



СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

- Лукашенко Т. П.** Ортогональные базисы сдвигов в пространствах тригонометрических многочленов 367
- Рахмелевич И. В.** О решениях многомерного уравнения Клеро с мультиоднородной функцией от производных 374
- Рубинштейн А. И., Теляковский Д. С.** Замечания о задаче Фаньяно 382
- Старовойтов А. П.** Квадратичные аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций 387
- Терехин П. А.** Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение 395
- Фуфаев Д. В.** Промежуточный случай регулярности в задаче дифференцирования кратных интегралов 401
- Шарапудинов И. И.** Некоторые специальные двумерные ряды по системе $\{\sin x \sin kx\}$ и их аппроксимативные свойства 407
- Шарапудинов И. И., Акниев Г. Г.** Дискретные преобразования со свойством прилипания на основе системы $\{\sin x \sin kx\}$ и системы полиномов Чебышёва второго рода 413
- Шах-Эмиров Т. Н.** О равномерной ограниченности некоторых семейств интегральных операторов свертки в весовых пространствах Лебега с переменным показателем 422
- Шмойлов В. И., Кириченко Г. А.** Решение алгебраических уравнений непрерывными дробями Никипорца 428
- Юрко В. А.** Обратная спектральная задача для дискретных операторов в топологических пространствах 439

Механика

- Глухова О. Е., Колесникова А. С., Слепченков М. М., Савостьянов Г. В.** Влияние топологии на механические свойства углеродных нанотрубок: прогностическое моделирование 448
- Гребенюк С. Н., Бова А. А., Юречко В. З.** Напряженно-деформированное состояние эластомерных конструкций при абразивно-усталостном износе 455
- Лукашенко В. Т.** Расчёт масс метеорных тел путём приближения траекторий 464
- Сычева Е. М.** Обтекание кругового цилиндра волнами, распространяющимися на поверхности вязкой жидкости 469

Информатика

- Львов А. А., Светлов М. С., Мартынов П. В.** Повышение информационной надежности цифровых систем с QAM/COFDM-модуляцией 473

Приложение

- Научная жизнь** 483

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017, раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки» Журнал выходит 4 раза в год

Заведующий редакцией
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Степанова Наталия Ивановна

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Ковалева Наталья Владимировна

Корректор
Юдина Инна Геннадиевна

Адрес редакции:
410012, Саратов, Астраханская, 83
Издательство Саратовского университета
Тел.: (845-2) 52-26-89, 52-26-85

Подписано в печать 01.12.14.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 14,33 (15,25).
Тираж 500 экз. Заказ 59.

Отпечатано в типографии
Издательства Саратовского университета

© Саратовский государственный университет, 2014

**ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ**

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 11 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: <http://mmi.sgu.ru>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS**Scientific Part****Mathematics**

Lukashenko T. P. Orthogonal Basis of Shifts in Space of Trigonometric Polynomials	367
Rakhmelevich I. V. On the Solutions of Multi-dimensional Clairaut Equation with Multi-homogeneous Function of the Derivatives	374
Rubinstein A. I., Telyakovskii D. S. Remarks on Fagnano Problem	382
Starovoitov A. P. Quadratic Hermite – Padé Approximants of Exponential Functions	387
Terekhin P. A. Affine Systems of Walsh Type. Orthogonalization and Completion	395
Fufaev D. V. The Intermediate Case of Regularity in the Problem of Differentiation of Multiple Integrals	401
Sharapudinov I. I. Some Special Two-dimensional Series of $\{\sin x \sin kx\}$ System and Their Approximation Properties	407
Sharapudinov I. I., Akniev G. G. Discrete Transform with Stick Property Based on $\{\sin x \sin kx\}$ and Second Kind Chebyshev Polynomials Systems	413
Shakh-Emirov T. N. On Uniform Boundedness of Some Families of Integral Convolution Operators in Weighted Variable Exponent Lebesgue Spaces	422
Shmoylov V. I., Kirichenko G. A. Solution of Algebraic Equations by Continuous Fractions of Nikiportsa	428
Yurko V. A. Inverse Spectral Problem for Discrete Operators in Topological Spaces	439

Mechanics

Glukhova O. E., Kolesnikova A. S., Slepchenkov M. M., Savostianov G. V. Influence Topology on Mechanical Properties of Carbon Nanotorov: Predictive Modeling	448
Grebenjuk S. N., Bova A. A., Jurechko V. Z. The Stress-strain State of Elastomeric Constructions under Conditions of Abrasive Fatigue Wear	455
Lukashenko V. T. Calculation of Meteoroids Masses by Approximating the Trajectories	464
Sycheva E. M. Flow a Round Cylinder by Waves Extending on the Viscous Liquid Surface	469

Computer Sciences

Lvov A. A., Svetlov M. S., Martynov P. V. Increasing of Information Reliability of Digital Systems with QAM/COFDM-Modulation	473
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Appendices

Scientific Life	483
------------------------	-----



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»**

Главный редактор

Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Стальмахов Андрей Всеволодович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Бабков Лев Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)

Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)

Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шамяионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»**

Editor-in-Chief – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Stalmakhov A. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Babkov L. M. (Saratov, Russia)

Balash O. S. (Saratov, Russia)

Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)

Danilov V. N. (Saratov, Russia)

Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)

Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

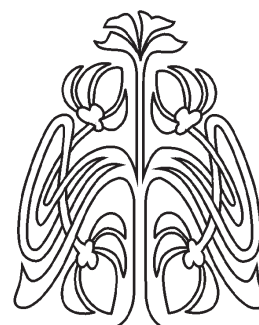
Makarov V. Z. (Saratov, Russia)

Prozorov V. V. (Saratov, Russia)

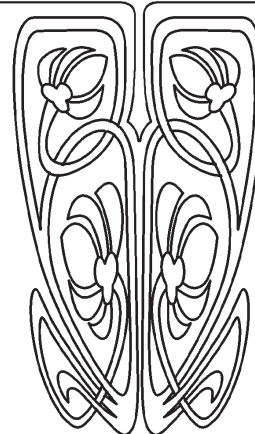
Ustyantsev V. B. (Saratov, Russia)

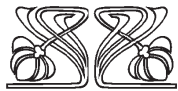
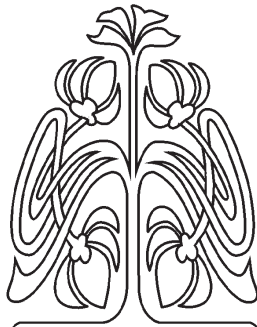
Shamionov R. M. (Saratov, Russia)

Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)

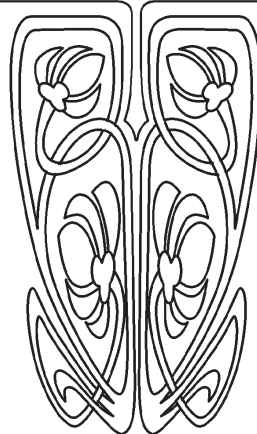


**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**





**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор

(Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, PhD, профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Екатеринбург, Россия)

Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)

Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)

Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)

Indeitsev D. A. (St.-Petersburg, Russia)

Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)

Kovalev V. A. (Moscow, Russia)

Lomakin E. V. (Moscow, Russia)

Manzhirov A. V. (Moscow, Russia)

Matveenko V. P. (Perm, Russia)

Morozov N. F. (St.-Petersburg, Russia)

Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)

Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)

Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)

Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)

Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)

Speranskii D. V. (Moscow, Russia)

Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)

Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)

Khromov A. P. (Saratov, Russia)

Shalyto A. A. (St.-Petersburg, Russia)

Shashkin A. I. (Voronezh, Russia)

Yurko V. A. (Saratov, Russia)

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98, 517.51

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ СДВИГОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Т. П. Лукашенко

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, lukashenko@mail.ru

В конечномерных пространствах комплексных или действительных тригонометрических многочленов изучаются ортонормированные базисы из последовательных сдвигов одного или нескольких многочленов. Показано, что базис из сдвигов одного многочлена существует в пространстве комплексных многочленов с номерами компонент от m до n на \mathbb{Z} , а также в пространстве действительных многочленов с номерами компонент от 0 до n . Указан общий вид таких базисов. Показано, что в любом пространстве есть ортоподобная система (фрейм Парсевала) из сдвигов одного многочлена. Найдены пространства, где нет базиса из сдвигов одного многочлена, но есть базисы из сдвигов двух многочленов.

Ключевые слова: тригонометрические многочлены, ортонормированные базисы сдвигов, ортоподобные системы сдвигов, фреймы сдвигов.

В последнее десятилетие при приближении и представлении функций широкое применение получили системы сдвигов и сжатий функций. Такие системы получаются из одной функции (или нескольких) сдвигами и сжатиями. Существует целая теория построения таким способом различных базисов, систем представления и анализа функций — теория всплесков (или вейвлетов), см. [1]. Такие системы используются в приложениях и компьютерной математике. Здесь рассматривается вопрос об ортогональных базисах из последовательных сдвигов одной или нескольких функций в некоторых пространствах тригонометрических многочленов, что может быть интересно не только с точки зрения теории, но и приложений. Рассматривается также вопрос об ортоподобных системах (фреймах Парсевала) в тех же пространствах. Некоторые результаты данной статьи были представлены в [2].

Обозначим через T_Q , где Q — непустое конечное подмножество \mathbb{Z} , пространство комплексных тригонометрических многочленов:

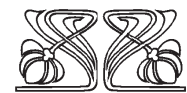
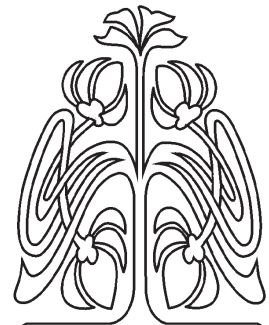
$$T_Q(x) = \sum_{k \in Q} c_k e^{ikx},$$

где $c_k \in \mathbb{C}$.

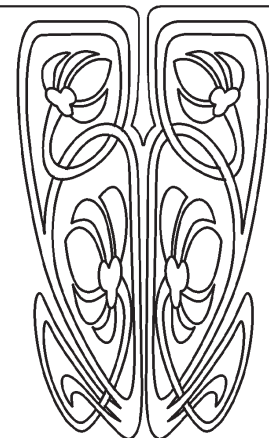
Введем ядро

$$D_Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|Q|}} \sum_{k \in Q} e^{i(kx-s_k)} \quad (1)$$

с покомпонентными сдвигами $s_k \in \mathbb{R}$, $k \in Q$, где $|Q|$ — количество элементов Q . Очевидно $\|D_Q(x)\| = 1$ в пространстве Лебега $L^2[0, 2\pi]$.



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





Теорема 1. В пространстве комплексных тригонометрических многочленов $\mathbb{T}_{[m,n]}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, $[m, n] = \{k \in \mathbb{Z} : m \leq k \leq n\}$, система сдвигов ядер $D_{[m,n]}(x)$

$$D_{[m,n]} \left(x - \frac{2\pi r}{n-m+1} j \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m+1)}} \sum_{k=m}^n e^{i(k(x - \frac{2\pi r}{n-m+1} j) - s_k)}, \quad (2)$$

где $r \in \mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с $n-m+1$, $j = 0, 1, \dots, n-m$, образует ортонормированный базис.

Любой ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$, состоящий из последовательных сдвигов одного многочлена, $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{n-m}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, имеет вид (2) для некоторых покомпонентных сдвигов $s_k \in \mathbb{R}$, $k \in Q$, и некоторого $r \in \mathbb{Z}$, не имеющего общих делителей с $n-m+1$.

Доказательство. Для доказательства ортогональности системы сдвигов ядра $D_{[m,n]}(x)$ покажем, что ядра $D_{[m,n]}(x)$ и $D_{[m,n]} \left(x - \frac{2\pi r}{n-m+1} j \right)$, $j = 1, \dots, n-m$, ортогональны на $[0, 2\pi]$. Действительно, используя ортогональность тригонометрической системы на $[0, 2\pi]$, получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} D_{[m,n]}(x) \overline{D_{[m,n]} \left(x - \frac{2\pi r}{n-m+1} j \right)} dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m+1)}} \sum_{k=m}^n e^{i(kx-s_k)} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m+1)}} \sum_{k=m}^n e^{-i(k(x - \frac{2\pi r}{n-m+1} j) - s_k)} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi(n-m+1)} \int_0^{2\pi} \sum_{k=m}^n e^{i \frac{2\pi r j k}{n-m+1}} dx = \frac{e^{i \frac{2\pi r(n+1)j}{n-m+1}} - e^{i \frac{2\pi r m j}{n-m+1}}}{(n-m+1) \left(e^{i \frac{2\pi r j}{n-m+1}} - 1 \right)} = 0 \end{aligned}$$

в силу равенства

$$\frac{2\pi r(n+1)j}{n-m+1} = \frac{2\pi r m j}{n-m+1} \pmod{2\pi}.$$

Система последовательных сдвигов ядра $D_{[m,n]} \left(x - \frac{2\pi r}{n-m+1} j \right)$, $j = 0, 1, \dots, n-m$, образует ортонормированную систему, она принадлежит пространству $\mathbb{T}_{[m,n]}$ и количество элементов в ней $n-m+1$, что совпадает с размерностью пространства $\mathbb{T}_{[m,n]}$. Значит, это ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$.

Покажем теперь, что любой ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$, состоящий из последовательных сдвигов одного многочлена, имеет вид (2). При $n = m$ это утверждение очевидно верно. Предположим, что $n > m$. Если $T(x) = \sum_{k=m}^n c_k e^{ikx}$ — тригонометрический многочлен, система сдвигов которого $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{n-m}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, образует ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$, то система его сдвигов $\{T(x - j\alpha)\}_{j=1}^{n-m+1}$ также образует ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$ и, значит, выполняется равенство

$$T(x - (n-m+1)\alpha) = \sum_{k=m}^n c_k e^{ik(x - (n-m+1)\alpha)} = e^{iw} T(x) = e^{iw} \sum_{k=m}^n c_k e^{ikx}, \quad (3)$$

где $w \in [0, 2\pi)$. Из (3) следует, что выполняются равенства

$$k(x - (n-m+1)\alpha) = kx + w \pmod{2\pi}, \quad k = m, \dots, n. \quad (4)$$

Вычитая из равенства (4) при $k = n$ равенство при $k = n-1$, получаем $(n-m+1)\alpha = 0 \pmod{2\pi}$, т. е. $\alpha = \frac{2\pi r}{n-m+1}$, $r \in \mathbb{Z}$. Поскольку многочлены $T(x - j\alpha)$ различны при $j = 0, 1, \dots, n-m$, т. е. rj не делится на $n-m+1$ при $j = 1, \dots, n-m$, то r не имеет общих делителей с $n-m+1$.

Из (3) видно, что скалярное произведение $(e^{ikx}, T(x - j\alpha)) = 2\pi \overline{c_k} e^{ikj\alpha}$. По предположению система сдвигов $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{n-m}$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$, поэтому по равенству Парсеваля в пространстве Лебега $L^2[0, 2\pi]$

$$2\pi = \|e^{ikx}\|^2 = \sum_{j=0}^{n-m} |(e^{ikx}, T(x - j\alpha))|^2 = (n-m+1) |2\pi \overline{c_k}|^2.$$



Значит, найдется такое $s_k \in \mathbb{R}$, что

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m+1)}} e^{-is_k}.$$

Тригонометрический многочлен $T(x)$ имеет вид (1) для $Q = [m, n] \subset \mathbb{Z}$, а система его последовательных сдвигов $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{n-m}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, имеет вид (2) из теоремы 1. Теорема доказана.

Обозначим через \mathcal{T}_D , где D — непустое конечное подмножество множества $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, пространство действительных тригонометрических многочленов вида

$$T_D(x) = \frac{a_0}{2} \chi_D(0) + \sum_{0 < k \in D} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, χ_D — характеристическая функция множества D . Действительные тригонометрические многочлены допускают запись в комплексной форме:

$$T_D(x) = \sum_{|k| \in D} c_k e^{ikx},$$

где коэффициенты $c_0 = \frac{a_0}{2} \chi_D(0)$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$ при $0 < k \in D$.

Введем ядро

$$\mathcal{D}_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|D \cup -D|}} \sum_{|k| \in D} e^{i(kx - s_k)}$$

с покомпонентными сдвигами $s_k \in \mathbb{R}$, $s_0 = 0$ или $s_0 = \pi$, и с $s_{-k} = -s_k$, $k \in D$, где $|D \cup -D|$ — количество элементов множества $D \cup -D = \{k \in \mathbb{Z} : |k| \in D\}$. Очевидно, $\|\mathcal{D}_D(x)\| = 1$ в пространстве Лебега $L^2[0, 2\pi]$.

Теорема 2. В пространстве $\mathcal{T}_{[0, n]}$ действительных тригонометрических многочленов, где $n \in \mathbb{Z}^+$, $[0, n] = \{k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k \leq n\}$, система сдвигов ядер $\mathcal{D}_{[0, n]}(x)$:

$$\mathcal{D}_{[0, n]} \left(x - \frac{2\pi r}{2n+1} j \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \left(\pm 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos \left(k \left(x - \frac{2\pi r}{2n+1} j \right) - s_k \right) \right), \quad (5)$$

где $r \in \mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с $2n+1$, $j = 0, 1, \dots, 2n$, образует ортонормированный базис.

Любой ортонормированный базис в $\mathcal{T}_{[0, n]}$, состоящий из последовательных сдвигов одного действительного многочлена $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{2n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, имеет вид (5) с некоторыми $s_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$.

Доказательство. Действительные тригонометрические многочлены (5) по теореме 1 образуют ортонормированную систему из $2n+1$ элемента, что совпадает с размерностью пространства $\mathcal{T}_{[0, n]}$. Следовательно, это ортонормированный базис $\mathcal{T}_{[0, n]}$.

Любой ортонормированный базис в $\mathcal{T}_{[0, n]}$, состоящий из последовательных сдвигов одного действительного многочлена $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{2n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, будет ортонормированным базисом и в $\mathbb{T}_{[-n, n]}$ и по теореме 1 имеет вид (2):

$$D_{[m, n]} \left(x - \frac{2\pi r}{2n+1} j \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \sum_{k=-n}^n e^{i(k(x - \frac{2\pi r}{2n+1} j) - s_k)}$$

для некоторых покомпонентных сдвигов $s_k \in \mathbb{R}$, $-n \leq k \leq n$, и некоторого $r \in \mathbb{Z}$, не имеющего общих делителей с $2n+1$. Так как это действительный многочлен, то $s_0 = 0$ или $s_0 = \pi$, и $s_{-k} = -s_k$, $1 \leq k \leq n$, т. е. многочлен имеет вид (5). Теорема 2 доказана.

Вопрос о существовании ортонормированных базисов в пространствах \mathbb{T}_Q и \mathcal{T}_D , состоящих из последовательных сдвигов одного комплексного или соответственно одного действительного многочлена, сложен и зависит от структуры конечных множеств $Q \subset \mathbb{Z}$ и $D \subset \mathbb{Z}^+$. Приведем сначала несколько простых утверждений и следствий теорем 1 и 2.



Утверждение 1. Пусть \mathbb{T}_Q и \mathbb{T}_Ω — пространства комплексных тригонометрических многочленов, где Q и Ω — непустые конечные подмножества \mathbb{Z} , причем $\Omega = mQ + l = \{k : k = mq + l, q \in Q\}$, где l и $m \neq 0$ — целые числа. Если в \mathbb{T}_Q существует ортонормированный базис из последовательных сдвигов одного комплексного многочлена

$$T(x) = \sum_{q \in Q} c_q e^{iqx} \quad (6)$$

вида $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то в пространстве \mathbb{T}_Ω ортонормированным базисом будет система последовательных сдвигов одного комплексного многочлена

$$\mathfrak{T}(x) = \sum_{q \in Q} c_q e^{i(mq+l)x} \quad (7)$$

вида $\{\mathfrak{T}(x - j\alpha/m)\}_{j=0}^n$.

А если в пространстве \mathbb{T}_Ω существует ортонормированный базис из последовательных сдвигов одного комплексного многочлена вида (7) $\{\mathfrak{T}(x - j\beta)\}_{j=0}^n$, то в пространстве \mathbb{T}_Q ортонормированным базисом будет система последовательных сдвигов одного комплексного многочлена вида (6) $\{T(x - jm\beta)\}_{j=0}^n$.

Действительно, размерности пространств \mathbb{T}_Q и \mathbb{T}_Ω одинаковы, нормы многочленов и их попарная ортогональность при указанных преобразованиях сохраняются, поэтому приведенные системы одновременно будут ортонормированными базисами соответствующих пространств комплексных тригонометрических многочленов.

Из утверждения 1 и теоремы 1 получаем следствие.

Следствие 1. В пространстве комплексных тригонометрических многочленов \mathbb{T}_Ω , где $\Omega \subset \mathbb{Z}$ и является конечной арифметической прогрессией целых чисел, $\Omega = \{k : k = mq + l, q = 1, \dots, n\}$, где $m, l \in \mathbb{Z}$, система сдвигов ядер $D_\Omega(x)$:

$$D_\Omega \left(x - \frac{2\pi r}{mn} j \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{k \in \Omega} e^{i(k(x - \frac{2\pi r}{mn} j) - s_k)} \quad (8)$$

где $r \in \mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с n , $j = 0, 1, \dots, n-1$, образует ортонормированный базис.

Любой ортонормированный базис в \mathbb{T}_Ω , состоящий из последовательных сдвигов одного многочлена $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{n-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, имеет вид (8) для некоторых покомпонентных сдвигов $s_k \in \mathbb{R}$, $k \in \Omega$, и некоторого $r \in \mathbb{Z}$, не имеющего общих делителей с n .

Утверждение 2. Пусть \mathcal{T}_Q и \mathcal{T}_Ω — пространства действительных тригонометрических многочленов, где Q и Ω — конечные подмножества \mathbb{Z}^+ , содержащие 0, причем $\Omega = mQ = \{k : k = mq, q \in Q\}$, где $m \in \mathbb{N}$. Если в \mathcal{T}_Q существует ортонормированный базис из последовательных сдвигов одного действительного многочлена

$$T_Q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0 < k \in Q} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (9)$$

вида $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то в пространстве \mathcal{T}_Ω ортонормированным базисом будет система последовательных сдвигов одного действительного многочлена

$$T_\Omega(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0 < k \in Q} (a_k \cos kmx + b_k \sin kmx) \quad (10)$$

вида $\{T(x - j\alpha/m)\}_{j=0}^n$. А если в пространстве \mathcal{T}_Ω существует ортонормированный базис из последовательных сдвигов одного действительного многочлена вида (10) $\{\mathfrak{T}(x - j\beta)\}_{j=0}^n$, то в пространстве \mathcal{T}_Q ортонормированным базисом будет система последовательных сдвигов одного действительного многочлена вида (9) $\{\mathfrak{T}(x - jm\beta)\}_{j=0}^n$.

Действительно, размерности пространств \mathcal{T}_Q и \mathcal{T}_Ω одинаковы, нормы многочленов и их попарная ортогональность при указанных преобразованиях сохраняются, поэтому приведенные системы одновременно будут ортонормированными базисами соответствующих пространств действительных тригонометрических многочленов.



Из утверждения 2 и теоремы 2 получаем следствие.

Следствие 2. В пространстве действительных тригонометрических многочленов \mathcal{T}_Ω , где $\Omega \subset \mathbb{Z}^+$ является конечной, начинающейся с 0, возрастающей арифметической прогрессией целых чисел, $\Omega = \{k : k = mq, q = 0, \dots, n\}$, где $m \in \mathbb{N}$, система сдвигов ядер $\mathcal{D}_\Omega(x)$

$$\mathcal{D}_\Omega \left(x - \frac{2\pi r}{m(2n+1)}j \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \left(\pm 1 + \sum_{q=1}^n 2 \cos \left(mq \left(x - \frac{2\pi r}{m(2n+1)}j \right) - s_q \right) \right),$$

где $r \in \mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с $2n+1$, $j = 0, 1, \dots, 2n$, образует ортонормированный базис.

Любой ортонормированный базис в \mathcal{T}_Ω , состоящий из последовательных сдвигов одного многочлена, $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{2n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, имеет указанный вид для некоторых покомпонентных сдвигов $s_q \in \mathbb{R}$, $q = 1, \dots, n$, и некоторого $r \in \mathbb{Z}$, не имеющего общих делителей с $2n+1$.

Укажем теперь пространства тригонометрических многочленов, в которых нет ортонормированных базисов из последовательных сдвигов одного многочлена.

Теорема 3. Пусть Q — подмножество \mathbb{Z} , $Q = -Q$, $0 \notin Q$, существует такое $n \in Q$, что $(n+1) \in Q$. Тогда в пространстве комплексных тригонометрических многочленов \mathbb{T}_Q не существует ортонормированного базиса из сдвигов одного многочлена вида $\{T_Q(x - j\alpha)\}_{j=0}^{|Q|-1}$, где $|Q|$ — число элементов Q , $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Предположим, что такой ортонормированный базис есть и он состоит из сдвигов многочлена

$$T_Q(x) = \sum_{r \in Q} c_r e^{irx},$$

откуда в силу базисности его сдвигов в \mathbb{T}_Q имеем:

$$c_r \neq 0, \quad \text{при } r \in Q; \quad \alpha \neq 0.$$

В силу инвариантности относительно сдвигов система функций $T_Q(x - j\alpha)$, $j = 1, 2, \dots, |Q|$, также является ортонормированным базисом в \mathbb{T}_Q , поэтому $T_Q(x - |Q|\alpha) = e^{i\omega} T_Q(x)$, где $\omega \in [0, 2\pi)$. Значит,

$$c_r e^{ir(x - |Q|\alpha)} = c_r e^{i(rx + \omega)} \quad \text{при } r \in Q. \quad (11)$$

При $r = (n+1) \in Q$ из (11) следует, что $(n+1)|Q|\alpha = 2p\pi - \omega$, $p \in \mathbb{Z}$. При $r = n$ из (10) следует, что $n|Q|\alpha = 2q\pi - \omega$, $q \in \mathbb{Z}$. Вычитая из первого равенства второе, получаем, что

$$|Q|\alpha = 2k\pi \quad \text{для некоторого целого } k \neq 0 \text{ (поскольку } \alpha \neq 0). \quad (12)$$

Если $r\alpha$ при некотором натуральном $r \in Q$ кратно 2π , то все тригонометрические многочлены $T_Q(x - j\alpha)$, $j = 0, 1, \dots, |Q| - 1$, имеют одинаковые компоненты с номерами $\pm r$, $c_r e^{irx}$ и $c_{-r} e^{-irx}$, что противоречит базисности этих многочленов в пространстве \mathbb{T}_Q . Если $r\alpha$ при всех $r \in Q$ не кратно 2π , то для всех $r \in Q$ из (12) имеем равенства

$$\sum_{j=0}^{|Q|-1} e^{ir(x - j\alpha)} = \frac{e^{ir(x - |Q|\alpha)} - e^{irx}}{e^{-ir\alpha} - 1} = 0.$$

Значит, сумма

$$\sum_{j=0}^{|Q|-1} T_Q(x - j\alpha) \equiv 0, \quad (13)$$

а это противоречит предположению, что функции, слагаемые суммы (13), образуют ортонормированный базис в пространстве \mathbb{T}_Q . Теорема 3 доказана.

Из утверждения 1 и теоремы 3 получаем следующее следствие.

Следствие 3. Пусть Q — подмножество \mathbb{Z} , $Q = -Q$, $0 \notin Q$, существует такое $n \in Q$, что $(n+1) \in Q$, а $\Omega = mQ + l = \{k : k = mq + l, q \in Q\}$, где $m, l \in \mathbb{Z}$. Тогда в пространстве



комплексных тригонометрических многочленов \mathbb{T}_Ω не существует ортонормированного базиса из сдвигов одного многочлена вида $\{T_\Omega(x - j\alpha)\}_{j=0}^{|\Omega|-1}$, где $|\Omega|$ — число элементов Ω , $\alpha \in \mathbb{R}$.

Из теоремы 3 получаем также следующее следствие.

Следствие 4. Если D — подмножество \mathbb{N} , содержащее два натуральных числа подряд, то в пространстве действительных тригонометрических многочленов \mathcal{T}_D не существует ортонормированного базиса из сдвигов одного действительного многочлена вида $\{T_D(x - j\alpha)\}_{j=0}^{2|D|-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Действительно, если бы такой ортонормированный базис существовал, то он был бы ортонормированным базисом и в пространстве комплексных тригонометрических многочленов \mathbb{T}_Q , где $Q = -D \cup D$, что невозможно по теореме 3.

Из утверждения 2 и следствия 4 получаем следующее следствие.

Следствие 5. Пусть D — подмножество \mathbb{N} , содержащее два натуральных числа подряд, а $\mathcal{D} = mD + l = \{k : k = mq + l, q \in D\}$, где $m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}^+$. Тогда в пространстве действительных тригонометрических многочленов $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ не существует ортонормированного базиса из сдвигов одного действительного многочлена вида $\{\mathcal{T}_D(x - j\alpha)\}_{j=0}^{2|D|-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Приведем еще одно простое утверждение.

Утверждение 3. Пусть Q — подмножество \mathbb{Z} , являющееся конечным объединением таких непустых непересекающихся множеств Q_p , $p = 1, \dots, P$, что в каждом пространстве комплексных тригонометрических многочленов \mathbb{T}_{Q_p} , $p = 1, \dots, P$, существует ортонормированный базис из сдвигов одного комплексного многочлена вида $\{\mathcal{T}_{Q_p}(x - j\alpha_p)\}_{j=0}^{2|Q_p|-1}$, $\alpha_p \in \mathbb{R}$. Тогда объединение таких базисов будет ортонормированным базисом в пространстве комплексных тригонометрических многочленов \mathbb{T}_Q .

Из него и теорем 1 и 3 получаем следующее следствие.

Следствие 5. Пусть $Q = [-n, -m] \cup [m, n]$, где $0 < m < n$, тогда в пространстве комплексных тригонометрических многочленов \mathbb{T}_Q не существует ортонормированного базиса из последовательных сдвигов одного комплексного многочлена, но есть ортонормированный базис из последовательных сдвигов двух комплексных многочленов $T_{[-n, -m]}(x - j\alpha)$ и $T_{[m, n]}(x - j\alpha)$, $j = 0, \dots, n - m$ (причем можно взять $T_{[-n, -m]}(x) = T_{[m, n]}(-x)$ или $T_{[-n, -m]}(x) = \overline{T_{[m, n]}(x)}$).

Из следствий 4 и 5 получаем следующее следствие.

Следствие 6. В пространстве действительных тригонометрических многочленов $\mathcal{T}_{[m, n]}$, где $0 < m < n$, не существует ортонормированного базиса из последовательных сдвигов одного действительного многочлена, но есть ортонормированный базис из последовательных сдвигов двух действительных многочленов $\mathcal{T}_1(x - j\alpha)$ и $\mathcal{T}_2(x - j\alpha)$, $j = 0, \dots, n - m$.

Действительно, по следствию 5 существует ортонормированная система из последовательных сдвигов двух сопряженных комплексных многочленов $T_{[m, n]}(x - j\alpha)$ и $\overline{T_{[m, n]}(x - j\alpha)}$, $j = 0, \dots, n - m$. А тогда система из последовательных сдвигов двух действительных многочленов

$$\frac{T_{[m, n]}(x - j\alpha) + \overline{T_{[m, n]}(x - j\alpha)}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{T_{[m, n]}(x - j\alpha) - \overline{T_{[m, n]}(x - j\alpha)}}{\sqrt{2}i}, \quad j = 0, \dots, n - m,$$

является ортонормированной системой в пространстве $\mathcal{T}_{[m, n]}$, и количество элементов в ней совпадает с размерностью пространства.

Определение. Система элементов $\{\varphi_j\}$ гильбертова пространства H (над полем \mathbb{R} или \mathbb{C}) называется ортоподобной, если для любого элемента $f \in H$ верно равенство $f = \sum_j (f, \varphi_j) \varphi_j$.

Умножая это равенство скалярно на f , получим равенство $\|f\|^2 = \sum_j \|(f, \varphi_j)\|^2$, которое определяет фреймы Парсеваля. Поэтому всякая ортоподобная система является фреймом Парсеваля. Известно, что всякий фрейм Парсеваля является ортоподобной системой (см. [1, § 1.8.2]).

Теорема 4. Пусть Q — конечное подмножество \mathbb{Z} , $Q \subset [m, n]$. Тогда система сдвигов ядер

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(n - m + 1)}} \sum_{k \in Q} e^{i(k(x - \frac{2\pi r}{n - m + 1}j) - s_k)},$$

где $r \in \mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с $n - m + 1$, $j = 0, 1, \dots, n - m$, образует ортоподобную систему (фрейм Парсеваля) в \mathbb{T}_Q .



Доказательство. Эта система является ортогональной проекцией на \mathbb{T}_Q системы сдвигов ядер (2), которая по теореме 1 образует ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$. А ортогональная проекция ортонормированного базиса из $\mathbb{T}_{[m,n]}$ — ортоподобная система в \mathbb{T}_Q (см. [1, § 1.8.2, 1.8.3]). Ведь любой элемент из \mathbb{T}_Q можно разложить по ортонормированному базису из $\mathbb{T}_{[m,n]}$, а потом в разложении всюду заменить элементы ортонормированного базиса из $\mathbb{T}_{[m,n]}$ на их ортогональные проекции на \mathbb{T}_Q . Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть D — конечное подмножество \mathbb{Z}^+ , $D \subset [0, n]$, $0 \leq n$. Тогда система сдвигов ядер

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \left(\pm 1 \chi_D(0) + \sum_{k \in D} 2 \cos \left(k \left(x - \frac{2\pi r}{2n+1} j \right) - s_k \right) \right),$$

где $r \in \mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с $2n+1$, $j = 0, 1, \dots, 2n$, образует ортоподобную систему (фрейм Парсевалья) в \mathcal{T}_Q .

Доказательство. Эта система является ортогональной проекцией на \mathcal{T}_Q системы сдвигов ядер (5), которая по теореме 2 образует ортонормированный базис в $\mathcal{T}_{[0,n]}$. А ортогональная проекция ортонормированного базиса из $\mathcal{T}_{[0,n]}$ — ортоподобная система в \mathcal{T}_Q . Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417), гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1096.2014.1) и грантов Правительства РФ (проекты ГК 02.G25.31.0030 и ГК 02.G36.31.0006.).

Библиографический список

1. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. М. : Физматлит, 2005. 616 с.
2. Лукашенко Т. П. Ортогональные базисы сдвигов в пространствах тригонометрических многочленов // Со-

временные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й междунар. Саратов. зимн. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2014. С. 163–169.

Orthogonal Basis of Shifts in Space of Trigonometric Polynomials

T. P. Lukashenko

Moscow State University, Department of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gori, GSP-1, Moscow, 119991, Russia, lukashenko@mail.ru

The orthonormal basis of a system of shifts of one trigonometric polynomial exist in the space of complex trigonometric polynomials with components from m to n and in the space of real trigonometric polynomials with components from 0 to n . Under condition $0 < m < n$ there is no orthogonal basis of shifts of one trigonometric polynomial in this space real trigonometric polynomials with components from m to n . The system of shifts of two trigonometric polynomials are orthogonal basis in this space.

Key words: trigonometric polynomials, orthonormal basis of shifts, systems like orthogonal systems, frame of shifts.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-01-00417) and by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of leading scientific schools (project no. НШ-1096.2014.1) and grants of the Government of the Russian Federation (projects no. ГК 02.G25.31.0030, ГК 02.G36.31.0006.).

References

1. Novikov I. Y., Protasov V. Yu., Skopina M. A. Teoria vsplskov [Theory of Wavelets]. Moscow, Fizmathlit, 2005, 616 p (in Russian).
2. Lukashenko T. P. Ortogonal'nie bazisi sdvigo v prostranstvakh trigonometricheskix mnogochlenov [Orthogonal basis of shifts in space of trigonometric polynomials]. *Sovremennye problemi teorii funktsiy i ih pri-lojenya: materialy 17 mezhdunar. Saratov. zimney shkoli* [Modern problems of function theory and their applications: Proc. of the Intern. 17-th Saratov Winter School], Saratov, 2014, pp. 163–169.



УДК 517.952

О РЕШЕНИЯХ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕРО С МУЛЬТИОДНОРОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ

И. В. Рахмелевич

Кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий в предпринимательской деятельности, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, igor-kitpd@yandex.ru

Проведен анализ решений уравнения Клеро с произвольным числом независимых переменных. Предполагается, что нелинейная функция от производных, входящая в состав уравнения, является мультиоднородной. Это означает, что множество аргументов функции можно представить в виде объединения подмножеств, по каждому из которых функция является однородной. Рассматриваются решения уравнения, зависящие от линейных комбинаций исходных переменных, в каждую из которых входят только переменные из определенного подмножества. Исходное уравнение преобразовано к редуцированному, которое решается методом разделения переменных. Получены решения редуцированного уравнения в виде произвольных однородных функций с показателем однородности 1, а также некоторых обобщенных полиномов.

Ключевые слова: уравнение Клеро, редуцированное уравнение, мультиоднородная функция, метод разделения переменных.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее известных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной, является уравнение Клеро [1, 2]. В указанных работах приведено общее решение уравнения Клеро, являющееся линейной функцией, а также особые решения, представленные в параметрической форме [2]. При этом не использовались никакие дополнительные предположения о свойствах нелинейной функции от производных, входящей в состав уравнения. В то же время известно, что при решении дифференциальных уравнений, содержащих однородные и мультиоднородные функции от частных производных [3–5], весьма эффективным является метод разделения переменных. В данной работе с помощью названного метода проводится анализ решений многомерного уравнения Клеро в случае, когда нелинейная часть уравнения представляет собой мультиоднородную функцию.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим многомерное уравнение Клеро относительно неизвестной функции $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$:

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) + \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = u. \quad (1)$$

Рассмотрим функцию $F(p_1, \dots, p_N)$. Пусть множество значений $I = \{1, \dots, N\}$ индекса i , нумерующего независимые переменные, представлено в виде объединения K непересекающихся подмножеств I_k ($k = 1, \dots, K$). Тогда вектор аргументов этой функции $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ может быть разбит на K непересекающихся подвекторов $P_k = \{p_i\}_{i \in I_k}$. По определению функция F называется мультиоднородной относительно подвекторов P_1, \dots, P_K с показателями однородности r_1, \dots, r_K , если при всех $k = 1, \dots, K$ выполняются соотношения:

$$F(P_1, \dots, \alpha P_k, \dots, P_K) = \alpha^{r_k} F(P_1, \dots, P_k, \dots, P_K). \quad (2)$$

Эти соотношения должны выполняться для любых действительных α, P_1, \dots, P_K , при которых определены функции, входящие в (2). Понятие мультиоднородной функции [3, 5] является обобщением классического понятия однородной функции [6].

Предполагая, что F является мультиоднородной функцией, решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u = U(z_1, \dots, z_K), \quad z_k = \sum_{i \in I_k} c_i x_i. \quad (3)$$

Тогда с учетом свойства мультиоднородности (2) функции F уравнение (1) сводится к следующему:

$$A \prod_{k=1}^K \left(\frac{\partial U}{\partial z_k}\right)^{r_k} + \sum_{k=1}^K z_k \frac{\partial U}{\partial z_k} = U. \quad (4)$$



Здесь c_i — произвольные постоянные, $A = F(C_1, \dots, C_K)$, $C_k = \{c_i\}_{i \in I_k}$ — постоянные векторы ($k = 1, \dots, K$).

Таким образом, исходное уравнение (1) для решений вида (3) сведено к редуцированному уравнению (4) в предположении мультиоднородности функции F .

2. АНАЛИЗ РЕДУЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ

В данном параграфе проведем анализ решений уравнения (4). Простейшие частные случаи, когда это уравнение сводится к линейному, описываются следующей теоремой.

Теорема 1. Уравнение (4) имеет следующие решения в виде произвольных однородных функций с показателем однородности 1, дифференцируемых по всем аргументам:

1) $U = U(z_1, \dots, z_K)$, если удовлетворяется условие

$$F(C_1, \dots, C_K) = 0; \quad (5)$$

2) $U = U(z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_K)$ при выполнении условия $r_l > 0$ ($l \in [1, K]$).

Доказательство. 1. Пусть постоянные c_i таковы, что удовлетворяется условие (5). В этом случае (4) сводится к линейному уравнению:

$$\sum_{k=1}^K z_k \frac{\partial U}{\partial z_k} = U. \quad (6)$$

Решением этого уравнения является произвольная однородная функция $U(z_1, \dots, z_K)$ с показателем однородности 1 [1, с. 223].

2. Пусть $l \in [1, K]$ — некоторое значение индекса k . Рассмотрим функцию $U = U(z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_K)$, дифференцируемую по всем своим аргументам. Подставив эту функцию в уравнение (4) и учитывая, что $\frac{\partial U}{\partial z_l} = 0$ при данном l , находим, что при выполнении условия $r_l > 0$ уравнение (4) сводится к следующему:

$$\sum_{k=1, k \neq l}^K z_k \frac{\partial U}{\partial z_k} = U. \quad (7)$$

Решением уравнения (7) также является произвольная однородная функция $U(z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_K)$ с показателем однородности 1, причем в отличие от случая 1) на постоянные c_i никаких дополнительных условий не накладывается. Теорема доказана.

Отметим также, что при $K = 1$ функция F является однородной (в обычном смысле), и тогда уравнение (4) представляет собой частный случай одномерного уравнения Клеро:

$$A \left(\frac{dU}{dz} \right)^r + z \frac{dU}{dz} = U. \quad (8)$$

Решения уравнения (8) хорошо известны [7, с. 144]:

$$U(z) = Bz + AB^r, \quad U(z) = bz^{r/(r-1)}, \quad b = \left(-\frac{(r-1)^{r-1}}{Ar^r} \right)^{1/(r-1)}. \quad (9)$$

Здесь B — произвольная постоянная; первая из формул (9) соответствует общему решению одномерного уравнения Клеро, а вторая — особому решению, которое существует при $r \neq 1$.

Рассмотрим теперь общий случай $1 \leq K \leq N$ и проведем анализ решений уравнения (4) с помощью метода разделения переменных [8].

Теорема 2. Уравнение (4) имеет следующие решения, представимые в виде суммы функций, каждая из которых зависит от одной из переменных z_1, \dots, z_K :

$$U(z_1, \dots, z_K) = \sum_{k=1}^K a_k z_k + A \prod_{k=1}^K a_k^{r_k}, \quad (10)$$

$$U(z_1, \dots, z_K) = \sum_{k=1, k \neq l}^K a_k z_k + b_l z_l^{r_l/(r_l-1)}. \quad (11)$$



Здесь a_k — произвольные постоянные, а b_l определяется выражением

$$b_l = \left(-(1/A) \prod_{k=1, k \neq l}^K a_k^{-r_k} \frac{(r_l - 1)^{r_l - 1}}{r_l^{r_l}} \right)^{1/(r_l - 1)}. \quad (12)$$

Решения вида (12) существуют при всех $l \in [1, K]$, для которых выполнено условие $r_l \neq 1$.

Доказательство. В соответствии с известной схемой аддитивного разделения переменных будем искать решение уравнения (4) в виде суммы функций одной переменной:

$$U(z_1, \dots, z_K) = \sum_{k=1}^K U_k(z_k). \quad (13)$$

Подставив функцию (13) в уравнение (4), получаем следующее:

$$A \prod_{k=1}^K [U'_k(z_k)]^{r_k} = \sum_{k=1}^K (U_k(z_k) - z_k U'_k(z_k)). \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что уравнению (14) удовлетворяют, в частности, линейные функции $U_k(z_k) = a_k z_k + b_k$. Подставив это выражение в уравнение (14) и учитывая (13), получаем решение вида (10), которое представляет собой известный полный интеграл многомерного уравнения Клеро [1, 2]. Для нахождения особых решений продифференцируем почленно уравнение (14) по z_l , где $l \in [1, K]$ — некоторое значение индекса k . Тогда уравнение (14) преобразуется к следующему:

$$A r_l \prod_{k=1, k \neq l}^K [U'_k(z_k)]^{r_k} [U'_l(z_l)]^{r_l - 1} U''_l(z_l) = -z_l U''_l(z_l). \quad (15)$$

Уравнение (15) удовлетворяется, в частности, при $U''_l(z_l) \equiv 0$, что соответствует рассмотренному выше линейному решению (10). Для нахождения другого решения предположим, что $U''_l(z_l)$ тождественно не равна 0, тогда (15) можно переписать в виде

$$A \prod_{k=1, k \neq l}^K [U'_k(z_k)]^{r_k} = -\frac{z_l}{r_l [U'_l(z_l)]^{r_l - 1}}. \quad (16)$$

Так как функции $U_k(z_k)$, $U_l(z_l)$ зависят от разных переменных, то в соответствии с известной схемой метода разделения переменных из (16) получаем уравнения относительно этих функций:

$$U'_k(z_k) = a_k \quad (k \neq l), \quad \frac{z_l}{r_l [U'_l(z_l)]^{r_l - 1}} = \lambda_l, \quad (17)$$

где a_k , λ_l — некоторые постоянные. Находя решения уравнений (17) и подставив их в (14), получаем решения, определяемые формулами (11), (12). Теорема доказана.

Теорема 3. Уравнение (4) имеет следующие решения, представимые в виде произведения функций, каждая из которых зависит от одной из переменных z_1, \dots, z_K :

$$1) \quad U(z_1, \dots, z_K) = B \prod_{k=1}^K z_k^{q_k}, \quad (18)$$

где

$$q_k = \frac{r_k}{r_\Sigma - 1}, \quad r_\Sigma = \sum_{k=1}^K r_k, \quad B = [(1 - r_\Sigma)A]^{1/r_\Sigma} \prod_{k=1}^K \left(\frac{r_\Sigma - 1}{r_k} \right)^{\frac{r_k}{r_\Sigma - 1}}; \quad (19)$$

2) для каждого $l \in [1, K]$

$$U(z_1, \dots, z_K) = \tilde{B} U_l(z_l) \prod_{k=1, k \neq l}^K z_k^{q_k}, \quad (20)$$



где $U_l(z_l)$ является решением следующего ОДУ:

$$D[U_l'(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_\Sigma - r_l - 1} = \kappa_l - \frac{z_l U_l'(z_l)}{U_l(z_l)}. \quad (21)$$

Здесь $\kappa_l = (r_l - 1)/(r_\Sigma - 1)$, $D = A \tilde{B}^{r_\Sigma - 1} \prod_{k=1, k \neq l}^K q_k^{r_k}$.

Решения, определяемые формулами (18)–(21), существуют при условии $r_\Sigma \neq 1$.

Доказательство. В соответствии с известной схемой мультипликативного разделения переменных будем искать решение уравнения (4) в виде произведения функций одной переменной:

$$U(z_1, \dots, z_K) = \prod_{k=1}^K U_k(z_k). \quad (22)$$

Подстановка выражения (22) в уравнение (4) приводит к следующему:

$$A \prod_{k=1}^K [U_k'(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_\Sigma - r_k - 1} = 1 - \sum_{k=1}^K \frac{z_k U_k'(z_k)}{U_k(z_k)}, \quad (23)$$

где r_Σ определяется второй из формул (19).

Из уравнения (23) непосредственно следует, что если при всех $k = 1, \dots, K$ функции $U_k(z_k)$ удовлетворяют системам ОДУ

$$[U_k'(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_\Sigma - r_k - 1} = \lambda_k, \quad \frac{z_k U_k'(z_k)}{U_k(z_k)} = q_k, \quad (24)$$

то функция $U(z_1, \dots, z_K)$, определяемая формулой (22), является решением уравнения (4). Здесь λ_k, q_k — некоторые постоянные, которые должны удовлетворять условию:

$$A \prod_{k=1}^K \lambda_k = 1 - \sum_{k=1}^K q_k. \quad (25)$$

Решая системы (24), находим:

$$U_k(z_k) = \lambda_k^{\frac{1}{r_\Sigma - 1}} \left(\frac{z_k}{q_k} \right)^{q_k}, \quad q_k = \frac{r_k}{r_\Sigma - 1}. \quad (26)$$

Подставляя функции (26) в выражение (22) и учитывая условие (25), получаем решение, определяемое формулами (18), (19). Для получения других решений продифференцируем уравнение (23) по z_l , где $l \in [1, K]$ — некоторое выбранное значение индекса k :

$$A \prod_{k=1, k \neq l}^K [U_k'(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_\Sigma - r_k - 1} \frac{d}{dz_l} ([U_l'(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_\Sigma - r_l - 1}) = -\frac{d}{dz_l} \left(\frac{z_l U_l'(z_l)}{U_l(z_l)} \right). \quad (27)$$

Если функция $U_l(z_l)$ удовлетворяет системе (24), то уравнение (27) удовлетворяется автоматически. Рассмотрим теперь случай, когда

$$[U_l'(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_\Sigma - r_l - 1} \neq \text{const}; \quad z_l U_l'(z_l)/U_l(z_l) \neq \text{const}.$$

Тогда поскольку в левой части (27) присутствует произведение функций от разных переменных z_k , а правая часть зависит только от z_l , то при всех $k \neq l$ функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять первому из уравнений (24). Тогда уравнение (23) преобразуется к виду

$$A \prod_{k=1, k \neq l}^K \lambda_k [U_l'(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_\Sigma - r_l - 1} = 1 - \sum_{k=1}^K \frac{z_k U_k'(z_k)}{U_k(z_k)}. \quad (28)$$

Аналогично, так как левая часть (28) зависит только от z_l , а в правой части содержится сумма функций от всех z_k , то при всех $k \neq l$ функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять и второму из уравнений (24). Поэтому поскольку функции $U_k(z_k)$ ($k \neq l$) должны удовлетворять обоим уравнениям (24),



то эти функции определяются выражениями (26). Подставляя эти выражения в (23), получаем, что функция $U_l(z_l)$ должна быть решением уравнения (21). Теорема доказана.

Кроме рассмотренных выше аддитивного и мультипликативного разделения переменных, в данной задаче также существуют решения, представимые в виде суммы произведений функций от отдельных переменных z_k . Вид этих решений устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть множество $\Omega = \{1, \dots, K\}$ значений индекса k представлено в виде объединения S ($1 \leq S \leq K$) непересекающихся подмножеств Ω_s ($s = 1, \dots, S$). Тогда уравнение (4) имеет решения следующего вида:

1) для каждого $t \in [1, S]$

$$U(z_1, \dots, z_K) = \sum_{s=1, s \neq t}^S B_s \prod_{k \in \Omega_s} z_k^{\tilde{q}_k} + B_t \prod_{k \in \Omega_t} z_k^{q_k}, \quad (29)$$

где \tilde{q}_k, q_k определяются выражениями:

$$q_k = r_k / (r_{\Sigma t} - 1), \quad \tilde{q}_k = r_k / r_{\Sigma s}, \quad r_{\Sigma s} = \sum_{k \in \Omega_s} r_k, \quad r_{\Sigma t} = \sum_{k \in \Omega_t} r_k. \quad (30)$$

Постоянные B_s ($s = 1, \dots, S$) должны удовлетворять условию:

$$(1 - r_{\Sigma t}) A \prod_{s=1, s \neq t}^S B_s^{r_{\Sigma s}} \prod_{k \in \Omega_s} \tilde{q}_k^{r_k} B_t^{r_{\Sigma t} - 1} \prod_{k \in \Omega_t} q_k^{r_k} = 1. \quad (31)$$

Решение (29) для каждого фиксированного t существует при $r_{\Sigma t} \neq 1, r_{\Sigma s} \neq 0$ (второе из этих условий должно выполняться при всех $s \neq t$);

2) для каждого $t \in [1, S]$ и каждого $l \in \Omega_t$

$$U(z_1, \dots, z_K) = \sum_{s=1, s \neq t}^S B_s \prod_{k \in \Omega_s} z_k^{\tilde{q}_k} + \tilde{B}_t U_l(z_l) \prod_{k \in \Omega_t, k \neq l} z_k^{q_k}, \quad (32)$$

причем функция $U_l(z_l)$ является решением следующего ОДУ:

$$D[U_l'(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t} - r_l - 1} = \kappa_l - \frac{z_l U_l'(z_l)}{U_l(z_l)}. \quad (33)$$

Здесь

$$\kappa_l = \frac{r_l - 1}{r_{\Sigma t} - 1}, \quad D = A \tilde{B}_t^{r_{\Sigma t} - 1} \prod_{s=1, s \neq t}^S B_s^{r_{\Sigma s}} \prod_{k \in \Omega_t, k \neq l} q_k^{r_k} \prod_{s=1, s \neq t}^S \prod_{k \in \Omega_s} \tilde{q}_k^{r_k}. \quad (34)$$

Доказательство. Решение уравнения (4) будем искать в виде

$$U(z_1, \dots, z_K) = \sum_{s=1}^S \left(\prod_{k \in \Omega_s} U_k(z_k) \right). \quad (35)$$

Подставляя функцию (35) в уравнение (4), получаем следующее:

$$A \prod_{s=1}^S \prod_{k \in \Omega_s} ([U_k'(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma s} - r_k}) = \sum_{s=1}^S \left(\prod_{k \in \Omega_s} U_k(z_k) \right) \left(1 - \sum_{k \in \Omega_s} \frac{z_k U_k'(z_k)}{U_k(z_k)} \right), \quad (36)$$

где $r_{\Sigma s}$ определяется формулой (30).

Пусть l, t — некоторые значения индексов k, s , причем $l \in \Omega_t$. Для дальнейшего анализа уравнения (36) продифференцируем его по z_l , тогда:

$$A \prod_{s=1}^S \prod_{k \in \Omega_s} ([U_k'(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma s} - r_k - \delta_{st}}) = \frac{-V_l(z_l) \sum_{k \in \Omega_t} z_k V_k(z_k) + z_l V_l'(z_l)}{(r_{\Sigma t} - r_l) V_l(z_l) + r_l W_l(z_l)}. \quad (37)$$



Здесь использованы обозначения $V_l(z_l) = U'_l(z_l)/U_l(z_l)$, $W_l(z_l) = U''_l(z_l)/U'_l(z_l)$, δ_{st} — символ Кронекера.

Так как правая часть уравнения (37) зависит только от переменных z_k ($k \in \Omega_t$), то в соответствии с известной схемой метода разделения переменных функции $U_k(z_k)$ при $k \in \Omega_s$, $s \neq t$, должны удовлетворять уравнениям:

$$[U'_k(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma s} - r_k} = \lambda_k, \quad (38)$$

где λ_k — некоторые постоянные. Решая уравнения (38), находим, что

$$U_k(z_k) = \lambda_k^{\frac{1}{r_{\Sigma s}}} \left(\frac{z_k - z_{k0}}{\tilde{q}_k} \right)^{\tilde{q}_k}, \quad (39)$$

где \tilde{q}_k определяется второй из формул (30), z_{k0} — произвольные постоянные интегрирования.

Подставим выражение (39) в уравнение (36) и перепишем это уравнение в виде

$$\begin{aligned} & A \prod_{s=1, s \neq t}^S \prod_{k \in \Omega_s} \lambda_k \prod_{k \in \Omega_t} ([U'_k(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma t} - r_k}) = \\ & = \sum_{s=1, s \neq t}^S \left(\prod_{k \in \Omega_s} U_k(z_k) \right) \left(1 - \sum_{k \in \Omega_s} \frac{z_k \tilde{q}_k}{z_k - z_{k0}} \right) + \prod_{k \in \Omega_t} U_k(z_k) \left(1 - \sum_{k \in \Omega_t} \frac{z_k U'_k(z_k)}{U_k(z_k)} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Левая часть (40) зависит только от переменных z_k ($k \in \Omega_t$), а первое слагаемое в правой части зависит от z_k ($k \in \Omega_s$, $s \neq t$). Поэтому уравнению (40) можно удовлетворить только в том случае, если при всех $s \neq t$ выполнено условие

$$1 - \sum_{k \in \Omega_s} \frac{z_k \tilde{q}_k}{z_k - z_{k0}} \equiv 0. \quad (41)$$

Учитывая выражение (30) для \tilde{q}_k , получаем, что условие (41) выполняется только в том случае, если

$$z_{k0} = 0 \quad (42)$$

при всех $k \in \Omega_s$, $s \neq t$. Тогда с учетом (41) уравнение (40) принимает вид

$$A^{(1)} \prod_{k \in \Omega_t} ([U'_k(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma t} - r_k - 1}) = 1 - \sum_{k \in \Omega_t} \frac{z_k U'_k(z_k)}{U_k(z_k)}, \quad (43)$$

где

$$A^{(1)} = A \prod_{s=1, s \neq t}^S \prod_{k \in \Omega_s} \lambda_k. \quad (44)$$

Уравнение (43) имеет вид, аналогичный уравнению (23), с точностью до входящих в него параметров. Поэтому повторяя соответствующие рассуждения для уравнения (43), получаем, что для всех $k \in \Omega_t$ ему удовлетворяют функции:

$$U_k(z_k) = \lambda_k^{\frac{1}{r_{\Sigma t} - 1}} \left(\frac{z_k}{q_k} \right)^{q_k}, \quad q_k = \frac{r_k}{r_{\Sigma t} - 1}, \quad (45)$$

причём постоянные λ_k должны удовлетворять условию:

$$A^{(1)} \prod_{k \in \Omega_t} \lambda_k = 1 - \sum_{k \in \Omega_t} q_k. \quad (46)$$

Подставляя выражения (39), (45) в (35), получаем решение в виде (29), причём постоянные B_s , B_t определяются выражениями:

$$B_s = \left(\prod_{k \in \Omega_s} \lambda_k \right)^{\frac{1}{r_{\Sigma s}}} \prod_{k \in \Omega_s} \tilde{q}_k^{-\tilde{q}_k}, \quad B_t = \left(\prod_{k \in \Omega_t} \lambda_k \right)^{\frac{1}{r_{\Sigma t} - 1}} \prod_{k \in \Omega_t} q_k^{-q_k}. \quad (47)$$



Принимая во внимание условие (46) и учитывая (47), (44), находим, что постоянные B_s, B_t , входящие в решение (29), должны удовлетворять условию (31).

