2} |f(\cdot, x)| d\mu_2(x) \right\|_{p(\cdot),w(E_1)} \leq r_p \int_{E_2} \|f(\cdot, x)\|_{p(\cdot),w(E_1)} d\mu_2(x), \quad (1)$$

где

$$r_p \leq \frac{1}{\underline{p}(E_1)} + \frac{1}{\underline{p}'(E_1)} \leq 2, \quad \frac{1}{p(t)} + \frac{1}{p'(t)} = 1, \quad 1 \leq p(t) \leq \bar{p}(E_1) < \infty.$$

Доказательство. Утверждение леммы в случае $w(x) = 1$ было доказано в [2, с. 35]. Перенести его на случай произвольного веса $w(x)$ не составляет труда, если учесть, что $\|f\|_{p(\cdot),w} = \|f \cdot w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{E_2} |f(\cdot, x)| d\mu_2(x) \right\|_{p(\cdot),w(E_1)} = \left\| \int_{E_2} |f(\cdot, x) w(\cdot)^{\frac{1}{p(\cdot)}}| d\mu_2(x) \right\|_{p(E_1)} \leq \\ & \leq r_p \int_{E_2} \|f(\cdot, x) w(\cdot)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(E_1)} d\mu_2(x) = r_p \int_{E_2} \|f(\cdot, x)\|_{p(\cdot),w(E_1)} d\mu_2(x). \quad \square \end{aligned}$$

Как было отмечено в [6, 7], для построения рядов Фурье – Хаара (см. определение в [8, с. 70]) для функций из $L_w^{p(x)}$ необходимо и достаточно, чтобы имело место вложение $L_w^{p(x)} \subset L^1$. Там же было показано, что для выполнения указанного требования достаточно, чтобы вес удовлетворял следующим условиям:

- 1) $w(x) \geq C_1(w) > 0, \quad x \in E_1$ (п. в.),
- 2) $\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty,$

где $E_1 = \{x : p(x) = 1\}, E_2 = [0, 1] \setminus E_1, \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$.

Множество весовых функций $w(x)$ на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющих при заданном $p(x)$ условиям 1) и 2), будем обозначать через $\mathcal{H}(p)$. Таким образом, если $w \in \mathcal{H}(p)$, то $L_w^{p(x)} \subset L^1$.

Заметим также [6, 7], что для функций $f \in L_w^{p(x)}$ при $w \in \mathcal{H}(p)$ имеет место неравенство

$$\int_E |f(x)| dx \leq c(p, w) \cdot \|f\|_{p(\cdot),w}. \quad (2)$$

В [6, 7] были получены достаточные условия, при которых система Хаара образует базис в $L_w^{p(x)}$. Приведем соответствующую теорему из упомянутой статьи. Для этого сначала введем некоторые обозначения.

Пусть \mathfrak{S} — система множеств. Через $\mathfrak{F}_p(\mathfrak{S})$ будем обозначать подсистему системы множеств \mathfrak{S} , состоящую из множеств S , для которых $\underline{p}(S) = 1$:

$$\mathfrak{F}_p(\mathfrak{S}) = \{S \in \mathfrak{S} : \underline{p}(S) = 1\}.$$



Для заданной системы множеств \mathfrak{S} символом $\hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{S})$ обозначим множество весовых функций $w(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$(A1) \quad \sup_{S \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{S})} \frac{1}{|S|} \int_S w(x) dx < c(p, w),$$

$$(A2) \quad \sup_{S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}_p(\mathfrak{S})} \left(\frac{1}{|S|} \int_S w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|S|} \int_S w(x)^{-\frac{1}{p(S)-1}} dx \right)^{p(S)-1} < c(p, w).$$

Пусть \mathfrak{B}_ν — множество всех двоичных интервалов (см. [8, с. 69]) из пачек с номерами $j \geq \nu$

$$\mathfrak{B}_\nu = \{\Delta_j^i : j \geq \nu, i = 1, \dots, 2^j\}.$$

Множество измеримых на $[0, 1]$ функций $p(x) \geq 1$, удовлетворяющих условию

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x - y|} \leq c(p), \tag{3}$$

будем обозначать символом \mathcal{P}^{log} .

Теорема А. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}^{log}$, $w(x) \in \mathcal{H}(p)$. Тогда система Хаара будет базисом пространства $L_w^{p(x)}$, если $w(x) \in \bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{B}_\nu)$.

Отметим, что в безвесовом случае условия базисности системы Хаара были найдены в работе [9].

Основным результатом настоящей работы является оценка скорости сходимости сумм Фурье–Хаара $Q_n(f, x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_k(x)$ к исходной функции $f(x)$ в метрике пространства $L_w^{p(x)}$. Для безвесового случая исследование этого вопроса было проведено в [5], где автор отмечает необходимость использования для пространств Лебега с переменным показателем модуля непрерывности $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$, основанного на усредненном сдвиге (см. также [10]). В весовом случае мы воспользуемся аналогичной конструкцией. Пусть $f(x) \in L_w^{p(x)}$, $w \in \mathcal{H}(p)$. Будем считать, что функция $f(x)$ продолжена на всю полуось $[0, +\infty)$ с помощью равенства $f(x) = 0, x > 1$. Тогда для таких функций $f(x)$ мы можем ввести оператор Стеклова:

$$s_h(f) = s_h(f)(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

Отметим, что при условии $w \in \mathcal{H}(p)$ имеет место вложение $L_w^{p(x)} \subset L^1$, поэтому оператор Стеклова будет определен для любой $f \in L_w^{p(x)}$. Введем теперь модуль непрерывности:

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot), w} = \begin{cases} 0, & \delta = 0, \\ \sup_{0 < h \leq \delta} \|f - s_h(f)\|_{p(\cdot), w}, & \delta > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Модуль непрерывности (4) является неубывающей неотрицательной функцией, а при некоторых ограничениях на показатель $p(x)$ и вес $w(x)$ также и непрерывной. Последнее вытекает из следующего результата, доказанного в работе [11].

Теорема В. Пусть $\mathfrak{D}_\nu = \{\Delta_j^i \cup \Delta_j^{i+1} : j \geq \nu, i = 1, \dots, 2^j - 1\}$ и

$$1) p(x) \in \mathcal{P}^{log}(E), \quad 2) w(x) \in \mathcal{H}_{p(\cdot)}(E), \quad 3) w(x) \in \bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_\nu).$$

Тогда для функций $f(x) \in L_w^{p(x)}$ имеет место оценка ($0 < h \leq 1$)

$$\|s_h(f)\|_{p(\cdot), w} \leq c(p, w) \|f\|_{p(\cdot), w}.$$

Другими словами, семейство операторов $s_h(f)$ ($0 < h \leq 1$) будет равномерно ограничено в $L_w^{p(x)}$.

Данная теорема позволяет утверждать, в частности, что при условиях 1)–3) усредненный сдвиг $s_h(f)$ для любой функции $f \in L_w^{p(x)}$ также будет принадлежать пространству $L_w^{p(x)}$. Более того, с помощью этой теоремы легко устанавливается следующий факт (см. также [5, лемма 3.2]).



Лемма 4. Если $p(x) \in \mathcal{P}^{log}$, $w(x) \in \mathcal{H}(p) \cap \left[\bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathcal{D}_{\nu}) \right]$, то

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot), w} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (5)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.2 в работе [5] с той лишь особенностью, что в данном случае приходится пользоваться леммой 1 о всюду плотности непрерывных функций в $L_w^{p(x)}$.

Отметим, что система Хаара будет базисом в пространствах $L_w^{p(x)}$, если показатель $p(x)$ и вес $w(x)$ удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы В.

В данной работе рассматривается задача об оценке в терминах модуля непрерывности (4) скорости приближения функций суммами Фурье – Хаара в весовых пространствах Лебега $L_w^{p(x)}$ с переменным показателем $p(x) \in \mathcal{P}^{log}$ и весом $w(x) \in \mathcal{H}(p) \cap \left[\bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathcal{D}_{\nu}) \right]$.

3. ВЕСОВЫЕ КЛАССЫ СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Классом Соболева $W_{p(\cdot), w}^r(M)$ с переменным показателем $p(x)$ и весом $w(x)$ будем называть множество $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}(x) \in L_w^{p(x)}$ и $\|f^{(r)}\|_{p(\cdot), w} \leq M$. Положим $W_{p(\cdot), w}^r = \cup_{M>0} W_{p(\cdot), w}^r(M)$, $W_{p(\cdot), w} = W_{p(\cdot), w}^1$. В настоящем параграфе рассмотрена задача о приближении функций $f \in W_{p(\cdot), w}$ суммами Фурье – Хаара $Q_n(f) = Q_n(f, x)$.

Теорема 1. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}^{log}$, $w(x) \in \mathcal{H}(p) \cap \left[\bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathcal{D}_{\nu}) \right]$. Справедлива следующая оценка для $f \in W_{p(\cdot), w}$:

$$\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot), w} \leq \frac{c(p, w)}{n} \|f'\|_{p(\cdot), w}.$$

Доказательство. Пусть сначала $f(x) \in W_{p(\cdot), w}^1(1)$. Следовательно, $f'(x) \in L_w^{p(x)}$ и

$$\|f'\|_{p(\cdot), w} \leq 1. \quad (6)$$

Напомним, что для сумм Фурье – Хаара справедлива формула [12, с. 21]

$$S_n(f, x) = \frac{1}{|\lambda_{ns}|} \int_{\lambda_{ns}} f(t) dt, \quad x \in \lambda_{ns},$$

где λ_{ns} , $s = \overline{1, n}$ – двоичные интервалы постоянства системы функций χ_k , $k = \overline{1, n}$ и

$$|\lambda_{ns}| = \begin{cases} \frac{1}{2^{j+1}}, & 1 \leq s \leq 2i, \\ \frac{1}{2^j}, & 2i + 1 \leq s \leq n \end{cases}.$$

Используя эту формулу, оценим интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |n(Q_n(f, x) - f(x))|^{p(x)} w(x) dx &= \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{ns}} \left| \frac{n}{|\lambda_{ns}|} \int_{\lambda_{ns}} (f(y) - f(x)) dy \right|^{p(x)} w(x) dx = \\ &= \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{ns}} \left| \frac{n}{|\lambda_{ns}|} \int_{\lambda_{ns}} \left[\int_x^y f'(t) dt \right] dy \right|^{p(x)} w(x) dx \leq \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{ns}} \left[\frac{n}{|\lambda_{ns}|} \int_{\lambda_{ns}} dy \int_{\lambda_{ns}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)} w(x) dx = \\ &= \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{ns}} \left[n \int_{\lambda_{ns}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)} w(x) dx = \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{ns}} \left[n \int_{\lambda_{ns}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)-p_s} w(x) dx, \end{aligned} \quad (7)$$

где через p_s обозначен минимум $p(x)$ на λ_{ns} . Поскольку $f'(x) \in L_w^{p(x)}$ и $w(x) \in \mathcal{H}(p)$, то можно применить неравенство (2). Поэтому, используя условие (3) и неравенство (6) для одного из множителей под интегралом в последнем выражении цепочки соотношений (7), получим:

$$\left[n \int_{\lambda_{ns}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)-p_s} \leq n^{p(x)-p_s} \left[\int_0^1 |f'(t)| dt \right]^{p(x)-p_s} \leq$$



$$\leq c(p) \left[c(p, w) \|f'(t)\|_{p(\cdot), w} \right]^{p(x)-p_s} \leq c(p, w). \tag{8}$$

Из (7) и (8) имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |n(Q_n(f, x) - f(x))|^{p(x)} w(x) dx &\leq c(p, w) \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{n,s}} \left[n \int_{\lambda_{n,s}} |f'(t)| dt \right]^{p_s} w(x) dx = \\ &= c(p, w) \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{n,s}} w(x) dx \left[n \int_{\lambda_{n,s}} |f'(t)| dt \right]^{p_s}. \end{aligned} \tag{9}$$

Разобьем полученную сумму на две части: к первой части Σ_1 отнесем члены с такими номерами s , для которых $p_s = 1$, а все остальные включим во вторую часть Σ_2 . Так как $w(x) \in \bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_{\nu})$, то для веса $w(x)$ выполняется условие (A1). Поэтому для первой суммы ($\sigma_1 = \{s : p_s = 1\}$) можно написать:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{s \in \sigma_1} \frac{1}{|\lambda_{n,s}|} \int_{\lambda_{n,s}} w(x) dx \cdot (n|\lambda_{n,s}|) \cdot \int_{\lambda_{n,s}} |f'(t)| dt < c(p, w) \sum_{s \in \sigma_1} \int_{\lambda_{n,s}} |f'(t)| dt \leq \\ &\leq c(p, w) \sum_{s=1}^n \int_{\lambda_{n,s}} |f'(t)| dt = c(p, w) \|f'\|_1. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, к $f'(x)$ применимо неравенство (2). Поэтому для суммы Σ_1 получим:

$$\Sigma_1 < c(p, w). \tag{10}$$

Перейдем теперь к рассмотрению второй суммы ($\sigma_2 = \{s : p_s > 1\}$):

$$\Sigma_2 = \sum_{s \in \sigma_2} \int_{\lambda_{n,s}} w(x) dx \left[n \int_{\lambda_{n,s}} |f'(t)| dt \right]^{p_s}. \tag{11}$$

Применяя неравенство Гельдера для второго множителя, можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} \left[n \int_{\lambda_{n,s}} |f'(t)| dt \right]^{p_s} &= \left[n \int_{\lambda_{n,s}} w(t)^{\frac{1}{p_s}} |f'(t)| w(t)^{-\frac{1}{p_s}} dt \right]^{p_s} \leq \\ &\leq \left[n \left(\int_{\lambda_{n,s}} w(t) |f'(t)|^{p_s} dt \right)^{\frac{1}{p_s}} \left(\int_{\lambda_{n,s}} w(t)^{-\frac{p'_s}{p_s}} dt \right)^{\frac{1}{p'_s}} \right]^{p_s} < \\ &< \frac{c(p)}{|\lambda_{n,s}|^{p_s}} \left(\int_{\lambda_{n,s}} w(t) |f'(t)|^{p_s} dt \right) \left(\int_{\lambda_{n,s}} w(t)^{-\frac{p'_s}{p_s}} dt \right)^{\frac{p_s}{p'_s}} = \\ &= c(p) \frac{1}{|\lambda_{n,s}|} \left(\int_{\lambda_{n,s}} w(t) |f'(t)|^{p_s} dt \right) \left(\frac{1}{|\lambda_{n,s}|} \int_{\lambda_{n,s}} w(t)^{-\frac{1}{p_s-1}} dt \right)^{p_s-1}, \quad \frac{1}{p_s} + \frac{1}{p'_s} = 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), приходим к следующему соотношению:

$$\Sigma_2 < c(p) \sum_{s \in \sigma_2} \left[\frac{1}{|\lambda_{n,s}|} \int_{\lambda_{n,s}} w(x) dx \left(\frac{1}{|\lambda_{n,s}|} \int_{\lambda_{n,s}} w(t)^{-\frac{1}{p_s-1}} dt \right)^{p_s-1} \right] \int_{\lambda_{n,s}} w(t) |f'(t)|^{p_s} dt.$$

В силу (A2) выражение в квадратных скобках ограничено величиной $c(p, w)$, не зависящей от $\lambda_{n,s}$. Следовательно,

$$\Sigma_2 < c(p, w) \sum_{s \in \sigma_2} \int_{\lambda_{n,s}} w(t) |f'(t)|^{p_s} dt.$$



Рассмотрим функцию $h(t) = p_s, t \in \lambda_{ns}$. Так как $h(t) \leq p(t)$, то в силу леммы 2 и условия (6) имеем:

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &< c(p, w) \sum_{s \in \sigma_2 \lambda_{ns}} \int w(t) |f'(t)|^{h(t)} dt \leq c(p, w) \int_0^1 w(t) |f'(t)|^{h(t)} dt = \\ &= c(p, w) \int_0^1 w(t) \|f'\|_{h(\cdot), w}^{h(t)} \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{h(\cdot), w}} \right|^{h(t)} dt \leq c(p, w) \int_0^1 w(t) (r_{h,p}^w)^{h(t)} \|f'\|_{p(\cdot), w}^{h(t)} \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{h(\cdot), w}} \right|^{h(t)} dt \leq \\ &\leq c(p, w) (r_{h,p}^w)^{\bar{p}} \int_0^1 w(t) \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{h(\cdot), w}} \right|^{h(t)} dt = c(p, w) (r_{h,p}^w)^{\bar{p}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Из (9), (10) и (13) находим

$$\int_0^1 |n(Q_n(f, x) - f(x))|^{p(x)} w(x) dx \leq c(p, w).$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \left| \frac{n(Q_n(f, x) - f(x))}{c(p, w)^{\frac{1}{p(x)}}} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1.$$

Но тогда тем более

$$\int_0^1 \left| \frac{Q_n(f, x) - f(x)}{(1 + c(p, w))^{\frac{1}{2}} / n} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1.$$

Последнее и означает, что

$$\|Q_n(f) - f\|_{p(\cdot), w} \leq \frac{(1 + c(p, w))^{\frac{1}{2}}}{n} = \frac{c(p, w)}{n}.$$

Таким образом, для $f(x) \in W_{p(\cdot), w}^1(1)$ теорема доказана. Случай $f(x) \in W_{p(\cdot), w}$ сводится к уже доказанному заменой $g(x) = \frac{f(x)}{\|f'\|_{p(\cdot), w}}$. \square

4. ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В случае постоянного p задача о скорости приближения функций $f(x) \in L^p$ суммами Фурье – Хаара была решена П. Л. Ульяновым.

Теорема (П. Л. Ульянов). Если $f(x) \in L^p(0, 1)$ с некоторым $p \in [1, \infty]$, то

$$\|f - Q_n(f)\|_p \leq 24 \omega_p(f, \frac{1}{n}) \text{ при } n \geq 1,$$

где $\omega_p(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Данная теорема получила обобщение на переменный показатель в работе И. И. Шарапудинова [5]. Напомним, что для этого потребовалось ввести модуль непрерывности, основанный на усредненном сдвиге.

Теорема (И. И. Шарапудинов). Пусть $p(x) \in P^{log}$, $f(x) \in L^{p(x)}$. Тогда справедлива оценка

$$\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot)}.$$

В этом параграфе мы получим аналогичную оценку для функций $f(x) \in L_w^{p(x)}$ в терминах модуля непрерывности (4). Для этого нам понадобится следующий оператор:

$$\Theta_\nu(f)(x) = \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu s_h(f)(x) dh = \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu \frac{dh}{h} \int_0^h f(x+t) dt = \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu \frac{dh}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt, \quad 0 < \nu \leq 1.$$



Отметим, что данный оператор использовался при доказательстве приведенной ранее теоремы из статьи [5, § 5] (см. также [10, с. 291]). Рассмотрим некоторые свойства этого оператора.

1. Для любого $f(x) \in L^1$ функция $\Theta_\nu(f)(x)$, $0 < \nu \leq 1$ является абсолютно непрерывной на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство есть в [5, теорема 4]. Таким образом, $\Theta_\nu(f)(x)$ — абсолютно непрерывна и, следовательно, почти всюду дифференцируема. Более того, справедливо следующее свойство.

2. Для любого $f(x) \in L^1$ для почти всех $x \in [0, 1]$ имеет место равенство

$$(\Theta_\nu(f))'(x) = \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} dh. \quad (14)$$

Доказательство этого утверждения можно найти в [5, с. 13].

3. Для любого $f(x) \in L_w^{p(x)}$, $w \in \mathcal{H}(p)$ выполняется неравенство ($0 < \nu \leq 1$)

$$\|(\Theta_\nu(f))'\|_{p(\cdot),w} \leq c(p) \frac{\Omega(f, \nu)_{p(\cdot),w}}{\nu}.$$

Доказательство. Воспользуемся интегрированием по частям для интеграла из (14) ($u = 1/h$, $v' = f(x+h) - f(x)$):

$$\begin{aligned} \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) dh &= \frac{1}{h} \int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt \Big|_{\nu/2}^{\nu} + \\ &+ \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h^2} \int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt dh = I_1(x) + I_2(x). \end{aligned} \quad (15)$$

$I_1(x)$ можно записать в следующем виде:

$$I_1(x) = (s_\nu(f)(x) - f(x)) - (s_{\nu/2}(f)(x) - f(x)).$$

Отсюда следует, что

$$\|I_1\|_{p(\cdot),w} \leq \|s_\nu(f) - f\|_{p(\cdot),w} + \|s_{\nu/2}(f) - f\|_{p(\cdot),w} \leq \Omega(f, \nu)_{p(\cdot),w} + \Omega(f, \frac{\nu}{2})_{p(\cdot),w} \leq 2\Omega(f, \nu)_{p(\cdot),w}. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь $I_2(x)$:

$$I_2(x) = \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{h} \int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt \right] dh = \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h} (s_h(f)(x) - f(x)) dh.$$

Тогда, используя лемму 3, получим:

$$\begin{aligned} \|I_2\|_{p(\cdot),w} &= \left\| \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h} (s_h(f)(\cdot) - f(\cdot)) dh \right\|_{p(\cdot),w} \leq \\ &\leq c(p) \int_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h} \|s_h(f) - f\|_{p(\cdot),w} dh \leq c(p) \Omega(f, \nu)_{p(\cdot),w} \quad (c(p) \leq 2). \end{aligned} \quad (17)$$

Из (15), (16) и (17) получаем требуемое. □

Из свойств 1 и 3 следует, что, в частности

4. $\Theta_\nu(f) \in W_{p(\cdot),w}$ для $f \in L_w^{p(x)}$, $w \in \mathcal{H}(p)$, $0 < \nu \leq 1$.

5. Пусть $f \in L_w^{p(x)}$, $w \in \mathcal{H}(p)$, $0 < \nu \leq 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\|\Theta_\nu(f) - f\|_{p(\cdot),w} \leq c(p) \Omega(f, \nu)_{p(\cdot),w}.$$



Доказательство. В силу того что $|\Theta_\nu(f)(x) - f(x)| \leq \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu |s_h(f)(x) - f(x)| dh$, пользуясь леммой 3, сразу получаем требуемое:

$$\|\Theta_\nu(f) - f\|_{p(\cdot), w} \leq c(p) \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu \|s_h(f) - f\|_{p(\cdot), w} dh \leq c(p) \frac{2}{\nu} \int_{\nu/2}^\nu \Omega(f, \nu)_{p(\cdot), w} dh = c(p) \Omega(f, \nu)_{p(\cdot), w}. \quad \square$$

Сформулируем теперь основную теорему данного пункта.

Теорема 2. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}^{log}$, $w(x) \in \mathcal{H}(p) \cap \left[\bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_\nu) \right]$. Тогда для $f \in L_w^{p(\cdot)}$ имеет место оценка

$$\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot), w} \leq c(p, w) \Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot), w}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} \|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot), w} &\leq \|f - \Theta_{\frac{1}{n}}(f)\|_{p(\cdot), w} + \|\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - Q_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f))\|_{p(\cdot), w} + \\ &\quad + \|Q_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f)) - Q_n(f)\|_{p(\cdot), w}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из свойства 5 оператора $\Theta_\nu(f)$ следует, что

$$\|f - \Theta_{\frac{1}{n}}(f)\|_{p(\cdot), w} \leq c(p) \Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot), w}. \quad (19)$$

Далее, при условиях теоремы система Хаара образует базис в $L_w^{p(x)}$ (см. теорему А), поэтому

$$\|Q_n(f)\|_{p(\cdot), w} \leq c(p, w) \|f\|_{p(\cdot), w}.$$

Но тогда в силу линейности оператора $Q_n(f)$ и свойства 5 оператора $\Theta_\nu(f)$ для 3-го слагаемого в (18) получаем:

$$\begin{aligned} \|Q_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f)) - Q_n(f)\|_{p(\cdot), w} &= \|Q_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - f)\|_{p(\cdot), w} \leq \\ &\leq c(p, w) \|\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - f\|_{p(\cdot), w} \leq c(p, w) \Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot), w}. \end{aligned} \quad (20)$$

Наконец, свойства 3, 4 оператора $\Theta_\nu(f)$ и теорема 1 позволяют написать для второго слагаемого из (18) оценку:

$$\begin{aligned} \|\Theta_{\frac{1}{n}}(f) - Q_n(\Theta_{\frac{1}{n}}(f))\|_{p(\cdot), w} &\leq \frac{c(p, w)}{n} \|\Theta'_{\frac{1}{n}}(f)\|_{p(\cdot), w} \leq \\ &\leq \frac{c(p, w)}{n} \cdot \frac{\Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot), w}}{1/n} = c(p, w) \Omega(f, \frac{1}{n})_{p(\cdot), w}. \end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство завершается подстановкой оценок (19)–(21) в (18). □

Автор благодарит И. И. Шарпудинова за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

Библиографический список

1. Шарпудинов И. И. О топологии пространства $L^{p(t)}([0, 1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.
2. Шарпудинов И. И. Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. 270 с.
3. Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 2011. P. 509. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8.
4. Cruz-Uribe D., Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces : Foundations and Harmonic Analysis. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2013. P. 312. DOI: 10.1007/978-3-0348-0548-3.
5. Шарпудинов И. И. Приближение функций из пространства Лебега и Соболева с переменным показателем суммами Фурье – Хаара // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 2. С. 145–160. DOI: 10.4213/sm8274.
6. Магомед-Касумов М. Г. Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования : тез. докл. междунар. науч. конф. (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.). Владикавказ, 2013. С. 68–69.
7. Магомед-Касумов М. Г. Базисность системы Хаара



- в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказ. мат. журн. 2014. Т. 16, вып. 3. С. 38–46.
8. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.
9. Шарапудинов И. И. О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(t)}([0, 1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 2(6). С. 275–283.
10. Guven A., Israfilov D. M. Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ // J. Math. Inequal. 2010. Vol. 4, № 2. P. 285–299.
11. Шах-Эмиров Т. Н. О равномерной ограниченности семейства операторов Стеклова в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Вестн. ДНЦ РАН. 2014. Вып. 54. С. 12–17.
12. Соболев И. М. Многомерные квадратные формулы и функции Хаара. М. : Наука, 1969. 288 с.

Approximation of Functions by Fourier – Haar Sums in Weighted Variable Lebesgue and Sobolev Spaces

M. G. Magomed-Kasumov

Daghestan Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, 45, Gadgieva str., Makhachkala, Republic of Dagestan, 367000, Russia, rasuldev@gmail.com

It is considered weighted variable Lebesgue $L_w^{p(x)}$ and Sobolev $W_{p(\cdot), w}$ spaces with conditions on exponent $p(x) \geq 1$ and weight $w(x)$ that provide Haar system to be a basis in $L_w^{p(x)}$. In such spaces there were obtained estimates of Fourier – Haar sums convergence speed. Estimates are given in terms of modulus of continuity $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot), w}$, based on mean shift (Steklov's function).

Key words: weighted space, Lebesgue space, Sobolev space, variable exponent, modulus of continuity, Steklov's function, direct theorems of approximation theory, convergence speed, Fourier – Haar sums, Muckenhoupt condition.

References

- Sharapudinov I. I. Topology of the space $L^{p(t)}([0, 1])$. *Mat. Zametki*, 1979, vol. 26, no. 4, pp. 613–632. DOI: 10.1007/BF01159546.
- Sharapudinov I. I. *Some aspects of approximation theory in variable Lebesgue spaces*. Vladikavkaz, 2012, 270 p. (in Russian).
- Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2011, 509 p. DOI : 10.1007/978-3-642-18363-8.
- Cruz-Uribe D., Fiorenza A. *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2013. 312 p. DOI 10.1007/978-3-0348-0548-3.
- Sharapudinov I.I. Approximation of function by Fourier – Haar sums in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces by Fourier – Haar sums. *Sb. Math.*, 2014, vol. 205, no. 2, pp. 145–160. DOI: 10.4213/sm8274.
- Magomed-Kasumov M. G. Basis property of the Haar system in the weighted variable Lebesgue spaces. *Poriadkovyi analiz i smezhnye voprosy matematicheskogo modelirovaniia: tezisy dokladov mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii* (Vladikavkaz, 14–20.07.2013). Vladikavkaz, 2013, pp. 68–69 (in Russian).
- Magomed-Kasumov M. G. Basis property of the Haar system in the weighted variable Lebesgue spaces. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2014, vol. 16, iss. 3, pp. 38–46 (in Russian).
- Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal series*. Translations of Math. Monographs, vol. 75, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1989.
- Sharapudinov I.I. On the basis property of the Haar system in the space $L^p(t)([0, 1])$ and the principle of localization in the mean. *Math. of the USSR-Sbornik*, 1987, vol. 58, no. 1, pp. 279–287. DOI: 10.1070/SM1987v058n 01ABEH003104.
- Guven A., Israfilov D. M. Trigonometric approximation in generalized lebesgue spaces $L^{p(x)}$. *J. Math. Inequal.*, 2010, vol. 4, no. 2, pp. 285–299.
- Shakh-Emirov T. N. O ravnomernoi ogranichennosti semeistva operatorov Steklova v vesovykh prostranstvakh Lebeга s peremennym pokazatelem [Uniform boundedness of Steklov's operators families in weighted variable Lebesgue spaces]. *Vestnik DNC RAN*, 2014, iss. 54, pp. 12–17 (in Russian).
- Sobol I. M. *Mnogomernye kvadratnye formuly i funktsii Khaara* [Multidimensional Quadrature Formulas and Haar Functions]. Moscow, Nauka, 1969, 288 p. (in Russian).



УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА – ЛИУВИЛЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ НА ОТРЕЗКЕ

А. А. Тюленева

Аспирантка кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, aatuleneva@km.ru

Прямая теорема приближения алгебраическими многочленами доказана для интегралов Римана–Лиувилля порядка $r > 0$. Как следствие, получены асимптотические равенства для ε -энтропии образа класса типа Гельдера при действии оператора интегрирования Римана–Лиувилля порядка $r > 0$.

Ключевые слова: p -вариация, пространство L^p , интеграл Римана–Лиувилля, наилучшее приближение, алгебраические многочлены, ε -энтропия.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЛЕММЫ

Пусть $\xi = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\lambda(\xi) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ — диаметр разбиения ξ , $1 \leq p < \infty$. Определим p -вариационную сумму по разбиению и p -вариационный модуль непрерывности равенствами

$$\mathfrak{X}_\xi^p(f) = \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p}, \quad \omega_{1-1/p}(f, \delta)_{[a,b]} = \sup_{\lambda(\xi) \leq \delta} \mathfrak{X}_\xi^p(f), \quad \delta \in [0, b-a].$$

Если $V_p(f, [a, b]) = \omega_{1-1/p}(f, b-a) < \infty$, то $f \in V_p[a, b]$, а если $1 < p < \infty$ и $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_{1-1/p}(f, \delta)_{[a,b]} = 0$, то $f \in C_p[a, b]$. Оба этих пространства являются банаховыми с нормой $\|f\|_{V_p} = \max(\|f\|_\infty, V_p(f, [a, b]))$. Подробнее об этих пространствах и теории приближений в них см. [1]. Далее, $E_n(f)_{V_p}$, $(E_n(f))_X$ означает наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами p степени не выше $n-1$ ($p \in \mathcal{P}_{n-1}$) в метрике $C_p[0, 1]$ ($X[0, 1]$). Под пространством $X[a, b]$ будем понимать одно из следующих пространств: $L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, с нормой $\|f\|_{L^p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$, $C[a, b]$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ или $C_p[a, b]$, $1 < p < \infty$. Если $[a, b] = [0, 1]$, то $\|\varphi\|_{X[a,b]} = \|\varphi\|_X$ и вместо $\omega_{1-1/p}(f, \delta)_{[a,b]}$ пишем просто $\omega_{1-1/p}(f, \delta)$. Стандартным образом модуль гладкости порядка $k \in \mathbb{N}$ в $X[a, b]$ определяется формулой

$$\omega_k(f, \delta)_{X[a,b]} = \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k f(x)\|_{X[a,b-kh]}; \quad \Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f(x+ih).$$

При $[a, b] = [0, 1]$ пишем просто $\omega_k(f, \delta)_X$, вместо $X = L^p$ или $X = C$ пишем p или ∞ .

