САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 4, часть 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

Научный журнал
2014 Том 14
ISSN 1814-733X
ISSN 1816-9791
Издается с 2001 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017, раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки» Журнал выходит 4 раза в год

Адрес редакции:
410012, Саратов, Астраханская, 83
Издательство Саратовского университета
Тел.: (845-2) 52-26-89, 52-26-85

Подписано в печать 01.12.14.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 14,41 (15,5).
Тираж 500 экз. Заказ 60.

Отпечатано в типографии Издательства Саратовского университета

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 11 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: http://mmi.sgu.ru. Статьи бóльшего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: http://mmi.sgu.ru.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL «IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

МАТЕМАТИКА

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 517.982.256

ВЫПУКЛОСТЬ ОГРАНИЧЕННЫХ ЧЕБЫШЁВСКИХ МНОЖЕСТВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМОЙ

А. Р. Алимов

Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории вычислительных методов механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, alexey.alimov@gmail.com

Известная характеризация Царькова конечномерных банаховых пространств, в которых всякое ограниченное чебышёвское множество (ограниченное P-ацикличное множество) выпукло, обобщается на несимметричный случай.

Ключевые слова: ограниченное чебышёвское множество, выпуклость, несимметричная норма.

Множество M из пространства X с фиксированной функцией расстояния $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$ называется *чебышёвским множеством*, если для каждой точки $x \in X$ множество $P_M x := \inf\limits_{y \in M} \rho(x, y)$ ее ближайших точек из M состоит из одной точки. Исторически первыми интересными примерами чебышёвских множеств служили подпространства многочленов, тригонометрических полиномов и множество дробно-рациональных функций в $C[0,1]$. Единственность наилучшего приближения такими множествами была отмечена в XIX веке П. Л. Чебышёвым. Множества со свойством существования и единственности элемента наилучшего приближения были названы Ефимовым и Стечкиным [1] *чебышёвскими* в честь Чебышёва. В данной работе рассматривается вопрос выпуклости ограниченных чебышёвских множеств в конечномерных несимметрично нормированных пространствах.

Далее всегда предполагается, что $M \neq \varnothing$, X — конечномерное линейное действительное пространство, в качестве функции расстояния ρ в котором служит норма или несимметричная норма, определяемая ниже.

В этой работе мы изучаем взаимосвязь между выпуклостью чебышёвских множеств в X и геометрическими свойствами пространства X. На конечномерные пространства с несимметричной нормой обобщается следующая характеризация Царькова [2], которую мы кратко сформулируем следующим образом: *в конечномерном линейном нормированном пространстве X всякое ограниченное чебышёвское множество выпукло тогда и только тогда, когда множество экстремальных точек единичной сферы S^* сопряженного пространства плотно в ней.*

Напомним [3], что *несимметричной нормой* $\|\cdot\|$ на действительном линейном пространстве X называется функционал Минковского некоторого фиксированного выпуклого ограниченно поглощающего множества B (единичного шара), содержащего начало координат в своем ядре. Именно для $x, y \in X$, $x \neq 0$ определяется

$$\|x\| := \sup\{\sigma \geqslant 0 \,|\, x \notin \sigma B\}, \qquad \|0\| = 0.$$

Несимметричные нормы возникли впервые у Г. Минковского («функционал Минковского»), в бесконечномерный анализ они были привнесены М. Г. Крейном. Термин *несимметричная норма* был предложен Крейном [4, с. 197] в 1938 г.

Несимметричная норма удовлетворяет всем аксиомам нормы, исключая аксиому симметрии; в общем случае $\|x - y\| \neq \|y - x\|$. Неравенство треугольника выполнено в следующем виде:

$$\|x - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|$$

для любых $x, y, z \in X$.

В последние годы активно развивается тематика, связанная несимметричными нормами и односторонними приближениями (С. Кобзаш (S. Cobzaş) [3], Х.-П. А. Кюнци (H.-P. A. Künzi), С. Ромагуера (S. Romaguera), К. Алегре (C. Alegre), Э. А. Санчес Перез (E. A. Sánchez Pérez), П. А. Бородин [5] и др.). Наиболее полно обзор результатов, относящихся к общим вопросам функционального анализа в несимметрично нормированных пространствах приведен в недавно вышедшей книге С. Кобзаша [3].