Далее, для нахождения другого решения, продифференцируем уравнение (43) по z_l , где $l \in \Omega_t$, тогда получаем:

$$A \prod_{k \in \Omega_t, k \neq l} ([U'_k(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma t} - r_k - 1}) \frac{d}{dz_l} ([U'_l(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t} - r_l - 1}) = -\frac{d}{dz_l} \left(\frac{z_l U'_l(z_l)}{U_l(z_l)} \right). \quad (48)$$

Для решения, определяемого формулами (29)–(31), рассмотренного выше, выражения под знаком производной по z_l в левой и правой частях (48) являются постоянными величинами и, следовательно, для этого случая (48) удовлетворяется автоматически. Рассмотрим теперь случай, когда

$$[U'_l(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t} - r_l - 1} \neq \text{const}; \quad z_l U'_l(z_l) / U_l(z_l) \neq \text{const}.$$

Так как правая часть (48) зависит только от z_l , а левая часть — от всех z_k ($k \in \Omega_t$), то при всех k ($k \in \Omega_t, k \neq l$) функции $U_k(z_k)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$[U'_k(z_k)]^{r_k} [U_k(z_k)]^{r_{\Sigma t} - r_k - 1} = \lambda_k, \quad (49)$$

Решение уравнения (49) имеет вид

$$U_k(z_k) = \lambda_k^{\frac{1}{r_{\Sigma t} - 1}} \left(\frac{z_k - z_{k0}}{q_k} \right)^{q_k}, \quad (50)$$

Подставив выражение (50) в уравнение (43), преобразуем это уравнение к виду

$$A^{(1)} \prod_{k \in \Omega_t, k \neq l} \lambda_k ([U'_l(z_l)]^{r_l} [U_l(z_l)]^{r_{\Sigma t} - r_l - 1}) = 1 - \sum_{k \in \Omega_t, k \neq l} \frac{z_k q_k}{z_k - z_{k0}} - \frac{z_l U'_l(z_l)}{U_l(z_l)}, \quad (51)$$

Так как левая часть (51) зависит только от z_l , а правая часть — от всех z_k ($k \in \Omega_t$), то это уравнение может быть удовлетворено только в том случае, если для всех $k \in \Omega_t, k \neq l$ выполнено условие (42). Тогда, подставляя (39) и (50) в выражение (35) и учитывая условие (42), получаем решение уравнения (4) в виде (32), где постоянная \tilde{B}_t определяется выражением

$$\tilde{B}_t = \left(\prod_{k \in \Omega_t, k \neq l} \lambda_k \right)^{\frac{1}{r_{\Sigma t} - 1}} \prod_{k \in \Omega_t, k \neq l} q_k^{-q_k}. \quad (52)$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (51) учтем, что

$$1 - \sum_{k \in \Omega_t, k \neq l} q_k = \kappa_l, \quad (53)$$

где κ_l определяется первой из формул (34). Тогда с учетом (52) и (53) из (51) получаем уравнение для $U_l(z_l)$ в виде (33). Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе многомерное уравнение Клеро (1) с мультиоднородной функцией от производных сведено к редуцированному уравнению (4). Показано, что в случаях, когда уравнение (4) сводится к линейному, оно имеет решения в виде произвольной однородной функции от переменных z_1, \dots, z_K с показателем однородности 1 при выполнении условия (5); и в виде произвольных однородных функций от переменных $z_1, \dots, z_{l-1}, z_{l+1}, \dots, z_K$ с показателем однородности 1 для всех $l \in [1, K]$, при которых выполняется условие $r_l > 0$. Другие решения уравнения (4) найдены методом разделения переменных. Так, в случае аддитивного разделения переменных получены решения, определяемые формулами (10)–(12); в случае мультипликативного разделения переменных — решения (18), (19) и (20), (21); в случае комбинированного разделения переменных — решения, определяемые формулами (29)–(31), (32)–(34). Результаты данной работы могут быть обобщены на другие уравнения аналогичного вида.



Библиографический список

1. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М. : Физматлит, 2003. 416 с.
2. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М. : Наука, 1966. 260 с.
3. Рахмелевич И. В. О некоторых уравнениях в частных производных, содержащих мультиоднородные функции // Научная дискуссия : вопросы физики, математики, информатики : материалы III междунар. заочн. науч.-практ. конф. М. : Междунар. центр науки и об-раз., 2012. С. 18–23.
4. Рахмелевич И. В. О применении метода разделения переменных к уравнениям математической физики, содержащим однородные функции от производных // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2013. № 3. С. 37–44.
5. Рахмелевич И. В. Об уравнениях математической физики, содержащих мультиоднородные функции от производных // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2014. № 1. С. 42–50.
6. Ацел Я., Домбр Ж. Функциональные уравнения с несколькими переменными / пер. с англ. М. : Физматлит, 2003. 432 с.
7. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Физматлит, 2001. 576 с.
8. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М. : Физматлит, 2002. 256 с.

On the Solutions of Multi-dimensional Clairaut Equation with Multi-homogeneous Function of the Derivatives

I. V. Rakhmelevich

Nizhny Novgorod State University, 23, Gagarin ave., Nizhny Novgorod, 603950, Russia, igor-kitpd@yandex.ru

The analysis of the solutions of Clairaut equation with an arbitrary number of independent variables is completed. It is assumed that the function of the derivatives, which is part of the equation is multi-homogeneous. This means that the set of function arguments can be represented as the union of subsets, and the function is homogeneous on each of these subsets. We consider solutions of equations depending on linear combinations of the original variables, each of which contains only a certain subset of variables. Original equation is transformed to a reduced one, which can be solved by separation of variables. It is shown that the reduced equation has solutions in the form of arbitrary homogeneous functions with index of homogeneity 1 and solutions in the form of some generalized polynomials.

Key words: Clairaut equation, reduced equation, multi-homogeneous function, variables separation method.

References

1. Polyanin A. D., Zaitsev V. F., Moussiaux A. *Handbook of First Order Partial Differential Equations*. London, Taylor & Francis, 2002. (Rus. ed. : Zaitsev V. F., Polyanin A. D. *Spravochnik po differentsialnym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka*. Moscow, Fizmatlit, 2003, 416 p.)
2. Kamke E. *Differentialgleichungen: L-sungsmethoden und L-sungen, II, Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung fir eine gesuchte Funktion*. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1965. (Rus. ed. : Kamke E. *Spravochnik po differentsialnym uravneniyam v chastnyh proizvodnyh pervogo poryadka*. Moscow, Nauka, 1966, 260 p.)
3. Rakhmelevich I. V. О некотoryh uravneniyah v chastnyh proizvodnyh, sodержashih odnorodnye funkicii [On Some Partial Differential Equations Containing Multi-homogeneous Functions]. *Nauchnaya discussiya : voprosy fiziki, matematiki, informatiki : materialy III Mezhdunar. zaoch. nauch.-pract. konf.* Moscow, 2012, pp. 18–23 (in Russian).
4. Rakhmelevich I. V. On Application of The Variable Separation Method to Mathematical Physics Equations Containing Homogeneous Functions of Derivatives. *Vestnik Tomsk Univ. Math. Mech.*, 2013, iss. 3, pp. 37–44 (in Russian).
5. Rakhmelevich I. V. On Equations of Mathematical Physics Containing Multi-homogeneous Functions of Derivatives. *Vestnik Tomsk Univ. Math. Mech.*, 2014, iss.1, pp. 42–50 (in Russian).
6. Aczel J., Dhombres J. *Functional equations in several variables*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989. (Rus. ed. : Aczel J., Dhombres J. *Funkcionalnye uravneniya s neskol'kimi peremennymi*. Moscow, Fizmatlit, 2003, 432 p.)
7. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, Second Edition*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003. (Rus. ed. : Zaitsev V. F., Polyanin A. D. *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam*. Moscow, Fizmatlit, 2001, 576 p.)
8. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press, 2004. (Rus. ed. : Polyanin A. D., Zaitsev V. F. *Spravochnik po nelineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki: tochnye resheniya*. Moscow, Fizmatlit, 2002, 432 p.)



УДК 517.938

ЗАМЕЧАНИЯ О ЗАДАЧЕ ФАНЬЯНО

А. И. Рубинштейн, Д. С. Теляковский

¹ Доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва; профессор кафедры высшей математики, Московский государственный университет леса, Rubinshtein_aleksandr@mail.ru

² Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Dtelyakov@mail.ru

Даются два решения задачи Фаньяно о нахождении трёхзвенной бильярдной траектории в треугольнике.

Ключевые слова: бильярдная траектория, задача Фаньяно.

Пусть G — плоская область с гладкой или кусочно-гладкой границей ∂G . Бильярдной траекторией в G называется неограниченно продолжаемая ломаная, вершины (узлы) которой лежат на ∂G , все остальные точки — внутри G , а два звена с общей вершиной $M \in \partial G$ образуют равные углы с касательной, проведённой к ∂G в точке M — правило бильярдного отражения: «угол падения равен углу отражения». Бильярдное отражение в угловых точках ∂G считается невозможным, и траектория, попавшая в угловую точку, заканчивается в ней.

В общем случае бильярдная траектория состоит из бесконечной последовательности звеньев, но могут существовать и периодические траектории, которые представляются ломаными с конечным числом звеньев, проходимыми бесконечно много раз. В статье с элементарной точки зрения рассматривается вопрос о существовании периодических бильярдных траекторий в треугольниках.

Одной из первых задач о периодических бильярдных траекториях фактически является поставленная в 1775 г. задача Фаньяно (см. напр. [1, с. 99]), хотя в её исходной формулировке о бильярдах не упоминается.

Задача Фаньяно 1. *Найти треугольник минимального периметра, вписанный в данный треугольник ABC .*

Поскольку $\triangle ABC$ является ограниченным и замкнутым множеством, а периметр вписанного треугольника непрерывно зависит от расположения его вершин на сторонах $\triangle ABC$, существуют вписанные треугольники максимального и минимального периметров. Треугольником максимального периметра является сам $\triangle ABC$. Треугольник минимального периметра может вырождаться в отрезок, исходящий из одной из вершин $\triangle ABC$, в этом случае длина этого отрезка считается два раза.

Покажем, что если невырожденный вписанный треугольник минимального периметра существует, то он является трёхзвенной бильярдной траекторией, вписанной в треугольник ABC .

Действительно, сумма расстояний от точек P и Q , лежащих с одной стороны от прямой EF до точки T этой прямой минимальна, если $\angle PTE = \angle QTF$ (рис. 1, а). Поэтому T — это такая точка прямой EF , что исходящий из P луч после бильярдного отражения от EF в точке T пройдёт через точку Q .

Пусть $M_1M_2M_3$ — невырожденный треугольник минимального периметра, вписанный в $\triangle ABC$ (рис. 1, б). Тогда углы $\angle M_3M_1A$ и $\angle M_2M_1B$ равны, так как в противном случае, изменяя положение

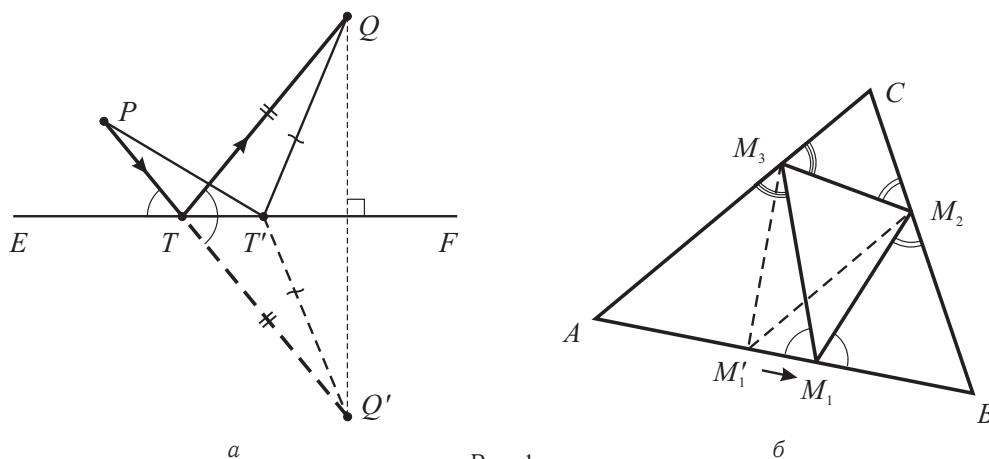


Рис. 1



точки M_1 на стороне AB , периметр $\triangle M_1M_2M_3$ можно было бы уменьшить, что противоречит предположению о минимальности периметра $\triangle M_1M_2M_3$. Значит, луч M_1M_2 является бильярдным отражением луча M_3M_1 от стороны AB . Рассматривая аналогично остальные вершины $\triangle M_1M_2M_3$, видим, что $M_1M_2M_3$ — замкнутая трёхзвенная бильiardная траектория, вписанная в $\triangle ABC$. Поэтому задачу Фаньяно можно переформулировать следующим образом.

Задача Фаньяно 2. *Найти трёхзвенную бильiardную траекторию, вписанную в данный треугольник ABC .*

То, что трёхзвенная бильiardная траектория в треугольнике ABC имеет минимальную длину среди треугольников, вписанных в $\triangle ABC$, является проявлением свойства экстремальности длин бильiardных траекторий — вписанная в ∂G ломаная экстремальной длины (имеющая локальный максимум или минимум) является периодической бильiardной траекторией [1, с. 97–98].

Если бильiardная траектория отражается от прямолинейного участка границы области G , то при симметричном отображении области G относительно этого участка границы ∂G образ отражённого звена траектории лежит на продолжении звена траектории до отражения. На рис. 1, *a* отрезок TQ' , симметричный отражённому звену TQ , лежит на продолжении звена PT . Это называется распрямлением бильiardной траектории. Рассматривать распрямлённые траектории, особенно для бильiardов внутри многоугольников, часто бывает удобнее, чем траектории в исходной области.

Наиболее известными решениями задачи Фаньяно являются решения Г. А. Шварца и Л. Фейера [2, с. 36–44]. Эти решения существенно используют свойство экстремальности длины бильiardной траектории. Приведём два решения задачи Фаньяно, не использующие свойства экстремальности длины периодической бильiardной траектории. Одно решение основано на методе распрямления бильiardной траектории, другое является чисто геометрическим.

Предположим, что $M_1M_2M_3$ — трёхзвенная бильiardная траектория в треугольнике ABC (рис. 2, *a*). Распрямим эту траекторию начиная со звена M_1M_2 . Для этого потребуются выполнить две симметрии: сначала относительно отрезка CB , а потом относительно отрезка CA' ($\triangle A'BC$ — образ $\triangle ABC$ при первой симметрии, а $\triangle A'B'C$ — образ $\triangle A'BC$ при второй). Ясно, что $\triangle A'B'C$ получается при повороте $\triangle ABC$ вокруг точки C на угол $2\angle BCA$. Распрямлённая траектория является отрезком, соединяющим начальную точку траектории M_1 и точку M'_1 — образ M_1 при повороте.

Покажем сначала, что трёхзвенная бильiardная траектория может существовать только в остроугольных треугольниках. Распрямлённая траектория $M_1M'_1$, должна целиком лежать в объединении $\triangle ABC \cup \triangle A'BC \cup \triangle A'B'C$ и пересекать отрезки CB и CA' . Если угол $\angle BCA$ прямой, то точка M'_1 лежит на CM_1 , и, значит, траектория $M_1M_2M_3$ должна пройти через вершину C (рис. 2, *б*), если же угол $\angle BCA$ тупой, то точка M'_1 и отрезок CB лежат по разные стороны от прямой CM_1 (рис. 2, *в*). Ни в одном из этих случаев бильiardная траектория существовать не может.

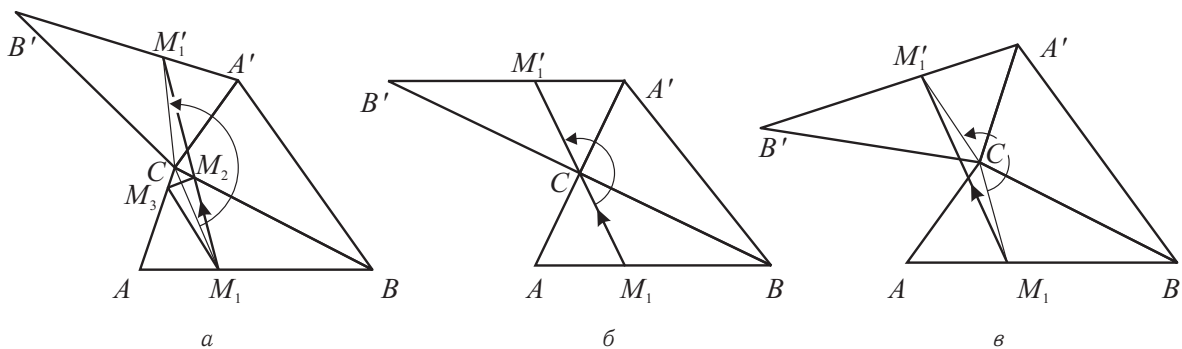


Рис. 2

Значит, искать трёхзвенные бильiardные траектории имеет смысл только в остроугольных треугольниках. Пусть отрезок $M_1M'_1$ — распрямление периодической бильiardной траектории $M_1M_2M_3$ (рис. 3, *a*). Поскольку M'_1 — образ точки M_1 при повороте $\triangle ABC$ вокруг точки C , то длины отрезков CM_1 и CM'_1 равны, треугольник $CM_1M'_1$ равнобедренный и, значит, углы $\angle CM_1M'_1$ и $\angle CM'_1M_1$ равны. Углы $\angle M_3M_1A$ и $\angle M_2M_1B$ равны, поскольку траектория $M_1M_2M_3$ бильiardная. Угол $\angle M'_3M'_1A'$ образ угла $\angle M_3M_1A$ при повороте вокруг точки C . Поэтому углы $\angle M_2M_1B$ и $\angle M'_3M'_1A'$ равны. Отсюда и из равенства $\angle M'_1M_1C = \angle M_1M'_1C$ следует равенство углов $\angle CM_1B$ и $\angle CM'_1A'$. Но угол $\angle CM'_1A'$ — образ угла $\angle CM_1A$ при повороте вокруг C . Таким образом, углы $\angle CM_1A$ и $\angle CM_1B$



равны и, значит, они прямые. Следовательно, точка M_1 — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB . Аналогично доказываем, что точки M_2 и M_3 являются основаниями высот, опущенных из A на BC и из B на CA соответственно. Значит, трёхзвенная билиардная траектория, если она существует, соединяет основания высот треугольника $\triangle ABC$. Отсюда, в частности, следует единственность решения задачи Фаньяно.

Теперь покажем, что в произвольном остроугольном треугольнике ABC существует трёхзвенная билиардная траектория. Пусть M — основание высоты, опущенной из вершины C треугольника ABC на сторону AB (рис. 3, б). Пусть, как и раньше, $\triangle A'B'C$ получается из $\triangle ABC$ при двух последовательных симметриях, при этом точка M' треугольника $A'B'C$ соответствует точке $M \in \triangle ABC$. Начнём билиардную траекторию из точки M в направлении MM' . Отрезок MM' является распрямлением этой траектории после двух последовательных отражений от сторон BC и CA , и поскольку точка M' соответствует точке M , то после двух отражений траектория возвращается в исходную точку M . Для того чтобы показать, что эта траектория является билиардной, достаточно проверить, что в точке M угол падения равен углу отражения, т. е. надо установить равенство углов $\angle M'MB$ и $\angle MM'A'$ (угол в $\triangle ABC$, соответствующий углу $\angle MM'A'$, является углом, под которым траектория возвращается в точку M после двух отражений). Но эти углы равны, так как они дополняют до прямых углы равные углы равнобедренного треугольника CMM' . Этим существование трёхзвенной билиардной траектории в произвольном остроугольном треугольнике доказано.

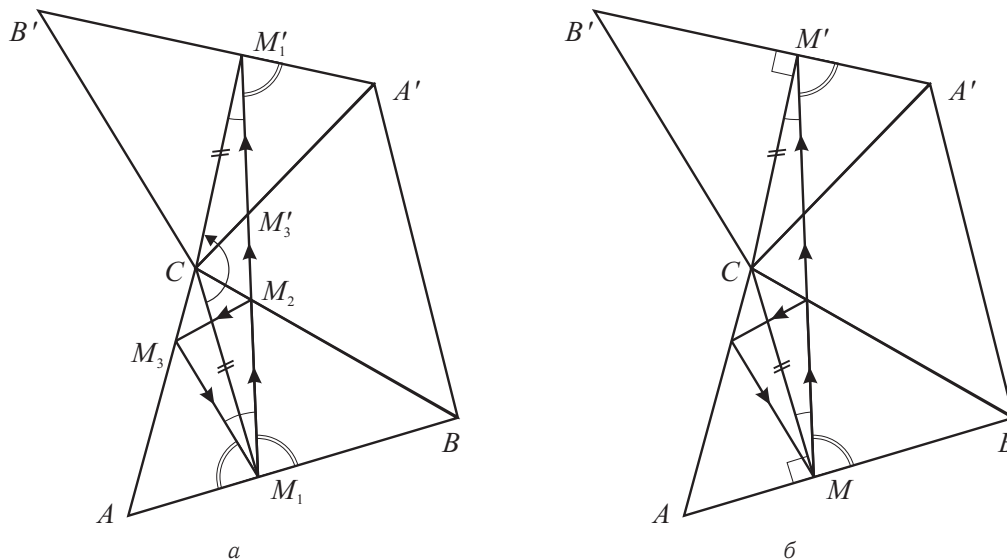


Рис. 3

Что касается задачи Фаньяно в первоначальной формулировке, то в прямоугольных и тупоугольных треугольниках вписанный треугольник минимального периметра (а он существует всегда в отличие от вписанной билиардной траектории) вырождается в отрезок, исходящий из одной из вершин $\triangle ABC$, длина которого считается два раза. Ясно, что таким отрезком минимальной длины является высота, опущенная из вершины тупого или прямого угла треугольника.

Теперь приведём второе, чисто геометрическое решение задачи Фаньяно. Пусть $A_1B_1C_1$ — трёхзвенная билиардная траектория в остроугольном треугольнике ABC , точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на сторонах $\triangle ABC$, противоположных соответственно вершинам A , B и C .

В $\triangle ABC$ обозначим α , β и γ величины углов при вершинах A , B и C , a , b и c — длины противоположных этим вершинам сторон. Пусть φ , ψ и θ — величины углов, которые образуют звенья траектории $A_1B_1C_1$ со сторонами $\triangle ABC$ в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно (рис. 4, а).

Покажем сначала, что $\varphi = \alpha$, $\psi = \beta$ и $\theta = \gamma$. Действительно, так как величина угла при вершине A в треугольниках ABC и AB_1C_1 равна α , то $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$ и $\alpha = \pi - (\psi + \theta)$. Углы при вершине A_1 в $\triangle A_1B_1C$ и $\triangle A_1BC_1$ равны φ . Поэтому $\varphi = \pi - (\gamma + \psi)$ и $\varphi = \pi - (\beta + \theta)$. Из этих выражений для φ и α получаем:

$$2\varphi = \pi - (\gamma + \psi) + \pi - (\beta + \theta) = \pi - (\beta + \gamma) + \pi - (\psi + \theta) = 2\alpha.$$



Равенства $\psi = \beta$ и $\theta = \gamma$ доказываются аналогично. Поскольку по смыслу задачи углы φ , ψ и θ острые, то из равенств $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$ и $\gamma = \theta$ ещё раз, уже из других соображений, чем при первом решении задачи Фаньяно, получаем, что трёхзвенная бильiardная траектория может существовать только в остроугольном треугольнике.

Теперь найдём длины отрезков, на которые узлы бильiardной траектории делят стороны $\triangle ABC$ (рис. 4, б). По теореме синусов, применённой к $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_1BC_1$ и $\triangle A_1B_1C$, имеем:

$$\frac{z}{\sin \beta} = \frac{b-y}{\sin \gamma}, \quad \frac{x}{\sin \gamma} = \frac{c-z}{\sin \alpha}, \quad \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{a-x}{\sin \beta}, \quad (1)$$

а по теореме синусов, применённой к $\triangle ABC$, получаем ещё такие соотношения

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}. \quad (2)$$

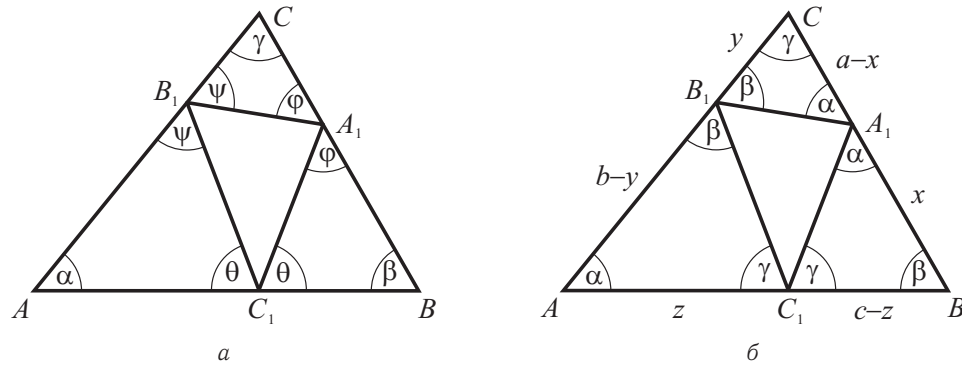


Рис. 4

Найдём x из системы линейных уравнений (1). Последовательно исключая y и z из этой системы, получаем:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}(a-x), & b-y &= \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}z \implies b = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}(a-x) + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}z, \\ z &= \frac{b \sin \beta - (a-x) \sin \alpha}{\sin \gamma}, & c-z &= \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}x \implies c = \frac{b \sin \beta + 2x \sin \alpha - a \sin \alpha}{\sin \gamma}. \end{aligned}$$

Выражаем x из последнего соотношения

$$x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} c - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} b \right).$$

Из соотношений (2) следует, что $\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{c}{a}$ и $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}$. Поэтому окончательно имеем:

$$x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{c^2}{a} - \frac{b^2}{a} \right).$$

Теперь найдём длины отрезков, на которые сторону BC делит опущенная на неё из вершины A высота (рис. 5, а). По теореме Пифагора, $h^2 + a_c^2 = c^2$ и $h^2 + a_b^2 = b^2$. Вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$a_c^2 - (a - a_c)^2 = c^2 - b^2 \implies 2a \cdot a_c - a^2 = c^2 - b^2 \implies a_c = \frac{1}{2} \left(a + \frac{c^2}{a} - \frac{b^2}{a} \right).$$

Так как длины отрезков x и a_c совпадают, то точка A_1 является основанием высоты, опущенной из A на BC . Аналогично доказывается, что точки B_1 и C_1 находятся в основаниях двух других высот треугольника ABC . Таким образом, если в треугольнике (как было показано, необходимо остроугольном) есть бильiardная траектория, то она соединяет основания высот треугольника.

Теперь проверим, что треугольник с вершинами в основаниях высот остроугольного треугольника даёт решение задачи Фаньяно. Прямоугольные треугольники MB_1C и MC_1B подобны (рис. 5, б), поскольку их углы при вершине M являются вертикальными. Поэтому $\frac{B_1M}{CM} = \frac{C_1M}{BM}$. Значит, подобны



и $\triangle B_1MC_1$ и $\triangle CMB$ — их углы при вершине M равны как вертикальные, а прилегающие стороны пропорциональны. Значит, величины углов этих треугольников при вершинах B_1 и C равны, но тогда равны и углы $\angle CBA$ и $\angle C_1B_1A$, дополняющие эти углы до прямых. Равенство $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$ доказывается аналогично. Так как $\angle CB_1A_1 = \angle C_1B_1A$, то отражение траектории $A_1B_1C_1$ в точке B_1 является билиардным. Аналогично рассматривая остальные вершины $\triangle A_1B_1C_1$ получаем, что $A_1B_1C_1$ — трёхзвенная билиардная траектория.

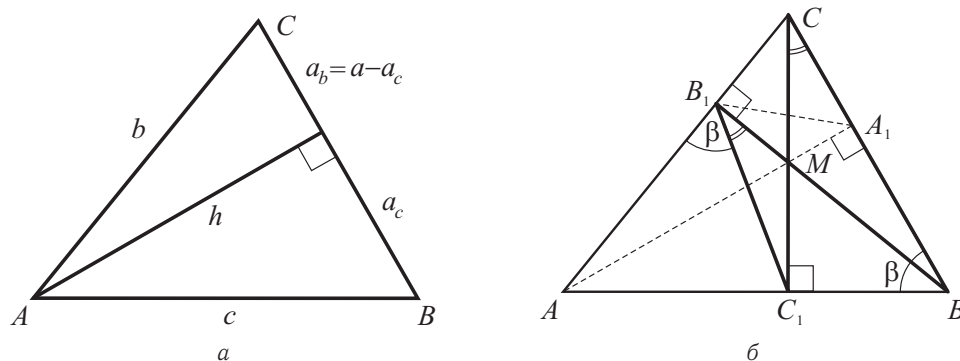


Рис. 5

Легко видеть, что в произвольном прямоугольном треугольнике существуют шестизвенные билиардные траектории. Они начинаются перпендикулярно гипотенузе, и каждое их звено проходит на периоде два раза в противоположных направлениях (рис. 6, а, б).

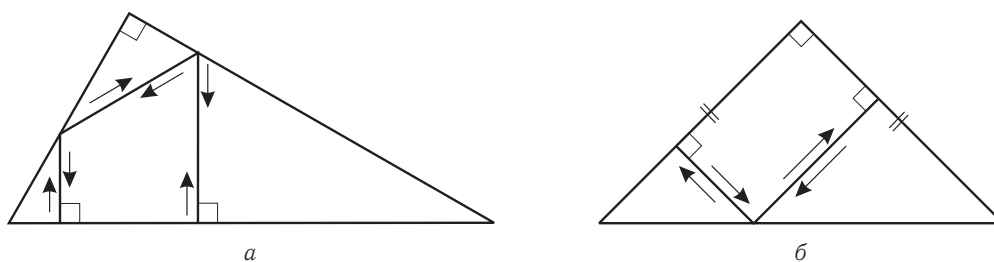


Рис. 6

Если прямоугольный треугольник не является равнобедренным, то билиардных траекторий с меньшим количеством звеньев не существует. Неизвестно, существуют ли периодические билиардные траектории в произвольном тупоугольном треугольнике [3, с. 119].

Библиографический список

1. Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды. М. : Наука, 1990. 288 с.
2. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. М. : Наука, 1964. 264 с.
3. Табачников С. Геометрия и бильярды. М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 180 с.

Remarks on Fagnano Problem

A. I. Rubinstein¹, D. S. Telyakovskii²

¹National Research Nuclear University MEPhI, 31, Kashirskoe ave., Moscow, 115409, Russia; Moscow State Forest University, 1, 1st Institutskaya str., Mytishi, Moscow region, 141005, Russia, Rubinshtein_aleksandr@mail.ru

²National Research Nuclear University MEPhI, 31, Kashirskoe ave., Moscow, 115409, Russia, Dtelyakov@mail.ru

We provide two solutions to the Fagnano problem on finding a three-link billiard trajectory in a triangle.

Key words: billiard trajectory, Fagnano problem.



References

- Gal'perin A., Countrymen A. N. *Matematicheskie billiardy* [Mathematical Billiards]. Moscow, Nauka, 1990, 288 p. (in Russian).
- Rademacher H., Toeplitz O. *Chisla i figury* [Numbers and Shapes]. Moscow, Nauka, 1964, 264 p. (in Russian).
- Tabachnikov S. *Geometry and Billiards*. Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 2005. 176 p. (Rus. ed.: Tabachnikov S. *Geometriia i billiardy*. Moscow, Izhevsk, NITs «Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika», Izhevskii institut komp'iuternykh issledovani, 2011, 180 p.)

УДК 517.538.52+517.538.53

КВАДРАТИЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А. П. Старовойтов

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории функций, Гомельский государственный университет им. Фр. Скорины, Беларусь, Svoitov@gsu.by

В работе изучаются экстремальные свойства квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^2$ с произвольными различными действительными показателями $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна и Ф. Вилонского.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита – Паде I типа, квадратичные аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства, метод перевала.

ВВЕДЕНИЕ

Диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) и $(n - 1)$ -го порядка для набора экспонент $\{e^{p z}\}_{p=0}^k$ называют $k + 1$ многочлен $A_0(z), A_1(z), \dots, A_k(z)$ степени не выше $n - 1$, для которых

$$\sum_{p=0}^k A_p(z) e^{p z} = O(z^{kn+n-1}), \quad z \rightarrow 0, \quad (1)$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_p(z)$ тождественно не равен нулю.

Такие аппроксимации введены в рассмотрение Эрмитом (С. Hermite) [1] в 1883 г. Ещё раньше, при доказательстве трансцендентности числа e , Эрмит [2] определил $k + 1$ многочлен $Q_{kn}(z), P_{kn}^1(z), \dots, P_{kn}^k(z)$ степени, не выше kn , для которых

$$R_n^j(z) := Q_{kn}(z) e^{j z} - P_{kn}^j(z) = O(z^{kn+n+1}), \quad z \rightarrow 0. \quad (2)$$

Набор рациональных функций $\pi_{kn, kn}^j(z; e^{j\xi}) = P_{kn}^j(z)/Q_{kn}(z), j = 1, 2, \dots, k$ принято называть диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде II типа (German type) n -го порядка (по поводу терминологии см. [3]). В [4] показано, что с помощью аппроксимаций Эрмита – Паде I типа можно также доказать трансцендентность числа e .

В одномерном случае ($k = 1$) общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1), (2), принадлежит Паде (H. Padé) [5], а построенные в обоих случаях многочлены совпадают. В многомерном случае ($k \geq 2$) систематическое изучение аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов связано с появлением работы К. Малера (K. Mahler) [4] (об участии других авторов в создании формальной теории см., например, [6]). Оба типа аппроксимаций Эрмита – Паде, явно различные в многомерном случае, имеют множество приложений [6–8].

При $k = 1$ приходим к классическим аппроксимациям Паде. В этом случае $A_0(z) = -P_{n-1}^1(z), A_1(z) = Q_{n-1}(z)$, и хорошо известно, что аппроксимации Паде $\pi_{n, n}(z; e^\xi) = P_n^1(z)/Q_n(z)$ обладают рядом экстремальных свойств, в частности, являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями e^z .

В данной статье рассматриваются квадратичные ($k = 2$) диагональные аппроксимации Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_0 z}, e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$ с произвольными различными комплексными



показателями $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Для многочленов $A_n^0(z), A_n^1(z), A_n^2(z)$ степени не выше $n - 1$, удовлетворяющих условиям

$$R_n(z) = \sum_{p=0}^2 A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{3n-1}), \quad z \rightarrow 0, \quad (3)$$

найдена асимптотика остаточного члена $R_n(z)$ и установлено, что при действительных $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ нормированные и преобразованные соответствующим образом многочлены $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^2$ являются решением следующей экстремальной задачи: *при заданном n найти многочлены $a_n^p(z)$, $p = 0, 1, 2$, степени, не выше n , со старшим коэффициентом многочлена $a_n^2(z)$ равным 1, реализующие минимум в следующем равенстве*

$$E_n = E_n(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; \rho) = \min_{\{a_n^p(z)\}_{p=0}^2} \left\| \sum_{p=0}^2 a_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right\|_{\rho},$$

где $\|h\|_{\rho} = \max\{|h(z)| : z \in D_{\rho}\}$, а $D_{\rho} = \{z : |z| \leq \rho\} \subset \mathbb{C}$.

Поскольку найти точные значения E_n не представляется возможным, конечной целью задачи является нахождение асимптотики убывания последовательности $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$.

При $k = 2$ и $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \dots, k$, для $\rho = 1$ данная задача была поставлена и решена П. Борвейном (P. В. Borwein) [9]. Ф. Вилонский (F. Wielonsky) [10] исследовал случай, когда $k \geq 2$ и $\rho < \pi/k$. Ранее при $k = 1$ решение близких по содержанию задач для круга и отрезка получено Л. Трефезеном (L. N. Trefethen) [11] и Д. Браессом (D. Braess) [12].

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть $\rho < \pi/(\lambda_2 - \lambda_0)$, а $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ — произвольные действительные числа. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$E_n \sim \frac{n!(\lambda_2 - \lambda_0)^{n+1}(\lambda_2 - \lambda_1)^{n+1}}{(3n + 2)!} \rho^{3n+2}.$$

Теорема 1 является обобщением теорем П. Борвейна [9] и Ф. Вилонского [10] при $k = 2$. Она получена в результате исследования асимптотических свойств интегральных представлений остаточного члена $R_n(z)$ и многочленов $A_n^p(z)$. Асимптотические свойства остаточных членов $R_n^j(z)$ аппроксимаций Эрмита – Паде II типа с помощью метода Лапласа описаны в работе автора [13] (см. также работу [14]). В данном случае применяется метод перевала в сочетании с методом Лапласа. Технология их применения является результатом дальнейшего совершенствования методов работ [10, 13].

Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что без существенных изменений оно проходит и в общем случае, т. е. для набора экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=1}^k$ при произвольных действительных λ_p и $k \geq 2$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом и следующем параграфах считаем, что $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — произвольные различные комплексные числа, упорядоченные по модулю, т. е. $|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2|$.

Полиномы $A_n^0(z), A_n^1(z), A_n^2(z)$, удовлетворяющие равенствам (3), могут быть получены решением линейной системы $3n - 1$ однородных уравнений с $3n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p — граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а C_{∞} — граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа λ_j , $j = 0, 1, 2$ принадлежат его внутренности. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad 0 \leq p \leq 2, \quad (4)$$

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\infty}} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad (5)$$

где $\varphi(\xi) = (\xi - \lambda_0)(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2)$, удовлетворяют (3) и всем другим условиям.



Далее будем рассматривать нормированную функцию $R_n(z)$, полученную делением $R_n(z)$ на старший коэффициент многочлена $A_n^2(z)$. Чтобы найти его численное значение, продифференцируем равенство (4) $n - 1$ раз при $p = 2$. В результате получим, что численное значение старшего коэффициента $A_n^2(z)$ совпадает со значением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i (n - 1)!} \int_{C_2} \frac{d\xi}{(\xi - \lambda_2)(\xi - \lambda_0)^n(\xi - \lambda_1)^n},$$

который вычисляется по интегральной формуле Коши, и равно

$$(\lambda_2 - \lambda_0)^{-n}(\lambda_2 - \lambda_1)^{-n}/(n - 1)!.$$

При изучении асимптотики интеграла в (5) будем использовать известные методы комплексного анализа. Приведем без доказательств в удобном для нас виде необходимые утверждения (см. [15, гл. 7, §43, теорема 2; §45, теорема 2]).

Утверждение 1 (метод Лапласа). Пусть $f(x), S(x)$ — непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, при этом $S(x)$ принимает только действительные значения, а $f(x)$ может быть комплекснозначной. Полагаем

$$I_n = \int_a^b f(x) e^{nS(x)} dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ в точке $x_0 \in (a, b)$ имеет абсолютный максимум на отрезке $[a, b]$, т. е. $S(x) < S(x_0), x \neq x_0, S''(x_0) \neq 0$, и функции $f(x), S(x)$ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда при $n \rightarrow +\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$I_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{nS(x_0)} (f(x_0) + O(1/n)).$$

Утверждение 2 (метод перевала). Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ регулярны в некоторой области G , содержащей кусочно-гладкую кривую γ и

$$F_n = \int_{\gamma} f(\xi) e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Предположим, что $\max \{ \operatorname{Re} S(\xi) : \xi \in \gamma \}$ достигается только в точке z_0 , которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала, т. е. $S'(z_0) = 0, S''(z_0) \neq 0$. Считаем также, что в окрестности z_0 контур γ проходит через оба сектора (см. [15, гл. 7, §45], в которых $\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0)$). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}} e^{nS(z_0)} (f(z_0) + O(1/n)). \tag{6}$$

Выбор ветви корня в (6) определяется из условий

$$\arg \sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 — угол между касательной к кривой l в точке z_0 и положительным направлением действительной оси, а l — линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку z_0 , т. е. для l в окрестности z_0 выполняются условия: $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ при $z \in l$; $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ при $z \in l, z \neq z_0$.

2. АСИМПТОТИКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА $R_n(z)$

Теорема 2. Равномерно по z на компактах в \mathbb{C} при $n \rightarrow \infty$

$$R_n(z) \sim \frac{e^{\frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}{3} z}}{(3n - 1)!} z^{3n-1}. \tag{7}$$



Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\lambda_0 = 0$. Общий случай сводится к рассматриваемому, если равенство (3) умножить на $e^{-\lambda_0 z}$.

В интеграле (5) перейдём к новой переменной, полагая $z = nw$. Тогда

$$R_n(nw) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{d\xi}{[e^{-\xi w} \varphi(\xi)]^n}. \quad (8)$$

Будем искать критические точки функции $\psi(\xi) = e^{-\xi w} \varphi(\xi)$, т. е. нули $\psi'(\xi)$. Они являются корнями уравнения

$$w\varphi(\xi) = \varphi'(\xi),$$

которое можно записать в виде

$$w = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - \lambda_1} + \frac{1}{\xi - \lambda_2}. \quad (9)$$

Поскольку контур C_∞ должен охватывать все точки λ_j , то будем искать критическую точку, достаточно удалённую от нуля. В этом случае, сделав замену $\zeta = 1/\xi$, представим правую часть равенства (9) в виде степенного ряда

$$w = 3\zeta + (\lambda_1 + \lambda_2)\zeta^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\zeta^3 + \dots \quad (10)$$

Обращая ряд (10) с использованием формул Бурмана – Лагранжа [15, гл. 5, §31] и возвращаясь к прежней переменной ξ , получим зависимость поведения критической точки ξ_0 от значений w , которые с учётом замены $z = nw$ находятся в достаточно малой окрестности нуля:

$$\xi_0 = \frac{3}{w} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} + O(w). \quad (11)$$

Определим теперь контур C_∞ так, чтобы он проходил через ξ_0 , охватывал все точки $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, а модуль функции $\psi(\xi)$ достигал на C_∞ своего наименьшего значения в единственной точке ξ_0 . С этой целью рассмотрим линии уровня функций $\varphi(\xi)$ и $e^{-w\xi}$, проходящие через точку ξ_0 :

$$L = \{\xi \in \mathbb{C} : |\varphi(\xi)| = |\varphi(\xi_0)|\},$$

$$L_1 = \{\xi \in \mathbb{C} : |e^{-w\xi}| = |e^{-w\xi_0}|\}.$$

L является лемниской, а L_1 — прямой, проходящей через ξ_0 и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол, равный $\arg(i/w)$. Уравнение лемнискаты L запишем в виде

$$|\varphi(\xi_0) + \frac{\varphi'(\xi_0)}{1!}(\xi - \xi_0) + \dots + \frac{\varphi'''(\xi_0)}{3!}(\xi - \xi_0)^3| = |\varphi(\xi_0)|.$$

Опираясь на предыдущее соотношение и равенство $\varphi'(\xi_0) = w\varphi(\xi_0)$, легко показать, что угловой коэффициент касательной к L в точке ξ_0 равен $\operatorname{tg}(\arg(i/w))$. Таким образом, L_1 является касательной к L в точке ξ_0 .

При достаточно малых $|w|$ лемниската L является [16, гл. 3, §3.3] жордановой аналитической кривой и охватывает все нули $\varphi(\xi)$, а прямая L_1 разбивает плоскость на две полуплоскости, одна из которых (полуплоскость Ω) содержит L . В полуплоскости Ω модуль $e^{-w\xi}$ больше модуля $e^{-w\xi_0}$. Лемниската L разбивает плоскость на две связные области — внутреннюю и внешнюю. Если ξ принадлежит внешней области, то $|\varphi(\xi)| > |\varphi(\xi_0)|$.

Учитывая возможность деформирования контура интегрирования в интеграле (8), построим теперь необходимый контур C_∞ . Для этого возьмём отрезок с центром в точке ξ_0 , принадлежащий L_1 , и соединим его концы гладкой жордановой кривой, которая лежит в полуплоскости Ω и охватывает L . Построенный контур C_∞ соответствует всем необходимым требованиям.

В силу принципа аргумента при обходе точкой ξ контур C_∞ в положительном направлении приращение аргумента функции $\varphi(\xi)$ равно 6π . Поэтому C_∞ можно разбить на два контура $C_\infty^j, j = 0, 1$, так, что на контуре C_∞^1 приращение аргумента функции $\varphi(\xi)$ равно 5π . Без ограничения общности можно считать, что ξ_0 лежит внутри контура C_∞^0 , и $-\pi/2 \leq \arg \varphi(\xi) \leq \pi/2$ при $\xi \in C_\infty^0$. В противном случае, правую часть равенства (8) следует умножить и разделить на $e^{i\alpha}$, где действительное число α выбирается так, чтобы $-\pi/2 \leq \arg(e^{i\alpha}\varphi(\xi)) \leq \pi/2$, и далее вместо $\varphi(\xi)$ рассматривать функцию $e^{i\alpha}\varphi(\xi)$.



Определим функцию $S(\xi)$, полагая

$$S(\xi) = w\xi - \ln \varphi(\xi), \quad \xi \in C_\infty^0,$$

где $\ln \varphi(\xi) = \ln |\varphi(\xi)| + i \arg_0 \varphi(\xi)$ — однозначная ветвь логарифма, для которой $\arg_0 \varphi(\xi) \in [-\pi/2, \pi/2]$. $S(\xi)$ является сужением на $C_\infty^0 \subset G$ однозначной аналитической функции $S(\xi)$, определённой в односвязной области G , не содержащей нулей $\varphi(\xi)$. В этой области

$$S'(\xi) = w - \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = w - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi - \lambda_1} - \frac{1}{\xi - \lambda_2},$$

$$S''(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_1)^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_2)^2},$$

и $S'(\xi_0) = 0, S''(\xi_0) \neq 0$.

Заметим, что для всех $\xi \in C_\infty$

$$\frac{1}{|\psi(\xi)|^n} = e^{n(\operatorname{Re}(w\xi) - \ln |\varphi(\xi)|)},$$

а функция $\operatorname{Re}(w\xi) - \ln |\varphi(\xi)|$ достигает на C_∞ своего наибольшего значения в единственной точке ξ_0 . Введём в рассмотрение интегралы

$$F_j(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty^0} \frac{d\xi}{[e^{-\xi w} \varphi(\xi)]^n}, \quad j = 0, 1.$$

Рассуждая как при доказательстве неравенств (8) в [15, гл. 7, § 45], нетрудно показать, что

$$|F_1(n)| \leq c \left| e^{n(S(\xi_0) - \delta)} \right|, \tag{12}$$

где $c, \delta > 0$ — постоянные. Интеграл $F_0(n)$ представляется в виде

$$F_0(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty^0} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Так как $\max\{\operatorname{Re} S(\xi) : \xi \in C_\infty^0\}$ достигается только в точке ξ_0 , которая является внутренней точкой контура C_∞^0 и простой точкой перевала, то для нахождения асимптотики этого интеграла применим утверждение 2. В результате получим:

$$F_0(n) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(\xi_0)}} e^{nS(\xi_0)} (1 + O(1/n)).$$

Из неравенств (12) и предыдущего равенства следует, что основной вклад в асимптотику $R_n(nw)$ вносит интеграл $F_0(n)$. Поэтому

$$R_n(nw) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(\xi_0)}} e^{nS(\xi_0)} (1 + O(1/n)). \tag{13}$$

Точка ξ_0 достаточно далеко удалена от нуля. Поэтому

$$S(\xi_0) = w\xi_0 - 3 \ln \xi_0 - \ln\left(1 - \frac{\lambda_1}{\xi_0}\right) - \ln\left(1 - \frac{\lambda_2}{\xi_0}\right) = w\xi_0 + 3 \ln \frac{1}{\xi_0} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\xi_0} + O\left(\frac{1}{\xi_0^2}\right).$$

Отсюда из (11) следует, что

$$S(\xi_0) = 3 + 3 \ln \frac{w}{3} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} w + O(w^2).$$

Тогда

$$e^{nS(\xi_0)} = e^{3n} \left(\frac{w}{3}\right)^{3n} e^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} nw} (1 + O(nw^2)).$$



Если перейти здесь от переменной w к z , то получим

$$e^{nS(\xi_0)} = e^{3n} \left(\frac{z}{3n}\right)^{3n} e^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} z} (1 + O(z^2/n)). \quad (14)$$

Из полученного ранее выражения для $S''(\xi)$ следует, что

$$S''(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0^2} \left(1 + 2\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\xi_0} + O(1/\xi_0^2)\right).$$

Отсюда из (11) находим, что

$$S''(\xi_0) = \frac{w^2}{3} (1 + O(w)),$$

поэтому

$$\sqrt{\frac{-1}{S''(\xi_0)}} = \sqrt{\frac{-3}{w^2}} (1 + O(w)).$$

Учитывая, что для выбранного контура C_∞ угол $\varphi_0 = \arg(i/w)$, переходя к переменной z , окончательно получаем:

$$\sqrt{\frac{-1}{S''(\xi_0)}} = \sqrt{3} \frac{i}{w} (1 + O(w)) = i\sqrt{3} \frac{n}{z} (1 + O(z/n)). \quad (15)$$

Из (13), (14) и (15) следует, что

$$R_n(z) = \sqrt{\frac{3n}{2\pi}} \left(\frac{e}{3n}\right)^{3n} z^{3n-1} e^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} z} (1 + O(1/n)).$$

Отсюда с учётом формулы Стирлинга вытекает справедливость асимптотического равенства (7) для любого комплексного числа z .

Равномерность асимптотики в (7) следует из теоремы Витали [17, гл. 4, § 1] и того, что последовательность функций $(3n-1)! e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z/3} R_n(z)/z^{3n-1}$ равномерно ограничена по модулю на компактах в \mathbb{C} . Действительно,

$$|R_n(nw)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta e^{n(\operatorname{Re}(w\zeta(t)) - \ln|\varphi(\zeta(t))|)} |\zeta'(t)| dt,$$

где контур интегрирования C_∞ прежний и параметризуется вещественным параметром $t \in [\alpha, \beta]$. Если обозначить через $[\alpha_1, \beta_1]$ отрезок, соответствующий параметризации контура C_∞^0 , то при достаточно больших n

$$|R_n(nw)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{n \operatorname{Re} S(\zeta(t))} |\zeta'(t)| dt, \quad (16)$$

Для нахождения асимптотики интеграла в (16) применим утверждение 1. В результате получим, что

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{n \operatorname{Re} S(\zeta(t))} |\zeta'(t)| dt = \sqrt{\frac{-2\pi}{n [\operatorname{Re} S(\zeta(t))]''_{t=t_0}}} e^{n \operatorname{Re} S(\xi_0)} |\zeta'(t_0)| (1 + O(1/n)), \quad (17)$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0) = \xi_0$.

Функция $\operatorname{Re} S(\zeta(t))$ в точке t_0 имеет максимум. Поэтому

$$[\operatorname{Re} S(\zeta(t))]''_{t=t_0} = -|S''(\xi_0)| |\zeta'(t_0)|^2 (1 + O(1/n)) < 0. \quad (18)$$

Из равенств (17) и (18), переходя к переменной z и учитывая соотношения (14), (15), при достаточно больших n получим необходимое неравенство:

$$|R_n(z)| \leq \frac{2|z|^{3n-1}}{(3n-1)!} \left| e^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} z} \right|. \quad \square$$



3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Вслед за Д. Браессом [12] рассмотрим сдвиг аппроксимаций Эрмита – Паде n -го порядка. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ — произвольные действительные числа,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n^p(z) &= n! (\lambda_2 - \lambda_0)^{n+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{n+1} A_{n+1}^p(z - z_n), & 0 \leq p \leq 2, \\ \tilde{R}_n(z) &= n! (\lambda_2 - \lambda_0)^{n+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{n+1} R_{n+1}(z - z_n), & E_n^* = \|\tilde{R}_n\|_\rho, \end{aligned}$$

где

$$z_n = \frac{(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \rho^2}{3(3n + 2)},$$

а множитель $n! (\lambda_2 - \lambda_0)^{n+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{n+1}$ в приведённых выше формулах нормализует многочлен $\tilde{a}_n^2(z)$ так, что его старший коэффициент равен 1.

Справедливость теоремы 1 вытекает из следующих лемм.

Лемма 1. При $n \rightarrow \infty$

$$E_n^* \sim \frac{n! (\lambda_2 - \lambda_0)^{n+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{n+1}}{(3n + 2)!} \rho^{3n+2}. \quad (19)$$

Доказательство. Из теоремы 2 при $n \rightarrow \infty$ имеем, что

$$R_{n+1}(z - z_n) = \frac{e^{\frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}{3}(z - z_n)}}{(3n + 2)!} (z - z_n)^{3n+2} (1 + O(1/n)). \quad (20)$$

Принимая во внимание соотношение

$$(z - z_n)^{3n+2} \sim z^{3n+2} e^{-\frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}{3} \frac{\rho^2}{z}},$$

из (20) для $|z| = \rho$ получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n+1}(z - z_n) \sim \frac{\rho^{3n+2}}{(3n + 2)!}.$$

Отсюда и из определения E_n^* следует (19). □

Лемма 2. При $\rho < \pi/(\lambda_2 - \lambda_0)$ и достаточно больших n $E_n = E_n^*$.

Доказательство. Воспользуемся методом из работы [9]. Достаточно показать, что $E_n^* \leq E_n$ при больших n . Предположим, что это не так. Тогда $E_n < E_n^*$, и, следовательно, найдутся многочлены $a_n^p(z)$, $p = 0, 1, 2$, $\deg a_n^p \leq n$, $a_n^2(z)$ имеет старший коэффициент, равный 1, такие, что

$$\left\| \sum_{p=0}^2 a_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right\| < \left\| \sum_{p=0}^2 \tilde{a}_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right\|.$$

Отсюда и из полученных при доказательстве леммы 1 асимптотических равенств следует, что при достаточно больших n для $|z| = \rho$

$$\left| \sum_{p=0}^2 a_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right| < \left| \sum_{p=0}^2 \tilde{a}_n^p(z) e^{\lambda_p z} \right|.$$

Тогда по теореме Руше функция

$$\sum_{p=0}^2 (a_n^p(z) - \tilde{a}_n^p(z)) e^{\lambda_p z}$$

имеет в D_ρ , по крайней мере, $3n + 2$ нуля. Но это не так. Действительно, рассмотрим многочлены $b_n^p(z) = a_n^p(z) - \tilde{a}_n^p(z)$, $p = 0, 1, 2$. Сумма степеней всех этих многочленов $h \leq 3n - 1$. Известно [18, задача 206.2], что функция $\sum_{p=0}^2 b_n^p(z) e^{\lambda_p z}$ в круге D_ρ может иметь не более чем $h + 2 + (\lambda_2 - \lambda_0)\rho/\pi$ нулей. Поскольку $\rho < \pi/(\lambda_2 - \lambda_0)$, то число таких нулей не больше, чем $3n + 1$. Полученное противоречие доказывает лемму 2. □

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.



Библиографический список

1. *Hermite C.* Sur la généralisation des fractions continues algébriques // *Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A.* 1883. Vol. 21. P. 289–308.
2. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // *C. R. Akad. Sci. (Paris).* 1873. Vol. 77. P. 182–293.
3. *Mahler K.* Perfect systems // *Comp. Math.* 1968. Vol. 19, № 2. P. 95–166.
4. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus // *J. Reine Angew. Math.* 1931. Vol. 166. P. 118–150.
5. *Padé H.* Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonction exponentielle // *Ann. École Norm. Sup. (Paris).* 1899. Vol. 16, № 3. P. 394–426.
6. *Aptekarev A. I., Stahl H.* Asymptotics of Hermite–Padé polynomials // *Progress in Approximation Theory* / eds. A. A. Gonchar, E. B. Saff. N. Y. ; Berlin : Springer-Verlag, 1992. P. 127–167.
7. *Mahler K.* Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms // *Math. Ann.* 1967. Vol. 168. P. 200–227.
8. *Chudnovsky G. V.* Hermite–Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π // *Lecture Notes in Math.* Vol. 925. N. Y. ; Berlin : Springer-Verlag, 1982. P. 299–322.
9. *Borwein P. B.* Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function // *Const. Approx.* 1986. Vol. 62. P. 291–302.
10. *Wielonsky F.* Asymptotics of Diagonal Hermite–Padé Approximants to e^z // *J. Approx. Theory.* 1997. Vol. 90, № 2. P. 283–298.
11. *Trefethen L. N.* The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk // *J. Approx. Theory.* 1984. Vol. 40, № 4. P. 380–384.
12. *Braess D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x // *J. Approx. Theory.* 1984. Vol. 40, № 4. P. 375–379.
13. *Старовойтов А. П.* Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера // *Проблемы физики, математики и техники.* 2013. № 1(14). С. 81–87.
14. *Аптекарев А. И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика.* 1981. № 1. С. 68–74.
15. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1989. 477 с.
16. *Walsh J. L.* Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Publ. by the Amer. Math. Soc., 1960. 508 p.
17. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. Т. 1. М. : Наука, 1967. 486 с.
18. *Pólya G., Szegő G.* Problems and Theorems in Analysis. Vol. 1. Berlin : Springer-Verlag, 1972. 419 p.

Quadratic Hermite – Padé Approximants of Exponential Functions

A. P. Starovoitov

Gomel State University, 106, Sovetskaya str., Gomel, 246019, Belarus, Svoitov@gsu.by

The paper deals with extremal properties of diagonal quadratic Hermite–Padé approximants of type I for exponential system $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^2$ with arbitrary real $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Proved theorems complement known results of P. Borwein, F. Wielonsky.