Для функции $\varphi \in L^1[a, b]$ интегралом Римана–Лиувилля порядка $r > 0$ называется функция

$$(I_a^r \varphi)(x) = \Gamma^{-1}(r) \int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi(t) dt, \quad a \leq x \leq b,$$

где $\Gamma(r)$ обозначает гамма-функцию Эйлера. Существование этого интеграла следует из леммы 5. Подробнее о свойствах этого интеграла см. [2, гл. 1]. Будем писать также $f \in I_{*,a}^r(\varphi)$, если $f(x) = I_a^r(\varphi)(x) + \sum_{k=1}^{[r]} c_k (x-a)^{r-k}$, $c_k \in \mathbb{R}$. Для приближения функций $f = I_0^r(\varphi)$ и $f \in I_{*,0}^r(\varphi)$ удобно использовать величины

$$\mathcal{E}_{n,s}(f)_X = \inf \left\{ \left\| f - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \sum_{j=1}^{[s]} b_j x^{s-j} \right\|_X : a_i, b_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad s-r \in \mathbb{N}.$$

Для $r > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$ через $W^r H^\alpha(M, N, [0, 1])$ обозначим множество

$$\left\{ f \in C[0, 1] : f \in I_{*,0}^r(\varphi), \|f\|_\infty \leq N, \|\varphi\|_\infty \leq M, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M|x-y|^\alpha, x, y \in [0, 1] \right\}.$$



Будем писать $\omega \in \Omega$, если $\omega(t)$ возрастает и непрерывна на $[0, 1]$, а также обладает свойствами $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ при $t > 0$ и $\omega(2t) \leq C\omega(t)$, $t \in [0, 1/2]$. Для функции $\omega \in \Omega$ положим $\omega^{-1}(u) = \sup\{t \in [0, 1] : \omega(t) \leq u\}$, $u \in [0, \omega(1)]$. Функция $\omega \in \Omega$ принадлежит классу N^r , $r > 0$, если для $1 \geq t \geq u > 0$ верно неравенство $t^{-r}\omega(t) \leq Cu^{-r}\omega(u)$, соответственно $\omega \in \Omega$ принадлежит классу B , если $\int_0^\delta t^{-1}\omega(t) dt \leq C\omega(\delta)$, $\delta \in [0, 1]$. При $r > 0$, $1 < p < \infty$ и $\omega \in \Omega \cap N^{1-1/p}$ рассмотрим класс

$$W^r H_{1-1/p}^\omega(M, N, [0, 1]) = \left\{ f \in C_p[0, 1] : f \in I_{*,0}^r(\varphi), \|f\|_{V_p} \leq N, \right. \\ \left. \|\varphi\|_{V_p} \leq M, \omega_{1-1/p}(f, \delta) \leq \omega(\delta), \delta \in [0, 1] \right\}.$$

Пусть K — компакт в метрическом пространстве (X, ρ) . Множество $U \subset X$ называется ε -сетью для множества K в пространстве X , если для любой точки $x \in K$ найдется $y \in U$ такая, что $\rho(x, y) \leq \varepsilon$. Соответственно множество $V \subset K$ называется ε -цепью для K , если для любых $x, y \in V$, $x \neq y$, верно $\rho(x, y) > \varepsilon$. Следуя работе А. Н. Колмогорова и В. М. Тихомирова [3], двоичный логарифм количества точек в минимальной ε -сети для K в X будем называть ε -энтропией K в X и обозначать через $H_\varepsilon(K, X)$, а двоичный логарифм количества точек в максимальной ε -цепи для K будем называть ε -емкостью и обозначать $C_\varepsilon(K)$. Можно показать, что при $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства (см. [3])

$$C_{2\varepsilon}(K) \leq H_\varepsilon(K, X) \leq C_\varepsilon(K). \tag{1}$$

Лемма 1 (см. [1]). Пусть $1 < p < \infty$ и $f \in V_p[a, b]$. Тогда справедливо неравенство $\omega(f, \delta)_{V_p[a,b]} \leq 2\omega_{1-1/p}(f, \delta)_{[a,b]}$.

Лемма 2 (см. [4]). Пусть l_N^1 есть пространство N -мерных векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ с нормой $\|x\|_{l_N^1} = \sum_{i=1}^n |x_i|$, а K_N есть множество из 2^N точек пространства l_N^1 с координатами 0 или 1. Если $M(N, d)$ — мощность максимальной d -цепи для K_N в метрике l_N^1 , то при $d = \lfloor N/k \rfloor$, $k > 2$, и $N > N_0(k)$ справедливо неравенство $M(N, d) \geq C^N$, $C > 1$.

Рассмотрим теперь банахово пространство $X[a, b]$ и $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность таких элементов из $X[a, b]$, что их линейные комбинации плотны в $X[a, b]$ и любое конечное подмножество Φ линейно независимо. Пусть последовательность $\Delta = \{\delta_i\}_{i=0}^\infty$ убывает к нулю, а $E_n^\Phi(f)_X = \inf\{\|f - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k\|_X : a_k \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ($E_0^\Phi(f)_X = \|f\|_X$). Тогда по определению $A(\Delta, \Phi)_X = \{f \in X[a, b]; E_n^\Phi(f)_X \leq \delta_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$. В частности, множество $A(\Delta, \Phi)_X$ ограничено в $X[a, b]$, более того, оно компактно в $X[a, b]$. Следующая лемма доказана в [5] и является важным вкладом в теорию приближений.

Лемма 3. Пусть $\Delta = \{\delta_i\}_{i=0}^\infty$ убывает к нулю. Тогда верно неравенство $H_\varepsilon(A(\Delta, \Phi)_X) \leq C \sum_{i=1}^j N_i$, где $N_i = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \delta_k \leq M^{-i}\}$ при $i \in \mathbb{N}$, $M > 1$ — любое фиксированное число, а j определяется из неравенств $M^{-(j-1)} < \varepsilon \leq M^{-j}$ при $\varepsilon < \varepsilon_0(M)$.

Следующая лемма установлена в [4, следствие 1] и позволяет без лишних вычислений применять оценку леммы 3.

Лемма 4. Пусть $\omega \in \Omega \cap B \cap N^\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$ и $\delta_n = \omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для N_i и j , определенных согласно лемме 3, справедливо неравенство $\sum_{i=1}^j N_i \leq C\omega^{-1}(\varepsilon)$.

Лемма 5 является аналогом известного неравенства для сверток 2π -периодических функций (см. [6, гл. 3]).

Лемма 5. Пусть $a < b$ и $\psi(x) = \int_a^b g(x-t)\varphi(t)dt$, где $g(t) \in L^1[a-b, b-a]$, $x \in [a, b]$, $\varphi \in X[a, b]$. Тогда

$$\|\psi\|_{X[a,b]} \leq C_1 \|g\|_{L^1[a-b,b-a]} \|\varphi\|_{X[a,b]},$$

причем $C_1 = 1$ для $X = L^p$ и C , $C_1 = 3^{1/p}$ для $X = C_p$.

Доказательство. С помощью простой замены переменных получаем:

$$\int_a^b g(x-t)\varphi(t)dt = \int_{x-b}^{x-a} g(t)\varphi(x-t)dt.$$

Отсюда в случае $X[a, b] = C[a, b]$ сразу имеем:

$$\|\psi\|_{C[a,b]} \leq \|\varphi\|_{C[a,b]} \|g\|_{L^1[a-b,b-a]}. \tag{2}$$



В случае $X = L^p$ или $X = C_p$ рассмотрим функцию $\varphi_1(t)$, равную $\varphi(t)$ на $[a, b]$ и обращающуюся в нуль вне этого отрезка. Тогда

$$\int_{x-b}^{x-a} g(t)\varphi(x-t) dt = \int_{a-b}^{b-a} g(t)\varphi_1(x-t) dt. \quad (3)$$

Так как $x \in [a, b]$, $x - t$ пробегает отрезок $[2a - b, 2b - a]$. Применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем для $X = L^p$:

$$\|\psi\|_{L^p[a,b]} \leq \int_{a-b}^{b-a} |g(t)| \left\{ \int_{a-2b}^{2b-a} |\varphi_1(\tau)|^p d\tau \right\}^{1/p} dt \leq \|\varphi\|_{L^p[a,b]} \|g\|_{L^1(a-b,b-a)}.$$

В случае $X = C_p$ из (3) следует ($q = p/(p - 1)$)

$$\begin{aligned} |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})| &= \left| \int_{a-b}^{b-a} g(t)(\varphi_1(x_i - t) - \varphi_1(x_{i-1} - t)) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{a-b}^{b-a} |g(t)|^{1/p+1/q} |\varphi_1(x_i - t) - \varphi_1(x_{i-1} - t)| dt \leq \\ &\leq \|g\|_{L^1[a-b,b-a]}^{1/q} \left(\int_{a-b}^{b-a} |g(t)| |\varphi_1(x_i - t) - \varphi_1(x_{i-1} - t)|^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Для любого разбиения $\xi = \{x_i\}_0^n$ отрезка $[a, b]$ с помощью суммирования получаем:

$$\sum_{i=1}^n |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})|^p \leq \|g\|_{L^1[a-b,b-a]}^p V_p^p(\varphi_1, [a - 2b, 2b - a]).$$

Очевидно, что за счет доопределения нулем p -вариация в p -й степени не могла измениться более чем на $2\|\varphi\|_\infty^p \leq 2\|\varphi\|_{V_p[a,b]}^p$, поэтому

$$V_p(\varphi_1, [a - 2b, 2b - a]) \leq 3^{1/p} \|\varphi\|_{V_p[a,b]}.$$

Объединяя полученное неравенство с (2), доказываем лемму для $X = C_p$. Лемма доказана.

Лемма 6 (см. [7]). Если $V_s(x - c, a, b) = (a(x - c) + b(|x - c|))^s$, $|c| < 1$, $s > -2$, $a, b \in \mathbb{R}$, то справедливо неравенство

$$E_n(V_s(x - c, a, b))_{L^1(-1,1)} \leq C(s, a, b)n^{-s-2}.$$

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Через $W_p^r[a, b]$ обозначим множество функций f таких, что $f, f', \dots, f^{(r)}$ абсолютно непрерывны на $[a, b]$, причем $f^{(r)} \in L^p[a, b]$. Через W_∞^r мы обозначим пространство r раз непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$.

Лемма 7 (см. [8, гл. 6, § 2]). Пусть $r \in \mathbb{N}$, $f \in L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, или $f \in C[0, 1]$ ($p = \infty$). Тогда для любого $h \in (0, 1)$ существует функция $g_{h,r}(f) \in W_p^r[0, 1]$ такая, что $\|f - g_{h,r}(f)\|_p \leq C_1\omega_r(f, h)_p$ и $\|(g_{h,r}(f))^{(r)}\|_p \leq C_2h^{-r}\omega_r(f, h)_p$.

Лемма 8. Пусть $f \in C_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Тогда существует $g_h(f)$ такая, что $(g_h(f))'$ существует всюду и принадлежит $C_p[0, 1]$, причем

$$\|f - g_h(f)\|_{C_p} \leq C_1\omega_{1-1/p}(f, h) \quad \text{и} \quad \|(g_h(f))'\|_{C_p} \leq C_2h^{-1}\omega_{1-1/p}(f, h).$$

Доказательство. Пусть $g_h(f)(x) = h^{-1} \int_x^{x+h} f^*(t) dt$, где $f^*(t)$ равна $f(t)$ на $[0, 1]$ и $f^*(t) = f(1)$ при $t \geq 1$. Аналогично [9, добавление 2] показывается, что для упомянутых выше пространств X

$$\|f - g_h(f)\|_X \leq \omega_1(f^*, h)_{X[0,1+h]}, \quad \|(g_h(f))'\|_X \leq h^{-1}\omega_1(f^*, h), \quad h \in (0, 1). \quad (4)$$

Но по лемме 1 имеем: $\omega_1(f^*, h)_{C_p[0,1+h]} \leq 2\omega_{1-1/p}(f^*, h)_{[0,1+h]}$. С другой стороны, для любого разбиения $\xi_1 = \{x_i\}_{i=0}^\infty$ отрезка $[0, 1 + h]$ диаметра не больше h пусть $x_{j-1} < 1 \leq x_j$. Тогда для разбиения $\xi = \{x_i\}_{i=0}^{j-1} \cup \{1\}$ имеем равенство: $\omega_{\xi_1}^p(f) = \omega_\xi^p(f)$, т. е.

$$\omega_{1-1/p}(f^*, h)_{[0,1+h]} = \omega_{1-1/p}(f, h).$$

Подставляя полученные оценки в (4), доказываем лемму 8.



2. ПРЯМЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА – ЛИУВИЛЛЯ

Следующая теорема для случая $X = L^p$, $1 \leq p < \infty$, доказана Ф. Г. Насибовым [10].

Теорема 1. Пусть $r > 0$, $f(x) = (I_0^r \varphi)(x)$ и $\varphi \in X[0, 1]$. Тогда $E_n(f)_X \leq C_2(r) \|\varphi\|_X / n^r$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \int_0^1 D_{r-1}(x-t)\varphi(t)dt/\Gamma(r), \tag{5}$$

где $D_{r-1}(t) = (|t|^{r-1} + |t|^{r-2})/2$. Для этого достаточно разбить интеграл справа в (5) на два: от 0 до x и от x до 1. По определению второй равен нулю, первый же совпадает с интегралом Римана – Лиувилля. Согласно лемме 6 существует многочлен $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ такой, что $\|D_{r-1}(x) - p_{n-1}(x)\|_{L^1(-1,1)} \leq C_1 n^{-r}$. Полагая $V_{n-1}(f, x) = \Gamma^{-1}(r) \int_0^1 \varphi(t)p_{n-1}(x-t) dt$ (тогда $V_{n-1}(f) \in \mathcal{P}_{n-1}$), имеем благодаря лемме 5

$$\|f(x) - V_{n-1}(f, x)\|_X \leq \frac{C_2 \|\varphi\|_X}{\Gamma(r)} \int_{-1}^1 |p_{n-1}(x) - D_{r-1}(x)| dx \leq C_3 \|\varphi\|_X / n^r.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $r > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $f(x) \in I_{*,0}^r(\varphi)(x)$, $\varphi(t) \in L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, или $\varphi(t) \in C[0, 1]$ ($p = \infty$). Тогда справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_{n,k+r}(f)_X \leq C \omega_k(\varphi, 1/n)_p / n^r.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g_{h,k}(\varphi)$ из леммы при $h = 1/n$. Тогда

$$g_{h,k}(\varphi)(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g_{h,k}^{(j)}(\varphi)(0)x^j}{j!} + I_0^k(g_{h,k}^{(k)}(\varphi))(x).$$

Поскольку $I_0^r(q_\alpha) = q_{r+\alpha}$, где $q_\alpha(x) = \Gamma^{-1}(\alpha + 1)x^\alpha$, то согласно теореме 2.5 в [2, гл. 1] имеем

$$I^r(g_{h,k}(\varphi))(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g_{h,k}^{(j)}(\varphi)(0)x^{j+r}}{(j+r+1)!} + I_0^{r+k}(g_{h,k}^{(k)}(\varphi))(x).$$

В силу определения $\mathcal{E}_{n,r}$ и теоремы 1 получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n,r+k}(f)_p &= \mathcal{E}_{n,r+k}(I_0^r(\varphi))_p \leq \mathcal{E}_{n,r+k}(I_0^r(\varphi - g_{h,k}(\varphi)))_p + \mathcal{E}_{n,r+k}(I_0^r(g_{h,k}(\varphi)))_p \leq \\ &\leq E_n(I_0^r(\varphi - g_{h,k}(\varphi)))_p + E_n(I_0^{r+k}(g_{h,k}^{(k)}(\varphi)))_p \leq \\ &\leq C_1(n^{-r} \|\varphi - g_{h,k}(\varphi)\|_p + n^{-r-k} h^{-k} \omega_k(\varphi, h)_p) \leq C_2 n^{-r} \omega_k(\varphi, 1/n). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Для $X = L^p$, $1 \leq p < \infty$, $r > 0$ и $k = 2$ аналог теоремы 2 доказан Ф. Г. Насибовым [10] на отрезке $[a, b] \subset (0, 1)$.

Теперь получим аналог теоремы 2 для функций ограниченной p -вариации на отрезке.

Теорема 3. Пусть $r > 0$, $1 < p < \infty$, $\varphi(t) \in C_p[0, 1]$, $f(x) \in I_{*,0}^r(\varphi)$. Тогда верно неравенство

$$\mathcal{E}_{n,r+1}(f)_{C_p} \leq C \omega_{1-1/p}(\varphi, 1/n) / n^r, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2, используя функцию $g_h(\varphi)$ из леммы 8, находим, что

$$g_h(\varphi)(x) = g_h(\varphi)(0) + \int_0^x (g_h(\varphi))'(t) dt = g_h(\varphi)(0) + I_0^1(g_h'(\varphi))(x),$$

откуда

$$I_0^r(g_h(\varphi))(x) = x^r g_h(\varphi)(0) / \Gamma(r+1) + I_0^{r+1}(g_h'(\varphi))(x)$$

также по теореме 2.5 из [2, гл. 1]. В итоге при $h = 1/n$ получаем по теореме 1

$$\mathcal{E}_{n,r+1}(f)_{C_p} = \mathcal{E}_{n,r+1}(I_0^r(\varphi))_{C_p} \leq \mathcal{E}_{n,r+1}(I_0^r(\varphi - g_h(\varphi)))_{C_p} + \mathcal{E}_{n,r+1}(I_0^r(g_h(\varphi)))_{C_p} \leq$$



$$\begin{aligned} &\leq E_n(I_0^r(\varphi - g_h(\varphi)))_{C_p} + E_n(I_0^{r+1}((g_h(\varphi))'))_{C_p} \leq \\ &\leq C_1(n^{-r}\|\varphi - g_h(\varphi)\|_{C_p} + n^{-r-1}h^{-1}\omega_{1-1/p}(\varphi, h)) \leq C_2n^{-r}\omega_{1-1/p}(\varphi, 1/n). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Применим теорему 2 к оценке ε -энтропии некоторых компактов дифференцируемых в смысле Римана–Лиувилля функций. Напомним, что $A(\varepsilon) \asymp B(\varepsilon)$ означает, что $C_1A(\varepsilon) \leq B(\varepsilon) \leq C_2A(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon > 0$, где $0 < C_1 < C_2$.

Теорема 4. Пусть $r > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ (при $q = \infty$ вместо $L^\infty[0, 1]$ рассматриваем $C[0, 1]$). Тогда имеет место порядковое равенство:

$$H_\varepsilon(W^r H^\alpha(M, N, [0, 1]), L^q[0, 1]) \asymp (1/\varepsilon)^{1/(r+\alpha)}.$$

Доказательство. Отметим сразу, что если $f(x) \in W^r H^\alpha(M, N, [0, 1])$, то

$$f(x) = (I_0^r(\varphi(t) - \varphi(0)))(x) + I_0^r(\varphi(0)) + \sum_{k=1}^{[r]} c_k x^{r-k} = (I_0^r(\varphi(t) - \varphi(0)))(x) + \sum_{k=0}^{[r]} c_k x^{r-k},$$

где $\varphi \in Lip(\alpha)$, т. е. $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M|x - y|^\alpha$, $x, y \in [0, 1]$. Пусть $\Phi = \{x^{k-r}\}_{k=0}^{[r]} \cup \{x^n\}_0^\infty$. По теореме 2 при $k = 1$ получаем:

$$\mathcal{E}_{n, r+1}(f)_\infty = E_{n+[r]+1}^\Phi(f)_\infty \leq C_1 n^{-r-\alpha} \leq C_1 (r+1)^{r+\alpha} (n+[r]+1)^{-r-\alpha},$$

т. е. $f \in A(\Delta, \Phi)_C$, где $\delta_n = C_2 n^{-r-\alpha}$. Ясно, что $\omega(\delta) = \delta^{r+\alpha}$ принадлежит $B \cap N^{r+\alpha}$. Поэтому по леммам 3 и 4 имеем: $H_\varepsilon(W^r H^\alpha(M, N, [0, 1]), C[0, 1]) \leq C_3 \varepsilon^{-1/(r+\alpha)}$.

Для оценки снизу введем функции, использовавшиеся в [3] для доказательства в случае $r \in \mathbb{N}$. Пусть

$$\varphi(y) = \begin{cases} a(1+y)^{r+\alpha}(1-y)^{r+\alpha}, & |y| \leq 1, \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$$

Для $\varphi(y)$ при $|y| \leq 1$ нетрудно вывести формулу $\varphi^{(k)}(y) = ap_k(y)(1-y^2)^{r+\alpha-k}$, где $k \in \mathbb{N}$, $k \leq r+\alpha$, p_k — многочлен k -й степени. Отсюда, пользуясь тем, что многочлен принадлежит классу $Lip(1)$, а $(1 \pm y)^\beta$ — классу $Lip(\beta)$, легко вывести, что $\varphi^{([r+\alpha])} \in Lip(\{r+\alpha\})$ при $r+\alpha$ не целом (здесь $[x]$ обозначает целую часть x , а $\{x\}$ — дробную часть x), а при целом $r+\alpha$ верно, что $\varphi^{(r+\alpha-1)} \in Lip(1)$. Другими словами, в обозначениях книги [2] $\varphi \in H^{r+\alpha}$. Следуя [3], расположим в $[0, 1]$ точки вида $x_m = (1+2m)\tau$, $m = 0, \dots, s = [1/2\tau]$, $\tau = (\varepsilon/a)^{1/(r+\alpha)}$. Рассмотрим теперь набор G из 2^s функций g вида

$$g(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \gamma_k \tau^{r+\alpha} \varphi((x-x_k)/\tau), \quad \gamma_k = \pm 1. \quad (6)$$

Очевидно, что все производные $g \in G$, вплоть до $[r+\alpha]$ -й, обращаются в нуль в нуле и сами $g \in G$ принадлежат классу $H_0^{r+\alpha}[0, 1]$. Он определяется как $\{f \in H^{r+\alpha}[0, 1] : f(0) = 0, \dots, f^{([r+\alpha])}(0) = 0\}$ при $r+\alpha$ не целом и как $\{f \in H^{r+\alpha}[0, 1] : f(0) = 0, \dots, f^{(r+\alpha-1)}(0) = 0\}$ при $r+\alpha$ целом. Поэтому по теореме 3.2 из [2, гл. 1] $I_0^{n-r}g \in H^{n+\alpha}$ для $g \in G$, $n = [r]+1$. В самом деле, либо $n+\alpha$ — не целое, либо, в противном случае, n и α — целые, и можно применять теорему 3.2. Тогда по определению производные порядка r от $g \in G$ принадлежат $Lip(\alpha)$, т. е. эти функции при достаточно малом a принадлежат $W^r H^\alpha(M, N, [0, 1])$ (см. [2, гл. 1, теорема 2.3]).

Итак, мы имеем 2^s таких функций g и любые две из них имеют разные знаки хотя бы в одной точке x_k , и в этой точке разность между ними по модулю равна $2a\tau^{r+\alpha} = 2\varepsilon > \varepsilon$. Таким образом, множество G является ε -цепью для $W^r H^\alpha(M, N, [0, 1])$ в пространстве $C[0, 1]$, в нем 2^s элементов и $s \geq C_1 \varepsilon^{-1/(r+\alpha)}$ (см. определения s и τ выше). В силу неравенства (1) получаем оценку ε -энтропии $W^r H^\alpha(M, N, [0, 1])$ снизу при $q = \infty$.

Применим теперь те же самые функции (6) для построения $s\varepsilon$ -цепи в пространстве $L^1[0, 1]$. Тем самым оценка снизу будет установлена для всех $q \in [1, \infty)$. Заметим, что если в точке x_k знаки функций g_1 и g_2 вида (6) различны, то

$$\int_0^1 |g_1(x) - g_2(x)| dx \geq 2 \int_{x_k-\tau}^{x_k+\tau} |g_1(x)| dx = 2a\tau\tau^{r+\alpha} \int_{-1}^1 (1-y^2)^{r+\alpha} dy = C_2\varepsilon\tau.$$



Чтобы $\int_0^1 |g_1 - g_2| dx$ было больше $c\varepsilon$ при некоторой постоянной $c > 0$, достаточно, чтобы число таких точек x_k , где знаки g_1 и g_2 различны, было не менее $[s/k]$, $k > 2$. Согласно же лемме 2, при достаточно больших s , можно выбрать не менее C^s , $C > 1$, наборов из s плюсов и минусов так, что для любых двух наборов число различных знаков в одинаковых разрядах не менее $[s/k]$. Таким образом, существует не менее C^s функций вида (6) так, что для любых двух функций g_1 и g_2 из этого подмножества $\|g_1 - g_2\|_L \geq c\varepsilon$. Мы построили $c\varepsilon/2$ -цепь для $W^r H^\alpha(M, N, [0, 1])$ в $L^1[0, 1]$ и, как и выше, получаем отсюда нижнюю оценку для ε -энтропии.

Замечание 2. Как отмечено при доказательстве, при $r \in \mathbb{N}$ и $q = \infty$ асимптотическое равенство теоремы 4 установлено А. Н. Колмогоровым и В. М. Тихомировым в [3]. Для $r \in \mathbb{N}$ и $1 \leq q < \infty$ утверждение теоремы 4 доказано в [11].

Теорема 5. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega \cap N^{1-1/p}$. Тогда верно порядковое равенство ($1 < p < \infty$)

$$H_\varepsilon(W^r H_{1-1/p}^\omega(M, N, [0, 1]), C_p[0, 1]) \asymp \frac{1}{\tilde{\omega}^{-1}(\varepsilon)}, \quad (7)$$

где $\tilde{\omega}(\delta) = \omega(\delta)\delta^r$. При $r > 0$, $r \in \mathbb{N}$, верна соответствующая оценка сверху из (7).

Доказательство. Оценка снизу в (7) доказывается аналогично доказательству теоремы 1 из [4]. Оценка сверху устанавливается с помощью теоремы 3 аналогично доказательству соответствующей части теоремы 4.

Библиографический список

1. Терехин А. П. Приближение функций ограниченной p -вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.
3. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε -энтропия и ε -емкость множества в функциональном пространстве // УМН. 1959. Т. 14, вып. 2. С. 3–86.
4. Волосивец С. С. Асимптотические характеристики одного компакта гладких функций в пространстве функций ограниченной p -вариации // Мат. заметки. 1995. Т. 57, вып. 2. С. 214–227.
5. Lorentz G. G. Metric entropy and approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 72, № 6. P. 903–927.
6. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1985. 264 с.
7. Ибрагимов И. И. О наилучшем приближении в среднем функции, s -я производная которой имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-1, 1]$ // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 1. С. 13–15.
8. DeVore R., Lorentz G.G. Constructive approximation. Berlin; Heidelberg : Springer, 1993. 449 p.
9. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближений. М. : Наука, 1987. 424 с.
10. Насибов Ф. Г. О порядке наилучших приближений функций, имеющих дробную производную в смысле Римана – Лиувилля // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1962. № 3. С. 51–57.
11. Clements G. F. Entropies of several sets of real valued functions // Pacific J. Math. 1963. Vol. 13, № 4. P. 1085–1095.

Approximation of the Riemann – Liouville Integrals by Algebraic Polynomials on the Segment

A. A. Tyleneva

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, aatuleneva@km.ru

The direct approximation theorem by algebraic polynomials is proved for Riemann – Liouville integrals of order $r > 0$. As a corollary, we obtain asymptotic equalities for ε -entropy of the image of a Hölder type class under Riemann – Liouville integration operator.

Key words: p -variation metric, L^p space, Riemann – Liouville integral, best approximation, algebraic polynomials, ε -entropy.

References

1. Terekhin A. P. Approximation of bounded p -variation functions. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 1965, no. 2, pp. 171–187 (in Russian).
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, New York, Gordon and Breach Science, 1993. 1006 p.
3. Kolmogorov A. N., Tikhomirov V. M. ε -entropy and ε -capacity of a set in the functional space. *Uspehi mat. nauk*, 1959, vol. 14, iss. 2, pp. 3–86 (in Russian).
4. Volosivets S. S. Asymptotic properties of one compact



- set of smooth functions in the space of functions of bounded p -variation. *Math. Notes*, 1995, vol. 57, iss. 2, pp. 148–157.
5. Lorentz G. G. Metric entropy and approximation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 72, no. 6, pp. 903–927.
6. Edwards R. *Fourier Series: A modern introduction. Vol. 1.* New York, Springer, 1982, 234 p.
7. Ibragimov I. I. On best approximation of a function whose s -th derivative has bounded variation on segment $[-1, 1]$. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 90, no. 1, pp. 13–15 (in Russian).
8. DeVore R., Lorentz G. G. *Constructive approximation.* Berlin, Heidelberg, Springer, 1993, 449 p.
9. Korneichuk N. P. *Exact Constants in Approximation Theory*, 2009, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, 468 p.
10. Nasibov F. G. On the order of best approximations of functions having fractional derivative in Riemann–Liouville sense. *Izv. AN Azerb. SSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1962, no. 3, pp. 51–57 (in Russian).
11. Clements G. F. Entropies of several sets of real valued functions. *Pacific J. Math.*, 1963, vol. 13, no. 4, pp. 1085–1095.

УДК 517.97

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОДУ

А. В. Фоминых

Аспирант кафедры математической теории моделирования систем управления, Санкт-Петербургский государственный университет, alexfomster@mail.ru

В статье рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ. Эта задача сводится к вариационной задаче минимизации некоторого функционала на всём пространстве. Для данного функционала выписываются необходимые условия минимума. На основании этих условий описываются метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений для рассматриваемой задачи. Приводятся численные примеры реализации этих методов. Дополнительно исследуется задача Коши с системой, не разрешённой относительно производных.

Ключевые слова: вариация, задача Коши, квадратичный функционал, градиент Гаусса, метод наискорейшего спуска, метод сопряжённых направлений.

ВВЕДЕНИЕ

Существует много методов решения задачи Коши, например, метод последовательных приближений Пикара, метод ломаных Эйлера, серия методов Рунге–Кутты. В работе [1] задача Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к вариационной задаче минимизации некоторого строго выпуклого функционала на всём пространстве. В данной статье этот подход распространяется на нелинейную систему ОДУ. Для поиска стационарных точек функционала используются метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений, которые относятся к прямым методам вариационного исчисления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Здесь T — некоторый фиксированный момент времени, $x(t)$ — искомая вектор-функция фазовых координат, $x \in C_n^1[0, T]$, где $C_n^1[0, T]$ — пространство n -мерных вектор-функций, непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$, $f(x, t)$ — заданная вещественная n -мерная вектор-функция, x_0 — заданный вектор. Требуется найти такое решение системы (1), которое удовлетворяет начальному условию (2). Будем считать, что для (1), (2) выполнены условия теоремы Пикара. Тогда решение задачи Коши (1), (2) существует и единственно.



2. СВЕДЕНИЕ К ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in C_n[0, T]$, где $C_n[0, T]$ — пространство n -мерных вектор-функций, непрерывных на $[0, T]$. Тогда с учётом (2) $x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau$. Требуется найти такую вектор-функцию $z(t)$, которая удовлетворяет системе

$$z(t) = f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, t\right). \quad (3)$$

Введём в рассмотрение функционал

$$I(z) = \frac{1}{2} \int_0^T (\varphi(z, t), \varphi(z, t)) dt, \quad (4)$$

где

$$\varphi(z, t) = z(t) - f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, t\right).$$

Нетрудно видеть, что функционал (4) не отрицателен для всех $z \in C_n[0, T]$ и обращается в ноль в точке z^* тогда и только тогда, когда z^* — решение задачи Коши (1), (2) или (3).

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА

Рассмотрим дифференциальные свойства функционала $I(z)$. Заметим, что из выполнения условий теоремы Пикара следуют существование и непрерывность матрицы $\frac{\partial f}{\partial x}$ частных производных.

Лемма 1. Функционал $I(z)$ дифференцируем по Гато, и его «градиент» в точке z выражается по формуле

$$\nabla I(z) = z(t) - f(z, t) - \int_t^T \left(\frac{\partial f(z, \tau)}{\partial x} \right)' (z(\tau) - f(z, \tau)) d\tau, \quad (5)$$

где «'» означает операцию транспонирования.

Доказательство. Рассмотрим классическую вариацию функционала (4). Пусть $v \in C_n[0, T]$, $\alpha > 0$. Вычислим

$$\begin{aligned} I(z + \alpha v) &= \frac{1}{2} \int_0^T \left(z(t) + \alpha v(t) - f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau) d\tau, t\right), \right. \\ &\quad \left. z(t) + \alpha v(t) - f\left(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau) d\tau, t\right) \right) dt = \\ &= I(z) + \alpha \int_0^T \left(z(t) - f(z, t), v(t) - \frac{\partial f(z, t)}{\partial x} \int_0^t v(\tau) d\tau \right) dt + o(\alpha), \end{aligned}$$

где $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \downarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$. Далее, имеем:

$$\begin{aligned} I'(z, v) &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{I(z + \alpha v) - I(z)}{\alpha} = \int_0^T (z(t) - f(z, t), v(t)) dt - \\ &- \int_0^T \left(\int_t^T \left(\frac{\partial f(z, \tau)}{\partial x} \right)' (z(\tau) - f(z, \tau)) d\tau, v(t) \right) dt = \int_0^T (\nabla I(z), v(t)) dt, \end{aligned}$$

и формула (5) доказана.

Отсюда заключаем, что для того чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала (4), необходимо [2] выполнение соотношения

$$z^*(t) - f(z^*, t) - \int_t^T \left(\frac{\partial f(z^*, \tau)}{\partial x} \right)' (z^*(\tau) - f(z^*, \tau)) d\tau = 0_n \quad \forall t \in [0, T], \quad (6)$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $C_n[0, T]$.



4. МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Опишем вначале следующий метод наискорейшего спуска [3] для поиска стационарных точек функционала $I(z)$.