Основным результатом настоящей работы является обобщение характеризации Царькова на несимметричный случай. Попутно мы подчеркиваем роль инструментария геометрической топологии, в очередной раз продемонстрировавшего свою применимость в решении задач геометрической теории приближений.

Проблема выпуклости чебышёвских множеств в конкретных и абстрактных банаховых пространствах рассматривалась многими авторами (см., например, В. И. Бердышев [6], А. Брондстед (A. Brøndsted) [7], А. Л. Браун (A. L. Brown) [8, 9], Л. П. Власов [10], В. С. Балаганский и Л. П. Власов [11], И. Г. Царьков [2, 12], А. Р. Алимов [13, 14]). Коротко напомним результаты, относящиеся к конечномерному случаю.

Точка s единичной сферы S несимметрично нормированного пространства X называется *точкой гладкости* (гладкой точкой), если в ней опорная гиперплоскость к S единственна; точка s — *достижимая* точка сферы S (или единичного шара B), если существует опорная к B гиперплоскость, пересекающая B в точности по точке s. Множество экстремальных (крайних), достижимых (выставленных) и гладких точек единичной сферы S будет обозначаться соответственно посредством $\operatorname{ext} S$, $\exp S$ и $\operatorname{sm} S$. Пространство X называется *гладким*, если $\operatorname{sm} S = S$.

Изучение геометрии чебышёвских множеств в линейных нормированных пространствах было начато Л. Бунтом (L. N. H. Bunt) [15], который доказал, что в строго выпуклых конечномерных пространствах с модулем гладкости второго порядка (в частности, в евклидовых) любое чебышёвское множество выпукло, причем в двумерном случае он показал, что от условия строгой выпуклости можно избавиться. Т. С. Моцкин и Х. Манн (см. [10, 11, 13, 16]) показали, что в двумерном случае гладкость пространства — необходимое и достаточное условие для выпуклости любого чебышёвского множества в этом пространстве.

Следующее серьёзное продвижение в исследовании чебышёвских множеств связано с работами В. Кли (V. L. Klee), Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина. В своих ранних работах Кли [17, 18] обобщил теоремы Бунта и Моцкина, показав, что каждое чебышёвское множество является выпуклым в любом конечномерном гладком пространстве. Ефимов и Стечкин (см. [10, 13, 16]) доказали, что в конечномерном банаховом пространстве X класс всех чебышёвских множеств совпадает с классом всех выпуклых замкнутых множеств тогда и только тогда, когда X строго выпукло и гладко.

А. Брондстед [7] охарактеризовал трехмерные несимметрично нормированные пространства, в которых всякое чебышёвское множество выпукло (и отметил, что результат Моцкина – Манна верен также и для двумерных несимметрично нормированных пространств). Независимо в то же самое время В. И. Бердышев [6] получил ту же характеризацию, но лишь для нормированного случая. В [9] Браун получил характеризацию четырехмерных линейных нормированных пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло, позднее автор данной статьи [14] перенес характеризацию Брауна на несимметричный случай.

Сформулируем результаты Бердышева – Брондстеда – Брауна – Алимова в виде следующей теоремы (см. [6, 7, 9, 13, 14]).

Теорема. *Пусть X — несимметрично нормированное пространство размерности 3 или 4. Каждое чебышёвское множество в X выпукло, если и только если каждая достижимая точка единичного шара пространства X является точкой гладкости.*

В дополнение к упомянутой характеризации Бердышев для $n = 3$ и Брондстед для всех натуральных $n \geqslant 3$ построили примеры негладких пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло.

Вопрос о характеризации n-мерных пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло, открыт для $n \geqslant 5$ (подробнее см. [9, 11, 13]).

Удивительно, но решение задачи о выпуклости чебышёвских множеств принципиально отличается в зависимости от того, рассматриваются ли ограниченные или неограниченные множества.

Ниже мы рассматриваем вопрос о характеризации пространств (в том числе несимметрично нормированных), в которых всякое *ограниченное* чебышёвское множество выпукло.

В 1958 г. Н. В. Ефимов и С. Б. Стечкин [1] сформулировали следующую задачу: *охарактеризовать конечномерные линейные нормированные пространства, в которых всякое ограниченное чебышёвское множество выпукло.* Полный ответ на этот вопрос был получен Царьковым в [2] (см. также и работу Брауна [8], в которой подробно разбирается доказательство Царькова и исследуются возникающие при этом сопутствующие задачи).