Key words: Hermite–Padé approximants of type I, quadratic Hermite–Padé approximants, asymptotic equality, saddle-point method.

This work was supported by the Ministry of education of the Republic of Belarus.

References

1. *Hermite C.* Sur la généralisation des fractions continues algébriques. *Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A.* 1883, vol. 21, pp. 289–308.
2. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle. *C. R. Akad. Sci. (Paris)*, 1873, vol. 77, pp. 18–293.
3. *Mahler K.* Perfect systems. *Comp. Math.*, 1968, vol. 19, no. 2, pp. 95–166.
4. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. *J. Reine Angew. Math.*, 1931, vol. 166, pp. 118–150.
5. *Padé H.* Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonction exponentielle. *Ann. École Norm. Sup. (Paris)*, 1899, vol. 16, no. 3, pp. 394–426.
6. *Aptekarev A. I., Stahl H.* Asymptotics of Hermite–Padé polynomials. *Progress in Approximation Theory* / eds. A. A. Gonchar, E. B. Saff, New York ; Berlin, Springer-Verlag, 1992, pp. 127–167.
7. *Mahler K.* Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms. *Math. Ann.*, 1967, vol. 168, pp. 200–227.
8. *Chudnovsky G. V.* Hermite–Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π . *Lecture Notes in Math.*, vol. 925. New York ; Berlin, Springer-Verlag, 1982, pp. 299–322.
9. *Borwein P. B.* Quadratic Hermite–Padé approximation to the exponential function. *Const. Approx.*, 1986, vol. 62, pp. 291–302.



10. Wielonsky F. Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z . *J. Approx. Theory*, 1997, vol. 90, no. 2, pp. 283–298.
11. Trefethen L. N. The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk. *J. Approx. Theory*, 1984, vol. 40, no. 4., pp. 380–384.
12. Braess D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x . *J. Approx. Theory*, 1984, vol. 40, no. 4, pp. 375–379.
13. Starovoitov A. P. Hermite – Padé approximants of the system Mittag – Leffler functions. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki*, 2013, no. 1(14), pp. 81–87 (in Russian).
14. Aptekarev A. I. Convergence of rational approximations to a set of exponents. *Russ. Math. [Moscow Univ. Math. Bull.]*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 81–86.
15. Sidorov Yu. V., Fedoruk M. V., Chabounine M. I. *Lektsii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Lectures on the theory of complex variable]. Moscow, Nauka, 1989, 477 p. (in Russian).
16. Walsh J. L. *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*. Publ. by the Amer. Math. Soc., 1960. 508 p.
17. Markushevich A. I. *Teoriia analiticheskikh funktsii* [Theory of Analytical Functions]. Vol. I. Moscow, Nauka, 1967, 486 p. (in Russian).
18. Pólya G., Szegő G. *Problems and Theorems in Analysis*. Vol. 1. Berlin, Springer-Verlag, 1972, 419 p.

УДК 517.51+517.98

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ТИПА УОЛША. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ И ПОПОЛНЕНИЕ

П. А. Терехин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории функции и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, TerekhinPA@info.sgu.ru

Введено и изучено новое понятие аффинной системы функций типа Уолша. На основе теоремы факторизации для операторов, перестановочных с мультисдвигом, установлено, что с каждой аффинной системой типа Уолша однозначно с точностью до унимодулярной постоянной связаны две другие аффинные системы типа Уолша, одна из которых ортонормирована, а другая полна. Показано, что классическая система Уолша является единственной с точностью до унимодулярной постоянной полной и ортонормированной аффинной системой. Приведены примеры полных и отдельно ортонормированных аффинных систем типа Уолша.

Ключевые слова: система Уолша, аффинная система функций, полнота, ортогональность, мультисдвиг, факторизация.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Обозначим через $L_0^2 = L_0^2(0, 1)$ пространство всех вещественно- или комплекснозначных периодических функций $f \in L^2(0, 1)$ с нулевым интегральным средним на периоде:

$$f(t + 1) = f(t), \quad \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Рассмотрим в пространстве L_0^2 линейные операторы W_0 и W_1 , заданные равенствами

$$W_0 f(t) = f(2t), \quad W_1 f(t) = f(2t)w(t),$$

где $w(t)$ — периодическая функция Хаара – Радемахера – Уолша:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, 1/2), \\ -1, & t \in (1/2, 1). \end{cases}$$

Лемма 1. *Операторы $W_0, W_1 : L_0^2 \rightarrow L_0^2$ изометрические, их образы $\text{Im}(W_0)$ и $\text{Im}(W_1)$ ортогональны. Ортогональное дополнение прямой суммы $\text{Im}(W_0) \oplus \text{Im}(W_1)$ является одномерным подпространством, порожденным функцией w .*

Свойства операторов W_0, W_1 , приведенные в лемме 1, проверяются непосредственно и могут быть записаны в следующем виде:

$$W_0^* W_0 = W_1^* W_1 = I, \quad W_0^* W_1 = W_1^* W_0 = 0, \quad W_0 W_0^* + W_1 W_1^* = I - P,$$

где I — тождественный оператор и P — ортопроектор на одномерное подпространство $\text{span}\{w\}$.



Пусть \mathbb{A} — множество всех конечных наборов $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$, $k = 0, 1, \dots$, состоящих из нулей и единиц: $\alpha_\nu = 0$ или 1 , $0 \leq \nu \leq k-1$, включая при $k = 0$ пустой набор. Пусть, далее, $|\alpha| = k$ — длина набора $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ и $\alpha\beta = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \dots, \beta_{l-1})$ — конкатенация наборов $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ и $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{l-1})$.

Укажем на естественную биекцию между множествами \mathbb{A} и \mathbb{N} , при котором набору $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ соответствует натуральное число $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k$. Мы будем пользоваться таким соответствием для замены индекса $x_\alpha = x_n$.

Для каждого набора $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A}$ положим

$$W^\alpha = W_{\alpha_0} \cdots W_{\alpha_{k-1}}$$

— произведение операторов (первым действует оператор $W_{\alpha_{k-1}}$, последним — W_{α_0} ; при $k = 0$ пустое произведение полагаем равным тождественному оператору I).

Пусть, далее, $r_k(t) = w(2^k t)$, $k = 0, 1, \dots$, — система Радемахера.

Для любой функции $f \in L_0^2$ будем иметь:

$$f_\alpha(t) := W^\alpha f(t) = W_{\alpha_0} \cdots W_{\alpha_{k-1}} f(t) = f(2^k t) w^{\alpha_{k-1}}(2^{k-1} t) \cdots w^{\alpha_0}(t) = f(2^k t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t).$$

В частности, для функции $f = w$ семейство $\{w_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ совпадает с системой Уолша $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (без постоянной функции, тождественно равной единице) в нумерации Пэли:

$$w_\alpha(t) = r_k(t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t) = w_n(t), \quad n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k.$$

Определение 1. Семейство функций $\{W^\alpha f\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ назовем *аффинной системой функций типа Уолша*, порожденной функцией $f \in L_0^2$.

Для аффинной системы функций типа Уолша будем использовать обозначения $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ или $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с учетом соответствующей замены индекса.

Следующая операторная структура мультисдвига введена и изучена в статье [1].

Определение 2. Будем говорить, что изометрические операторы W_0 и W_1 , действующие в гильбертовом пространстве H , образуют *мультисдвиг*, если существует вектор $e \in H$ такой, что семейство $\{W^\alpha e\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ является ортонормированным базисом пространства H .

Рассмотренные нами операторы W_0 и W_1 образуют мультисдвиг в пространстве $H = L_0^2$, поскольку для вектора $e = w$ семейство $\{W^\alpha e\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ совпадает с системой Уолша $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, являющейся ортонормированным базисом в $H = L_0^2$. Этот факт будет использован в дальнейшем при изучении свойств аффинных систем функций типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. В частности, в статье [1, § 2] отмечается, что вектор $e \in H$ из определения 2 задан с точностью до постоянного множителя, модуль которого равен единице (короче, с точностью до унимодулярной постоянной), т. е. справедлива

Лемма 2. Если $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ полная и ортонормированная аффинная система типа Уолша, то функции f и w совпадают с точностью до унимодулярной постоянной.

Таким образом, классическая система Уолша $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является единственной с точностью до унимодулярной постоянной полной и ортонормированной аффинной системой. В данной работе на основе теоремы факторизации исследуются свойства полноты и, отдельно, ортонормированности аффинных систем типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Пусть W_0, W_1 — мультисдвиг в гильбертовом пространстве H . Обозначим $H_0 = \text{span}\{W^\alpha e\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ — всюду плотное линейное многообразие в H , состоящее из всех конечных линейных комбинаций элементов ортонормированного базиса $\{W^\alpha e\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$. Для каждого вектора $f \in H$ определим оператор Q_f с областью определения H_0 посредством равенства

$$Q_f \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} c_\alpha W^\alpha e = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} c_\alpha W^\alpha f.$$

Не трудно видеть, что оператор Q_f перестановочен с мультисдвигом:

$$Q_f W_0 = W_0 Q_f, \quad Q_f W_1 = W_1 Q_f.$$



Верно и обратное, всякий перестановочный с мультисдвигом оператор Q с областью определения H_0 имеет вид $Q = Q_f$ для вектора $f = Qe$.

В статье [1, § 4, теорема 4] установлена теорема факторизации для операторов, перестановочных с мультисдвигом, являющаяся обобщенным аналогом канонической факторизации аналитических функций из пространства Харди на внутренний и внешний множители.

Теорема факторизации. Для любого ненулевого вектора $f \in H$ справедливо представление

$$Q_f = Q_\varphi Q_F,$$

где Q_φ — изометрический оператор и Q_F — оператор полного ранга: $\overline{\text{Im}}(Q_F) = H$.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Теорема 1. Для каждой ненулевой функции $f \in L_0^2$, порождающей аффинную систему типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, существует и притом единственная с точностью до унимодулярной постоянной функция $\varphi \in L_0^2$, порождающая ортонормированную аффинную систему типа Уолша $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и такая, что

$$\overline{\text{span}}\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \overline{\text{span}}\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $f \in L_0^2$ и $f \neq 0$. По теореме факторизации существуют функции $\varphi, F \in L_0^2$ такие, что $Q_f = Q_\varphi Q_F$. Так как Q_φ — изометрический оператор с всюду плотной областью определения, то он допускает единственное продолжение до изометрии, определенной на всем пространстве H . Это продолжение будем снова обозначать как Q_φ . По определению оператора Q_φ имеем: $Q_\varphi w_\alpha = \varphi_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbb{A}$. С учетом изометричности Q_φ отсюда получаем ортонормированность системы $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ и равенство $\text{Im}(Q_\varphi) = \overline{\text{span}}\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$. Теперь для получения соотношения (1) осталось проверить равенство

$$\text{Im}(Q_f) = \overline{\text{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}.$$

Сразу заметим, что

$$f_\alpha = Q_f w_\alpha = Q_\varphi Q_F w_\alpha \in \text{Im}(Q_\varphi).$$

Поэтому $\overline{\text{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \subset \text{Im}(Q_\varphi)$. Докажем обратное включение. Для этого снова используем теорему факторизации, а именно всюду плотность образа $\text{Im}(Q_F)$, в силу которой существует последовательность полиномов Уолша:

$$p_N = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} c_{N,\alpha} w_\alpha$$

таких, что $w = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_F p_N$. Поскольку Q_φ — изометрия, то

$$\varphi = Q_\varphi w = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_\varphi Q_F p_N = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_f p_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} c_{N,\alpha} f_\alpha,$$

откуда $\varphi \in \overline{\text{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$. Подпространство $\overline{\text{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ инвариантно относительно мультисдвига $\{W_0, W_1\}$. Следовательно, имеем $\varphi_\alpha \in \overline{\text{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ для всех $\alpha \in \mathbb{A}$, что доказывает включение $\text{Im}(Q_\varphi) = \overline{\text{span}}\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \subset \overline{\text{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$. Соотношение (1) доказано. Единственность функции φ с точностью до унимодулярной постоянной следует из разложения

$$\overline{\text{span}}\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} = \text{span}\{\varphi\} \oplus W_0 \overline{\text{span}}\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} \oplus W_1 \overline{\text{span}}\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}},$$

по которому однозначно восстанавливается одномерное подпространство $\text{span}\{\varphi\}$. \square

Теорема 2. Для каждой ненулевой функции $f \in L_0^2$, порождающей аффинную систему типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, существует и притом единственная с точностью до унимодулярной постоянной функция $F \in L_0^2$, порождающая полную аффинную систему типа Уолша $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и такая, что

$$f_n = Q F_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

где $Q : L_0^2 \rightarrow L_0^2$ — изометрический оператор.

Доказательство. По теореме факторизации имеем: $Q_f = Q_\varphi Q_F$. Так как

$$\overline{\text{span}}\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} = \overline{\text{Im}}(Q_F) = L_0^2,$$



то аффинная система типа Уолша $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является полной в пространстве L_0^2 . Кроме того, полагая, что $Q = Q_\varphi$, будем иметь:

$$f_\alpha = Q_f w_\alpha = Q_\varphi Q_F w_\alpha = Q_\varphi F_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{A},$$

что равносильно соотношению (2). Докажем единственность функции F с точностью до унимодулярной постоянной. Предположим, что наряду с соотношением (2) также справедливо представление

$$f_n = \tilde{Q} \tilde{F}_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где \tilde{Q} — изометрический оператор и $\{\tilde{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — полная аффинная система. Как и при доказательстве теоремы 1, отсюда получаем:

$$\text{Im}(Q) = \overline{\text{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}} = \text{Im}(\tilde{Q}).$$

Тогда найдутся функции $u, v \in L_0^2$, такие, что

$$Qw = \tilde{Q}u, \quad \tilde{Q}w = Qv.$$

Поскольку операторы Q и \tilde{Q} перестановочны с мультисдвигом $\{W_0, W_1\}$ (здесь надо учесть полноту систем $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{\tilde{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$), то для всех $\alpha \in \mathbb{A}$ имеем:

$$Qw_\alpha = \tilde{Q}u_\alpha = \tilde{Q}Q_u w_\alpha, \quad \tilde{Q}w_\alpha = Qv_\alpha = QQ_v w_\alpha.$$

Итак, получили операторные равенства:

$$Q = \tilde{Q}Q_u, \quad \tilde{Q} = QQ_v.$$

Изометричность операторов Q и \tilde{Q} означает, что $Q^*Q = \tilde{Q}^*\tilde{Q} = I$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Q_u^* Q_u &= Q_u^* (\tilde{Q}^* \tilde{Q}) Q_u = (\tilde{Q} Q_u)^* \tilde{Q} Q_u = Q^* Q = I, \\ Q_v^* Q_v &= Q_v^* (Q^* Q) Q_v = (Q Q_v)^* (Q Q_v) = \tilde{Q}^* \tilde{Q} = I. \end{aligned}$$

Таким образом, операторы Q_u и Q_v являются изометрическими. Более того, имеем:

$$Q_u = (\tilde{Q}^* \tilde{Q}) Q_u = \tilde{Q}^* Q, \quad Q_v = (Q^* Q) Q_v = Q^* \tilde{Q},$$

откуда видим, что изометрические операторы Q_u и Q_v друг к другу сопряжены: $Q_u^* = Q_v$. В таком случае, Q_u, Q_v — унитарные операторы и $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}, \{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ — полные ортонормированные аффинные системы. Такие системы совпадают с точностью до унимодулярной постоянной с системой Уолша $\{w_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ согласно лемме 2. Поэтому $Q_u = \varkappa I$, $|\varkappa| = 1$, и $Q_v = \bar{\varkappa} I$. Окончательно находим $Q = \varkappa \tilde{Q}$ и $F = \varkappa F$. \square

Определение 3. Система элементов $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ гильбертова пространства H называется *системой Бесселя*, если существует постоянная B такая, что для любого вектора $h \in H$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(h, f_n)|^2 \leq B \|h\|^2.$$

Следствие 1. В условиях теоремы 2 аффинные системы функций типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ являются или не являются системами Бесселя одновременно.

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу соотношения (2) матрицы Грама рассматриваемых систем совпадают. \square

Замечание 1. Теорема 1 показывает, что каждая аффинная система типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ допускает ортогонализацию с сохранением структуры аффинной системы. Отметим, что результат классической ортогонализации Грама – Шмидта аффинной системы $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ заведомо не будет аффинной системой, за исключением очевидных случаев, когда исходная система $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ изначально является ортогональной.

Подобные вопросы об ортогонализации системы функций с сохранением ее структуры часто возникают в различных задачах математической физики. В качестве примера рассмотрим классический



вопрос об ортогонализации системы целочисленных сдвигов $\{f(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Хорошо известно, что если преобразование Фурье $\widehat{f}(\lambda)$ функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию

$$A \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(\lambda + k)|^2 \leq B$$

для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$ с некоторыми постоянными $0 < A \leq B < \infty$, то функция φ , определяемая равенством

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \frac{\widehat{f}(\lambda)}{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(\lambda + k)|^2\right)^{1/2}},$$

порождает ортонормированную систему сдвигов $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Замечание 2. Теорема 2 показывает, что каждая аффинная система типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ допускает специального вида пополнение с сохранением структуры аффинной системы. При этом исходная система $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является изометрическим образом полной аффинной системы типа Уолша $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в силу соотношения (2). Следствие 1 означает, что такое пополнение также сохраняет свойство бесселевости аффинной системы.

Такие результаты тесно связаны с вопросами продолжения систем функций на более широкое множество, такими как классическая теорема Шура о продолжении [2] и ее обобщения [3–5].

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Примерами ортонормированных аффинных систем функций типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, кроме самой системы Уолша $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, служат аффинные системы, порожденные функциями вида

$$f = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n w_n,$$

где $k = 0, 1, \dots$ фиксировано.

Пример 2. Пусть $\Phi(z)$ — внутренняя аналитическая в единичном круге $D = \{|z| < 1\}$ функция из пространства Харди $H^2(D)$, т. е.

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty,$$

и для некасательных граничных значений $\Phi(e^{it})$ имеем: $|\Phi(e^{it})| = 1$ для почти всех t . Тогда представимая рядом по системе Радемахера $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ функция

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_k$$

порождает ортонормированную аффинную систему типа Уолша $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Пример 3. Пусть функция $f \in L_0^2$ задана своим разложением по системе Уолша:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n.$$

Если выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |c_n|^2 \right)^{1/2} \leq |c_1|,$$

то аффинная система функций типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ полна в пространстве L_0^2 .

Пример 4. Пусть $\mathcal{F}(z)$ — внешняя аналитическая в единичном круге функция из пространства Харди $H^2(D)$, т. е.

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty,$$



и справедливо интегральное представление:

$$\mathcal{F}(z) = \varkappa \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \mathcal{F}(e^{it}) dt\right),$$

где $|\varkappa| = 1$ и $\mathcal{F}(e^{it})$ — граничные значения функции $\mathcal{F}(z)$. Тогда функция

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_k$$

порождает полную в пространстве L_0^2 аффинную систему типа Уолша $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Замечание 3. В обозначениях примеров 2 и 4 заметим, что если функция $f \in L_0^2$ представима в виде суммы ряда по системе Радемахера и по теореме факторизации $Q_f = Q_\varphi Q_F$, то $\mathbf{f}(z) = \Phi(z)\mathcal{F}(z)$ — разложение на внутренний и внешний множители аналитической функции $\mathbf{f}(z)$, соответствующей функции f . Это обстоятельство позволяет указать конструктивный способ ортогонализации и пополнения аффинных систем функций типа Уолша, порождающая функция которых представима рядом по системе Радемахера. Далее, отмеченная связь между факторизацией операторов, перестановочных с мультисдвигом, и канонической факторизацией аналитических функций на внутренний и внешний множители (подробности см. в статье [1]), дает обоснование справедливости утверждений примеров 2 и 4. Наконец, заметим, что утверждение примера 1 проверяется непосредственно, а утверждение примера 3 мы оставляем без доказательства, которое основано на стандартных рассуждениях об устойчивости свойства полноты для близких систем функций.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых (проект МД-1354.2013.1) и при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

Библиографический список

1. Терехин П. А. Мультисдвиг в гильбертовом пространстве // Функци. анализ и его прил. 2005. Т. 39, вып. 1. С. 69–81. DOI: 10.4213/faa32.
2. Schur I. Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen // Math. Z. 1918. Vol. 1, iss. 2–3. P. 183–207. DOI: 10.1007/BF01203611.
3. Новиков С. Я. Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 6. С. 893–903. DOI: 10.4213/mzm3739.
4. Czaja W. Remark on Naimark's duality // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 136, iss. 3. P. 867–871. DOI: 10.1090/S0002-9939-07-09048-X.
5. Терехин П. А. О бесселевых системах в банаховом пространстве // Матем. заметки. 2012. Т. 91, вып. 2. С. 285–296. DOI: 10.4213/mzm7697.

Affine Systems of Walsh Type. Orthogonalization and Completion

P. A. Terekhin

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, TerekhinPA@info.sgu.ru

The new notion of affine system of Walsh type is introduced and studied. We proved results about orthogonalization and completion of affine systems of Walsh type with preservation of structure of affine systems.

Key words: Walsh system, affine system, completeness, orthogonality, multishift, factorization.

This work was supported by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of young Russian scientists (project МД-1354.2013.1) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00102).

References

1. Terekhin P. A. Multishifts in Hilbert spaces. *Funct. Anal. Appl.*, 2005, vol. 39, iss. 1, pp. 57–67. DOI: 10.1007/s10688-005-0017-5.
2. Schur I. Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen. *Math. Z.*, 1918, vol. 1, iss. 2–3, pp. 184–207. DOI: 10.1007/BF01203611.
3. Novikov S. Ya. Bessel sequences as projections of orthogonal systems. *Math. Notes*, 2007, vol. 81, no. 6, pp. 800–809. DOI: 10.1134/S0001434607050276.
4. Czaja W. Remark on Naimark's duality. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2008, vol. 136, no. 3, pp. 867–871. DOI: 10.1090/S0002-9939-07-09048-X.
5. Terekhin P. A. On Bessel Systems in a Banach Space. *Math. Notes*, 2012, vol. 91, no. 2, pp. 272–282. DOI: 10.1134/S0001434612010270.



УДК 517.51

ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ СЛУЧАЙ РЕГУЛЯРНОСТИ В ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Д. В. Фуфаев

Студент механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, fufaevdv@rambler.ru

В работе обобщаются теоремы Лебега и Иессена – Марцинкевича – Зигмунда о дифференцировании неопределенных интегралов в \mathbb{R}^N на случай промежуточной регулярности системы множеств. Рассматриваются приложения полученных результатов к разложению в ряд Фурье – Хаара и орторекурсивному разложению по системе брусков.

Ключевые слова: ряды Фурье, орторекурсивные разложения, интеграл Лебега, система Хаара.

ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальная теорема Лебега гласит, что соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x)$$

выполняется для почти всех $x \in \mathbb{R}^N$, если f — локально интегрируемая, по Лебегу, функция, где $B(x, r)$ — шар радиуса r с центром в точке x , а $|\cdot|$ — мера Лебега, причем вместо шаров можно брать систему множеств более общего вида, удовлетворяющих условию регулярности. Позже Иессен, Марцинкевич и Зигмунд получили схожий результат уже для произвольных систем множеств, но при этом потребовалось наложить дополнительные условия на функцию f . Таким образом, охваченными оказались случай произвольных систем множеств и случай регулярных систем. Имеет смысл рассмотреть промежуточный случай регулярности системы множеств с целью получить промежуточные результаты.

Определение 1. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Ее *неопределенным интегралом* назовем функцию множества:

$$F(I) := \int_I f(x) dx,$$

где I — измеримое множество, а интеграл понимается в смысле Лебега по мере Лебега.

Под бруском Δ будем понимать множество $(a^1; b^1) \times (a^2; b^2) \times \dots \times (a^N; b^N)$ (где $-\infty < a^i < b^i < +\infty$), в которое, быть может, добавлены некоторые точки границы или содержащие всю свою границу. В дальнейшем в качестве множеств I будем рассматривать только брусы.

Их диаметром будем называть число $\text{diam } \Delta = \sqrt{\sum_{k=1}^N (b^k - a^k)^2}$. Пусть $\Xi = \{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность (или система) брусков. Будем рассматривать системы брусков, обладающие свойством Витали, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}^N$ и любого $\varepsilon > 0$ существует брусок $\Delta \in \Xi$ такой, что $x \in \Delta$, $\text{diam } \Delta < \varepsilon$.

Скажем, что система Ξ регулярная, если существует такое число $L > 0$, называемое параметром регулярности системы, что для любого бруска $\Delta = (a^1; b^1) \times \dots \times (a^N; b^N)$, $\Delta \in \Xi$, справедливо неравенство:

$$\frac{\max\{b^1 - a^1, \dots, b^N - a^N\}}{\min\{b^1 - a^1, \dots, b^N - a^N\}} \leq L < \infty.$$

Например, в качестве системы брусков можно взять все брусы, вершины которых имеют рациональные координаты, а в качестве регулярной системы — те из этих брусков, для которых выполнено условие регулярности для некоторого числа L .

Определение 2. Интеграл функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ называется *дифференцируемым по системе брусков Ξ в точке x* , если существует следующий предел:

$$D_{\Xi} F(x) := \lim_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} f(y) dy < \infty,$$



где предел берется по всем $\Delta \ni x, \Delta \in \Xi$. Число $D_{\Xi}F(x)$ называется *производной интеграла F по системе Ξ в точке x* . Будем говорить, что интеграл функции *слабо дифференцируем* (в точке x), если он дифференцируем по любой регулярной системе брусков и *сильно дифференцируем*, если он дифференцируем по произвольной системе. Очевидно, сильная дифференцируемость влечет слабую.

Также введем:

$$\overline{D}_{\Xi}F(x) := \overline{\lim}_{\substack{\text{diam } \Delta \rightarrow 0 \\ x \in \Delta \in \Xi}} \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} f(y) dy, \quad \underline{D}_{\Xi}F(x) := \underline{\lim}_{\substack{\text{diam } \Delta \rightarrow 0 \\ x \in \Delta \in \Xi}} \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} f(y) dy,$$

тогда дифференцируемость будет означать равенство верхнего и нижнего пределов.

Давно известны следующие теоремы (см. [1, гл. IV, § 6, теорема 3] и [1, гл. IV, § 13]):

Теорема 1. Пусть функция $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда $D_{\Xi}F(x) = f(x)$ для почти всех точек $x \in \mathbb{R}^N$, где Ξ — любая регулярная система брусков.

Теорема 2. Пусть функции $f, f \ln^{N-1}(|f| + 1) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда $D_{\Xi}F(x) = f(x)$ для почти всех точек $x \in \mathbb{R}^N$, где Ξ — любая система брусков.

Определение 3. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^N), \Xi = \{\Delta\}$ — регулярная система брусков в \mathbb{R}^N . Тогда *регулярной функцией Харди – Литтлвуда* функции f назовем следующую функцию f^{β} :

$$f^{\beta}(x) := \sup_{\Xi \ni \Delta \ni x} \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} |f(x)| dx.$$

Замечание. Не трудно проверить, что введенная функция Харди – Литтлвуда эквивалентна кубической функции Харди – Литтлвуда (см. [2, с. 14]) в том смысле, что каждая оценивается через другую с постоянной, зависящей лишь от размерности и параметра регулярности L .

Определим функцию распределения для функции f^{β} : $\lambda(a) = \mu\{x \in \mathbb{R}^N : |f^{\beta}(x)| > a\}$. Для нее выполнено следующее равенство:

$$\int_{X: f^{\beta}(x) > \varepsilon} |f^{\beta}(x)| dx = - \int_{\varepsilon}^{\infty} a d\lambda(a). \tag{1}$$

Лемма 1 [2, с. 15–17]. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда для любого $a > 0$

$$\lambda(a) \leq \frac{C}{a} \int_{x: |f(x)| > a/2} |f(x)| dx,$$

где C — константа, зависящая только от размерности N .

Заметим, что введенные выше определения и теоремы можно сформулировать и в случае, когда функция f определена на одном брусе, например, на $[0, 1]^N$, и система Ξ полностью лежит внутри него. Введем обозначение $I := [0, 1]$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 3 (многомерное неравенство Харди – Литтлвуда). Пусть $f, f \ln(f + 1) \in L^1(I^N), f \geq 0$, и задано $\varepsilon > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_{I^N} f^{\beta}(x) dx \leq A \int_{I^N} f(x) \ln(f(x) + 1) dx + B \int_{I^N} f(x) dx + \varepsilon,$$

где A и B суть константы, зависящие от ε , но не от f .

Доказательство. Разобьем функцию на ее большую и малую части и используем равенство (1):

$$\int_{I^N} f^{\beta}(x) dx = \int_{x: f^{\beta}(x) \leq \varepsilon} f^{\beta}(x) dx + \int_{x: f^{\beta}(x) > \varepsilon} f^{\beta}(x) dx \leq \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{\infty} a d\lambda(a) \leq \varepsilon + \int_{\varepsilon}^{\infty} \lambda(a) da + \lambda(\varepsilon)\varepsilon.$$

В последнем неравенстве проинтегрировали по частям и использовали тот факт, что $\lambda \geq 0$. Оценим слагаемые, используя лемму 1:

$$\lambda(\varepsilon)\varepsilon \leq \frac{C}{\varepsilon} \int_{x: f(x) > \varepsilon/2} f(x) dx \leq C \|f\|_{L^1},$$



$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} \lambda(a) da &\leq C \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{a} \int_{x:f(x)>a/2} f(x) dx da = C \int_{x:|f(x)|>\varepsilon/2} \int_{\varepsilon}^{2f(x)} \frac{f(x)}{a} da dx = \\ &= C \int_{x:|f(x)|>\varepsilon/2} f(x)(\ln(2f(x)) - \ln \varepsilon) dx \leq C \|f \ln(f+1)\|_{L^1} + (\ln 2 + |\ln \varepsilon|) \|f\|_{L^1}; \end{aligned}$$

итак, получили нужное неравенство с $A = C$ и $B = C(1 + \ln 2 + |\ln \varepsilon|)$. \square

Наложим промежуточные условия на систему брусов, чтобы получить промежуточные условия на функцию. Пусть \mathbb{R}^N представлено в виде произведения D сомножителей: $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{M_1 + \dots + M_D}$ (где M_i — натуральные числа), и пусть $\Xi = \{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\Delta_k^1 \times \Delta_k^2 \times \dots \times \Delta_k^D\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $\Delta_k^i = (a_k^{i,1}; b_k^{i,1}) \times (a_k^{i,2}; b_k^{i,2}) \times \dots \times (a_k^{i,M_i}; b_k^{i,M_i})$, причем все системы $\Xi_i = \{\Delta_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ — регулярны (при этом система Ξ не обязана быть регулярной). Назовем такую систему D -регулярной.

Можно ввести эквивалентное определение: пусть P_j — ортогональный проектор на подпространство \mathbb{R}^{M_j} в пространстве \mathbb{R}^N . Тогда система Ξ D -регулярна, если регулярна каждая из систем $P_j(\Xi)$. Через P_j^\perp будем обозначать оператор $Id - P_j$, т. е. проектор на ортогональное дополнение к \mathbb{R}^{M_j} .

Теорема 4. Пусть функции $f, f \ln^{D-1}(|f| + 1) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда $D_\Xi F(x) = f(x)$ для почти всех точек $x \in \mathbb{R}^N$, где Ξ — любая D -регулярная система брусов.

Доказательство. Докажем по индукции. Случай $D = 1$ — результат теоремы 1. Пусть $D > 1$. Предположим, что для всех $k < D$ утверждение доказано, докажем для $k = D$.

Очевидно, достаточно рассмотреть функцию f на брусе I^N , причем можно предположить, что эта функция не отрицательна.

Обозначим через x набор первых M_1 координат, через y — последних $N - M_1$, тогда функцию f можно обозначать как $f(x, y)$.

Положим $g_n(x, y) = [f(x, y)]_n$ — срезки функции f (см., например, [3, определение 5.16]). Далее, $h_n = f - g_n$. Построим функции h_n^β по первым M_1 координатам, а именно пусть брусы из Ξ имеют вид $\Delta_1 \times \Delta_2$, где размерность Δ_1 равна M_1 , тогда

$$h_n^\beta(x, y) = \sup_{P_1(\Xi) \ni \Delta_1 \ni x} \frac{1}{|\Delta_1|} \int_{\Delta_1} h_n(u, y) du.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По теореме 3 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_{I^{N-M_1}} \int_{I^{M_1}} h_n^\beta(x, y) dx dy &\leq A \int_{I^{N-M_1}} \int_{I^{M_1}} h_n(x, y) \ln(h_n(x, y) + 1) dx dy + \\ &+ B \int_{I^{N-M_1}} \int_{I^{M_1}} h_n(x, y) dx dy + \frac{1}{2} \varepsilon^2, \end{aligned}$$

из которого, в частности, следует, что $h^\beta(x, y) \in L^1(I^N)$.

Интегралы в правой части неравенства стремятся к нулю, поэтому существует такое число K , что (для краткости $h = h_K, g = g_K$) $\int_{I^{N-M_1}} \int_{I^{M_1}} h^\beta(x, y) dx dy < \varepsilon^2$.

Пусть E — множество таких точек $(x_0, y_0) \in I^N$, что

1) $\int_{I^{N-M_1}} h^\beta(x_0, t) \ln^{D-2}(h^\beta(x_0, t) + 1) dt < \infty$ (интегрирование здесь идет по последним координатам),

2) неопределенный интеграл $\tilde{H}(\Delta) = \int_{\Delta} h^\beta(x_0, t) dt$, где Δ — брус из системы $P_1^\perp(\Xi)$, имеет в точке y_0 производную $h^\beta(x_0, y_0)$ по системе брусов $P_1^\perp(\Xi)$.

Ниже мы докажем, что $\int_{I^N} h^\beta(x, y) \ln^{D-2}(h^\beta(x, y) + 1) dx dy < \infty$ (заметим, что в случае $D = 2$ это утверждение сразу следует из многомерного неравенства Харди — Литтлвуда, поэтому доказательство будет проводится для $D > 2$). Тогда множество E будет иметь меру 1, так как по теореме Фубини условие 1) будет выполняться для п. в. $x_0 \in I^{M_1}$, а условие 2) выполняется для п. в. $y_0 \in I^{N-M_1}$, как только выполнено условие 1), по предположению индукции.

Вспомним следующее неравенство Йенсена для кратного интеграла, которое следует из неравенства для функции одной переменной (см., например, [4, гл. X, § 5, теорема 6]): для выпуклой функции ϕ и интегрируемой на брусе B функции f справедливо неравенство

$$\phi\left(\int_B f(x) dx\right) \leq \frac{1}{|B|} \int_B \phi(|B|f(x)) dx,$$

заметим, что функция $\phi(x) = x \ln^n(x + 1)$ — выпукла для $x \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$.



По определению функции Харди – Литтлвуда для любого $\varepsilon > 0$ существует брус $B(x, y) \subset I^{M_1}$ (зависящий, вообще говоря, от (x, y)) такой, что

$$\begin{aligned} & \int_{I^N} h^\beta(x, y) \ln^{D-2}(h^\beta(x, y) + 1) dx dy \leq \\ & \leq \int_{I^N} \left(\frac{1}{|B(x, y)|} \int_{B(x, y)} h(u, y) du + \varepsilon \right) \ln^{D-2} \left(\frac{1}{|B(x, y)|} \int_{B(x, y)} h(u, y) du + \varepsilon + 1 \right) dx dy = \\ & = \int_{I^N} \left(\int_{B(x, y)} \frac{h(u, y) + \varepsilon}{|B(x, y)|} du \right) \ln^{D-2} \left(\int_{B(x, y)} \frac{h(u, y) + \varepsilon}{|B(x, y)|} du + 1 \right) dx dy \leq \end{aligned}$$

применим неравенство Йенсена для $\phi(x) = x \ln^{D-2}(x + 1)$ и $f(u) = \frac{h(u, y) + \varepsilon}{|B(x, y)|}$, очевидно, интегрируемой:

$$\begin{aligned} & \leq \int_{I^N} \frac{1}{|B(x, y)|} \int_{B(x, y)} |B(x, y)| \frac{h(u, y) + \varepsilon}{|B(x, y)|} \ln^{D-2} \left(|B(x, y)| \frac{h(u, y) + \varepsilon}{|B(x, y)|} + 1 \right) du dx dy = \\ & = \int_{I^N} \frac{1}{|B(x, y)|} \int_{B(x, y)} (h(u, y) + \varepsilon) \ln^{D-2}(h(u, y) + \varepsilon + 1) du dx dy \leq \\ & \leq \int_{I^N} [(h(x, y) + \varepsilon) \ln^{D-2}(h(x, y) + \varepsilon + 1)]^\beta dx dy. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и по неравенству Харди – Литтлвуда для некоторого $\gamma > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{I^N} h^\beta(x, y) \ln^{D-2}(h^\beta(x, y) + 1) dx dy \leq \int_{I^D} [h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1)]^\beta dx dy \leq \\ & \leq A \int_{I^N} h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) \ln[h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) + 1] dx dy + \\ & \quad + B \int_{I^N} h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) dx dy + \gamma. \end{aligned}$$

Второй интеграл, очевидно, сходится.

Оценим первый интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{I^N} h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) \ln[h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) + 1] dx dy \leq \\ & \leq \int_{I^N} h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) \ln[h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) + h(x, y) + \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) + 1] dx dy = \\ & = \int_{I^N} h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) \ln[(h(x, y) + 1)(\ln^{D-2}(h(x, y) + 1) + 1)] dx dy = \\ & = \int_{I^N} h(x, y) \ln^{D-1}(h(x, y) + 1) dx dy + \int_{I^N} h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) \ln[\ln^{D-2}(h(x, y) + 1) + 1] dx dy. \end{aligned}$$

Первый из этих интегралов сходится по условию теоремы.

Оценим второй интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{I^N} h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) \ln[\ln^{D-2}(h(x, y) + 1) + 1] dx dy \leq \\ & \leq \int_{I^N} h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) \ln[(\ln(h(x, y) + 1) + 1)^{D-2}] dx dy = \\ & = (D - 2) \int_{I^N} h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) \ln[\ln(h(x, y) + 1) + 1] dx dy \leq \\ & \leq (D - 2) \int_{I^N} h(x, y) \ln^{D-2}(h(x, y) + 1) \ln(h(x, y) + 1) dx dy = \\ & = (D - 2) \int_{I^D} h(x, y) \ln^{D-1}(h(x, y) + 1) dx dy, \end{aligned}$$



а этот интеграл сходится. Таким образом, показали, что

$$\int_{I^N} h^\beta(x, y) \ln^{D-2}(h^\beta(x, y) + 1) dx dy < \infty.$$

Следовательно, мера множества E равна 1.

Обозначим через H, F, G неопределенные интегралы функций h, f, g соответственно. Пусть (x_0, y_0) — точка множества E и $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ — произвольный брус из системы Ξ , содержащий эту точку. Имеем:

$$\frac{H(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{1}{|\Delta_2|} \int_{\Delta_2} \frac{1}{|\Delta_1|} \int_{\Delta_1} h(u, v) du dv \leq \frac{1}{|\Delta_2|} \int_{\Delta_2} h^\beta(x_0, v) dv.$$

Полагая $\text{diam } \Delta \rightarrow 0$, получаем $\overline{D}_\Xi H(x_0, y_0) \leq h^\beta(x_0, y_0)$. Таким образом, так как (x_0, y_0) — произвольная точка множества меры 1, то получаем $0 \leq \overline{D}_\Xi H(x_0, y_0) \leq \varepsilon$ всюду, кроме, быть может, множества меры меньшей, чем ε (например, по неравенству Чебышева). С другой стороны, так как функция g ограничена, ее неопределенный интеграл дифференцируем почти всюду. Поэтому

$$0 \leq \overline{D}_\Xi F(x_0, y_0) - \underline{D}_\Xi F(x_0, y_0) \leq \varepsilon \quad (2)$$

всюду, кроме, быть может, множества меры меньшей, чем ε . В силу произвольности ε , неравенство (2) обращается в равенство почти всюду, что и требовалось доказать. \square

3. ПРИМЕНЕНИЯ

Данный результат может использоваться, например, при изучении сходимости почти всюду разложений интегрируемых функций по системам, для которых есть смысл вводить свойство регулярности, подобное изложенному выше. Рассмотрим два примера, в которых этот результат используется непосредственно: разложение в кратный ряд Фурье по системе Хаара и орторекурсивное разложение по системе характеристических функций брусков.

Рассмотрим разложение в ряд Фурье по (ортонормированной) системе функций Хаара, а именно по системе функций

$$\chi_{\mathbf{n}}(x) := \chi_{n_1}(x_1) \chi_{n_2}(x_2) \cdots \chi_{n_N}(x_N),$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, а $\chi_k(x)$ — k -я функция Хаара на отрезке $[0, 1]$, $k = 0, 1, \dots$ (см. [5]). Будем рассматривать разложение по подпоследовательностям индексов, являющихся степенями двойки, то есть $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N) = (2^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, 2^{m_N})$. Тогда частичные суммы разложения будут иметь следующий вид:

$$S_{\mathbf{n}}(x) = \frac{1}{2^{-m_1} 2^{-m_2} \dots 2^{-m_N}} \int_{(i_1-1)2^{-m_1}}^{i_1 2^{-m_1}} \int_{(i_2-1)2^{-m_2}}^{i_2 2^{-m_2}} \dots \int_{(i_N-1)2^{-m_N}}^{i_N 2^{-m_N}} f(y) dy \quad (3)$$

при $(i_k - 1)2^{m_k} < x_k \leq i_k 2^{m_k}$, $i_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Это выражение можно интерпретировать как отношение интеграла по брусу с длинами ребер 2^{-m_k} , содержащему точку x , к мере этого бруса. В этом случае условие регулярности брусков, по которым идет интегрирование, можно переформулировать как условие ограниченного возрастания системы индексов m_k . А именно рассмотрим возрастающий мультииндекс $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ (возрастание означает, что $\min_{1 \leq i \leq N} n_i \rightarrow \infty$). Назовем его возрастающим ограничено, если $\sup_{1 \leq i, j \leq N} \frac{n_i}{n_j} \leq L < \infty$, и возрастающим D -ограничено, если все мультииндексы $P_j(\mathbf{n})$ возрастают ограничено (как индексы размерности M_j) (действие оператора проекции на \mathbb{Z}_+^N является ограничением его действия на \mathbb{R}^N). Тогда D -ограниченное суммирование ряда Фурье — Хаара будет означать D -регулярность системы брусков, по которым идет интегрирование в (3). Таким образом, доказали следующее утверждение:

Теорема 5. Пусть функции $f, f \ln^{D-1}(|f| + 1) \in L(I^N)$. Тогда частичные суммы ряда Фурье — Хаара D -ограничено суммируются к f почти всюду.

Напомним определение орторекурсивного разложения. Пусть H — пространство со скалярным определением над полем \mathbb{R} или \mathbb{C} , $\{e_k\}$ — конечная или счетная система ненулевых элементов H , и $f \in H$.



Определение 4. Рекурсивными коэффициентами Фурье элемента f по системе $\{e_k\}$ называются числа \hat{f}_k , задаваемые следующим образом:

$$1) \hat{f}_1 = (f, e_1) \|e_1\|^{-2};$$

$$2) \text{ если определены } \hat{f}_k \text{ при } k = 1, \dots, n, \text{ то определим } n\text{-й остаток ряда как } r_n(f) = f - \sum_{k=1}^n \hat{f}_k e_k,$$

и следующий коэффициент $\hat{f}_{n+1} = (r_n(f), e_{n+1}) \|e_{n+1}\|^{-2}$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k$ называется рекурсивным рядом Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}$.

Систему брусов Ξ будем называть удовлетворяющей условию вложенности (или — системой с вложением), если для любых $\Delta_i, \Delta_j \in \Xi$ из $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$ и $i < j$ следует $\Delta_j \subset \Delta_i$. Рассмотрим орторекурсивное разложение функции $f \in L(\mathbb{R}^N)$ по системе характеристических функций брусков системы Ξ , т. е. по системе $\{\chi_k(x)\} = \{\chi_{\Delta_k}(x)\}$.

Лемма 2 [6]. Пусть Ξ — система с вложением. Тогда для любой локально интегрируемой функции частичная сумма рекурсивного ряда Фурье имеет вид

$$1) S_n(x) = 0, \text{ если ни один из } \Delta_i \text{ с номером } i \leq n \text{ не содержит точки } x;$$

$$2) S_n(x) = \frac{1}{|\Delta_k|} \int_{\Delta_k} f(x) dx \text{ иначе. Здесь } k = \max\{k = 1, \dots, n : \Delta_k \ni x\}.$$

Подробнее об орторекурсивных разложениях по системе характеристических функций брусков изложено в [6].

Теорема 6. Пусть функции $f, f \ln^{D-1}(|f| + 1)$ локально интегрируемы на области $G \subset \mathbb{R}^N$, $S_n(x)$ — частичные суммы орторекурсивного разложения по системе характеристических функций брусков D -регулярной системы с вложением $\Xi = \{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда $S_n(x)$ сходятся к f для почти всех $x \in G$.

Доказательство. Учитывая явный вид частичной суммы разложения, сходимость ее в точке $x \in \mathbb{R}^N$ равносильна дифференцируемости неопределенного интеграла функции f в этой точке по системе Ξ . По теореме 2 он дифференцируем для почти всех $x \in \mathbb{R}^N$, поэтому разложение сходится к f почти всюду. \square

Автор выражает благодарность профессору Т. П. Лукашенко за постановку задачи и консультации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417) и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1096.2014.1).

Библиографический список

1. Сакс С. Теория интеграла. М. : Факториал Пресс, 2004. 496 с.
2. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М. : Мир, 1973. 342 с.
3. Лукашенко Т. П., Скворцов В. А., Солодов А. П. Обобщенные интегралы. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 280 с.
4. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. СПб. : Лань, 2008. 560 с.
5. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М. : АФЦ, 1999. 560 с.
6. Белоусов К. В., Лукашенко Т. П. О некоторых свойствах орторекурсивных разложений функций многих переменных по системе характеристических функций брусков // Совр. проблемы математики и механики. 2011. Т. 6, № 1. С. 52–60.

The Intermediate Case of Regularity in the Problem of Differentiation of Multiple Integrals

D. V. Fufaev

Moscow State University, Department of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gori, GSP-1, Moscow, 119991, Russia, fufaevdv@rambler.ru

The paper deals with generalization of Lebesgue and Jessen – Marcinkiewicz – Zygmund theorems of the differentiation of multiple integrals for the intermediate case of regularity of the system of sets. The application of the result to the Fourier-Haar series and to orthorecursive expansions with respect to system of indicators of multi-dimensional intervals is considered.

Key words: Fourier series, orthorecursive expansions, Lebesgue integral, Haar system.



This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-01-00417) and by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of leading scientific schools (project no. НШ-1096.2014.1).

References

1. Saks S. *Teoriia integrala* [Theory of the integral]. Moscow, Faktorial Press, 2004, 496 p. (in Russian).
2. Stein I. *Singuliarnye integraly i differentsial'nye svoistva funktsii* [Singular integrals and differential properties of functions]. Moscow, Mir, 1973, 342 p. (in Russian).
3. Lukashenko T. P., Skvortsov V. A., Solodov A. P. *Obobshchennye integraly* [Generalized integrals]. Moscow, Knizhnyi dom «LIBROKOM», 2010, 280 p. (in Russian).
4. Natanson I. P. *Teoriia funktsii veshchestvennoi peremennoi* [Theory of functions of a real variable]. S.-Peterburg, Lan', 2008. 560 p. (in Russian).
5. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal series*. Translations of Math. Monographs, vol. 75, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1989. (Rus. ed.: Kashin B. S., Saakyan A. A. *Ortogonal'nye riady*. Moscow, AFC, 1999, 560 p.).
6. Belousov K. V., Lukashenko T. P. О некотorykh svoistvakh ortorekursivnykh razlozhenii funktsii mnogikh peremennykh po sisteme kharakteristicheskikh funktsii brusov [On some properties autorecording expansions of functions of many variables by system characteristic functions beams]. *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki* [Modern problems of mathematics and mechanics], 2011, vol. 6, no. 1, pp. 52–60 (in Russian).

УДК 517.538

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ $\{\sin x \sin kx\}$ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

И. И. Шарапудинов

Доктор физико-математических наук, заведующий отделом математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, sharapud@mail.ru

В настоящей статье вводятся двумерные специальные ряды по системе $\{\sin x \sin kx\}$. Показано, что эти ряды выгодно отличаются от двумерных косинус-рядов Фурье тем, что их частичные суммы вблизи границы квадрата $[0, \pi]^2$ обладают значительно лучшими аппроксимативными свойствами, чем суммы Фурье. Приводится оценка скорости сходимости частичных сумм специального ряда к функциям $f(x, y)$ из пространства четных 2π -периодических по каждой переменной непрерывных функций.

Ключевые слова: специальные ряды по системе $\{\sin x \sin kx\}$, двумерные ряды, покусочная аппроксимация.

ВВЕДЕНИЕ

Представление функций в виде рядов по тем или иным ортонормированным системам с целью последующего их приближения частичными суммами выбранного ортогонального ряда является, пожалуй, одним из самых часто применяемых подходов в теории приближений и ее приложениях. Наряду с задачами математической физики, для решения которых указанный подход является традиционным, появились и продолжают появляться все новые важные задачи, для решения которых также все чаще применяются методы, основанные на представлении функций (сигналов) в виде рядов по подходящим ортонормированным системам (см., например, [1–9]). При этом часто возникает такая ситуация, когда функция (сигнал, временной ряд, изображение и т. д.) $f = f(t)$ задана на достаточно длинном промежутке $[0, T]$ и нам требуется разбить этот промежуток на части $[a_j, a_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, m$), рассмотреть отдельные фрагменты функции, определенные на этих частичных отрезках, представить их в виде рядов по выбранной ортонормированной системе и аппроксимировать каждый такой фрагмент частичными суммами соответствующего ряда. Такая ситуация является типичной для задач, связанных с решением нелинейных дифференциальных уравнений численно-аналитическими методами [4, 6], обработкой временных рядов и изображений и других [5–7], в которых возникает необходимость разбить заданный ряд данных на части, аппроксимировать каждую часть и заменить приближенно



исходный временный ряд (изображение) функцией, полученной в результате «пристыковки» функций, аппроксимирующих отдельные части. Но тогда в местах «стыка» возникают нежелательные разрывы (артефакты) (см. [8]), которые искажают общий вид временного ряда (изображения). Такая картина непременно возникает при использовании для приближения «кусков» исходной функции сумм Фурье по классическим ортонормированным системам. В работах автора [1, 2] введены некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам Якоби, частичные суммы $\sigma_n^\alpha(f, x)$ которых на концах отрезка $[-1, 1]$ совпадают с исходной функцией $f(x)$, т.е. $\sigma_n^\alpha(f, \pm 1) = f(\pm 1)$. В качестве одного из частных случаев таких рядов возникает ряд вида

$$\Phi(\theta) = a_\Phi(\theta) + \sin \theta \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin k\theta, \tag{1}$$

где

$$a_\Phi(\theta) = \frac{\Phi(0) + \Phi(\pi)}{2} + \frac{\Phi(0) - \Phi(\pi)}{2} \cos \theta, \quad \varphi(\theta) = \Phi(\theta) - a_\Phi(\theta), \quad \varphi_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\tau) \frac{\sin k\tau}{\sin \tau} d\tau.$$

В работе [2] исследованы, в частности, аппроксимативные свойства ряда (1) в пространстве $C_{2\pi}^e$, состоящем из четных непрерывных 2π – периодических функций.

В настоящей статье мы введем двумерные ряды вида (1) и рассмотрим некоторые свойства частичных сумм этих рядов. Пусть $f(x, y)$ – четная 2π – периодическая по каждой из переменных x и y и интегрируемая на квадрате $[0, \pi]^2$ функция, которая в точках $(i\pi, j\pi)$, $i, j \in \mathbb{Z}$ принимает конечные значения. Положим

$$S(f) = S(f)(u, v) = f(u, v) - \frac{f(0, v) + f(\pi, v)}{2} - \frac{f(0, v) - f(\pi, v)}{2} \cos u, \tag{2}$$

$$H(f) = H(f)(u, v) = f(u, v) - \frac{f(u, 0) + f(u, \pi)}{2} - \frac{f(u, 0) - f(u, \pi)}{2} \cos v, \tag{3}$$

$$O(f) = O(f)(u, v) = S(u, v) - \frac{S(u, 0) + S(u, \pi)}{2} - \frac{S(u, 0) - S(u, \pi)}{2} \cos v, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \Theta(f) = \Theta(f)(u, v) = & \frac{f(0, 0) - f(0, \pi) - f(\pi, 0) + f(\pi, \pi)}{4} \cos u \cos v + \\ & + \frac{f(0, 0) + f(0, \pi) - f(\pi, 0) - f(\pi, \pi)}{4} \cos u + \frac{f(0, 0) - f(0, \pi) + f(\pi, 0) - f(\pi, \pi)}{4} \cos v + \\ & + \frac{f(0, 0) + f(0, \pi) + f(\pi, 0) + f(\pi, \pi)}{4} \end{aligned} \tag{5}$$

и заметим, что

$$f(x, y) = \Theta(f)(x, y) + O(f)(x, y) + A(f)(x) + B(f)(x) \cos y + c(f)(y) + D(f)(y) \cos x,$$

где

$$\begin{aligned} A(f)(u) &= \frac{S(f)(u, 0) + S(f)(u, \pi)}{2}, & B(f)(u) &= \frac{S(f)(u, 0) - S(f)(u, \pi)}{2}, \\ C(f)(u) &= \frac{H(f)(0, v) + H(f)(\pi, v)}{2}, & D(f)(u) &= \frac{H(f)(0, v) - H(f)(\pi, v)}{2}. \end{aligned}$$

Определим следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} o_{k,l}(f) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi O(f)(u, v) \frac{\sin ku \sin lv}{\sin u \sin v} du dv, \\ a_k(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi A(f)(u) \frac{\sin ku}{\sin u} du, & b_k(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi B(f)(u) \frac{\sin ku}{\sin u} du, \\ c_l(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi C(f)(u) \frac{\sin lv}{\sin v} dv, & d_l(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D(f)(u) \frac{\sin lv}{\sin v} dv, \end{aligned}$$



и рассмотрим ряды:

$$O(f)(x, y) \sim \sin x \sin y \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} o_{k,l}(f) \sin kx \sin ly,$$

$$A(f)(x) \sim \sin x \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \sin kx, \quad B(f)(x) \sim \sin x \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) \sin kx,$$

$$C(f)(y) \sim \sin y \sum_{l=1}^{\infty} c_l(f) \sin ly, \quad D(f)(y) \sim \sin y \sum_{l=1}^{\infty} d_l(f) \sin ly.$$

Тогда мы можем сопоставить функции $f(x, y)$ следующий специальный ряд:

$$f(x, y) \sim \Theta(f)(x, y) + \sin x \sin y \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} o_{k,l}(f) \sin kx \sin ly +$$

$$+ \sin x \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) + b_k(f) \cos y) \sin kx + \sin y \sum_{l=1}^{\infty} (c_l(f) + d_l(f) \cos x) \sin ly. \quad (6)$$

Ряд (6) будем называть двумерным специальным рядом по системе $\{\sin x \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. В настоящей работе исследованы аппроксимативные свойства таких рядов. Показано, что специальные ряды вида (6) выгодно отличаются от двумерных косинус-рядов Фурье тем, что их частичные суммы вида

$$S_{n,m}^{\nu,\mu}(f) = S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x, y) = \Theta(f)(x, y) + \sin x \sin y \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} o_{k,l}(f) \sin kx \sin ly +$$

$$+ \sin x \sum_{k=1}^{\nu-1} (a_k(f) + b_k(f) \cos y) \sin kx + \sin y \sum_{l=1}^{\mu-1} (c_l(f) + d_l(f) \cos x) \sin ly \quad (7)$$

вблизи границы квадрата $[0, \pi]^2$ обладают значительно лучшими аппроксимативными свойствами, чем суммы Фурье вида

$$S_{n,m}(f)(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_{k,l}(f) \cos kx \cos ly. \quad (8)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, сопоставить оценку для функции Лебега $L_{n,m}^{\nu,\mu}(x, y)$ частичных сумм $S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x, y)$ вида (7), полученную в настоящей работе, с хорошо известной оценкой функции Лебега сумм Фурье $S_{n,m}(f)(x, y)$ вида (8).