Фиксируем произвольное $z_1 \in C_n[0, T]$. Пусть уже построено $z_k \in C_n[0, T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (6), то z_k является стационарной точкой функционала $I(z)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{k+1}(t) = z_k(t) + \gamma_k G(z_k, t), \quad (7)$$

где $G(z_k, t)$ представляет собой антиградиент функционала $I(z)$ в точке z_k , который с учётом (5) находится по формуле

$$G(z_k, t) = -z_k(t) + f(z_k, t) + \int_t^T \left(\frac{\partial f(z_k, \tau)}{\partial x} \right)' (z_k(\tau) - f(z_k, \tau)) d\tau, \quad (8)$$

а γ_k является решением следующей задачи одномерной минимизации:

$$\min_{\gamma \geq 0} I(z_k + \gamma G(z_k, t)) = I(z_k + \gamma_k G(z_k, t)). \quad (9)$$

В силу (9) $I(z_{k+1}) \leq I(z_k)$. Если последовательность $\{z_k\}$ бесконечна, то благодаря непрерывности $G(z_k, t)$ как функции z описанный метод сходится [4] в следующем смысле

$$\|G(z_k, t)\| = \sqrt{\int_0^T G^2(z_k, t) dt} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Если последовательность $\{z_k\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала $I(z_k)$ по построению.

5. МЕТОД СОПРЯЖЁННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Опишем теперь следующий метод сопряжённых направлений [5] для поиска стационарных точек функционала $I(z)$.

Фиксируем произвольное $z_1 \in C_n[0, T]$. Пусть уже построено $z_k \in C_n[0, T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (6), то z_k является стационарной точкой функционала $I(z)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$\begin{aligned} z_{k+1}(t) &= z_k(t) + \gamma_k W(z_k, t), \\ W(z_0, t) &= G(z_0, t), \quad W(z_k, t) = G(z_k, t) + \beta_k W(z_{k-1}, t), \end{aligned} \quad (10)$$

где $G(z_k, t)$ определяется формулой (8), а γ_k является решением следующей задачи одномерной минимизации:

$$\min_{\gamma \geq 0} I(z_k + \gamma W(z_k, t)) = I(z_k + \gamma_k W(z_k, t)). \quad (11)$$

Величину β_k можно искать по-разному. Для нахождения β_k наиболее распространены правило Флетчера – Ривса:

$$\beta_k = \frac{\int_0^T (G(z_k, t), G(z_k, t)) dt}{\int_0^T (G(z_{k-1}, t), G(z_{k-1}, t)) dt}$$

и правило Полака – Райбера:

$$\beta_k = \frac{\int_0^T (G(z_k, t), G(z_k, t) - G(z_{k-1}, t)) dt}{\int_0^T (G(z_{k-1}, t), G(z_{k-1}, t)) dt}.$$

В силу (11) $I(z_{k+1}) \leq I(z_k)$. Из (7) и (10) видно, что на первой итерации метод сопряжённых направлений и метод наискорейшего спуска совпадают. Метод сопряжённых направлений обычно оказывается более эффективным, чем метод наискорейшего спуска. Например, при минимизации выпуклых квадратичных функций в конечномерных задачах метод сопряжённых направлений сходится за конечное число итераций, в отличие от метода наискорейшего спуска, который в общем случае сходится лишь в пределе.



6. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Для иллюстрации метода наискорейшего спуска рассмотрим следующий пример. Пусть требуется решить задачу Коши:

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(0) = 1.$$

Зададим $T = 1$. Аналитическое решение имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{t + 1}.$$

В табл. 1 приведены результаты вычислений с помощью метода наискорейшего спуска. В качестве начального приближения взята точка $z(t) = 0$, а тогда $x(t) = 1$. Из табл. 1 видно, что на 3 итерации погрешность не превышает величины 2×10^{-5} .

Таблица 1

k	$I(z_k)$	$\ z^* - z_k\ $	$\ x^* - x_k\ $	$\ G(z_k)\ $
1	0.5	0.54006	0.3372	1.0408
2	0.00318	0.07374	0.01472	0.04325
3	0.0000153	0.0048	0.00087	0.00036

Для иллюстрации метода сопряжённых направлений рассмотрим ещё один пример. Пусть требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (-c + dx_1)x_2, \end{cases} \\ x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = 1.$$

Такие системы встречаются при моделировании жизнедеятельности популяций и описывают взаимодействие хищников с жертвами. Приведённая система уравнений является одной из самых известных для описания динамики взаимодействующих популяций и носит название модели Вольтерра – Лотка [6]. Здесь x_1 — количество жертв, x_2 — количество хищников. Коэффициенты a, b, c, d — положительны, a — скорость размножения жертв в отсутствии хищников, b характеризует сокращение количества жертв из-за хищников, c — скорость вымирания хищников в отсутствии жертв, d характеризует компенсацию количества хищников за счёт жертв. Зададим: $T = 1, a = b = c = d = 1$.

В табл. 2 приведены результаты вычислений с помощью метода сопряжённых направлений. В качестве начального приближения взята точка $z(t) = [t, t]$, а тогда $x(t) = [3 + t^2/2, 1 + t^2/2]$. Из табл. 2 видно, что на 6 итерации погрешность не превышает величины 3×10^{-2} .

Таблица 2

k	1	2	3	4	5	6
$I(z_k)$	2.9974	1.6008	1.2617	0.4419	0.0591	0.0207
$\ G(z_k)\ $	4.6257	2.1201	1.3691	0.6875	0.7836	0.1608

7. ДОПОЛНЕНИЕ

Дополнительно исследуем задачу Коши, когда система ОДУ не разрешена относительно производных, то есть рассмотрим задачу

$$g(x, \dot{x}, t) = 0_n, \quad t \in [0, T], \tag{12}$$

$$x(0) = x_0. \tag{13}$$

Здесь T — некоторый фиксированный момент времени, $x(t)$ — искомая вектор-функция фазовых координат, $x \in C_n^1[0, T]$, $g(x, \dot{x}, t)$ — заданная вещественная n -мерная вектор-функция, x_0 — заданный вектор. Требуется найти такое решение системы (12), которое удовлетворяет начальному условию (13). Предполагаем $g(x, \dot{x}, t)$ непрерывно дифференцируемой по x и \dot{x} и непрерывной по всем трём аргументам. Будем считать, что решение задачи Коши (12), (13) существует и единственно. Так же, как и в задаче (1), (2), положим: $z(t) = \dot{x}(t), z \in C_n[0, T]$.



Введём в рассмотрение функционал

$$J(z) = \frac{1}{2} \int_0^T (g(z, t), g(z, t)) dt, \quad (14)$$

где $g(z, t) = g(x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau, z(t), t)$.

Нетрудно видеть, что функционал (14) не отрицателен для всех $z \in C_n[0, T]$ и обращается в ноль в точке z^* тогда и только тогда, когда z^* — решение задачи Коши (12), (13).

Можно показать, что для задачи (12), (13) справедлива лемма, аналогичная лемме 1 для задачи (1), (2).

Лемма 2. Функционал $J(z)$ дифференцируем по Гато, и его «градиент» в точке z выражается по формуле

$$\nabla J(z) = \int_t^T \left(\frac{\partial g(z, t)}{\partial x} \right)' g(z, t) d\tau + \left(\frac{\partial g(z, t)}{\partial z} \right)' g(z, t).$$

Отсюда заключаем, что для того чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала (14), необходимо [2] выполнение соотношения

$$\int_t^T \left(\frac{\partial g(z^*, \tau)}{\partial x} \right)' g(z^*, \tau) d\tau + \left(\frac{\partial g(z^*, t)}{\partial z} \right)' g(z^*, t) = 0_n \quad \forall t \in [0, T].$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной статье задача Коши с нелинейной системой (1) и начальным условием (2) сводится к минимизации функционала (4) на всём пространстве. Для этого функционала выписан градиент Гато, найдены необходимые условия минимума. На основании условий минимума описываются метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений для рассматриваемой задачи. Приведены численные примеры реализации описанных методов. Дополнительно исследуется задача Коши с системой, не разрешённой относительно производных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00752, 14-01-31521 мол_а), гранта Санкт-Петербургского государственного университета (проект № 9.38.205.2014).

Библиографический список

1. Тамасян Г. Ш. Градиентные методы решения задачи Коши // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. 2009. Вып. 4. С. 224–230.
2. Васильев Л. В., Демьянов В. Ф. Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981. 384 с.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М. : Наука, 1977. 741 с.
4. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М. : Высш. шк., 2005. 335 с.
5. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М. : Факториал Пресс, 2002. 824 с.
6. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями : пер. с англ. М. : Мир, 1986. 243 с.

The Gradient Methods for Solving the Cauchy Problem for a Nonlinear ODE System

A. V. Fominyh

Saint Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russia, alexfomster@mail.ru

The article considers the Cauchy problem for a nonlinear system of ODE. This problem is reduced to the variational problem of minimizing some functional on the whole space. For this functional necessary minimum conditions are presented. On the basis of these conditions the steepest descent method and the method of conjugate directions for the considered problem are described. Numerical examples of the implementation of these methods are presented. The Cauchy problem with the system which is not solved with respect to derivatives is additionally investigated.

Key words: variation, Cauchy problem, square functional, Gato gradient, steepest descent method, conjugate directions method.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 12-01-00752, 14-01-31521 mol_a), grant St. Petersburg State University (projects no. 9.38.205.2014).



References

1. Tamasyan G. Sh. The gradient methods for solving the Cauchy problem. *Vestnik St. Petersburg University*. Ser. 10, 2009, iss. 4, pp. 224–230 (in Russian).
2. Vasilyev L. V., Demyanov V. F. *Nedifferenciruemaja optimizacija* [Nondifferentiable optimization]. Moscow, Nauka, 1981. 384 p. (in Russian).
3. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funkcional'nyj analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka, 1977. 741 p. (in Russian).
4. Demyanov V. F. *Usloviya ekstremuma i variacionnoe ischislenie* [Extremum conditions and variation calculus]. Moscow, Vysshaya shkola, 2005. 335 p. (in Russian).
5. Vasilyev F. P. *Metody optimizacii* [Optimization methods]. Moscow, Faktorial Press, 2002. 824 p. (in Russian).
6. Arrowsmith D. K., Place C. M. *Ordinary differential equations. A qualitative approach with applications*. London, Chapman and Hall, 1982. 243 p.

УДК 512.5

НОВЫЕ СВОЙСТВА ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНОГО МНОГООБРАЗИЯ ЭКСПОНЕНТЫ ДВА

О. В. Шулежко

Аспирантка кафедры алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет, ol.shulezhko@gmail.com

В данной работе исследуются числовые характеристики почти нильпотентного многообразия экспоненты два, впервые построенного в статье [1]. Основным результатом данной работы является нахождение точных значений кратностей неприводимых модулей, входящих в разложение полилинейной части многообразия. В качестве следствия получены формулы для коразмерности и кодлины изучаемого многообразия.

Ключевые слова: многообразии, экспонента многообразия, коразмерность, кодлина.

Совокупность алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств, называется многообразием. Многообразие будем называть почти нильпотентным, если оно само не является нильпотентным, но каждое собственное его подмногообразие нильпотентно. Основой для работы послужила статья [1], в которой впервые был построен пример почти нильпотентного многообразия, рост которого экспоненциален. Более точно было доказано, что асимптотически последовательность коразмерностей этого многообразия ведет себя как 2^n , т. е. так называемая, экспонента этого многообразия равна двум. Целью данной работы является вычисление основных числовых характеристик этого многообразия. Заметим, что так как в рассматриваемых алгебрах не предполагается выполнения тождества ассоциативности, то в произведениях следует следить за расстановкой скобок. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, например, $xyz = (xy)z$.

Обозначим через Φ основное поле, которое на протяжении всей работы имеет нулевую характеристику. Все неопределяемые понятия можно найти в книге [2]. Для удобства читателей приведем определения основных понятий, которые используются в данной работе. В свободной алгебре многообразия \mathbf{V} со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ рассмотрим множество полилинейных элементов степени n от x_1, x_2, \dots, x_n . Они образуют векторное пространство $P_n(\mathbf{V})$, называемое полилинейной компонентой степени n относительно свободной алгебры. Размерность этого пространства обозначим $c_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$. Хорошо известно, что полилинейную компоненту степени n можно рассматривать как модуль над групповым кольцом ΦS_n симметрической группы S_n , задавая действие перестановки на индексах образующих. Известно, что с точностью до изоморфизма неприводимые ΦS_n модули можно описывать на языке разбиений и диаграмм Юнга. Разбиением числа n называют набор целых положительных чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, при этом $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ и $n = \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Разбиение λ числа n обозначают следующим образом: $\lambda \vdash n$. Для каждого такого разбиения λ строится диаграмма Юнга, состоящая из k строк, причем строка с номером i должна содержать λ_i клеток.

Так как характеристика основного поля равна нулю, то по теореме Машке полилинейную часть степени n можно разложить в прямую сумму неприводимых подмодулей. Строение модуля $P_n(\mathbf{V})$ можно представить на «языке характеров». Рассмотрим разложение характера модуля $P_n(\mathbf{V})$ в целочисленную комбинацию неприводимых характеров:

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(\mathbf{P}_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}) \chi_\lambda, \quad (1)$$



где $m_\lambda(\mathbf{V})$ — кратность неприводимого характера χ_λ , отвечающего разбиению λ . Асимптотическое поведение размерности $c_n = c_n(\mathbf{V})$ пространства $P_n(\mathbf{V})$ определяет рост многообразия. Предел $\sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$, в случае его существования, называется экспонентой многообразия и обозначается как $\exp \mathbf{V}$. Число слагаемых $l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} \mathbf{m}_\lambda$ в сумме (1) называют кодлинной многообразия.

Пусть теперь $Q_n(\mathbf{V}) = \text{span}\{\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_{\sigma(1)} \dots \mathbf{x}_{\sigma(n)} \mid \sigma \in \mathbf{S}_n\}$ — пространство полилинейных левонормированных одночленов от x_0, \dots, x_n , с x_0 в качестве самого левого множителя. Симметрическая группа S_n действует на $Q_n(\mathbf{V})$ перестановкой индексов образующих x_1, \dots, x_n , и пространство $Q_n(\mathbf{V})$ является S_n -модулем. Рассмотрим разложение его характера в сумму неприводимых

$$\chi_n^Q(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} \mathbf{m}_\lambda^Q(\mathbf{V}) \chi_\lambda, \quad (2)$$

где $m_\lambda^Q(\mathbf{V})$ — кратность неприводимого характера χ_λ в характере $\chi_n^Q(\mathbf{V})$.

Договоримся использовать черту или волну над образующими для обозначения кососимметризации. Например,

$$x_0 \bar{x}_1 \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \sum_{p \in S_3, q \in S_2} (-1)^p (-1)^q x_0 x_{p(1)} y_{q(1)} y_{q(2)} x_{p(2)} x_{p(3)},$$

где S_m — симметрическая группа, а $(-1)^r$ — четность перестановки r . Поясним процедуру альтернирования элемента по некоторым наборам образующих на следующем примере: результатом альтернирования монома $x_0 x_1 y_1 x_2 y_2 y_3 x_3 x_4$ по наборам x_1, x_2, x_3, x_4 и y_1, y_2, y_3 является элемент $x_0 \bar{x}_1 \tilde{y}_1 \bar{x}_2 \tilde{y}_2 \tilde{y}_3 \bar{x}_3 \bar{x}_4$.

Основным объектом в данной статье является алгебра A , построенная в работе [1]. Эта алгебра с одной бинарной билинейной операцией определяется тремя образующими элементами a, b, z и следующими определяющими соотношениями:

- 1) $a^2 = b^2 = ab = ba = az = bz = 0$;
- 2) $(zw(R_a, R_b))(zw'(R_a, R_b)) = 0$, для любых слов w, w' от R_a и R_b ;
- 3) $z(R_a R_b)^k R_a R_b + z(R_a R_b)^k R_b R_a = 0$, $z(R_a R_b)^k R_a^2 = z(R_a R_b)^k R_b^2 = 0$ для всех $k \geq 0$.

Поясним, что через R_c обозначен оператор правого умножения на элемент c , причем символ отображения мы пишем справа от аргумента $d \in A$, то есть $dR_c = dc$. Удобство такого обозначения в том, что, например, R_c^3 — это степень линейного отображения, поэтому запись dR_c^3 является корректной и обозначает такое левонормированное произведение $dccc$, которое нельзя записать как dc^3 .

Для удобства читателей изложим некоторые результаты, полученные в статье [1]. Базис рассматриваемой алгебры A состоит из элементов:

$$a, b, z(R_a R_b)^k, z(R_a R_b)^k R_a, z(R_a R_b)^k R_b$$

для $k \geq 0$. В алгебре A выполняются следующие тождества:

$$x_1(x_2 x_3) \equiv 0, \quad (3)$$

$$x_0 x x x \equiv 0, \quad (4)$$

$$x_0 x x y_1 \dots y_{2s+1} y y \equiv 0. \quad (5)$$

Из тождества (3) следует, что только левонормированные многочлены относительно свободной алгебры могут иметь ненулевое значение в алгебре A .

Перейдем к изложению результатов, связанных с числовыми характеристиками многообразия $\text{var} A$. В статье [1] получено следующее условие на кратности кохарактера:

$$\chi_{2k+1}^Q(\text{var} A) = 2\chi_{(k+1, k)},$$

$$\chi_{2k}^Q(\text{var} A) = \alpha \chi_{(k, k)} + \chi_{(k+1, k-1)}, \quad \text{где } \alpha = 1 \text{ или } \alpha = 2.$$

Основным результатом данной работы является доказательство, что на самом деле $\alpha = 2$, и если \mathbf{W} многообразие, определенное тождествами (3), (4) и (5), то $\mathbf{W} = \text{var} A$. Сформулируем соответствующее утверждение.



Теорема 1. Многообразия \mathbf{W} порождается алгеброй A , то есть $\mathbf{W} = \text{var} A$. Характер $\chi_n^Q(\mathbf{W})$ имеет следующее строение:

$$\chi_{2k+1}^Q(\mathbf{W}) = 2\chi_{(k+1,k)}, \quad \chi_{2k}^Q(\mathbf{W}) = 2\chi_{(k,k)} + \chi_{(k+1,k-1)}, \quad k \geq 1.$$

Доказательство. Как отмечалось выше, согласно результатам работы [1] в сумме (2) для многообразия $\text{var} A$ ненулевые кратности задаются следующими числами: $m_{(k+1,k-1)}^Q(\text{var} A) = 1$, $m_{(k+1,k)}^Q(\text{var} A) = 2$, $1 \leq m_{(k,k)}^Q(\text{var} A) \leq 2$. Так как при доказательстве этого факта строение алгебры A не использовалось, а использовались только тождества (3)–(5), то аналогичное утверждение верно и для многообразия \mathbf{W} .

Для $n = 2k$ определим следующий элемент: $g = x_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \widetilde{x}_1 \widetilde{x}_2 = x_0 g'$, в котором содержится k одинаковых пар $\{x_1, x_2\}$ альтернированных образующих. Заметим, что элемент g' получен из идемпотента, соответствующего следующей таблице Юнга:

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & \dots & n-1 \\ \hline 2 & 4 & \dots & n \\ \hline \end{array}$$

путем отождествления образующих по каждой строке.

Если $k = 2m$, то, как показано в работе [1], элемент g по модулю тождеств (3)–(5) можно представить в виде линейной комбинации следующих двух элементов:

$$\begin{aligned} g_1 &= x_0 x_1 x_1 x_2 x_2 \dots x_1 x_1 x_2 x_2 + x_0 x_2 x_2 x_1 x_1 \dots x_2 x_2 x_1 x_1, \\ g_2 &= x_0 x_1 x_2 x_2 x_1 \dots x_1 x_2 x_2 x_1 + x_0 x_2 x_1 x_2 x_1 \dots x_2 x_1 x_1 x_2. \end{aligned}$$

Докажем, что элементы g_1 и g_2 являются линейно независимыми. Предположим, что g_1 и g_2 линейно зависимы. Тогда запишем их линейную комбинацию в виде $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 = 0$, где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$. Так как любое соотношение на свободных образующих является тождеством, то проанализируем следствия из тождества

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \equiv 0. \tag{6}$$

Умножим тождество (6) дважды на x_1 справа, получим:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 x_0 x_1 x_1 x_2 x_2 \dots x_1 x_1 x_2 x_2 x_1 x_1 + \alpha_1 x_0 x_2 x_2 x_1 x_1 \dots x_2 x_2 x_1 x_1 x_1 x_1 + \\ &+ \alpha_2 x_0 x_1 x_2 x_2 x_1 \dots x_1 x_2 x_2 x_1 x_1 x_1 + \alpha_2 x_0 x_2 x_1 x_2 x_1 x_2 \dots x_2 x_1 x_1 x_2 x_1 x_1 \equiv 0. \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые тождественно равны нулю как следствия тождества (4), а по тождеству (5) четвертое слагаемое также тождественно равно нулю. Поэтому если $\alpha_1 \neq 0$, то в многообразии \mathbf{W} выполнено следующее тождество:

$$x_0 x_1 x_1 x_2 x_2 \dots x_1 x_1 x_2 x_2 x_1 x_1 \equiv 0.$$

Получили противоречие, так как это тождество не выполняется в алгебре A , которая принадлежит многообразию \mathbf{W} . Действительно, если подставить $x_0 = za$, $x_1 = b$, $x_2 = a$, то получим ненулевой результат, равный $(-1)^m z(R_a R_b)^k a$. Если же $\alpha_1 = 0$, то в этом случае $\alpha_2 \neq 0$. Тождество (6) примет вид $g_2 \equiv 0$, что также приводит к противоречию, поскольку это тождество не выполнено в алгебре A . Если подставить $x_0 = z$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, то получим ненулевой результат, равный $2(-1)^m z(R_a R_b)^k$.

Таким образом, элементы g_1 и g_2 являются линейно независимы. Пусть теперь $f_1 = \text{lin}(g_1)$, $f_2 = \text{lin}(g_2)$ — результаты полных линеаризаций рассматриваемых элементов. Так как характеристика поля равна нулю, то хорошо известно, что тождество (6) эквивалентно тождеству $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \equiv 0$. Элементы f_1 и f_2 также являются линейно независимыми. Но в этом случае из леммы 2 статьи [3] будет следовать, что $m_{(k,k)}^Q(\text{var} A) \geq 2$.

Если $k = 2m + 1$, то g можно записать как линейную комбинацию следующих элементов:

$$\begin{aligned} h_1 &= x_0 x_1 x_1 x_2 x_2 \dots x_1 x_1 x_2 x_2 x_1 x_2 - x_0 x_2 x_2 x_1 x_1 \dots x_2 x_2 x_1 x_1 x_2 x_1, \\ h_2 &= x_0 x_1 x_2 x_2 x_1 \dots x_1 x_2 x_2 x_1 x_1 x_2 - x_0 x_2 x_1 x_1 x_2 \dots x_2 x_1 x_1 x_2 x_2 x_1. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему случаю рассматриваем тождество

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 \equiv 0. \tag{7}$$



Только в этот раз при получении следствия домножим тождество (7) на x_2 справа, а затем и на x_1 справа. Выпишем полученное тождественное соотношение:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 x_0 x_1 x_1 x_2 x_2 \dots x_1 x_1 x_2 x_2 x_1 x_2 x_2 x_1 - \alpha_1 x_0 x_2 x_2 x_1 x_1 \dots x_2 x_2 x_1 x_1 x_2 x_1 x_2 x_1 + \\ & + \alpha_2 x_0 x_1 x_2 x_2 x_1 \dots x_1 x_2 x_2 x_1 x_1 x_2 x_2 x_1 - \alpha_2 x_0 x_2 x_1 x_1 x_2 \dots x_2 x_1 x_1 x_2 x_2 x_1 x_2 x_1 \equiv 0. \end{aligned}$$

С помощью тождества (3) представим второе слагаемое как сумму двух слагаемых

$$\begin{aligned} & \alpha_1 x_0 x_1 x_1 x_2 x_2 \dots x_1 x_1 x_2 x_2 x_1 x_2 x_2 x_1 - \\ & - \alpha_1 x_0 x_2 x_2 x_1 x_1 \dots x_2 x_2 x_1 x_1 x_2 x_1 x_1 x_2 + \alpha_1 x_0 x_2 x_2 x_1 x_1 \dots x_2 x_2 x_1 x_1 x_2 x_2 x_1 x_1 + \\ & + \alpha_2 x_0 x_1 x_2 x_2 x_1 \dots x_1 x_2 x_2 x_1 x_1 x_2 x_2 x_1 + \alpha_2 x_0 x_2 x_1 x_1 x_2 \dots x_2 x_1 x_1 x_2 x_2 x_1 x_1 x_2 \equiv 0. \end{aligned}$$

Первое и второе слагаемые тождественно равны нулю как следствия тождества (5), а третье и четвертое слагаемые при замене x_1 на x_2 приводят к тождеству

$$\alpha_1 g_1 + 2\alpha_2 g_2 \equiv 0.$$

По ранее доказанному элементы g_1 и g_2 линейно независимы, поэтому $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$. Следовательно, элементы h_1 и h_2 линейно независимы. В результате получили, что $m_{(k,k)}^Q(\text{var}A) \geq 2$.

Осталось заметить, что $A \in \mathbf{W}$, поэтому $m_{(k,k)}^Q(\text{var}A) \leq m_{(k,k)}^Q(\mathbf{W})$ и мы получаем цепочку неравенств $2 \leq m_{(k,k)}^Q(\text{var}A) \leq m_{(k,k)}^Q(\mathbf{W}) \leq 2$. Окончательно получаем требуемое равенство $m_{(k,k)}^Q(\text{var}A) = m_{(k,k)}^Q(\mathbf{W}) = 2$, а также совпадение многообразий $\mathbf{W} = \text{var}A$.

Теорема 1 полностью доказана.

Перейдем к изложению полученных результатов о числовых характеристиках многообразия \mathbf{W} .

Теорема 2. Разложение характера $\chi_n(\mathbf{W})$ в сумму неприводимых имеет вид

$$\begin{aligned} \chi_{2k}(\mathbf{W}) &= 2\chi_{(k,k)} + 2\chi_{(k+1,k-1)} + 2\chi_{(k,k-1,1)}, \\ \chi_{2k+1}(\mathbf{W}) &= 2\chi_{(k+2,k-1)} + 3\chi_{(k+1,k)} + 2\chi_{(k+1,k-1,1)}. \end{aligned}$$

Для кодлыны многообразия \mathbf{W} верны формулы $l_{2k}(\mathbf{W}) = 6$, $l_{2k+1}(\mathbf{W}) = 7$, а экспонента многообразия равна двум, $\text{exp } \mathbf{W} = 2$.

Доказательство. Доказательство того факта, что в разложении характера $\chi_n(\mathbf{W})$ присутствуют только такие неприводимые характеры, именно с такими кратностями следует из теории представления симметрических групп [4]. Модуль $P_{n+1}(\mathbf{W})$ индуцирован из ΦS_n -модуля $Q_n(\mathbf{W})$. Тогда по теореме 1 и правилу Литтлвуда – Ричардсона получаем, что ненулевые кратности в разложении характера $\chi_n(\mathbf{W})$ будут только те, которые представлены в формулировке теоремы, причем со следующими ограничениями на кратности:

$$\begin{aligned} m_{(k,k)}(\mathbf{W}) &\leq 2, & m_{(k+1,k-1)}(\mathbf{W}) &\leq 2, & m_{(k,k-1,1)}(\mathbf{W}) &\leq 2; \\ m_{(k+2,k-1)}(\mathbf{W}) &\leq 2, & m_{(k+1,k)}(\mathbf{W}) &\leq 3, & m_{(k+1,k-1,1)}(\mathbf{W}) &\leq 2. \end{aligned}$$

Кроме того, в работе [1] доказано, что $\dim P_{n+1}(\mathbf{W}) = (n+1)\dim P_n^Q(\mathbf{W})$. В итоге приходим к равенствам

$$\begin{aligned} m_{(k,k)}(\mathbf{W}) &= 2, & m_{(k+1,k-1)}(\mathbf{W}) &= 2, & m_{(k,k-1,1)}(\mathbf{W}) &= 2; \\ m_{(k+2,k-1)}(\mathbf{W}) &= 2, & m_{(k+1,k)}(\mathbf{W}) &= 3, & m_{(k+1,k-1,1)}(\mathbf{W}) &= 2. \end{aligned}$$

Формулы для кодлыны многообразия получаются непосредственным суммированием найденных кратностей.

Используя формулу крюков (см., например, [2, с. 48]), непосредственными вычислениями находим формулы для коразмерностей:

$$\begin{aligned} c_n(\mathbf{W}) &= \frac{2(5n+8)}{(n+2)(n+4)} \binom{n}{\frac{n}{2}}; \\ c_n(\mathbf{W}) &= \frac{4}{(n+3)} \binom{n}{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$



Перейдем к доказательству, что экспонента многообразия \mathbf{W} равна двум. Хорошо известно, что сумма биномиальных коэффициентов равна $\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} = 2^n$. Так как $n = 2k$ или $n = 2k + 1$, то $\binom{n}{k} > \binom{n}{s}$ для всех других s , отличных от k , поэтому выполняются неравенства:

$$\frac{1}{(n+1)} 2^n \leq \binom{n}{k} \leq 2^n.$$

Отсюда для коразмерности выполняются, например, такие неравенства:

$$\frac{1}{(n+4)^3} 2^n \leq c_n(\mathbf{W}) \leq 2^n.$$

С помощью сведений из математического анализа получаем, что $\exp \mathbf{W} = 2$. Теорема 2 доказана.

Выражаю благодарность моему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Сергею Петровичу Мищенко за постановку задачи, полезные советы, постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

Библиографический список

1. *Mishchenko S., Valenti A.* An almost nilpotent variety of exponent 2 // *Israel J. of Math.* 2014. Vol. 199, iss. 1. P. 241–257.
2. *Giamb Bruno A., Zaicev M.* Polynomial Identities and Asymptotic Methods. *Math. Surv. and Monographs.* Vol. 122. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2005. 352 p.
3. *Зайцев М. В., Мищенко С. П.* О кодлинге многообразий линейных алгебр // *Мат. заметки.* 2006. Т. 79, вып. 4. С. 553–559. DOI: 10.4213/mzm2724.
4. *Джеймс Г.* Теория представлений симметрических групп. М. : Мир, 1982. 214 с.

New Properties of Almost Nilpotent Variety of Exponent 2

O. V. Shulezhko

Ulyanovsk State University, 42, Leo Tolstoy str., Ulyanovsk, 432970, Russia, ol.shulezhko@gmail.com

In the presented work we consider numerical characteristics of almost nilpotent variety of exponent 2, which was first constructing in article [1]. The main result of this paper is introduce the exact values of the multiplicities of the irreducible modules appearing in the expansion of the multilinear part of the variety. Meanwhile, we obtain as a consequence the formulas of codimension and colength of the variety of exponent 2.

Key words: variety, exponent of variety, codimension, colength.

References

1. *Mishchenko S., Valenti A.* An almost nilpotent variety of exponent 2. *Israel J. of Math.*, 2014, vol. 199, iss. 1, pp. 241–257.
2. *Giamb Bruno A., Zaicev M.* *Polynomial Identities and Asymptotic Methods.* *Math. Surv. and Monographs,* vol. 122, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2005, 352 p.
3. *Zaitsev M. V., Mishchenko S. P.* Colength of varieties of linear algebras. *Math. Notes*, 2006, vol. 79, no. 4, pp. 511–517. DOI: 10.1007/s11006-006-0056-0.
4. *James G. D.* *The representation theory of the symmetric groups.* *Lecture Notes in Math.*, vol. 682, Berlin, New York, Springer-Verlag, 1978.



МЕХАНИКА

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОМ СЛОЕ

Н. С. Анофрикова¹, Н. В. Сергеева²

¹Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, anofrikovans@info.sgu.ru

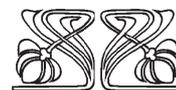
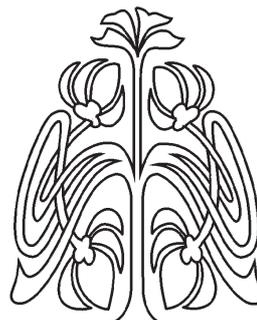
²Старший преподаватель кафедры теории вероятностей, математической статистики и управления стохастическими процессами, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, knickknack@bk.ru

Работа посвящена исследованию гармонических волн в наследственно-упругом слое, свойства материала которого описываются уравнениями состояния в интегральной форме. В качестве ядра интегрального оператора выбрана дробно-экспоненциальная функция Работнова. Рассмотрены два случая: случай симметричного и антисимметричного по нормальной координате напряженно-деформированного состояния (НДС). При изучении собственных колебаний исследованы свойства тех мод, которые изменяются во времени по гармоническому закону. Для обоих случаев выведены дисперсионные уравнения, которые решены численно. Также получены асимптотики корней дисперсионных уравнений для малых и больших значений частот. Анализ полученных решений позволил сделать выводы о влиянии наследственных факторов на поведение дисперсионных кривых. Проведен сравнительный анализ численных решений и их асимптотик.