Рассматриваемая в работе задача для несимметрично нормированных пространств была поставлена в 1990-х гг. С. Б. Стечкиным, который был активным сторонником рассмотрения задач геометрической теории приближений в несимметричном случае.

Для того чтобы сформулировать результат Царькова о выпуклости ограниченных чебышёвских множеств, нам потребуется несколько определений и фактов.

Далее X — конечномерное несимметрично нормированное пространство, $\|\cdot\|$ — несимметричная норма на X. Для $x \in X$ и $r > 0$ положим:

$S(x,r) := \{y \in X \mid \|x-y\| = r\}$ — сфера,

$B(x,r) := \{y \in X \mid \|x-y\| \leqslant r\}$ — замкнутый шар,

$\mathring{B}(x,r) := \{y \in X \mid \|x-y\| < r\}$ — открытый шар

соответственно с центром x и радиусом r. Единичный шар $B(0,1)$ обозначается посредством B, S — единичная сфера. Сопряженное пространство к X обозначается X^*; при этом естественная несимметричная норма на X^* для $f, g \in X^*$ определяется как $d(0,f) := \max_{x\in B} f(x)$, $d(f,g) := d(0, g-f)$. Для конечномерного (или метризуемого) X сопряженное является линейным пространством, в бесконечномерном неметризуемом случае в качестве сопряженного естественно возникают конусы. Единичная сфера пространства X^* относительно введенной несимметричной нормы d обозначается посредством S^*, а единичный шар — B^*. Естественная топология на X порождается базой $\{\mathring{B}(x,r)\}$; если $\dim X = n < \infty$, то эта топология совпадает с обычной евклидовой топологией на $\mathbb{R}^n$.

Напомним еще несколько определений.

Для $x \in S$ посредством $V(x)$ обозначим объединение 0 и всех прямых линий ℓ таких, что

$$\ell \cap \mathrm{cl}\{\lambda(B-x) \mid \lambda \geqslant 0\} = \{0\}.$$

Буква «V» означает первую букву латинского «visibilitas» («видимость») — *таким образом, множество $x + V(x)$ состоит из всех точек вне единичного шара B, из которых можно «напрямую» (в строгом смысле) увидеть точку x на поверхности S шара B* (см. [8]).

Подмножество $R \subset S$ называется *хребтом* (ridge) [8] сферы S, если оно связно и найдутся подпространство $L \subset X$, $\dim L \geqslant 0$, и открытое в R подмножество $W \subset R$ такие, что

1) $L \setminus \{0\} \subset \operatorname{int} \bigcap\limits_{x\in R} V(x)$;

2) W гомеоморфно $\mathbb{R}^{(\dim X - 1 - \dim L)}$.

Хребет R называется *простым хребтом*, если существует открытое подмножество U из S^* такое, что $R = \cup\{f^{-1}(1) \cap S \mid f \in U\}$.

Примеры и свойства хребтов [8]:

1. Связное открытое в S подмножество $R \subset S$ является хребтом размерности $(\dim X - 1)$ (здесь $L = \{0\}$). Такой хребет называется *купольным*.

2. Хребет размерности 0 — это точка, называемая «пиком».

3. Пусть X — пространство $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$. Вершины единичного куба являются простыми пиками; интервал, содержащийся в ребре куба, — это хребет, но не простой хребет; ребро куба — простой хребет.

Следующий результат был доказан в [8] без упоминания пространств с несимметричной сферой. Тем не менее его можно перенести безо всякого изменения на случай несимметрично нормированных пространств.

Предложение A. *Пусть R — хребет на сфере S, а L — подпространство, фигурирующее в определении хребта F. Далее, пусть $\pi : X \to X/L$ — каноническое фактор-отображение. Тогда внутренность $\pi(R)$ в $S(X/L)$ непуста, а топологическая размерность R равна* $\dim X - 1 - \dim L$.

Из предложения A следует, что выражение «хребет размерности k» корректно.

Следуя [8], определим

$$\begin{aligned} \Psi_*(x) &= \{f \in S^* \mid f(x) = 1\}, \qquad & x \in X, \\ \Psi(f) &= \{x \in S \mid f(x) = 1\}, \qquad & f \in S^*. \end{aligned} \tag{1}$$

Если $U \subset S^*$, то $\Psi(U)$ обозначает множество $\cup\{\Psi(f) \mid f \in U\}$. Таким образом, $\Psi_*(x)$ — достижимая грань сферы S^*, определяемая посредством $x \in S$, и $\Psi(f)$ — достижимая грань сферы S, определяемая посредством $f \in S^*$. В наших терминах точка $x \in S$ есть точка гладкости, тогда и только тогда, когда $\Psi_*(x)$ состоит из одной точки.