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ $\{\sin x \sin kx\}$

Прежде всего покажем, что частичная сумма $S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)$ специального ряда (6) вида (7) является проектором на подпространство четных тригонометрических полиномов вида

$$T_{n,m}^{\nu,\mu}(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m p_{k,l} \cos kx \cos ly + \sum_{k=n+1}^{\nu} (p_{k,0} + p_{k,1} \cos y) \cos kx +$$

$$+ \sum_{l=m+1}^{\mu} (p_{0,l} + p_{1,l} \cos x) \cos ly, \quad (9)$$

т. е. если $f(x, y) = T_{n,m}^{\nu,\mu}(x, y)$, то

$$S_{n,m}^{\nu,\mu}(f) \equiv T_{n,m}^{\nu,\mu}(x, y). \quad (10)$$

Поскольку $S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)$ – линейный оператор, то тождество (10) будет доказано, если мы покажем, что оно верно для $f(x, y) = \cos kx \cos ly$ с $(k, l) \in G_{n,m}^{\nu,\mu}$, где

$$G_{n,m}^{\nu,\mu} = \{(k, l) : 0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq m\} \cup \{(k, l) : 0 \leq k \leq \nu - n, \mu - m + 1 \leq l \leq \mu\} \cup$$

$$\cup \{(k, l) : 0 \leq \nu - n + 1 \leq l \leq \nu, 0 \leq k \leq 1\}.$$



Пусть, например, k, l — четные, $0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq m$. Положим $k = 2i, l = 2j$. Тогда из (2)–(5) для $f(x, y) = \cos kx \cos ly$ имеем:

$$S(f)(x, y) = \cos ly(\cos kx - 1), \quad H(f)(x, y) = \cos kx(\cos ly - 1), \quad (11)$$

$$A(f)(x) = \frac{S(f)(x, 0) + S(f)(x, \pi)}{2} = \cos kx - 1, \quad B(f)(x) = 0, \quad (12)$$

$$B(f)(y) = \frac{H(f)(0, y) + H(f)(\pi, y)}{2} = \cos ly - 1, \quad D(f)(y) = 0, \quad (13)$$

$$O(f)(x, y) = (\cos kx - 1)(\cos ly - 1), \quad \Theta(x, y) = 1. \quad (14)$$

Из (11)–(14) находим

$$f(x, y) = \cos kx \cos ly = 1 + O(f)(x, y) + A(f)(x) + C(f)(y), \quad (15)$$

причем

$$\frac{A(f)(x)}{\sin x} = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \sin jx, \quad \frac{C(f)(y)}{\sin y} = \sum_{i=1}^{l-1} \beta_i \sin iy, \quad (16)$$

$$\frac{O(f)(x, y)}{\sin x \sin y} = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_j \beta_i \sin jx \sin iy, \quad (17)$$

где

$$\alpha_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi A(f)(t) \frac{\sin jt}{\sin t} dt = a_j(f), \quad \beta_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi C(f)(t) \frac{\sin it}{\sin t} dt = c_i(f), \quad (18)$$

$$\alpha_j \beta_i = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi O(f)(u, v) \frac{\sin ju \sin iv}{\sin u \sin v} du dv = o_{ij}. \quad (19)$$

Кроме того,

$$b_j(f) = 0 \quad (1 \leq j \leq k-1), \quad d_i = 0 \quad (1 \leq i \leq l-1). \quad (20)$$

Из (15)–(20) получаем:

$$f(x, y) = \cos kx \cos ly = \Theta(x, y) + O_{k,l}(f)(x, y) + A_k(f)(x) + C_l(f)(y) = S_{k,l}^{k,l}(f)(x, y).$$

Тем самым мы доказали, что тождество (10) справедливо для $T_{k,l}^{\nu,\mu}(x, y) = \cos kx \cos ly$ в том случае, когда $\nu = k, \mu = l, k, l$ — четные. Его справедливость в остальных случаях $(k, l) \in G_{n,m}^{\nu,\mu}$ проверяется аналогично.

Заметим, что если функция $f(x, y)$ обращается в нуль в точках множества $P = \{(0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)\}$, то $\Theta(x, y) \equiv 0$ и, как следствие, равенство (7) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x, y) &= \sin x \sin y \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} o_{k,l}(f) \sin kx \sin ly + \sin x \sum_{k=1}^{\nu-1} (a_k(f) + b_k(f) \cos y) \sin kx + \\ &+ \sin y \sum_{l=1}^{\mu-1} (c_l(f) + d_l(f) \cos x) \sin ly. \end{aligned} \quad (21)$$

Полагая $R_n(t, s) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin kt \sin ks$, мы получаем из (21) следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x, y) &= \frac{4 \sin x \sin y}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi O(f)(u, v) \frac{R_n(x, u) R_m(y, v)}{\sin u \sin v} du dv + \\ &+ \frac{2 \sin x}{\pi} \int_0^\pi [A(f)(u) + B(f)(u) \cos y] \frac{R_\nu(x, u)}{\sin u} du + \end{aligned}$$



$$+\frac{2 \sin y}{\pi} \int_0^\pi [C(f)(v) + D(f)(v) \cos x] \frac{R_\mu(y, v)}{\sin v} dv. \quad (22)$$

Перейдем к вопросу об аппроксимативных свойствах частичных сумм $S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x, y)$. Прежде всего заметим, что если $T_{n,m}^{\nu,\mu}(x, y)$ — тригонометрический полином вида (9), то в силу (10) имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(x, y) - S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x, y) &= f(x, y) - T_{n,m}^{\nu,\mu}(x, y) + T_{n,m}^{\nu,\mu}(x, y) - S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x, y) = \\ &= f(x, y) - T_{n,m}^{\nu,\mu}(x, y) + S_{n,m}^{\nu,\mu}(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)(x, y). \end{aligned} \quad (23)$$

Если, кроме того, полином $T_{n,m}^{\nu,\mu}(x, y)$ вида (9) совпадает с $f(x, y)$ при $(x, y) \in P$, то из (22) следует, что

$$\begin{aligned} S_{n,m}^{\nu,\mu}(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)(x, y) &= \frac{4 \sin x \sin y}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi O(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)(u, v) \frac{R_n(x, u) R_m(y, v)}{\sin u \sin v} du dv + \\ &+ \frac{2 \sin x}{\pi} \int_0^\pi [A(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)(u) + B(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)(u) \cos y] \frac{R_\nu(x, u)}{\sin u} du + \\ &+ \frac{2 \sin y}{\pi} \int_0^\pi [C(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)(v) + D(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)(v) \cos x] \frac{R_\mu(y, v)}{\sin v} dv. \end{aligned} \quad (24)$$

Обозначим через $C_{2\pi}^{2e}$ пространство четных 2π -периодических по каждой из переменных x и y и непрерывных функций $f = f(x, y)$, для которых определена норма $\|f\| = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |f(x, y)|$, $\mathcal{T}_{n,m}^{\nu,\mu}(f)$ — пространство тригонометрических полиномов вида (9), совпадающих с $f(x, y)$ при $(x, y) \in P$. Тогда в силу (22)–(24) имеем:

$$|S(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)(u, v)| \leq 3\|T_{n,m}^{\nu,\mu} - f\|, \quad |H(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)(u, v)| \leq 3\|T_{n,m}^{\nu,\mu} - f\| \quad (25)$$

и, как следствие,

$$|O(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)(u, v)| \leq 9\|T_{n,m}^{\nu,\mu} - f\|. \quad (26)$$

Аналогично

$$|A(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)| \leq 3\|T_{n,m}^{\nu,\mu} - f\|, \quad |B(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)| \leq 3\|T_{n,m}^{\nu,\mu} - f\|, \quad (27)$$

$$|C(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)| \leq 3\|T_{n,m}^{\nu,\mu} - f\|, \quad |D(T_{n,m}^{\nu,\mu} - f)| \leq 3\|T_{n,m}^{\nu,\mu} - f\|. \quad (28)$$

Пусть $\tilde{E}_{n,m}^{\nu,\mu}(f) = \inf_{T_{n,m}^{\nu,\mu} \in \mathcal{T}_{n,m}^{\nu,\mu}(f)} \|f - T_{n,m}^{\nu,\mu}\|$ — наилучшее приближение функции $f \in C_{2\pi}^{2e}$ тригонометрическими полиномами $T_{n,m}^{\nu,\mu} = T_{n,m}^{\nu,\mu}(x, y) \in \mathcal{T}_{n,m}^{\nu,\mu}(f)$. Из (25) и (26) с учетом (25)–(28) получаем:

$$|f(x, y) - S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x, y)| \leq \tilde{E}_{n,m}^{\nu,\mu}(f)[1 + 9\Lambda_n(x)\Lambda_m(y) + 6\Lambda_\nu(x) + 6\Lambda_\mu(y)], \quad (29)$$

где

$$\Lambda_s(t) = |\sin t| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|R_s(t, u)|}{\sin u} du = |\sin t| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^{s-1} \frac{\sin kt \sin ku}{\sin u} \right| du.$$

Далее, пусть $E_{n,m}^{\nu,\mu}(f)$ — наилучшее приближение функции $f \in C_{2\pi}^{2e}$ тригонометрическими полиномами $T_{n,m}^{\nu,\mu}$ вида (9), не обязательно совпадающими с $f(x, y)$ в точках множества P . Тогда не трудно заметить, что

$$E_{n,m}^{\nu,\mu}(f) \leq \tilde{E}_{n,m}^{\nu,\mu}(f) \leq 2E_{n,m}^{\nu,\mu}(f). \quad (30)$$

Сопоставляя (30) с (29), мы можем записать

$$|f(x, y) - S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x, y)| \leq 2E_{n,m}^{\nu,\mu}(f)[1 + 9\Lambda_n(x)\Lambda_m(y) + 6\Lambda_\nu(x) + 6\Lambda_\mu(y)]. \quad (31)$$

В связи с оценками (29) и (31) возникает задача об исследовании поведения величины $\Lambda_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$ и $-1 \leq t \leq 1$. Эта задача была решена в работе автора [2], в которой получена следующая оценка:

$$\Lambda_n(t) \leq c(1 + \ln(1 + n|\sin t|)). \quad (32)$$



С учетом (32) из (31) мы выводим следующий результат:

Теорема. *Имеет место оценка*

$$|f(x, y) - S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x, y)| \leq c E_{n,m}^{\nu,\mu}(f) [1 + \ln(1 + n|\sin x|) \ln(1 + m|\sin y|) + \ln(1 + \nu|\sin x|) + \ln(1 + \mu|\sin y|)].$$

Библиографический список

1. Шарапудинов И. И. Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства // Матем. заметки. 2013. Т. 94, вып. 2. С. 295–309. DOI: 10.4213/mzm10292.
2. Шарапудинов И. И. Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, № 5. С. 201–224. DOI: 10.4213/im8117.
3. Дедус Ф. Ф., Махортых С. А., Устинин М. Н., Дедус А. Ф. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. М.: Машиностроение, 1999.
4. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.
5. Арушанян О. Б., Волченкова Н. И., Залеткин С. Ф. О вычислении коэффициентов рядов Чебышева для решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2011. Т. 8. С. 273–283.
6. Trefethen L. N. Spectral methods in Matlab. Philadelphia: SIAM, 2000.
7. Trefethen L. N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University, 1996.
8. Mukundan R., Ramakrishnan K. R. Moment functions in image analysis. Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1998.
9. Malvar H. S. Signal processing with lapped transforms. Boston; London: Artech House, 1992.

Some Special Two-dimensional Series of $\{\sin x \sin kx\}$ System and Their Approximation Properties

I. I. Sharapudinov

Daghestan Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, 45, Gadjeva str., Makhachkala, Republic of Dagestan, 367000, Russia, sharapudinov@mail.ru

In present paper there were introduced two-dimensional special series of the system $\{\sin x \sin kx\}$. It's shown that these series have the advantage over two-dimensional cosine Fourier series, because they have better approximation properties near the bounds of the square $[0, 1]^2$. It's given convergence speed estimate of special series partial sums to functions $f(x, y)$ from the space of even 2π -periodic continuous functions.

Key words: special series of system $\{\sin x \sin kx\}$, two-dimensional series, piecewise approximation.

References

1. Sharapudinov I. I. Limit Ultraspherical Series and Their Approximation Properties. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, iss. 2, pp. 281–293. DOI: 10.1134/S0001434613070274.
2. Sharapudinov I. I. Some special series in ultraspherical polynomials and their approximation properties. *Izv. Math.*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 1036–1059. DOI: 10.1070/IM2014v078n05ABEH002718.
3. Dedus F. F., Mahortyh S. A., Ustinin M. N., Dedus A. F. *Obobshchennyi spektral'no-analiticheskii metod obrabotki informatsionnykh massivov. Zadachi analiza izobrazhenii i raspoznavaniia obrazov* [Generalized spectral and analytic method of data arrays processing. Problems of image analysis and pattern recognition]. Moscow, Mashinostroenie, 1999 (in Russian).
4. Pashkovskiy S. Numerical applications of polynomials and Tchebychev series [Vychislitel'nye primeniia mnogochlenov i riadov Chebysheva]. Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).
5. Arushanyan O. B., Volchenskova N. I., Zaletkin S. F. On calculation of Chebyshev series coefficients for the solutions to ordinary differential equations. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2011, vol. 8, pp. 273–283 (in Russian).
6. Trefethen L. N. *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia, SIAM, 2000.
7. Trefethen L. N. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation*. Cornell University, 1996.
8. Mukundan R., Ramakrishnan K. R. *Moment functions in image analysis. Theory and Applications*. Singapore, World Scientific, 1998.
9. Malvar H. S. *Signal processing with lapped transforms*. Boston; London, Artech House, 1992.



УДК 517.538

ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СО СВОЙСТВОМ ПРИЛИПАНИЯ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ $\{\sin x \sin kx\}$ И СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЁВА ВТОРОГО РОДА

И. И. Шарапудинов¹, Г. Г. Акниев²

¹ Доктор физико-математических наук, заведующий отделом математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, sharapud@mail.ru

² Инженер-исследователь отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, hasan.akniyev@gmail.com

В настоящей статье вводятся дискретные ряды со свойством «прилипания» для периодического (по системе $\{\sin x \sin kx\}$) и непериодического (по системе полиномов Чебышёва второго рода $U_k(x)$) случаев. Показано, что дискретные ряды со свойством прилипания по системе $\{\sin x \sin kx\}$ выгодно отличаются от косинус-рядов Фурье тем, что их частичные суммы вблизи границ отрезка $[0, \pi]$ обладают значительно лучшими аппроксимативными свойствами. Аналогично, дискретные ряды со свойством прилипания по системе $U_k(x)$ вблизи границ отрезка $[-1, 1]$ приближают исходную функцию значительно лучше, чем суммы Фурье по полиномам Чебышёва первого рода.

Ключевые слова: теория приближений, ряды Фурье, специальные ряды, покосочная аппроксимация.

ВВЕДЕНИЕ

Представление функций в виде рядов по тем или иным ортонормированным системам с целью последующего их приближения частичными суммами выбранного ортогонального ряда является, пожалуй, одним из самых часто применяемых подходов в теории приближений и ее приложениях. Наряду с задачами математической физики, для решения которых указанный подход является традиционным, появились и продолжают появляться все новые важные задачи, для решения которых также все чаще применяются методы, основанные на представлении функций (сигналов) в виде рядов по подходящим ортонормированным системам (см., например, [1–8]). При этом часто возникает такая ситуация, когда функция (сигнал, временной ряд, изображение и т. д.) $f = f(t)$ задана на достаточно длинном промежутке $[0, T]$ и нам требуется разбить этот промежуток на части $[a_j, a_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, m$), рассмотреть отдельные фрагменты функции, определенные на этих частичных отрезках, представить их в виде рядов по выбранной ортонормированной системе и аппроксимировать каждый такой фрагмент частичными суммами соответствующего ряда. Такая ситуация является типичной для задач, связанных с решением нелинейных дифференциальных уравнений численно-аналитическими методами [4, 6], обработкой временных рядов и изображений и других [5–7], в которых возникает необходимость разбить заданный ряд данных на части, аппроксимировать каждую часть и заменить приближенно исходный временной ряд (изображение) функцией, полученной в результате «пристыковки» функций, аппроксимирующих отдельные части. Но тогда в местах «стыка» возникают нежелательные разрывы (артефакты) (см. [8]), которые искажают общий вид временного ряда (изображения). Такая картина непременно возникает при использовании для приближения «кусков» исходной функции сумм Фурье по классическим ортонормированным системам. В работах [1], [2] введены некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам Якоби, частичные суммы $\sigma_n^\alpha(f, x)$ которых на концах отрезка $[-1, 1]$ совпадают с исходной функцией $f(x)$, т. е. $\sigma_n^\alpha(f, \pm 1) = f(\pm 1)$. В качестве одного из частных случаев таких рядов возникает ряд вида

$$\Phi(\theta) = a_\Phi(\theta) + \sin \theta \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin k\theta,$$

где

$$a_\Phi(\theta) = \frac{\Phi(0) + \Phi(\pi)}{2} + \frac{\Phi(0) - \Phi(\pi)}{2} \cos \theta, \quad \varphi(\theta) = \Phi(\theta) - a_\Phi(\theta), \quad \varphi_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\tau) \frac{\sin k\tau}{\sin \tau} d\tau.$$



В работе [2] исследованы, в частности, аппроксимативные свойства этого ряда в пространстве $C_{2\pi}^e$, состоящем из четных непрерывных 2π -периодических функций. В настоящей работе рассматриваются дискретные аналоги таких рядов и исследованы их аппроксимативные свойства.

Для натурального N рассмотрим сетку узлов $\Lambda_N^I = \left\{ t_j = \frac{(2j+1)\pi}{2N} \right\}_{j=-N}^{N-1}$. Через $l_2(\Lambda_N^I)$ обозначим евклидово пространство дискретных функций $f = f(x)$ вида $f: \Lambda_N^I \rightarrow \mathbb{R}$, в котором определено скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=-N}^{N-1} f(t_j)g(t_j).$$

Не трудно проверить, что функции

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \dots, \cos(N-1)x, \sin(N-1)x, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin Nx$$

образуют в $l_2(\Lambda_N^I)$ полную ортонормированную систему и, как следствие, для произвольного $f \in l_2(\Lambda_N^I)$ имеем представление

$$f(x) = \frac{a_{0,N}}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} a_{k,N} \cos kx + b_{k,N} \sin kx + \frac{b_{N,N}}{2} \sin Nx, \quad (1)$$

где

$$a_{k,N} = \frac{1}{N} \sum_{j=-N+1}^{N-1} f(t_j) \cos kt_j, \quad b_{k,N} = \frac{1}{N} \sum_{j=-N+1}^{N-1} f(t_j) \sin kt_j. \quad (2)$$

Если функция $f(x) \in l_2(\Lambda_N^I)$ является четной, то из (2) следует, что $b_{k,N} = 0$ ($k = 1, \dots, N$), поэтому равенство (1) принимает вид

$$f(x) = \frac{\hat{f}_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \hat{f}_k \cos kx, \quad (3)$$

где

$$\hat{f}_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \cos kt_j, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Отображение $\mathfrak{F}_N^I : l_2(\Lambda_N^I) \rightarrow \mathbb{R}^N$, сопоставляющее функции $f \in l_2(\Lambda_N^I)$ вектор $\mathfrak{F}_N = (\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{N-1})$ и называемое дискретным косинус-преобразованием Фурье, находит многочисленные применения в различных областях приложений, в таких, например, как обработка изображений и временных рядов и др. В приложениях, как правило, вместо полного разложения (3) используют приближенное равенство

$$f(x) \approx \frac{\hat{f}_0}{2} + \sum_{\nu=1}^n \hat{f}_{\nu} \cos k_{\nu}x, \quad n \leq N-1, \quad (4)$$

по следующей схеме. Заданный «длинный» ряд данных разбивается на части, аппроксимируется каждая часть, используя равенство (4). После этого заменяется приближенно исходный ряд функцией, полученной в результате «пристыковки» функций (правых частей равенств вида (4)), аппроксимирующих отдельные части. Но тогда в местах «стыка», как правило возникают нежелательные разрывы, которые искажают общий вид временного ряда (изображения). Указанные разрывы в точках стыка возникают из-за того, что суммы, фигурирующие в правых частях в приближенных равенствах вида (4), заметно отклоняются от исходной функции $f(x)$ в окрестностях точек $x = 0$ и $x = \pi$.

В настоящей работе рассмотрена задача о конструировании аппроксимирующих операторов $\sigma_{n,N}(f) = \sigma_{n,N}(f, x)$, обладающих тем важным свойством, что в окрестностях точек $x = 0$ и $x = \pi$ $\sigma_{n,N}(f, x)$ приближают $f(x)$ значительно лучше, чем на всем отрезке $[0, \pi]$. Кроме того, требуется, чтобы $\sigma_{n,N}(f, x)$ приближали функцию $f(x)$ на всем $[0, \pi]$ не хуже, чем частичные суммы конечного ряда (3) вида

$$S_{n,N}(f, x) = \frac{\hat{f}_0}{2} + \sum_{k=1}^n \hat{f}_k \cos kx. \quad (5)$$



Наконец, $\sigma_{n,N}(f, x)$ ($0 \leq n \leq N$) должен допускать численную реализацию со скоростью, сопоставимой со скоростью численной реализации $S_{n,N}(f, x)$, использующей быстрое преобразование Фурье.

Как будет показано далее, операторы $\sigma_{n,N}(f, x)$, сконструированные в настоящей работе обладают указанными свойствами. Среди отмеченных свойств операторов $\sigma_{n,N}(f, x)$ мы особо выделяем первое, согласно которому $\sigma_{n,N}(f, x)$ приближает $f(x)$ в окрестности точек $x = 0$ и $x = \pi$ значительно лучше, чем по всей сетке Λ_N^I . Это свойство операторов $\sigma_{n,N}(f, x)$ мы будем называть свойством «прилипания» ($\sigma_{n,N}(f, x)$ «прилипает» к $f(x)$ в окрестностях точек $x = 0$ и $x = \pi$).

Именно свойство прилипания операторов $\sigma_{n,N}(f, x)$ в точках $x = 0$ и $x = \pi$ существенно и выгодно отличает их от операторов Фурье (5). Наряду с $\Lambda_N^I = \left\{ t_j = \frac{(2j+1)\pi}{2N} \right\}_{j=-N}^{N-1}$ мы будем рассматривать также сетку $\Lambda_N^{II} = \left\{ \frac{j\pi}{N} \right\}_{j=-N}^{N-1}$ и соответствующее пространство $l_2(\Lambda_N^{II})$. Для $f \in l_2(\Lambda_N^{II})$ мы рассмотрим операторы, сконструированные по той же схеме, что и $\sigma_{n,N}(f, x)$, и исследуем их аппроксимативные свойства.

1. ДИСКРЕТНЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ $\{\sin x \sin kx\}_{k=1}^N$

НА СЕТКАХ $\Omega_N^I = \left\{ \frac{(2j+1)\pi}{2N} \right\}_{j=0}^{N-1}$ и $\Omega_N^{II} = \left\{ \frac{j\pi}{N} \right\}_{j=1}^{N-1}$

Пусть N — натуральное число, $t_j = \frac{(2j+1)\pi}{2N}$, $\Omega_N^I = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$. Через $l_2(\Omega_N^I)$ обозначим евклидово пространство дискретных функций $g = g(x)$ вида $g: \Omega_N^I \rightarrow \mathbb{R}$, в котором для $f, g \in l_2(\Omega_N^I)$ определено скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle_I = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)g(t_j). \tag{6}$$

Заметим, что функцию $f(x) \in l_2(\Omega_N^I)$ можно продолжить на сетку Λ_N^I , полагая $f(-t_{j-1}) = f(t_j)$ для всех $t_j \in \Omega_N^I$. Не трудно проверить, что функции

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin Nx$$

образуют в $l_2(\Omega_N^I)$ ортогональную систему относительно скалярного произведения (6), также при $1 \leq k, n \leq N$ имеют место равенства

$$\frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin kt_j \sin nt_j = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n < N, \\ 2, & k = n = N. \end{cases} \tag{7}$$

Из свойства (7) следует, что система $\{\sin kx\}_{k=1}^N$ является ортогональным базисом в $l_2(\Omega_N^I)$, и, следовательно, произвольная дискретная функция $\varphi \in l_2(\Omega_N^I)$ допустит представление

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k \sin kx, \quad x \in \Omega_N^I, \tag{8}$$

где

$$\varphi_k = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(t_j) \sin kt_j \cdot \begin{cases} 2/N, & k < N, \\ 1/N, & k = N. \end{cases}$$

Рассмотрим сетку Ω_N^I , добавив в нее две точки: $t_{-1} = 0$ и $t_N = \pi$, и обозначим $\bar{\Omega}_N^I = \Omega_N^I \cup \{0, \pi\}$. Пусть дискретная функция f определена на новой сетке $\bar{\Omega}_N^I$, т. е. $f: \bar{\Omega}_N^I \rightarrow \mathbb{R}$. Положим

$$a_f(x) = \frac{f(0) + f(\pi)}{2} + \frac{f(0) - f(\pi)}{2} \cos x, \tag{9}$$

$$g(x) = f(x) - a_f(x), \quad \varphi(x) = \frac{g(x)}{\sin x}, \quad x \in \Omega_N^I.$$



Тогда ряд (8) принимает следующий вид:

$$\frac{g(x)}{\sin x} = \sum_{k=1}^N g_{k,N} \sin kx, \quad x \in \Omega_N^I, \quad (10)$$

где

$$g_{k,N} = \sum_{j=0}^{N-1} g(t_j) \frac{\sin kt_j}{\sin t_j} \cdot \begin{cases} 2/N, & k < N, \\ 1/N, & k = N. \end{cases}$$

Ввиду (9) ряд (10) можно переписать еще так

$$f(x) = a_f(x) + \sin x \sum_{k=1}^N g_{k,N} \sin kx, \quad x \in \overline{\Omega}_N^I. \quad (11)$$

Обозначим через $\sigma_{n,N}(f, x)$ частичную сумму ряда (11) следующего вида:

$$\sigma_{n,N}(f) = \sigma_{n,N}(f, x) = a_f(x) + \sin x \sum_{k=1}^{n-1} g_{k,N} \sin kx, \quad k, n \leq N. \quad (12)$$

Не трудно показать, что для произвольного четного тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка $n \leq N$ справедливо тождество

$$\sigma_{n,N}(T_n, x) \equiv T_n(x), \quad (13)$$

другими словами, $\sigma_{n,N}(f)$ является проектором на подпространство четных тригонометрических полиномов порядка n .

Мы можем трактовать $\sigma_{n,N}(f)$ как линейный оператор, действующий в различных функциональных пространствах. С этой целью введем некоторые обозначения. Пусть

$$\omega_N^I = \left\{ \frac{(2j+1)\pi}{2N} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \mathbb{Z}_\pi = \{j\pi\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \overline{\omega}_N^I = \omega_N^I \cup \mathbb{Z}_\pi.$$

Тогда функцию $f = f(x)$, заданную на конечной сетке $\overline{\Omega}_N^I$, можно продолжить на бесконечную сетку $\overline{\omega}_N^I$ так, чтобы продолженная функция на $\overline{\omega}_N^I$ была четной и 2π -периодической, т. е. при $x \in \overline{\omega}_N^I$ $f(-x) = f(x)$ и $f(x+2\pi) = f(x)$. Множество $C^e(\overline{\omega}_N^I)$ всех таких дискретных функций $f(x)$ является нормированным в пространстве с нормой $\|f\|_N = \max_{x \in \overline{\omega}_N^I} |f(x)| = \max_{x \in \overline{\Omega}_N^I} |f(x)|$. Через $E_{n,N}^\pi(f)$ обозначим

наилучшее приближение функции $f \in C^e(\overline{\omega}_N^I)$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка n , удовлетворяющими условиям $f(0) = T_n(0)$, $f(\pi) = T_n(\pi)$. Пусть $T_n(f) = T_n(f, x)$ — тригонометрический полином порядка n , удовлетворяющий условиям $f(0) = T_n(f, 0)$, $f(\pi) = T_n(f, \pi)$, для которого

$$E_{n,N}^\pi(f) = \|f - T_n(f)\|_N. \quad (14)$$

Далее, с учетом (13) имеем:

$$f(x) - \sigma_{n,N}(f, x) = f(x) - T_n(f, x) + T_n(f, x) - \sigma_{n,N}(f, x) = f(x) - T_n(f, x) + \sigma_{n,N}(T_n(f) - f, x).$$

Отсюда и из (14) находим

$$|f(x) - \sigma_{n,N}(f, x)| \leq E_{n,N}^\pi(f) + |\sigma_{n,N}(T_n(f) - f, x)|. \quad (15)$$

Теперь обратимся к равенству (12), из которого в силу того что $f(0) = T_n(0)$, $f(\pi) = T_n(\pi)$,

$$\sigma_{n,N}(T_n(f) - f, x) = \sin x \sum_{k=1}^{n-1} (T_n(f) - f)_{k,N} \sin kx, \quad (16)$$

где

$$(T_n(f) - f)_{k,N} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} [T_n(f, t_j) - f(t_j)] \frac{\sin kt_j}{\sin t_j}. \quad (17)$$



Из (16) и (17) получим:

$$\sigma_{n,N}(T_n - f, x) = \sin x \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} [T_n(f, t_j) - f(t_j)] \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx \sin kt_j}{\sin t_j}. \quad (18)$$

Поэтому в силу (14)

$$|\sigma_{n,N}(T_n(f) - f, x)| \leq E_{n,N}^\pi(f) \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \sin x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx \sin kt_j}{\sin t_j} \right|.$$

Из (15) и (18) имеем:

$$|f(x) - \sigma_{n,N}(f, x)| \leq E_{n,N}^\pi(f)(1 + L_{n,N}^\pi(x)), \quad (19)$$

где

$$L_{n,N}^\pi(x) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \sin x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx \sin kt_j}{\sin t_j} \right|. \quad (20)$$

В связи с неравенством (19) возникает задача об оценке величины $L_{n,N}^\pi(x)$ при $x \in \overline{\Omega}_N$. Аналогичная задача возникает и в случае, если рассмотреть $\sigma_{n,N}(f)$ как оператор, действующий в пространстве $C_{2\pi}^e$, состоящем из четных 2π -периодических непрерывных функций $f(x)$, для которых норма определяется обычным образом, а именно $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. В этом случае аналог неравенства (19) имеет вид

$$|f(x) - \sigma_{n,N}(f, x)| \leq E_n(f)(1 + L_{n,N}^\pi(x)),$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f \in C_{2\pi}^e$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка n . Требуется оценить величину $L_{n,N}^\pi(x)$, определенную равенством (20) для произвольного $x \in \mathbb{R}$.

Перейдем к сетке $\Omega_N^{II} = \{j\pi/N\}_{j=1}^{N-1}$. Через $l_2(\Omega_N^{II})$ мы обозначим евклидово пространство дискретных функций $f(x)$ вида $f: \Omega_N^{II} \rightarrow \mathbb{R}$, в котором скалярное произведение определено с помощью равенства

$$\langle f, g \rangle_{II} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f\left(\frac{j\pi}{N}\right) g\left(\frac{j\pi}{N}\right).$$

Полную ортонормированную систему в $l_2(\Omega_N^{II})$ образуют функции

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin(N-1)x,$$

т. е.

$$\frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sin k \frac{j\pi}{N} \sin n \frac{j\pi}{N} = \delta_{kn} = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n. \end{cases} \quad (21)$$

Из (21) следует, что произвольная функция $\psi \in l_2(\Omega_N^{II})$ допускает представление

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \psi_k \sin kx, \quad x \in \Omega_N^{II}, \quad (22)$$

где

$$\psi_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \psi\left(\frac{j\pi}{N}\right) \sin \frac{kj\pi}{N}. \quad (23)$$

Пусть теперь $f(x)$ произвольная функция из $l_2(\Omega_N^{II})$, которую доопределим в точках $x = 0$ и $x = \pi$. Положим

$$a_f(x) = \frac{f(0) + f(\pi)}{2} + \frac{f(0) - f(\pi)}{2} \cos x, \quad h(x) = f(x) - a_f(x), \quad (24)$$

и заметим, что $h(0) = h(\pi) = 0$. Для функции $\psi(x) = \frac{h(x)}{\sin x}$ коэффициенты из (23) принимают следующий вид:

$$\psi_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{h\left(\frac{j\pi}{N}\right) - a_f\left(\frac{j\pi}{N}\right)}{\sin \frac{j\pi}{N}} \sin \frac{kj\pi}{N} = \hat{h}_k. \quad (25)$$



Из (22)–(25) выводим

$$f(x) = a_f(x) + \sin x \sum_{k=1}^{N-1} \hat{h}_k \sin kx, \quad x \in \left\{ \frac{j\pi}{N} \right\}_{j=0}^N. \quad (26)$$

Обозначим через $\tau_{n,N}(f, x)$ частичную сумму ряда (26) следующего вида:

$$\tau_{n,N}(f, x) = a_f(x) + \sin x \sum_{k=1}^{n-1} \hat{h}_k \sin kx, \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

Можно показать, что для произвольного четного тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка $n \leq N-1$ имеет место тождество

$$\tau_{n,N}(T_n, x) \equiv T_n(x). \quad (27)$$

Дискретную функцию $f(x)$, заданную на конечной сетке $\{j\pi/N\}_{j=0}^N$, мы продолжим на бесконечную сетку $\mathbb{Z}_{\pi/N} = \{j\pi/N\}_{j=-\infty}^{\infty}$ так, чтобы продолженная функция была четной и 2π -периодической при $x \in \mathbb{Z}_{\pi/N}$, т. е. $x \in \mathbb{Z}_{\pi/N}$, $f(-x) = f(x)$ и $f(x+2\pi) = f(x)$. Множество всех таких функций мы обозначим $C^e(\mathbb{Z}_{\pi/N})$, которое мы превратим в нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{\pi/N} = \max_{x \in \mathbb{Z}_{\pi/N}} |f(x)|.$$

Через $E_{n,N/\pi}$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in C^e(\mathbb{Z}_{n,N/\pi})$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка n , удовлетворяющих условиям $f(0) = T_n(0)$, $f(\pi) = T_n(\pi)$. Пусть $T_n(f) = T_n(f, x)$ — тригонометрический полином порядка n , удовлетворяющий условиям $f(0) = T_n(f, 0)$, $f(\pi) = T_n(f, \pi)$, для которого

$$E_{n,\pi/N}(f) = \|f - T_n(f)\|_{\pi/N}. \quad (28)$$

Тогда в силу (27) $f(x) - \tau_{n,N}(f, x) = f(x) - T_n(f, x) + \tau_{n,N}(T_n(f) - f, x)$, а отсюда и из (28) находим

$$|f(x) - \tau_{n,N}(f, x)| \leq E_{n,\pi/N}(f) + |\tau_{n,N}(T_n(f) - f, x)|.$$

Далее, из (25) и (26) имеем:

$$\tau_{n,N}(T_n(f) - f, x) = \sin x \sum_{j=1}^{n-1} (T_n(f) - f)_j \sin jx, \quad (29)$$

где

$$(T_n(f) - f)_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \left[T_n \left(f, \frac{j\pi}{N} \right) - f \left(\frac{j\pi}{N} \right) \right] \frac{\sin \frac{jk\pi}{N}}{\sin \frac{j\pi}{N}}. \quad (30)$$

Из (29) и (30) находим

$$\tau_{n,N}(T_n(f) - f, x) = \frac{2 \sin x}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \left[T_n \left(f, \frac{j\pi}{N} \right) - f \left(\frac{j\pi}{N} \right) \right] \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx \sin \frac{jk\pi}{N}}{\sin \frac{j\pi}{N}}.$$

Отсюда и из (29) имеем:

$$|\tau_{n,N}(T_n(f) - f, x)| \leq E_{n,\pi/N}(f) \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \left| \sin x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx \sin \frac{jk\pi}{N}}{\sin \frac{j\pi}{N}} \right|. \quad (31)$$

Сопоставляя (29) с (31), получаем:

$$|f(x) - \tau_{n,N}(f, x)| \leq E_{n,\pi/N}(f)(1 + L_{n,\pi/N}(x)),$$

где

$$L_{n,\pi/N}(x) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sin x \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx \sin \frac{jk\pi}{N}}{\sin \frac{j\pi}{N}} \right|. \quad (32)$$

Отсюда возникает задача об оценке величины $L_{n,\pi/N}(x)$ при $n, N \rightarrow \infty$.



2. ОЦЕНКИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА ОПЕРАТОРОВ $\sigma_{n,N}(f)$ И $\tau_{n,N}(f)$

В настоящем мы приводим оценки для величин $L_{n,N}^\pi(x)$ и $L_{n,\pi/N}$, определенных равенствами (20) и (32) и представляющих собой функции Лебега для частичных сумм $\sigma_{n,N}(f, x)$ и $\tau_{n,N}(f, x)$ соответственно.

Теорема 1. Имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} L_{n,N}^\pi(x) &\leq C(1 + \ln(n|\sin x| + 1)), & 1 \leq n \leq N, \\ L_{n,\pi/N}(x) &\leq C(1 + \ln(n|\sin x| + 1)), & 1 \leq n \leq N - 1. \end{aligned}$$

3. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

Мы рассмотрим на отрезке $[-1, 1]$ сетку узлов

$$x_j = \cos \frac{j\pi}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Положим $A_N = \{x_j\}_{j=1}^{N-1}$ и рассмотрим евклидово $(N - 1)$ -мерное пространство $l_2(A_N)$, состоящее из дискретных функций вида $f : A_N \rightarrow \mathbb{R}$, в котором введено скалярное произведение:

$$\langle f, g \rangle_N = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} (1 - x_j^2) f(x_j) g(x_j).$$

Полную ортонормированную систему в $l_2(A_N)$ образуют функции

$$U_k(x) = \frac{\sin(k+1) \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 2, \quad (33)$$

представляющие собой классические полиномы Чебышёва второго рода. В самом деле, из (21) и (33) имеем:

$$\begin{aligned} \langle U_k, U_n \rangle &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} (1 - x_j^2) U_k(x_j) U_n(x_j) = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} (1 - x_j^2) \frac{\sin k \arccos x_j}{\sqrt{1-x_j^2}} \frac{\sin n \arccos x_j}{\sqrt{1-x_j^2}} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sin k \frac{j\pi}{N} \sin n \frac{j\pi}{N} = \delta_{kn}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что произвольная функция $\varphi(x) \in l_2(A_N)$ допускает представление

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N-2} \varphi_k U_k(x), \quad x \in A_N, \quad (34)$$

где

$$\varphi_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \varphi(x_j) U_k(x_j) (1 - x_j^2). \quad (35)$$

Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $l_2(A_N)$, которую доопределим в точках $x = -1$ и $x = 1$. Положим

$$b_f(x) = \frac{f(1) + f(-1)}{2} + \frac{f(1) - f(-1)}{2} x, \quad g(x) = f(x) - b_f(x),$$

и заметим, что $g(1) = g(-1) = 0$. Для функции $\varphi(x) = \frac{g(x)}{(1-x^2)}$ коэффициенты (35) имеют вид

$$\varphi_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} g(x_j) U_k(x_j) = \hat{g}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 2. \quad (36)$$

Из (34)–(36) для $x \in A_N \cup \{-1, 1\}$ находим

$$f(x) = b_f(x) + (1 - x^2) \sum_{k=0}^{N-2} \hat{g}_k U_k(x). \quad (37)$$



Обозначим через $S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f, x)$ частичную сумму конечного ряда (37) следующего вида:

$$S_{n,N}(f, x) = b_f(x) + (1 - x^2) \sum_{k=0}^{n-2} \hat{g}_k U_k(x). \quad (38)$$

Тогда не трудно увидеть, что для произвольного алгебраического полинома $P_n(x)$ степени не выше n имеет место тождество

$$S_{n,N}(P_n, x) \equiv P_n(x). \quad (39)$$

В самом деле, $q_{n-2}(x) = \varphi(x) = \frac{g(x)}{1-x^2} = \frac{P_n(x) - b_{P_n}(x)}{1-x^2}$ представляет собой алгебраический полином степени не выше $n-2$, поэтому в силу свойства (33) и равенства (35) имеем $\hat{g}_k = \varphi_k = 0$ при $k = n-1, n, \dots, N-2$. Поэтому в силу (36) и (37) мы можем записать

$$P_n(x) = b_{P_n}(x) + (1 - x^2) \sum_{k=0}^{n-2} \hat{g}_k U_k(x) = S_{n,N}(P_n, x).$$

Расширим сетку A_N , добавив к ней две точки $x_0 = 1$ и $x_N = -1$. Положим $\bar{A}_N = A_N \cup \{-1, 1\}$. Будем рассматривать дискретные функции вида $f : \bar{A}_N \rightarrow \mathbb{R}$. Множество всех таких функций, для которых определена норма $\|f\|_{A_N} = \max_{x \in \bar{A}_N} |f(x)|$, обозначим через $C(\bar{A}_N)$. Пусть $E_{n,N}^A(f)$ — наилучшее приближение функции $f \in C(\bar{A}_N)$ алгебраическими полиномами $P_n(x)$ степени n , удовлетворяющие условию $P_n(-1) = f(-1)$, $P_n(1) = f(1)$. Пусть $P_n(f) = P_n(f, x)$ — алгебраический полином степени n , удовлетворяющий условиям $f(-1) = P_n(f, -1)$ и $f(1) = P_n(f, 1)$, для которого

$$E_{n,N}^A(f) = \|f - P_n(f)\|_{A_N}. \quad (40)$$

Тогда в силу (39)

$$f(x) - S_{n,N}(f, x) = f(x) - P_n(f, x) + S_{n,N}(P_n(f) - f, x),$$

а отсюда и из (40) находим

$$|f(x) - S_{n,N}(f, x)| \leq E_{n,N}^A(f) + |S_{n,N}(P_n(f) - f, x)|. \quad (41)$$

Далее, из (38) имеем $(b_{P_n(f)-f}(x) \equiv 0)$

$$S_{n,N}(P_n(f) - f) = (1 - x^2) \sum_{k=0}^{n-2} (\widehat{P_n(f) - f})_k U_k(x), \quad (42)$$

где в силу (36)

$$(\widehat{P_n(f) - f})_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} (P_n(f, x_j) - f(x_j)) U_k(x_j). \quad (43)$$

Из (42) и (43) находим

$$S_{n,N}(P_n(f) - f, x) = \frac{2(1-x^2)}{N} \sum_{j=1}^{N-1} (P_n(f, x_j) - f(x_j)) \sum_{k=0}^{n-2} U_k(x) U_k(x_j),$$

откуда, в свою очередь, в силу (40) выводим

$$|S_{n,N}(P_n(f) - f, x)| \leq E_{n,N}^A(f) \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} (1-x^2) \left| \sum_{k=0}^{n-2} U_k(x) U_k(x_j) \right|. \quad (44)$$

Сопоставляя (44) с (41), мы можем записать

$$|f(x) - S_{n,N}(f, x)| \leq E_{n,N}^A(f) (1 + \Lambda_{n,N}(x)), \quad (45)$$



где

$$\Lambda_{n,N}(x) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} (1-x^2) \left| \sum_{k=0}^{n-2} U_k(x) U_k(x_j) \right|. \quad (46)$$

В связи с неравенством (45) возникает задача об оценке величины $\Lambda_{n,N}(x)$. Положим $x = \cos \theta$. Тогда из (46), (33) и (32) имеем:

$$\Lambda_{n,N}(\cos \theta) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sin \theta \left| \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\sin(k+1)\theta \sin \frac{j(k+1)\pi}{N}}{\sin \frac{j\pi}{N}} \right| = \frac{2 \sin \theta}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin k\theta \sin k \frac{j\pi}{N}}{\sin \frac{j\pi}{N}} \right| = L_{n, \frac{\pi}{N}}(\theta).$$

Поэтому в силу теоремы 1 выводим следующий результат.

Теорема 2. *Имеет место оценка*

$$\Lambda_{n,N}(x) \leq C(1 + \ln(n\sqrt{1-x^2} + 1)), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

Библиографический список

1. Шарапудинов И. И. Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства // Матем. заметки. 2013. Т. 94, вып. 2. С. 295-309. DOI: 10.4213/mzm10292.
2. Шарапудинов И.И. Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, № 5. С. 201–224. DOI: 10.4213/im8117.
3. Дедус Ф. Ф., Махортых С. А., Устинин М. Н., Дедус А. Ф. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. М. : Машиностроение, 1999.
4. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М. : Наука, 1983.
5. Арушанян О. Б., Волченкова Н. И., Залеткин С. Ф. О вычислении коэффициентов рядов Чебышёва для решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2011. Т. 8. С. 273–283.
6. Trefethen L. N. Spectral methods in Matlab. Philadelphia : SIAM, 2000.
7. Trefethen L. N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University, 1996.
8. Mukundan R., Ramakrishnan K. R. Moment functions in image analysis. Theory and Applications. Singapore : World Scientific, 1998.

Discrete Transform with Stick Property Based on $\{\sin x \sin kx\}$ and Second Kind Chebyshev Polynomials Systems

I. I. Sharapudinov, G. G. Akiev

Daghestan Scientific Centre Of Russian Academy of Sciences, 45, Gadgieva str., Makhachkala, Republic of Dagestan, 367000, Russia, sharapud@mail.ru, hasan.akniev@gmail.com

In this paper we introduce the discrete series with the «sticking»-property of the periodic ($\{\sin x \sin kx\}$ system) and non-periodic (using the system of the second kind of Chebyshev polynomials $U_k(x)$) cases. It is shown that series of the system $\{\sin x \sin kx\}$ have an advantage over cosine Fourier series because they have better approximation properties near the bounds of the $[0, \pi]$ segment. Similarly discrete series of the system $U_k(x)$ near the bound of the $[-1, 1]$ approximates given function significantly better than Fouries sums of Chebyshev polynomials.

Key words: approximation theory, Fouries series, special series, piecewise approximation.

References

1. Sharapudinov I. I. Limit Ultraspherical Series and Their Approximation Properties. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, iss. 2, pp. 281–293. DOI: 10.1134/S0001434613070274.
2. Sharapudinov I. I. Some special series in ultraspherical polynomials and their approximation properties. *Izv. Math.*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 1036–1059. DOI: 10.1070/IM2014v078n05ABEH002718.
3. Dedus F. F., Mahortyh S. A., Ustinin M. N., Dedus A. F. *Obobshchennyi spektral'no-analiticheskii metod obrabotki informatsionnykh massivov. Zadachi analiza izobrazhenii i raspoznavaniia obrazov* [Generalized spectral and analytic method of data arrays processing. Problems of image analysis and pattern recognition]. Moscow, Mashinostroenie, 1999 (in Russian).
4. Pashkovskiy S. Numerical applications of polynomials



and Tchebychev series [Vychislitel'nye primeneniia mnogochlenov i riadov Chebysheva]. Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).

5. Arushanyan O. B., Volchenskova N. I., Zaletkin S. F. On calculation of Chebyshev series coefficients for the solutions to ordinary differential equations. Sib. Elektron. Mat. Izv., 2011, vol. 8, pp. 273–283 (in Russian).

6. Trefethen L. N. *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia, SIAM, 2000.

7. Trefethen L. N. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation*. Cornell University, 1996.

8. Mukundan R., Ramakrishnan K. R. *Moment functions in image analysis. Theory and Applications*. Singapore, World Scientific, 1998.

УДК 517.51

О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров

Научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, tadgius@gmail.com

Пусть для $\lambda \geq 1$ задана измеримая 2π -периодическая и существенно ограниченная функция (ядро) $k_\lambda = k_\lambda(x)$. Исследуются условия на вес $w(x)$ и ядра $\{k_\lambda(t)\}_{\lambda \geq 1}$, при которых семейство операторов свертки $\{\mathcal{K}_\lambda f(x) : \mathcal{K}_\lambda f(x) = \int_E f(t)k_\lambda(t-x)dt\}_{\lambda \geq 1}$ ($E = [-\pi, \pi]$) равномерно ограничено в весовых пространствах Лебега с переменным показателем — $L_{2\pi, w}^{p(x)}$.

Ключевые слова: пространство Лебега с переменным показателем, операторы свертки, условие Дини – Липшица.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $E = [-\pi, \pi]$, $1 \leq \underline{p}(E) \leq p(x) \leq \bar{p}(E) < \infty$ — измеримая 2π -периодическая функция, где $\underline{p}(D) = \operatorname{ess\,inf}_{x \in D} p(x)$, $\bar{p}(D) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} p(x)$ для произвольного $D \subset R$, $w(x)$ — суммируемая почти всюду положительная функция (вес). Через $L_{2\pi, w}^{p(x)}$ обозначим пространство измеримых 2π -периодических функций $f = f(x)$ таких, что

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x) dx < \infty.$$

Пространство $L_{2\pi, w}^{p(x)}$ нормируемо, и одну из эквивалентных норм можно определить [1–4], полагая для $f \in L_{2\pi, w}^{p(x)}$

$$\|f\|_{p(\cdot), w} = \|f\|_{p(\cdot), w}(E) = \inf\{\alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq 1\}. \quad (1)$$

Отметим некоторые свойства, связанные с этими пространствами, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1°. $\|f\|_{p(\cdot), w} = \|f w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}$.

2°. Для любых измеримых множеств $A \subset B$

$$\|f\|_{p(\cdot), w}(A) \leq \|f\|_{p(\cdot), w}(B),$$

так как

$$\int_A \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot), w}(B)} \right|^{p(x)} w(x) dx \leq \int_B \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot), w}(B)} \right|^{p(x)} w(x) dx = 1.$$

3°. Почти дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1.6.1 в [2], можно показать, что если $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q}(A) < \infty$, то для любой функции $f \in L_w^{q(x)}(A)$

$$\|f\|_{p(\cdot), w}(A) \leq r_{p, q}^w \|f\|_{q(\cdot), w}(A),$$

где A — измеримое множество, $r_{p, q}^w \leq \frac{1}{\underline{\alpha}} + \frac{\int_A w(x) dx}{\underline{\alpha}^*}$ $\left(\alpha(x) = \frac{q(x)}{p(x)}, \quad \alpha^*(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) - 1} \right)$.



4°. Если $p(x) > 1$, $x \in M$ (не исключая и случай, когда $\underline{p}(M) = 1$), то справедливо неравенство типа Гельдера для пространств Лебега с переменным показателем [1, неравенство (8)]:

$$\int_M |f(x)||g(x)| dx \leq c(p, M) \cdot \|f\|_{p(\cdot)}(M) \cdot \|g\|_{p'(\cdot)}(M),$$

где $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$, $(p, M) \leq \frac{1}{\underline{p}(M)} + \frac{1}{\underline{p}'(M)}$. Через $\alpha, (\alpha, \beta), \dots$ здесь и далее будут обозначаться положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, различные в разных местах.

1. ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ

Пусть для каждого $\lambda \geq 1$ задана 2π -периодическая существенно ограниченная функция $k_\lambda = k_\lambda(x)$. Определим для $f \in L^1_{2\pi}$ линейный оператор:

$$\mathcal{H}_\lambda f = (\mathcal{H}_\lambda f)(x) = \int_E f(t)k_\lambda(t-x) dt. \tag{2}$$

Будем говорить, что семейство ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda \geq 1}$ удовлетворяет условиям \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , если имеют место следующие оценки: \mathcal{A}) $\int_E |k_\lambda(x)| dx \leq c_1$; \mathcal{B}) $\sup_x |k_\lambda(x)| \leq c_2 \lambda^\nu$; \mathcal{C}) $|k_\lambda(x)| \leq c_3$ при $\lambda^\gamma \leq |x| \leq \pi$, где $\nu, \gamma, c_j > 0$ ($j = 1, 2, 3$) и не зависят от λ .

Через \mathcal{P} обозначим класс показателей $p(x)$, $p(x) \geq 1$, удовлетворяющих условию Дини – Липшица:

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x-y|} \leq C \quad (x, y \in E). \tag{3}$$

Из (2) следует, что для существования $K_\lambda(f)$ требуется, чтобы $L^{p(x)}_{2\pi, w} \subset L^1_{2\pi}$. Очевидно, что не для всякого w данное вложение будет иметь место. Поэтому на вес нужно наложить дополнительные условия. Пусть $E_1 = \{x \in E : p(x) = 1\}$, $E_2 = E \setminus E_1$:

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx.$$

Лемма Функция $f \in L^{p(x)}_{2\pi, w}$ будет суммируемой на E_1 в том и только в том случае, если вес ограничен от нуля почти всюду на E_1 :

$$w(x) \geq C_1(w) > 0 \quad \text{для почти всех } x \in E_1. \tag{4}$$

А для суммируемости $f \in L^{p(x)}_{2\pi, w}$ на E_2 достаточно выполнения следующего условия:

$$\|w^{-1/p(\cdot)}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty. \tag{5}$$

Эти условия были получены в работе [5].

Через $\mathcal{H}(E, p)$ обозначим класс весов, удовлетворяющих условиям (4), (5).

В настоящей работе исследуется вопрос о равномерной ограниченности семейств операторов свертки в пространствах $L^{p(x)}_{2\pi, w}$, $w \in \mathcal{H}(E, p)$. В случае, когда $w(x) \equiv 1$ данный вопрос был изучен в [6], где были получены достаточные условия на ядра, при которых обеспечивалась равномерная ограниченность. Вышеупомянутый результат был перенесен на многомерный случай в [7]. Схожая задача рассматривалась еще и в работе [8].

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для формулировки основного результата введем некоторые обозначения:

$\mathfrak{B}^h = \{\Delta_k^h\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — множество отрезков длины $3h$, где $\Delta_k^h = [(k-1)h, (k+2)h]$;

$\mathfrak{B}_\varepsilon = \bigcup_{h < \varepsilon} \mathfrak{B}^h$ — совокупность всех \mathfrak{B}^h с длиной, меньше ε ;

$\mathfrak{B}^{1,p}_\varepsilon = \{\Delta_k^h \in \mathfrak{B}_\varepsilon : \underline{p}(\Delta_k^h) = 1\}$ — подмножество B_ε с равной единице существенной нижней гранью $p(x)$.



Теорема 1. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}$, $w \in \mathcal{H}(E, p)$ и $k_\lambda = k_\lambda(x)$ ($1 \leq \lambda < \infty$) удовлетворяет условиям \mathcal{A} – \mathcal{C}). Тогда семейство операторов $\{K_\lambda\}_{1 \leq \lambda < \infty}$ будет равномерно ограничено в пространстве $L_{2\pi, w}^{p(x)}$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}_\varepsilon^{1, p}} \frac{1}{|B|^{v/\gamma}} \int_B w(x) dx < C, \tag{6}$$

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}_\varepsilon \setminus \mathfrak{B}_\varepsilon^{1, p}} \left(\frac{1}{|B|^{v/\gamma}} \int_B w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|B|^{v/\gamma}} \int_B w(x)^{-1/(p(B)-1)} dx \right)^{p(B)-1} < C. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $N = [\lambda^{-\gamma}]$, $h = 1/N$

$$x_k = (kh - 1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots), \tag{8}$$

$$s_k = \min\{p(x), x_{k-1} \leq x \leq x_{k+2}\}, \tag{9}$$

$$h(t) = s_k \quad (x_k \leq x \leq x_{k+1}). \tag{10}$$

Определим для $x \in E$ множество E_x следующим образом. Если $(x - \pi h, x + \pi h) \subset (-\pi, \pi)$, то

$$E_x = E \setminus (x - \pi h, x + \pi h)$$

Если же $x - \pi h < -\pi$ или $\pi < x + \pi h$, то положим соответственно

$$E_x = E \setminus \{(-\pi, x + \pi h) \cup (x - \pi h + 2\pi, \pi)\},$$

или

$$E_x = E \setminus \{(x - \pi h, \pi) \cup (-\pi, x + \pi h - 2\pi)\}.$$

Пусть

$$\|f\|_{p(\cdot), w} \leq 1. \tag{11}$$

Тогда, полагая $\bar{p} = \bar{p}(E)$, имеем из (2):

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(x) |(\mathcal{K}_\lambda f)(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(x) \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_\lambda(t-x) dt \right|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} = \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(x) \left| \left(\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} + \int_{E_x} \right) f(t) k_\lambda(t-x) dt \right|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} \leq \\ &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(x) \left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t) k_\lambda(t-x) dt \right|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(x) \left| \int_{E_x} f(t) k_\lambda(t-x) dt \right|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}} = \\ &= J_1^{1/\bar{p}} + J_2^{1/\bar{p}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь мы воспользовались тем, что отображение $(f, g) \rightarrow \rho(f, g)$, где

$$\rho(f, g) = \left(\int_E |f(x) - g(x)|^{p(x)} w(x) dx \right)^{1/\bar{p}}$$

является метрикой в $L_{2\pi, w}^{p(x)}$, что легко можно показать, воспользовавшись леммой в [2, лемма 1.2.1] и свойством 1°. В самом деле, для любых функций $f, g \in L_{2\pi, w}^{p(x)}$ справедливы включения $f w^{1/p(x)}, g w^{1/p(x)} \in L_{2\pi, 1}^{p(x)} = L_{2\pi}^{p(x)}$ и можно перейти к метрике в $L_{2\pi}^{p(x)}$:

$$\rho(f, g) = \left(\int_E |f(x) - g(x)|^{p(x)} w(x) dx \right)^{1/\bar{p}} = \left(\int_E |f(x) w^{1/p(x)}(x) - g(x) w^{1/p(x)}(x)|^{p(x)} dx \right)^{1/\bar{p}}.$$



Выражение в правой части равенства выше и представляет собой метрику, рассмотренную в [2]. Оценим J_1 :

$$J_1 = \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t)k_\lambda(t-x) dt \right|^{p(x)} dx = \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t)k_\lambda(t-x) dt \right|^{s_k+p(x)-s_k} dx.$$

Из условия (3) и из (8) и (9) следует, что при $x_k \leq x \leq x_{k+1}$

$$|p(x) - s_k| = (\ln(2\lambda^\gamma))^{-1} \leq c(\gamma) \frac{1}{\ln(2\lambda)}.$$

Поэтому в силу 2°, 3°, \mathcal{B}) и (11) приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t)k_\lambda(t-x) dt \right|^{p(x)-s_k} &= (\lambda^v)^{c(\gamma)\frac{1}{\ln(2\lambda)}} \left(\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} |f(t)| dt \right)^{c(\gamma)\frac{1}{\ln(2\lambda)}} = \\ &= c(p, \gamma, w) (\|f\|_{p(\cdot), w})^{c(\gamma)\frac{1}{\ln(2\lambda)}} \leq c(p, \gamma, w). \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (13) имеем:

$$J_1 \leq c_1(p, \gamma, w) \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t)k_\lambda(t-x) dt \right|^{s_k} dx. \quad (14)$$

Разобьем сумму (14) на 2 части:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t)k_\lambda(t-x) dt \right|^{s_k} dx = \\ &= \left(\sum_{k \in I_1} + \sum_{k \in I_2} \right) \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t)k_\lambda(t-x) dt \right|^{s_k} dx = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где $I_1 = \{k : s_k = 1\}$, $I_2 = \{k : s_k > 1\}$. Оценим \mathfrak{S}_1 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \sum_{k \in I_1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t)k_\lambda(t-x) dt \right| dx \leq \sum_{k \in I_1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \int_{x-\pi h}^{x+\pi h} |f(t)||k_\lambda(t-x)| dt dx \leq \\ &\leq \sum_{k \in I_1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)||k_\lambda(t-x)| dt dx \stackrel{\mathcal{B})}{\leq} \sum_{k \in I_1} \lambda^v \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(x) dx \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)| dt \leq \\ &\leq \sum_{k \in I_1} c(v, \gamma) \frac{1}{(3h)^{v/\gamma}} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(x) dx \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Из условия (6) и свойства 3° нормы (1) получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_1} c(v, \gamma) \frac{1}{(3h)^{v/\gamma}} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(x) dx \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)| dt &\leq c(w, v, \gamma) \sum_{k \in I_1} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)| dt \leq \\ &\leq 3c(w, v, \gamma) \|f\|_{p(\cdot), w} \leq 3c(w, v, \gamma). \end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно, сумма \mathfrak{S}_1 ограничена. Покажем ограниченность второй суммы. Оценим ее с помощью неравенства Гельдера (свойство 4°):

$$\mathfrak{S}_2 \leq \sum_{k \in I_2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left(\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} w^{1/s_k}(t) |f(t)k_\lambda(t-x)| w^{-1/s_k}(t) dt \right)^{s_k} \leq$$



$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{k \in I_2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left(\left(\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} w(t) |f(t) k_\lambda(t-x)|^{s_k} dt \right)^{1/s_k} \left(\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} w^{-s'_k/s_k}(t) dt \right)^{1/s'_k} \right)^{s_k} dx = \\
 &= \sum_{k \in I_2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left(\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} w(t) |f(t) k_\lambda(t-x)|^{s_k} dt \left(\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} w^{-s'_k/s_k}(t) dt \right)^{\frac{s_k}{s'_k}} \right) dx \stackrel{\text{B}}{\leq} \\
 &\leq c_2 \sum_{k \in I_2} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(x) dx \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} \lambda^{v s_k} w(t) |f(t)|^{s_k} dt \left(\int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w^{-s'_k/s_k}(t) dt \right)^{\frac{s_k}{s'_k}} \leq \\
 &\leq c(v, \gamma) \sum_{k \in I_2} \frac{1}{(3h)^{v/\gamma}} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(x) dx \left(\frac{1}{(3h)^{v/\gamma}} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w^{-1/(s_k-1)}(t) dt \right)^{s_k-1} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(t) |f(t)|^{s_k} dt.
 \end{aligned}$$

С учетом последнего неравенства и (7) получаем:

$$\mathfrak{S}_2 \leq c(w, v, \gamma) \sum_{k \in I_2} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(t) |f(t)|^{s_k} dt \leq 3c(w, v, \gamma) \int_E w(t) |f(t)|^{s_k} dt.$$

Из свойства 3° и (10) имеем:

$$\begin{aligned}
 \int_E w(t) |f(t)|^{s_k} dt &= \int_E w(t) |f(t)|^{h(t)} dt = \int_E w(t) \|f\|_{h(\cdot), w}^{h(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{h(\cdot), w}} \right|^{h(t)} dt \leq \\
 &\leq \int_E w(t) (r_{h,p}^w)^{h(t)} \|f\|_{p(\cdot), w}^{h(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{h(\cdot), w}} \right|^{h(t)} dt \leq \\
 &\leq c(p, w) (r_{h,p}^w)^{\bar{p}(E)} \int_E w(t) \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{h(\cdot), w}} \right|^{h(t)} dt = c(p, w) (r_{h,p}^w)^{\bar{p}(E)}. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Из (12), (15), (16) и (17) следует равномерная ограниченность операторов свертки на единичном шаре пространства $L_{2\pi, w}^{p(x)}$. \square

В качестве следствий теоремы 1 приведем примеры семейств операторов с некоторыми классическими ядрами, равномерно ограниченных в пространстве $L_{2\pi, w}^{p(x)}$.