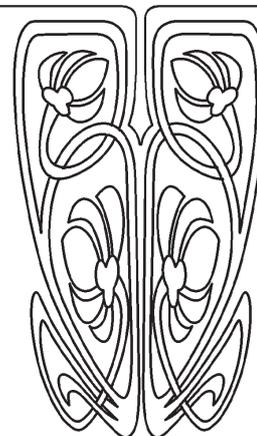
Ключевые слова: дисперсионные уравнения, напряженно-деформированное состояние, наследственно-упругий слой, асимптотики.

ВВЕДЕНИЕ

История исследований, посвященных изучению процессов распространения гармонических волн в упругих волноводах, насчитывает уже более 130 лет. За это время появилось огромное число публикаций, в которых всесторонне исследованы упругие волноводы различной геометрии. Обзору основных моментов данной истории и наиболее ярких публикаций посвящена, например, статья [1]. Тем не менее, подобные задачи до сих пор вызывают интерес исследователей всего мира. Но колебательным процессам подвержены не только упругие конструкции. В последние десятилетия не меньший интерес вызывает поведение различных конструкций, выполненных из неупругих материалов, в том числе наследственно-упругих. В отличие от упругих волноводов, проблемам распространения гармонических волн в наследственно-упругих телах посвящено не так много работ, при этом авторы прибегают исключительно к численным методам решения поставленных задач. Известно, что большую часть информации о поведении волновода предоставляет дисперсионное уравнение. Асимптотики решений указанных уравнений делают более удобным качественный анализ наследственно-упругого поведения, а также позволяют использовать их при решении задач о вынужденных колебаниях соответствующих волноводов. В работе



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





проведен как численный, так и асимптотический анализы дисперсионных уравнений, полученных при исследовании процесса распространения гармонических волн в наследственно-упругом слое.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим распространение гармонических волн в бесконечном наследственно-упругом слое, ограниченном плоскостями $z = \pm h$ в декартовой системе координат (рис. 1). Плоскость Oxy совместим со срединной поверхностью слоя. Будем рассматривать распространение волн в направлении оси x .

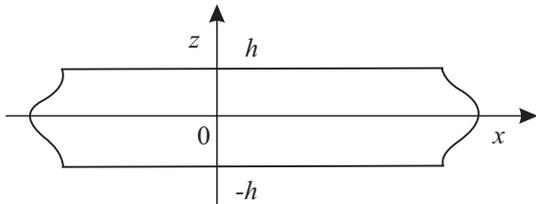


Рис. 1. Бесконечный наследственно-упругий слой, ограниченный плоскостями $z = \pm h$

Динамическое НДС слоя будем описывать уравнениями движения для случая плоской задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1)$$

и уравнениями состояния для наследственно-упругого материала.

В настоящей работе уравнения состояния берем в интегральной операторной форме

$$\begin{cases} \tilde{E} \frac{\partial v_1}{\partial x} = \sigma_{11} - \tilde{\nu}(\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ \tilde{E} \frac{\partial v_3}{\partial z} = \sigma_{33} - \tilde{\nu}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ 0 = \sigma_{22} - \tilde{\nu}(\sigma_{11} + \sigma_{33}), \\ \frac{1}{2} \tilde{E} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) = (1 + \tilde{\nu}) \sigma_{13}. \end{cases} \quad (2)$$

В (1) и (2) приняты следующие обозначения: σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, v_i — компоненты вектора перемещений, ρ — плотность материала, t — время, \tilde{E} , $\tilde{\nu}$ — интегральные операторы, определяемые формулами

$$\tilde{E} = E(1 - \Gamma^*), \quad \tilde{\nu} = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \Gamma^*, \quad \Gamma^* f(t) = k \int_{-\infty}^t \mathfrak{E}_{-1/2}(-\beta, t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (3)$$

E , ν — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона, k , β — параметры материала.

В качестве ядра интегрального оператора будем использовать дробно-экспоненциальную функцию Работнова [2]

$$\mathfrak{E}_{-1/2}(-\beta, t) = t^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n/2}}{\Gamma((n+1)/2)},$$

где $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{n-1} \exp(-y) dy$ — гамма-функция.

При изучении собственных колебаний будем исследовать свойства тех мод¹, которые изменяются во времени по гармоническому закону и удовлетворяют уравнениям движения (1), уравнениям состояния (2) и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях:

$$\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h. \quad (4)$$

Решение для перемещений v_i будем искать в виде

$$v_i = V_i(z) \exp(i\omega t - (\delta + i\chi)x), \quad \delta > 0, \quad (5)$$

где ω — частота, δ — коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты x , χ — волновое число.

¹Под модами понимаются частные решения уравнений движения в перемещениях, удовлетворяющие однородным граничным условиям на лицевых поверхностях.



2. ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

С учетом (3) и (5) уравнения состояния (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} EE^F \frac{\partial v_1}{\partial x} = \sigma_{11} - \nu^F (\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ EE^F \frac{\partial v_3}{\partial z} = \sigma_{33} - \nu^F (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ 0 = \sigma_{22} - \nu^F (\sigma_{11} + \sigma_{33}), \\ \frac{1}{2} EE^F \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) = (1 + \nu^F) \sigma_{13}, \end{cases}$$

где

$$E^F = 1 - \frac{k}{\beta + \sqrt{i\omega}}, \quad \nu^F = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k}{\beta + \sqrt{i\omega}}.$$

Введем безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad t_* = \frac{c_2 t}{h},$$

где $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}$.

Рассмотрим случай симметричного по нормальной координате НДС. В этом случае перемещение v_1 и напряжения σ_{11} , σ_{33} являются четными по нормальной координате функциями, а v_3 , σ_{13} — нечетными. В результате стандартной процедуры приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\gamma^4 \cosh(a) \frac{\sinh(b)}{b} - a^2 \tilde{\chi}^2 \frac{\sinh(a)}{a} \cosh(b) = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a^2 &= \tilde{\chi}_*^2 - \kappa_F^2 \Omega_*^2, & b^2 &= \tilde{\chi}_*^2 - \Omega_*^2, & \kappa_F^2 &= \frac{1 - 2\nu_*^F}{2 - 2\nu_*^F}, & \gamma^2 &= \tilde{\chi}_*^2 - \frac{\Omega_*^2}{2}, \\ \Omega_*^2 &= \omega_*^2 \frac{1 + \nu_*^F}{E_*^F (1 + \nu)}, & \omega_* &= \frac{h}{c_2} \omega, & i\tilde{\chi}_* &= -\delta_* - i\chi_*, & \delta_* &= h\delta, & \chi_* &= h\chi, \\ E_*^F &= 1 - \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}, & \nu_*^F &= \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}, & \beta_* &= \sqrt{\frac{h}{c_2}} \beta, & k_* &= \sqrt{\frac{h}{c_2}} k. \end{aligned}$$

В дальнейшем звездочки у безразмерных величин опускаем.

В случае антисимметричного по нормальной координате НДС, когда v_1 , σ_{11} , σ_{33} являются нечетными по ζ , а v_3 , σ_{13} — четными, приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\gamma^4 \frac{\sinh(a)}{a} \cosh(b) - b^2 \tilde{\chi}^2 \cosh(a) \frac{\sinh(b)}{b} = 0, \quad (7)$$

где все величины, входящие в уравнение (7), имеют тот же смысл, что и ранее.

Формально дисперсионные уравнения (6) и (7) имеют тот же вид, что и соответствующие дисперсионные уравнения для упругого слоя [3], но, в отличие от последних, левая часть каждого из уравнений в наследственно-упругом случае является комплексно-значной функцией.

Дисперсионные уравнения (6) и (7) были решены численно. Использовались два метода: метод математического микроскопа [4] и метод продолжения решения по параметру [5]. Результаты, полученные этими методами, совпадают.

3. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ

На рис. 2, a - g изображены проекции дисперсионных кривых на плоскость (ω, χ) для некоторых значений параметров материала в случае симметричного НДС. На рис. 2, a - g знак «+» над номером ветки соответствует значениям $\delta < 0$, а знак «-» — значениям $\delta > 0$.

На рис. 3, a - g изображены проекции дисперсионных кривых на плоскость (ω, χ) для тех же значений параметров материала в случае антисимметричного НДС.

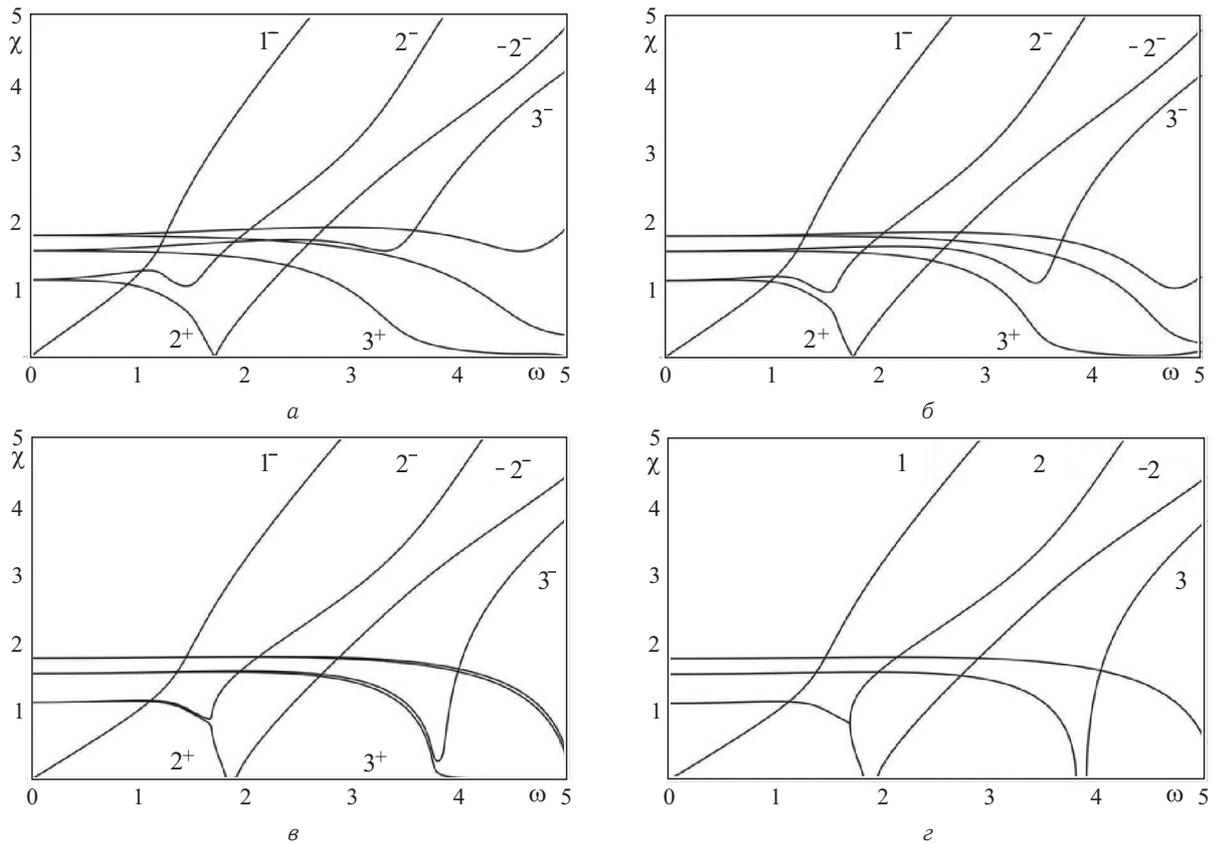


Рис. 2. Проекция дисперсионных кривых на плоскость (ω, χ) (симметричный случай): а – при $k = 0.53, \beta = 1$; б – при $k = 0.53, \beta = 2$; в – при $k = 0.05, \beta = 1$; г – при $k = 0$

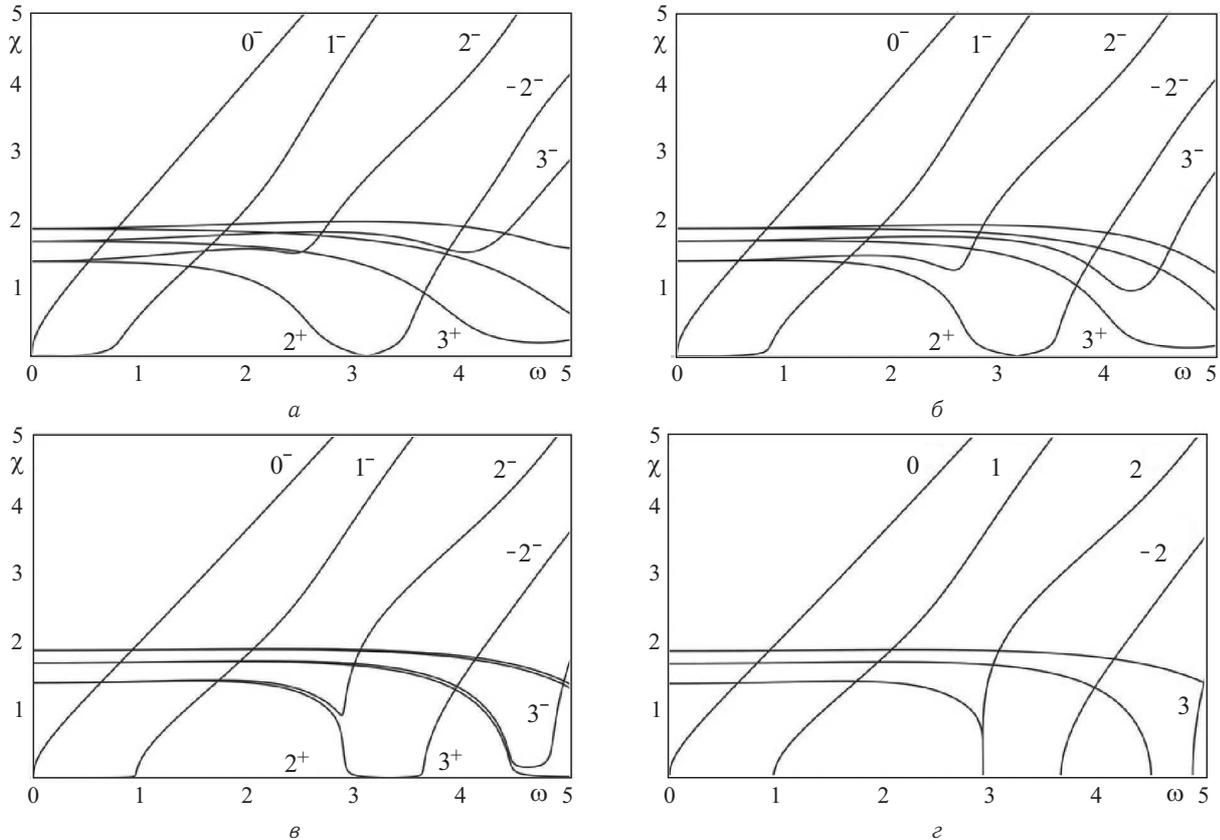


Рис. 3. Проекция дисперсионных кривых на плоскость (ω, χ) (антисимметричный случай): а – при $k = 0.53, \beta = 1$; б – при $k = 0.53, \beta = 2$; в – при $k = 0.05, \beta = 1$; г – при $k = 0$



Анализ дисперсионных уравнений и их численных решений позволяет сделать следующие выводы:

- существует симметрия дисперсионных кривых при замене $\tilde{\chi}$ на $-\tilde{\chi}$;
- чем больше значение k и (или) меньше значение β , тем раньше и больше начинают расходиться дисперсионные кривые с положительной и отрицательной мнимой частью $\tilde{\chi}$;
- при уменьшении значений k и (или) при увеличении значений β поведение дисперсионных кривых стремится к упругому случаю (рис. 2, ε , 3, ε);
- дисперсионные кривые наследственно-упругого спектра, соответствующие действительным ветвям упругого спектра, являются комплексными с положительной мнимой частью $\tilde{\chi}$, что определяет затухание решение по координате;
- для наследственно-упругого спектра теряет смысл понятие частоты запираения, так как $\tilde{\chi} = 0$ и $\omega > 0$ не являются корнями дисперсионных уравнений;
- в окрестностях частот запираения упругого спектра ветви наследственно-упругого спектра имеют наибольшую кривизну. Увеличение значений k , как и уменьшение значений β , ведет к сглаживанию дисперсионных кривых в этих областях. Таким образом, упругий спектр приближенно можно рассматривать как асимптотический для наследственно-упругого при $k \rightarrow 0$, $\beta \gg 1$. Качественно вид дисперсионных кривых соответствует результатам, описанным в работах [6, 7].

4. АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения задач с конкретно заданными граничными условиями на торцах удобно иметь аналитическое решение дисперсионных уравнений. В силу сложности уравнений (6) и (7) получить точное аналитическое решение невозможно, но мы можем получить приближенные аналитические формулы для корней дисперсионных уравнений для малых и больших значений частот с помощью асимптотических методов.

Анализ уравнения (6) и численного решения показывает, что асимптотики корней при $\omega \rightarrow 0$ можно искать в виде

$$\chi_1^s = \sum_{m=2}^{\infty} c_{1m}^s \omega^{m/2}, \quad \delta_1^s = \sum_{m=1}^{\infty} d_{1m}^s \omega^{m/2}, \quad (8)$$

$$\chi_n^s = c_{n0}^s + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}^s \omega^{m/2}, \quad \delta_n^s = d_{n0}^s + \sum_{m=1}^{\infty} d_{nm}^s \omega^{m/2}, \quad n > 1. \quad (9)$$

Для нахождения коэффициентов формул (8) и (9) подставляем их в дисперсионное уравнение (6) и раскладываем функции a , b , гиперболические синусы и косинусы от них в степенные ряды по степеням $\sqrt{\omega}$, группируем элементы с одинаковыми степенями ω . Поскольку получившиеся степенные ряды по $\sqrt{\omega}$ тождественно равны нулю только в том случае, когда равны нулю все его коэффициенты, то получаем две бесконечные системы зацепляющихся уравнений для определения искомым коэффициентов разложения. Решая полученные системы, находим асимптотики корней в окрестности нулевой частоты.

Асимптотика корней для первой моды имеет вид

$$\chi_1^s = c_{12}^s \omega + c_{13}^s \omega^{3/2} + O(\omega^2), \quad \delta_1^s = d_{13}^s \omega^{3/2} + O(\omega^2), \quad (10)$$

где c_{12}^s , c_{13}^s , d_{13}^s — функции, зависящие от параметров ν , k , β . В частности, коэффициент c_{12}^s выражается следующим образом:

$$c_{12}^s = \sqrt{\frac{\left(1 - \nu - \frac{(\frac{1}{2} - \nu)k}{\beta}\right) \left(1 + \nu + \frac{(\frac{1}{2} - \nu)k}{\beta}\right)}{2 \left(1 - \frac{k}{\beta}\right) (1 + \nu)}}.$$

При $n > 1$ получаем выражения

$$\chi_n^s = c_{n0}^s + c_{n1}^s \omega^{1/2} + O(\omega), \quad \delta_n^s = d_{n0}^s + d_{n1}^s \omega^{1/2} + O(\omega), \quad (11)$$



где $c_{n0}^s = \frac{1}{2} \ln(4\pi(n-1) - \pi)$, $d_{n0}^s = -\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2 \ln(4\pi(n-1) - \pi)}{4\pi(n-1) - \pi}\right) + \pi(n-1)$, $n \in N$, c_{n1}^s , d_{n1}^s — функции, зависящие от параметров ν , k , β , причем $c_{n1}^s \ll 1$, $d_{n1}^s \ll 1$.

Аналогично получим асимптотики корней дисперсионного уравнения в случае антисимметричного по нормальной координате НДС в окрестности нулевой частоты.

Для $n = 0, 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \chi_0^a &= c_{01}^a \omega^{1/2} + c_{02}^a \omega + c_{03}^a \omega^{3/2} + O(\omega^2), & \delta_0^a &= d_{02}^a \omega + d_{03}^a \omega^{3/2} + O(\omega^2), \\ \chi_1^a &= c_{12}^a \omega + c_{13}^a \omega^{3/2} + O(\omega^2), & \delta_1^a &= d_{11}^a \omega^{1/2} + d_{12}^a \omega + d_{13}^a \omega^{3/2} + O(\omega^2), \end{aligned} \tag{12}$$

где c_{01}^a , c_{02}^a , c_{03}^a , d_{02}^a , d_{03}^a , c_{12}^a , c_{13}^a , d_{11}^a , d_{12}^a , d_{13}^a — функции, зависящие от параметров ν , k , β .

В частности, коэффициенты c_{01}^a и d_{11}^a выражаются следующим образом:

$$c_{01}^a = d_{11}^a = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\left(1 - \nu - \frac{(\frac{1}{2} - \nu)k}{\beta}\right) \left(1 + \nu + \frac{(\frac{1}{2} - \nu)k}{\beta}\right)}{\left(1 - \frac{k}{\beta}\right) (1 + \nu)}}.$$

Асимптотики корней при $n > 1$ имеют вид

$$\chi_n^a = c_{n0}^a + c_{n1}^a \omega^{1/2} + O(\omega), \quad \delta_n^a = d_{n0}^a + d_{n1}^a \omega^{1/2} + O(\omega), \tag{13}$$

где $c_{n0}^a = \frac{1}{2} \ln(4\pi(n-1) + \pi)$, $d_{n0}^a = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2 \ln(4\pi(n-1) + \pi)}{4\pi(n-1) + \pi}\right) + \pi(n-1)$, c_{n1}^a , d_{n1}^a — функции, зависящие от параметров ν , k , β .

На рис. 4, а, б представлены проекции дисперсионных кривых (симметричный случай) на плоскости (ω, χ) и (ω, δ) , построенных по результатам численных расчетов и по асимптотическим формулам (10) и (11) для нескольких первых мод для случая $\nu = 0.3$, $k = 0.53$, $\beta = 1$. Дисперсионные кривые, соответствующие численным расчетам, изображены сплошными линиями, а асимптотическим формулам — пунктирными.

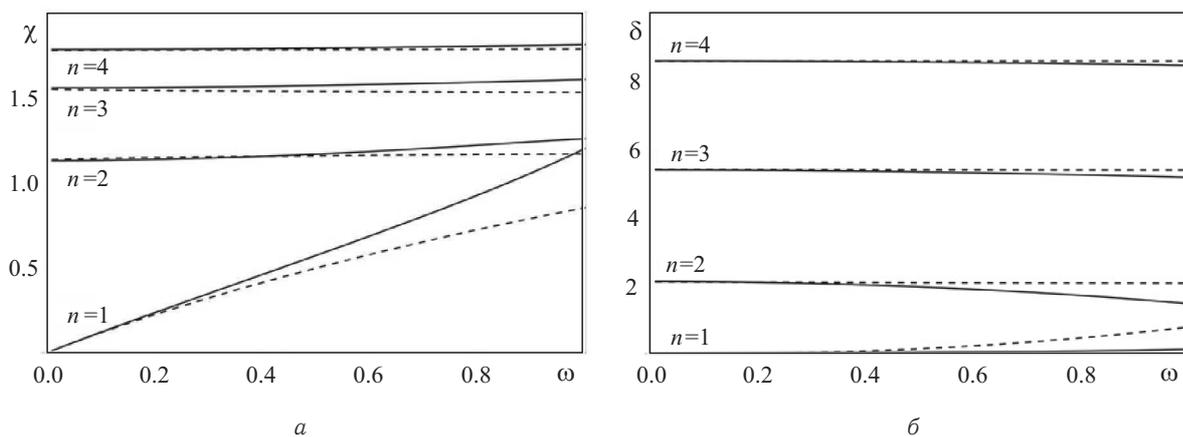


Рис. 4. Проекция дисперсионных кривых на плоскость (ω, χ) (а) и (ω, δ) (б) при $k = 0.53$, $\beta = 1$ (симметричный случай)

На рис. 5, а, б представлены проекции дисперсионных кривых (антисимметричный случай) на плоскости (ω, χ) и (ω, δ) , построенных по результатам численных расчетов и по асимптотическим формулам (12) и (13) для нескольких первых мод для случая $\nu = 0.3$, $k = 0.53$, $\beta = 1$.

Из графиков видно, что решения, полученные с помощью численных и асимптотического методов, хорошо совпадают на интервале $0 \leq \omega \leq 0.1$, а с увеличением номера n наблюдается расширение интервала совпадения асимптотического решения с численным.

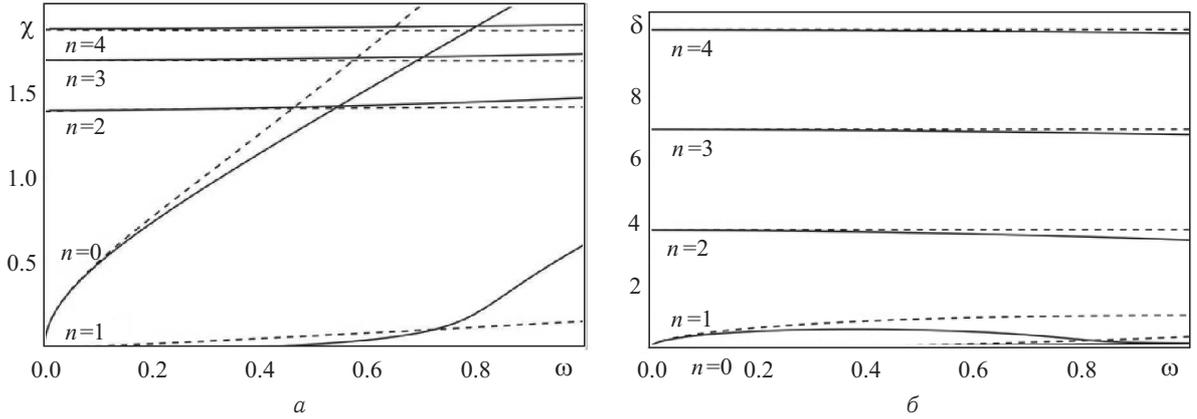


Рис. 5. Проекция дисперсионных кривых на плоскость (ω, χ) (а) и (ω, δ) (б) при $k = 0.53, \beta = 1$ (антисимметричный случай)

Следует отметить, что при $k = 0$ асимптотики корней дисперсионных уравнений для первой моды в симметричном случае и нулевой моды в антисимметричном случае совпадают с соответствующими асимптотиками, полученными в [3] для случая упругого слоя.

Найдем асимптотики корней дисперсионных уравнений для больших значений частот.

Анализ численного решения показал, что при $\omega \rightarrow \infty \chi(\omega) = O(\omega)$. Следовательно, асимптотику корней при большом значении ω ищем в виде

$$\chi_n = c_{n2}^{(\infty)}\omega + c_{n1}^{(\infty)}\sqrt{\omega} + c_{n0}^{(\infty)} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,-m}^{(\infty)}\omega^{-m/2}, \quad \delta_n = d_{n2}^{(\infty)}\omega + d_{n1}^{(\infty)}\sqrt{\omega} + d_{n0}^{(\infty)} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{n,-m}^{(\infty)}\omega^{-m/2}. \quad (14)$$

Рассмотрим дисперсионное уравнение (6) при больших значениях ω . В этом случае уравнение (6) можно заменить приближенным уравнением

$$\gamma^4 - ab\tilde{\chi}^2 = 0. \quad (15)$$

Подставляем разложение (14) в уравнение (15) и раскладываем функции a, b в степенные ряды по обратным степеням $\sqrt{\omega}$, группируем элементы с одинаковыми степенями ω . Поскольку полученный степенной ряд по $\sqrt{\omega}$ тождественно равен нулю только в том случае, когда равны нулю все его коэффициенты, то получаем бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искомых коэффициентов разложения. Решая полученную систему, находим следующие асимптотики корней для первой моды при $\omega \rightarrow \infty$ с точностью $O(\omega^{-1})$:

$$\chi_1 = c_{12}^{(\infty)}\omega + c_{11}^{(\infty)}\sqrt{\omega} + \frac{c_{1,-1}^{(\infty)}}{\sqrt{\omega}} + O\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \delta_1 = d_{11}^{(\infty)}\sqrt{\omega} + d_{10}^{(\infty)} + \frac{d_{1,-1}^{(\infty)}}{\sqrt{\omega}} + O\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad (16)$$

где

$$c_{12}^{(\infty)} = \frac{1}{6}\sqrt{3p - 48(\nu^2 + \nu - 1)p^{-1} - 12(\nu - 2)},$$

$$p = \sqrt[3]{-64\nu^3 + 96\nu^2 - 12\nu + 44 + 12\sqrt{-96\nu^4 + 144\nu^3 - 111\nu^2 + 78\nu - 15}},$$

$c_{11}^{(\infty)}, d_{11}^{(\infty)}$ — функции, зависящие от ν, k ; $c_{1,-1}^{(\infty)}, d_{10}^{(\infty)}, d_{1,-1}^{(\infty)}$ — функции, зависящие от ν, k, β .

Для антисимметричного случая асимптотика корней для первой моды совпадает с асимптотикой (16), поскольку дисперсионное уравнение (7) при больших значениях ω также можно заменить приближенным уравнением (15).

При построении дисперсионных кривых по формулам (16) и методом математического микроскопа выявлено их совпадение для значений $\omega > 85$.

Наличие интервалов совпадения решений, полученных с помощью численных и асимптотического методов, качественное совпадение результатов с результатами, полученными другими авторами [6, 7] для наследственно-упругих материалов, а также совпадение результатов численных расчетов и



асимптотик в упруго-подобном случае ($k = 0$, $\beta \gg 1$) с соответствующими результатами для упругого слоя, приведенными в работе [3], подтверждают достоверность полученных в настоящей работе результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-00644а).

Библиографический список

1. Мелешко В. В., Бондаренко А. А., Довгий С. А., Трофимчук А. Н., Хейст Г. Я. Ф. ван. Упругие волноводы : история и современность // Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т. 51, № 2. С. 86–104.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М. : Наука, 1977. 384 с.
3. Кожанова Т. В., Коссович Л. Ю. Дисперсионные уравнения Релея – Лэмба. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1990. 21 с.
4. Березин В. Л., Харитоновна К. Ю. Применение метода математического микроскопа при решении трансцендентных уравнений // Проблемы точной механики и управления : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2004. С. 119–122.
5. Барышев А. А., Лысункина Ю. В. О применении метода продолжения решения по параметру к анализу дисперсионных уравнений в системе Mathematica // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 108–111.
6. Червинко О. П., Сенченков И. К. Гармонические волны в слое и бесконечном цилиндре // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 12. С. 31–37.
7. Tanaka K., Kon-No A. Harmonic Waves in Linear Viscoelastic Plate // Bull. JSME. 1980. Vol. 23, № 176. P. 185–193.

Investigation of Harmonic Waves in the Viscoelastic Layer

N. S. Anofrikova, N. V. Sergeeva

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, anofrikovans@info.sgu.ru, knickknack@bk.ru

The paper deals with the study of harmonic waves in the viscoelastic layer. The properties of the material are described by the constitutive equations in the integral form. The fractional exponential function of Rabotnov is chosen as a kernel of integral operator. Two cases are considered: symmetric stress-strain state (SSS) and asymmetric SSS. The properties of modes which change in time harmonically are investigated for the purpose of studying of the free vibrations. Dispersion equations for both cases are derived. The numerical solutions of dispersion equations are obtained. Asymptotics of the roots of the dispersion equations for small and large values of frequencies are obtained. Analysis of the solutions is done. The influence of viscosity factors on the behavior of the dispersion curves is established. Comparative analysis of numerical solutions and asymptotics of the roots of dispersion equations are made.

Key words: dispersion equations, stress-strain state, viscoelastic layer, asymptotics.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-08-00644a).

References

1. Meleshko V. V., Bondarenko A. A., Dovgiy S. A., Trofimchuk A. N., Heijst G. J. F. van. Uprugie volnovody : istoriya i sovremennost [The elastic waveguides: the history and the present-day]. *Matematischeskie metody i fiziko-mekhanicheskie polya* [Mathematical methods and physico-mechanical fields], 2008, vol. 51, no. 2, pp. 86–104 (in Russian).
2. Rabotnov Yu. N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow, Nauka, 1977, 384 p. (in Russian).
3. Kozhanova T. V., Kossovich L. Yu. *Dispersionnye uravneniya Releya – Lemba* [Dispersion equations of Rauleigh-Lamb]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1990, 21 p. (in Russian).
4. Berezin V. L., Kharitonova K. Yu. Primenenie metoda matematicheskogo mikroskopa pri reshenii transtscendentnykh uravneniy [Application of the method of mathematical microscope for solving transcendental equations]. *Problemy tochnoi mekhaniki i upravleniya* [Problems of precise mechanics and control]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2004, pp. 119–122 (in Russian).
5. Baryshev A. A., Lysunkina Yu. V. O primeneni metoda prodolzheniya resheniya po parametru k analizu dispersionnykh uravneniy v sisteme Mathematica [On the application of parameter continuation method to the analysis of dispersion equations in Mathematica]. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2013, iss. 15, pp. 108–111 (in Russian).
6. Chervinko O. P., Senchenkov I. K. Garmonicheskie volny v sloe i beskonechnom tsilindre [Harmonic viscoelastic waves in a layer and in an infinite cylinder]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics], 1986, vol. 22, iss. 12, pp. 31–37 (in Russian).
7. Tanaka K., Kon-No A. Harmonic Waves in Linear Viscoelastic Plate. *Bull. JSME*, 1980, vol. 23, no. 176, pp. 185–193.



УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. О. Ватульян¹, С. А. Нестеров²

¹Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, vatluyan@math.rsu.ru

²Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 1079@list.ru

Функционально-градиентные материалы находят широкое применение в областях техники с большими термомеханическими нагрузками. Эффективность применения таких материалов зависит от знания точных законов неоднородности. Ранее авторами был предложен подход по идентификации гладких законов неоднородности для термоупругого стержня. Для этого были получены операторные уравнения, связывающие искомые и измеряемые функции для решения обратной задачи и проведены вычислительные эксперименты. В данной работе на основе аппарата, разработанного ранее, были исследованы особенности восстановления термоупругих характеристик с большим градиентом в окрестности центра и торца стержня.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, коэффициентная обратная задача, термоупругий стержень, интегральные уравнения.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие методов идентификации термомеханических характеристик неоднородных тел — важнейшая задача механики деформируемого твердого тела. Часто при термомеханических расчетах полагают, что материал однороден, поэтому его характеристики описывают набором физических постоянных, которые определяют из простых макроэкспериментов. Однако в последние годы в различные области техники все шире внедряются функционально-градиентные материалы, выступающие в качестве альтернативы слоистым композитам [1, 2]. Функционально-градиентные материалы — композиты, обладающие переменными физическими свойствами, в которых избегают скачков термомеханических характеристик через поверхность раздела, благодаря их непрерывному изменению. Однако в силу несовершенства производства функционально-градиентных материалов в конечном изделии могут присутствовать отклонения от заданных технологических параметров. Неоднородную структуру материалы могут приобрести не только в процессе изготовления, но и при эксплуатации, под воздействием облучения, сильных магнитных полей, больших градиентов температур. При этом практически невозможно заранее прогнозировать изменения в структуре материалов, вызванные внешними воздействиями. Знание реальных переменных характеристик изделия после изготовления или эксплуатации позволяет правильно оценить его функциональные свойства и возможность использования.

Прямые измерения термоупругих характеристик в случае неоднородных тел невозможны. Для их нахождения требуется решать коэффициентные обратные задачи (КОЗ) термоупругости. К настоящему времени накоплен достаточно большой опыт исследования обратных задач, который достаточно полно изложен в монографиях [3, 4]. Наиболее распространенным методом решения коэффициентных обратных задач теплопроводности и теории упругости является метод сведения их к минимизации неквадратичного функционала невязки [3, 7]. При этом необходимо использовать итерационные процессы, на каждом шаге которых требуется вычисления градиента функционала. Однако количество работ по исследованию КОЗ термоупругости еще невелико [5–7]. Исследования ограничиваются в основном слабонеоднородными материалами [5], или идентификацией характеристик полубесконечной вертикально-неоднородной термоупругой среды [6]. Это связано с тем, что дифференциальные уравнения термоупругости не относятся ни к параболическому, ни к гиперболическому типу, а также с трудностями при построении нелинейных операторных отношений, связывающих искомые и измеряемые в эксперименте функции. Однако в ряде работ [8, 9] эта трудность была преодолена при помощи обобщенного соотношения взаимности. При этом достаточно просто были получены линеаризованные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода для нахождения поправок восстанавливаемых коэффициентов и проведены вычислительные эксперименты по их восстановлению. Однако в этих работах не



исследованным остался вопрос об идентификации термомеханических характеристик с существенным изменением функций как на поверхности, так и внутри тела, т. е. локализованных неоднородностей. Решению этой задачи и посвящена данная работа. В работе прямая задача для неоднородного термоупругого стержня после преобразования Лапласа решается путем сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Обратная задача на основе обобщенного соотношения взаимности и линеаризации сводится к поэтапному решению интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Проведены вычислительные эксперименты по идентификации локализованных неоднородностей, выявлены особенности реконструкции. Даны рекомендации для практического использования предложенного подхода.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях жестко закрепленного на торце $x = 0$ неоднородного термоупругого стержня длины l под действием приложенной к торцу $x = l$ силы $F = p_0\lambda(t)$. Начально-краевая задача в случае отсутствия массовых сил имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_x = E(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(x)\theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial \theta}{\partial x}) = c(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad (3)$$

$$\theta(0, t) = u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0, \quad \sigma_x(l, t) = p_0\lambda(t), \quad (4)$$

$$\theta(x, 0) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (5)$$

Здесь $\rho(x)$ — плотность, $E(x)$ — модуль Юнга, $\gamma(x)$ — коэффициент термоупругих напряжений, $k(x)$ — коэффициент теплопроводности, $c(x)$ — удельная объемная теплоемкость, $\theta(x, t)$ — приращение температуры, $u(x, t)$ — смещение точек стержня.

В обратной задаче требуется определить одну из термомеханических характеристик стержня ($c(x)$, $k(x)$, $\rho(x)$, $E(x)$, $\gamma(x)$) при известных остальных из (1)–(5) по некоторой дополнительной информации о торцевом смещении стержня:

$$u(l, t) = g(t), \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (6)$$

Аналогично ставится задача о возбуждении колебаний стержня под действием теплового потока $q = q_0\varphi(t)$. В этом случае в качестве дополнительной информации выступает торцевая температура стержня:

$$\theta = f(t), \quad t \in [T_3, T_4]. \quad (7)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Порядки материальных модулей, входящих в систему уравнений связанной термоупругости (1)–(5), сильно отличаются между собой, что может привести к большой погрешности решения при реализации прямой задачи. Чтобы этого избежать, обезразмерим задачу (1)–(5), обозначая:

$$\begin{aligned} z = \frac{x}{l}, \quad z \in [0, 1], \quad \bar{k}(z) = \frac{k(zl)}{k_0}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c(zl)}{c_0}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(zl)}{\rho_0}, \quad \bar{E}(z) = \frac{E(zl)}{E_0}, \\ \bar{\gamma}(z) = \frac{\gamma(zl)}{\gamma_0}, \quad t_1 = \frac{l^2 c_0}{k_0}, \quad t_2 = l \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad \tau = \frac{t}{t_2}, \quad W = \frac{\gamma_0 \theta}{E_0}, \quad U = \frac{u}{l}, \quad \Omega = \frac{\sigma_x}{E_0}, \\ \delta = \frac{\gamma_0^2 T_0}{c_0 E_0}, \quad \varepsilon = \frac{t_2}{t_1} = \frac{k_0}{c_0 l} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad \mu = \frac{p_0}{E_0}, \quad k_0 = \max_{x \in [0, l]} k(x), \quad c_0 = \max_{x \in [0, l]} c(x), \\ E_0 = \max_{x \in [0, l]} E(x), \quad \rho_0 = \max_{x \in [0, l]} \rho(x), \quad \gamma_0 = \max_{x \in [0, l]} \gamma(x). \end{aligned} \quad (8)$$

После обезразмеривания (8) начально-краевая задача (1)–(5) примет вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \rho(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (9)$$



$$\Omega = \bar{E}(z) \frac{\partial U}{\partial z} - \bar{\gamma}(z) W, \quad (10)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} (\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z}) = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \delta \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau}, \quad (11)$$

$$U(0, \tau) = W(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau) = 0, \quad \Omega(1, \tau) = \mu \lambda(\tau), \quad (12)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, 0) = 0. \quad (13)$$

Прямая задача о колебаниях неоднородного термоупругого стержня может быть решена лишь численно, например, методом сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, как это было сделано в [8, 9]. Применив к (9)–(12) преобразование Лапласа по τ , с учетом начальных условий (13), после некоторых преобразований, получим систему интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно трансформант безразмерной температуры $\tilde{W}(z, p)$ и напряжения $\tilde{\Omega}(z, p)$:

$$\tilde{W}(z, p) = \int_0^1 K_1(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + \int_0^1 K_2(z, \xi, p) \tilde{\Omega}(\xi, p) d\xi + f_1(p), \quad (14)$$

$$\tilde{\Omega}(z, p) = \int_0^1 K_3(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + \int_0^1 K_4(z, \xi, p) \tilde{\Omega}(\xi, p) d\xi. \quad (15)$$

Здесь ядра $K_1(z, \xi, p)$, $K_2(z, \xi, p)$, $K_3(z, \xi, p)$, $K_4(z, \xi, p)$ и правая часть $f_1(p)$ системы (14)–(15) имеют вид

$$K_1(z, \xi, p) = -\frac{p}{\varepsilon} (\bar{c}(\xi) + \delta \frac{\bar{\gamma}^2(\xi)}{\bar{E}(\xi)}) \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)}, \quad K_2(z, \xi, p) = -\frac{p}{\varepsilon} \delta \frac{\bar{\gamma}(\xi)}{\bar{E}(\xi)} \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)},$$

$$K_3(z, \xi, p) = -p^2 \frac{\bar{\gamma}(\xi)}{\bar{E}(\xi)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta, \quad K_4(z, \xi, p) = -p^2 \frac{1}{\bar{E}(\eta)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta, \quad f_1(p) = -\mu \tilde{\lambda}(p).$$

Решение системы (14)–(15) проводилось на основе метода коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций. Численно — аналитические решения СЛАУ, получившиеся после дискретизации системы (14)–(15), показали, что трансформанты температуры и напряжения в узловых точках являются дробно-рациональными функциями от параметра преобразования Лапласа и не имеют особых точек, кроме комплексных полюсов, определяемых ядрами системы и типом нагрузки. Поэтому для нахождения оригиналов температуры и напряжений в работе применялась теория вычетов [9]: оригиналы находились в виде конечной суммы показательных функций. Точность решения прямой задачи проверялась путем сравнения численного решения с аналитическим решением, полученным для однородного стержня, а также конечно-разностными решениями, полученными для различных законов неоднородности. Подобрана такая сетка точек коллокаций, при которой погрешность решения составляла менее 1%.

Для решения обратных задач термоупругости воспользуемся операторными уравнениями, полученными ранее в работах [8, 9]. Так, для нахождения поправок к коэффициенту теплопроводности $\delta \bar{k}^{(n-1)}$ при законе нагружения $\lambda(\tau) = H(\tau)$ необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} M_1(z, \tau) dz = f(\tau) - W^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [c, d], \quad (16)$$

где ядро интегрального уравнения (16) имеет вид

$$M_1(z, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial^2 W^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z \partial \tau_1} \frac{\partial P^{(n-1)}(z, \tau_1 - \tau)}{\partial z} d\tau_1.$$



Для нахождения поправок $\delta \bar{E}^{(n-1)}(z)$ при законе нагружения $\varphi(\tau) = H(\tau)$ необходимо решать интегральное уравнение:

$$\int_0^1 \delta \bar{E}^{(n-1)} M_2(z, \tau) dz = -\mu(g(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau)), \quad \tau \in [a, b]. \quad (17)$$

Решение интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода вида (16), (17) является некорректной задачей, для ее регуляризации в работе применялся метод А. Н. Тихонова [10].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В работе натурный эксперимент был заменен вычислительным. Безразмерные термоупругие характеристики стержня $\bar{a}(z)$ восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций $\bar{a}^{(0)}(z) = kz + b$ на основе минимизации функционала невязки, который в случае нагружения торца стержня тепловым потоком имеет вид

$$J_1 = \int_c^d (f(\tau) - W^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau, \quad (18)$$

а в случае нагружения торца стержня силой его вид будет следующим:

$$J_2 = \int_a^b (g(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau, \quad (19)$$

На втором этапе на основе решения соответствующих интегральных уравнений вида (16), (17) находились поправки реконструируемых функций и строился итерационный процесс их уточнения по схеме $\bar{a}^{(n)}(z) = \bar{a}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{a}^{(n-1)}(z)$. Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении некоторого порогового значения соответствующего функционала невязки (16), (17), равного 10^{-6} .

Сначала вычислительные эксперименты по идентификации локализованных неоднородностей проводились на равномерной сетке при $n = 20$ разбиениях в квадратурной формуле трапеций аналогично, как это было сделано ранее в работах [8, 9]. Однако результаты реконструкции для законов с большим градиентом изменения функции оказались неудовлетворительными, так как погрешность реконструкции часто превышала 30%. Поэтому с целью уменьшения погрешности реконструкции локализованных неоднородностей была введена неравномерная сетка при $n = 35$ со сгущением точек коллокаций в окрестности локализованных неоднородностей. В этом случае максимальная погрешность реконструкции не превышала 20%. Вычислительные эксперименты проводились при следующих значениях безразмерных параметров: $\varepsilon = 10^{-6}$, $\mu = 0.1$. Выяснены информативные временные интервалы для измерения входной информации, т. е. температуры и смещения на торце стержня. Так, измерение температуры наиболее информативно на безразмерном временном интервале $[c, d] = [0, 0.5]$ и 5-ти точек наблюдения внутри него, а измерение смещения на безразмерном временном интервале $[a, b] = [0, 1]$ и 6-ти точках наблюдения внутри него. Для всех точных и восстановленных функций были вычислены интегральные характеристики (первые моменты) по формуле

$$L_r = \int_0^1 z^r \bar{a}(z) dz, \quad r = 0, 1, 2. \quad (20)$$

В первой серии экспериментов восстанавливались законы, характеризующие локализованную неоднородность в окрестности центра стержня. На рис. 1 представлены результаты реконструкции коэффициента теплопроводности $\bar{k}(z) = 1 + e^{-1000(z-0.5)^\alpha}$ при различных значениях параметра α ($\alpha = 6, 4, 2$). Начальное приближение бралось в виде $\bar{k}_0 = 0.9 + 0.9z$, параметр связанности $\delta = 0.03$. Выяснилось, что изменение параметра связанности практически не влияло на результаты реконструкции.

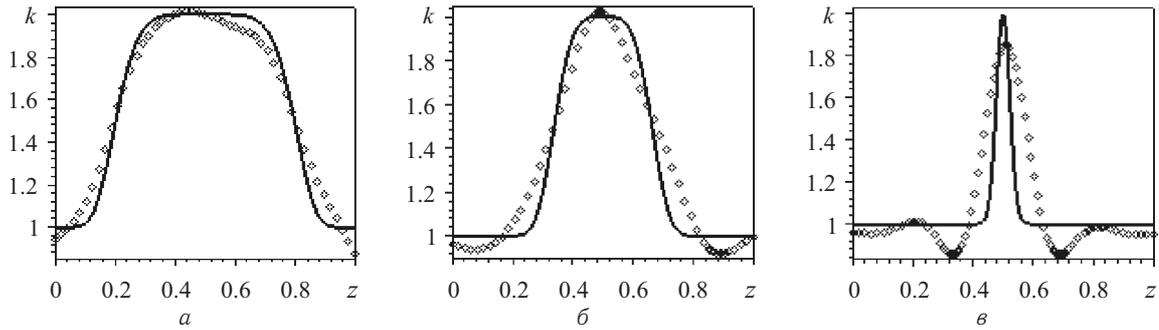


Рис. 1. Реконструкция коэффициента теплопроводности $\bar{k}(z) = 1 + e^{-1000(z-0.5)^\alpha}$ при различных значениях параметра α : а) $\alpha = 6$; б) $\alpha = 4$; в) $\alpha = 2$

Во второй серии экспериментов восстанавливались законы, характеризующие локализованные неоднородности в окрестности торца стержня. На рис. 2 представлены результаты реконструкции модуля Юнга.

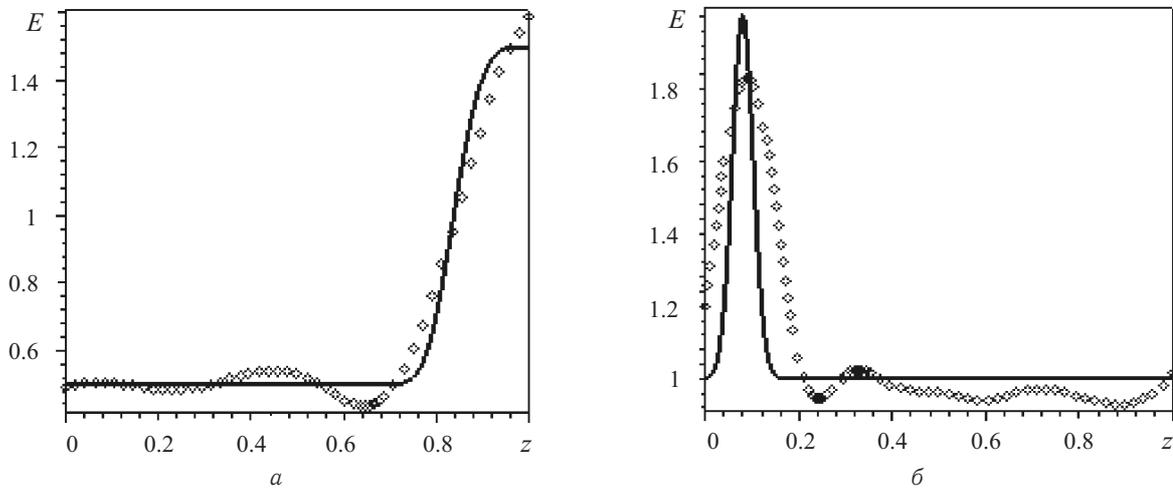


Рис. 2. Реконструкция модуля Юнга: а) $\bar{E}(z) = 0.5 + e^{-1000(z-1)^4}$; б) $\bar{E}(z) = 1 + e^{-1000(z-0.8)^2}$

На рис. 1, 2 сплошными линиями изображены точные функции, а точками — восстановленные. Из анализа рис. 1 и рис. 2 следует, что при небольшой скорости изменения функции, например, при $\alpha = 6, 4$ (см. рис. 1, а, б; рис. 2, а) процедура идентификации происходит достаточно успешно: погрешность реконструкции не превышает 11%, а для достижения порогового значения в соответствующем функционале невязки требуется не более 8 итераций. Если же функция изменяется очень быстро, например, при $\alpha = 2$ (см. рис. 1, в; рис. 2, б), то результаты реконструкции значительно ухудшаются: изображение получается более расплывчатым, максимальная погрешность реконструкции возрастает до 20%, для достижения порогового значения в соответствующем функционале невязки требуется более 14 итераций. Однако для всех законов неоднородности выяснено, что интегральные характеристики, вычисленные для точной и восстановленной функции по формуле (20), практически совпадают.

ВЫВОДЫ

Приведены постановки задач об идентификации неоднородных характеристик термоупругого стержня с существенным изменением модулей в центре и в окрестности торца стержня. Основываясь на ранее разработанном подходе, проведены вычислительные эксперименты по идентификации характеристик на конкретных примерах. Выяснены значения параметров, характеризующие неоднородность, при которых идентификация происходит достаточно успешно.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования».



Библиографический список

1. Wetherhold R. C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // *Composites Science and Technology*. 1996. № 56. P. 1099–1104.
2. Lee W. Y., Stinton D. P., Bernardt C. C., Erdogan F., Lee Y. D., Mutasin Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications // *J. of American Ceramic Society*. 1996. Vol. 19. P. 3003–3012.
3. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1988. 288 с.
4. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М. : Физматлит, 2007. 224 с.
5. Ломазов В. А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред / ОрелГТУ. Орел, 2002. 168 с.
6. Апбасов С. О., Яхно В. Г. Обратная задача динамической несвязанной термоупругости // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений и дискретной математики / Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 1986. С. 63–70.
7. Lukaszewicz S. A., Babaei R., Qian R. E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // *J. of Thermal Stresses*. 2003. Vol. 26, № 1. P. 13–23.
8. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // *Intern. J. of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51(3). P. 767–773.
9. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // *Инженерно-физический журн.* 2014. Т. 87, № 1. С. 217–224.
10. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола Я. Г. Численные методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1990. 230 с.

About the Specifics of Identification Thermomechanical Characteristics of Functionally Graded Materials

A. O. Vatulyan, S. A. Nesterov

Southern Federal University, 8-a, Milchakova str., Rostov-on-Don, 344090, Russia, vatulyan@math.rsu.ru, 1079@list.ru

Functionally graded materials are widely used in engineering fields with large thermo-mechanical loads. Efficiency of application of these materials depends on accurate knowledge of the laws of heterogeneity. Earlier, the authors have proposed an approach for the identification of smooth laws of heterogeneity for thermoelastic rod. To do this, were received operator equation linking activities and measurable functions for the solution of inverse problem and carried out computational experiments. In this paper, on the basis of the device, previously developed, were investigated features for restoring thermoelastic characteristics with a large gradient in the vicinity of the center and the end of the rod.

Key words: functionally graded materials, coefficient inverse problem, thermoelastic rod, integral equations.

This work was supported by the Program of fundamental research on the strategic directions of development of science Of the Presidium of the Russian Academy of Sciences no. 1 «Fundamental problems of mathematical modeling».

References

1. Wetherhold R. C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation. *Composites Science and Technology*, 1996, no. 56, pp. 1099–1104.
2. Lee W. Y., Stinton D. P., Bernardt C. C., Erdogan F., Lee Y. D., Mutasin Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications. *J. of American Ceramic Society*, 1996, vol. 19, pp. 3003–3012.
3. Alifanov O. M., Artyuhin E. A., Romyantsev S. V. *Ekstremalniye metodyi resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1988, 288 p. (in Russian).
4. Vatulyan A. O. *Obratniye zadachi v mehanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems in mechanics of deformable solids]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 224 p. (in Russian).
5. Lomazov V. A. *Zadachi diagnostiki neodnorodnykh termouprugikh sred* [Problems of identification of inhomogeneous thermoelastic bodies]. Orel, OrelSTU, 2002, 168 p. (in Russian).
6. Apbasov S. O., Yakhno V. G. The inverse problem of dynamic unlinked thermoelasticity. *Nekotore voprosi differentsialnykh uravneniy i diskretnoi matematiki* [Some questions of the differential equations and discrete mathematics], Novosibirsk, Novosibirsk Univ. Press, 1986, pp. 63–70 (in Russian).
7. Lukaszewicz S. A., Babaei R., Qian R. E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects. *J. of Thermal Stresses*, 2003, vol. 26, no. 1, pp. 13–23.
8. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *Int. J. of Solids and Structures*, 2014, vol. 51(3), pp. 767–773.
9. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. About one method of



identification of thermoelastic characteristics for inhomogeneous bodies. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal* [Journal of Engineering Physics], 2014, vol. 87, no. 1, pp. 217–224 (in Russian).

10. Tikhonov A. N., Goncharky A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1990, 230 p. (in Russian).

УДК 533.6.011

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕВЯЗКОЙ ТЯЖЁЛОЙ ЖИДКОСТИ И НА РЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Д. И. Ливеровский¹, С. П. Шевырёв²

¹Аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, LiverovskiyDI@gmail.com

²Кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной информатики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, ShevSP@rambler.ru

Данное исследование посвящено модификации метода Давыдова (крупных частиц) для случая несжимаемой жидкости. Рассматривается моделирование течения тяжелой несжимаемой невязкой жидкости на регулярной сетке модифицированным методом Давыдова в трёхмерном пространстве. Кроме того, проводится сравнение полученных результатов с двумерным случаем, а также проверяется симметричность трёхмерного течения, там где она есть в исходной задаче. Выводятся формулы модифицированного метода Давыдова для случая трёх пространственных измерений, включая разностный аналог трёхмерного уравнения Пуассона для давления. Обобщается критерий устойчивости. Приводится описание алгоритма построения трёхмерной свободной поверхности. Реализована трёхмерная компьютерная графика, показывающая развитие процессов во времени в режиме online.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, метод Давыдова, метод крупных частиц, свободная поверхность, уравнение Пуассона для давления, критерий устойчивости разностной схемы, симметричные течения.

1. СУТЬ МЕТОДА ДАВЫДОВА

Суть метода Давыдова (метода крупных частиц) состоит в том, что использует расщепление по физическим факторам и по координатам. В методе Давыдова выделяют три этапа [1]. Будем рассматривать декартову прямоугольную систему координат. Решение будет проводиться на регулярной разностной сетке, а это означает, что расчётная область разбивается на ячейки с шагом h_x вдоль оси X , с шагом h_y вдоль оси Y и с шагом h_z вдоль оси Z . Расчётная область будет разбита на K частей вдоль оси X , M частей вдоль оси Y , N частей вдоль оси Z . Ячейки сетки будут иметь вид прямоугольных параллелепипедов. Каждая ячейка будет определяться тройкой индексов (i, j, k) , где i определяет положение ячейки вдоль оси Z , j определяет положение ячейки вдоль оси Y и k определяет положение ячейки вдоль оси X . Все расчётные параметры (давление и компоненты вектора скорости) будут отнесены к центру ячейки. Значения на границах ячейки будут иметь полуцелый индекс по соответствующей координате. Рассмотрим этапы метода Давыдова подробнее. Приведённые далее формулы получаются аналогично формулам для двумерного случая [2]. Течение тяжелой несжимаемой невязкой жидкости в трёхмерном пространстве моделируется путем решения краевых задач для системы уравнений Эйлера и уравнения неразрывности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = -g, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1)$$



На эйлеровом этапе опускают конвективные члены, таким образом разностные аналоги первых трёх уравнений системы (1) примут вид(2), где $p_{i,j,k}^q$, $u_{i,j,k}^q$, $v_{i,j,k}^q$, $w_{i,j,k}^q$ — значения давления и компонентов вектора скорости в ячейке (i, j, k) на q -м шаге по времени, τ — величина шага по времени, а h_x, h_y, h_z — размеры ячейки регулярной разностной сетки. Давление берётся на границах расчётных ячеек и выражается по формуле $p_{i,j,k+\frac{1}{2}}^q = \frac{p_{i,j,k+1}^q + p_{i,j,k}^q}{2}$ и т. д.

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}_{i,j,k}^q - u_{i,j,k}^q}{\tau} + \frac{1}{\rho_0} \frac{p_{i,j,k+\frac{1}{2}}^q - p_{i,j,k-\frac{1}{2}}^q}{h_x} = 0, \\ \frac{\tilde{v}_{i,j,k}^q - v_{i,j,k}^q}{\tau} + \frac{1}{\rho_0} \frac{p_{i,j+\frac{1}{2},k}^q - p_{i,j-\frac{1}{2},k}^q}{h_y} = 0, \\ \frac{\tilde{w}_{i,j,k}^q - w_{i,j,k}^q}{\tau} + \frac{1}{\rho_0} \frac{p_{i+\frac{1}{2},j,k}^q - p_{i-\frac{1}{2},j,k}^q}{h_z} = -g. \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда мы можем получить явные формулы для нахождения компонент вектора скорости в конце эйлерова этапа:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,j,k}^q &= u_{i,j,k}^q - \frac{\tau}{2\rho_0 h_x} (p_{i,j,k+1}^q - p_{i,j,k-1}^q), \\ \tilde{v}_{i,j,k}^q &= v_{i,j,k}^q - \frac{\tau}{2\rho_0 h_y} (p_{i,j,k+1}^q - p_{i,j,k-1}^q), \\ \tilde{w}_{i,j,k}^q &= w_{i,j,k}^q - \frac{\tau}{2\rho_0 h_z} (p_{i,j,k+1}^q - p_{i,j,k-1}^q) - \tau g. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее, рассмотрим четвёртое уравнение системы (1), это уравнение неразрывности. Введём следующие обозначения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = D, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = \tilde{D}, \quad (5)$$

где D — это дивергенция вектора скорости, а \tilde{D} — это дивергенция вектора скорости на эйлеровом этапе, играющая ключевую роль в расчетах несжимаемой жидкости. Дивергенция должна равняться нулю в любой момент времени на любом этапе расчета, как в дифференциальной форме, так и в разностной форме, это следует из четвёртого уравнения системы (1). Запишем разностные аналоги выражений (4), (5) через скорости на границах ячеек:

$$\tilde{D}_{i,j,k}^q = \frac{\tilde{u}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^q - \tilde{u}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^q}{h_x} + \frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2},k}^q - \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2},k}^q}{h_y} + \frac{\tilde{w}_{i+\frac{1}{2},j,k}^q - \tilde{w}_{i-\frac{1}{2},j,k}^q}{h_z}, \quad (6)$$

$$D_{i,j,k}^q = \frac{u_{i,j,k+\frac{1}{2}}^q - u_{i,j,k-\frac{1}{2}}^q}{h_x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2},k}^q - v_{i,j-\frac{1}{2},k}^q}{h_y} + \frac{w_{i+\frac{1}{2},j,k}^q - w_{i-\frac{1}{2},j,k}^q}{h_z}, \quad (7)$$

где $u_{i,j,k+\frac{1}{2}}^q = \frac{u_{i,j,k+1}^q + u_{i,j,k}^q}{2}$, $v_{i,j+\frac{1}{2},k}^q = \frac{v_{i,j+1,k}^q + v_{i,j,k}^q}{2}$, $w_{i+\frac{1}{2},j,k}^q = \frac{w_{i+1,j,k}^q + w_{i,j,k}^q}{2}$,

Так как на каждом шаге по времени $\tilde{D}_{i,j,k}^q = 0$ для любых троек (i, j, k) , то, подставив в (6) $\tilde{u}_{i,j,k}^q$, $\tilde{v}_{i,j,k}^q$ и $\tilde{w}_{i,j,k}^q$, выраженные из формул (3), получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} D_{i,j,k} + p_{i,j,k} \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) \frac{\tau}{2\rho_0} - \frac{\tau}{4h_x^2 \rho_0} (p_{i,j,k+2} + p_{i,j,k-2}) - \\ - \frac{\tau}{4h_y^2 \rho_0} (p_{i,j+2,k} + p_{i,j-2,k}) - \frac{\tau}{4h_z^2 \rho_0} (p_{i+2,j,k} + p_{i-2,j,k}) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В том случае, когда все переменные относятся к одному временному слою, будем опускать верхний индекс. Из уравнения (8) уже можно выразить $p_{i,j,k}$ и получить матричное уравнение, но можно получить матричное уравнение с более простым шаблоном, используя разложение в ряд Тейлора.



Записав разложения для $p_{i,j,k}$ в окрестностях $p_{i+1,j,k}$, $p_{i-1,j,k}$, $p_{i,j+1,k}$, $p_{i,j-1,k}$, $p_{i,j,k+1}$, $p_{i,j,k-1}$, оставив только члены до первого порядка малости включительно, выразив из разложений $p_{i+2,j,k}$, $p_{i-2,j,k}$, $p_{i,j+2,k}$, $p_{i,j-2,k}$, $p_{i,j,k+2}$, $p_{i,j,k-2}$ и подставив их в уравнение (8), получим матричное уравнение:

$$p_{i,j,k} = -\frac{\rho_0 h_x^2 h_y^2 h_z^2 D_{i,j,k}}{\tau(h_x^2 h_y^2 + h_x^2 h_z^2 + h_z^2 h_y^2)} + \frac{1}{2(h_x^2 h_y^2 + h_x^2 h_z^2 + h_z^2 h_y^2)} \times \\ \times \left((p_{i,j,k+1} + p_{i,j,k-1}) h_z^2 h_y^2 + (p_{i,j+1,k} + p_{i,j-1,k}) h_z^2 h_x^2 + (p_{i+1,j,k} + p_{i-1,j,k}) h_x^2 h_y^2 \right). \quad (9)$$

Уравнение(9) может быть решено итерационным методом, в таком случае получим выражение для $p_{i,j,k}^{(r+1)}$, где r — номер итерации:

$$p_{i,j,k}^{(r+1)} = -\frac{\rho_0 h_x^2 h_y^2 h_z^2 D_{i,j,k}}{\tau(h_x^2 h_y^2 + h_x^2 h_z^2 + h_z^2 h_y^2)} + \frac{1}{2(h_x^2 h_y^2 + h_x^2 h_z^2 + h_z^2 h_y^2)} \times \\ \times \left((p_{i,j,k+1}^{(r)} + p_{i,j,k-1}^{(r)}) h_z^2 h_y^2 + (p_{i,j+1,k}^{(r)} + p_{i,j-1,k}^{(r)}) h_z^2 h_x^2 + (p_{i+1,j,k}^{(r)} + p_{i-1,j,k}^{(r)}) h_x^2 h_y^2 \right). \quad (10)$$

Уравнение (10) должно решаться на каждом шаге по времени перед эйлеровым этапом.