Коническое множество [2] определяется следующим образом: подмножество C сферы S называется *коническим множеством*, если найдутся одномерное подпространство L пространства X и открытое подмножество U_0 сферы S^* такие, что

1) $L \setminus \{0\} \subset \operatorname{int}\{\cap V(x) \mid x \in C\}$;

2) $\Psi(U_0) \subset C$.

Из этого определения немедленно следует, что

простой хребет размерности, меньшей чем $\dim X - 1$, является коническим множеством. (2)

Один из основных результатов работы Царькова [2] состоит в том, что если сфера S линейного нормированного пространства X содержит коническое множество, то в X имеется невыпуклое ограниченное чебышёвское множество. Аналогичный результат верен и в несимметричном случае.

Теория гомологий (когомологий) связывает с каждым топологическим пространством X последовательности абелевых групп $H_k(X)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (группы гомологий) и $H^k(X)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (группы когомологий), которые являются гомотопическими инвариантами пространства: если два пространства гомотопически эквивалентны, то и соответствующие группы гомологий изоморфны.

Пусть A — произвольная нетривиальная абелева группа. Пространство (все пространства предполагаются метризуемыми) называется *ацикличным*, если его группа чеховских когомологий с коэффициентами из A тривиальна (не имеет циклов, за исключением границы). Таким образом, определение ацикличности зависит от выбранной группы коэффициентов. В случае если гомология (когомология) имеет компактный носитель и коэффициенты группы гомологий (когомологий) лежат в поле, то понятия гомологической и когомологической ацикличности совпадают.

Далее, если не оговорено противное, ацикличность будет пониматься относительно чеховских когомологий с коэффициентами в произвольной абелевой группе.

Множество M называется *P-ацикличным*, если для всякого $x \in X$ множество $P_M x$ ближайших точек из M к x непусто и ациклично. Множество *B-ациклично*, если его пересечение с любым шаром ациклично.

Для наших целей важно отметить [8, 9], что если M — P-ацикличное аппроксимативно компактное подмножество банахова пространства и если пересечение M с некоторым шаром B компактно, то $M \cap B$ ациклично; в частности, в банаховом пространстве для ограниченно компактных множеств класс P-ацикличных множеств совпадает с классом B-ацикличных множеств [8, лемма 5.3].

Понятно, что всякое чебышёвское множество P-ациклично. Также отметим, что ограниченно компактное P-ацикличное подмножество банахова пространства всегда является солнцем (см. [10, теорема 4.4]).

В следующей основной теореме характеризация Царькова распространяется на конечномерные пространства с несимметричной нормой.

Теорема 1. *Пусть X — конечномерное несимметрично нормированное пространство. Тогда следующие условия эквиваленты:*

а) всякое ограниченное чебышёвское множество в X выпукло;

б) всякое ограниченное P-ацикличное множество в X выпукло;

в) всякое ограниченное B-ацикличное множество в X выпукло;

г) $\overline{\exp}\, S^* = S^*$;

д) $\overline{\operatorname{ext}}\, S^* = S^*$;

е) сфера S не содержит конических подмножеств;

ж) сфера S не содержит простых хребтов размерности $< \dim X - 1$.

В симметричном случае эквивалентность е) другим условиям в теореме 1, а также равносильность б)$\Leftrightarrow$в) была установлена Брауном [8].

Мы докажем б) $\Leftrightarrow$ в) $\Rightarrow$ а) $\Rightarrow$ ж) $\Rightarrow$ е) $\Rightarrow$ д) $\Leftrightarrow$ г) $\Rightarrow$ б).

г) $\Leftrightarrow$ д) гарантируется классической теоремой Страшевича, согласно которой множество достижимых точек конечномерного выпуклого компакта образует плотное подмножество во множестве его крайних точек.

Импликация ж) $\Rightarrow$ е) следует из (2): простой хребет размерности $< \dim X - 1$ является коническим множеством.

а) $\Rightarrow$ ж) вытекает из следующего результата Царькова [2, лемма 5].