Операторы Фейера. Для каждого натурального n положим

$$k_n(x) = \frac{2}{n+1} \left\{ \frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right\}^2,$$

а в случае, когда $n \leq \lambda < n+1$, будем считать, что $k_\lambda(x) = k_n(x)$. Операторы Фейера F_λ определим следующим образом:

$$F_\lambda f = (F_\lambda f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_\lambda(t-x) dt.$$

Не трудно проверить, что ядра Фейера удовлетворяют условиям \mathcal{A} - \mathcal{C}) и, следовательно, равномерно ограничены в $L_{2\pi, w}^{p(x)}$ при выполнении условий (6) и (7).

Операторы Стеклова. Пусть $\lambda \geq 1$. Положим

$$k_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in [-\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda}], \\ 0, & x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda}], \end{cases}$$

и продолжим ядро Стеклова 2π -периодически на $(-\infty, \infty)$. Операторы Стеклова определяются равенством

$$(S_\lambda(f))(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) k_\lambda(t-x) dt.$$



Легко проверить выполнение условий \mathcal{A} – \mathcal{C} для ядер $(S_\lambda(f))(x)$, что вместе с условиями (6) и (7) дает равномерную ограниченность этих операторов в $L_{2\pi, w}^{p(x)}$.

Автор выражает благодарность И. И. Шарапудинову за постановку задачи.

Библиографический список

1. Шарапудинов И. И. О топологии пространства $L^{p(t)}([0, 1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.
2. Шарапудинов И. И. Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем. Владикавказ : ЮМИ ВЦ РАН и РСО-А, 2012. 270 с.
3. Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2011. P. 509. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8.
4. Cruz-Uribe D., Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces : Foundations and Harmonic Analysis. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2013. P. 312. DOI: 10.1007/978-3-0348-0548-3.
5. Магомед-Касумов М. Г. Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказ. матем. журн. 2014. Т. 16, вып. 3. С. 38–46.
6. Шарапудинов И. И. О равномерной ограниченности в L^p ($p = p(x)$) некоторых семейств операторов свертки // Матем. заметки. 1996. Т. 59, вып. 2. С. 291–302. DOI: 10.4213/mzm1716.
7. Шах-Эмиров Т. Н. О равномерной ограниченности в $L_{2\pi}^{p(x)}$ некоторых семейств интегральных операторов свертки // Вестн. ДНЦ РАН. 2013. Вып. 51. С. 13–17.
8. Samko S. G Denseness of $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in generalized Sobolev Spaces $W^{m, p(x)}(\mathbb{R}^n)$ // Intern. Soc. for Analysis, Applic. and Comput. Vol. 5. Direct and Inverse Problems of Math. Physics / eds. R. Gilbert, J. Kajiwara, S. Xu. Yongzhi. Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 333–342.

On Uniform Boundedness of Some Families of Integral Convolution Operators in Weighted Variable Exponent Lebesgue Spaces

T. N. Shakh-Emirov

Daghestan Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, 45, Gadgieva str., Makhachkala, Republic of Dagestan, 367000, Russia, tadgius@gmail.com

Let $k_\lambda(x)$ be a measurable essentially bounded 2π -periodic function (kernel), where $\lambda \geq 1$. Conditions on the weight and on the kernels $\{k_\lambda(x)\}_{\lambda \geq 1}$ that provide the family of convolution operators $\{\mathcal{K}_\lambda f(x) : \mathcal{K}_\lambda f(x) = \int_E f(t)k_\lambda(t-x) dt\}_{\lambda \geq 1}$ ($E = [-\pi, \pi]$) uniform boundedness in weighted variable exponent Lebesgue space $L_{2\pi, w}^{p(x)}$ are investigated.

Key words: Lebesgue spaces with variable exponent, convolution operators, Dini–Lipschitz condition.

References

1. Sharapudinov I. I. Topology of the space $L^{p(t)}([0, 1])$. *Math. Notes*, 1979, vol. 26, iss. 4, pp. 796–806. DOI: 10.1007/BF01159546.
2. Sharapudinov I. I. Some aspects of approximation theory in variable Lebesgue spaces. Vladikavkaz, 2012, 270 p. (in Russian).
3. Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Berlin ; Heidelberg, Springer-Verlag, 2011, 509 p. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8.
4. Cruz-Uribe D., Fiorenza A. *Variable Lebesgue Spaces : Foundations and Harmonic Analysis*. Berlin ; Heidelberg, Springer-Verlag, 2013, 312 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-0548-3.
5. Magomed-Kasumov M. G. Basis property of the Haar system in the weighted variable Lebesgue spaces. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* [Vladikavkaz Math. J.], 2014, vol. 16, iss. 3, pp. 38–46 (in Russian).
6. Sharapudinov I. I. Uniform boundedness in L^p ($p = p(x)$) of some families of convolution operators. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, iss. 2, pp. 205–212. DOI: 10.1007/BF02310962.
7. Shakh-Emirov T. N. O ravnomernoii ogranichennosti v $L_{2\pi}^{p(x)}$ nekotorykh semeistv integral'nykh operatorov svertki [On the uniform boundedness in $L_{2\pi}^{p(x)}$ of some families of integral operators convolution]. *Vestnik DNC RAN*, 2014, iss. 51, pp. 13–17 (in Russian).
8. Samko S. G Denseness of $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in generalized Sobolev Spaces $W^{m, p(x)}(\mathbb{R}^n)$. *Intern. Soc. for Analysis, Applic. and Comput. Vol. 5. Direct and Inverse Problems of Math. Physics* / eds. R. Gilbert, J. Kajiwara, S. Xu. Yongzhi. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2000, pp. 333–342.



УДК 517.524

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ НИКИПОРЦА

В. И. Шмойлов¹, Г. А. Кириченко²

¹ Научный сотрудник, Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Shmoylov40@at.infotectt.ru

² Аспирант кафедры вычислительной техники, Южный федеральный университет, Таганрог, vt_gak@mail.ru

Приводятся аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n -й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. Для нахождения комплексных корней дополнительно используется метод суммирования расходящихся непрерывных дробей.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, бесконечные определители Теплица, расходящиеся непрерывные дроби, r/φ -алгоритм.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании современных сложных объектов необходимо уже на предварительных стадиях разработки анализировать их предполагаемые характеристики. Для моделирования используются как дифференциальные и интегральные уравнения, так и классические алгебраические уравнения — один из старейших объектов исследований в математике.

Имеются разнообразные применения алгебраических уравнений при решении научных и технических задач. Алгебраические уравнения возникают, например, при изучении равновесных состояний сложных термодинамических и механических систем. Часто алгебраические уравнения появляются в аэродинамике. Например, скорость набора высоты самолета определяется из алгебраического уравнения восьмой степени. При вычислении скаса потока за крылом по теории Прандтля используются алгебраические уравнения, степень которых зависит от принятого закона изменения коэффициента подъемной силы от угла атаки. При расчете устойчивости различных конструкций используют так называемые собственные значения матриц, определяемые из решения алгебраических уравнений, степень которых равна количеству учитываемых гармоник. Особенно часто алгебраические уравнения возникают при выполнении разнообразных геометрических расчетов: определении точек пересечения и сопряжения криволинейных контуров, при проектировании поверхностей — крыльев, фюзеляжей, обтекателей и т. п.

Разным аспектам теории и практики алгебраических уравнений посвящены недавно опубликованные монографии [1, 2]. Тем не менее, актуальной является оценка ситуации в этом разделе математики, которая была дана известным американским специалистом Р. Хеммингом в книге, вышедшей полстолетия назад: «Задача нахождения корней многочленов возникает достаточно часто для того, чтобы оправдать тщательное изучение и разработку специальных методов ее решения. Различным известным методам нахождения действительных линейных и квадратичных множителей можно посвятить целую книгу. Тот факт, что существует так много методов, показывает, что не существует ни одного вполне удовлетворительного» [3, с. 355]. В самом деле, известно более сотни алгоритмов и их модификаций, которые используются для нахождения нулей полиномов [4]. В основном это алгоритмы численного решения алгебраических уравнений. Среди аналитических алгоритмов решения алгебраических уравнений наиболее известна так называемая интегральная формула Меллина, опубликованная в 1921 г. [5]. Недавно появилась работа [6], в которой подход Меллина получил дальнейшее развитие.

Далее будут рассмотрены аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n -й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. Для нахождения комплексных корней дополнительно применится метод суммирования расходящихся непрерывных дробей, именуемый как r/φ -алгоритм [7], нашедший разнообразные применения в вычислительной математике [8–12].



1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется алгебраическое уравнение степени n :

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0. \tag{1}$$

Запишем следующую производящую функцию:

$$\frac{1}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m + \dots \tag{2}$$

Коэффициенты α_i в (1) и (2) совпадают. Коэффициенты c_m последовательности (2) могут быть найдены из линейного рекуррентного соотношения:

$$c_m = -(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \dots + \alpha_n c_{m-n}), \quad c_0 = 1, \quad c_1 = -\alpha_1.$$

Для определения корней алгебраического уравнения (1) Эйткин предложил формулы [13]:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{m+1}}{c_m} = x_1, \tag{3}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}} : \frac{c_{m+1}}{c_m} \right) = \frac{x_1 x_2}{x_1} = x_2, \tag{4}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \\ c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}} \right) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2} = x_3, \tag{5}$$

Для x_i имеет место выражение

$$x_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{H_i^{(m+1)}}{H_i^{(m)}} : \frac{H_{i-1}^{(m+1)}}{H_{i-1}^{(m)}} \right),$$

где

$$H_i^{(m)} = \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-2} \end{vmatrix}, \quad H_0^{(m)} = 1.$$

Таким образом, корень x_i может быть представлен выражением

$$x_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+i} & c_{m+i+1} & \dots & c_{m+2i-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-2} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+i-2} & c_{m+i-1} & \dots & c_{m+2i-4} \end{vmatrix}} \right). \tag{6}$$

Очевидно, что, используя формулы Эйткина, можно непосредственно находить только действительные корни алгебраического уравнения (1). Способ нахождения старшего по модулю действительного корня алгебраического уравнения (1), описываемый формулой (3), как известно, принадлежит Д. Бернулли. Применим r/φ -алгоритм к определению комплексных корней алгебраического уравнения (1).



2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕЙ ПОЛИНОМА

Запишем формулы Эйткена (3)–(6) в развернутом виде. В результате преобразований получим конструкции из отношений определителей матриц Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты исходного уравнения (1).

Формулу (3) можно представить отношением определителей:

$$x_1 = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}. \quad (7)$$

Последующие корни уравнения (1) запишутся следующим образом:

$$x_2 = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}, \quad (8)$$

$$x_i = - \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}. \quad (9)$$

Отношения определителей (7)–(9), выражающие корни алгебраического уравнения (1) через его коэффициенты, будем называть *функциями* $N_i^{(n)}$. Для функций $N_i^{(n)}$ введём обозначение:

$$N_i^{(n)} = N_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Здесь следует подчеркнуть, что для алгебраических уравнений степени выше четвертой функции $N_i^{(n)}$ записываются аналогично их записи для уравнений степени 2, 3 и 4.

Если все корни уравнения n -й степени действительны, то значения этих корней со все большей точностью можно установить непосредственно, вычисляя последовательно значения определителей, входящих в формулы (7)–(9). Функции $N_i^{(n)}$, определяемые выражениями (7)–(9), будем называть также *непрерывными дробями Никипорца*. Этому есть свои объяснения.



В [14] были предложены обобщенные непрерывные дроби, задаваемые отношением определителей общего вида:

$$w = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nm} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}. \quad (10)$$

Представление «обобщенной» непрерывной дроби отношением определителей квадратных матриц общего вида (10) имеет то основание, что все известные классы непрерывных дробей есть частные случаи непрерывной дроби (10). Например, обыкновенные непрерывные дроби, или цепные дроби, могут быть записаны отношением трёхдиагональных определителей:

$$a_{11} + \frac{a_{12}}{a_{22} + \frac{a_{23}}{a_{33} + \frac{a_{34}}{a_{44} + \frac{a_{45}}{a_{55} + \dots}}}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}.$$

Ветвящиеся непрерывные дроби [15], или непрерывные дроби Скоробогатко, представляются отношением определителей характерной ступенчатой структуры:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_3}{b_3 + \dots} + \frac{a_4}{b_4 + \dots}} + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_5}{b_5 + \dots} + \frac{a_6}{b_6 + \dots}} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 & a_6 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_6 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 & a_6 & \dots \\ -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_6 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}.$$

Определение математических конструкций (7)–(9) как непрерывных дробей особой структуры позволяет естественно ввести такое фундаментальное понятие, как подходящая дробь, что упрощает описание способа решения алгебраических уравнений с использованием функций $N_i^{(n)}$ и r/φ -алгоритма.



Для нахождения комплексных корней уравнения (1), определяемых также формулами (7)–(9), необходимо дополнительно использовать r/φ -алгоритм. Модуль r_i и модуль аргумента φ_i искомого комплексного числа $x_i = r_i e^{i\varphi_i}$ устанавливаются здесь формулами:

$$r_i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\prod_{m=1}^m |\bar{x}_i^{(m)}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{11}$$

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \tag{12}$$

где $\bar{x}_i^{(m)}$ — m -я подходящая дробь выражения (9), $k_i^{(m)}$ — число отрицательных подходящих дробей для i -го корня из m подходящих дробей.

Например, подходящие дроби для x_2 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2^{(1)} &= -\frac{|-\alpha_2|}{1} : \frac{|-\alpha_1|}{1}, \quad \bar{x}_2^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{|-\alpha_2|} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{|-\alpha_1|}, \\ \bar{x}_2^{(3)} &= \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Вычисление подходящих дробей непосредственно по формуле (9) весьма затруднительно при больших размерностях определителей, входящих в эту формулу. Однако легко заметить, что определители, имеющиеся в формуле (9), не есть определители общего вида. В эти формулы входят определители от матриц Теплица, в которых элементы, расположенные на диагоналях, параллельных главной, — одинаковые. Для вычисления формул (9) можно использовать рекуррентную схему, получившую название «алгоритм частных и разностей», или QD-алгоритм Рутисхаузера [16].

3. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ r/φ -АЛГОРИТМА

В табл. 1–5 приведены результаты вычисления корней уравнения

$$x^{12} - x^{11} - x^{10} - x^9 - x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \tag{13}$$

при помощи непрерывных дробей (9) и r/φ -алгоритма, определяемого формулами (11) и (12).

Предел отношения определителей, входящих в формулу (14), совпадает со значением старшего по модулю корня уравнения (13):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}} = 1.99975500937\dots \tag{14}$$

Результаты вычисления вещественного корня x_1 уравнения (13) приведены в табл. 1.



Таблица 1

Результаты вычисления вещественного корня $x_1 = 1.99975500937\dots$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$
0	1.000000000000	0.9997555009370	22	1.999755531109	-0.000000030172
1	2.000000000000	-0.000244499063	23	1.999755501222	-0.000000000285
12	1.999511718750	-0.000243782187	25	1.999755501135	-0.000000000198
13	1.999755799756	-0.000000298819	26	1.999755501098	-0.000000000161
14	1.999755769935	-0.000268998000	27	1.999755501066	-0.000000000129
15	1.999755740107	-0.000000239170	28	1.999755501036	-0.000000000099
16	1.999755710272	-0.000000209335	29	1.999755501011	-0.000000000074
17	1.999755680430	-0.000000179493	30	1.999755500989	-0.000000000052
18	1.999755650580	-0.000000149643	31	1.999755500970	-0.000000000033
19	1.999755620723	-0.000000119786	32	1.999755500956	-0.000000000019
20	1.999755590859	-0.000000089922	33	1.999755500945	-0.000000000008
21	1.999755560988	-0.000000060051	34	1.999755500938	-0.000000000001

Данные табл. 1 показывают высокую скорость сходимости непрерывной дроби (14), которой представляется вещественный корень уравнения (13).

Запишем непрерывные дроби для корней x_2 и x_3 уравнения (13):

$$x_2 = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}}.$$



На рис. 1 показаны графики значений подходящих непрерывных дробей, которые представляют корни алгебраического уравнения (13). Из графиков на рис. 1, а, м видно, что x_1 и x_{12} — вещественные корни. Также из графиков можно заключить, что уравнение (13) имеет пять пар комплексно-сопряжённых корней. «Периодичность» в расположении подходящих комплексных корней чётко видна в правой половине графиков, представленных на рис. 1.

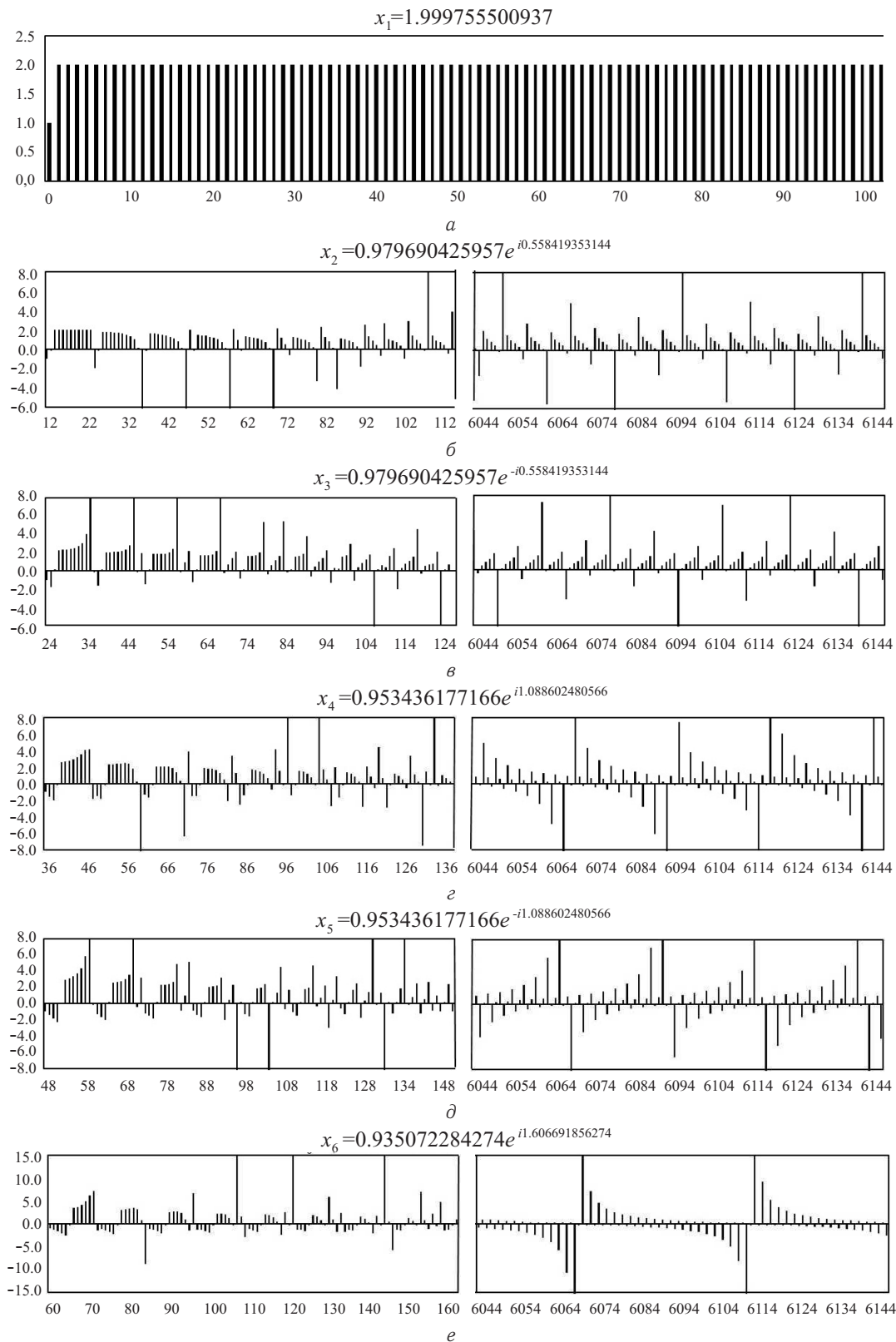


Рис. 1. Начало. Распределение подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (13)

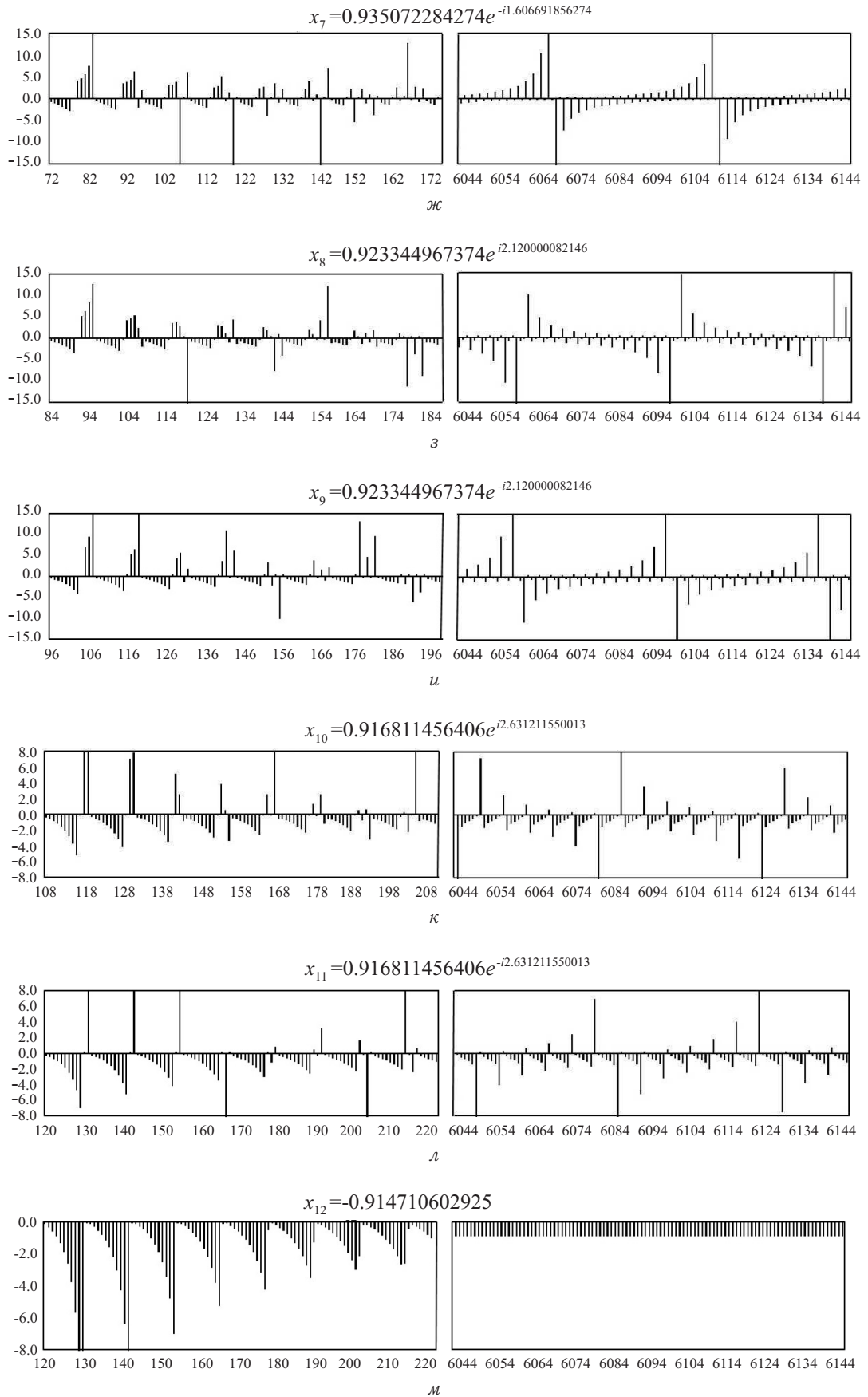


Рис. 1. Окончание



В табл. 2 и 3 приведены результаты вычисления первой пары комплексно-сопряженных корней уравнения (13) при помощи r/φ -алгоритма, то есть формул (11) и (12).

Таблица 2

Результаты вычисления комплексного корня $x_2 = 0.979690425957e^{i0.558419353144}$

Номер дроби	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
32	1.501296168008	0.864581149632	0.115109276325	0.598398600684	-0.039979247540
64	1.206754380797	0.929375999911	0.050314426046	0.592753330866	-0.034333977722
128	0.790280743715	0.958447588838	0.021242837119	0.563875604490	-0.005456251346
256	1.182647495564	0.970361670301	0.009328755656	0.564204394930	-0.005785041786
512	0.040108503235	0.967761878002	0.011928547955	0.558087317704	0.000332035440
1024	-0.006146637028	0.971932508313	0.007757917644	0.561330967719	-0.002911614575
2048	-0.111326789935	0.977170978893	0.002519447064	0.559841989815	-0.001422636671
4096	-0.395348926941	0.978685754271	0.001004671686	0.559103515094	-0.000684161950

Таблица 3

Результаты вычисления комплексного корня $x_3 = 0.979690425957e^{-i0.558419353144}$

Номер дроби	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
32	2.664690114532	0.602084440858	0.377605985099	-0.698131700798	0.139712347654
64	1.691424133396	0.871677635662	0.108012790295	-0.612993688505	0.054574335361
128	1.376117926277	0.953841250747	0.025849175210	-0.568478670650	0.010059317506
256	0.814122533036	0.966453199595	0.013237226362	-0.566295671463	0.007876318319
512	23.92984168573	0.980954443190	-0.001264017233	-0.558933662295	0.000514309151
1024	-156.1493425219	0.982185980387	-0.002495554430	-0.561783301691	0.003363948547
2048	-8.621404886212	0.979563790294	0.000126635663	-0.560056764418	0.001637411274
4096	-2.427711991375	0.979374005615	0.000316420342	-0.559208120268	0.000788767124

В табл. 4 приведены результаты вычисления комплексных корней уравнения (13) по формулам (11) и (12) с использованием 4096 подходящих дробей.

Таблица 4

Результаты вычисления комплексных корней уравнения (13)

Номер корня	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_2	0.978685754271	0.001004671686	0.559103515094	-0.000684161950
x_3	0.979374005615	0.000316420342	-0.559208120268	0.000788767124
x_4	0.952951183889	0.000484993278	1.089229858718	-0.000627378152
x_5	0.952945508991	0.000490668176	-1.089354429647	0.000751949081
x_6	0.933794454170	0.001277830104	1.606982618197	-0.000290761923
x_7	0.935996065142	-0.000923780868	-1.607090502793	0.000398646519
x_8	0.923441518037	-0.000096550663	2.120751183298	-0.000751101152
x_9	0.923354809862	-0.000009842488	-2.120830231779	0.000830149633
x_{10}	0.916414755115	0.000396701291	2.631251204724	-0.000039654711
x_{11}	0.917193803082	-0.000382346676	-2.631291206716	0.000079656703



На рис. 2 показаны значения корней уравнения (13) на комплексной плоскости.

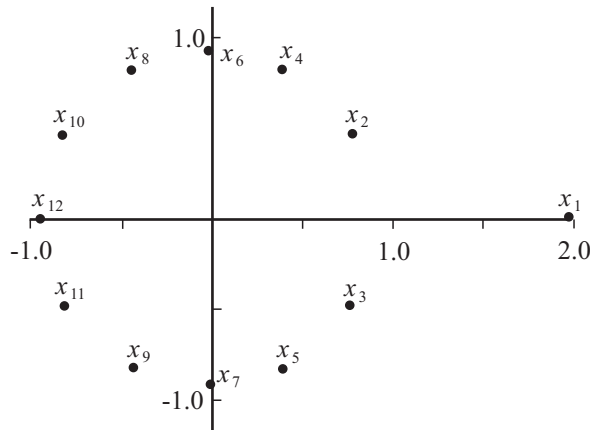


Рис. 2. Расположение корней уравнения (13) на комплексной плоскости

В табл. 5 приведены результаты вычисления второго действительного корня уравнения (13).

Таблица 5

Результаты вычисления вещественного корня $x_{12} = -0.914710602925\dots$

Номер дроби, i	Значение подходящей дроби	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Номер дроби, i	Значение подходящей дроби	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$
120	-0.166666666667	-0.748043936258	794	-0.915108995829	0.000398392904
121	-0.369230769231	-0.545479833694	1151	-0.915064419461	0.000353816536
122	-0.619047619048	-0.295662983877	1428	-0.914696626243	-0.000013976682
123	-0.933333333333	0.018622730408	2339	-0.914714604778	0.000004001853
246	-0.900000540829	-0.014710062096	2973	-0.914712028919	0.000001425994
283	-0.911768355829	-0.002942247096	3250	-0.914711862234	0.000001259309
517	-0.917558586942	0.002847984017	3607	-0.914709718575	-0.000000884350
677	-0.912638347559	-0.002072255366	3884	-0.914710601151	-0.00000001774

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы отметили, что формулы (9), (11) и (12) представляют корни полинома n -й степени через его коэффициенты. Используя эти формулы, можно устанавливать различные критерии, связанные с корнями полиномов общего вида. Численные методы, разумеется, не способны к решению подобных задач. То обстоятельство, что в формулу (9) входят определители бесконечного порядка, не должно вызывать дополнительных вопросов, ибо нахождение даже корня квадратного уравнения также связано с бесконечной вычислительной процедурой, эквивалентной вычислению отношения значений трехдиагональных определителей размерностей $(n + 1)$ и n при $n \rightarrow \infty$. Формулу (9), включающую отношения определителей Тейлора бесконечного порядка, можно рассматривать как мнемоническую запись алгоритма нахождения корней произвольного алгебраического уравнения n -го порядка, которая разворачивается в последовательность арифметических операций. Точно так же мнемоническими записями являются формулы для нахождения корней квадратных или кубических уравнений. Формула (9) была названа функцией $N_i^{(n)}$. Произвольное алгебраическое уравнение степени n неразрешимо в радикалах, но оно оказалось разрешимо с использованием r/φ -алгоритма в функциях $N_i^{(n)}$, записываемых отношениями определителей Тейлора бесконечного порядка (9).

Применение r/φ -алгоритма к функциям $N_i^{(n)}$, то есть к конструкции (9), содержащей только действительные коэффициенты алгебраического уравнения n -й степени, позволяет «извлечь» из этих конструкций комплексные корни этого уравнения, если они, конечно, имеются. Это парадоксальный результат, не вписывающийся в классический подход к представлению комплексных чисел в «явном



виде» — через выражения, содержащие $\sqrt{-1}$. Использование r/φ -алгоритма позволяет установить комплексность из «поведения» подходящих дробей. Комплексные корни находятся из «расширяющихся» непрерывных дробей (9) с использованием r/φ -алгоритма. По своей природе r/φ -алгоритм требует большого объема вычислений, так как комплексность извлекается, если она имеется, из анализа поведения длинной серии подходящих непрерывных дробей той или иной структуры, причем элементы этих непрерывных дробей вещественны.

Библиографический список

1. Кутищев Г. П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени : теория, методы, алгоритмы. М. : Изд-во ЛКИ, 2010. 232 с.
2. Корчагин И. Ф. Алгебраические уравнения. М. : Физматкнига, 2006. 160 с.
3. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров. М. : Наука, 1972. 400 с.
4. Шмойлов В. И., Тучапский Р. И. Алгебраические уравнения. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Библиографический указатель. Львов : Меркатор, 2003. 83 с.
5. Mellin H. J. Resolution de l' equation algebrigue generale a l'aide de fonction gamma // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I : Math. 1921. Vol. 172. P. 658–661.
6. Михалкин Е. Н. О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47, № 2, С. 365–371.
7. Шмойлов В. И. Непрерывные дроби : в 3 т. Т. 2. Расходящиеся непрерывные дроби / НАН Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики. Львов : Меркатор, 2004. 558 с.
8. Шмойлов В. И., Коваленко В. Б. Некоторое применение алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестн. Южного науч. центра РАН. 2012. № 4 (149). С. 3–13.
9. Шмойлов В. И., Кириченко Г. А. Определение значений расходящихся непрерывных дробей и рядов // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2012. № 4(129). С. 210–222.
10. Шмойлов В. И., Савченко Д. И. Об алгоритме суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2013. № 2. С. 258–276.
11. Шмойлов В. И. Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. Таганрог : Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. 205 с.
12. Гузик В. Ф., Шмойлов В. И., Кириченко Г. А. Непрерывные дроби и их применение в вычислительной математике // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2014. № 1 (150). С. 158–174.
13. Aitken A. C. On Bernulli's numerical solution of algebraic equations. Edinburg : Proc. Roy. Soc., 1925, 1926. P. 289–305.
14. Шмойлов В. И. Непрерывные дроби и r/φ -алгоритм. Таганрог : Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. 608 с.
15. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и её применение в вычислительной математике. М. : Наука, 1983. 312 с.
16. Рутисхаузер Г. Алгоритм частных и разностей. М. : Изд-во иностр. лит., 1960. 93 с.

Solution of Algebraic Equations by Continuous Fractions of Nikiportsa

V. I. Shmoylov¹, G. A. Kirichenko²

¹Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (SSC RAS), 41, Chehova str., Rostov-on-Don, 344006, Russia, Shmoylov40@at.infotectt.ru

²Southern Federal University, 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia, vt_GAK@mail.ru

Provides analytical expressions representing all the roots of a random algebraic equation of n -th degree through the coefficients of the initial equation. These formulas consist of two relations infinite Toeplitz determinants, the diagonal elements of which are the coefficients of algebraic equations. For finding complex roots additionally used the method of summation of divergent continued fractions.

Key words: algebraic equations, infinite Toeplitz determinants, r/φ -algorithm, divergent continuous fractions.

References

1. Kutishchev G. P. *Reshenie algebraicheskikh uravnenii proizvol'noi stepeni : teoriia, metody, algoritmy* [The solution of the algebraic equations of arbitrary degree : theory, methods, algorithms]. Moscow, Izd-vo LKI, 2010, 232 p. (in Russian).
2. Korchagin I. F. *Algebraicheskie uravneniia* [Algebraic equations]. Moscow, Fizmatkniha, 2006, 160 p. (in Russian).
3. Khemming R. V. *Chislennye metody dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Numerical methods for scientists and engineers]. Moscow, Nauka, 1972, 400 p. (in Russian).



4. Shmoylov V. I., Tuchapskii R. I. *Algebraicheskie uravneniia. Beskonechnye sistemy lineinykh algebraicheskikh uravnenii. Bibliograficheskii ukazatel'* [Algebraic equations. An infinite system of linear algebraic equations. Bibliographic index]. L'vov, Merkator, 2003, 83 p.
5. Mellin H. J. Resolution de l' equation algebrigue generale a l'aide de fonction gamma. *C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I: Math.*, 1921, vol. 172, pp. 658–661.
6. Mikhalkin E. N. On solving general algebraic equations by integrals of elementary functions. *Siberian Math. J.*, 2006, vol. 47, no. 2, pp. 301–306. DOI: 10.1007/s11202-006-0043-4.
7. Shmoylov V. I. *Nepreryvnye drobi. T. 2. Raskhodiashchiesia nepreryvnye drobi* [Continuous fractions. Vol. 2. Divergent continuous fractions]. National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of applied problems of mechanics and mathematics, L'vov, Merkator, 2004. 558 p. (in Russian).
8. Shmoilov V. I., Kovalenko V. B. Some applications of the summation algorithm of divergent continued fractions. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra (Vestnik SSC RAS)*, 2012, vol. 8, no. 4 (149), pp. 3–13 (in Russian).
9. Shmoylov V. I., Kirichenko G. A. Determination of the values of divergent continuous fractions and series. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2012, no. 4(129), pp. 210–222 (in Russian).
10. Shmoylov V. I., Savchenko D. I. Some applications of the summation algorithm of continued fractions. *Proc. Voronezh. State Univ., Ser. Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 258–276 (in Russian).
11. Shmoilov V. I. *Raskhodiashchiesia sistemy lineinykh algebraicheskikh uravnenii* [Diverging systems of linear algebraic equations]. Taganrog, Tekhnologicheskii Institut, Yuzhnyi Federal'nyi Universitet, 2010, 205 p. (in Russian).
12. Guzik V. F., Shmoylov V. I., Kirichenko G. A. Continuous fractions and their application in computational mathematics. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2014, no. 1 (150), pp. 158–174 (in Russian).
13. Aitken A. C. *On Bernulli's numerical solution of algebraic equations*. Edinburg: Proc. Roy. Soc., 1925, 1926, pp. 289–305.
14. Shmoilov V. I. *Continued fractions and the r/φ -algorithm*. Taganrog, Tekhnologicheskii Institut, Yuzhnyi Federal'nyi Universitet, 2012, 606 p. (in Russian).
15. Skorobogat'ko V. Ia. *Teoriia vetviashchikhsia tsepnykh drobei i ee primenenie v vychislitel'noi matematike* [The theory of branched continued fractions and its application in computational mathematics]. Moscow, Nauka, 1983, 312 p. (in Russian).
16. Rutishauser G. *Algoritm chastnykh i raznostei* [The algorithm private and differences]. Moscow, 1960, 93 p. (in Russian).

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. А. Юрко

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дискретных операторов треугольной структуры в топологических пространствах. Указана конструктивная процедура решения обратной задачи. Получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Ключевые слова: дискретные операторы, спектральная теория, обратная задача.

1. Исследуется обратная задача спектрального анализа для несамосопряженных дискретных операторов треугольной структуры в абстрактных топологических пространствах. Рассматриваемые структуры являются объектами весьма общего вида. Широкие классы обратных задач для дискретных, дифференциальных, интегро-дифференциальных операторов и пучков операторов сводятся к обратным задачам для рассматриваемых треугольных структур. В статье дается определение треугольных структур, рассматривается их канонический вид. Получено решение обратной задачи для треугольных структур. Дается приложение полученных результатов для наиболее важных классов дискретных операторов высших порядков. Отметим, что дискретные операторы второго порядка изучены достаточно подробно (см. [1–3] и библиографию в них). Дискретные операторы высших порядков исследовались в [4] и других работах.

2. Обозначим: ЛП — линейное пространство, ЛТП — полное сепарабельное линейное топологическое пространство, имеющее счетную базу. Если Γ_1 и Γ_2 — ЛП, то $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ обозначает ЛП линейных операторов, отображающих Γ_1 в Γ_2 . Для $A \in \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ пусть $\Delta^1(A)$ обозначает область определения, а $\Delta^2(A) = A(\Delta^1(A))$. Оператор $A \in \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ называется неособым ($A \neq 0$), если $\ker A = \{0\}$,



т. е. уравнение $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение. Если Γ_1 и Γ_2 — ЛТП, то $[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2]$ обозначает множество непрерывных операторов (возможно, нелинейных), отображающих Γ_1 в Γ_2 , а $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ обозначает ЛТП векторов $x = [x_1, x_2]$, $x_j \in \Gamma_j$ с поординатной сходимостью. Если Γ — ЛТП, то Γ^∞ обозначает ЛТП последовательностей $x = [x_j]_{j \geq 0}$, $x_j \in \Gamma$, с поординатной сходимостью.

Пусть Γ — ЛП, $\hat{\Gamma} = \Gamma \rightarrow \Gamma$, и пусть Λ — множество многочленов вида

$$F(\lambda) = \sum_{k=-j_1}^{j_2} F_k \lambda^k, \quad F_k \in \hat{\Gamma}$$

(с любыми натуральными j_1 и j_2). Положим $\mathcal{F}(\Gamma) = \Lambda \rightarrow \Gamma$. Элементы ЛП $\mathcal{F}(\Gamma)$, называются обобщенными функциями (ОФ). Если $P \in \mathcal{F}(\Gamma)$, то $P_{k+1} = (E\lambda^k, P) \in \Gamma$ называются моментами P (здесь и далее E — единичный оператор, а (\cdot, P) обозначает действие P). Ясно, что ОФ $P \in \mathcal{F}(\Gamma)$ однозначно определяется своими моментами по формуле $(F(\lambda), P) = \sum_k F_k P_{k+1}$, $F(\lambda) \in \Lambda$. Удобно записывать ОФ $P \in \mathcal{F}(\Gamma)$ в виде формального ряда

$$P(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{P_k}{\lambda^k}, \quad P_k \in \Gamma. \quad (1)$$

Можно умножать $P \in \mathcal{F}(\Gamma)$ на элементы Λ по формуле $(F(\lambda), G(\lambda)P) = (F(\lambda)G(\lambda), P)$, $F(\lambda), G(\lambda) \in \Lambda$. Это означает, что ряд (1) формально умножается на $G(\lambda)$. Пусть $\mathcal{F}^+(\Gamma)$ — ЛП обобщенных функций $P \in \mathcal{F}(\Gamma)$ таких, что $P_k = 0$ при $k < 0$. Если Γ — ЛТП, то $\mathcal{F}[\Gamma]$ обозначает ЛТП обобщенных функций (1) со сходимостью: $P^j \xrightarrow{\mathcal{F}[\Gamma]} P$, если $P_k^j \xrightarrow{\Gamma} P_k$ при всех k . Пусть $\mathcal{F}^+[\Gamma]$ — ЛТП функций $P \in \mathcal{F}(\Gamma)$ таких, что $P_k = 0$ при $k < 0$.

Пусть теперь $\Gamma, \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ — ЛТП. Для $r \in \Gamma_0$ рассмотрим следующие семейства ОФ: $A = A(r) \in \mathcal{F}^+(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2)$, $S = S(r) \in \mathcal{F}^+(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma)$, $f = f(r) \in \mathcal{F}^+(\Gamma_2)$ с моментами A_k, S_k, f_k соответственно. Предположим, что оператор $A_0(r)$ обратим при каждом фиксированном $r \in \Gamma_0$, а операторы A_0^{-1}, A_k ($k \geq 1$), S_k, f_k ($k \geq 0$) непрерывны по всем аргументам в совокупности, т.е. $A_0^{-1} \in [\Gamma_0 \times \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1]$, $A_k \in [\Gamma_0 \times \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2]$ ($k \geq 1$), $S_k \in [\Gamma_0 \times \Gamma_1 \rightarrow \Gamma]$, $f_k \in [\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_2]$, ($k \geq 0$). Не нарушая общности считаем, что $\Delta^2(A_0) = \Gamma_2$, $\Delta^1(A_k) = \Gamma_1$ ($k \geq 1$), $\Delta^1(S_k) = \Gamma_1$ ($k \geq 0$) при каждом $r \in \Gamma_0$. Тройка (A, S, f) называется обобщенным спектральным пучком (ОСП).

При $r \in \Gamma_0$ определим семейство операторов $\hat{A} = \hat{A}(r) \in \mathcal{F}^+(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{F}^+(\Gamma_2)$, $\hat{S} = \hat{S}(r) \in \mathcal{F}^+(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{F}^+(\Gamma)$:

$$\hat{A}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \sum_{\nu=0}^k A_{\nu} y_{k-\nu}, \quad \hat{S}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \sum_{\nu=0}^k S_{\nu} y_{k-\nu}, \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} y_k \in \mathcal{F}^+(\Gamma_1).$$

При каждом фиксированном $r \in \Gamma_0$ оператор $\hat{A} = \hat{A}(r)$ обратим, и $\Delta^2(\hat{A}(r)) \in \mathcal{F}^+(\Gamma_2)$, $\hat{A}^{-1} \in [\Gamma_0 \times \mathcal{F}^+(\Gamma_2) \rightarrow \mathcal{F}^+(\Gamma_1)]$, $\hat{S} \in [\Gamma_0 \times \mathcal{F}^+(\Gamma_1) \rightarrow \mathcal{F}^+(\Gamma)]$, $f \in [\Gamma_0 \rightarrow \mathcal{F}^+(\Gamma_2)]$.

Определение 1. Решение

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \varphi_k \in \mathcal{F}^+(\Gamma_1)$$

уравнения $\hat{A}\varphi = f$ называется *решением Вейля для ОСП* (A, S, f) . Обобщенная функция

$$\Pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \Pi_k \in \mathcal{F}^+(\Gamma),$$

определяемая соотношением $\Pi = \hat{S}\varphi$, называется *функцией Вейля для ОСП* (A, S, f) .

Обратная задача 1: дана функция Вейля $\Pi \in \mathcal{F}^+(\Gamma)$, построить $r \in \Gamma_0$.

В этой обратной задаче оператор A характеризует математическую модель объекта, $r \in \Gamma_0$ описывает параметры объекта, f — внешнее воздействие, φ — реакция объекта на внешнее воздействие, Π — результат измерения.

Решение обратной задачи 1 эквивалентно решению уравнения $\Pi = \psi(r)$, где $\psi = \hat{S}\hat{A}^{-1}f \in [\Gamma_0 \rightarrow \mathcal{F}^+(\Gamma)]$. Оператор ψ называется *ОСП оператором*, а операторы $\psi_k = \psi_k(r) \in [\Gamma_0 \rightarrow \Gamma]$, определяемые формулой $\psi_k = \sum_{\nu=0}^k S_{\nu} \varphi_{k-\nu}$, называются *моментами* ψ .



Пример 1 (линейный пучок). Пусть $\Gamma_1 = \Gamma_2$ и при $r \in \Gamma_0$ даны семейства $B = B(r) \in \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$, $\sigma = \sigma(r) \in \Gamma_1 \rightarrow \Gamma$, $g = g(r) \in \Gamma_1$. Рассмотрим уравнение $(E - \lambda^{-1}B)y = g$. Обозначим

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \varphi_k \in \mathcal{F}^+[\Gamma_1], \quad \Pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \Pi_k \in \mathcal{F}^+[\Gamma],$$

где $\varphi_k = B^k g$, $\Pi_k = \sigma B^k g$. В частности, если Γ, Γ_1 — банаховы пространства и B, σ — ограниченные операторы, то $\varphi = (E - \frac{1}{\lambda}B)^{-1} g$, $\Pi = \sigma \varphi$ регулярны при $|\lambda| > \|B\|$. Обратная задача построения r по заданному Π является частным случаем обратной задачи для GSP (A, S, f) с $A_0 = E$, $A_1 = -B$, $A_k = 0$ ($k \geq 2$), $f_0 = g$, $S_0 = \sigma$, $S_k = f_k = 0$ ($k \geq 1$). Тройка (B, σ, g) называется линейным ОСП (ЛОСП).

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$b_\nu y_{\nu+1} + a_\nu y_\nu + b_{\nu-1} y_{\nu-1} = \lambda y_\nu, \quad \nu \geq 1, \tag{2}$$

где a_ν — вещественные числа, а $b_\nu > 0$. Известно, что при $Im \lambda \neq 0$ существует решение Φ уравнения (2) такое, что $\Phi_\nu(\lambda) \in l_2$, $\Phi_0(\lambda) = 1$. Положим $M(\lambda) = \Phi_1(\lambda)$. Имеют место асимптотические формулы

$$\Phi_\nu(\lambda) = \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \Phi_{k\nu}, \quad M(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} M_k, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

причем M_k — моменты спектральной функции. Коэффициенты $\{a_\nu, b_\nu\}$ однозначно определяются по $\{M_k\}_{k \geq 1}$. Рассмотрим ЛОСП (B, σ, g) , где $\Gamma_1 = \Gamma_2 = E_1^\infty$, $\Gamma = E_1$, $\Gamma_0 = E_2^\infty$, $y = [y_k]_{k \geq 0}$, $g = [\delta_{k0}]_{k \geq 0}$, $\sigma y = y_1$,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее δ_{kj} — символ Кронекера, а E_p — евклидово пространство размерности p . Тогда $\varphi_k = [\Phi_{k\nu}]_{\nu \geq 0} \in \Gamma_1$, $\Pi_k = M_k \in \Gamma$ — моменты решения Вейля и функции Вейля соответственно. Таким образом, в этом случае обратная задача для ЛОСП соответствует задаче построения $\{a_\nu, b_\nu\}$ по заданным моментам $\{M_k\}_{k \geq 1}$.

Пример 3. Рассмотрим дифференциальный оператор S вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 y &\equiv -y'' + q(x)y, & q(x) &\in C[0, \pi], \\ U(y) &\equiv y'(0) - hy(0) = 0; & V(y) &\equiv y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\Phi(x, \mu)$ — решение уравнения $\mathcal{L}_0 \Phi = \mu \Phi$, $x \in (0, \pi)$ при условиях $U(\Phi) = 1$, $V(\Phi) = 0$, и пусть $M(\mu) = \Phi(0, \mu)$. Тогда $M(\mu)$ является функцией Вейля для S . Если нуль не является собственным значением, то $\Phi(x, \mu)$ удовлетворяет уравнению $y - \mu G y = G(x, 0)$, где $G(x, t)$ — ядро интегрального оператора $G = S^{-1}$. Другими словами, $\Pi = M(\mu)$ и $\varphi = \Phi(x, \mu)$ являются функцией Вейля и решением Вейля для ЛОСП (B, σ, g) соответственно, где $\lambda = 1/\mu$, $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = C[0, \pi]$, $\Gamma = E_1$, $B = G$, $g = G(x, 0)$, $\sigma y(x) = y(0)$, $r = q(x)$. Обратная задача для ОСП соответствует задаче восстановления оператора Штурма — Лиувилля по функции Вейля $M(\mu)$.

3. R-структуры. Пусть $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \Gamma$ — ЛТП, и пусть $\Gamma_\nu = \gamma_\nu^\infty$ ($\nu = 0, 1, 2$), $r = [r_k]_{k \geq 0}$, $r_k \in \gamma_0$. Положим $x_p = [r_k]_{k=0, p}$, $x'_p = [r_k]_{k > p}$. При $r \in \Gamma_0$ рассмотрим семейства $\alpha_{\nu j}^k = \alpha_{\nu j}^k(x_{\nu+k}) \in \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$, $S_{kj} = S_{kj}(x_k) \in \gamma_1 \rightarrow \Gamma$, $f_{k\nu} = f_{k\nu}(x_{k+\nu}) \in \gamma_2$, $k, \nu, j \geq 0$, где $\alpha_{\nu j}^k = 0$ ($j > \nu + k$), $S_{kj} = 0$ ($j > k$), и при каждом $r \in \Gamma_0$ операторы α_{jj}^0 обратимы. Предположим, что $(\alpha_{jj}^0)^{-1} \in [\gamma_0^{j+1} \times \gamma_2 \rightarrow \gamma_1]$, $\alpha_{\nu j}^k \in [\gamma_0^{\nu+k+1} \times \gamma_1 \rightarrow \gamma_2]$ ($k + |\nu - j| > 0$), $f_{k\nu} \in [\gamma_0^{\nu+k+1} \rightarrow \gamma_2]$, $S_{kj} \in [\gamma_0^{k+1} \times \gamma_1 \rightarrow \Gamma]$. Без ограничения общности считаем, что $f_{00} \neq 0$, $\Delta^2(\alpha_{jj}^0) = \gamma_2$, $\Delta^1(\alpha_{\nu j}^k) = \gamma_1$, ($k + |\nu - j| > 0$), $\Delta^1(S_{kj}) = \gamma_1$ при каждом $r \in \Gamma_0$.



При $r \in \Gamma_0$ рассмотрим $f_k = [f_{k\nu}]_{\nu \geq 0} \in \Gamma_2$, $A_k \in \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$, $S_k \in \Gamma_1 \rightarrow \Gamma$, где

$$A_k y = \left[\sum_{j=0}^{k+\nu} \alpha_{\nu j}^k y_j \right]_{\nu \geq 0}, \quad S_k y = \sum_{j=0}^k S_{kj} y_j, \quad y = [y_j]_{j \geq 0} \in \Gamma_1. \quad (3)$$

При каждом фиксированном $r \in \Gamma_0$ оператор A_0 обратим и $\Delta^2(A_0) = \Gamma_2$, $A_0^{-1} \in [\Gamma_0 \times \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1]$, $A_k \in [\Gamma_0 \times \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2]$ ($k \geq 1$), $S_k \in [\Gamma_0 \times \Gamma_1 \rightarrow \Gamma]$, $f_k \in [\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_2]$ ($k \geq 0$).