На лагранжевом этапе вычисляются потоки массы через каждую из границ ячейки. При этом полагаем, что вся масса переносится через границу только за счёт нормальной к границе составляющей скорости. Запишем потоки массы для всех 6 граней ячейки: $\Delta M_{i,j,k-\frac{1}{2}} = \rho_0 \tilde{u}_{i,j,k-\frac{1}{2}} h_y h_z \tau$, $\Delta M_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \rho_0 \tilde{u}_{i,j,k+\frac{1}{2}} h_y h_z \tau$, $\Delta M_{i,j-\frac{1}{2},k} = \rho_0 \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2},k} h_x h_z \tau$, $\Delta M_{i,j+\frac{1}{2},k} = \rho_0 \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2},k} h_x h_z \tau$, $\Delta M_{i-\frac{1}{2},j,k} = \rho_0 \tilde{w}_{i-\frac{1}{2},j,k} h_x h_y \tau$, $\Delta M_{i+\frac{1}{2},j,k} = \rho_0 \tilde{w}_{i+\frac{1}{2},j,k} h_x h_y \tau$. На заключительном этапе вычисляются газодинамические параметры в следующий момент времени:

$$u_{i,j,k}^{q+1} = \frac{\tilde{u}_{i,j,k}^q o + \tilde{u}_{i,j,k-1}^q d_1 \left| \Delta M_{i,j,k-\frac{1}{2}}^q \right| + \tilde{u}_{i,j-1,k}^q d_2 \left| \Delta M_{i,j-\frac{1}{2},k}^q \right| + \tilde{u}_{i-1,j,k}^q d_3 \left| \Delta M_{i-\frac{1}{2},j,k}^q \right| + \\ + \tilde{u}_{i,j,k+1}^q d_4 \left| \Delta M_{i,j,k+\frac{1}{2}}^q \right| + \tilde{u}_{i,j+1,k}^q d_5 \left| \Delta M_{i,j+\frac{1}{2},k}^q \right| + \tilde{u}_{i+1,j,k}^q d_6 \left| \Delta M_{i+\frac{1}{2},j,k}^q \right|}{\rho_0 h_x h_y h_z}, \\ v_{i,j,k}^{q+1} = \frac{\tilde{v}_{i,j,k}^q o + \tilde{v}_{i,j,k-1}^q d_1 \left| \Delta M_{i,j,k-\frac{1}{2}}^q \right| + \tilde{v}_{i,j-1,k}^q d_2 \left| \Delta M_{i,j-\frac{1}{2},k}^q \right| + \tilde{v}_{i-1,j,k}^q d_3 \left| \Delta M_{i-\frac{1}{2},j,k}^q \right| + \\ + \tilde{v}_{i,j,k+1}^q d_4 \left| \Delta M_{i,j,k+\frac{1}{2}}^q \right| + \tilde{v}_{i,j+1,k}^q d_5 \left| \Delta M_{i,j+\frac{1}{2},k}^q \right| + \tilde{v}_{i+1,j,k}^q d_6 \left| \Delta M_{i+\frac{1}{2},j,k}^q \right|}{\rho_0 h_x h_y h_z}, \\ w_{i,j,k}^{q+1} = \frac{\tilde{w}_{i,j,k}^q o + \tilde{w}_{i,j,k-1}^q d_1 \left| \Delta M_{i,j,k-\frac{1}{2}}^q \right| + \tilde{w}_{i,j-1,k}^q d_2 \left| \Delta M_{i,j-\frac{1}{2},k}^q \right| + \tilde{w}_{i-1,j,k}^q d_3 \left| \Delta M_{i-\frac{1}{2},j,k}^q \right| + \\ + \tilde{w}_{i,j,k+1}^q d_4 \left| \Delta M_{i,j,k+\frac{1}{2}}^q \right| + \tilde{w}_{i,j+1,k}^q d_5 \left| \Delta M_{i,j+\frac{1}{2},k}^q \right| + \tilde{w}_{i+1,j,k}^q d_6 \left| \Delta M_{i+\frac{1}{2},j,k}^q \right|}{\rho_0 h_x h_y h_z}, \\ o = \rho_0 h_x h_y h_z - (1 - d_1) \left| \Delta M_{i,j,k-\frac{1}{2}}^q \right| - (1 - d_2) \left| \Delta M_{i,j-\frac{1}{2},k}^q \right| - (1 - d_3) \left| \Delta M_{i-\frac{1}{2},j,k}^q \right| - \\ - (1 - d_4) \left| \Delta M_{i,j,k+\frac{1}{2}}^q \right| - (1 - d_5) \left| \Delta M_{i,j+\frac{1}{2},k}^q \right| - (1 - d_6) \left| \Delta M_{i+\frac{1}{2},j,k}^q \right|,$$

где

$$d_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{u}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^q \leq 0, \\ 1, & \text{если } \tilde{u}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^q > 0, \end{cases} \quad d_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2},k}^q \leq 0, \\ 1, & \text{если } \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2},k}^q > 0, \end{cases} \\ d_3 = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{w}_{i-\frac{1}{2},j,k}^q \leq 0, \\ 1, & \text{если } \tilde{w}_{i-\frac{1}{2},j,k}^q > 0, \end{cases} \quad d_4 = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{u}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^q \leq 0, \\ 0, & \text{если } \tilde{u}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^q > 0, \end{cases} \\ d_5 = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2},k}^q \leq 0, \\ 0, & \text{если } \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2},k}^q > 0, \end{cases} \quad d_6 = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{w}_{i+\frac{1}{2},j,k}^q \leq 0, \\ 0, & \text{если } \tilde{w}_{i+\frac{1}{2},j,k}^q > 0, \end{cases}$$



Описанные выше вычисления выполняются на каждом шаге по времени. В рассматриваемой задаче моделирования движения тяжёлой несжимаемой невязкой жидкости существуют ячейки следующих типов: ячейки, заполненные жидкостью (ячейки среды), фиктивные ячейки, представляющие собой твёрдое тело, и вакуумные ячейки, не содержащие в себе жидкость и не принадлежащие твёрдому телу. Расчёты по приведённым выше формулам проводятся только для ячеек, в которых содержится жидкость. Значения в остальных ячейках вычисляются исходя из граничных условий на твёрдой стенке и на свободной поверхности. Положение свободной поверхности меняется с течением времени. Таким образом, количество расчётных ячеек может быть различным на каждом шаге по времени. Для определения ячеек, занятых жидкостью, в рассмотрение вводят маркеры [3]. Они представляют частицы, не имеющие массы. Изначально маркеры располагаются в ячейках расчётной области, занятых жидкостью. Скорость маркеров вычисляется интерполированием между значениями локальной скорости среды в соседних ячейках сетки, которые предварительно были найдены разностным решением.

Метод Давыдова является методом первого порядка точности. Проверка аппроксимации осуществляется путём собирания всех трёх этапов разностной схемы в одну схему и разложением в ряд Тейлора в окрестности фиксированной точки пространства-времени. Устойчивость разностной схемы для классического двумерного метода Давыдова исследовалась в работе [4], в которой показана неустойчивость метода в области малых скоростей. Обобщим критерий устойчивости из статьи на трёхмерный случай:

$$u_0 \frac{\tau}{h_x} + v_0 \frac{\tau}{h_y} + w_0 \frac{\tau}{h_z} + 2c_0 \sqrt{\frac{\tau^2}{h_x^2} + \frac{\tau^2}{h_y^2} + \frac{\tau^2}{h_z^2}} + \frac{c_0^2 \left(\frac{\tau^2}{h_x^2} + \frac{\tau^2}{h_y^2} + \frac{\tau^2}{h_z^2} \right)}{u_0 \frac{\tau}{h_x} + v_0 \frac{\tau}{h_y} + w_0 \frac{\tau}{h_z}} \leq 1. \quad (11)$$

Из формулы (11) следует неустойчивость метода Давыдова для трёхмерного случая в области малых и нулевых скоростей. Таким образом, метод является условно устойчивым при ненулевых скоростях.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Было рассмотрено несколько задач моделирования движения тяжёлой несжимаемой жидкости в трёхмерном пространстве с разными начальными и граничными условиями. Во всех задачах столб жидкости предполагался изначально неподвижным. Затем этот столб распадался, взаимодействуя с препятствием в центре расчётной области и со стенками «аквариума» (рис. 1).

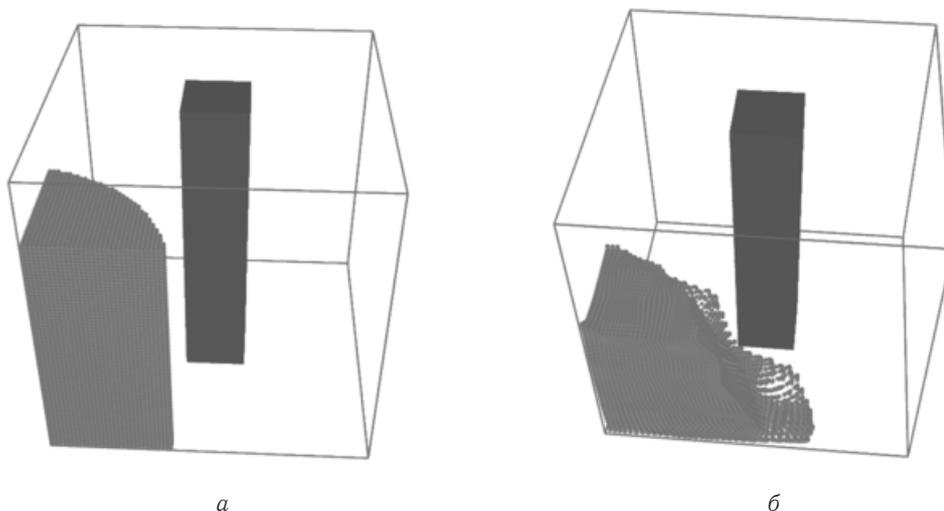


Рис. 1. Начало. Моделирование падения столба жидкости в трёхмерном пространстве:
 а — начальный момент времени; б — 600 шагов по времени

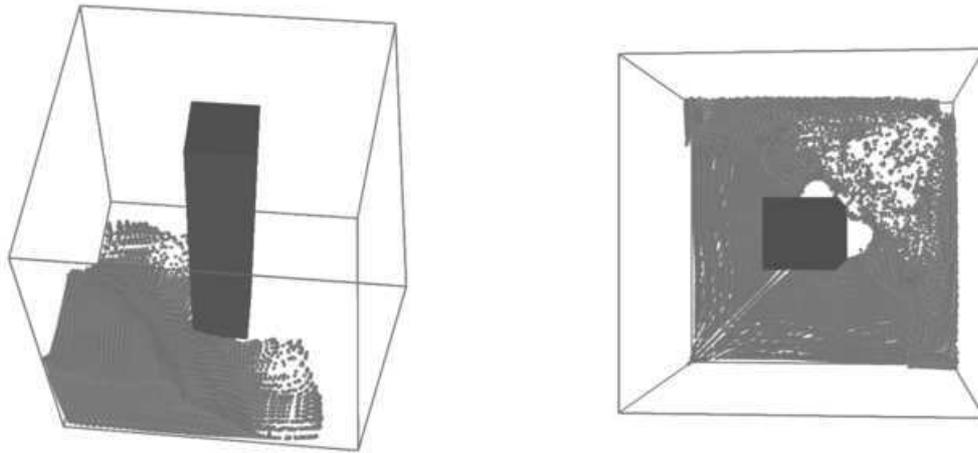


Рис. 1. Окончание. *в* — 2000 шагов по времени; *г* — 2500 шагов по времени (вид сверху)

Было также произведено сравнение результатов численного моделирования движения тяжёлой несжимаемой невязкой жидкости методом Давыдова для трёхмерного случая с двумерным случаем. Для этого была рассмотрена задача, конфигурация которой представлена на рис. 2.

На рис. 3, представлены результаты двумерного (рис. 3, *а*) и трёхмерного (рис. 3, *б*) моделирования для одного и того же шага по времени. Различия можно объяснить более грубой сеткой, использованной для трёхмерного моделирования. Одним из результатов моделирования является тот факт, что в случае симметрии начальных и граничных условий, симметрия также наблюдается на каждом шаге по времени.

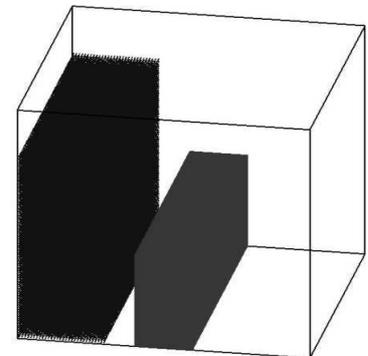


Рис. 2. Задача о падении столба жидкости. Начальный момент времени

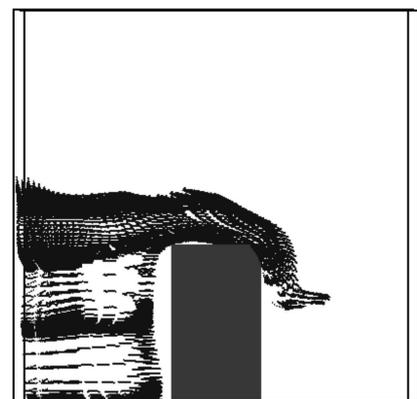
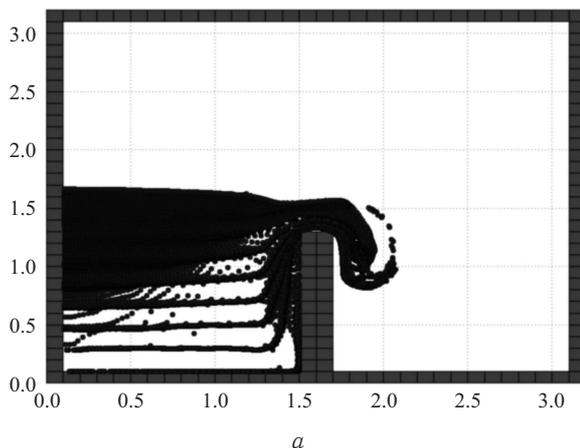


Рис. 3. Сравнение результатов моделирования: *а* — двумерный случай; *б* — трёхмерный случай

Библиографический список

1. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М. : Наука, 1982. 392 с.
2. Ливеровский Д. И., Шевырёв С. П. Метод Давыдова для случая несжимаемой невязкой тяжёлой жидкости на регулярной сетке // Математика. Механика : сб.



- науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 161–164.
3. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975. 392 с.
4. *Шевырёв С. П.* Исследование двумерной схемы метода крупных частиц на устойчивость // Дифференциальные уравнения и теория функций в приложении к аэродинамике и теории вероятностей: межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. Вып. 7. С. 16–21.

Simulation of Incompressible Nonviscous Fluid on a Regular Grid in Three-dimensional Space

D. I. Liverovskiy, S. P. Shevirev

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, LiverovskiyDI@gmail.com, ShevSP@rambler.ru

This study focuses on modification of the method of Davydov (large particles) in the case of incompressible liquid. We consider the simulation of a heavy incompressible nonviscous fluid by Davydov's modified method in a three-dimensional case. Besides, comparison of the received results with a two-dimensional case is carried out. Formulas of modified Davydov's method for the case of three spatial dimensions are lead out including difference analogue of the three-dimensional Poisson equation for the pressure. The criterion of stability is generalized. The description of the algorithm for constructing a three-dimensional free surface is provided. Implemented a three-dimensional computer graphics, showing development processes in online mode.

Key words: Davydov's method, fluid flow, method of large particles, free surface, Poisson equation for the pressure, the criterion of stability of difference schemes, symmetric flows.

References

1. Belotserkovskii O. M., Davydov Yu. M. *Metod krupnykh chastits v gazovoi dinamike. Vychislitel'nyi eksperiment* [Method of coarse particles in gas dynamics]. Moscow, Nauka, 1972, 392 p. (in Russian).
2. Liverovskiy D. I., Shevirev S. P. Metod Davydova dlia sluchaia neszhimaemoi neviazkoi tiazheloi zhidkosti na reguliarnoi setke [Davydov's method for a case of incompressible nonviscous heavy liquid on a regular grid]. *Matematika. Mekhanika: sb. nauch. trudov*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2011, iss. 13, pp. 161–164 (in Russian).
3. Potter D. *Computational Physics*. New York, John Wiley and Sons, 1973.
4. Shevirev S. P. Issledovanie dvumernoi skhemy metoda krupnykh chastits na ustoichivost' [Research of the two-dimensional scheme of a method of large particles on stability]. *Differentsial'nye uravneniia i teoriiia funktsii v prilozhenii k aerodinamike i teorii veroiatnostei: mezhvuz. nauch. sb.* [Differential equations and the theory of functions in the Annex to aerodynamics and the theory of probability: a collection of papers]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1987, iss. 7, pp. 16–21 (in Russian).

УДК 519.6, 531

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

И. А. Панкратов

Кандидат технических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, PankratovIA@info.sgu.ru

Рассмотрена линейная задача оптимального управления для случая, когда время окончания управляемого процесса фиксировано. Функционал, определяющий качество процесса управления, характеризует затраты энергии на управление. Предложен способ построения приближённого решения задачи, основанный на методе Галёркина. Приведены примеры численного решения задачи.

Ключевые слова: оптимальное управление, линейная система, метод Галёркина.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим управляемую систему, описываемую линейным векторным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad (1)$$



где \mathbf{x} , A , B — матрицы следующего вида:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix},$$

а управление u есть скалярная функция, на которую не наложены ограничения.

Требуется перевести систему из начального положения при $t = 0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \quad (2)$$

в конечном при $t = T$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^k. \quad (3)$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$J = \int_0^T u^2 dt. \quad (4)$$

Отметим, что минимум функционала (4) соответствует минимуму затрат энергии на управление, а время окончания управляемого процесса T считается заданным.

Поставленная задача решается с помощью принципа максимума Понтрягина [1]. Введём вектор сопряжённых переменных $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$. Составим функцию Гамильтона – Понтрягина:

$$H = -u^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \psi_j A_{jk} x_k + \sum_{j=1}^n \psi_j B_j u.$$

Легко видеть [2], что сопряжённая система имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = -A^T \boldsymbol{\psi}. \quad (5)$$

При этом оптимальное управление имеет вид

$$u^{opt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n B_j \psi_j. \quad (6)$$

Таким образом, задача сведена к краевой задаче с закреплённым правым концом траектории, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений (1), (5), (6), порядка $2n$ и $2n$ краевыми условиями (2), (3).

2. МЕТОД ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК

Традиционно для решения задач оптимального управления применяются метод Ньютона, метод градиентного спуска [3] и др. Численному решению задач оптимального управления посвящены, например, работы Р. П. Федоренко [4], Ф. П. Васильева [5]. В общем случае отсутствуют формулы для нахождения неизвестных начальных значений сопряжённых переменных. Следует отметить также плохую сходимость начальных приближений для значений сопряжённых переменных к тем значениям, которые доставляют нули функциям невязок из-за постоянного попадания в их локальные минимумы, где ни метод Ньютона, ни метод градиентного спуска не дают хороших результатов. В настоящей работе предлагается искать приближённое решение рассматриваемой задачи оптимального управления в следующем виде [6]:

$$\begin{aligned} x_j &\approx \hat{x}_j = x_j^0 + \sum_{k=1}^M a_{j,k} N_{j,k}(t), \\ \psi_j &\approx \hat{\psi}_j = \sum_{k=1}^M a_{n+j,k} N_{n+j,k}(t), \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (7)$$



Здесь $N_{j,k}(t)$, $j = \overline{1, 2n}$, $k = \overline{1, M}$ – система линейно независимых базисных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} N_{j,k}(0) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, M}, \\ \forall j = \overline{1, n}, \quad \exists k, l, m \quad N_{j,k}(T) \neq 0, \quad N_{n+j,l}(0) \neq 0, \quad N_{n+j,m}(T) \neq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из условий (8) следует, что

$$\hat{x}_j(0) = x_j^0 + \sum_{k=1}^M a_{j,k} N_{j,k}(0) = x_j^0, \quad j = \overline{1, n},$$

и значит, функции \hat{x}_j , $j = \overline{1, n}$ автоматически удовлетворяют краевым условиям (2) при произвольных коэффициентах $a_{j,k}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, M}$.

Если выбранные функции $N_{j,k}$, $j = \overline{1, 2n}$, $k = \overline{1, M}$ непрерывны при $t \in [0; T]$ и все их производные существуют, то непосредственным дифференцированием (7) можно получить аппроксимации производных от x_j и ψ_j , $j = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} \approx \frac{d\hat{x}_j}{dt} = \sum_{k=1}^M a_{j,k} \frac{dN_{j,k}(t)}{dt}, \\ \frac{d\psi_j}{dt} \approx \frac{d\hat{\psi}_j}{dt} = \sum_{k=1}^M a_{n+j,k} \frac{dN_{n+j,k}(t)}{dt}, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (9)$$

В скалярном виде фазовые и сопряжённые уравнения с учётом выражения (6) для оптимального управления запишутся так:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j + \frac{1}{2} B_i \sum_{j=1}^n B_j \psi_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n A_{ji} \psi_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Подставляя разложения (7) с учётом (9) в уравнения (10) и (11), получим невязки $R_{[0;T]}^{x_i}$ и $R_{[0;T]}^{\psi_i}$ следующего вида:

$$\begin{aligned} R_{[0;T]}^{x_i} &= \sum_{k=1}^M \left[a_{i,k} \frac{dN_{i,k}}{dt} - \sum_{j=1}^n a_{j,k} A_{ij} N_{j,k} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{n+j,k} B_i B_j N_{n+j,k} \right] - \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j^0, \quad i = \overline{1, n}, \\ R_{[0;T]}^{\psi_i} &= \sum_{k=1}^M \left[a_{n+i,k} \frac{dN_{n+i,k}}{dt} + \sum_{j=1}^n a_{n+j,k} A_{ji} N_{j,k} \right], \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Для получения приближённых равенств $R_{[0;T]}^{x_i} = 0$ и $R_{[0;T]}^{\psi_i} = 0$ при $t \in [0; T]$ воспользуемся методом Галёркина [6], выбрав систему весовых функций $W_{s,k} = N_{s,k}$, $s = \overline{1, 2n}$, $k = \overline{1, M}$, и требуя, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} \int_0^T R_{[0;T]}^{x_s} W_{s,k} dt = \int_0^T R_{[0;T]}^{x_s} N_{s,k} dt = 0, \quad s = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, M}, \\ \int_0^T R_{[0;T]}^{\psi_{s-n}} W_{s,k} dt = \int_0^T R_{[0;T]}^{\psi_{s-n}} N_{s,k} dt = 0, \quad s = \overline{n+1, 2n}, \quad k = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Так как разложения (7) не удовлетворяют априори граничным условиям (3), то положим

$$\int_0^T R_{[0;T]}^{x_s} N_{s,k} dt = 0, \quad s = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, M}, \quad (12)$$



$$\int_0^T R_{[0;T]}^{\psi_{s-n}} N_{s,k} dt + (\hat{x}_{s-n} - x_{s-n}^k) \widetilde{W}_{s,k} \Big|_{t=T} = 0, \quad s = \overline{n+1, 2n}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (13)$$

В общем случае весовые функции $W_{s,k}$ и $\widetilde{W}_{s,k}$ могут быть выбраны независимо, но из результатов численного решения задачи следует, что удобно взять $\widetilde{W}_{s,k} = -N_{s,k}$, $s = \overline{n+1, 2n}$, $k = \overline{1, M}$. Отметим также, что при аппроксимации различных фазовых и сопряжённых переменных можно использовать одинаковые базисные функции:

$$N_{1,k} = N_{2,k} = \dots = N_{n,k} = N_k^x, \quad N_{n+1,k} = N_{n+2,k} = \dots = N_{2n,k} = N_k^\psi, \quad k = \overline{1, M}.$$

Уравнения (13) с учётом (7) можно записать так

$$\int_0^T R_{[0;T]}^{\psi_{s-n}} N_{s,k} dt + \left(x_{s-n}^0 + \sum_{k=1}^M a_{s-n,k} N_{s-n,k}(T) - x_{s-n}^k \right) \widetilde{W}_{s,k}(T) = 0, \quad (14)$$

где $s = \overline{n+1, 2n}$, $k = \overline{1, M}$.

Соотношения (12), (14) представляют собой систему $2Mn$ линейных алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных. Решив её, мы определим коэффициенты $a_{j,k}$ и тем самым закончим процесс построения приближённого решения уравнений (1), (5), удовлетворяющих условиям (2) и (3).

В частности, если

$$N_k^x = t^k, \quad N_k^\psi = t^{k-1}, \quad k = \overline{1, M}, \quad (15)$$

то уравнения (12), (14) примут вид

$$\int_0^T \sum_{k=1}^M \left[a_{i,k} k t^{k-1} - \sum_{j=1}^n a_{j,k} A_{ij} t^k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{n+j,k} B_i B_j t^{k-1} \right] t^s dt = \int_0^T \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j^0 t^s dt, \quad (16)$$

$$\int_0^T \sum_{k=1}^M \left[a_{n+i,k} (k-1) t^{k-2} + \sum_{j=1}^n a_{n+j,k} A_{ji} t^{k-1} \right] t^{s-1} dt - \sum_{k=1}^M a_{i,k} T^{s+k-1} = (x_i^0 - x_i^k) T^{s-1}.$$

Интегралы, входящие в систему (16), легко берутся. При этом уравнения (16) принимают вид

$$\sum_{k=1}^M \left[a_{i,k} \frac{k T^{s+k}}{s+k} - \sum_{j=1}^n a_{j,k} A_{ij} \frac{T^{s+k+1}}{s+k+1} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{n+j,k} B_i B_j \frac{T^{s+k}}{s+k} \right] = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j^0 \frac{T^{s+1}}{s+1}, \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^M \left[a_{n+i,k} \frac{(k-1) T^{s+k-2}}{s+k-2} + \sum_{j=1}^n a_{n+j,k} A_{ji} \frac{T^{s+k-1}}{s+k-1} \right] - \sum_{k=1}^M a_{i,k} T^{s+k-1} = (x_i^0 - x_i^k) T^{s-1}.$$

Отметим, что при $s = 1$ и $k = 1$ коэффициент при $a_{n+i,k}$ в уравнениях (17) должен равняться нулю.

Отметим также, что рассмотренный метод может применяться при наличии ограничения на управление и для решения нелинейных задач. При этом вместо (12), (13) нужно будет решать системы нелинейных алгебраических уравнений вида

$$K(\mathbf{a})\mathbf{a} = f, \quad (18)$$

или

$$K\mathbf{a} = f(\mathbf{a}). \quad (19)$$

Здесь $K(\mathbf{a})$ и $f(\mathbf{a})$ — матрица жёсткости и столбец свободных членов соответственно, зависящие от вектора неизвестных \mathbf{a} . Указанные системы нелинейных уравнений необходимо решать тем или иным итерационным методом (в качестве начального приближения удобно взять нулевой вектор).



3. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть материальная точка массы m кг движется прямолинейно под действием некоторой управляющей силы $F(t)$. Согласно второму закону Ньютона движение точки описывается уравнением

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t). \quad (20)$$

Введём фазовые координаты $x_1 = x$ (координата точки), $x_2 = dx/dt = v$ (скорость точки) и управляющий параметр $u = F(t)/m$. Тогда уравнение (20) можно представить в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u. \quad (21)$$

В начальный момент времени при $t = 0$ состояние управляемой системы определяется соотношением

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 = (x_1^0; x_2^0),$$

в конечный момент времени при $t = T$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^k = (x_1^k; x_2^k).$$

Положим, что функционал качества процесса управления имеет вид (4). Из уравнений (21) следует, что матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введём вектор сопряжённых переменных $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$. Функция Гамильтона – Понтрягина примет вид

$$H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Система дифференциальных уравнений для сопряжённых переменных примет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \psi.$$

При этом оптимальное управление имеет вид

$$u^{opt} = \frac{\psi_2}{2}. \quad (22)$$

Для решения системы (17) была составлена программа на языке C++, реализующая метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице.

На рис. 1, *a-g* приведены результаты решения задачи о движении точки под действием управляющей силы для следующих значений параметров: $M = 3$, $T = 4$, $(x_1^0; x_2^0) = (1; 0)$, $(x_1^k; x_2^k) = (0; 0)$.

Отметим, что поставленную задачу можно решить аналитически. Легко видеть, что искомые функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются полиномами третьего, второго, нулевого и первого порядка соответственно. Поэтому результаты численного решения при трёх базисных функциях совпадают с аналитическим. Увеличение числа базисных функций в данном случае не приводит к уменьшению погрешности, так как неизвестные коэффициенты при базисных функциях N_4^x , N_4^ψ , N_5^x , N_5^ψ и т. д. в разложениях (7) являются нулями.

Предположим теперь, что на материальную точку помимо управляющей силы действует сила сопротивления $F_{сопр} = -k v$. Тогда система двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение точки, примет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k}{m} x_2 + u. \quad (23)$$

Из уравнений (23) следует, что матрицы A и B теперь имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k/m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

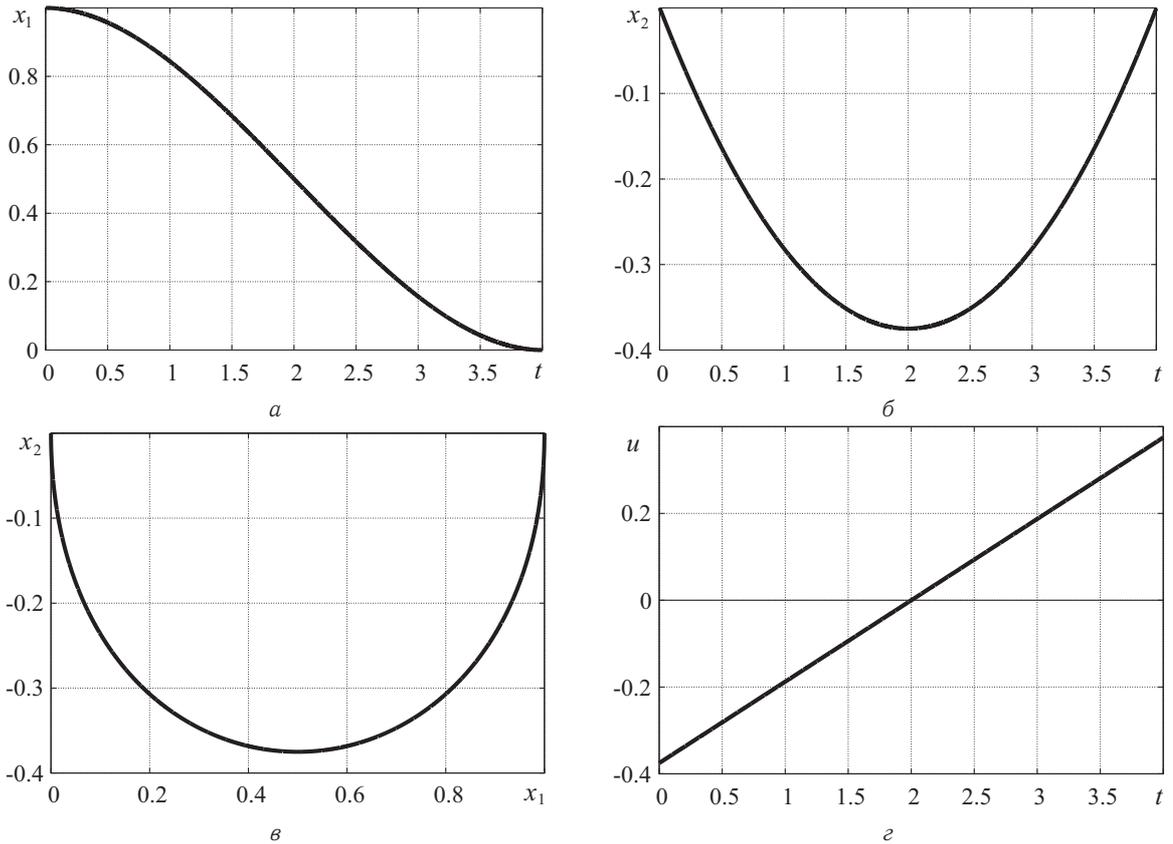


Рис. 1. Движение точки под действием управляющей силы ($M = 3$): a — координата точки; $б$ — скорость точки; $в$ — фазовый портрет; $г$ — оптимальное управление

Соответственно система дифференциальных уравнений для сопряжённых переменных примет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & k/m \end{pmatrix} \psi.$$

Оптимальное управление (22) не изменится.

На рис. 2 показаны результаты решения задачи о движении точки под действием управляющей силы и линейной силы сопротивления движению для следующих значений параметров: $M = 9$, $T = 4$, $k/m = 1$, $(x_1^0; x_2^0) = (1; 0)$, $(x_1^k; x_2^k) = (0; 0)$.