Лемма А. *Пусть X — конечномерное нормированное пространство. Предположим, что на единичной сфере S найдется коническое множество. Тогда существует невыпуклое ограниченное чебышёвское множество в X.*

На случай несимметрично нормированных пространств доказательство леммы А переносится без изменений.

Импликация г) $\Rightarrow$ б) основывается на следующих утверждениях, из которых лемма В (см. [2, 8]) достаточно интуитивно ясна: полукруг не выпуклый, следовательно, существует гиперплоскость, «отсекающая кусочки» от концов полукруга; полусфера также не выпукла, и поэтому возможно отсечь от нее гиперплоскостью обод. Как и выше, симметричность в лемме В не по существу.

Лемма В. *Пусть X — конечномерное несимметрично нормированное пространство и $M \subset X$. Если M — ограничено, замкнуто, невыпукло и $X \setminus M$ связно, то тогда существует открытое полупространство H и множество $\Sigma \subset H \cap M$ такие, что*

1) Σ является относительной границей некоторого выпуклого множества и, следовательно, Σ гомеоморфно сфере;

2) Σ является ретрактом $H \cap M$.

Напомним, что по определению подмножество $A \subset C$ называется *ретрактом* множества C, если существует непрерывное отображение $r : C \to A$, называемое ретракцией, такое, что $r|_A = 1|_A$, т. е. тождественное отображение 1_A допускает непрерывное продолжение на все пространство C. Следующий результат хорошо известен. Пусть M — чебышёвское множество с непрерывной метрической проекцией, а B — замкнутый шар, $B \cap M \neq \varnothing$. Тогда $M \cap B$ — ретракт шара B (т. е. M — B-ретракт). Давно известно, что конечномерная сфера не является ретрактом замкнутого шара, границей которого она служит (в бесконечномерном случае это уже не так). Аналогом теоремы об отсутствии ретракций для 2-значных ретракций служит лемма 2, которая нам понадобится при перенесении утверждения о чебышёвских множествах на случай P- и B-ацикличных множеств.

Через $\exp_2 A$ обозначается пространство всех, не более чем двухточечных подмножеств A с топологией Вьеториса. Пусть $A \subset C$. Непрерывное (т. е. полунепрерывное сверху и снизу) отображение $r : C \to \exp_2(A)$ называется *2-значной* (*$\exp_2$-значной*) *ретракцией* C на A, если $r|_A = \mathrm{id}$.

Следующие два результата были сообщены автору Е. В. Щепиным и А. Н. Дранишниковым.

Лемма 1. *Пусть X — конечномерное несимметрично нормированное пространство и пусть $M \subset X$ — B-ацикличный компакт. Тогда существует 2-значная ретракция $B(x, r)$ на $B(x, r) \cap M$.*

Напомним, что компакт Y называется *клеточноподобным* (имеющим шейп точки), если существует ANR Z и вложение $i : Y \to Z$ такое, что образ $i(Y)$ стягиваем в любой своей окрестности $U \subset Z$. Согласно известной характеризации Д. Химана (D. Hyman) компакт клеточноподобен если и только если он гомеоморфен пересечению счетной убывающей последовательности абсолютных ретрактов (или стягиваемых компактов), т. е. является R_δ-множеством в смысле Ароншайна.

Для доказательства леммы 1 сначала заметим, что что симметрический квадрат (в смысле Борсука и Улама) ацикличного компакта клеточноподобен) [19]. Далее, согласно классической теореме А. Дольда (A. Dold) [20, Theorem 5.11], для полиэдров целочисленные гомологии пространства $\exp_2 Y$ полностью определяется гомологиями пространства Y, т. е. если $H_i(Y) = H_i(Y')$ при всех $i \leqslant n$, то тогда $H_i(\exp_2 Y) = H_i(\exp_2 Y')$, $i \leqslant n$. Окончательно, отсюда следует, что при вложении в симметрический квадрат ацикличного компакта стягиваемость диагонали эквивалентна существованию $\exp_2$-значной ретракции, иными словами, отображение диагонали продолжается до отображения диска.