R -структурой называется ОСП (A, S, f) , где

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda^k} \in \mathcal{F}^+(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2), \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{\lambda^k} \in \mathcal{F}^+(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma), \quad f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda^k} \in \mathcal{F}^+(\Gamma_2),$$

и A_k, S_k определяются формулами (3). Пусть

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{\lambda^k} \in \mathcal{F}^+(\Gamma_1), \quad \varphi_k = [\varphi_{k\nu}]_{\nu \geq 0} \in \Gamma_1, \quad \Pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Pi_k}{\lambda^k} \in \mathcal{F}^+(\Gamma)$$

— решение Вейля и функция Вейля для R -структуры (A, S, f) соответственно. Тогда их моменты удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{s=0}^k \sum_{j=0}^{s+\nu} \alpha_{\nu j}^s \varphi_{k-s,j} = f_{k\nu}, \quad \sum_{s=0}^k \sum_{j=0}^s S_{sj} \varphi_{k-s,j} = \Pi_k, \quad k, \nu \geq 0. \quad (4)$$

При $r \in \gamma_0$ рассмотрим семейства $\tilde{\varphi}^l = [\varphi_{l-\nu,\nu}]_{\nu=\overline{0,l}} \in \gamma_1^{l+1}$, $\tilde{f}^l = [f_{l-\nu,\nu}]_{\nu=\overline{0,l}} \in \gamma_2^{l+1}$, $\tilde{S}^{l\mu} \in \gamma_1^{\mu+1} \rightarrow \Gamma$, $\tilde{A}^{l\mu} \in \gamma_1^{\mu+1} \rightarrow \gamma_2^{l+1}$, $\mu = \overline{0,l}$, где

$$\tilde{S}^{l\mu} \tilde{y}^\mu = \sum_{j=0}^{\mu} S_{l-\mu+j,j} y_j, \quad \tilde{A}^{l\mu} \tilde{y}^\mu = \left[\sum_{j=0}^{\mu} \alpha_{\nu j}^{l-\mu+j-\nu} y_j \right]_{\nu=\overline{0,l}},$$

$\tilde{y}^\mu = [y_j]_{j=\overline{0,\mu}} \in \gamma_1^{\mu+1}$, $\alpha_{\nu j}^k = 0$ при $k \leq 0$. При каждом $r \in \Gamma_0$ операторы \tilde{A}^{ll} обратимы и $\Delta^2(\tilde{A}^{ll}) = \gamma_1^{l+1}$. Операторы $\tilde{f}^l, \tilde{S}^{l\mu}, \tilde{A}^{l\mu}$ не зависят от x'_l , и

$$\begin{aligned} \tilde{f}^l &= \tilde{f}^l(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \rightarrow \gamma_2^{l+1}], & \tilde{S}^{l\mu} &= \tilde{S}^{l\mu}(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \times \gamma_1^{\mu+1} \rightarrow \Gamma], \\ (\tilde{A}^{ll})^{-1} &= (\tilde{A}^{ll}(x_l))^{-1} \in [\gamma_0^{l+1} \times \gamma_2^{l+1} \rightarrow \gamma_1^{l+1}], & \tilde{A}^{l\mu} &= \tilde{A}^{l\mu}(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \times \gamma_1^{\mu+1} \rightarrow \gamma_2^{l+1}] \quad (\mu < l). \end{aligned}$$

Преобразуем (4) к виду

$$\sum_{\mu=0}^l \tilde{A}^{l\mu} \tilde{\varphi}^\mu = \tilde{f}^l, \quad \sum_{\mu=0}^l \tilde{S}^{l\mu} \tilde{\varphi}^\mu = \Pi_l, \quad l \geq 0. \quad (5)$$

Так как \tilde{A}^{ll} обратимы, то

$$\tilde{\varphi}^l = (\tilde{A}^{ll})^{-1} \left(\tilde{f}^l - \sum_{\mu=0}^{l-1} \tilde{A}^{l\mu} \tilde{\varphi}^\mu \right), \quad l \geq 0. \quad (6)$$

Определим операторы ψ_l :

$$\psi_l = \sum_{\mu=0}^l \tilde{S}^{l\mu} \tilde{\varphi}^\mu, \quad l \geq 0. \quad (7)$$

Используя (6) и (7), заключаем, что $\tilde{\varphi}^l$ и ψ_l не зависят от x'_l , и $\tilde{\varphi}^l = \tilde{\varphi}^l(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \rightarrow \gamma_1^{l+1}]$, $\psi_l = \psi_l(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \rightarrow \Gamma]$. Таким образом, доказана следующая теорема.



Теорема 1. Пусть $\psi = \psi(r)$ — ОСП оператор для R -структуры (A, S, f) с моментами $\psi_l(r), l \geq 0$. Тогда

1. Операторы $\psi_l = \psi_l(x_l)$ не зависят от x'_l , они строятся по формулам (6), (7) и $\psi_l(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \rightarrow \Gamma]$. Уравнение обратной задачи $\Pi = \psi(r)$ имеет вид

$$\Pi_l = \psi_l(r_0, r_1, \dots, r_l), \quad l \geq 0. \quad (8)$$

2. Для того чтобы ОФ $\Pi \in \mathcal{F}^+[\Gamma]$ была функцией Вейля для R -структуры (A, S, f) , необходимо и достаточно, чтобы $\Pi \in \Delta^2(\psi)$.

3. Если оператор $\psi(r)$ обратим, то решение обратной задачи единственно. В частности, если при любых $r_0, r_1, \dots, r_{l-1}, l \geq 0$ операторы $\psi(x_{l-1}, r_l)$ обратимы относительно r_l , то решение обратной задачи единственно.

Отметим, что ОСП оператор для R -структуры имеет треугольный вид: $\psi_l = \psi_l(r_0, r_1, \dots, r_l)$, т. е. моменты ψ_l не зависят от x'_l (назовем это свойство V-свойством). Построение $r = [r_k]_{k \geq 0}$ реализуется решением (8) относительно r_l последовательно для $l = 0, 1, 2, \dots$. Отметим также, что R -структура является каноническим видом дискретных ОСП с V-свойством.

Рассмотрим теперь важный частный случай R -структур: линейные в главном R_1 -структуры. При $r = [r_k]_{k \geq 0} \in \Gamma_0$ рассмотрим семейства $\beta_\nu^k = \beta_\nu^k(x_{\nu+k}) \in \gamma_1 \rightarrow \gamma_2, z_{k\nu} = z_{k\nu}(x_{\nu+k}) \in \gamma_2 (k + \nu > 0), c_k = c_k(x_k) \in \gamma_1 \rightarrow \Gamma (k \geq 0)$, и предположим, что при фиксированном $x_{\nu+k-1} \in \gamma_0^{\nu+k}$ операторы $\beta_\nu^k \in \gamma_0 \rightarrow (\gamma_1 \rightarrow \gamma_2), z_{k\nu} \in \gamma_0 \rightarrow \gamma_2$ являются линейными по $r_{\nu+k}$ и при фиксированном $x_{k-1} \in \gamma_0^k$ операторы $c_k \in \gamma_0 \rightarrow (\gamma_1 \rightarrow \Gamma)$ являются линейными по r_k . Предположим также, что $\beta_\nu^k \in [\gamma_0^{k+\nu+1} \times \gamma_1 \rightarrow \gamma_2], c_k \in [\gamma_0^{k+1} \times \gamma_1 \rightarrow \Gamma], z_{k\nu} \in [\gamma_0^{k+\nu+1} \rightarrow \gamma_2]$. Пусть $\alpha_{\nu 0}^k = \beta_\nu^k + \alpha_{\nu 0}^{*,k}, f_{k\nu} = z_{k\nu} + f_{k\nu}^* (k + \nu > 0), S_{k0} = c_k + S_{k0}^* (k \geq 0)$, и пусть $\alpha_{\nu 0}^{*,k}, f_{k\nu}^*, \alpha_{\nu j}^k (j \geq 1)$ не зависят от $r_{\nu+k}$, а $S_{k0}^*, S_{kj}^* (j \geq 1)$ не зависят от r_k . R -структура с этими свойствами называется R_1 -структурой.

При фиксированном $x_{l-1} \in \gamma_0^l$ определим операторы

$$c_l^* r_l = c_l (\alpha_{00}^0)^{-1} f_{00}, \quad \tilde{\Theta}^l r_l = [\beta_\nu^{l-\nu} (\alpha_{00}^0)^{-1} f_{00} - z_{l-\nu, \nu}]_{\nu=0, \dots, l}.$$

Операторы $c_l^*, \tilde{\Theta}^l$ являются линейными по r_l . Для R_1 -структуры преобразуем (5) к виду

$$c_1^* r_l + \tilde{S}^{ll} \tilde{\varphi}^l = \Pi_l - \tilde{S}_*^{l0} \tilde{\varphi}^0 - \sum_{\mu=1}^{l-1} \tilde{S}^{l\mu} \tilde{\varphi}^\mu, \quad l \geq 1,$$

$$\tilde{\Theta}^l r_l + \tilde{A}^{ll} \tilde{\varphi}^l = \tilde{f}_*^l - \tilde{A}_*^{l0} \tilde{\varphi}^0 - \sum_{\mu=1}^{l-1} \tilde{A}^{l\mu} \tilde{\varphi}^\mu, \quad l \geq 1,$$

где $\tilde{A}_*^{l0}, \tilde{S}_*^{l0}, \tilde{f}_*^l$ строятся по $\alpha_{\nu 0}^{*,k}, S_{k0}^*, f_{k\nu}^*$, так же как $\tilde{A}^{l0}, \tilde{S}^{l0}, \tilde{f}^l$ строятся по $\alpha_{\nu 0}^k, S_{k0}, f_{k\nu}$. Используя (6), (7), получим для R_1 -структур

$$\psi_l = d_l r_l + \psi_l^*, \quad l \geq 1, \quad (9)$$

$$d_l = c_l^* - \tilde{S}^{ll} (\tilde{A}^{ll})^{-1} \tilde{\Theta}^l, \quad (10)$$

$$\psi_l^* = \tilde{S}^{ll} \tilde{h}^l + \tilde{S}_*^{l0} \tilde{\varphi}^0 + \sum_{\mu=1}^{l-1} \tilde{S}^{l\mu} (\tilde{h}^\mu - (\tilde{A}^{\mu\mu})^{-1} \tilde{\Theta}^\mu r_\mu), \quad (11)$$

$$\tilde{h}^l = (\tilde{A}^{ll})^{-1} \{ \tilde{f}_*^l - \tilde{A}_*^{l0} \tilde{\varphi}^0 - \sum_{\mu=1}^{l-1} \tilde{A}^{l\mu} (\tilde{h}^\mu - (\tilde{A}^{\mu\mu})^{-1} \tilde{\Theta}^\mu r_\mu) \}. \quad (12)$$

Обозначим

$$D_l = \begin{bmatrix} c_l^* & \tilde{S}^{ll} \\ \tilde{\Theta}^l & \tilde{A}^{ll} \end{bmatrix}.$$

При каждом $x_{l-1} \in \gamma_0^l$ операторы $d_l = d_l(x_{l-1}) \in \gamma_0 \rightarrow \Gamma$ и $D_l = D_l(x_{l-1}) \in \gamma_0 \times \gamma_1^{l+1} \rightarrow \Gamma \times \gamma_1^{l+1}$ являются линейными по r_l и $[r_l, \tilde{\varphi}^l]$ соответственно. Кроме того, $d_l(x_{l-1}) r_l \in [\gamma_0^{l+1} \rightarrow \Gamma], \psi_l^* = \psi_l^*(x_{l-1}) \in [\gamma_0^l \rightarrow \Gamma]$. Следующие системы эквивалентны

$$\left. \begin{aligned} c_l^* y_1 + \tilde{S}^{ll} y_2 &= w_1, & y_1 &\in \gamma_0, & y_2 &\in \gamma_1^{l+1}, \\ \tilde{\Theta}^l y_1 + \tilde{A}^{ll} y_2 &= w_2, & w_1 &\in \Gamma_1, & w_2 &\in \gamma_2^{l+1}, \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} y_2 + (\tilde{A}^l)^{-1} \tilde{\Theta}^l y_1 &= (\tilde{A}^l)^{-1} w_2, \\ d_l y_1 &= w_1 - \tilde{S}^l (\tilde{A}^l)^{-1} w_2, \end{aligned} \right\}$$

и, следовательно, при фиксированных $l \geq 1, x_{l-1} \in \gamma_0^l$, линейный оператор $d_l \in \gamma_0 \rightarrow \Gamma$ является обратимым (неособым) тогда и только тогда, когда линейный оператор $D_l \in \gamma_0 \times \gamma_1^{l+1} \rightarrow \Gamma \times \gamma_1^{l+1}$ является обратимым (неособым). Для простоты считаем, что r_0 известно (это почти всегда так в приложениях), т.е. (8) рассматриваем при $l \geq 1$. Следующая теорема дает решение обратной задачи для R_1 -структур. Пусть $\psi = \psi(r)$ — ОСП оператор для R_1 -структуры (A, S, f) с моментами ψ_l .

Теорема 2. 1. Операторы $\psi_l, l \geq 1$ строятся по (9)–(12), они не зависят от x_l^i , и $\psi_l(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \rightarrow \Gamma]$.

2. Пусть $D_l \neq 0, l \geq 1$ при каждом $x_{l-1} \in \gamma_0^l$. Тогда для любого $\Pi \in \Delta^2(\psi)$ обратная задача имеет единственное решение, которое может быть найдено по следующему алгоритму.

Алгоритм 1. Для $l = 1, 2, \dots$:

а) строим $\tilde{h}^l, \psi_l^*, d_l$ по (10)–(12);

б) находим r_l из соотношения $d_l r_l + \psi_l^* = \Pi_l$. В частности, если D_l обратимы, то $r_l = d_l^{-1} \Pi_l - d_l^{-1} \psi_l^*$.

3. Кроме того, если операторы d_l^{-1} непрерывны по всем аргументам в совокупности, то $\psi^{-1} \in [\mathcal{F}^+(\Gamma) \rightarrow \Gamma_0]$ (устойчивость решения обратной задачи).

Рассмотрим теперь частный случай R_1 -структуры, когда $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \Gamma$ — конечномерные пространства. Пусть $\gamma_1 = \gamma_2 = E_m, \gamma_0 = \Gamma = E_N$,

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu j}^k &= [\alpha_{k\nu j}^{wz}]_{w,z=\overline{1,m}}, & f_{k\nu} &= [f_{k\nu}^z]_{z=\overline{1,m}}, & S_{kj} &= [S_{kj}^{\Delta z}]_{\Delta=\overline{1,N}; z=\overline{1,m}}, \\ r_l &= [r_{lj}]_{j=\overline{1,N}}, & \Pi_k &= [\Pi_k \Delta]_{\Delta=\overline{1,N}}, & \beta_{\nu j}^k &= [\beta_{k\nu j}^{wz}]_{w,z=\overline{1,m}}, \\ c_{kj} &= [c_{kj}^{\Delta z}]_{\Delta=\overline{1,N}; z=\overline{1,m}}, & z_{k\nu} &= [z_{k\nu}^j]_{j=\overline{1,N}} = [z_{k\nu}^{wj}]_{w=\overline{1,m}; j=\overline{1,N}}, \\ \alpha_{\nu 0}^k &= \sum_{j=1}^N \beta_{\nu j}^k r_{\nu+k,j} + \alpha_{\nu 0}^{*,k}, & f_{k\nu} &= \sum_{j=1}^N z_{k\nu}^j r_{\nu+k,j} + f_{k\nu}^*, & S_{k0} &= \sum_{j=1}^N c_{kj} r_{kj} + S_{k0}^*, \\ \beta_{\nu j}^{*,k} &= \beta_{\nu j}^k (\alpha_{00}^0)^{-1} f_{00}, & c_{lj}^* &= c_{lj} \varphi_{00}, & \beta_{\nu}^{*,k} &= [\beta_{\nu j}^{*,k}]_{j=\overline{1,N}} = [\beta_{\nu w j}^{*,k}]_{w=\overline{1,m}; j=\overline{1,N}}, \\ c_l^* &= [c_{lj}^*]_{j=\overline{1,N}} = [c_{l\Delta j}^*]_{\Delta=\overline{1,N}; j=\overline{1,N}}, & \tilde{\Theta}^l &= [\beta_{\nu}^{*,l-\nu} - z_{l-\nu,\nu}]_{\nu=\overline{0,l}}. \end{aligned}$$

Тогда матрица D_l имеет вид $D_l = [D_{l\nu k}]_{\nu,k=\overline{-1,l}}$, где $D_{l\nu k} = \alpha_{\nu k}^{k-\nu} (k, \nu \geq 0)$, $D_{l,-1,k} = S_{kk}$, $D_{l,\nu,-1} = \beta_{\nu}^{*,l-\nu} - z_{l-\nu,\nu}$, $D_{l,-1,-1} = c_l^*$. Матрицы d_l и D_l являются квадратными матрицами порядков N и $N + m(l + 1)$ соответственно. Условие $D_l \neq 0, l \geq 1$ теоремы 2 имеет вид $\det D_l \neq 0, l \geq 1$.

4. В этом параграфе мы рассмотрим важный частный случай треугольных структур — дискретные операторы высших порядков. Пусть $p, q \geq 1$. Рассмотрим уравнение

$$(Ly)_\nu \equiv \sum_{j=-q}^p a_{\nu j} y_{\nu+j} = \lambda y_\nu, \quad \nu \geq q, \quad a_{\nu,-q} = 1, \quad (13)$$

где $y = [y_\nu]_{\nu \geq 0}$ и $a_{\nu j} \in \mathbf{C}$ — комплексные числа. Оператор L называется невырожденным, если $a_{\nu p} \neq 0, \nu \geq q$. Пусть $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}^+(\mathbf{C})$ — множество ОФ

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} P_k, \quad P_k \in \mathbf{C},$$

а \mathcal{F}_0^+ — множество ОФ $P(\lambda) \in \mathcal{F}^+$, для которых $P_0 = 0$.

Пусть $\Phi_\nu(\lambda) = [\Phi_\nu^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}^T, \nu \geq 0$ — решение уравнения (13) при условиях

$$\Phi_\nu^i(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \Phi_{k\nu}^i \in \mathcal{F}^+, \quad \Phi_\nu^i(\lambda) = \delta_{i,\nu-1} \quad (\nu = \overline{0, q-1}).$$

Решение $\{\Phi_\nu(\lambda)\}_{\nu \geq 0}$ называется решением Вейля, а матрица $M(\lambda) = [M_j^i(\lambda)]_{j=\overline{1,p}; i=\overline{1,q}}$, $M_j^i(\lambda) = \Phi_{j+q-1}^i(\lambda)$ — матрицей Вейля для L .



Обратная задача 2. Построить L по заданной матрице $M(\lambda)$.

Положим $\lambda = \rho^q$,

$$H_\nu(\rho) = \sum_{i=1}^q \rho^{1-i} \Phi_\nu^i(\lambda), \quad \nu \geq 0; \quad \Pi_j(\rho) = H_{j+q-1}(\rho), \quad j = \overline{1, p}; \quad \Pi(\rho) = [\Pi_j(\rho)]_{j=\overline{1, p}}.$$

Тогда

$$H_\nu(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^k} H_{k\nu}, \quad H_{qk+i-1, \nu} = \Phi_{k\nu}^i,$$

$$\Pi_j(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^k} \Pi_{kj}, \quad \Pi_j(\rho) = \sum_{i=1}^q \rho^{1-i} M_j^i(\lambda).$$

Подставляя $H_\nu(\rho)$ в (13), получаем:

$$H_{k\nu} = \sum_{j=-q}^p a_{\nu j} H_{k-q, \nu+j} \quad (k > \nu \geq q), \quad (14)$$

$$H_{\xi\nu} = \delta_{\xi\nu} \quad (\xi \leq \nu), \quad H_{\xi\nu} = 0 \quad (\nu = \overline{0, q-1}, \quad \xi > \nu). \quad (15)$$

Отсюда находим $H_{k\nu}$ и, следовательно, $\Phi_{k\nu}^i$). Итак, для L существует единственное решение Вейля, которое может быть найдено при помощи (14), (15).

Через M^* обозначим множество матриц $M(\lambda) = [M_j^i(\lambda)]_{j=\overline{1, p}, i=\overline{1, q}}$, $M_j^i(\lambda) \in \mathcal{F}^+$, таких, что $\Pi_{kj} = \delta_{k, j+q-1}$ ($j = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, j+q-1}$). Ясно, что если $M(\lambda)$ — матрица Вейля для L , то $M(\lambda) \in M^*$.

Обратная задача 2 является частным случаем обратной задачи для R -структуры. Применим метод из параграфа 2 для решения задачи 2. Положим

$$\chi_{ki} = \left[\frac{k-q-i}{p+q} \right], \quad \mu_{ki} = p\chi_{ki} + q + i - 1, \quad \gamma_{ki} = k - 2q - i + 1 \pmod{p+q}, \quad r_{ki} = a_{\mu_{ki}, \gamma_{ki}},$$

$$\pi_{ji} = a_{jp+q+i-1, p}, \quad W_s^{k, i} = H_{k-sq, sp+q+i-1} \quad (s = \overline{0, \chi_{ki}}), \quad W_{\chi_{ki}+1}^{k, i} = r_{ki},$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Группируя соотношения (14) и используя равенство $H_{k, i+q-1} = \Pi_{ki}$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} H_{k, i+q-1} &= \Pi_{ki}, \\ H_{k-q, sp+q+i-1} &= \sum_{j=-q}^p a_{sp+q+i-1, j} H_{k-q(s-1), sp+q+i+j-1}, \quad s = \overline{0, \chi_{ki}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

При $k \geq q+1$ рассмотрим линейную систему $X_k = (X_{ki})$, $i = \overline{1, \min(p, k-q)}$ вида (15), (16) относительно $W_s^{k, i}$, $s = \overline{0, \chi_{ki}+1}$. Определитель системы X_{ki} равен

$$\prod_{j=0}^{\chi_{ki}-1} \pi_{ji}.$$

Решая X_k последовательно при $k = q+1, q+2, \dots$, находим коэффициенты $H_{k\nu}$, $a_{\nu j}$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для того чтобы матрица $M(\lambda) \in M^*$ была матрицей Вейля для некоторого оператора L вида (13), необходимо и достаточно, чтобы системы X_k , $k \geq q+1$, были разрешимы. Для невырожденных операторов решение обратной задачи единственно.

Для невырожденных операторов L можно получить более удобные и легко проверяемые необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. В дальнейшем считаем, что L невырожденный оператор. Положим

$$R_k(\lambda) = [R_k^j(\lambda)]_{j=\overline{1, p}}^T, \quad R_{pk+i-1}^j(\lambda) = \delta_{ij} \lambda^k, \quad i = \overline{1, p},$$



$$R_k^*(\lambda) = [R_k^{*,j}(\lambda)]_{j=\overline{1,q}}, \quad R_{qk+i-1}^{*,j}(\lambda) = \delta_{ij}\lambda^k, \quad i = \overline{1,q}.$$

Пусть $P_k(\lambda) = [P_k^j(\lambda)]_{j=\overline{1,p}}^T$, $Q_k(\lambda) = [Q_k^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}^T$, $k \geq 0$, — решения уравнения (13) при условиях $P_k(\lambda) = 0$ ($k = \overline{0, q-1}$), $P_{k+q}(\lambda) = R_k(\lambda)$ ($k = \overline{0, p-1}$); $Q_k^i(\lambda) = \delta_{k+1,i}$ ($k = \overline{0, q-1}$), $Q_{k+q}(\lambda) = 0$ ($k = \overline{0, p-1}$). Тогда

$$P_{k+q}(\lambda) = \sum_{i=0}^k c_{ik} R_i(\lambda), \quad k \geq 0, \quad c_{kk} \neq 0. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (13) и сравнивая соответствующие коэффициенты, вычисляем

$$\sum_{j=-q}^p a_{kj} c_{i,k+j-q} = c_{i-p,k-q}, \quad i = \overline{0, k+p-q}.$$

Отсюда получаем рекуррентные формулы для нахождения $a_{k\nu}$ по c_{ik} :

$$a_{k\nu} = (c_{k+\nu-q,k+\nu-q})^{-1} (c_{k+\nu-q-p,k-q} - \sum_{j=\nu+1}^p a_{kj} c_{k+\nu-q,k+j-q}), \quad \nu = \overline{p, -q+1}. \quad (18)$$

Здесь $k \geq q$ при $\nu \geq 0$ и $k \geq q - \nu$ при $\nu < 0$. Кроме того, $c_{ik} = 0$ при $i < 0$. В частности, $a_{kp} = (c_{k+p-q,k+p-q})^{-1} c_{k-q,k-q}$.

Лемма. *Справедливы соотношения*

$$(1, P_{k+q}(\lambda) M(\lambda) R_\nu^*(\lambda)) = \Theta_{k\nu}, \quad 0 \leq k < \nu \leq q-1, \quad \Theta_{k\nu} = a_{q+k, \nu-q-k}, \quad (19)$$

$$(1, P_{k+q}(\lambda) M(\lambda) R_\nu^*(\lambda)) = \delta_{\nu k}, \quad 0 \leq \nu \leq k. \quad (20)$$

Обозначим

$$\mu_{i\nu} = (1, R_i(\lambda) M(\lambda) R_\nu^*(\lambda)), \quad i, \nu \geq 0; \quad \Delta_k = \det[\mu_{i\nu}]_{i, \nu=\overline{0,k}}, \quad k \geq 0.$$

Подставляя (17) в (20), вычисляем

$$\sum_{i=0}^k c_{ik} \mu_{i\nu} = \delta_{\nu k}, \quad 0 \leq \nu \leq k. \quad (21)$$

При каждом $k \geq 0$ (21) является линейной алгебраической системой относительно c_{ik} . Определитель системы (21) равен $\Delta_k \neq 0$ при всех $k \geq 0$. Решая (21), находим

$$c_{ik} = (-1)^{k-i} \Delta_k^{-1} \det[\mu_{j\nu}]_{j=\overline{0,k} \setminus i; \nu=\overline{0,k-1}} \quad (i = \overline{0,k}), \quad c_{kk} = \Delta_{k-1} \Delta_k^{-1}. \quad (22)$$

Так как $P_{k+q}(\lambda) = R_k(\lambda)$, $k = \overline{0, p-1}$, то в силу (20) получаем $\mu_{i\nu} = \delta_{i\nu}$, $0 \leq \nu \leq i \leq p-1$. Отметим, что множество M^* можно определить иначе: M^* — множество матриц $M(\lambda) = [M_j^i(\lambda)]_{j=\overline{1,p}; i=\overline{1,q}}$, $M_j^i(\lambda) \in \mathcal{F}_0^+$ таких, что $\mu_{i\nu} = \delta_{i\nu}$ при $0 \leq \nu \leq i \leq p-1$.

Теорема 4. *Для того чтобы матрица $M(\lambda) \in M^*$ была матрицей Вейля для невырожденного оператора L , необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_k \neq 0$ при всех $k \geq 0$. Оператор L может быть построен по следующему алгоритму.*

Алгоритм 2. 1. Строим c_{ik} ($0 \leq i \leq k$) и $P_{k+q}(\lambda)$ при $k \geq 0$ по (22), (17); положим $P_k(\lambda) \equiv 0$ при $k = \overline{0, q-1}$.

2. Вычисляем $a_{k\nu}$ по (18).

Следствие. *Для того чтобы матрица $M(\lambda) \in M^*$ была матрицей Вейля для невырожденного оператора L с вещественными коэффициентами $a_{\nu j}, a_{\nu p} > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu_{i\nu}$ были вещественными и $\Delta_k > 0$ при всех $k \geq 0$.*

Замечание. Рассмотрим случай $p = q = 1$. Тогда

$$M(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} M_k \in \mathcal{F}^+, \quad M_1 = 1, \quad \mu_{i\nu} = M_{i+\nu+1}, \quad \Delta_k = \det[M_{i+\nu+1}]_{i, \nu=\overline{0,k}}.$$



Функция Вейля $M(\lambda)$ совпадает с обобщенной спектральной функцией [3]. Если $a_{\nu 1} > 0$, а $a_{\nu 0}$ — вещественные числа, то существует, по крайней мере, одна спектральная функция $\sigma(\lambda)$ такая, что

$$M_{k+1} = (\lambda^k, M(\lambda)) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k d\sigma(\lambda), \quad k \geq 0.$$

Числа $\{M_k\}_{k \geq 1}$ являются моментами $\sigma(\lambda)$. Поэтому следствие 1 при $p = q = 1$ совпадает с теоремой о разрешимости классической проблемы моментов.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1436.2014К).

Библиографический список

1. Atkinson F. *Discrete and Continuous Boundary Problems*. N. Y. : Academic Press, 1964.
2. Nikishin E. M. The discrete Sturm – Liouville operator and some problems of the theory of functions // *J. Soviet Math*. 1986. Vol. 35. P. 2679–2744.
3. Гусейнов Г. Ш. Определение бесконечной несамосопряженной матрицы Якоби по ее обобщенной спектральной функции // *Матем. заметки*. 1978. Т. 23, вып. 2. С. 237–248.
4. Yurko V. A. On higher-order difference operators // *J. Differ. Equ. Appl.* 1995. Vol. 1. P. 347–352.

Inverse Spectral Problem for Discrete Operators in Topological Spaces

V. A. Yurko

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, YurkoVA@info.sgu.ru

An inverse spectral problem for discrete operators of a triangular structure in topological spaces is studied. A constructive procedure for the solution of the inverse problem is provided. Necessary and sufficient conditions for its solvability are obtained.

Key words: discrete operators, spectral theory, inverse problems.

The results obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of education and science of the Russian Federation (project no. 1.1436.2014K).

References

1. Atkinson F. *Discrete and Continuous Boundary Problems*. New York, Academic Press, 1964.
2. Nikishin E. M. The discrete Sturm – Liouville operator and some problems of the theory of functions. *J. Soviet Math.*, 1986, vol. 35, pp. 2679–2744.
3. Guseinov G. S. The determination of the infinite non-selfadjoint Jacobi matrix from its generalized spectral function. *Math. Notes*, 1978, vol. 23, iss. 2, pp. 130–136. DOI: 10.1007/BF01153153.
4. Yurko V. A. On higher-order difference operators. *J. Differ. Equ. Appl.*, 1995, vol. 1, pp. 347–352.



МЕХАНИКА

УДК 539.32

ВЛИЯНИЕ ТОПОЛОГИИ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УГЛЕРОДНЫХ НАНОТОРОВ: ПРОГНОСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

О. Е. Глухова¹, А. С. Колесникова², М. М. Слепченков²,
Г. В. Савостьянов³

¹ Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой радиотехники и электродинамики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, oeglukhova@yandex.ru

² Ведущий программист отдела математического моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, kolesnikova.88@mail.ru; slepchenkovm@mail.ru

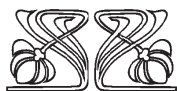
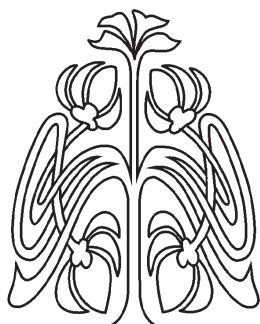
³ Аспирант кафедры радиотехники и электродинамики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, follow.a.white.rabbitt@gmail.com

В работе представлены результаты теоретического исследования влияния топологических особенностей на механические свойства углеродных нанотроек. Численный анализ атомного строения и свойств исследуемых объектов проводился с использованием молекулярной динамики и квантового метода сильной связи. По результатам расчетов энтальпии реакции были сделаны выводы о стабильности исследуемых нанотроек. Впервые представлены расчеты модуля упругости углеродных нанотроек.

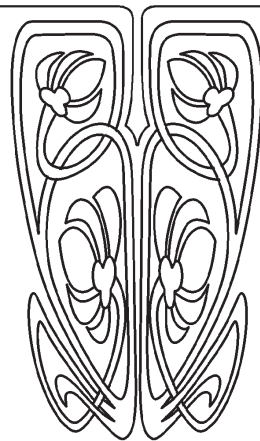
Ключевые слова: нанотроек, квантово-химический метод сильной связи, энтальпия реакции, прочностные свойства.

ВВЕДЕНИЕ

Многообразие структурных форм и широкий спектр физико-химических свойств обусловили развитие новой научной отрасли — электроники на углеродных наноструктурах. Среди семейства углеродных наноструктурированных материалов особое внимание привлекают тороидальные структуры, получившие название углеродных нанотроек [1]. Впервые теоретическая модель нового класса углеродных наноструктур с тороидальной формой была предложена в работе [2]. Геометрические характеристики и топология этих форм углерода определялись ненасыщенными связями углеродных нанотроек. Интерес к исследованию нанотроек обусловлен широкими перспективами их потенциального применения в различных научно-технологических сферах. Одним из таких применений является использование углеродных нанотроек в качестве новых форм хранения водорода. Данная проблема является актуальной, поскольку водород является источником чистой энергии и будет играть важную роль для снижения мирового потребления углеводородов. В работе [3] представлены результаты теоретического исследования адсорбции молекул водорода на углеродном нанотроек C_{120} . Водород помещался внутрь нанотроек двумя различными способами: параллельно и перпендикулярно центральной оси нанотроек. В результате оптимизации было установлено, что все адсорбируемые молекулы водорода распределялись равномерным образом вдоль траектории, равноуда-



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





ленной для всех точек вблизи внутренней поверхности нанотростра. Результаты расчетов полной энергии и энергии связи для исследуемого нанотростра C_{120} показали, что углеродной наноструктуре выгодно накапливать водород, причем полная энергия системы уменьшается с ростом числа адсорбируемых молекул. Благодаря особенностям атомного строения углеродные нанотросты обладают рядом примечательных магнитных свойств. В частности, еще в 1997 году Хаддон теоретически прогнозировал, что нанотрост C_{576} имеет очень большую величину диамагнитной восприимчивости, которая может быть примерно в 130 раз выше, чем у бензольной молекулы [4]. Впоследствии значительный парамагнитный момент был обнаружен у металлических тороидальных углеродных нанотростков [5]. С помощью метода сильной связи было спрогнозировано существование в тороидальных углеродных нанотростках ферромагнитного момента при низких температурах [6]. Данный эффект был обусловлен наличием пентагонов и гептагонов в структуре нанотростра.

Другим важным магнитным явлением, обнаруженным в тороидальных углеродных нанотростках, является эффект Аронова – Бома [7]. Несмотря на целый ряд работ, посвященных исследованию стабильности углеродных нанотростков [8–10], оценка прочностных свойств структур данного класса ранее не проводилась. В то же время для успешного применения нанотростков при конструировании электронных наностростков необходимо, чтобы используемый материал отвечал всем эксплуатационным требованиям. Целью данной работы является теоретическое изучение прочностных характеристик углеродных с помощью квантового метода сильной связи и метода классической молекулярной динамики.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ИЗУЧЕНИЯ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРОСТКОВ

2.1. Квантово-химический метод сильной связи

В данном исследовании использовалась модификация метода сильной связи, разработанная в работе [11]. В рамках используемой модели полная энергия системы представляется суммой двух слагаемых:

$$E_{tot} = E_{bond} + E_{rep},$$

где E_{bond} — энергия заполненных электронных уровней, E_{rep} — энергия отталкивания, которая является результатом электронного взаимодействия между атомами углерода. Геометрические и энергетические параметры углеродного нанотростка определялись минимизацией его полной энергии по характерным линейным параметрам каркаса.

Энергия отталкивания, учитывающая межэлектронное и межъядерное взаимодействия, представляется в виде суммы парных потенциалов:

$$E_{rep} = \sum_{i < j} V_{rep}(|r_i - r_j|),$$

где i, j — номера взаимодействующих атомов, r_i, r_j — декартовы координаты, V_{rep} определяется выражением

$$V_{rep}(r) = p_5 \left(\frac{p_3}{r}\right)^{p_6} \exp\left(p_6 \left[-\left(\frac{r}{p_2}\right)^{p_4} + \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{p_4}\right]\right).$$

Энергия заполненных уровней определяется формулой

$$E_{bond} = 2 \sum_{n=0} \varepsilon_n,$$

где ε_n — энергия заполненного электронного состояния с номером n (собственное значение гамильтониана). Цифра «2» учитывает спин электрона. Межатомные матричные элементы гамильтониана вычисляются по следующей формуле:

$$V_{ij\alpha}(r) = V_0^{ij\alpha} \left(\frac{p_3}{r}\right)^{p_1} \exp\left(p_1 \left[-\left(\frac{r}{p_2}\right)^{p_4} + \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{p_4}\right]\right),$$

где r — расстояние между атомами, i, j — орбитальные моменты волновых функций; n — индекс, указывающий тип связи (σ или π). Параметры n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$), равновесные интегралы перекрытия $V_{0ss}, V_{0sp}, V_{0pp}, V_{0pp}$ и атомные термы $\varepsilon_s, \varepsilon_p$ вычислены и приведены в табл. 1 [12].



2.2. Метод молекулярной динамики

С помощью молекулярной динамики нами исследовалось динамическое сжатие углеродных нанотрубок. В рамках этого метода решаются уравнения движения Ньютона для системы взаимодействующих частиц:

$$m_i \frac{d^2 r_i(t)}{dt^2} = F_i(t),$$

где r_i — радиус-вектор i -го атома, m_i — его масса, F_i — суммарная сила, действующая на i -й атом со стороны остальных частиц:

$$F_i = -\frac{\partial U(r)}{\partial r_i},$$

где $U(r)$ — потенциальная энергия, зависящая от взаимного расположения всех атомов; n — число атомов.

Таблица 1

Значения параметров для метода сильной связи

p_1	p_2 , нм	p_3 , нм	p_4	p_5 , эВ	p_6
2.796	0.232	0.154	22	10.92	4.455
ϵ_s	ϵ_p	$V_{ss\sigma}^0$	$V_{sp\sigma}^0$, эВ	$V_{pp\sigma}^0$	$V_{pp\pi}^0$, эВ
-10.932	-5.991	-4.344	3.969	5.457	-1.938

Решение уравнений движения проводилось с помощью схемы предиктор-корректор третьего порядка [13]. Моделирование процесса сжатия осуществлялось с шагом 1 фс. Силы, действующие на атомы исследуемой системы, рассчитывались квантовым методом сильной связи.

3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАНОТОРОВ

В данной работе рассматриваются несколько моделей нанотрубок, отвечающих равновесной конфигурации. Геометрия топологических моделей описывается группой точечной симметрии D_{5d} .

Нанотор C_{120} . Наименьшим тором этой группы является C_{120} , базисный сегмент которого представлен на рис. 1, а. Координаты атомов каркаса нанотора генерировались действием операции симметрии C_5 на координаты атомов сегмента тора в результате четырех преобразований над атомами сегмента. Координаты атомов сегмента задаются в начальном приближении. Атомный каркас молекулы C_{120} показан на рис. 1, б. Из рис. 1, б видно, что внешний круг образуют десять пентагонов (светло-серая заливка), а внутренний — десять гептагонов (темно-серая заливка). Координаты атомов нанотора, соответствующие основному состоянию, определялись минимизацией полной энергии по координатам атомов в рамках метода сильной связи. На рис. 1, а цифрами указаны различные длины связей, нм: 1 — 0.138, 2 — 0.146, 3 — 0.146, 4 — 0.147, 5 — 0.146, 6 — 0.147, 7 — 0.146, 8 — 0.143, 9 — 0.146, 10 — 0.140, 11 — 0.146, 12 — 0.146. Как видно, самая короткая длина связи — в гептагоне на внутреннем круге, где каркас испытывает наибольшую деформацию. Радиус внутреннего круга равен 0.203 нм. Наибольшие длины связей расположены в пентагонах внешнего круга, радиус которого равен 0.586 нм.

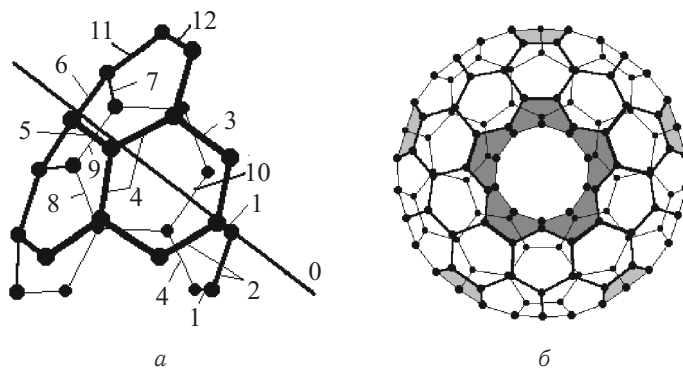


Рис. 1. Нанотор C_{120} : а — базисный сегмент каркаса; б — атомный каркас



Нанотор C_{340} . Следующим из класса наноторов симметрии D_{5d} является C_{340} . Его отличие заключается не только в увеличении радиусов внутреннего и внешнего кругов, но и в позиционировании гептагонов и пентагонов. Базисный сегмент нанотора C_{340} изображен на рис. 2, а, а сама атомная клетка в целом — на рис. 2, б. Различие каркасов наноторов C_{120} и C_{340} явно проявляется в способе формирования клетки внутреннего круга гептагонами: если у нанотора C_{120} гептагоны имеют смежное расположение, то у C_{340} они разделены одним гексагоном. Естественно, напряжение внутреннего круга каркаса в этом случае заметно снижается.

Техника генерирования координат каркаса остается прежней — преобразованием координат базисного сегмента (см. рис. 1, а). Рассмотрим подробнее атомное строение нанотора C_{340} . Длины связей базисного сегмента имеют определенную длину, нм: 1 — 0.138, 2 — 0.140, 3 — 0.140, 4 — 0.140, 5 — 0.140, 6 — 0.140, 7 — 0.141, 8 — 0.144, 9 — 0.141, 10 — 0.140, 11 — 0.144, 12 — 0.146, 13 — 0.143, 14 — 0.143, 15 — 0.142, 16 — 0.147, 17 — 0.145. Номера различных длин связей указаны цифрами на рис. 2, а. Как и у нанотора C_{120} , самая короткая длина связи тора C_{340} находится в гептагоне на внутреннем круге. Радиус внутреннего круга равен 0.609 нм. Наибольшие длины связей расположены в пентагонах внешнего круга, радиус которого равен 1.068 нм.

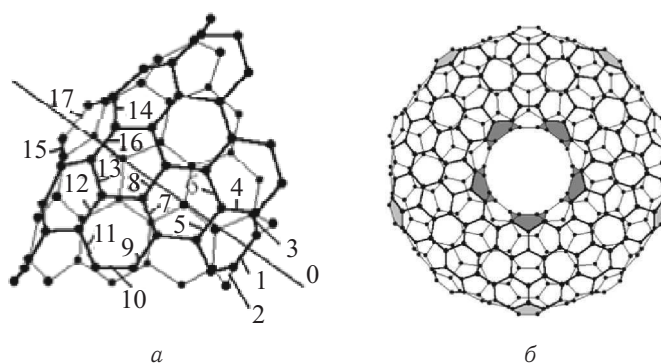


Рис. 2. Нанотор C_{340} : а — базисный сегмент каркаса; б — атомный каркас

Нанотор C_{460} . Особенность атомного каркаса углеродного нанотора C_{460} заключается в том, что радиус внутреннего круга 4.97 и внутренняя часть каркаса образована гептагонами, разделенными шестиугольниками (как и у нанотора C_{340}), а внешний круг значительно превышает по радиусу нанотор C_{340} : 1.488 нм. Такое увеличение тора по величине внешнего круга обеспечено значительным удалением друг от друга пентагонов. На рис. 3, а изображен базисный сегмент нанотора C_{460} , а на рис. 3, б — структура всего каркаса. За счет увеличения числа атомов базисного сегмента число различных длин связей также увеличивается. Приведем лишь некоторые из них: наименьшая длина связи 0.140 нм наблюдается у гексагонов, образующих поверхность тора, наибольшая — 0.155 нм — в пентагонах внешнего круга.

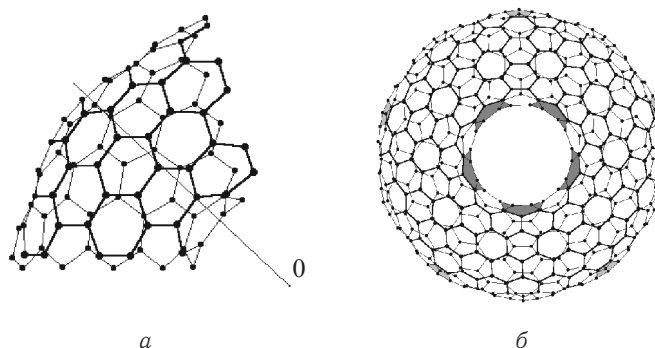


Рис. 3. Нанотор C_{460} : а — базисный сегмент каркаса; б — атомный каркас

Для количественной оценки стабильности образованных тороидальных структур нами была рассчитана энтальпия реакции их формирования. В табл. 2 представлены результаты расчетов.



Таблица 2

Некоторые энергетические характеристики наноторов

Кол-во атомов в структуре	120	340	460
Энтальпия, ккал-моль/атом	13.38	10.22	34.63

Из данных табл. 2 видно, что наиболее стабильной структурой будет нанотор C_{340} , у которого энтальпия и энергия на атом практически совпадают с аналогичными параметрами фуллерена C_{60} .

4. ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТОРОВ

Прочностные характеристики углеродных наноторов изучались на примере поведения исследуемых объектов при деформации в режиме реального времени. Предметом нашего изучения являлся процесс осевого сжатия. Деформация исследуемых наноторов осуществлялась со скоростью 20 м/с вдоль оси Z (рис. 4). В качестве прикладываемой нагрузки в работе рассматривалось давление, оказываемое графеновой пластиной, приближающейся к нанотору со скоростью 20 м/с.

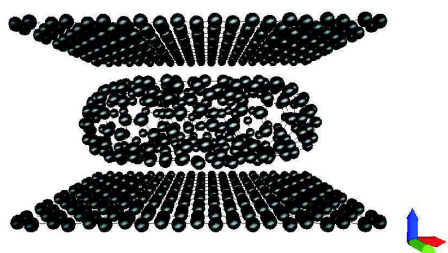


Рис. 4. Схема сжатия углеродного нанотора

В ходе исследования углеродные наноторы подвергались продольному сжатию на 1–5%. На каждом этапе сжатия фиксировалось значение прикладываемой к объекту сжимающей силы. На рис. 5 представлены результаты расчетов для случаев деформации нанотора C_{120} (рис. 5, а), C_{340} (рис. 5, б), C_{460} (рис. 5, в).

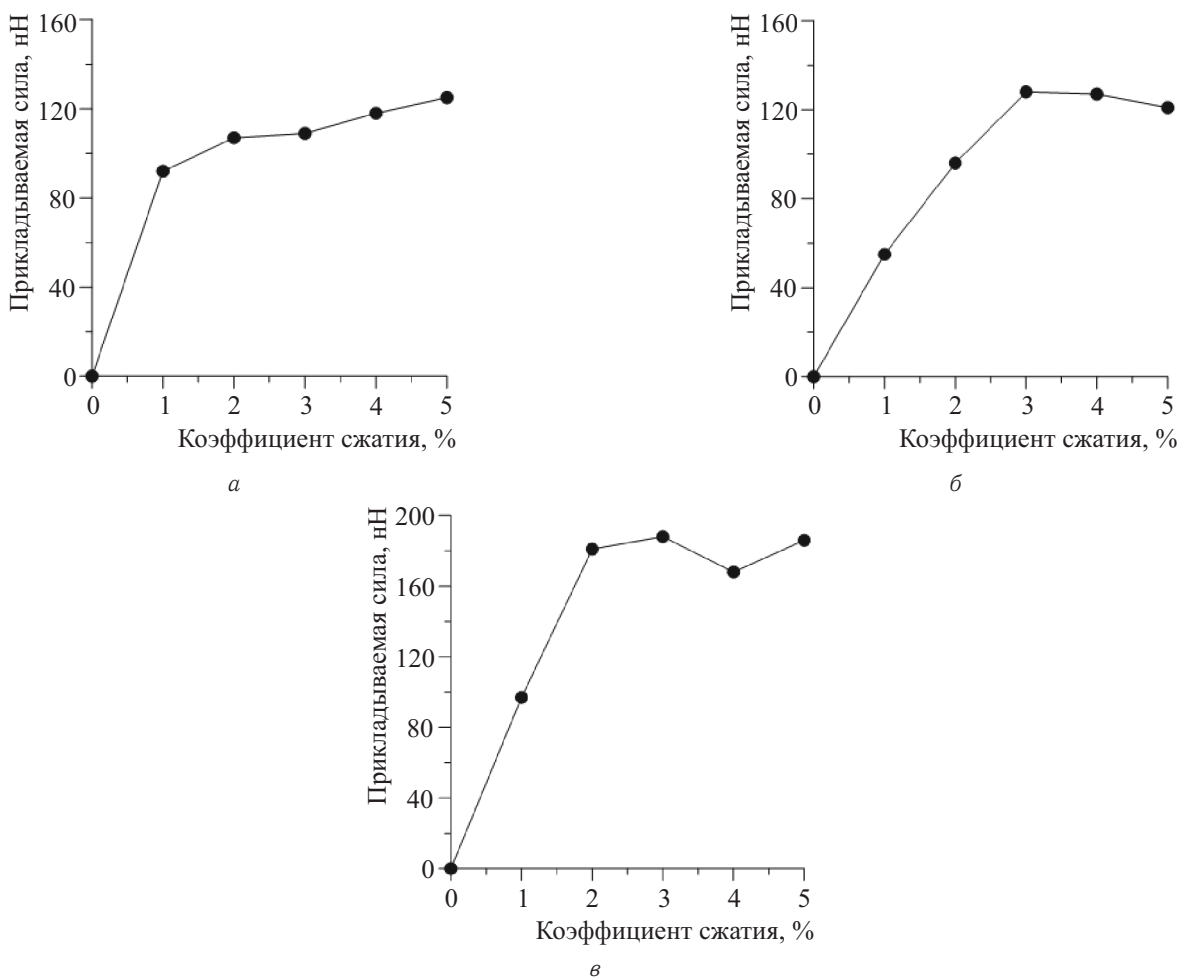


Рис. 5. Зависимость деформирующей силы от величины осевого сжатия нанотора C_{120} (а), C_{340} (б), C_{460} (в)



Из рис. 5, а видно, что по мере сжатия C_{120} деформирующая тор сила монотонно увеличивается, приближаясь к насыщению вблизи значения 120 нН. При деформации углеродных наноторов C_{340} (рис. 5, б) и C_{460} (рис. 5, в) наблюдается схожая картина. Для нанотора C_{340} деформирующая сила с ростом величины сжатия нанотора возрастает по линейному закону, а при сжатии структуры на 3% наблюдается небольшой спад величины, далее практически не меняющейся. Сила, деформирующая нанотор C_{460} , стремительно растет при сжатии объекта на 1–2%, а при последующей деформации (3–5%) меняется в незначительных пределах (160–180 нН).

Для количественной оценки прочностных свойств исследуемых наноторов был рассчитан модуль Юнга сжатия. Алгоритм вычисления псевдомодуля Юнга заключался в следующем.

1. На начальном этапе происходила оптимизация структуры путем минимизации полной энергии структуры по координатам квантовым методом сильной связи.

2. Далее оптимизированная структура сжималась на 1%. После этого концы структуры жестко фиксировались и структура снова оптимизировалась.

3. Модуль Юнга сжатия углеродного нанотора вычислялся по формуле

$$Y_p = \frac{F \cdot L}{S \cdot \Delta L},$$

где S — поперечного сечения нанотора; сила, необходимая для сжатия тора, определяемая формулой

$$F = \frac{2 \Delta E}{\Delta L},$$

где ΔE — энергия упругого растяжения, ΔL — величина сокращения структуры. По описанному выше алгоритму был рассчитан модуль Юнга сжатия для всех исследуемых в данной работе наноторов. Результаты расчетов представлены в табл. 3.

Таблица 3

Рассчитанные значения модуля Юнга сжатия для наноторов

Структура нанотора	C_{120}	C_{340}	C_{460}
Модуль Юнга сжатия, ТПа	0.54	0.59	0.65

4. ВЫВОДЫ

В ходе теоретического изучения электронно-энергетических и прочностных характеристик углеродных наноторов нами были установлены следующие закономерности.

Наиболее стабильной структурой среди исследуемых объектов обладает нанотор C_{340} , подтверждением чему служат результаты расчетов энтальпии реакции образования структуры (10.22 ккал·моль/атом) и энергия на атом (–43.02 эВ). Полученные значения величин практически совпадают с аналогичными параметрами фуллерепа C_{60} , являющегося одним из самых стабильных представителей семейства углеродных нанокластеров.

Показано, что процесс динамического сжатия наноторов сопровождается неизменным ростом деформирующей силы. Численная оценка модуля Юнга сжатия углеродных наноторов позволила установить, что наибольшим модулем упругости характеризуется углеродный нанотор C_{460} (0.65 ТПа). С увеличением геометрических размеров нанотора наблюдается рост модуля упругости. Полученные в работе результаты свидетельствуют о том, что углеродные тороидальные структуры, характеризующиеся стабильностью, высокими прочностными характеристиками, могут быть использованы в качестве материала элементной базы современной наноэлектроники. В частности, перспективным представляется их использование в качестве материала для создания холодных катодов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-31429, 14-01-31508, 12-02-00807), Минобрнауки России в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 3.1155.2014/К) и Президентской стипендии 2013–2016 гг. (проект № СП–2302.2013.1).



Библиографический список

1. Sano M., Kamino A., Okamura J., Shinkai S. Ring Closure of Carbon Nanotubes // *Science*. 2001. Vol. 293, № 5533. P. 1299–1301.
2. Avron J. E., Berger J. Tiling rules for toroidal molecules // *Phys. Rev. A*. 1995. Vol. 51, iss. 2. P. 1146–1159.
3. Cruz-Torres A., Castillo-Alvarado F. DE L., Ortiz-Lopez J., Arellano J. S. Arellano Hydrogen Storage Inside a Toroidal Carbon Nanostructure C120: Density Functional Theory Computer Simulation // *Intern. J. Quantum Chemistry*. 2010. Vol. 110. P. 2495–2508.
4. Haddon R. C. Electronic properties of carbon toroids // *Nature*. 1997. Vol. 388, № 6637. P. 31–32.
5. Liu L., Guo G. Y., Jayanthi C. S., Wu S. Y. Colossal Paramagnetic Moments in Metallic Carbon Nanotori // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88, iss. 21. P. 217206.
6. Rodriguez-Manzo J. A., Lopez-Urias F., Terrones M., Terrones H. Magnetism in Corrugated Carbon Nanotori : The Importance of Symmetry, Defects, and Negative Curvature // *Nano Lett.* 2004. Vol. 4, iss. 11. P. 2179–2183.
7. Lin M. F., Chuu D. S. Persistent currents in toroidal carbon nanotubes // *Phys. Rev. B*. 1998. Vol. 57, № 11. P. 6731–6737.
8. Liu C. P., Chen H. B., Ding J. W. Magnetic response of carbon nanotori : the importance of curvature and disorder // *J. Physics : Condensed Matter*. 2008. Vol. 20, № 1. P. 015206.
9. Liu C. P., Xu N. Magnetic response of chiral carbon nanotori : The dependence of torus radius // *Physica B : Condensed Matter*. 2008. Vol. 403, № 17. P. 2884–2887.
10. Wang X., Wang Z., Liu Yq., Wang C., Bai C., Zhu D. Ring formation and fracture of a carbon nanotube // *Chemical Physics Letters*. 2001. Vol. 339, № 1. P. 36–40.
11. Глухова О. Е., Терентьев О. А. Теоретическое изучение зависимостей модулей Юнга и кручения тонких однослойных углеродных нанотрубок zigzag и armchair от геометрических параметров // *Физика твердого тела*. 2006. Т. 48, вып. 7. С. 1329–1335.
12. Glukhova O. E. Dimerization of miniature C20 and C28 fullerenes in nanoautoclave // *J. Molecular Modeling*. 2011. Vol. 17, № 3. P. 573–576.
13. Wang Y., Tomanek D., Bertsh G. F. Stiffness of a solid composed of C60 clusters // *Phys. Rev. B*. 1991. Vol. 44, № 12. P. 6562–6665.

Influence Topology on Mechanical Properties of Carbon Nanotorov: Predictive Modeling

O. E. Glukhova, A. S. Kolesnikova, M. M. Slepchenkov, G. V. Savostianov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, oeglukhova@yandex.ru, kolesnikova.88@mail.ru, slepchenkovm@mail.ru, follow.a.white.rabbitt@gmail.com

In this paper the results of theoretical studies of the effect of topological features of the mechanical properties of carbon nanotori are presented. Numerical analysis of the atomic structure and properties of the objects was carried out by the molecular dynamics and quantum tight-binding method. Conclusions about the stability of the investigated nanotori were made on the base of the results of calculations of the enthalpy of the reaction. The first calculations of the elastic modulus carbon nanotori are presented.

Key words: nanotori, tight-binding quantum chemical method, enthalpy of reaction, mechanical properties.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 14-01-31429, 14-01-31508, 12-02-00807), Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the project of the national tasks in the field of scientific activity (project no. 3.1155.2014/K) and the Presidential scholarship 2013–2016 (project no. СП–2302.2013.1).

References

1. Sano M., Kamino A., Okamura J., Shinkai S. Ring Closure of Carbon Nanotubes. *Science*, 2001, vol. 293, no. 5533, pp. 1299–1301.
2. Avron J. E., Berger J. Tiling rules for toroidal molecules. *Phys. Rev. A*, 1995, vol. 51, iss. 2, pp. 1146–1159.
3. Cruz-Torres A., Castillo-Alvarado F. DE L., Ortiz-Lopez J., Arellano J. S. Arellano Hydrogen Storage Inside a Toroidal Carbon Nanostructure C120 : Density Functional Theory Computer Simulation *Intern. J. Quantum Chemistry*, 2010, vol. 110, pp. 2495–2508.
4. Haddon R. C. Electronic properties of carbon toroids. *Nature*, 1997, vol. 388, no. 6637, pp. 31–32.
5. Liu L., Guo G. Y., Jayanthi C. S., Wu S. Y. Colossal Paramagnetic Moments in Metallic Carbon Nanotori. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, vol. 88, iss. 21, pp. 217206.
6. Rodriguez-Manzo J. A., Lopez-Urias F., Terrones M., Terrones H. Magnetism in Corrugated Carbon Nanotori : The Importance of Symmetry, Defects, and Negative Curvature. *Nano Letters* 2004, vol. 4, iss. 11, pp. 2179–2183.
7. Lin M. F., Chuu D. S. Persistent currents in toroidal carbon nanotubes. *Phys. Rev. B*, 1998, vol. 57, no. 11, pp. 6731–6737.
8. Liu C. P., Chen H. B., Ding J. W. Magnetic response of carbon nanotori: the importance of curvature and disorder. *J. Physics : Condensed Matter*, 2008, vol. 20, no. 1, pp. 015206.



9. Liu C. P., Xu N. Magnetic response of chiral carbon nanotubes : The dependence of torus radius. *Physica B : Condensed Matter*, 2008, vol. 403, no. 17, pp. 2884–2887.
10. Wang X., Wang Z., Liu Yq., Wang C., Bai C., Zhu D. Ring formation and fracture of a carbon nanotube. *Chemical Physics Letters*, 2001, vol. 339, no. 1, pp. 36–40.
11. Glukhova O. E., Terentev O. A. Theoretical study of the dependence of Young's modulus and the torsion of thin single-wall carbon nanotubes zigzag and armchair on the geometrical parameters. *Solid State Phys.*, 2006, vol. 48, no. 7, pp. 1329–1335 (in Russian).
12. Glukhova O. E. Dimerization of miniature C20 and C28 fullerenes in nanoautoclave. *J. Molecular Modeling*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 573–576.
13. Wang Y., Tomanek D., Bertsh G. F. Stiffness of a solid composed of C60 clusters. *Phys. Rev. B*, 1991, vol. 44, no. 12, pp. 6562–6665.