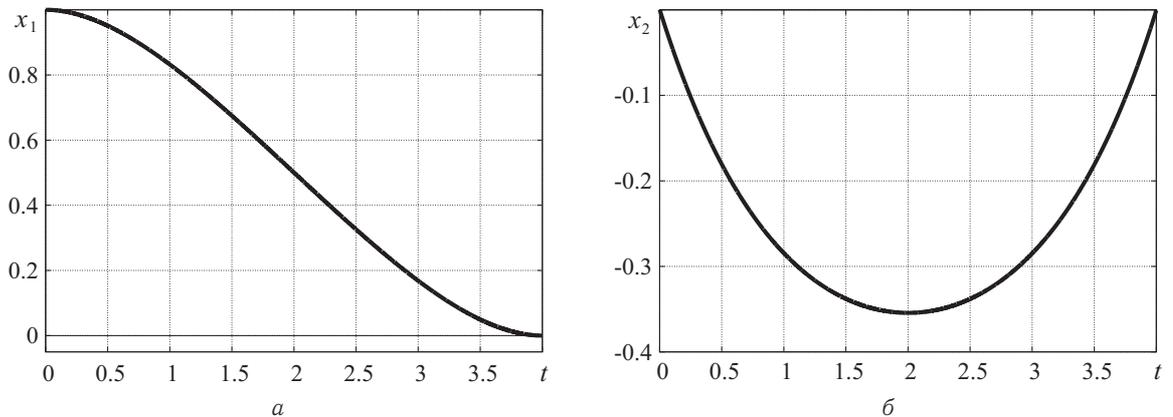


Рис. 2. Начало. Управляемое движение точки с учетом линейной силы сопротивления ($M = 9$): a — координата точки; $б$ — скорость точки

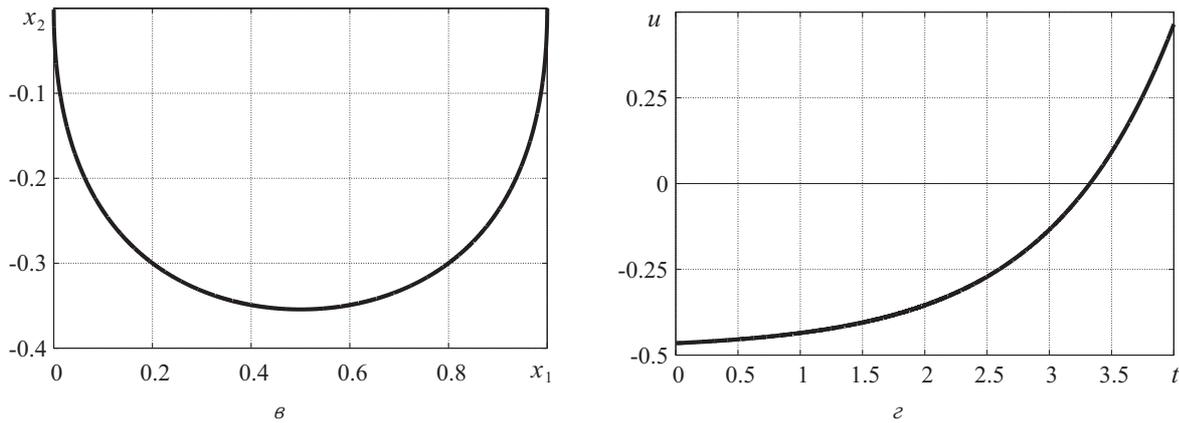


Рис. 2. Окончание: ϑ — фазовый портрет; ε — оптимальное управление

В таблице приведен закон изменения погрешности определения конечного положения точки в зависимости от числа степенных базисных функций (15) для тех же значений параметров задачи, что и на рис. 2.

Погрешность определения конечного положения точки

M	$x_1(T)$	$x_2(T)$	$\sqrt{x_1^2(T) + x_2^2(T)}$	$\psi_1(0)$	$\psi_2(0)$
1	0	-0.375	0.375	-0.78125	-0.6875
2	0	-0.25	0.25	-0.78125	-0.8125
3	$9.104 \cdot 10^{-15}$	-0.1567398	0.1567398	-0.8232759	-0.7938871
4	$1.505 \cdot 10^{-13}$	-0.0652635	0.0652635	-0.9058572	-0.8793439
5	$1.344 \cdot 10^{-11}$	-0.0168948	0.0168948	-0.9495609	-0.9165632
6	$1.752 \cdot 10^{-11}$	-0.0031820	0.0031820	-0.9623113	-0.9279307
7	$-8.443 \cdot 10^{-9}$	-0.0004913	0.0004913	-0.9648194	-0.9301484
8	0.0000001	0.0000654	0.0000654	-0.9652157	-0.9304994
9	-0.0000024	-0.0000077	0.0000080	-0.9652695	-0.930547

Значения сопряжённых переменных при $t = 0$ (указанные в двух последних столбцах) могут быть использованы в качестве начального приближения при решении исходной задачи тем или иным итерационным методом. Отметим, что погрешность определения конечного значения координаты точки меньше, чем погрешность определения скорости точки в конце движения. Отметим также, что помимо (15) были рассмотрены следующие системы базисных функций (при этом особенно сложно подбирать подходящую систему базисных функций для сопряжённых переменных):

$$N_k^x = (t/T)^k, \quad N_k^\psi = (t/T)^{k-1}, \quad k = \overline{1, M}; \tag{24}$$

и

$$N_k^x = \sin kt, \quad N_k^\psi = t^{k-1}, \quad k = \overline{1, M}.$$

Из результатов численного решения следует, что при использовании базисных функций (24) матрица жёсткости системы (12), (14) становится лучше обусловленной, чем при использовании системы (15). При $M \leq 5$ погрешность определения конечного положения точки меньше при использовании в качестве базисных функций $N_k^x = t^k$, а при $M > 5$ меньшую погрешность дают базисные функции $N_k^x = \sin kt$.

Из результатов численного решения (см. рис. 1, 2) видно, что в первых двух рассмотренных примерах при $t = 2$ скорость точки достигает своего минимального значения и $t = 2$ — точка перегиба функции $x_1 = x_1(t)$.

Пусть на управление наложено ограничение вида

$$-1 \leq u \leq 1. \tag{25}$$

Легко видеть, что оптимальное управление в задаче о движении материальной точки под действием управляющей силы и линейной силы сопротивления с учётом (25) принимает вид

$$u^{opt} = \begin{cases} \frac{\psi_2}{2}, & \text{если } \left| \frac{\psi_2}{2} \right| \leq 1; \\ \text{sign } \frac{\psi_2}{2}, & \text{если } \left| \frac{\psi_2}{2} \right| > 1. \end{cases}$$

На рис. 3 приведены результаты решения задачи о движении точки под действием управляющей силы и линейной силы сопротивления движению при наличии ограничения (25) для следующих значений параметров: $M = 9$, $T = 7$, $k/m = 1$, $(x_1^0; x_2^0) = (1; 0)$, $(x_1^k; x_2^k) = (0; 0)$. Для решения системы уравнений вида (19) был применён метод простых итераций.

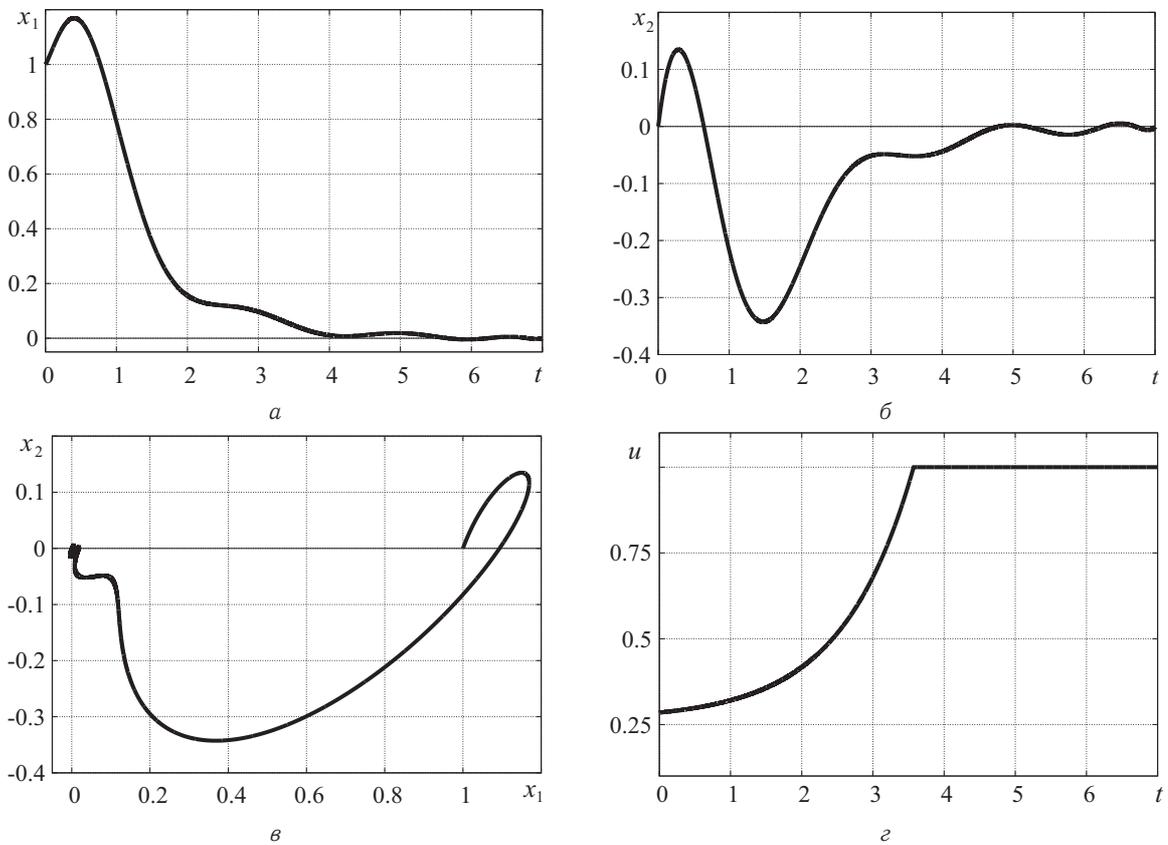


Рис. 3. Управляемое движение точки с учетом линейной силы сопротивления и ограничения (25) ($M = 9$):
 а — координата точки; б — скорость точки; в — фазовый портрет; г — оптимальное управление

Предположим теперь, что на материальную точку действуют управляющая сила $F(t)$ и нелинейная сила сопротивления $F_{сопр} = -k v^2$, а на управление u ограничений не наложено.

Очевидно, что система фазовых уравнений в этом случае примет вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k}{m} x_2^2 + u.$$

Легко видеть, что система сопряжённых уравнений будет иметь вид

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 + 2\frac{k}{m} x_2 \psi_2.$$

При этом оптимальное управление будет по-прежнему иметь вид (22).



На рис. 4 приведены результаты решения задачи о движении точки под действием управляющей силы и квадратичной силы сопротивления движению для следующих значений параметров: $M = 9$, $T = 4$, $k/m = 1$, $(x_1^0; x_2^0) = (1; 0)$, $(x_1^k; x_2^k) = (0; 0)$. Для решения системы уравнений вида (18) также был применён метод простых итераций.

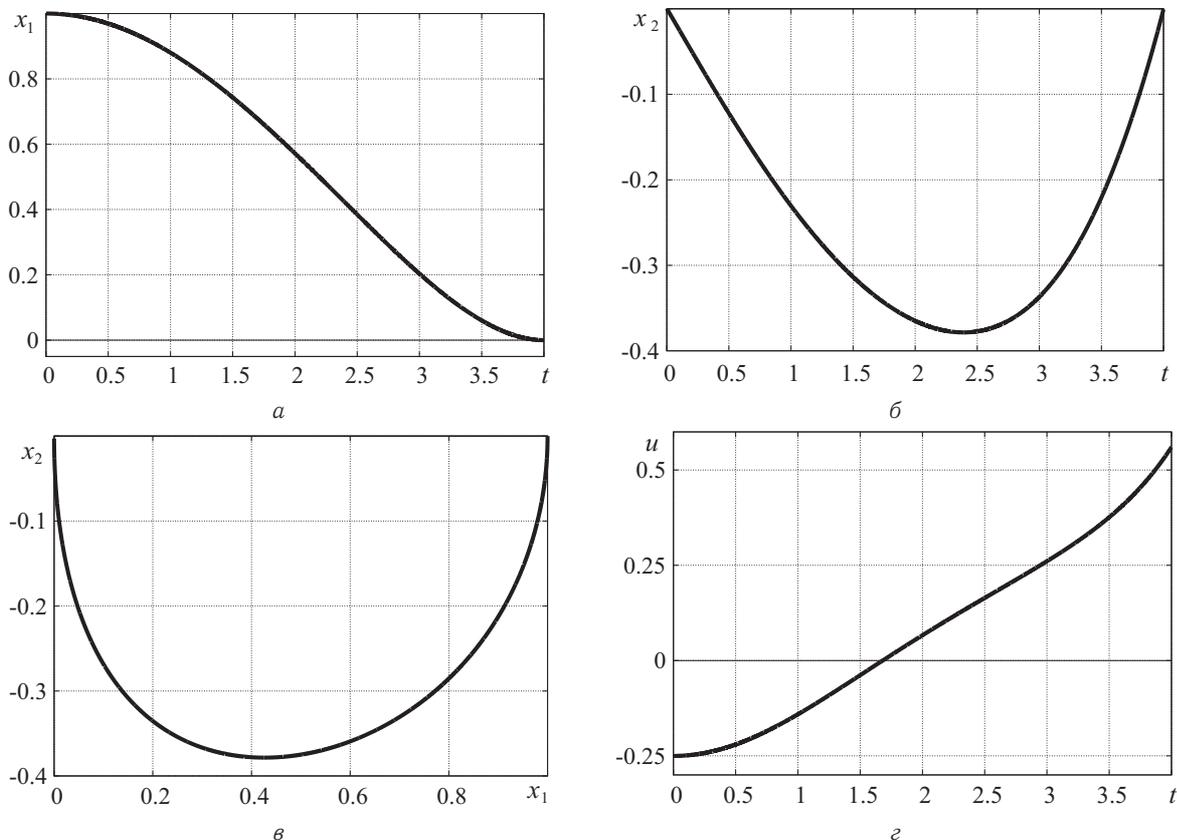


Рис. 4. Управляемое движение точки с учетом квадратичной силы сопротивления ($M = 9$): а — координата точки; б — скорость точки; в — фазовый портрет; г — оптимальное управление

В дальнейшем предполагается применить изложенный выше метод к решению задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата под действием реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты [7–9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165-а).

Библиографический список

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с.
2. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М. : Наука, 1971. 396 с.
3. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М. : Наука, 1971. 424 с.
4. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М. : Наука, 1978. 488 с.
5. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1988. 552 с.
6. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М. : Мир, 1986. 318 с.
7. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95.
8. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.
9. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. III // Космические исследования. 2003. Т. 41, вып. 5. С. 488–505.



Using Galerkin Method for Solving Linear Optimal Control Problems

I. A. Pankratov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, PankratovIA@info.sgu.ru

The linear optimal control problem is considered. Duration of the controlled process is fixed. It is necessary to minimize the functional, that characterizes the energy consumption. A method of constructing an approximate solution based on the Galerkin method is proposed. Examples of numerical solutions of the problem are given.

Key words: optimal control, linear system, Galerkin method.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-00165-a).

References

1. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka, 1983, 393 p. (in Russian).
2. Roitenberg Ya. N. *Avtomaticheskoe upravlenie* [Automatic control]. Moscow, Nauka, 1983, 393 p. (in Russian).
3. Moiseev N. N. *Chislennyye metody v teorii optimal'nykh sistem* [Numerical methods in the theory of optimal systems]. Moscow, Nauka, 1971, 424 p. (in Russian).
4. Fedorenko R. P. *Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniya* [Approximate solution of optimal control problems]. Moscow, Nauka, 1978, 488 p. (in Russian).
5. Vasil'ev F. P. *Chislennyye metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Numerical methods for solving extremal problems]. Moscow, Nauka, 1988, 552 p. (in Russian).
6. Zienkiewicz O., Morgan K. *Finite elements and approximation*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley and Sons, 1983, 328 p.
7. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. About a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 87–95 (in Russian).
8. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Solution of a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation using quaternion equations of orbital system of coordinates orientation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 87–95 (in Russian).
9. Chelnokov Yu. N. The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: III. *Cosmic Research*, 2003, vol. 41, no. 5, pp. 460-477. DOI 10.1023/A:1026098216710.

УДК 532.517.2:534.2

ДВУХСЛОЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ РАСПЛАВОВ ПОЛИМЕРОВ В КАНАЛАХ ФИЛЬЕР

Б. А. Снигерев¹, Ф. Х. Тазюков²

¹Доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования технологических процессов, Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, snigerev@mail.knc.ru

²Доктор технических наук, профессор кафедры теоретической механики и сопротивления материалов, Казанский национальный исследовательский технологический университет, tazyukov@mail.ru

Работа посвящена численному моделированию двухслойного течения нелинейно-вязких жидкостей в каналах фильер. Движение жидкостей описывается уравнениями сохранения массы и импульса, дополненными реологическим уравнением состояния нелинейно-вязкой жидкости по модели Карро. Приводится методика численного решения задачи на основе метода конечных элементов. Исследована картина распределения скоростей жидкости, давления, напряжений, положения границы раздела в двухслойном потоке в зависимости от реологических свойств жидкости и режимов течения.

Ключевые слова: нелинейно-вязкая жидкость, граница раздела, двухслойное течение.

ВВЕДЕНИЕ

Слоистые, или стратифицированные, течения жидкостей давно привлекают внимание исследователей. Очень актуальными являются исследования, связанные с проблемами транспортировки сырой нефти по трубопроводам. Известны способы снижения давления, необходимого для перекачки нефти по трубам, путем добавления к нефти полимерного раствора, который оттесняясь к стенкам трубы,



формирует двухслойный поток. В работе [1] рассматривается кольцевое течение двух несмешивающихся жидкостей в трубопроводе, когда в ядре потока движется основная жидкость с произвольной кривой течения, а в пристенном слое маловязкая не ньютоновская жидкость. Получены аналитические зависимости для расходов обеих жидкостей от перепада давления для двухслойного течения, состоящего из основного течения в трубе, дополненного кольцевым течением маловязкой жидкости в пристенном слое. Экспериментальное изучение влияния пристенного слоя маловязкой жидкости на расход высоковязкой не ньютоновской жидкости в трубопроводе проводится в работе [2].

В ряде работ проведены теоретические исследования с целью анализа причин неустойчивости сдвигового течения двухслойных систем, состоящих из упругих вязких жидкостей, когда в качестве реологических уравнений состояния используются уравнения не ньютоновских жидкостей [3, 4]. Неустойчивость слоистого течения выражается через колебания координаты поверхности раздела относительно оси потока. Показано, что нестабильная форма поверхности раздела характерна для течений, у которых существенно различны вязкости и нормальные напряжения компонентов потока на линии их контакта. Но наиболее активно стимулировали развитие стратифицированных течений проблемы, возникающие при производстве слоистых полимерных пленок и биокomпонентных волокон методом соэкструзии, когда два или более потока расплава продавливают через формующую головку совместно [3–6]. Надо заметить, что предложенные математические модели не касаются исследования течения на этапе формирования потока, то есть области течения на начальном участке канала, где происходит образование совместного течения двух разнородных жидкостей.

В настоящей работе исследуется установившееся несмешивающееся двухслойное течение не ньютоновских жидкостей, образующееся в результате слияния двух потоков в плоском канале с образованием границы раздела течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается безволновое неизотермическое течение двух несмешивающихся жидкостей в сходящемся канале, схема которого показана на рис. 1.

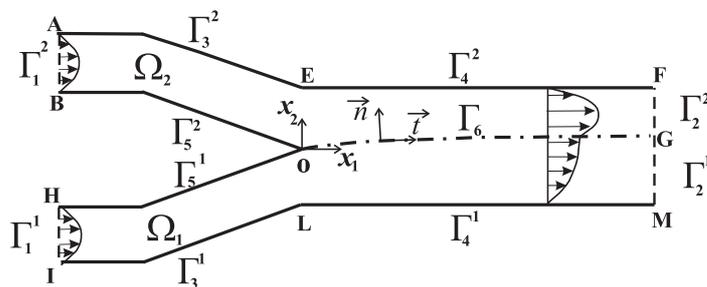


Рис. 1. Схема расчетной области двухслойного потока жидкости

Первая жидкость с объемным расходом Q^1 подается на входе Γ_1^1 (IH), вторая на входе Γ_1^2 (AB) с расходом Q^2 , после схождения потоков в сечении EOL образуется совместное течение жидкостей с границей раздела потоков Γ_6 (OG). Область течения жидкости в нижнем слое ИНОГМ обозначается как Ω_1 , а в верхнем ВАЕFGO соответственно Ω_2 . Течение не ньютоновских жидкостей в каждой из областей $\Omega_{1,2}$ описывается уравнениями сохранения количества движения и неразрывности в виде

$$\rho^m \left(\frac{\partial u_i^m}{\partial t} + u_j^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}^m}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i^m}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad m = 1, 2. \quad (2)$$

Система уравнений (1)–(2) замыкается реологическим уравнением состояния нелинейно-вязкой жидкости в форме степенного закона [5]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^m &= -p^m \delta_{ij} + \tau_{ij}^m, \\ \tau_{ij}^m &= \eta^m(I_2) D_{ij}, \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \eta^m(I_2) &= \mu_0(I_2)^{\frac{k-1}{2}}. \end{aligned} \quad (3)$$



В (1)–(3) ρ^m — плотность, σ_{ij}^m — компоненты полного тензора напряжений, p^m — давление, x_i — декартовы координаты, u_i^m — компоненты скорости для жидкости с индексом m , δ_{ij} — компоненты единичного тензора, τ_{ij}^m — компоненты тензора девиатора напряжений, $\eta^m(I_2)$ — эффективная вязкость жидкости, I_2 — второй инвариант тензора скоростей деформаций, D_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций, μ_0 — показатель консистенции жидкости (приведенная вязкость), k — параметр модели.

В начальный момент времени граница раздела слоёв Γ_6 имеет плоскую горизонтальную форму. На входных участках Γ_1^m задается профиль осевой скорости, характерный для установившегося течения не ньютоновской жидкости в плоском канале. На твердых стенках $\Gamma_{3,4,5}^m$ выполняются условия прилипания, а на выходных границах Γ_2^m ставятся условия установившегося потока. На подвижной границе раздела слоев жидкости Γ_6 должно выполняться кинематическое условие. Кроме того, должны выполняться динамические условия, выражающиеся в равенстве касательных напряжений жидкости с каждой стороны границы раздела, а нормальные напряжения имеют разрыв [6].

Таким образом, граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_1^m : \quad & u_1^m = U_0^m(x_2), \quad u_2^m = 0, \quad p^m = p_0^m; \\ \Gamma_2^m : \quad & \partial u_1^m / \partial x_1 = 0; \\ \Gamma_3^m, \Gamma_4^m, \Gamma_5^m : \quad & u_1^m = u_2^m = 0; \\ \Gamma_6 : \quad & u_i^m \cdot n_i = 0, \quad u_i^1 \cdot t_i = u_i^2 \cdot t_i, \\ & \sigma_{ij}^1 \cdot t_j = \sigma_{ij}^2 \cdot t_j, \quad \sigma_{ij}^1 \cdot n_j - \sigma_{ij}^2 \cdot n_j = 2\gamma H n_j \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь n_i, t_j — компоненты единичной нормали и касательной к поверхности Γ_6 , условия на Γ_6 записаны в локальной декартовой системе координат, связанной с каждой точкой свободной поверхности, γ — коэффициент поверхностного натяжения, H — главная кривизна поверхности раздела.

В двумерном случае поверхность раздела описывается уравнением $F(x_1, x_2, t) = 0$, тогда выполняется следующее условие [6]:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_i^m \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0. \quad (5)$$

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения уравнений (1)–(3) с граничными условиями (4) используется метод конечных элементов [7]. На каждом шаге по времени расчет проводится в два этапа, когда решаются исходные уравнения в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно. Для получения матричных уравнений применяется стандартная процедура Галёркина [8]. В качестве конечных элементов используются четырехугольные элементы с квадратичной интерполяцией для переменных компонент скорости u_i , линейной для давления p , компонент девиатора тензора напряжений τ_{ij} . Для аппроксимации деформируемых границ применяется конечно-элементная методика, базирующаяся на эйлеровом подходе и заключающаяся в локальной перестройке конечно-элементной сетки вблизи движущихся границ. Для реализации граничных условий на подвижной границе раздела Γ_6^n на n шаге по времени, определенной с помощью конечно-элементной аппроксимации, применяется линеаризованная итерационная процедура, когда граничные условия (4) заменяются для области расчета Ω_1^{n+1} на следующие:

$$\begin{aligned} u_i^1 \cdot t_i |^{n+1} &= u_i^2 \cdot t_i |^n, \quad u_i^1 \cdot n_i |^{n+1} = 0, \\ \sigma_{ij}^1 \cdot n_j |^{n+1} &= \sigma_{ij}^2 \cdot n_j |^n + 2\gamma H n_j, \\ \sigma_{ij}^1 \cdot t_j |^{n+1} &= \sigma_{ij}^2 \cdot t_j |^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Значения переменных на n итерации в правой части записанных соотношений вычисляются на совместной границе по значениям из области Ω_2^n . Затем решается аналогичная задача для области Ω_2^{n+1} с граничными условиями на Γ_6^n , в которых правые части соотношений (6) вычисляются по решению задачи (1)–(4) на n итерации для области Ω_1^{n+1} . После первого этапа определяется поле скоростей, давлений для обеих областей на $n + 1$ итерации. Затем с помощью численной аппроксимации кинематического условия (5) определяется положение границы раздела F^{n+1} на $n + 1$ итерации. Далее, возможен переход к первому этапу с известным новым положением границы и решением задачи на предыдущей итерации для всей области течения. Итерации продолжаются до выполнения сходимости



решения, которое заключается в определении установившегося положения границы, определяющегося как $\left| \frac{F^{n+1} - F^n}{F^n} \right| \leq \varepsilon_1$, удовлетворении граничных условий для скорости и напряжений на подвижной границе раздела Γ_6 : $|u_i^1 \cdot t_i|^{n+1} - |u_i^2 \cdot t_i|^n \leq \varepsilon_2$, $|\sigma_{ij}^1 \cdot t_j|^{n+1} - |\sigma_{ij}^2 \cdot t_j|^n \leq \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1 = 10^{-3}$, $\varepsilon_2 = 10^{-4}$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим двухслойное течение не ньютоновских жидкостей в канале с шириной в области совместного течения $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м при расходах $Q^1 = 5 \cdot 10^{-9}$ м³/с, $Q^2 = 20 \cdot 10^{-9}$ м³/с. Значения физических констант для компонентов потока следующие: $\rho^1 = 930$ кг/м³, $\mu_0^1 = 10010$ Па·с, $k^1 = 0.75$, $\rho^2 = 980$ кг/м³, $\mu_0^2 = 10020$ Па·с, $k^2 = 0.75$.

В случае двухслойного течения положение границы раздела определяется величинами расходов и их отношением, а также отношением величин вязкостей расплавов потоков [2]. Обозначим l_1, l_2 как ширина потоков для нижнего и верхнего слоя соответственно ($l_1 + l_2 = h$). Введем безразмерную величину $h_f = l_2/(h/2)$, показывающую степень изменения ширины потока при совместном течении в канале. Влияние расходов на положение границы раздела сред показано на рис. 2, где приведено распределение h_f для отношений расходов Q^1/Q^2 : 1 – $Q^1/Q^2 = 5$, 2 – $Q^1/Q^2 = 10$, 3 – $Q^1/Q^2 = 20$. Значения h_f для установившегося потока составляют $h_f = 1.29, 1.73, 1.96$. Для определения влияния различия вязкости на положение границы раздела рассчитывались течения в условиях постоянства расходов в нижнем и верхнем слое $Q^1 = Q^2$. Влияние вязкости определялось в условиях, когда вязкость в нижнем слое остается равной $\mu_0^1 = 10010$ Па·с, $k^1 = 0.75$, а в верхнем слое коэффициент μ_0^2 увеличивается, при этом отношение μ_0^2/μ_0^1 равно $\mu_0^2/\mu_0^1 = 5, 10, 20$. Поскольку вязкость нижнего слоя жидкости в области совместного течения выше, чем в верхнем, то это приводит к смещению положения границы раздела от оси канала к верхней стенке. Дальнейшее увеличение μ_0^2/μ_0^1 приводит к росту отклонения, что иллюстрирует рис. 3. На рис. 3 показано распределение h_f для трех вязкостных режимов: 1 – $\mu_0^2/\mu_0^1 = 5$, 2 – $\mu_0^2/\mu_0^1 = 10$, 3 – $\mu_0^2/\mu_0^1 = 20$.

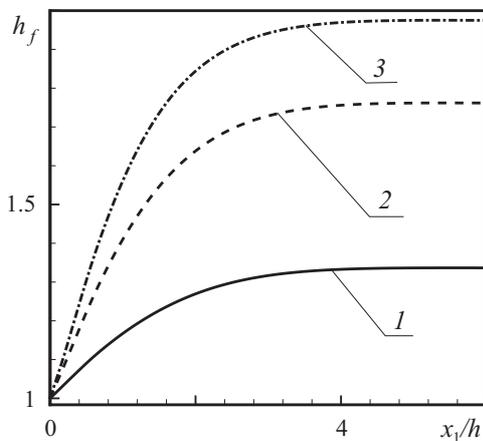


Рис. 2. Профили границы раздела жидкостей при различных Q^1/Q^2 : 1 – $Q^1/Q^2 = 5$, 2 – $Q^1/Q^2 = 10$, 3 – $Q^1/Q^2 = 20$

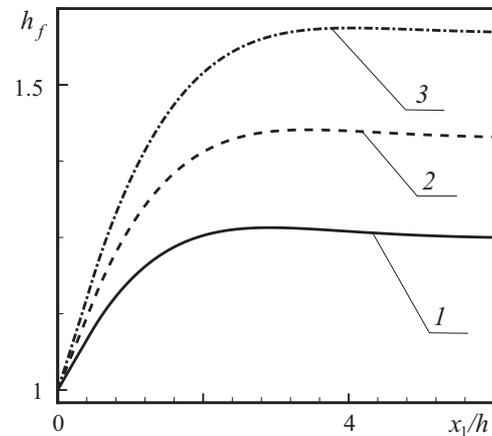


Рис. 3. Профили границы раздела жидкостей при различных μ_0^2/μ_0^1 : 1 – $\mu_0^2/\mu_0^1 = 5$, 2 – $\mu_0^2/\mu_0^1 = 10$, 3 – $\mu_0^2/\mu_0^1 = 20$

На рис. 4 показаны установившиеся профили скорости u_1/U_0 двухслойного течения в сечении $x_1/h = 3.0$ при отношении расходов $Q^1/Q^2 = 4$ в зависимости от параметра k . В рассматриваемом течении псевдопластичные свойства жидкости в верхнем слое не изменяются, а изменяются в нижнем слое, определяемые параметром k . На рис. 4 приведены профили скорости для течения в случае $Q^1/Q^2 = 4$, $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$, $k^1 = 0.9, 0.3, 0.7, 0.9$. Усиление псевдопластичных свойств (уменьшение показателя k^1) для нижнего слоя, приводит к уменьшению эффективной вязкости в этой области течения Ω^1 , особенно в областях больших значений градиента скорости. При течении жидкостей с разными расходами, но с одинаковыми псевдопластичными свойствами, в сечении на достаточно удаленном от точки схода потоков образуется параболический профиль скорости, характерный для однородного потока (рис. 4, кривая 4). Усиление же псевдопластичных свойств, приводит к



тому, что профиль скорости становится немонотонным, с образованием зоны изгиба на границе раздела слоев. Динамика развития установившегося профиля скорости для случая $Q^1/Q^2 = 4$, $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$, $k^2 = 0.9$, $k^1 = 0.3$ показана на рис. 5, где приведены профили скорости в сечениях $x_1/h = 0.0, 0.1, 0.5, 3.0$. В начальном сечении $x_1/h = 0.0$ сходятся два не ньютоновских потока с монотонными профилями скоростей.