Лемма 2. *Не существует 2-значной ретракции конечномерного n-шара на сферу.*

Лемма 2 есть следствие теоремы Дольда – Тома (A. Dold, R. Thom) (см. [19, § 3.E; 21]), согласно которой бесконечное симметрическое произведение $\mathrm{SP}^{\infty}(S^n)$ n-сферы является комплексом Эйленберга – Маклейна $K(\mathbb{Z}, n)$ (т. е. CW-комплексом K, у которого гомотопические группы $\pi_i(K)$ тривиальны при $i \neq n$ и $\pi_n(K) = G$), а вложение $S^n \to \mathrm{SP}^{\infty}$ гомотопически нетривиально. Комплекс $K(\mathbb{Z}, n)$ можно понимать как CW-комплекс, получающийся из n-мерной сферы S^n добавлением клеток размерности $\geqslant n+2$. Как следствие, вложение $S^n \subset \mathrm{SP}^2(S^n)$ в симметрический квадрат гомотопически нетривиально. Поэтому его нельзя продолжить на шар B^{n+1}, что показывает отсутствие 2-значной (непрерывной) ретракции. С другой стороны, отметим, что 3-значная ретракция шара на границу всегда существует (Дранишников [22]).

Теперь импликация г)⇒б) может быть завершена при помощи следующих рассуждений. Предположим, что $\overline{\exp} S^* = S^*$, и существует невыпуклое ограниченное P-ацикличное множество M. Пусть H и Σ выбраны как в лемме B (лемма применима, так как дополнение ко множеству M связно: действительно, будучи P-ацикличным M является солнцем по известной теореме Власова [10, теорема 4.4], а дополнение к ограниченному солнцу всегда связно [23]). Полупространство H определяется посредством некоторого функционала $f \in S^*$. Слегка изменяя H, мы не меняем ситуации, так что мы можем предположить, что $f \in \exp S^*$. Тогда если гиперплоскость $\mathrm{bd}\, H$ является опорной к некоторому шару, то касание происходит по гладкой точке. Соответственно можно выбрать замкнутый шар B_R достаточно большого радиуса, таким образом, что $\Sigma \subset (B_R \cap M) \subset (H \cap M)$. По лемме 1 множество Σ является ретрактом $B \cap M$, а множество $B \cap M$ — 2-ретрактом B, но это невозможно, так как по лемме 2 сфера не может быть 2-ретрактом шара. Это противоречие доказывает импликацию г) ⇒ б).

Доказательство импликации е) ⇒ д) не меняется при переходе с симметричного случая на несимметричный.

Для доказательства б) ⇔ в) воспользуемся следующим утверждением, доказанным Брауном [8] для случая общих линейных нормированных пространств.

Лемма 3. *Пусть M — замкнутое подмножество конечномерного несимметрично нормированного пространства X. Если $B = B(z, R)$ — замкнутый шар и $B \cap M \neq \varnothing$, то существует полунепрерывная сверху многозначная ретракция $\Phi : B \to B \cap M$ такая, что для каждого $z \in B$ множество $\Phi(z)$ совпадает с $P_M(z')$ для некоторого $z' \in B$.*

Доказательство. Мы используем схему рассуждений Брауна. Пусть $B = B(z_0, R)$. Для $z \in B$ положим $k(z) = \sup\big\{k \in [0,1] \mid \rho\big((1-k)z + kz_0, M\big) = kR\big\}$. Ясно, что $\rho(z_0, M) \leqslant R$ и $\rho(z, M) \geqslant 0$. Отсюда вследствие непрерывности функции расстояния точка $k(z)$ определена корректно, при этом $\rho\big((1 - k(z)z) + k(z)z_0, M\big) = k(z)R$. Определим Φ следующим образом:

$$\Phi(z) = P_M\big((1 - k(z))z + k(z)z_0\big).$$

Понятно, что имеет место следующее включение шаров:

$$B\big((1-k)z + kz_0, kR\big) \subset B\big((1-k')z + k'z_0, k'R\big), \qquad 0 \leqslant k \leqslant k' \leqslant 1$$

(при этом мы воспользовались тем, что $B(x, r) \subset B(x', r')$, если и только если $\|x - x'\| \leqslant r' - r$, что верно в произвольных несимметрично нормированных пространствах).

Имеем: $\Phi(z) = B\big((1 - k(z))z + k(z)z_0, k(z)R\big) \cap M$, откуда $\Phi(z) \subset B \cap M$. Далее, если $k \in [0,1]$ и $\rho\big((1-k)z + kz_0, M\big) = kR$, то $k \leqslant k(z)$ и $P_M\big((1-k)z + kz_0\big) \subset \Phi(z)$.