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛАСТОМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ АБРАЗИВНО-УСТАЛОСТНОМ ИЗНОСЕ

С. Н. Гребенюк¹, А. А. Бова², В. З. Юречко²

¹Кандидат технических наук, доцент кафедры математического анализа, Запорожский национальный университет, Украина, gsm1212@ukr.net

²Аспирант кафедры математического анализа, Запорожский национальный университет, Украина, bova-anna@mail.ru; iurichko@i.ua

Предложена математическая модель процесса деформации эластомерных элементов конструкций с учетом абразивно-усталостного износа на основе метода конечных элементов. Ввиду специфических свойств материала построена матрица жесткости конечного элемента на основе моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемых материалов. Для уточнения решений предусматривалось получение выражений для деформаций на базе дополнения исходного линейного аппроксимирующего полинома до полного кубического. Численная сходимость предложенной модели исследована на примере решения задачи Ляме для полого упругого цилиндра. Проведен расчет резиновой футеровки барабанно-шаровых рудоразмольных мельниц с учетом специфических свойств материала и условий деформирования.

Ключевые слова: эластомеры, резиновая футеровка, абразивно-усталостный износ, моментная схема конечного элемента.

ВВЕДЕНИЕ

Эластомеры получили широкое применение в качестве защитных футеровок в барабанно-шаровых рудоразмольных мельницах. Футеровка предназначена для предохранения внутренних поверхностей барабана мельницы от износа дробящей средой и размалываемым материалом. От морфометрических параметров футеровки зависит эффективность и производительность работы мельниц в целом.

Одним из важнейших вопросов является изучение деформирования резиновой футеровки с учетом абразивно-усталостного износа рабочих поверхностей.

Аналитические методы решения задач механики эластомеров [1–3] являются весьма громоздкими, поэтому их целесообразно применять лишь для конструкций относительно простой формы.

Применение численных методов позволяет получать решение задач для эластомерных элементов сложной геометрической формы. Универсальным численным методом является метод конечных элементов (МКЭ), который позволяет получать полную картину напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматриваемой конструкции.

Исследованию методики применения МКЭ к расчету эластомерных конструкций посвящено большое количество работ. Так, в работах [4, 5] предлагается введение различных выражений упругой энергии деформации, которые учитывают слабую сжимаемость эластомера.

В работе [6] предложены вариационные формулировки, наиболее приемлемые для задач исследования слабосжимаемых эластомеров. Однако применение смешанных вариационных принципов связано с увеличением порядка разрешающей системы уравнений, с нарушением положительной определенности матрицы уравнений.

В работах [7, 8] для учета слабой сжимаемости эластомеров предложен способ сокращенного интегрирования, состоящий в том, что поля перемещений и величины, ответственные за слабую сжимаемость, аппроксимируются различными функциями.



В работе [9] рассмотрено развитие МКЭ и его модификации, изучены вопросы упругого, вязкоупругого линейного и нелинейного деформирования. В работе [10] предложен метод, разрешающие уравнения которого не содержат особенностей, связанных с малой сжимаемостью материала и малой толщиной слоя.

Вопросу изучения абразивно-усталостного износа конструкций посвящены следующие работы. В работе [11] исследуется механизм износа резиновой футеровки барабанной мельницы и проводится расчет ее оптимальной толщины. Целью работы [12] является построение обобщенной теории абразивно-усталостного износа упруго-наследственных сред с помощью двухкритериального уравнения долговечности. В работе [13] рассматривается динамическая модель волнового абразивно-усталостного износа резиновой футеровки в барабанных мельницах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для футеровки мельниц в большинстве случаев применяют резиновые полосы, привулканизированные к металлическим пластинам (рис. 1) и закрепляемые в барабане так, как показано на рис. 2.

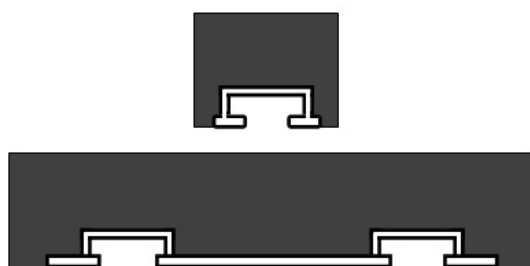


Рис. 1. Резиновые полосы

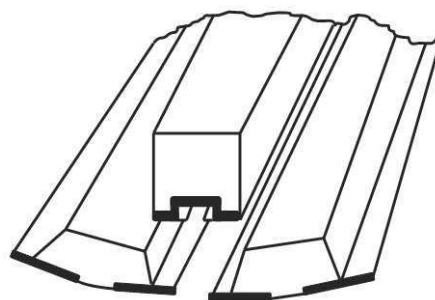


Рис. 2. Закрепление в барабане мельницы

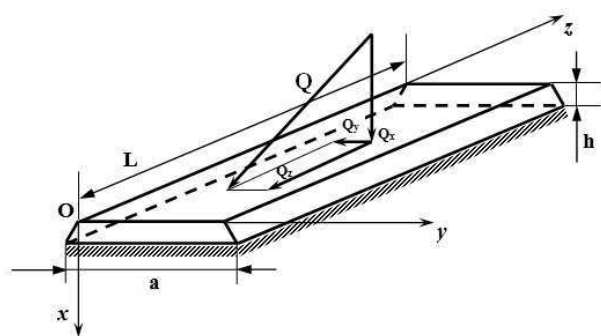


Рис. 3. Расчетная схема резиновой полосы

Решается статическая задача упругости в трехмерной постановке для резиновой полосы (РП), расчетная схема которой приведена на рис. 3: L — длина полосы, a — ширина, h — толщина. Вектор нагрузки Q необходимо представить в виде трех взаимно перпендикулярных векторов: Q_x — вектор нормальной нагрузки, Q_y и Q_z — векторы касательной нагрузки. Исходя из условий эксплуатации пропорциональные соотношения между этими величинами могут варьироваться. Снизу РП жестко закреплена, а боковые грани полосы свободны от нагрузок и защемления. Износ резиновой футеровки исследуется при эксплуатации мельницы диаметром 3.6 м.

2. ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ АБРАЗИВНО-УСТАЛОСТНОГО ИЗНОСА ЭЛАСТОМЕРОВ

Стандартный МКЭ не позволяет учитывать такого свойства эластомеров как слабая сжимаемость, когда материал имеет коэффициент Пуассона $\nu \rightarrow 0.5$. Тогда в процессе формирования матрицы жесткости (МЖ) возникает необходимость в вычислении коэффициента $E/(1 - 2\nu)$, где E — модуль упругости материала. При $\nu \rightarrow 0.5$ данная величина стремится к бесконечности, что приводит к потере точности получаемых результатов.

Для устранения этого недостатка можно использовать моментную схему конечного элемента (МСКЭ) [9], которая позволяет учитывать слабую сжимаемость материала, а также жесткие смещения КЭ и другое негативное свойство МЖ, связанное с появлением фиктивных сдвиговых деформаций — эффект «ложного» сдвига.

Разрушение эластомерной конструкции при абразивно-усталостном износе исследуется при помощи феноменологической модели [14]. Процесс поврежденности эластомера под действием внешних сил можно представить как образование и накопление в исходном материале некоторых областей, имеющих характер включений.



Предполагается, что материал в начальном состоянии однороден и изотропен, а материал включений обладает новыми существенно анизотропными свойствами. Модуль образующихся включений в n раз больше модуля основного материала (в работе [15] для резины на основе СКИ-3 получено $n = 1.2$), развивающиеся включения характеризуются матрицей модулей упругости основного материала, упругие модули материала включений не зависят от времени.

С учетом вышеуказанных предположений можно построить макроскопическую характеристику эластомера в виде эффективного модуля упругости материала с изменяющимися от поврежденности свойствами.

Используя вариационный подход, построим МЖ конечного элемента на основе МСКЭ для слабо-сжимаемого материала при абразивно-усталостном износе.

Рассмотрим шестигранный КЭ. Введем две системы координат — базисную $Oz^1z^2z^3$ и местную криволинейную $O_1x^1x^2x^3$, связанную с КЭ (рис. 4).

Рассмотрим вариацию полной потенциальной энергии системы:

$$\delta\Pi = \delta W - \delta A. \quad (1)$$

Здесь δW — вариация внутренней энергии упругого деформирования:

$$\delta W = \iiint_v \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv, \quad (2)$$

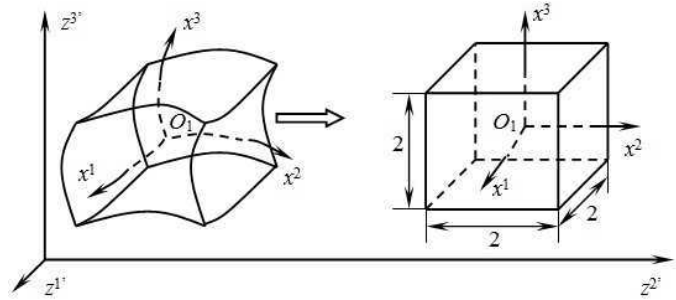


Рис. 4. Криволинейный конечный элемент

δA — вариация работы распределенных объемных P^i и поверхностных F^i сил:

$$\delta A = \iiint_v P^i \delta u_i dv + \iint_s F^i \delta u_i ds.$$

Компоненты тензора напряжений определяются на основе обобщенного закона Гука для изотропного тела с учетом абразивно-усталостного износа:

$$\sigma^{ij} = K g_{ij} \theta + 2G_3 \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \theta \right). \quad (3)$$

Здесь g^{ij} — компоненты метрического тензора ($i, j, k, l = \overline{1, 3}$), K — модуль объемного сжатия, θ — функция изменения объема, G_3 — эффективный модуль упругости, который учитывает развитие микроповреждений в материале [15]:

$$G_3 = G_0 \left(n + \frac{(1-n)(1-p)(n+3/2)}{(n+3/2)+p(1-n)} \right),$$

где G_0 — модуль упругости исходного материала, $p = 1 - e^{-m}$ — функция, отображающая рост концентрации включений во времени, m — коэффициент снижения модуля упругости ($m = 1.2$ [14]).

Получаемая матрица модулей упругости с учетом вышеуказанных предположений будет иметь вид

$$G_0 = \begin{pmatrix} \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} \frac{56E_0(1-p)}{3(17p+28)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0(1-p)}{2p+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0(1-p)}{2p+3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_0}{3} \end{pmatrix}.$$



Подставим компоненты тензора напряжений (3) в вариацию энергии деформирования (2):

$$\delta W = \iiint_v \left(K g^{ij} \delta \theta + 2G_\vartheta \left(g^{ik} g^{jl} \delta \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \delta \theta \right) \right) dv. \quad (4)$$

Тогда вариация полной потенциальной энергии системы (1) примет вид

$$\delta \Pi = \iiint_v \left(K g^{ij} \delta \theta + 2G_\vartheta \left(g^{ik} g^{jl} \delta \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \delta \theta \right) \right) dv - \delta A.$$

Аппроксимацию перемещений для линейного параллелепипедного КЭ согласно МСКЭ представим в виде [9]:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k'} = \sum_{pqr}^{lmn} \omega_{k'}^{pqr} \psi^{pqr} = & \omega_{k'}^{000} + \omega_{k'}^{100} \psi^{100} + \omega_{k'}^{010} \psi^{010} + \omega_{k'}^{001} \psi^{001} + \\ & + \omega_{k'}^{110} \psi^{110} + \omega_{k'}^{101} \psi^{101} + \omega_{k'}^{011} \psi^{011} + \omega_{k'}^{111} \psi^{111}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega_{k'}^{pqr}$ — коэффициенты разложения перемещений, ψ^{pqr} — набор степенных координатных функций вида

$$\psi^{pqr} = \frac{(x^1)^p}{p!} \frac{(x^2)^q}{q!} \frac{(x^3)^r}{r!}.$$

Однако в некоторых случаях применение МСКЭ для получения МЖ по заданным интерполяционным полиномам приводит к отбрасыванию значительного количества членов разложения деформаций, особенно для КЭ с высокой степенью аппроксимирующих полиномов. Данная проблема решается путем применения уточненной моментной схемы конечного элемента (УМСКЭ) [16, 17], которая предполагает получение выражений для деформаций на базе дополнения исходных аппроксимирующих полиномов КЭ до полных с последующим исключением «лишних» коэффициентов при дополнительных слагаемых.

Для уточнения решений приведем выражение для $\tilde{u}_{k'}$ (5) к полному кубическому полиному:

$$u_{k'} = \tilde{u}_{k'} + \Delta u_{k'}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta u_{k'} = & \frac{1}{2} (\omega_{k'}^{200} \psi^{200} + \omega_{k'}^{020} \psi^{020} + \omega_{k'}^{002} \psi^{002} + \omega_{k'}^{210} \psi^{210} + \omega_{k'}^{201} \psi^{201} + \omega_{k'}^{120} \psi^{120} + \\ & + \omega_{k'}^{102} \psi^{102} + \omega_{k'}^{021} \psi^{021} + \omega_{k'}^{012} \psi^{012}) + \frac{1}{6} (\omega_{k'}^{300} \psi^{300} + \omega_{k'}^{030} \psi^{030} + \omega_{k'}^{003} \psi^{003}). \end{aligned}$$

Компоненты тензора деформаций разложим в ряд Тейлора в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg}^{ij} e_{ij}^{stg} \psi^{stg}, \quad (7)$$

либо в матричной форме:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \{e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\}, \quad (8)$$

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (9)$$

Вывод соотношений матрицы жесткости для слабосжимаемого материала с использованием предложенной аппроксимации в полном объеме представлен в работе [18]. Запишем дополнительные коэффициенты, входящие в разложение для $\Delta u_{k'}$:

$$\begin{aligned} \omega_{1'}^{200} = \omega_{1'}^{210} = \omega_{1'}^{201} = \omega_{1'}^{120} = \omega_{1'}^{102} = \omega_{1'}^{300} = \omega_{1'}^{030} = \omega_{1'}^{003} = \omega_{2'}^{020} = 0, \\ \omega_{2'}^{021} = \omega_{2'}^{012} = \omega_{2'}^{030} = \omega_{2'}^{210} = \omega_{2'}^{120} = \omega_{2'}^{300} = \omega_{2'}^{003} = \omega_{3'}^{003} = \omega_{3'}^{021} = 0, \\ \omega_{3'}^{002} = \omega_{3'}^{300} = \omega_{3'}^{030} = \omega_{3'}^{201} = \omega_{3'}^{102} = \omega_{3'}^{012} = 0, \quad \omega_{1'}^{021} = \omega_{3'}^{120} = -\omega_{2'}^{111}/3, \\ \omega_{1'}^{020} = -\omega_{2'}^{110}, \quad \omega_{3'}^{200} = -\omega_{1'}^{101}, \quad \omega_{1'}^{012} = \omega_{2'}^{102} = -\omega_{3'}^{111}/3, \quad \omega_{1'}^{002} = -\omega_{3'}^{101}, \end{aligned}$$



$$\omega_{2'}^{200} = -\omega_{1'}^{110}, \quad \omega_{2'}^{201} = \omega_{3'}^{210} = -\omega_{1'}^{111}/3, \quad \omega_{2'}^{002} = -\omega_{3'}^{011}, \quad \omega_{3'}^{020} = -\omega_{2'}^{011}. \quad (10)$$

Вспомогательный закон распределения перемещений трехмерного КЭ получаем на основе формул (6) и (10):

$$\begin{aligned} u_{1'} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{1'}^{pqr} \psi^{pqr} - \frac{1}{2} (\omega_{2'}^{110} \psi^{020} + \omega_{3'}^{101} \psi^{002}) - \frac{1}{6} (\omega_{2'}^{111} \psi^{021} + \omega_{3'}^{111} \psi^{012}), \\ u_{2'} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{2'}^{pqr} \psi^{pqr} - \frac{1}{2} (\omega_{1'}^{110} \psi^{200} + \omega_{3'}^{011} \psi^{002}) - \frac{1}{6} (\omega_{1'}^{111} \psi^{201} + \omega_{3'}^{111} \psi^{102}), \\ u_{3'} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_{3'}^{pqr} \psi^{pqr} - \frac{1}{2} (\omega_{1'}^{101} \psi^{200} + \omega_{2'}^{011} \psi^{020}) - \frac{1}{6} (\omega_{1'}^{111} \psi^{210} + \omega_{2'}^{111} \psi^{120}) \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\{u_{k'}\} = \{\omega_{k'}\}^T \{\psi\}. \quad (11)$$

Матрицы $[F_{ij}^{k'}]$ получаем на основе выражений (9) и известного теперь числа и вида коэффициентов e_{ij}^{pqr} с учетом (10).

Функция изменения объема, ответственная за слабую сжимаемость, представляется разложением

$$\theta = \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^{n-1} \sum_{\gamma=0}^{l-1} \xi^{\alpha\beta\gamma} \psi^{\alpha\beta\gamma}, \quad (12)$$

где $\xi^{\alpha\beta\gamma}$ — коэффициенты разложения, определяемые соотношением

$$\xi^{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \varepsilon_{ij} g^{ij}}{(\partial x^1)^\alpha (\partial x^2)^\beta (\partial x^3)^\gamma} \Big|_{x^1=x^2=x^3=0}, \quad (13)$$

либо в матричной форме:

$$\{\theta\} = \{\xi\}^T \{\psi_\theta\}, \quad (14)$$

$$\{\xi\} = [F_\theta^{k'}] \{\omega_{k'}\}. \quad (15)$$

Проанализируем выражения для компонент $\xi^{\alpha\beta\gamma}$, воспользовавшись формулами (10), (12) и (13); опустим те слагаемые, которые содержат наряду с коэффициентами разложения для θ коэффициенты разложения для деформаций, т.е. те, для которых не выполняется условие

$$\xi^{\alpha\beta\gamma} = e_{11}^{\alpha\beta\gamma} g^{11} + e_{22}^{\alpha\beta\gamma} g^{22} + e_{33}^{\alpha\beta\gamma} g^{33}.$$

Легко заметить, что необходимо учитывать только коэффициент ξ^{000} . Таким образом, получим приближенное значение функции изменения объема:

$$\theta = \xi^{000} = e_{11}^{000} g^{11} + e_{22}^{000} g^{22} + e_{33}^{000} g^{33}.$$

С учетом (8) и (14) выражение (4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta W &= 2G_s \iiint_v \{\delta e_{ij}\}^T \{\psi_{ij}\} g^{ik} g^{jl} \{e_{kl}\}^T \{\psi_{kl}\} dv + (K - 2G_s/3) \iiint_v \{\xi\}^T \{\psi_\theta\} \delta \{\xi\} \{\psi_\theta\} dv = \\ &= \{\delta e_{ij}\}^T [H^{ijkl}] \{e_{kl}\} + \delta \{\xi\}^T [H^\theta] \{\xi\}, \\ [H^{ijkl}] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2G_s g^{ik} g^{jl} \{\psi_{ij}\} \{\psi_{kl}\}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \\ [H^\theta] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (K - 2G_s/3) \{\psi_\theta\} \{\psi_\theta\}^T \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned} \quad (16)$$

На основе (9) и (15) выражение (16) можем записать в следующем виде:

$$\delta W = \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] \{\omega_{t'}\} + \delta \{\omega_{s'}\}^T [F_\theta^{s'}]^T [H^\theta] [F_\theta^{t'}] \{\omega_{t'}\}. \quad (17)$$



Принимая во внимание (11) и представление перемещений точек КЭ через функцию Лагранжа $\{N\}$ и узловые значения перемещений $\{u_i\}$:

$$\{u_{k'}\} = \{u_i\}^T \{N\},$$

запишем связь между степенными и аппроксимирующими функциями Лагранжа:

$$\{\omega_{k'}\} = [A]\{u_{k'}\},$$

с учетом которой выражение (17) можем записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta\{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A] \{u_{t'}\} + \delta\{u_{s'}\}^T [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^{t'}] [A] \{u_{t'}\} = \\ &= \delta\{u_{s'}\} [G^{s't'}] \{u_{t'}\} + \delta\{u_{s'}\}^T [G_{\theta}^{s't'}] \{u_{t'}\}, \\ [G^{s't'}] &= [A]^T [F_{ij}^{s'}]^T [H^{ijkl}] [F_{kl}^{t'}] [A], \quad [G_{\theta}^{s't'}] = [A]^T [F_{\theta}^{s'}]^T [H^{\theta}] [F_{\theta}^{t'}] [A]. \end{aligned}$$

МЖ КЭ окончательно вычисляется по формуле

$$[M^{s't'}] = [G^{s't'}] + [G_{\theta}^{s't'}].$$

Таким образом, получена матрица жесткости для слабосжимаемого материала с кубической аппроксимацией перемещений на основе МСКЭ с учетом абразивно-усталостного износа.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ СХЕМ

Исследуем сходимость решений, полученных численно при использовании УМСКЭ, сравнивая их с аналитическим решением задачи Ляме [19]. Рассмотрим НДС полого цилиндра из эластомерного материала при абразивно-усталостном деформировании под внутренним давлением Q и жестком заземлении по внешнему контуру. Внутренний радиус равен a , внешний — b , r — полярный радиус. Аналитическая зависимость радиальных перемещений u_r при абразивно-усталостном деформировании от эффективного модуля упругости эластомера имеет следующий вид:

$$u_r = -\frac{Q}{2K + 2G_0 (1/3 + b^2/a^2)} (r - b^2/r).$$

Сравним перемещения точек внутренней поверхности цилиндра, получаемые численно с использованием традиционного МКЭ и УМСКЭ, с аналитическим решением. Исходные данные: внутренний радиус $a = 0.025$ м, внешний радиус $b = 0.1$ м, модуль объемного сжатия $K = 69.533 \times 10^6$ Па, модуль упругости матрицы эластомера $G_0 = 1.4 \times 10^6$ Па [10], коэффициент Пуассона $\nu = 0.49$, внутреннее давление $Q = 1.0 \times 10^6$ Па.

Как видно из таблицы, УМСКЭ имеет устойчивую сходимость при сгущении сетки дискретизации и дает предпочтительные результаты по сравнению со стандартным МКЭ, значительно приближая их к аналитическим.

Численная сходимость решений

Сетка дискретизации	МКЭ		МСКЭ		УМСКЭ	
	u_r , м	ε , %	u_r , м	ε , %	u_r , м	ε , %
$5 \times 5 \times 3$	0.0016135	18.1	0.0019336	1.8	0.0019992	1.5
$7 \times 7 \times 5$	0.0017804	9.6	0.0019395	1.5	0.0019890	1.0
$9 \times 9 \times 5$	0.0018583	5.6	0.0019434	1.3	0.0019859	0.9
$11 \times 11 \times 5$	0.0018994	3.5	0.0019473	1.1	0.0019846	0.8
$13 \times 13 \times 5$	0.0019233	2.3	0.0019493	1.0	0.0019839	0.8
Аналит. решение	0.001969					

Таким образом, предложенная конечно-элементная модель на основе УМСКЭ позволяет получать приемлемые результаты при расчете конструкций из эластомеров при абразивно-усталостном деформировании.



4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Изложенная методика реализована в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» [20], в рамках которого были получены основные параметры НДС РП в условиях абразивно-усталостного деформирования.

Исходные данные: длина $L = 1.5$ м, ширина $a = 0.6$ м, толщина $h = 0.1$ м, нагрузка $Q = 0.5$ МПа. В случае действия только нормальной нагрузки $Q_x = 0.5$ МПа, $Q_y = Q_z = 0$, нормальной и касательной — $Q_x = 408248$ Па, $Q_y = 204124$ Па, $Q_z = 204124$ Па. Расчеты были проведены для ряда марок резины при различных сетках дискретизации. Результаты представлены при сетке дискретизации $7 \times 11 \times 13$.

Распределение перемещений u_1 по толщине h РП при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,49$ для различных типов нагрузки представлено на рис. 5.

На рис. 6 показано распределение нормальных напряжений по толщине h РП при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.4999$ для различных типов нагрузки.

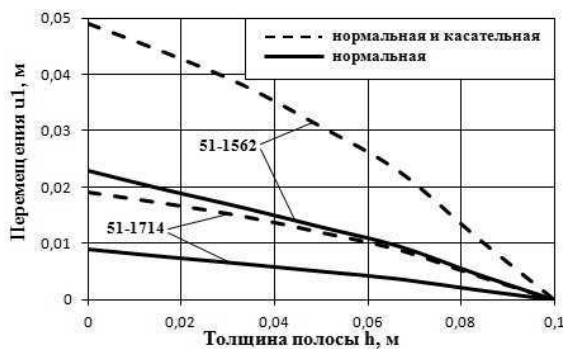


Рис. 5. Распределение перемещений по толщине РП



Рис. 6. Распределение напряжений по толщине РП

Распределение перемещений u_1 по толщине h РП для различных марок резины при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.4999$ показано на рис. 7.

На рис. 8 представлено распределение перемещений u_1 по поверхностному слою РП толщиной 0.01 м при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.4999$.

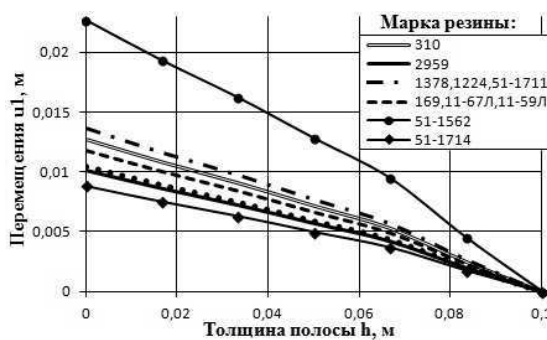


Рис. 7. Распределение перемещений по толщине РП

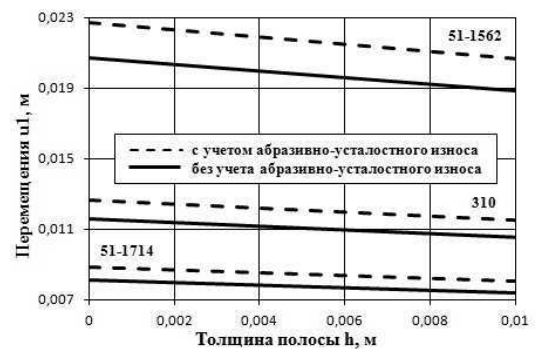


Рис. 8. Распределение перемещений по поверхностному слою РП

Анализ полученных результатов показывает, что совокупность нормальной и касательной нагрузок приводит к увеличению перемещений точек внешней поверхности футеровки на 50–53% по сравнению с нормальной нагрузкой (см. рис. 5). Учет абразивно-усталостного износа слабосжимаемого эластомера увеличивает нормальные сжимающие напряжения в месте интенсивного абразивно-усталостного износа на 33–89% (см. рис. 6), а также увеличивает перемещения точек внешней поверхности футеровки на 8–10% (см. рис. 8). Футеровка, выполненная из резины марки 51-1562, будет испытывать наибольшие деформации; использование резины марок 1378, 1224, 51-1711 позволяет снизить уровень деформации приблизительно на 40%, а резины марки 51-1714 — на 60% (см. рис. 7).



ВЫВОДЫ

Учет особенностей деформирования элементов конструкций из слабосжимаемых эластомеров с учетом абразивно-усталостного износа позволяет точнее определять полную картину напряженно-деформированного состояния в реальных условиях эксплуатации, что дает возможность повышать прочностной ресурс на стадии проектирования таких конструкций.

Библиографический список

1. Дымников С. И. Расчет резиновых элементов конструкций. Рига : Зинатне, 1991. 277 с.
2. Дырда В. И., Чижик Е. Ф., Кияшко В. И., Карачабан Н. Г. Резиновые детали в инженерной практике. Днепрпетровск : Поліграфіст, 1998. 303 с.
3. Карнаухов В. Г., Гуменюк Б. П. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел. Киев : Наук. думка, 1990. 304 с.
4. Penn R. W. Volume Changes Accompanying Extension of Rubber // Trans. Soc. Rheol. 1970. Vol. 14, № 4. P. 507–517.
5. Дымников С. И., Мейерс И. Р., Эрдманис А. Г. Упругие потенциалы для слабосжимаемых эластомерных материалов // Вопр. динамики и прочности. 1983. Вып. 40. С. 98–108.
6. Пиан Т., Ли С. О методе конечных элементов для почти несжимаемых материалов // Ракетная техника и космонавтика. 1976. №. 6. С. 147–149.
7. Zienkiewicz O. C., Too J., Taylor R. L. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells // Intern. J. Numerical Methods Eng. 1971. Vol. 3, № 3. P. 275–290.
8. Oden I. T., Kikuchi N. Finite element methods for constrained problems in elasticity // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1983. Vol. 18, № 5. P. 701–725.
9. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. Киев : Наук. думка, 2002. 655 с.
10. Кабриц С. А., Мальков В. М., Мансурова С. Е. Нелинейные уравнения плоского слоя для трех моделей эластомерного материала // Изв. РАН. МТТ. 2001. №. 1. С. 38–47.
11. Стецюк М. В., Луценко С. Н. Проблемы эксплуатации резиновой футеровки вибропитателей при добыче урановых руд // Геотехническая механика. 2013. Вып. 108. С. 229–235.
12. Кобец А. С., Дырда В. И., Калганков Е. В., Цаниди И. Н. Энергетическая оценка износа антифрикционных материалов // Геотехническая механика. 2012. Вып. 106. С. 78–90.
13. Дырда В. И., Калашиников В. А., Евенко С. Л., Маркелов А. Е., Хмель И. В., Стойко А. Динамическая модель волнового абразивно-усталостного разрушения резиновой футеровки в барабанных мельницах // Геотехническая механика. 2012. Вып. 106. С. 15–24.
14. Чижик Е. Ф., Дырда В. И. Феноменологическая модель разрушения резины при абразивно-усталостном износе // Геотехническая механика. 1999. № 11. С. 226–256.
15. Дырда В. И. Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях. Киев. : Наук. думка, 1988. 232 с.
16. Сахаров А. С., Кислюцкий В. Н., Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Киев : Вища шк., 1982. 480 с.
17. Гребенюк С. М., Юречко В. З., Бова А. А. Визначення напружено-деформованого стану гумового буфера на основі моментної схеми скінченного елемента // Вісн. Одеського національного університету. Математика і механіка. 2013. Т. 18, вып. 3(19). С. 49–58.
18. Гребенюк С. Н., Бова А. А. Повышение точности моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемых материалов // Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании. 2009. Т. 22. С. 55–64.
19. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высш. шк., 1982. 264 с.
20. Киричевский В. В., Дохняк Б. М., Козуб Ю. Г. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+». Киев : Наук. думка, 2005. 416 с.

The Stress-strain State of Elastomeric Constructions under Conditions of Abrasive Fatigue Wear

S. N. Grebenjuk, A. A. Bova, V. Z. Jurechko

Zaporozhskij National University, 66, Zhukovskogo str., Zaporozh'e, 69600, Ukraine, gsm1212@ukr.net, bova-anna@mail.ru, iuriechko@i.ua

In this paper the mathematical model of the deformation process of elastomeric elements of constructions with regard abrasive fatigue failure has been proposed. Due to the specific properties of material the stiffness matrix of finite element based on the finite element moment scheme for weakly compressible materials. To increase the accuracy of solutions has been envisaged the receipt of expressions for deformations on the base of adding the initial linear approximating polynomial to complete cubic polynomial. The numerical convergence of proposed model has been studied on the example of solution of Lyame task for hollow elastic cylinder. The rubber lining of drum-balls ore shredding mills was calculated taking in the account the specific properties of material and the deformation conditions.

Key words: the elastomers, rubber lining, abrasive fatigue wear, finite element moment scheme.



References

1. Dymnikov S. I. *Raschet rezinovyh elementov konstrukcij* [The calculation of rubber structural elements]. Riga, Zinatne, 1991, 277 p. (in Russian).
2. Dyrda V. I., Chizhik E. F., Kijashko V. I., Karachaban N. G. *Rezinovye detali v inzhenernoj praktike* [The rubber details in engineering practice]. Dnepropetrovsk, Poligrafist, 1998, 303 p. (in Russian).
3. Karnauhov V. G., Gumenjuk B. P. *Termomehanika predvaritel'no deformirovannyh vjazkouprugih tel* [Thermomechanics previously deformed viscoelastic bodies]. Kiev, Naukova dumka, 1990, 304 p. (in Russian).
4. Penn R. W. Volume Changes Accompanying Extension of Rubber. *Trans. Soc. Rheol.*, 1970, vol. 14, no. 4, pp. 507–517.
5. Dymnikov S. I., Mejers I. R., Jerdmanis A. G. Uprugie potentsialy dlja slaboszhimaemyh jelastomernyh materialov [The resilient potentials for weakly compressible elastomeric materials]. *Voprosy dinamiki i prochnosti*, 1983, no. 40, pp. 98–108. (in Russian).
6. Pian T., Li S. O metode konechnyh jelementov dlja pochty neszzhimaemyh materialov [On the finite element method for nearly incompressible materials]. *Raketsnaja tehnika i kosmonavtika*, 1976, no. 6, pp. 147–149. (in Russian).
7. Zienkiewicz O. C., Too J., Taylor R. L. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *Intern. J. Numer. Meth. Eng.*, 1971, vol. 3, no. 3, pp. 275–290.
8. Oden I. T., Kikuchi N. Finite element methods for constrained problems in elasticity. *Intern. J. Numer. Meth. Eng.*, 1983, vol. 18, no. 5, pp. 701–725.
9. Kirichevskij V. V. *Metod konechnyh jelementov v mehanike jelastomero*v [The finite element method in the mechanics of elastomers]. Kiev, Naukova dumka, 2002, 655 p. (in Russian).
10. Kabric S. A., Mal'kov V. M., Mansurova S. E. Nelinejnye uravnenija ploskogo sloja dlja treh modelej jelastomernogo materiala [Nonlinear equations of plane layer for three models of elastomeric material]. *Izv. RAN. Mekh. Tverd. Tela*, 2001, no. 1, pp. 38–47. (in Russian).
11. Stecjuk M. V., Lucenko S. N. Problemy jekspluatacii rezinovej futerovki vibropitatelej pri dobyche uranovyh rud [Problems of operation rubber lining of vibro feeders in the extraction of uranium ore]. *Geotekhnicheskaja mehanika*, 2013, no. 108, pp. 229–235. (in Russian).
12. Kobec A. S., Dyrda V. I., Kalgankov E. V., Canidi I. N. Jenergeticheskaja ocenka iznosa antifrikcionnyh materialov [Energy assessment of wear of antifriction materials]. *Geotekhnicheskaja mehanika*, 2012, no. 106, pp. 78–90. (in Russian).
13. Dyrda V. I., Kalashnikov V. A., Evenko S. L., Markelov A. E., Hmel' I. V., Stojko A. Dinamicheskaja model' volnovogo abrazivno-ustalostnogo razrushenija rezinovej futerovki v barabannyh mel'nichah [Dynamic model of wave abrasive fatigue failure of the rubber lining in rattlers]. *Geotekhnicheskaja mehanika*, 2012, no. 106, pp. 15–24. (in Russian).
14. Chizhik E. F., Dyrda V. I. Fenomenologicheskaja model' razrushenija reziny pri abrazivno-ustalostnom iznose [The phenomenological model of destruction of rubber under conditions of abrasive fatigue wear]. *Geotekhnicheskaja mehanika*, 1999, no. 11, pp. 226–256. (in Russian).
15. Dyrda V. I. *Prochnost' i razrushenie jelastomernyh konstrukcij v jekstremal'nyh uslovijah* [Strength and fracture of elastomeric constructions in extreme conditions]. Kiev, Naukova dumka, 1988, 232 p. (in Russian).
16. Saharov A. S., Kislookij V. N., Kirichevskij V. V. *Metod konechnyh jelementov v mehanike tverdyh tel* [The finite element method in the mechanics of solids]. Kiev, Vishcha shkola, 1982, 480 p. (in Ukrainian).
17. Grebenjuk S. M., Jurjehko V. Z., Bova A. A. Vyznachennja napruzhenno-deformovanogo stanu gumovogo bufera na osnovi momentnoi' shemy skinchenogo elementa [Determination of stress-strain state of rubber buffer on the basis of finite element moment scheme]. *Visnyk Odes'kogo nacional'nogo universytetu. Matematyka i mehanika*, 2013, vol. 18, no. 3(19), pp. 49–58 (in Ukrainian).
18. Grebenjuk S. N., Bova A. A. Povyshenie tochnosti momentnoj shemy konechnogo jelementa dlja slaboszhimaemyh materialov [The increase of the precision of the finite element moment scheme for weakly compressible materials]. *Sovremennye problemy i puti ih reshenija v nauke, transporte, proizvodstve i obrazovanii*, 2009, vol. 22, pp. 55–64 (in Russian).
19. Samul' V. I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Basics of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Vysshaja shkola, 1982, 264 p. (in Russian).
20. Kirichevskij V. V., Dohnjak B. M., Kozub Ju. G. *Metod konechnyh jelementov v vychislitel'nom komplekse «MIRELA+»* [The finite element method in calculable complex «MIRELA +»]. Kiev, Naukova dumka, 2005, 416 p. (in Russian).



УДК 523.68, 519.65

РАСЧЁТ МАСС МЕТЕОРНЫХ ТЕЛ ПУТЁМ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ

В. Т. Лукашенко

Аспирант кафедры аэромеханики и газовой динамики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; младший научный сотрудник отдела вычислительной физики, Вычислительный центр РАН имени А. А. Дородницына, Москва, lukashenko-vt@yandex.ru

При обработке метеорных наблюдений повсеместно используются устаревшие и недостаточно надёжные методы. В частности, определение внеатмосферных масс метеороидов происходит на основе светимости без предоставления каких-либо оценок точности расчётов. Вместе с тем, за последние годы разработан ряд новых динамических методов, достаточно точно описывающих движение метеорных тел в атмосфере, а также изменение их параметров. В представленной статье данные методы были применены автором для получения внеатмосферных масс метеороидов по данным Европейской болидной сети. Показано, что фотометрические оценки европейских наблюдателей оказываются значительно больше, чем реально возможные внеатмосферные массы метеорных тел. Помимо этого, предложена аппроксимация траекторий элементарными функциями, позволяющая упростить и ускорить расчёты.

Ключевые слова: метеор, расчёт, масса, траектория, аппроксимация, болид, Европейская сеть, элементарные функции.

Вплоть до нашего времени остро стоит проблема обработки метеорных наблюдений. При этом необходимо отметить, что для нахождения входной массы метеорного тела, а также её изменения, наблюдатели повсеместно используют достаточно старые подходы, основанные на наблюдаемой светимости метеоров [1–3]. В качестве альтернативы этому в работах [4, 5] был предложен ряд динамических подходов, приближающих траектории метеороидов точным аналитическим решением уравнений метеорной физики. Для начала приведём краткий обзор как старого, так и новых методов, а после этого рассмотрим результаты расчётов, полученные по имеющимся в открытом доступе наблюдениям Европейской болидной сети [6–8], а также возможность их упрощения [9].

ФОТОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

Основы по обработке метеорных наблюдений исходя из светимости были заложены в первой половине XX века Эпиком и Уипплом [1–3]. С тех пор в литературу прочно вошло понятие фотометрической формулы для оценки массы. Выводится она из предположения, что в светимость метеора I переходит некоторая доля потерь кинетической энергии:

$$I = -\tau \frac{d(mv^2/2)}{dt} = -\tau \left(\frac{v^2}{2} \frac{dm}{dt} + mv \frac{dv}{dt} \right),$$

здесь τ — коэффициент эффективности излучения; m , v — это соответственно масса и скорость метеорного тела. Отсюда, пренебрегая торможением, можно получить внеатмосферную массу метеороида как

$$m_{ph} = m_E + 2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{I}{\tau v^2} dt, \quad (1)$$

где $[t_0, t_1]$ — временной участок светимости; m_E — остаточная масса. Остаточной массой при этом либо пренебрегают, либо вычисляют динамически через аппроксимацию ускорения:

$$m_E = \frac{1}{\rho_m^2} \left(\frac{1.2 \rho_a v^2}{|dv/dt|} \right)^3,$$

ρ_m — плотность метеорного тела; ρ_a — плотность атмосферы.

Благодаря внешней простоте фотометрическая формула (1) получила широкое распространение. Однако с появлением обширной наблюдательной базы и развитием газовой динамики высокоскоростного полёта было показано, что во многих случаях её использование не является корректным [4, 10]. В частности, для крупных метеорных тел торможение оказывает существенное влияние на светимость.



ТОЧНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

В последние годы разработан целый ряд динамических методов [4, 5], которые достаточно просто и одновременно качественно правильно моделируют полёт метеорного тела в атмосфере [11]. При этом они дают возможность вычислять основные газодинамические характеристики тела по данным наблюдений.

Рассмотрим уравнения метеорной физики, описывающие движение тела, входящего в атмосферу с большой скоростью:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{2} c_d \rho_a v^2 S + mg \sin \gamma, \\ mv \frac{d\gamma}{dt} &= mg \cos \gamma - \frac{mv^2}{R_p} \cos \gamma - \frac{1}{2} c_L \rho_a v^2 S, \\ \frac{dh}{dt} &= -v \sin \gamma, \\ H^* \frac{dm}{dt} &= -\frac{1}{2} c_h \rho_a v^3 S, \end{aligned}$$

здесь c_d , c_L , c_h — соответственно коэффициенты сопротивления, подъёмной силы и теплообмена; ρ_a — плотность атмосферы; S — площадь миделева сечения метеорного тела; g — ускорение свободного падения; γ — местный угол траектории с горизонтом; R_p — радиус планеты; h — высота над поверхностью планеты; H^* — теплота сублимации.

Так как коэффициент подъёмной силы c_L сильно зависит от формы тела, которая неизвестна, то уравнение изменения угла γ обычно не рассматривается. Скорость вхождения метеорных тел достаточно высока (от 6 до 72 км/с), поэтому весом в уравнении движения на касательной к траектории пренебрегают.

Заметим теперь, что время явно не входит в коэффициенты оставшихся уравнений, а потому удобно перейти к новой независимой переменной — высоте h . Таким образом, после обезразмеривания получим:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dy} &= \frac{1}{2} c_d \frac{\rho_0 h_0 S_e}{m_e} \frac{\rho v s}{\sin \gamma}, \\ \frac{dm}{dy} &= \frac{1}{2} c_h \frac{\rho_0 h_0 S_e}{m_e} \frac{v_e^2 \rho v^2 s}{H^* \sin \gamma}, \end{aligned}$$

где m , v , y , s , ρ , — безразмерные масса, скорость, высота, миделево сечение метеороида и плотность атмосферы; ρ_0 — плотность атмосферы у поверхности Земли; символы с индексом e соответствуют размерным значениям величин в момент входа в атмосферу; h_0 — высота однородной атмосферы.

Для получения отсюда аналитического решения берётся модель изотермической атмосферы для приближения плотности ($\rho = \exp(-y)$), полагается связь миделева сечения метеорного тела с массой ($s = m^\mu$, где $\mu = \text{const}$ характеризует унос массы — при $\mu = 0$ испарение происходит только с передней кромки тела, при $\mu = 2/3$ вращение максимально и испарение происходит равномерно со всей поверхности), после этого в предположении постоянства коэффициентов

$$\frac{c_h}{c_d H^*} = \text{const}, \quad \frac{c_d}{\sin \gamma} = \text{const}$$

система интегрируется с начальным условием $y = \infty$, $v = 1$, $m = 1$.

Получаем точное аналитическое решение в виде

$$m = \exp\left(-\beta \frac{1-v^2}{1-\mu}\right), \quad y = \ln \alpha + \beta - \ln \frac{\Delta}{2}, \quad (2)$$

$$\Delta = \overline{\text{Ei}}(\beta) - \overline{\text{Ei}}(\beta v^2), \quad \overline{\text{Ei}}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^x \right) \frac{e^t dt}{t},$$

при этом $v \in [0, 1]$; $\mu = \text{const}$, $0 \leq \mu \leq 2/3$; баллистический коэффициент $\alpha = \frac{c_d \rho_0 h_0 S_e}{2 m_e \sin \gamma} > 0$ и

параметр уноса массы $\beta = \frac{(1-\mu) c_h v_e^2}{2 c_d H^*} > 0$ являются постоянными.



Так как внеатмосферная масса m_e входит в коэффициент α , задача её оценивания сводится к поиску для каждого отдельного метеороида наиболее подходящей пары коэффициентов α, β по точкам наблюдений $(v_i, y_i), i = 1, \dots, n$. Обычно для этого строят функционал ошибки, который затем минимизируется.

Пожалуй, среди всего имеющегося семейства точных динамических методов наиболее оптимальным для крупных метеорных тел оказывается метод с функционалом ошибки следующего вида [5]:

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n [\exp(-y_i) - \exp(-y(\alpha, \beta, v_i))]^2 \rightarrow \min_{\alpha, \beta}, \quad (3)$$

где y_i — высота i -й точки наблюдений, а $y(\alpha, \beta, v_i)$ — высота, вычисленная по скорости i -й точки при отдельно взятой паре α, β . При этом, как показывает практика [5], для функции Q находится строго одна точка локального минимума при допустимых значениях параметров.

РАСЧЁТЫ ПО ДАННЫМ ЕВРОПЕЙСКОЙ БОЛИДНОЙ СЕТИ

Отметим, что авторами [3, 4] проводились расчёты по данным болидных сетей Канады, США и Таджикистана. В результате для крупных метеороидов не было обнаружено какой-либо корреляции между точными динамическими оценками внеатмосферных масс и оценками по светимости. В связи с этим было бы интересно обработать соответствующие данные европейских наблюдателей.

В табл. 1 представлены итоговые результаты расчётов. Точные динамические массы m_e находились из коэффициентов α по формуле

$$m_e = \left(\frac{1}{2} c_d \frac{\rho_0 h_0}{\alpha \sin \gamma} \frac{A_e}{\rho_m^{2/3}} \right)^3.$$

Отметим, что коэффициент начальной формы тела A_e и коэффициент сопротивления c_d , вообще говоря, нам не известны. Однако при расчётах форма тела условно полагалась сферической ($A_e \approx 1.21, c_d = 1$) — несмотря на вносимые погрешности, это должно сохранять правильный порядок величин масс. Плотности же метеороидов ρ_m брались из статьи [12] в связи с их принадлежностью к наблюдаемым классам метеорных тел.

Таблица 1

Расчёты по данным Европейской болидной сети (болиды [6], Лойткирх (EN300874) [7], Траунштайн (EN290181) [8])

Наименование болида	$\rho_m, \text{ г/см}^3$	α	β	$m_e, \text{ кг}$	$m_{ph}, \text{ кг}$
EN010677	2.0	40.88	0.82	17.95	5200
EN140977A	2.0	100.24	1.79	1.57	1500
EN120677	3.7	9.69	1.70	51.14	850
EN200477B	0.75	13.12	4.75	247.00	390
EN300874	3.7	31.91	0.40	6.75	311
EN311077	2.0	41.46	1.72	1.23	280
EN071277	2.0	44.34	0.13	11.73	236
EN180177	2.0	75.29	1.73	0.19	55
EN290181	2.0	28.24	1.55	7.47	21

Заметим, что явно выделяется факт — фотометрические оценки наблюдателей дают намного завышенные результаты. Лишь для болидов EN200477B и EN290181 отличие полученных внеатмосферных масс может быть объяснено погрешностью динамического метода.

АППРОКСИМАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Отметим, что особенностью решения (2) является наличие интегральной экспоненты \bar{E}_1 . Это создаёт определённые трудности для численных расчётов и исследования сходимости различных алгоритмов. Вместе с тем, как отмечается в монографии [10], при $\beta < 2$ решение (2) можно надёжно заменить на

$$y = \ln \alpha - \ln(-\ln v) + 0.83\beta(1 - v), \quad (4)$$



а для $\beta > 10$ существует функция приближения

$$y = \ln \left(2\alpha\beta / \left(1 - e^{\beta(v^2-1)} \right) \right), \quad (5)$$

используемая для вычисления высоты погасания метеорного тела [13, 14].

На основе формул (4), (5) была разработана замена точного решения уравнений метеорной физики на склейки из элементарных функций по параметру β вида [9]:

$$y_j^n = \begin{cases} y_0, & \text{если } \beta \leq \beta_i, \\ y_j, & \text{если } \beta > \beta_i, \end{cases} \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

$$\beta_1 = 2.89, \quad \beta_2 = 2.1,$$

где $y_0 = \ln \alpha - \ln(-\ln v) + 0.83\beta(1 - v)$, $y_j = \ln \frac{2\alpha(\beta - A_j)}{1 - e^{(\beta - A_j)(v^2 - 1)}}$, $j = 1, 2$, $A_1 = 1.1$, $A_2 = 1.0 + (1.0 - v)2.5/\beta$.

Фактически данная замена получается путём искусственного уменьшения параметра уноса массы β в формуле (5) до получения удовлетворительной склейки с функцией (4); индекс j при этом соответствует степени точности замены. Среднее отличие получаемых коэффициентов α , β для приближения y_1^n может составлять 10–20%, а для приближения y_2^n — около 2%.

В табл. 2 представлены расчёты коэффициентов α_j , β_j и аппроксимационных масс m_i^n путём минимизации функционала ошибки (3) с использованием вместо точного решения (2) соответствующих склеек элементарных функций y_j^n , $j = 1, 2$. Как видно, отличие полученных масс m_i^n от оригинальных масс m_e (см. табл. 1) не существенно по сравнению с возможной погрешностью динамического метода.

Таблица 2

Расчёты с использованием аппроксимации (болиды [6], Лойткирх (EN300874) [7], Траунштайн (EN290181) [8])

Наименование болида	α_1	β_1	α_2	β_2	m_1^n , кг	m_2^n , кг
EN010677	41.91	0.81	41.91	0.81	16.66	16.66
EN140977A	104.42	1.73	104.42	1.73	1.39	1.39
EN120677	9.95	1.70	9.95	1.70	47.23	47.23
EN200477B	13.38	4.48	13.16	4.70	232.88	244.75
EN300874	32.27	0.41	32.27	0.41	6.09	6.09
EN311077	43.50	1.62	43.50	1.62	1.06	1.06
EN071277	44.37	0.15	44.37	0.15	11.71	11.71
EN180177	77.67	1.72	77.67	1.72	0.17	0.17
EN290181	29.04	1.55	29.04	1.55	6.87	6.87

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе к опубликованным данным Европейской болидной сети [6–8] были применены новейшие точные и аппроксимационные динамические методы обработки наблюдений [5, 9]. Результаты показывают, что для крупных метеорных тел фотометрические оценки европейских наблюдателей оказываются тотально завышенными по сравнению с теоретически возможными внеатмосферными массами метеороидов. Использование формулы (1) приводит к систематическим ошибкам в расчётах.

В связи с тем, что обработка наблюдений при помощи точного решения уравнений метеорной физики из-за особенности в виде интегральной экспоненты является проблематичной, найдены приближения этого решения склейкой элементарных функций (6). Использование этих приближений позволяет без относительной потери точности и намного быстрее вычислять базовые коэффициенты α , β , позволяющие моделировать траекторию полёта метеорного тела в атмосфере, а также даёт возможность аналитически исследовать возможные проблемы со сходимостью программных методов.



Вместе с тем, за рамками статьи остался вопрос о возможности построения более оптимального функционала ошибки, чем (3), с учётом аппроксимации (6). Особенно интересно в этом плане было бы рассмотреть возможность использования оригинального метода Гаусса наименьших квадратов.

Библиографический список

1. Opik E. Atomic collisions and radiation of meteors // *Acta et Commentat. Univ. Tartuen.* 1933. Vol. A26, № 2. P. 1–39.
2. Whipple F. L. Photographic meteor studies. I // *Proc. Armer. Phil. Soc.* 1938. Vol. 79, № 4. P. 499–548.
3. Whipple F. L. Photographic meteor studies. II. Nonlinear trails // *Proc. Armer. Phil. Soc.* 1940. Vol. 82, № 3. P. 275–290.
4. Грицевич М. И. О применимости фотометрической формулы при оценке массы болидообразующих тел // *Докл. АН.* 2008. Т. 418, № 5. С. 624–630.
5. Грицевич М. И. Приближение наблюдаемого движения болидов аналитическим решением уравнений метеорной физики // *Астрономический вестн.* 2007. Т. 41, № 6. С. 548–554.
6. Ceplecha Z., Boček J., Nováková-Ježková M., Porubčan V., Kirsten T., Kiko J. European Network fireballs photographed in 1977 // *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 1983. Vol. 34. P. 195–212.
7. Ceplecha Z., Ježková M., Boček J. Photographic data on the Leutkirch Fireball (EN300874) (Aug. 30, 1974) // *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 1976. Vol. 27. P. 18–23.
8. Ceplecha Z., Boček J., Nováková M., Polnitzky G. Photographic data on the Traunstein Fireball (EN290181, Jan. 29, 1981) and suspected meteorite fall // *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 1983. Vol. 34. P. 162–167.
9. Лукашенко В. Т. Точные и аппроксимационные методы нахождения масс метеорных тел // *Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й междунар. Саратов. зимн. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2014. С. 162–163.*
10. Стулов В. П., Мирский В. Н., Вислый А. И. Аэродинамика болидов. М. : Наука ; Физматлит, 1995. 236 с.
11. Грицевич М. И., Гуслов Т. С., Кожемякина Д. М., Новиков А. Д. Об изменении параметра уноса массы вдоль траектории метеорного тела // *Астрономический вестн.* 2011. Т. 45, № 4. С. 347–352.
12. Ceplecha Z., Borovička J., Elford W. G., Revelle D. O., Hawkes R. L., Porubčan V., Simek M. Meteor phenomena and bodies // *Space Sci. Rev.* 1998. Vol. 84. P. 327–471.
13. Грицевич М. И., Попеленская Н. В. Траектории метеоров и болидов при больших значениях параметра уноса массы // *Докл. АН.* 2008. Т. 418, № 4. С. 477–481.
14. Попеленская Н. В. Зависимость высоты погасания малых метеорных тел от их параметров // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика.* 2010. № 4. С. 65–68.

Calculation of Meteoroids Masses by Approximating the Trajectories

V. T. Lukashenko

Moscow State University, Department of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gori, GSP-1, Moscow, 119991, Russia, lukashenko-vt@yandex.ru

At processing meteor observations the outdated and insufficiently reliable methods are commonly used. In particular, the finding outward-atmospheric meteoroid masses comes from the luminosity without providing any estimates of accuracy for calculations. However, in recent years a variety of new dynamics methods has been developed that quite good describe a motion of meteoroids in atmosphere, as well as changing their parameters. In this article, these methods were used by the author to obtain outward-atmospheric masses of meteoroids from the data of European Fireball Network. It is shown that photometric estimates of European observers are much high than actually possible outward-atmospheric meteoroids masses. In addition, the author proposes an approximation of trajectories by elementary functions that allows to simplify and speed up calculations.

Key words: meteor, calculation, mass, trajectory, approximation, bolide, European Fireball Network, elementary functions.

References

1. Opik E. Atomic collisions and radiation of meteors. *Acta et Commentat. Univ. Tartuen.*, 1933, vol. A26, no. 2, pp. 1–39.
2. Whipple F. L. Photographic meteor studies. I, *Proc. Armer. Phil. Soc.*, 1938, vol. 79, no. 4, pp. 499–548.
3. Whipple F. L. Photographic meteor studies. II. Nonlinear trails. *Proc. Armer. Phil. Soc.*, 1940, vol. 82, no. 3, pp. 275–290.
4. Gritsevich M. I. O primenimosti fotometricheskoj formuly pri ozhenke massi bolidoobrazuiuchih tel [About applicability of photometric formula for estimating the masses of bolide-created bodies]. *Doklady Akademii Nauk*, 2008, vol. 418, no. 5, pp. 624–630 (in Russian).
5. Gritsevich M. I. Approximation of the observed motion of bolides by the analytical solution of the equations of meteor physics. *Solar System Research*, 2007, vol. 41, no. 6, pp. 509–514.
6. Ceplecha Z., Boček J., Nováková-Ježková M., Porubčan V., Kirsten T., Kiko J. European Network fireballs photographed in 1977 // *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 1983. Vol. 34. P. 195–212.



- can V., Kirsten T., Kiko J. European Network fireballs photographed in 1977. *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, 1983, vol. 34, pp. 195–212.
7. Cepelcha Z., Jeřková M., Boček J. Photographic data on the Leutkirch Fireball (EN300874) (Aug. 30, 1974). *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, 1976, vol. 27, pp. 18–23.
8. Cepelcha Z., Boček J., Nováková M., Polnitzky G. Photographic data on the Traunstein Fireball (EN290181, Jan. 29, 1981) and suspected meteorite fall. *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, 1983, vol. 34, pp. 162–167.
9. Lukashenko V. T. Tochnie i aproximazionnie metodi nahoshdenia mass meteornih tel [Exact and approximation methods for finding the masses of meteoroids]. *Sovremennye problemi teorii funktsiy i ih prilozheniya: materialy 17 mezhdunar. Saratov. zimney shkoli* [Modern problems of function theory and their applications: Proc. of the Intern. 17-th Saratov Winter School], Saratov, 2014, pp. 162–163.
10. Stulov V. P., Mirsky V. N., Vislii A. I. *Aerodinamika bolidov* [Aerodynamics of bolides]. Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1995, 236 p. (in Russian).
11. Gritsevich M. I., Guslov T. S., Kozhemyakina D. M., Novikov A. D. On change in the mass loss parameter along the trajectory of a meteor body. *Solar System Research*, 2011, vol. 45, no. 4, pp. 336–341.
12. Cepelcha Z., Borovicka J., Elford W. G., Revelle D. O., Hawkes R. L., Porubcan V., Simek M. Meteor phenomena and bodies. *Space Sci. Rev.*, 1998, vol. 84, pp. 327–471.
13. Gritsevich M. I., Popelenskaya N. V. Meteor and fireball trajectories for high values of the mass loss parameter. *Doklady Physics*, 2008, vol. 53, no. 2, pp. 88–92.
14. Popelenskaya N. V. Dependence of the height of disappearance for small meteoric bodies on their parameters. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2010, vol. 65, no. 4, pp. 90–93.