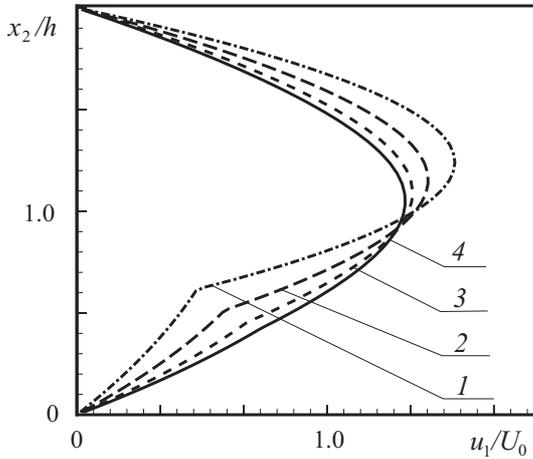


Рис. 4. Распределение скорости u_1/U_0 в сечении канала $x = 3.0$ для $Q^1/Q^2 = 4$, $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$, $k^1 = 0.9$ при различных значениях k^2 : 1 — $k^2 = 0.1$, 2 — $k^2 = 0.3$, 3 — $k^2 = 0.7$, 4 — $k^2 = 0.9$

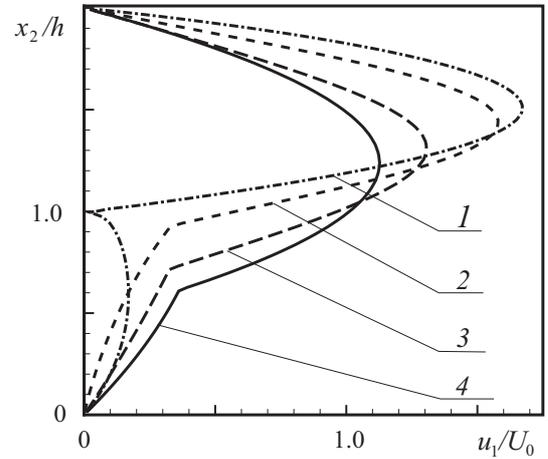


Рис. 5. Распределение скорости u_1/U_0 в вертикальных сечениях канала для $Q^1/Q^2 = 4$, $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$, $k^1 = 0.1$, $k^2 = 0.9$: 1 — $x = 1.0$; 2 — $x = 1.1$; 3 — $x = 1.5$; 4 — $x = 3.0$

Из графиков видно, что в области схождения потоков начинается смещение границы раздела в область течения нижнего слоя, где течет жидкость с более псевдопластичными свойствами, характеризующимися меньшими значениями эффективной вязкости. Смещение границы в сторону нижней стенки приводит к расширению ширины потока верхнего слоя, что, в свою очередь, приводит к тому, что максимальные значения скорости уменьшаются, по мере удаления от точки схода потоков (рис. 5, кривые — 2, 3, 4). Уменьшение максимального значения скорости сопровождается смещением данной зоны к нижней стенке, а в нижнем слое уменьшение ширины потока приводит к увеличению средней скорости потока. Отметим также, что двухслойное течение не ньютоновских жидкостей с большим отличием псевдопластичных свойств характеризуется тем, что расстояние, на котором происходит установление стационарного профиля скорости, увеличивается с ростом разницы псевдопластичных свойств.

На рис. 6 показана разность нормальных напряжений в канале фильеры $\tau_{11} - \tau_{22}$ в области течения для значений $Q^1/Q^2 = 4$, $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$, $k^2 = 0.9$, $k^1 = 0.3$. Видно, что на месте схождения потоков развиваются сильные нормальные напряжения, которые по мере продвижения вниз по потоку начинают релаксировать. Кроме того, наблюдаются отрицательные сжимающие напряжения вблизи поверхности раздела в области схождения потоков.

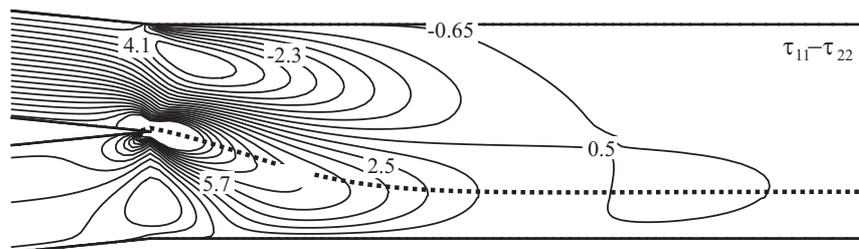


Рис. 6. Изолинии разности напряжений $\tau_{11} - \tau_{22}$ в области схождения потоков для $Q^1/Q^2 = 4$, $\mu_0^1/\mu_0^2 = 1$, $k^2 = 0.9$, $k^1 = 0.3$



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе теоретически исследована структура течения и напряженно-деформированное состояние сред при двухслойном течении высоковязких не ньютоновских жидкостей в канале. Показано существенное влияние на положение границы раздела разницы величин отношения расхода жидкостей, показателей консистенции вязкости и степени псевдопластичности не ньютоновских сред. Исследовано влияние степени различия расходов, вязкостей, не ньютоновских свойств псевдопластичности на структуру течения, гидродинамические характеристики двухслойного потока.

Библиографический список

1. Yih C. S. Instability due to viscosity stratification // *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 27. P. 337–352.
2. Янков В. И., Глот И. О., Труфанова Н. М., Шакиров Н. В. Течение полимеров в отверстиях фильер. Теория, расчет, практика. М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2010. 368 с.
3. Хан Ч. Д. Реология в процессах переработки полимеров. М. : Химия, 1979. 366 с.
4. Володин В. П. Экструзия профильных изделий из термопластов. СПб. : Профессия, 2005. 480 с.
5. Bird R. B., Armstrong R. C., Hasager O. Dynamics of Polymeric liquids. Vol 1. Fluid Mechanics. N.Y. : John Wiley and Sons, 1987. 443 p.
6. Shikhmurzaev Y. D. Capillary Flows with Forming Interface. N.Y. : Chapman and Hall, 2008. 443 p.
7. Коннор Дж., Бреббия К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Л. : Судостроение, 1979. 264 с.
8. Снигерев Б. А., Тазюков Ф. Х. Об особенностях не-изотермического обтекания сферы потоком вязкоупругой жидкости в стесненных условиях // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 99–104.

Double Layer of Polymer Melts in Channels of Dies

B. A. Snigerev¹, F. Kh. Tazyukov²

¹Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, 2/31, Lobachevsky str., Kazan, 420111, Russia, Snigerev@mail.knc.ru

²Kazan National Research Technological University, 68, K. Marxs str., Kazan, 420025, Russia, tazyukov@mail.ru

Numerical simulation of double-layer nonlinear viscous flow in channels of dies was performed. The fluid motion is described by equations conservation of mass and momentum, supplemented by the rheological equation of state of nonlinear viscous fluid on the Carreau model. The technique of numerical solve the problem based on the finite element method is described. Results the field of velocities, pressure, stresses, position the interface boundary of two-layer flow depending on rheological properties of liquid and flow regimes are presented.

Key words: non-newtonian fluid, interface boundary, twolayer flow.

References

1. Yih C. S. Instability due to viscosity stratification. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 27, pp. 337–352.
2. Jankov V. I., Glot I. O., Trufanova N. M., Shakirov N. V. *Techenie polimerov v otverstijah fil'er. Teorija, raschet, praktika* [For polymers in the holes of nozzles. Theory, computation practice]. Moscow, Izhevsk, Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika, 2010, 368 p. (in Russian).
3. Han Ch. D. *Reologija v processah pererabotki polimerov* [Rheology in the plastics processing industry]. Moscow, Chemistry, 1979, 366 p. (in Russian).
4. Volodin V. P. *Jekstruzija profil'nyh izdelij iz termoplastov* [Extrusion profile products from thermoplastic materials]. St. Petersburg, Profession, 2005, 480 p. (in Russian).
5. Bird R. B., Armstrong R. C., Hasager O. *Dynamics of Polymeric liquids. Vol. 1. Fluid Mechanics*. New York, John Wiley and Sons, 1987, 443 p.
6. Shikhmurzaev Y. D. *Capillary Flows with Forming Interface*. New York, Chapman and Hall, 2008, 443 p.
7. Connor J., Brebbia C. *Finite Element Techniques for Fluid Flow*. London, Newnes-Butterworths, 1976.
8. Snigerev B. A., Tazyukov F. Kh. The feature of non-isothermal viscoelastic flows around sphere at obstruction condition. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 1, pp. 99–104 (in Russian).

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.683

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ РАСЧЕТНОЙ СЕТКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛОКАЛЬНОГО КРИОВОЗДЕЙСТВИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОМЕРНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХЕШИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПАКЕТА NumPy

В. А. Клячин

Доктор физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики, Волгоградский государственный университет, klchnv@mail.ru

В работе, на примере решения задачи построения температурного поля при криовоздействии показывается эффективность использования геометрического хеширования выполненного на основе пакета NumPy для построения соответствующей расчетной сетки. Такое построение предполагает для каждого узла сетки определение его местоположения относительно полигональной области неправильной формы. Именно такие формы чаще всего моделируют поверхности внутренних органов. Решение построения расчетной сетки позволит осуществить 3D визуализацию температурного поля в окрестности точки криовоздействия, что будет способствовать своевременному контролю температуры биоткани в заданный момент времени.

Ключевые слова: криобиология, вычислительная геометрия, геометрическое хеширование.

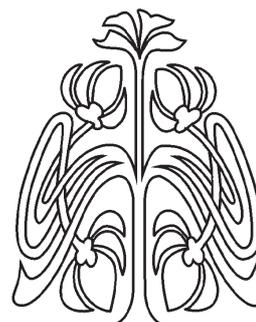
ВВЕДЕНИЕ

За последнее время в различных областях медицины большое распространение получил криогенный метод лечения [1]. Интерес к локальному низкотемпературному воздействию в основном связан с тем, что лечение криогенными методами проходит практически безболезненно [2].

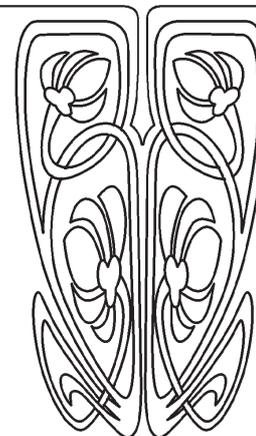
Математическая модель для численного исследования процессов протекающих в биотканях при таком методе лечения описана в монографии [1]. При указанных в этой работе допущениях температурное поле в биоткани описывается с помощью уравнения теплопроводности вида

$$c \cdot \rho(x, T) \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(x, T) \nabla T(x)) - \chi(x) \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1)$$

где T — температура, а коэффициенты уравнения зависят от свойств биоткани. Можно отметить работу [3], в которой предложены определенные оригинальные методы численного решения с соответствующими краевыми условиями (задача Стефана). Однако в указанных работах данная задача решается в осесимметричном случае и соответствующая сетка для численного решения задачи строится как прямоугольная сетка в цилиндрических координатах. Данный подход по нашему мнению является весьма приближенным и не может охватить все возможные биоткани, геометрическая форма которых



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





достаточно разнообразна. В качестве примера можно привести биоткань поджелудочной железы, форма которой не имеет явной симметрии, а ее поверхность обладает в определенной степени ячеистой структурой.

Численное решение приведенного уравнения можно осуществить с использованием как прямоугольной сетки, так и с использованием нерегулярной сетки, например в виде триангуляции расчетной области. Наиболее популярным методом триангуляции является триангуляция Делоне [4, 5]. В монографии [6] приведены различные алгоритмы построения таких триангуляций на плоскости. Отметим также, что в работах [7, 8] получены условия на симплексы триангуляции, выполнение которых гарантирует соответствующую сходимость первых производных. Однако использование триангуляции в многомерном случае сопряжено с рядом принципиальных трудностей, описанных в работе [9]. Поэтому, нами был выбран другой подход, связанный с построением прямоугольной сетки, не имеющей препятствия с аппроксимацией производных первого порядка.

Для расчета решений уравнения с использованием прямоугольной сетки необходимо дополнительно решать задачу определения для каждого ее узла принадлежности расчетной области. Это классическая задача вычислительной геометрии о локализации точки [10, 11]. При достаточно большом количестве граней модели расчетной области может потребоваться значительное время для решения задачи локализации всех узлов расчетной сетки с помощью даже линейных по числу граней модели алгоритмов. Поэтому применяют некоторую оптимизацию. Одним из способов оптимизации является так называемое геометрическое хеширование, суть которого хорошо описана, в частности, в статьях [12–14], в которых указанный метод применяется в задачах распознавания объектов на изображениях. Цель настоящей статьи – показать каким образом метод многомерного геометрического хеширования можно применить к решению задачи локализации точки относительно замкнутых многогранных поверхностей. При этом задача будет решена для произвольной размерности, а для управления многомерными данными мы воспользуемся пакетом NumPy [15, 16].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОСНОВА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ХЕШИРОВАНИЯ

Пусть X – произвольное множество и K обозначает единичный квадрат $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Каждой точке $(a, b) \in K$ можно сопоставить отрезок $[a, b] \subset [0, 1]$, а каждой точке $p = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n) \in K^n$, можно сопоставить многомерный параллелепипед $Q(p) = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $n \geq 1$.

Пусть дано некоторое отображение

$$s : X \rightarrow K^n, \quad n \geq 1.$$

Непосредственно в задаче локализации точки относительно многогранника в качестве X рассматривается множество всех пространственных треугольников, расположенных, например, в единичном кубе $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Для случая $n = 1$ отображением s в этом случае может служить отображение, которое каждому треугольнику ставит в соответствие отрезок проекции этого треугольника на ось Ox . При $n = 2$ мы можем взять два отрезка проекций треугольника – один на ось Ox , другой – на ось Oy .

Помимо отображения s , предположим задана матрица T размерности $n \times m$, $m \geq 1$. При этом предполагаем выполнение условий

$$0 = T_{i1} < T_{i2} < T_{i3} < \dots < T_{im} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Элементы этой матрицы задают сетку, по которой будет вестись хеширование. В простейшем случае можно использовать равномерную сетку, для которой $T_{ik} - T_{ik-1} \equiv \text{const}$.

Каждой точке $(a, b) \in K$, $a \leq b$ и натуральному $i = 1, \dots, n$ сопоставим два натуральных числа k_i, l_i таких, что $a \in [T_{ik_i}, T_{ik_i+1})$, $b \in [T_{il_i}, T_{il_i+1})$. Заметим, что эти два числа определяют отрезки вида $[T_{ij}, T_{ij+1}]$, которые имеют непустое пересечение с отрезком $[a, b] \subset [0, 1]$ для всех $j = k_i, \dots, l_i$. Например, в задаче локализации точки числа k_i, l_i определяют те полуинтервалы сетки хеширования, которые будет пересекать проекция треугольника на ось Ox в случае $n = 1$ и эти числа определяют номера прямоугольных ячеек сетки хеширования, которые пересекает проекция треугольника на плоскость Oxy при $n = 2$.

Опишем математическую суть процесса хеширования.



Пусть задано некоторое конечное подмножество $Y \subset X, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ и некоторый вектор $t = (t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$. Требуется найти такое подмножество $Y' \subset Y$, для элементов которого будет выполнено условие

$$y \in Y' \Leftrightarrow t_i \in [a_i, b_i], i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $s(y) = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$. В нашем примере в качестве подмножества Y выбираем множество треугольных граней многогранника, а записанное условие означает принадлежность точки t проекции треугольной грани. Другими словами поиск подмножества Y' — это поиск тех граней многогранника, проекции которых содержат заданную точку t . Для решения задачи будем использовать следующую конструкцию. Для каждого мультииндекса $J = (j_1, \dots, j_n), j_i = 0, 1, \dots, m - 1$ построим набор натуральных чисел $n_J = \{n_{J_1}, n_{J_2}, \dots, n_{J_{r_J}}\}$ такой, что

$$Q(s(y_k)) \cap [T_{1j_1}, T_{1j_1+1}] \times \dots \times [T_{nj_n}, T_{nj_n+1}] \neq \emptyset \quad \forall k \in n_J.$$

Построение таких наборов номеров n_J позволяет ускорить обработку целого потока данных $t^1, \dots, t^k, \dots \in [0, 1]^n$, поскольку не требует полного перебора всего множества Y .

2. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА И РЕАЛИЗАЦИИ

Опишем подробнее алгоритм хеширования. Прежде всего, до начала основного цикла необходимо определить n -мерный массив $H[\]$, имеющий m элементов по каждой размерности. Так, что элементы этого массива будут нумероваться мультииндексами вида $J = (j_1, \dots, j_n)$ с $j_i = 0, 1, \dots, m - 1$. Элементами же этого массива будут наборы целых чисел, которые в процессе хеширования будут вычисляться. Входными данными для алгоритма является массив объектов — элементов подмножества $Y \subset X$.

1. В основном цикле алгоритма перебираются элементы массива объектов, для которых вычисляется отображение $s : X \rightarrow K^n$. Результатом вычисления является массив пар чисел $(a_i, b_i), i = 1, \dots, n$, лежащих в отрезке $[0, 1]$. При этом будем считать, что переменная q является номером текущего объекта.

2. Далее для всякой пары (a_i, b_i) вычисляются целые числа k_i, l_i так, что

$$a_i \in [T_{ik_i}, T_{ik_i+1}) \quad b_i \in [T_{il_i}, T_{il_i+1}).$$

Геометрически эти числа задают отрезки вида $[T_{ji}, T_{ji+1}]$ такие, что $[T_{ij}, T_{ij+1}] \cap [a_i, b_i] \neq \emptyset, j = k_i, \dots, l_i$.

3. Для всякого мультииндекса $J = (j_1, \dots, j_n)$ с $k_i \leq j_i \leq l_i, i = 1, \dots, n$ добавляем номер текущего объекта q в список $H[J]$.

Основная сложность реализации многомерного хеширования состоит в необходимости перебирать элементы массива произвольной размерности. Наиболее подходящее для этого средство, по всей видимости, это — пакет **NumPy** для языка программирования Python. Этот пакет, совместно с пакетами **SymPy**, **SciPy** является программным обеспечением с открытым исходным кодом для математики, естественных наук и инженерии. В частности, **NumPy** — это расширение языка Python, добавляющее поддержку больших многомерных массивов и матриц, вместе с большой библиотекой высокоуровневых математических функций для операций с этими массивами. Отметим ряд работ, в которых этот пакет используется в научных исследованиях в области кристаллографии [17], экологии [18], гидродинамики пористых сред [19]. Мы опишем собственную реализацию многомерного хеширования на основе пакета **NumPy**. Для этого реализуем класс **MDHash**, в котором основная процедура будет обозначена как метод **MDHash.hash**. Метод **MDHash.segments** является чисто виртуальным и должен быть определен в подклассах. Этот метод является программной реализацией отображения $s : X \rightarrow K^n$. Весь код метода **MDHash.hash** не сложен и его полностью можно привести.

```
def hash(s):
    q=0
    for x in s.input:
        sel=[]
        co=1
        for ab in s.segments(x):
```



```
kl=s.mu(ab,co)
sel.append(slice(kl[0],kl[1]+1,1))
co+=1
B=s.H[sel]
if(B.size):
    it = nditer(B, flags=['multi_index','refs_ok'])
    while not it.finished:
        mi=it.multi_index
        B[mi].append(q)
        it.iternext()
q+=1
```

Сделаем соответствующие пояснения. Предварительная подготовка, связанная с определением результирующего массива выполняется в конструкторе класса и выглядит так

```
def __init__(s,input,n,t):
    s.n=n
    s.T=t
    s.input=input
    shp=[len(ti) for ti in t]
    s.tree=ndarray(shape=shp,dtype=object)
    it = nditer(s.H, flags=['multi_index','refs_ok'])
    while not it.finished:
        mi=it.multi_index
        s.H[mi]=[]
        it.iternext()
```

Цикл **while** заполняет каждый элемент массива $H[]$ пустыми списками. При этом используется обход всего массива основанный на вычислении мультииндекса **mi**, являющегося атрибутом объекта итератора **it**. Этот итератор строится с помощью функции **nditer()**, принадлежащей пакету **NumPy**. Также отметим, что искомый массив $H[]$ создается с помощью встроенный в пакет **NumPy** функции **ndarray**. При этом указываются размерности массива и тип его элементов.

Выполнение алгоритма хеширования начинается внутри метода **hash()** циклом **for x in s.input**. Для каждого объекта массива создается объект среза массива $H[]$ по значениям функции **MDHash.mu()**.

```
def mu(s,ab,co):
    [a,b]=ab
    k=s.bsearch(s.T[co-1],a)
    l=s.bsearch(s.T[co-1],b)
    return [k,l]
```

Этот объект представляет собой массив n пар целых чисел $(k_i, l_i), i = 1, \dots, n$. Используемый далее массив $B[]$ представляет собой часть массива $H[]$ соответствующий всем мультииндексам $J = (j_1, \dots, j_n)$ с $k_i \leq j_i \leq l_i, i = 1, \dots, n$. Используя встроенную систему итераторов **NumPy**, добавляем номер q в соответствующие списки **B[mi].append(q)**. Заметим, что для ускорения поиска чисел k_i, l_i используем функцию бинарного поиска

```
def bsearch(s,input,x):
    n=len(input)
    b=0
    e=n
    while(e-b>1):
        k=int((e+b)/2)
        if(x<=input[k]): e=k
        if(x>input[k]): b=k
    return b
```



Наконец, для определения подмножества $Y' \subset Y$ используется процедура

```
def into(s, x, co):
    mi=[]
    for xi in x:
        k=s.bsearch(s.T[co-1],xi)
        mi.append(k)

    return s.H[tuple(mi)]
```

Результат работы этой процедуры список — элемент массива $H[]$, содержащий номера тех объектов, которые удовлетворяют условию (2).

3. ОЦЕНКА АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Построение расчетной сетки для ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ сводится к вычислению трехмерной матрицы M_{ijk} вида

$$M_{ijk} = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j, z_k) \in D \\ 0, & (x_i, y_j, z_k) \notin D. \end{cases}$$

Здесь (x_i, y_j, z_k) — соответствующий узел прямоугольной сетки. Принадлежность точки p области D с многогранной границей определяется по простому правилу. Если луч, выходящий из точки p имеет нечетное число точек пересечения с границей, то точка $p \in D$. В противном случае — $p \notin D$. Если каждой грани границы приписать число 1, при условии ее пересечения с лучом и 0 в противном случае, то число точек пересечения с границей рассчитывается как сумма этих величин по всем граням. Так, что если m — число узлов сетки по каждой координате, а N — число граней модели, то всего элементарных операций вычисления факта пересечения луча с пространственным треугольником будет ровно $m^3 \cdot N$. Однако, можно не рассматривать те грани, которые заведомо не пересекают луча. Здесь как раз и помогает предобработка в виде геометрического хеширования. Результат хеширования — это двумерный массив $\mathbf{H}[]$, элементами которого являются наборы натуральных чисел. Предположим, что из каждого узла сетки выпускается луч в положительном направлении оси Oz . Хеширование будем вести по сетке, совпадающей с расчетной. Тогда каждой паре натуральных чисел $0 \leq i, j < m - 1$ соответствует набор $\mathbf{H}[i][j]$ номеров тех граней, проекции которых вдоль оси Oz пересекают ячейку сетки определяемую узлами $(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_{j+1})$. Оценим число таких граней. Предположим, что каждая грань имеет диаметр, не превосходящий $d > 0$. Тогда число ячеек сетки, которые могут пересекаться с проекцией этой грани не превосходит числа $[md] + 1$. Введем такие обозначения. Пусть m_k — число ячеек, которые пересекаются с проекцией k -й грани, а n_{ij} — число граней, чьи проекции пересекают (i, j) -ю ячейку сетки. Кроме того, пусть L — максимальное значение кратности проекции. Тогда, для построения вышеуказанной матрицы M потребуется число операций вычисления пересечения луча с пространственным треугольником равное

$$\sum_{ij} n_{ij} = \sum_k m_k \leq N \cdot L \cdot ([md] + 1).$$

Таким образом, при простом переборе всех граней при измельчении сетки (с возрастанием m) число элементарных операций растет порядка $O(m^3)$, тогда как двумерное хеширование дает оценку порядка $O(m)$. Приведем результаты численных экспериментов.

Первые эксперименты проведены для области, граница которой представляет собой выпуклый многогранник с 80 треугольными гранями. Время построения сетки с m узлами по каждой координате в табл. 1 указано в секундах.

Во втором эксперименте в качестве области была взята геометрическая модель поджелудочной железы (рис. 1, 2). В табл. 2 представлены результаты измерения времени построения сетки для различных значений числа узлов разбиений m по каждой координате. Указано время в секундах. Число граней на границе области равно 27648.



Таблица 1

m	Количество узлов сетки	Без хеширования	Одномерное хеширование	Двумерное хеширование
10	1 000	3.156	0.813	0.281
20	8 000	23.078	4.297	0.938
30	27 000	74.218	12.970	3.250
40	64 000	172.734	31.344	6.187
50	125 000	332.203	57.250	11.969
100	1 000 000	2 594.499	434.110	90.609
200	8 000 000	19 815.125	3 352.312	688.110

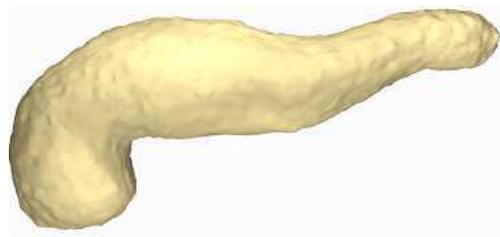


Рис. 1. 3D модель поджелудочной железы

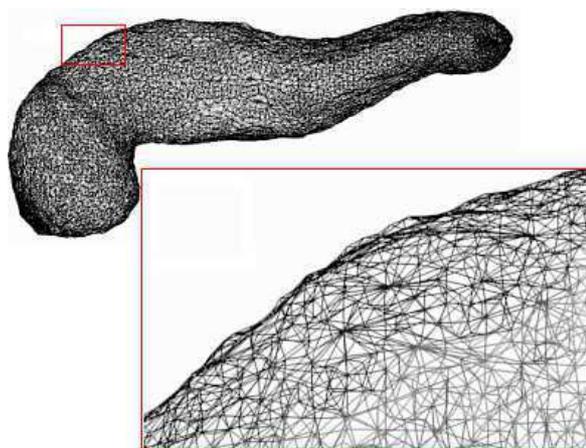


Рис. 2. Геометрическая модель поджелудочной железы, содержащая 27648 треугольников

Таблица 2

m	Количество узлов сетки	Без хеширования	Одномерное хеширование	Двумерное хеширование
10	1 000	1112.89	125.43	13.08
20	8 000	*	480.25	25.69
30	27 000	*	960.97	39.27
40	64 000	*	2022.75	62.08
50	125 000	*	*	78.34
100	1 000 000	*	*	263.75
200	8 000 000	*	*	1242.20

*время, превышающее 3600 с

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-97034).



Библиографический список

1. Цыганов Д. И. Процессы криовоздействия, аппараты и крио-СВЧ технологии деструкции новообразований. М. : РМАПО, 2004. 88 с.
2. Терновский К. С., Гассанов Л. Г. Низкие температуры в медицине. Киев : Наук. думка, 1988. 280 с.
3. Буздов Б. К. Моделирование криодеструкции биологической ткани // *Мат. моделирование*. 2011. Т. 23, № 3. С. 27–37.
4. Альес М. Ю., Копысов С. П., Новиков А. К. Построение и адаптация конечно-элементной сетки при решении эллиптической задачи второго порядка // *Мат. моделирование*. 1997. Т. 9, № 2. С. 43–45.
5. Боровиков С. Н., Крюков И. А., Иванов И. Э. Построение нерегулярных треугольных сеток на криволинейных гранях на основе триангуляции Делоне // *Мат. моделирование*. 2005. Т. 17, № 8. С. 31–45.
6. Скворцов А. В., Мирза Н. С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. Томск : Изд-во Том. ун-та, 2006.
7. Клячин В. А., Широкий А. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства // *Изв. вузов. Математика*. 2012. № 1. С. 31–39.
8. Клячин В. А., Пабат Е. А. C^1 -аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках // *Сиб. журн. индустр. мат.* 2010. Т. 13, № 2. С. 69–78.
9. Клячин В. А. О многомерном аналоге примера Шварца // *Изв. РАН. Сер. математическая*. 2012. Т. 76, № 4. С. 41–48.
10. Препарата Ф. Р., Шеймос М. Вычислительная геометрия : введение. М. : Наука, 1989.
11. Berg M., Cheong O., Kreveld M., Overmars M. *Computational Geometry. Algorithms and Applications*. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008.
12. Wolfson H. J., Rigoutsos I. Geometric Hashing : An Overview // *IEEE Computational Science and Engineering*. 1997. Vol. 4, № 4. P. 10–21.
13. Ling M., Yumin L., Huiqin J., Zhongyong W., Hao-fei Z. An Improved Method of Geometric Hashing Pattern Recognition // *Intern. J. Modern Education and Computer Science*. 2011. № 3. P. 1–7.
14. Mian A. S., Bennamoun M., Owens R. Three-dimensional model-based object recognition and segmentation in cluttered scenes // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2006. Vol. 28. P. 1584–601.
15. Официальный сайт NumPy. URL : <http://numpy.org> (дата обращения : 21.12.2013).
16. Официальный сайт SciPy. URL : <http://scipy.org/> (дата обращения : 21.12.2013).
17. Newton M. C., Nishino Y., Robinson I. K. BONSU : the interactive phase retrieval suite // *J. of Applied Crystallography*. 2012. Vol. 45, № 4. P. 840–843.
18. Bryan B. A. High-performance computing tools for the integrated assessment and modelling of social-ecological systems // *Environmental Modelling & Software*. 2013. Vol. 39. P. 295–303.
19. Никольский Д. Н. Разработка программного обеспечения для численного решения задач эволюции границы раздела различных жидкостей в пористых средах сложной геологической структуры с использованием пакета NumPy // *Учен. зап. Орлов. гос. ун-та. Сер. Естественные, технические и медицинские науки*. 2012. № 6–1. С. 42–47.

Optimization of Calculus Mesh for Cryobiology Problem Based on Multidimensional Hashing Using NumPy

V. A. Klyachin

Volgograd State University, 100, University ave., Volgograd, 400062, Russia, klchnv@mail.ru

In this paper, by the example of solving the problem of constructing the temperature field in cryotherapy shows efficiency of geometric hashing performed on the basis of the NumPy package for constructing appropriate computational grid . Such an arrangement implies for each node to determine its position relative to the polygonal area of irregular shape. Such forms often modeled surfaces of internal organs. Solution build computational grid will allow for 3D visualization of the temperature field in the vicinity of cryotherapy, which will facilitate the timely temperature control.

Key words: cryobiology, computation geometry, geometric hashing.

References

1. Cyganov D. I. *Processy kriovozdeistviya, apparaty i krio-SVC technologii destrukcii novoobrazovaniy* [Processes cryotherapy, apparatus and cryo-microwave technologies of destruction of tumors]. Moscow, RMAPO 2004, 88 p. (in Russian).
2. Ternovskiy K. S., Gassanov L. G. *Nizkie temperatury v medicine* [Low temperatures in medicine]. Kiev, Naukova Dumka, 1988, 280 p. (in Russian).
3. Buzdov B. K. Modelling of cryodestruction of biological tissues. *Mat. Model.*, 2011, vol. 23, no. 3, pp. 27–37 (in Russian).
4. Alies M. Yu., Kopysov S. P., Novikov A. K. Generation



- and adaption of finite element mesh for elliptic problem of order two solution. *Mat. Model.*, 1997, vol. 9, no. 2, pp.43–45 (in Russian).
5. Borovikov S. N., Kryukov I. A., Ivanov I. E. Unstructured triangular mesh generation on curved faces based on Delauney triangulation. *Mat. Model.*, 2005, vol. 17, no. 8, pp. 31–45 (in Russian).
6. Skvortsov A. V., Mirza N. S. *Algoritmy postroeniya i analiza triangulacii* [Constructing and Analysis of Triangulation Algorithms]. Tomsk, Tomsk Univ. Press, 2006.
7. Klyachin V. A., Shirokii A. A. The Delaunay triangulation for multidimensional surfaces and its approximative properties. *Rus. Math.* [Izv. VUZ. Matematika], 2012, vol. 56, no. 1, pp. 27–34. DOI: 10.3103/S1066369X12010045.
8. Klyachin V. A., Pabat E. A. C^1 -approximation of the level surfaces of functions defined on irregular grids. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2010, vol. 13, no. 2, pp. 69–78 (in Russian).
9. Klyachin V. A. On a multidimensional analogue of the Schwarz example. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 681–687. DOI: 10.1070/IM2012v076n04ABEH002601.
10. Preparata F. P., Shamos M. *Computational Geometry: An Introduction*. Berlin ; Heidelberg, Springer-Verlag, 1988.
11. Berg M., Cheong O., Kreveld M., Overmars M. *Computational Geometry. Algorithms and Applications*. Berlin ; Heidelberg, Springer-Verlag, 2008.
12. Wolfson H. J., Rigoutsos I. Geometric Hashing : An Overview. *IEEE Computational Science and Engineering*, 1997, vol. 4, no. 4, pp. 10–21.
13. Ling M., Yumin L., Huiqin J., Zhongyong W., Hao-fei Z. An Improved Method of Geometric Hashing Pattern Recognition. *I. J. Modern Education and Computer Science*, 2011, no. 3, pp. 1–7.
14. Mian A. S., Bennamoun M., Owens R. Three-dimensional model-based object recognition and segmentation in cluttered scenes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2006, vol. 28, pp. 1584–1601.
15. NumPy. URL: <http://numpy.org/> (Accessed 21, Dec, 2013).
16. SciPy. URL: <http://scipy.org/> (Accessed 21, Dec, 2013).
17. Newton M. C., Nishino Y., Robinson I. K. BONSU: the interactive phase retrieval suite. *Journal of Applied Crystallography*, 2012, vol. 45, no. 4, pp. 840–843.
18. Bryan B. A. High-performance computing tools for the integrated assessment and modelling of social-ecological systems. *Environmental Modelling & Software*, 2013, vol. 39, pp. 295–303.
19. Nikolsky D. N. Development of software for the numerical solution of the evolution of the interface of various fluids in porous media complex geological structures using the package NumPy. *Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Estestvennyye, technicheskie i medicinskie nauki*, 2012, no. 6–1, pp. 42–47 (in Russian).