УДК 532.591

ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ВОЛНАМИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИМИСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Е. М. Сычева

Магистрант кафедры математического моделирования, Тюменский государственный университет, sychovaelena92@gmail.com

Опорными элементами ряда морских гидротехнических сооружений служат сваи в виде вертикальных круговых цилиндров. Вопросы о взаимодействии набегающих волн с такими преградами и определении волнового режима на огражденных акваториях представляют не только теоретический, но и практический интерес.

Рассматривается движение жидкости, вызванное взаимодействием набегающей гравитационной волны, распространяющейся на поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости, с круговым цилиндром бесконечной длины. Получено решение задачи для колебаний малой амплитуды.

Ключевые слова: вязкость, волновые движения жидкости.

В области, занятой жидкостью, выполняются уравнение неразрывности и уравнения движения:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = \mu \Delta \mathbf{v} - \nabla P + \rho \mathbf{g},$$

где $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, μ — динамический коэффициент вязкости, P — давление, \mathbf{g} — вектор силы тяжести.

При заглублиении скорость жидкости должна затухать, т. е. выполнено условие

$$\mathbf{v} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

На свободной поверхности задаются кинематическое условие [1]

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

и динамические условия [2]

$$\begin{aligned} e_{ij} t_i n_j &= 0, & P - 2\mu e_{ij} n_i n_j &= P_a, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), & v_1 &= u, & v_2 &= v, & v_3 &= w, \\ x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= z, \end{aligned}$$

где P_a — постоянное атмосферное давление.



На поверхности цилиндра S в случае вязкой жидкости должно выполняться условие прилипания:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad (x, y, z) \in S.$$

Будем рассматривать колебания с амплитудой весьма малой по сравнению с длиной волны. Тогда система уравнений и граничных условий примет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1)$$

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{p}{\rho} - g\xi - 2\nu \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad z = 0, \quad (2)$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad (x, y, z) \in S, \quad (3)$$

$$\mathbf{v} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (4)$$

где $p = P + \rho gz - P_a$ — динамическое давление, $\nu = \mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости.

Решение задачи необходимо искать в виде суммы потенциальной и вихревой составляющей. Исходя из этого представим скорость в виде [3]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_1 = \nabla \varphi, \quad \mathbf{v}_2 = \operatorname{rot} \Psi,$$

где φ — потенциал, Ψ — векторная функция тока.

Тогда, применяя к уравнениям (1) операции div и rot , их можно свести к системе уравнений

$$\Delta \varphi = 0, \quad p = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \nu \Delta \Psi = 0.$$

Применяя операции дифференцирования к уравнениям для функции φ и компонент векторной функции Ψ , получим уравнения для вертикальной составляющей скорости $w = w_1 + w_2$ ($w_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $w_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}$):

$$\Delta w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} - \nu \Delta w_2 = 0. \quad (5)$$

Граничные условия (2) с помощью операций дифференцирования и уравнений (1) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} - \nu \left(3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} - g \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad z = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad z = 0. \quad (7)$$

Из условий (2) и (3) получим:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad (x, y, z) \in S, \quad (8)$$

а из условия затухания волнового движения при заглублении (4):

$$w \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (9)$$

Таким образом, исходная волновая задача сведена к задаче для вертикальной составляющей скорости (5)–(9).

Волновое движение жидкости для свободной волны, не искаженной препятствием, описывается следующими функциями [4]:

$$\begin{aligned} u &= \cos \alpha (ikAe^{kz} - lCe^{lz}) e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \omega t}, \\ v &= \sin \alpha (ikAe^{kz} - lCe^{lz}) e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \omega t}, \\ w &= (kAe^{kz} + ikCe^{lz}) e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \omega t}, \\ p &= -\rho \omega A e^{kz} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \omega t}, \quad \xi = \frac{ikA - lC}{\omega} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \omega t}, \end{aligned}$$



где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны, $l^2 = k^2 + \frac{\omega}{\nu}$, $C = \frac{2i\nu k^2 A}{\omega + 2\nu k^2}$, α — направление распространения волны, отсчитываемое от оси x в горизонтальной плоскости, а ω — комплексная частота, для которой получено дисперсионное уравнение:

$$(\omega + 2\nu k^2)^2 + gk = 4\nu^2 k^4 \sqrt{\frac{\omega}{\nu k^2} + 1}.$$

Далее будем рассматривать дифракцию набегающей волны круговым цилиндром с вертикальными образующими. Функции w_1 и w_2 будем искать в виде

$$w_1 = kAe^{kz+\omega t}\tilde{F}(x, y), \quad w_2 = ikCe^{lz+\omega t}\tilde{F}(x, y).$$

Выражения для функций u , v , p и ξ через \tilde{F} примут следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= -k \cos^2 \alpha (kAe^{kz} + i l C e^{lz}) e^{\omega t} \int \tilde{F}(x, y) dx, \\ v &= -k \sin^2 \alpha (kAe^{kz} + i l C e^{lz}) e^{\omega t} \int \tilde{F}(x, y) dy, \\ p &= -\rho \omega A e^{kz} e^{\omega t} \tilde{F}(x, y), \quad \xi = \frac{ikA - lC}{\omega} e^{\omega t} \tilde{F}(x, y). \end{aligned}$$

Из уравнений (5) вытекает следующее уравнение Гельмгольца для функции \tilde{F} :

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2} + k^2 \tilde{F} = 0.$$

Условия (6), (7) и (9) при таком представлении для w_1 и w_2 выполняются, а из условия (8) следует условие для \tilde{F} :

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} = 0, \quad (x, y) \in L,$$

где L — контур сечения препятствия горизонтальной плоскостью.

Функцию \tilde{F} можно представить в виде

$$\tilde{F} = F_\infty + F,$$

где первое слагаемое $F_\infty = e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}$ соответствует набегающей волне, а второе характеризует возмущенное движение жидкости.

Уравнение Гельмгольца для определения функции F и условие на контуре L в полярных координатах принимают вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + k^2 F = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} + F(r, \theta) \right) = 0, \quad r = R, \quad (11)$$

где R — радиус цилиндра.

Функция F как решение уравнения Гельмгольца должна также удовлетворять условию излучения в форме [5]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (F_r - ikF) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} F = 0.$$

Решение уравнения (10) будем искать с помощью метода разделения переменных, представив неизвестную функцию в виде

$$F(r, \theta) = X(r)Y(\theta).$$

Подставив последнее выражение в уравнение и проведя разделение переменных, получим уравнения

$$r^2 X_{rr} + r X_r + (k^2 r^2 - m) X = 0, \quad Y_{\theta\theta} + \lambda Y = 0,$$

где m — константа разделения.



Решение второго уравнения, удовлетворяющее условию периодичности по θ и условию симметрии относительно α имеет вид $Y = \cos n(\theta - \alpha)$, где $n = \sqrt{m}$ — целое число.

Условию излучения удовлетворяет функция Ханкеля первого рода $X = H_n^{(1)}(kr)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда функция F примет вид

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr) \cos n(\theta - \alpha).$$

Коэффициенты C_n определим из условия (11). Для этого используем разложение [6]

$$e^{ikR \cos(\theta - \alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kR) \cos n(\theta - \alpha),$$

где $J_n(kr)$ — функция Бесселя первого рода, $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \geq 1. \end{cases}$

Тогда получим:

$$C_n = -\varepsilon_n i^n \frac{J_{n-1}(kR) - J_{n+1}(kR)}{H_{n-1}^{(1)}(kR) - H_{n+1}^{(1)}(kR)}.$$

В случае малого значения числа kR (длина волны много больше радиуса цилиндра) условие на контуре L можно записать в виде $F_r = -ik \cos(\theta - \alpha)$, $r = R$. Тогда функция \tilde{F} , определяющая суммарное волновое поле, равна $\tilde{F} = e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} + \frac{ikR^2}{r} \cos(\theta - \alpha)$.

Библиографический список

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика : в 2 ч. Ч. 2. М. : Физматгиз, 1963. 728 с.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М. : Мир, 1973. 792 с.
3. Баринов В. А., Басинский К. Ю. Моделирование волновых движений вязкой жидкости // Вестн. Тюмен. ун-та. 2009. № 6. С. 144–151.
4. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М. : Физматгиз, 1959. 700 с.
5. Кочин Н. Е. Собрание сочинений : в 2 т. М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2. 305 с.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.

Flow a Round Cylinder by Waves Extending on the Viscous Liquid Surface

E. M. Sycheva

Tyumen State University, 10, Semakova str., 625003, Tyumen, Russia, sychovaelena92@gmail.com

Some marine hydro technical constructions have such support elements as piles in the form of vertical round cylinders. Questions about the incident wave's interaction with such barriers and identification of wave regime on the fenced water areas has as the theoretical as the practical concern. We shall consider the motion of liquid, caused by the interaction of incoming gravitational wave, spreading on the surface of the viscous incompressible liquid coat with an infinitely long round cylinder. The problem was solved for the case of small oscillations.

Key words: viscosity, wave motion of liquid.

References

1. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaja gidromekhanika* [Theoretical hydromechanics]. Pt. 2, Moscow, Fizmatgiz, 1963, 728 p.
2. Betchelor J. K. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti* [Introduction to the fluid dynamics]. Moscow, Mir, 1973, 792 p.
3. Barinov V. A., Basinsky K. Yu. Modelling of the wave motions of the viscous liquids. *Vestnik Tyumen State Univ.*, 2009, iss. 6, pp. 144–151.
4. Levich V. G. *Fiziko-khimicheskaja gidrodinamika* [Physicochemical hydrodynamics]. Moscow, Fizmatgiz, 1959, 700 p.
5. Kochin N. E. *Sobranie sochinenii* [Collected works]. Vol. 2. Moscow, Publ. Academy of Sciences USSR, 1949, 305 p. (in Russian).
6. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums, series and products], Moscow, Fizmatgiz, 1963, 1100 p. (in Russian).



ИНФОРМАТИКА

УДК 621.397

ПОВЫШЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ НАДЕЖНОСТИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ С QAM/COFDM-МОДУЛЯЦИЕЙ

А. А. Львов¹, М. С. Светлов², П. В. Мартынов³

¹ Доктор технических наук, профессор кафедры информационных систем и технологий, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., alvova@mail.ru

² Доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления, Саратов, svetlovms@yandex.ru

³ Аспирант кафедры информационных систем и технологий, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., pavel_martynov@list.ru

Обеспечение высокого уровня информационной надежности — одна из важнейших задач синтеза цифровых систем передачи информации (ЦСПИ) различного функционального назначения. В работе для повышения информационной надежности ЦСПИ с QAM/COFDM-модуляцией предложено использование кодового сигнального признака на базе кодирующих и декодирующих устройств (кодеков) с распределителями на многоотводных линиях задержки (МЛЗ); рассмотрены преимущества реализации принципа самосинхронизации при существенном уменьшении защитных интервалов в структуре передаваемых сигналов; показана возможность исключения аналоговых сигналов в канале.

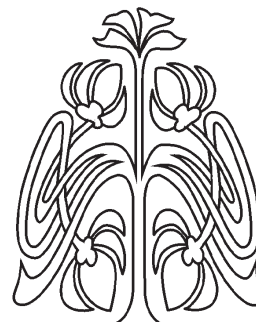
Ключевые слова: информационная надежность, квадратурная амплитудная модуляция, кодек, кодовый сигнальный признак.

ВВЕДЕНИЕ

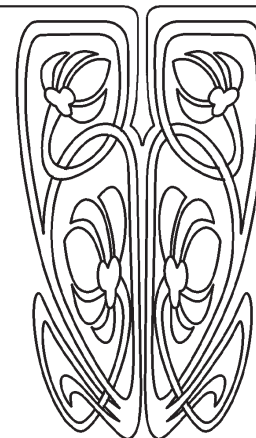
В современных ответственных ЦСПИ, характеризующихся большими значениями информационной емкости и скорости передачи информации, для обеспечения высоких показателей по информационной надежности широко используются сигналы с QAM/COFDM-модуляцией. Математическая модель этого вида модуляции приведена в [1]. Модулируемый параметр сигнала несущей частоты принимает ряд дискретных значений, передача которых реализуется в аналоговом формате. При этом в каналах с помехами большой интенсивности, когда $i_{с.п.} = f_{с.п.}/f_{р.к.} \gg 1$ ($i_{с.п.}$, $f_{с.п.}$ — средняя интенсивность и частота случайной импульсной помехи соответственно; $f_{р.к.}$ — средняя частота формирования рабочих кодовых слов в канале), не всегда удается обеспечить выполнение необходимых требований по помехозащищенности. Анализ моделей таких систем позволяет выделить две основные проблемы, решение которых дает возможность существенно повысить их качество.

1. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ В СИСТЕМАХ С QAM/COFDM МОДУЛЯЦИЕЙ

Одна из проблем в цифровых системах с QAM/COFDM-модуляцией связана с тем, что последовательный синхронный интерфейс систем требует обеспечения надежной синхронно-синфазной работы (синхронизации) всего приемо-передающего тракта, в первую очередь, кодеков. Традиционно используются различные варианты принципа



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





циклической (старт-стопной) синхронизации с формированием специальных синхросигналов. При этом требуются постоянный контроль синхронизации и коррекция возникающих ее нарушений (сбоев). Как показывают исследования, именно ошибки, вызываемые сбоем синхронизации, снижают показатели систем по достоверности информации даже при использовании мощных корректирующих кодов [2].

Другая проблема — наличие защитных интервалов в структуре сигнала, вводимых для уменьшения влияния интерференционных ошибок, вызываемых многолучевыми отражениями сигналов в каналах [3], но снижающих быстродействие систем и, как следствие, пропускную способность каналов.

Классический вариант геометрической интерпретации COFDM-сигналов — модуляционное созвездие (конstellационная диаграмма), каждой рабочей точке которого (OFDM-символу) соответствуют координаты μ_1 и μ_2 (по действительной и мнимой осям соответственно), передаваемые QAM-сигналами (рис. 1, а).

Один из известных способов повышения помехозащищенности исследуемых QAM/COFDM систем заключается в применении преобразования, осуществляющего поворот рабочих точек модуляционного созвездия в комплексной плоскости на определенный угол (рис. 1, б), зависящий от режима модуляции. За счет поворота созвездия на точно подобранный угол каждая рабочая точка созвездия приобретает уникальные координаты (μ'_1 и μ'_2), не совпадающие с координатами других точек. Каждая координата точки обрабатывается в модуляторе и передается отдельно одна от другой. В приемнике координаты μ'_1 и μ'_2 объединяются. При этом восстанавливается исходное созвездие. Таким образом, при потере в канале из-за наличия помех информации об одной координате сохраняется информация о другой. Это позволяет на приемной стороне полностью восстановить OFDM-символ, хотя и с более низким уровнем отношения сигнал/шум (C/N).

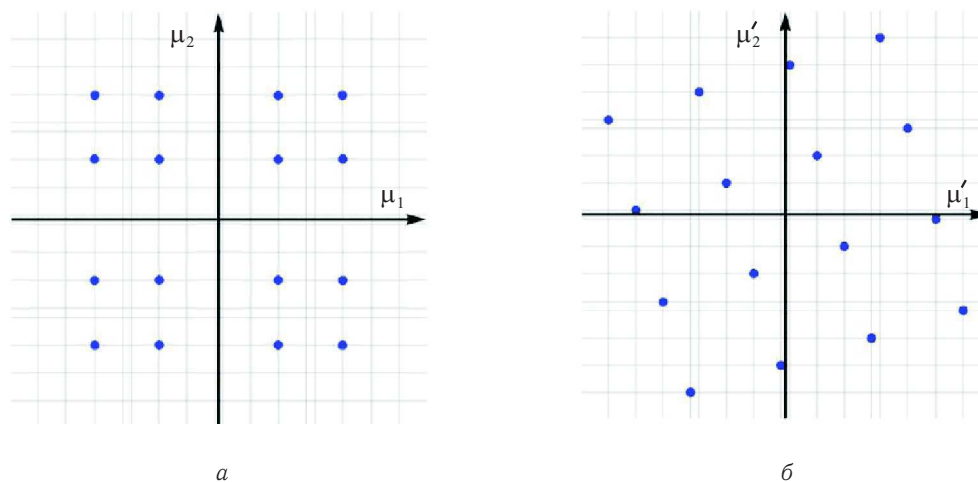


Рис. 1. Модуляционное созвездие 16-QAM до (а) и после (б) поворота

Кроме того, появляется возможность передачи только одной координаты рабочей точки. Если передача двух координат осуществляется двумя ортогональными аналоговыми сигналами, то для передачи одной координаты достаточен лишь один из них.

В большинстве современных ЦСПИ в передаваемых потоках данных для передачи вспомогательной (служебной) корректирующей информации используются пилот-сигналы, формирующиеся в результате модуляции поднесущих частот псевдослучайной последовательностью. Непрерывные и распределенные пилот-сигналы передаются на одних и тех же поднесущих частотах в каждом OFDM-символе, их амплитуды и фазы в точке приема известны. Поэтому они могут использоваться для синхронизации, получения сведений о характеристиках канала и оценки, в частности, его фазовых шумов [4].

При OFDM-модуляции точки на constellationной диаграмме, отображающие пилот-сигналы, имеют лишь одну значащую координату и лежат на действительной оси. Однако возможны варианты, при которых абсциссы одной или нескольких рабочих точек совпадают с абсциссами пилот-сигналов. Во избежание неверного распознавания рабочих точек передаваемого сигнала в подобных ситуациях предлагается передавать по каналу ординаты рабочих точек повернутого сигнального созвездия.



Применение повернутого сигнального созвездия позволяет также увеличить информационную емкость системы за счет одновременного использования нескольких вариантов созвездия при различных углах поворота. Так, при модуляции 16-QAM можно получить 32, 64, 128, ... рабочих точек (соответственно при 2, 4, 8, ... различных значениях углов поворота созвездия). Тем не менее передача данных по-прежнему будет осуществляться аналоговым сигналом, и останется необходимым наличие защитных интервалов между передаваемыми символами транспортного потока.

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОДЕКОВ С КОДОВЫМ СИГНАЛЬНЫМ ПРИЗНАКОМ В СИСТЕМАХ С QAM/SOQDM МОДУЛЯЦИЕЙ

Особенностью кодового сигнального признака на базе кодеров с распределителями на МЛЗ (в предыдущих работах авторов — с распределителями на ДЗУ — динамических запоминающих устройствах) является представление каждого разряда передаваемого потока данных импульсными последовательностями — кодовыми сериями импульсов малой длительности, жестко связанных между собой фиксированными интервалами времени, кратными определенной временной задержке Δt элементов МЛЗ.

Структурная схема кодера с кодовым сигнальным признаком при $(n + 1)$ -разрядном распределителе приведена на рис. 2.

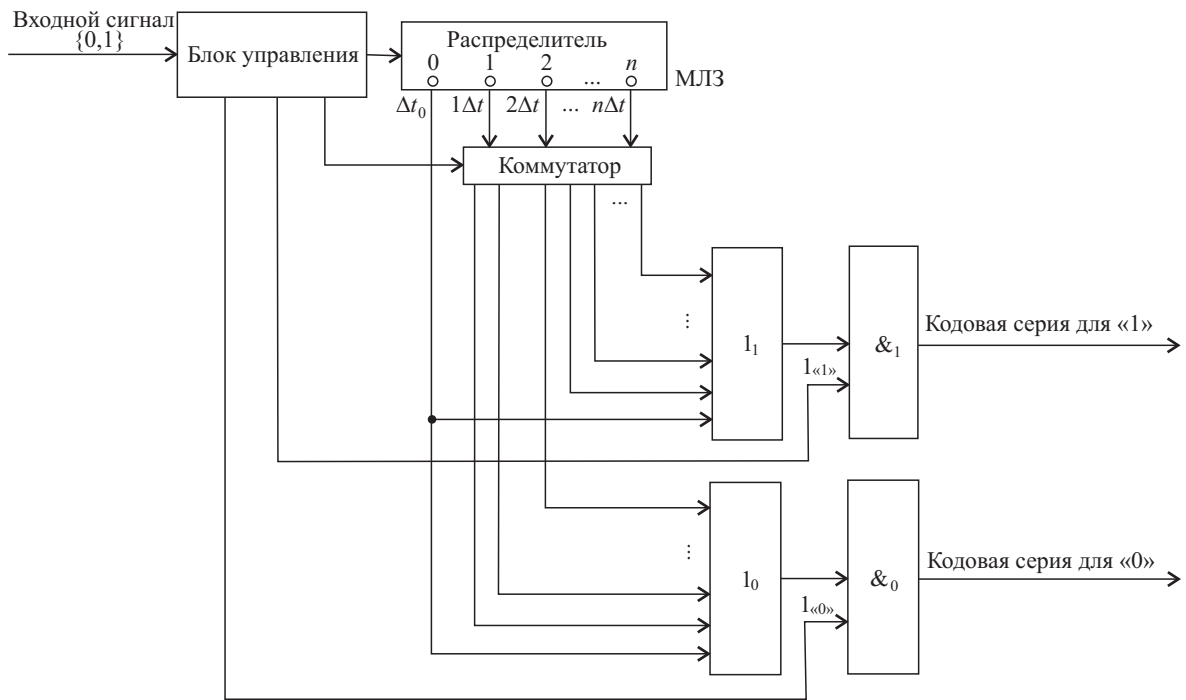


Рис. 2. Блок-схема кодера с кодовым сигнальным признаком при $(n + 1)$ -разрядном распределителе на МЛЗ

Блок управления в схеме выполняет следующие основные функции:

- определение моментов подачи кодовых символов на вход распределителя;
- задание закона коммутации выходов распределителя;
- осуществление коммутации элементов $\&_1$ и $\&_0$ сигналами $I_{\langle 1 \rangle}$ и $I_{\langle 0 \rangle}$ в зависимости от значения текущего входного двоичного символа.

Сигнал на первом по порядку выходе распределителя формируется с задержкой Δt_0 по отношению к входному сигналу (для кодера — на нулевом выходе). На всех остальных выходах распределителя сигналы появляются последовательно и поочередно во времени с задержками Δt . Как показали исследования, для обеспечения корректной работы кодеров длительности задержек Δt_0 и Δt должны быть строго постоянными, одинаковыми для кодера и декодера, и при этом должно выполняться условие $\Delta t_0 \neq k\Delta t$ (k — целочисленный коэффициент). Кроме того, формируемые кодером кодовые импульсные последовательности не должны быть циклическими сдвигами друг друга. Сигналы с выходов распределителя, проходя через коммутатор, в соответствии с законом, задаваемым блоком



управления, управляют схемами $\&_1$ и $\&_0$, формирующими кодовые серии для «0» и «1» на выходах кодера.

Полином выходного сигнала кодирующего устройства относительно фиктивной переменной x может быть записан в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^n a_{n-i} x^{n-i} = a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0. \quad (1)$$

Коэффициенты полинома (1) могут быть представлены как функции задержек распределителя:

$$a_i = f(\Delta t_0 + (n - i)\Delta t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, полином, описывающий кодовую серию, поступающую в канал с выхода кодера и соответствующую одному биту входного сигнала, примет вид

$$y(x, t) = f(\Delta t_0)x^{n-1} + f(\Delta t_0 + \Delta t)x^{n-2} + \dots + f(\Delta t_0 + (n - 2)\Delta t)x + f(\Delta t_0 + (n - 1)\Delta t).$$

Структурная схема декодера представлена на рис. 3.

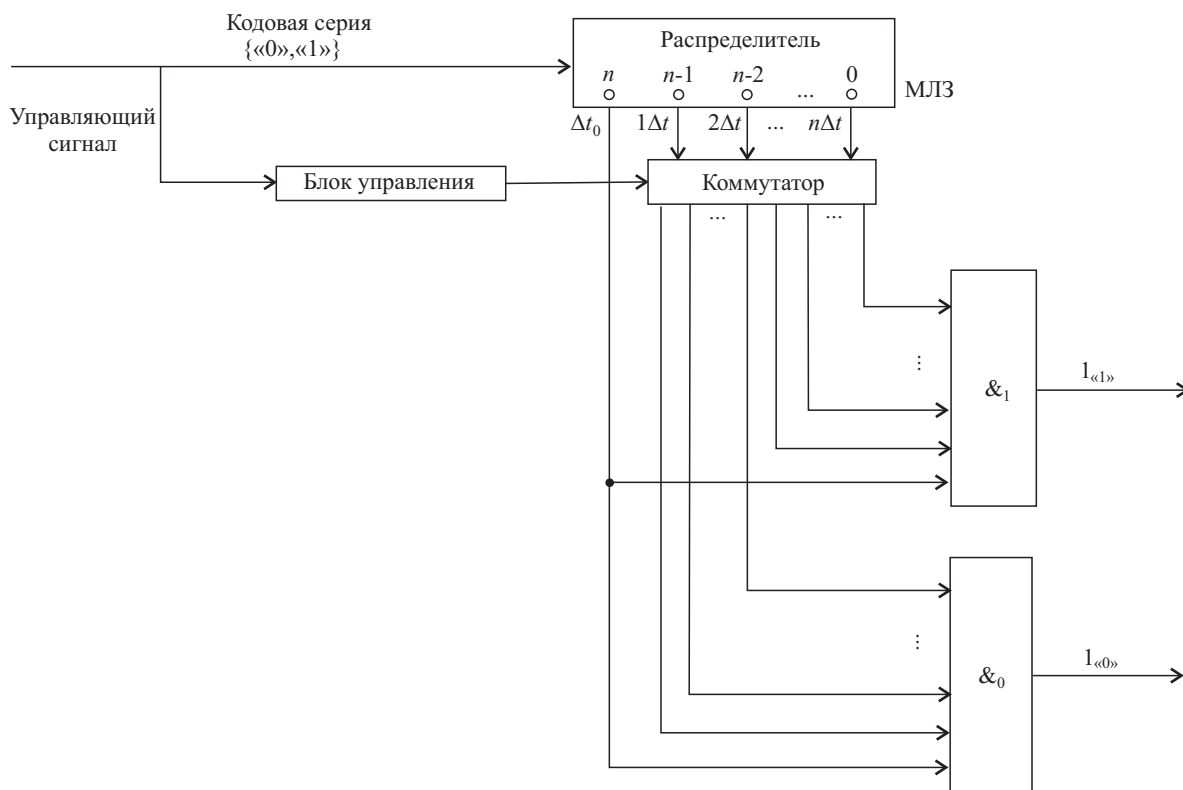


Рис. 3. Блок-схема декодера с кодовым сигнальным признаком с $(n + 1)$ -разрядным распределителем на МЛЗ

Управляющий сигнал, входящий в состав принимаемого сигнала, подается на блок управления, обеспечивающий закон коммутации, аналогичный закону, реализованному в схеме кодера.

Срабатывание логического элемента «И» ($\&_1$ или $\&_0$) на выходе декодера происходит в моменты совпадения импульсов с выходов распределителя, номера которых совпадают с номерами импульсов в декодируемой кодовой импульсной последовательности, появляющимися на соответствующих по номерам выходах распределителя.

Как показывают проведенные исследования, кодеки с кодовым сигнальным признаком с распределителями на МЛЗ позволяют реализовать принцип самосинхронизации и осуществлять передачу информации без использования каких бы то ни было специальных синхросигналов, что существенно повышает информационную надежность ЦСПИ.



Полином выходного сигнала декодера:

$$y'(x) = \sum_{i=1}^n b_{n-i} x^{n-i} = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0. \quad (2)$$

Коэффициенты полинома (2) могут быть представлены как функции задержек распределителя:

$$b_i = f'(\Delta t_0 + (n - i)\Delta t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, полином (2) может быть представлен в виде

$$y'(x, t) = f'(\Delta t_0) x^{n-1} + f'(\Delta t_0 + \Delta t) x^{n-2} + \dots + f'(\Delta t_0 + (n - 2)\Delta t) x + f'(\Delta t_0 + (n - 1)\Delta t).$$

Так как выходы распределителя декодера нумеруются в последовательности, обратной последовательности номеров выходов распределителя кодера, справедливы соотношения:

$$a_{n-k} = b_k, \quad k = \overline{0, n - 1}.$$

При COFDM-модуляции передача информации осуществляется посимвольно. Количество битов, входящих в состав одного OFDM-символа, определяется режимом модуляции. При QPSK это 2 бита, при 16-QAM — 4 бита, 64-QAM — 6 битов, 256-QAM — 8 битов. Поэтому при описании кодовой серии для OFDM-символа степень полинома зависит от режима применяемой модуляции:

$$y(x, t) = f(\Delta t_0) x^{k(n-1)} + f(\Delta t_0 + \Delta t) x^{k(n-2)} + \dots + f(\Delta t_0 + k(n-2)\Delta t) x + f(\Delta t_0 + k(n-1)\Delta t), \quad (3)$$

где k — число битов, составляющих OFDM-символ.

Математическое описание (3) универсально для любого режима COFDM-модуляции.

Как показали исследования, применение кодеков с кодовым сигнальным признаком позволяет существенно уменьшить межсимвольные защитные интервалы, а в ряде случаев и вовсе исключить их из транспортного потока. Кроме того, предложенный вариант принципа самосинхронизации обладает преимуществами по сравнению с другими известными способами его реализации.

Кодеки с кодовым сигнальным признаком также могут быть использованы при передаче информации о рабочих точках (символах) модуляционного созвездия. В этом случае каждой рабочей точке ставится в соответствие определенное число — номер точки (например, для QPSK — от 1 до 4, для 16-QAM — от 1 до 16, для 256-QAM — от 1 до 256). Кодер формирует кодовые серии, соответствующие номерам передаваемых символов. На приемной стороне по кодовым сериям восстанавливаются номера переданных символов и вычисляются координаты принятых рабочих точек. Таким образом, отпадает необходимость в передаче информации аналоговыми сигналами.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОДЕКОВ С КОДОВЫМ СИГНАЛЬНЫМ ПРИЗНАКОМ В СИСТЕМАХ С НЕДВОИЧНЫМ КАНАЛЬНЫМ АЛФАВИТОМ

Реализация кодеков с кодовым сигнальным признаком и распределителями на МЛЗ возможна и в случае использования недвоичного (в общем случае — K -ичного) канального алфавита. Кодер в этом случае формирует K кодовых серий (каждая с выхода соответствующей цепи «ИЛИ»-«И»); блок управления формирует K управляющих воздействий. В соответствии с этим преобразуются схемы кодеков.

Пусть q — число символов в кодовом рабочем алфавите ($q \geq 3$), а p — количество двоичных разрядов, необходимых для записи одного q -ичного символа: $p \geq \log_2 q$ (округление производится в большую сторону до ближайшего целого числа).

Среди разработанных авторами вариантов реализации кодеков для q -ичных кодов наибольший интерес представляет анализ следующих вариантов:

- кодеки с двумя выходами и одним распределителем (вариант 1);
- кодеки с двумя выходами и p распределителями (вариант 2);
- кодеки с $2p$ выходами и одним распределителем (вариант 3).

Оценка эффективности кодеков проводится на базе критерия эффективности алгоритмов их работы, предложенного авторами в [5]. В соответствии с этим критерием вычисляются коэффициенты η эффективности каждого из анализируемых алгоритмов:

$$\eta = \left(\frac{M_{\text{ЭГ}}}{M}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{K_{\text{ЭГ}}}{K}\right)^\beta \cdot \left(\frac{V_{\text{ЭГ}}}{V}\right)^\gamma \cdot \left(\frac{N_{\text{ЭГ}}}{N}\right)^\delta \cdot \left(\frac{T_{\text{ЭГ}}}{T}\right)^\varepsilon, \quad (4)$$



где M — объем памяти, необходимый для реализации алгоритма; K — число вспомогательных переменных в структуре алгоритма; V — число ветвлений в структуре алгоритма; N — количество действий, выполняемых в ходе алгоритма (сложность алгоритма); T — время выполнения алгоритма; $M_{\text{эт}}, K_{\text{эт}}, V_{\text{эт}}, N_{\text{эт}}, T_{\text{эт}}$ — эталонные (минимальные из возможных) значения критериальных параметров; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ — целочисленные (для удобства вычислений) положительные весовые коэффициенты, учитывающие «вес» (важность) каждого из критериальных параметров.

При проведении анализа алгоритмов рассмотрим общий случай, в котором «веса» параметров в формуле (4) равны единице:

$$\eta = \frac{M_{\text{эт}}}{M} \cdot \frac{K_{\text{эт}}}{K} \cdot \frac{V_{\text{эт}}}{V} \cdot \frac{N_{\text{эт}}}{N} \cdot \frac{T_{\text{эт}}}{T}. \quad (5)$$

Входная последовательность символов длиной m может быть представлена в полиномиальной форме относительно фиктивной переменной x :

$$f(x) = a_m x^{m-1} + a_{m-1} x^{m-2} + a_2 x + a_1. \quad (6)$$

где $a_i = 0, 1, \dots, q-1$ ($i = 1, 2, \dots, m$) — элементы входной последовательности (символы используемого алфавита).

Представляя q -ичные коэффициенты в (6) p -разрядным двоичным кодом, получим:

$$f(x) = (a_{m,1} a_{m,2} \dots a_{m,p}) x^{m-1} + (a_{m-1,1} a_{m-1,2} \dots a_{m-1,p}) x^{m-2} + \dots + (a_{2,1} a_{2,2} \dots a_{2,p}) x + (a_{1,1} a_{1,2} \dots a_{1,p}). \quad (7)$$

Для удобства реализации q -ичных кодов представим полином (7) в виде системы p полиномов:

$$\begin{cases} F_1(x) = a_{m,1} x^{m-1} + a_{m-1,1} x^{m-2} + \dots + a_{2,1} x + a_{1,1}, \\ F_2(x) = a_{m,2} x^{m-1} + a_{m-1,2} x^{m-2} + \dots + a_{2,2} x + a_{1,2}, \\ \dots \\ F_p(x) = a_{m,p} x^{m-1} + a_{m-1,p} x^{m-2} + \dots + a_{2,p} x + a_{1,p}. \end{cases} \quad (8)$$

При реализации алгоритмов кодирования и декодирования по варианту 1 осуществляется формирование $2p$ кодовых серий, описываемых полиномами для кодовых серий двоичных кодов:

$$\begin{cases} f_1(x) = a_{n,1} x^{n-1} + a_{n-1,1} x^{n-2} + \dots + a_{2,1} x + a_{1,1}, \\ f_0(x) = a_{n,0} x^{n-1} + a_{n-1,0} x^{n-2} + \dots + a_{2,0} x + a_{1,0}. \end{cases}$$

Число передаваемых в канал кодовых серий увеличивается в p раз по сравнению с вариантами использования двоичных кодов.

Для реализации алгоритмов по варианту 2 необходимо использовать методы работы с параллельными потоками данных, так как, хотя кодеки имеют по два выхода, но содержат по p работающих параллельно распределителей.

При реализации варианта 3, хотя кодеки содержат по одному распределителю, они имеют по $2p$ выходов и формируют $2p$ кодовых серий для каждого из полиномов системы (8):

$$\begin{cases} f_{1,1}(x) = a_{n-1,1}^1 x^{n-1} + a_{n-2,1}^1 x^{n-2} + \dots + a_{1,1}^1 x + a_{0,1}^1, \\ f_{0,1}(x) = a_{n-1,0}^1 x^{n-1} + a_{n-2,0}^1 x^{n-2} + \dots + a_{1,0}^1 x + a_{0,0}^1, \\ \dots \\ f_{1,p}(x) = a_{n-1,1}^p x^{n-1} + a_{n-2,1}^p x^{n-2} + \dots + a_{1,1}^p x + a_{0,1}^p, \\ f_{0,p}(x) = a_{n-1,0}^p x^{n-1} + a_{n-2,0}^p x^{n-2} + \dots + a_{1,0}^p x + a_{0,0}^p. \end{cases}$$

На рис. 4 и 5 приведены блок-схемы алгоритмов кодирования и декодирования соответственно для общего случая. Число операторов ветвления в теле обобщенного алгоритма определяется числом символов кодового алфавита q . Обозначения: avx — входной сигнал, n — число ячеек (выходов) распределителей, $comm$ — массив, определяющий коммутацию выходов распределителей, dzu — массив, хранящий значения битов в ячейках распределителей, $and0, and1, \dots, and(n-1)$ — значения на 0-м, 1-м, \dots , $(n-1)$ -м выходах распределителей, $res0, res1, \dots, res(q-1)$ — массивы кодовых серий для «0», «1», \dots , « $q-1$ », $S_{вых}$ — выходной сигнал декодирующего устройства.

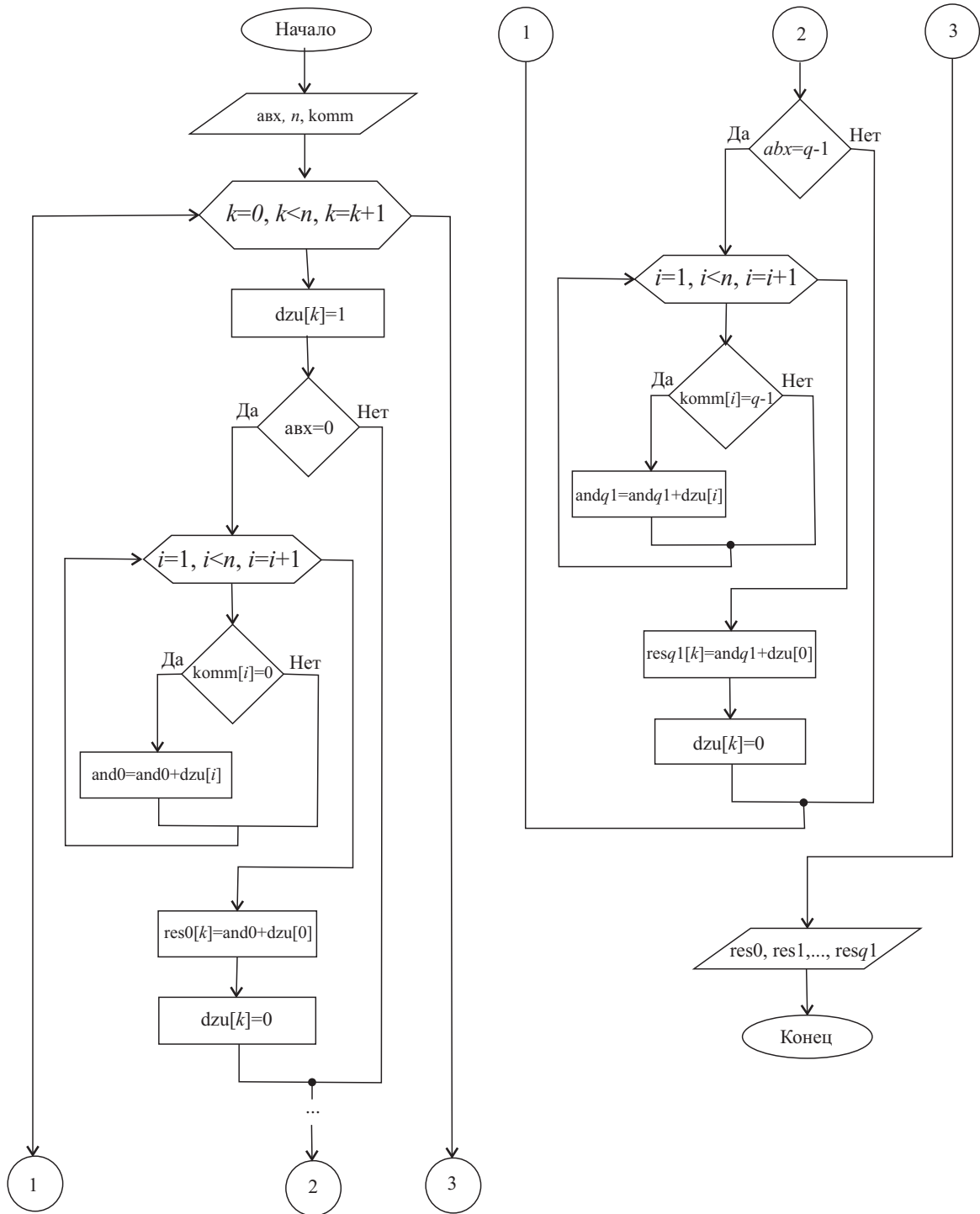


Рис. 4. Блок-схема алгоритма работы кодера с p выходами с n -позиционным распределителем на МЛЗ для q -ичного кода

Рассмотрим оценку анализируемых вариантов реализации кодеров для q -ичных кодов с использованием предложенного критерия.

Объем памяти определяется исходя из количества переменных и размерности массивов, задействованных в ходе выполнения соответствующего алгоритма. Исходя из анализа обобщенных блок-схем алгоритмов работы кодеров объем памяти может быть вычислен следующим образом:

- вариант 1: $M_1 = p(4n + 6 + 3n + 4) = p(7n + 10)$. Для решения оценочной задачи можно считать, что $M_1 \approx 7np$;
- вариант 2: $M_2 = 7np$;
- вариант 3: $M_3 = 7n$.

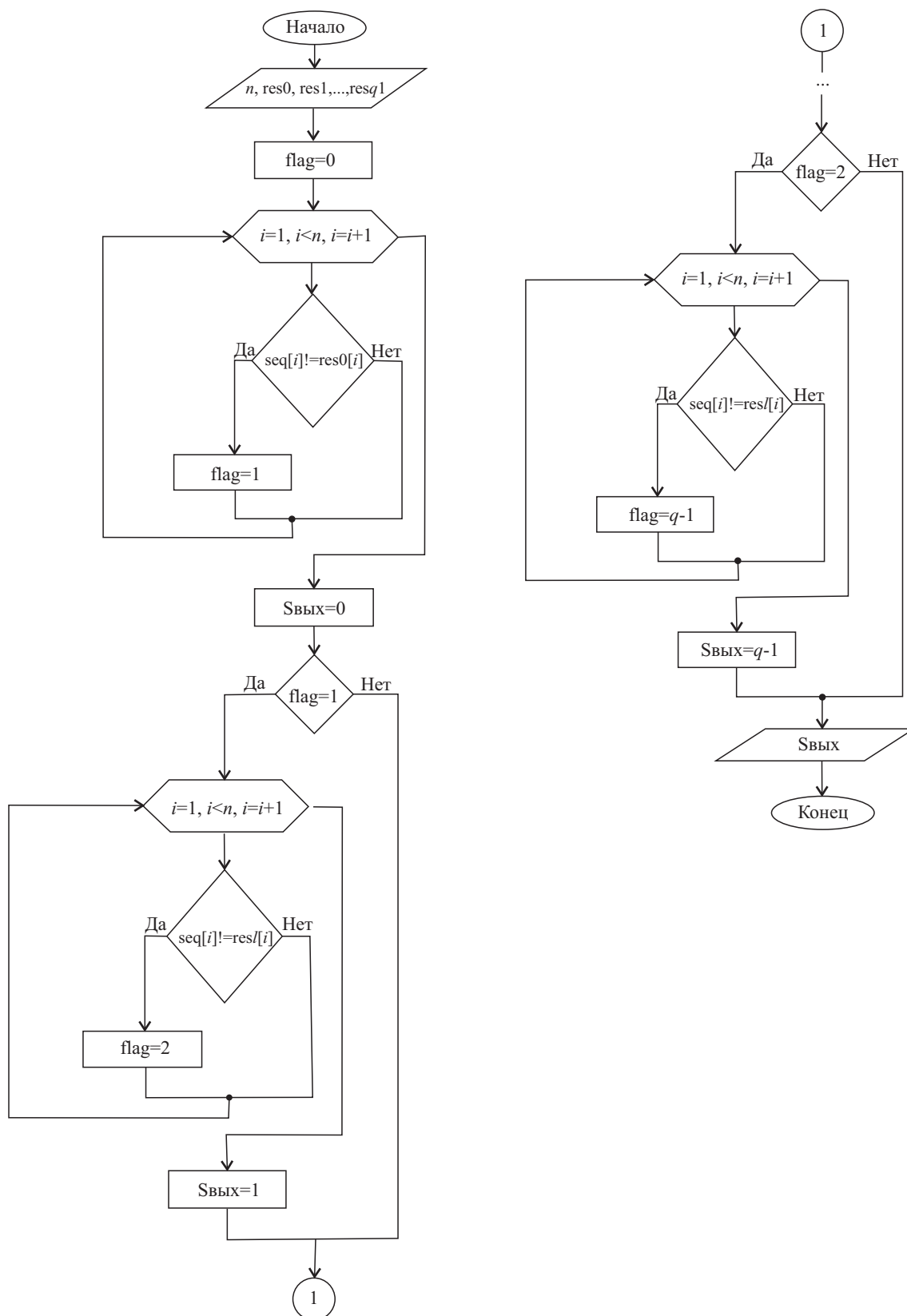


Рис. 5. Блок-схема алгоритма работы декодера с p выходами с n -позиционным распределителем на МЛЗ для q -ичного кода

Из анализа полученных выражений следует, что минимальный объем памяти необходим для реализации алгоритма по варианту 3. Примем данное значение объема памяти за эталонное и введем обозначение: $M_{\text{эп}} = M_3 = 7n$. Таким образом, значения коэффициентов эффективности алгоритмов



по объему памяти примут вид

$$\eta_{M_1} = \frac{M_{\text{эт}}}{M_1} = \frac{7n}{7np} = \frac{1}{p}, \quad \eta_{M_2} = \frac{M_{\text{эт}}}{M_2} = \frac{7n}{7np} = \frac{1}{p}, \quad \eta_{M_3} = 1.$$

Число вспомогательных переменных, необходимое для реализации каждого из алгоритмов, определяется следующим образом:

- вариант 1: $K_1 = p(2 + n) \approx np$;
- вариант 2: $K_2 = p(2 + n) \approx np$;
- вариант 3: $K_3 = K_{\text{эт}} = n + 5 \approx n$.

Значения коэффициентов эффективности алгоритмов по количеству вспомогательных переменных примут вид

$$\eta_{K_1} = \frac{K_{\text{эт}}}{K_1} = \frac{n}{np} = \frac{1}{p}, \quad \eta_{K_2} = \frac{K_{\text{эт}}}{K_2} = \frac{n}{np} = \frac{1}{p}, \quad \eta_{K_3} = 1.$$

Число ветвлений исходя из анализа тела каждого алгоритма может быть вычислено следующим образом:

- вариант 1: $V_1 = 10np = V_{\text{эт}}$;
- вариант 2: $V_2 = 10np = V_{\text{эт}}$;
- вариант 3: $V_3 = n^2(1 + q) + 8n + 2nq + 1 \approx qn^2 + 2nq + 8n \approx qn^2$.

Значения коэффициентов эффективности алгоритмов по количеству ветвлений:

$$\eta_{V_1} = 1, \quad \eta_{V_2} = 1, \quad \eta_{V_3} = \frac{V_{\text{эт}}}{V_3} = \frac{10p}{nq}.$$

Количество операций, выполняемых в ходе алгоритмов:

- вариант 1: $N_1 = p(7n^2 + 7n + 17n + 9) \approx p(7n^2 + 24n) \approx 7pn^2$;
- вариант 2: $N_2 = p(7n^2 + 7n + 17n + 9) \approx p(7n^2 + 24n) \approx 7pn^2$;
- вариант 3: $N_3 = 7n^2 + 28n + nq \approx 7n^2 = N_{\text{эт}}$.

Значения коэффициентов эффективности алгоритмов по сложности примут вид

$$\eta_{N_1} = \frac{N_{\text{эт}}}{N_1} = \frac{7n^2}{7pn^2} = \frac{1}{p}, \quad \eta_{N_2} = \frac{N_{\text{эт}}}{N_2} = \frac{7n^2}{7pn^2} = \frac{1}{p}, \quad \eta_{N_3} = 1.$$

Из анализа структуры и сложности каждого алгоритма следует, что наименьшее время необходимо для выполнения алгоритма по варианту 2 за счет распараллеливания операций кодирования и декодирования каждого из битов двоичного представления q -ичного кода.

Введем обозначение: $T_2 = T_{\text{эт}} = t$. Время выполнения алгоритмов определено следующим образом:

- вариант 1: $T_1 = k_1 \cdot t$, где $k_1 > 0$ — целочисленный коэффициент;
- вариант 2: $T_2 = T_{\text{эт}} = t$;
- вариант 3: $T_3 = k_2 \cdot t$, где $k_2 > 0$ — целочисленный коэффициент. В связи с тем, что сложность алгоритма по варианту 3 ниже сложности алгоритма по варианту 1, справедливо соотношение: $k_2 < k_1$.

Значения коэффициентов эффективности алгоритмов по времени выполнения примут вид

$$\eta_{T_1} = \frac{T_{\text{эт}}}{T_1} = \frac{t}{k_1 t} = \frac{1}{k_1}, \quad \eta_{T_2} = 1, \quad \eta_{T_3} = \frac{T_{\text{эт}}}{T_3} = \frac{t}{k_2 t} = \frac{1}{k_2}.$$

Применяя формулу (5), получим значения коэффициентов эффективности каждого из алгоритмов:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \eta_{M_1} \cdot \eta_{K_1} \cdot \eta_{V_1} \cdot \eta_{N_1} \cdot \eta_{T_1} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} \cdot 1 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_1 p^3}, \\ \eta_2 &= \eta_{M_2} \cdot \eta_{K_2} \cdot \eta_{V_2} \cdot \eta_{N_2} \cdot \eta_{T_2} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{p} \cdot 1 = \frac{1}{p^3}, \\ \eta_3 &= \eta_{M_3} \cdot \eta_{K_3} \cdot \eta_{V_3} \cdot \eta_{N_3} \cdot \eta_{T_3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{10p}{nq} \cdot 1 \cdot \frac{1}{k_2} = \frac{10p}{k_2 nq}. \end{aligned}$$

Значения каждого коэффициента принадлежат интервалу $[0, 1]$. Чем ближе значение коэффициента к единице, тем эффективность алгоритма выше. Таким образом, можно утверждать, что, в соответствии с предложенным критерием при одинаковых и равных единице весовых коэффициентах наиболее эффективными являются алгоритмы кодирования – декодирования и, следовательно, кодеки с кодовым сигнальным признаком с распределителями на МЛЗ по варианту 3 — реализация q -ичных кодов на базе одного распределителя с $2p$ выходами.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами работы являются:

- новые возможности и преимущества использования повернутого модуляционного созвездия;
- реализация принципа самосинхронизации на базе кодеков с кодовым сигнальным признаком для случаев использования двоичного и недвоичного кодов;
- существенное уменьшение межсимвольных защитных интервалов при использовании кодеков с кодовым сигнальным признаком;
- возможность передачи и декодирования информации о рабочих точках модуляционного созвездия, представленных кодовыми сериями сигнала с кодовым сигнальным признаком без использования аналоговых сигналов.

В соответствии с результатами проведенного моделирования вероятность ложного приема в системах с кодами с кодовым сигнальным признаком снижается на один-два порядка по сравнению с традиционными вариантами QAM/COFDM кодеков в условиях действия помех большой интенсивности.

Библиографический список

1. Киселёв В. В., Руденко А. Е., Светлов М. С. Моделирование цифровых систем телерадиовещания с квадратурной амплитудной манипуляцией // Вестн. СГТУ. 2010. Т. 4(51), вып. 3. С. 140–142.
2. Голомб С. Цифровые методы в космических системах связи. М.: Связь, 1969.
3. Robertson P., Kaiser S. The effects of Doppler spreads in OFDM(A) mobile radio systems // Proc. 56th Vehicular Technology Conference (VTC 1999-Fall). Vol. 50. Amsterdam, Netherlands, 1999. P. 329–333.
4. Безруков В. Н., Комаров П. Ю., Коржихин Е. О. Специфика коррекции характеристик радиоканала в системе цифрового телевидения по стандарту DVB-T // Тр. Моск. техн. ун-та связи и информатики: в 2 т. М.: ИД Медиа Паблшер, 2008. Т. 1. С. 437–440.
5. Львова Н. А., Мартынов П. В. Разработка критериев эффективности алгоритмов цифровой обработки информации // Проблемы управления, передачи и обработки информации: сб. тр. II междунар. науч. конф. АТМ-2011. 2012. Т. 2. С. 72–74.

Increasing of Information Reliability of Digital Systems with QAM/COFDM-Modulation

A. A. Lvov¹, M. S. Svetlov², P. V. Martynov¹

¹Saratov State Technical University named after Gagarin Y.A., 77, Politechnicheskaya st., 410054, Saratov, Russia, alvova@mail.ru, pavel_martynov@list.ru

²Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya str., 410028, Saratov, Russia, svetlovms@yandex.ru

Ensuring of a high level of information reliability is one of the most important tasks of the synthesis of digital communication systems for various applications. In this paper for improving the reliability of the information in the systems with QAM/COFDM-modulated signal it is suggested to use the code signal sign on base of coders and decoders (codecs) with distributors on multiple delay lines (MDL); the advantages of the principle of self-synchronization while substantially reducing of the guard intervals in the structure of the transmitted signals are discussed; possibility of excluding the analog signals from the channel is shown.

Key words: information reliability, quadrature amplitude modulation, codec, code signal sign.

References

1. Kiselev V. V., Rudenko A. E., Svetlov M. S. Simulation of the digital television broadcasting systems with quadrature amplitude modulation. Vestnik Saratov State techn. Univ., vol. 4(51), iss. 3, pp. 140–142 (in Russian).
2. Golomb S. Digital methods in the space communication systems. Moscow, Svyaz, 1969 (in Russian).
3. Robertson P. The effects of Doppler spreads in OFDM(A) mobile radio systems. Proc. 56th Vehicular Technology Conference (VTC 1999-Fall). Vol. 50. Amsterdam, Netherlands, 1999, pp. 329–333.
4. Bezrukov V. N., Komarov P. Y., Korzhihin E. O. Spetsifika korrektsii kharakteristik radiokanala v sisteme tsifrovogo televideniia po standartu DVB-T [Specificity of characteristic corrections of radio channel in the system of digital television of DVB-T standard]. Trudy Moskovskogo tekhnicheskogo universiteta svyazi i informatiki [Proc. Moscow Tech. Univ. Communic. Inform.], Moscow, ID Media Publ., 2008, pp. 437–440 (in Russian).
5. Lvova N. A., Martynov P. V. Development of criteria for the effectiveness of algorithms for digital processing of information. Problemy upravleniia, peredachi i obrabotki informatsii: sb. tr. II mezhdunar. nauch. konf. АТМ-2011 [Problems of control, transmitting and processing of information: Proc. II Intern. scientific conf. АТМ-2011], 2012, vol. 2, pp. 72–74 (in Russian).

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

ХІ ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ПРОБЛЕМАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике совместно с Казанским (Приволжским) федеральным университетом и Институтом механики и машиностроения КазНЦ РАН при поддержке Правительства Республики Татарстан, Российской академии наук и Российского фонда фундаментальных исследований проводит в г. Казани 17–21 августа 2015 года XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. В рамках съезда пройдут Третья Всероссийская школа молодых ученых-механиков и сессия Общего собрания Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике.

Структура научной программы съезда

Секция I. Общая и прикладная механика:

- I–1. Аналитическая механика и устойчивость движения;
- I–2. Управление и оптимизация в механических системах;
- I–3. Колебания механических систем;
- I–4. Механика систем твердых и деформируемых тел;
- I–5 Механика машин и роботов.

Секция II. Механика жидкости и газа:

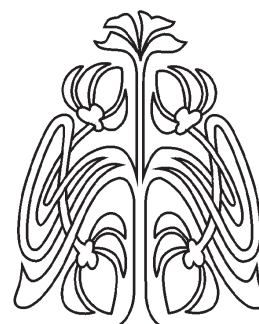
- II–1. Гидродинамика;
- II–2. Аэродинамика и газовая динамика;
- II–3 Устойчивость течений и турбулентность;
- II–4. Физико-химическая механика сплошных сред;
- II–5. Механика многофазных сред.

Секция III. Механика деформируемого твердого тела:

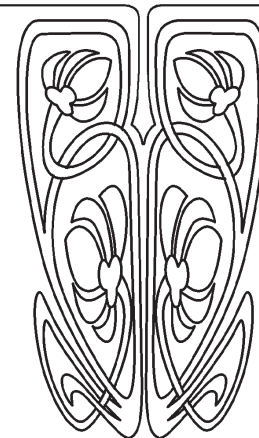
- III–1. Теория упругости и вязкоупругости;
- III–2. Теория пластичности и ползучести;
- III–3. Динамические процессы в деформируемых средах;
- III–4. Механика разрушения и повреждений;
- III–5. Механика контактного взаимодействия.

Секция IV. Междисциплинарные подсекции:

- IV–1. Проблемы мезо- и наномеханики;
- IV–2. Биомеханика;
- IV–3. Механика природных процессов;
- IV–4. История механики и вопросы преподавания механики в вузах.



ПРИЛОЖЕНИЕ





На секционные заседания будут вынесены заказные доклады, на подсекционные — доклады в устной и стендовой формах, отобранные Оргкомитетом. Каждый автор имеет право представить только один доклад.

Заявки на участие в работе съезда с докладом будут приниматься Оргкомитетом до 1 марта 2015 года по установленной на сайте съезда форме, в соответствии с которой должны быть представлены аннотации, содержащие не более 500 знаков, и краткий текст доклада объёмом в 2 страницы формата А4. Аннотации принятых докладов будут опубликованы в сборнике материалов съезда, а тексты докладов будут размещены на сайте и на CD-диске в PDF-формате.

Регистрационные формы участников и другая информация о съезде будут размещаться на сайте съезда **www.ruscongrmech2015.ru**.

Регистрация заявок на доклады: до 1 марта 2015 г.