Если $z \in \mathring{B}(z_0, R) \cap M$, то $k(z) = 0$ и $\Phi(z) = \{z\}$, а если $z \in S(z_0, R)$, то $z \in S\big((1-k)z + kz_0, kR\big)$ при всех $k \in [0,1]$, и может случиться, что $z \in \Phi(z)$, $\Phi(z) \neq \{z\}$.

Далее, пусть $z \in B$ и пусть U — открытая окрестность $\Phi(z)$. Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящуюся к z. Мы можем выбрать подпоследовательность $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ таким образом, что последовательность $(k(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ является сходящейся к некоторому $k \in [0,1]$. Тогда

$$(1-k)z + kz_0 = \lim_{n\to\infty}\big(1 - k(z_n)\big)z_n + k(z_n)z_0$$

и, следовательно,

$$\rho\big((1-k)z + kz_0, M\big) = \lim_{n\to\infty}\rho\big((1-k(z_n))z_n + k(z_n)z_0, M\big) = \lim_{n\to\infty}k(z_n)R = kR.$$

Отсюда $P_M\big((1-k)z + kz_0\big) \subset \Phi(z) \subset U$. Теперь из полунепрерывности сверху метрической проекции на замкнутые множества в конечномерном пространстве следует, что $\Phi(z_n) \subset U$ при всех достаточно больших n, что показывает, что Φ полунепрерывна сверху. Доказательство леммы 3 завершено. $\square$

Следствие. *В конечномерном линейном несимметрично нормированном пространстве для замкнутых множеств класс P-ацикличных множеств совпадает с классом B-ацикличных множеств.*

Открытый вопрос. В заключение отметим, что в настоящий момент не решены аналогичные задачи характеризации конечномерных пространств (размерности $\geqslant 3$), в которых всякое ограниченное строгое солнце (солнце, связное α-солнце) выпукло. Есть основания полагать, что для строгих солнц (и даже солнц) ответ будет аналогичный, приведенному в теореме 1 (конечно, этот так в размерности 2). При этом для положительного решения задачи для строгих солнц не хватает лишь «малого»: показать, что в любом конечномерном пространстве (ограниченное) строгое солнце (солнце) P-ациклично. (По поводу связанной с ней давно стоящей задачи о B-связности солнц в конечномерных пространствах см., например, [24–26].) В связи со сказанным выше сформулируем гипотезу, что всякое строгое солнце в конечномерном пространстве B-стягиваемо и, значит, B-ациклично.

Автор выражает благодарность Е. В. Щепину, А. Н. Дранишникову и У. Х. Каримову за консультации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект №* 13-01-00022).

Библиографический список

1. *Ефимов Н. В., Стечкин С. Б.* Некоторые свойства чебышёвских множеств // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 1. С. 17–19.

2. *Царьков И. Г.* Ограниченные чебышёвские множества в конечномерных банаховых пространствах // Матем. заметки. 1984. Т. 36, № 1. С. 73–87.

3. *Cobzaş S.* Functional analysis in asymmetric normed spaces. Basel : Birkhäuser, 2012.

4. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов. Харьков : ОНТИ, 1938.

5. *Бородин П. А.* О выпуклости n-чебышёвских множеств // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 4. С. 19–46. DOI: 10.4213/im4280.

6. *Бердышев В. И.* К вопросу о чебышёвских множествах // Докл. АН АзССР. 1966. Т. 22, № 9. С. 3–5.

7. *Brøndsted A.* Convex sets and Chebyshev sets II // Math. Scand. 1966. Vol. 18. P. 5–15.

8. *Brown A. L.* Chebyshev sets and the shapes of convex bodies // Methods of Functional Analysis in Approximation Theory : Proc. Intern. Conf., Indian Inst. Techn. Bombay, 16–20.XII.1985 / eds. C. A. Micchelli. Bombay, 1986. P. 97–121.

9. *Brown A. L.* Chebyshev sets and facial systems of convex sets in finite-dimensional spaces // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1980. Vol. 41. P. 297–339. DOI: 10.1112/plms/s3-41.2.297.

10. *Власов Л. П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. 1973. Т. 28, № 6. С. 3–66.

11. *Балаганский В. С., Власов Л. П.* Проблема выпуклости чебышёвских множеств // УМН. 1996. Т. 51, № 6. С. 125–188. DOI: 10.4213/rm1020.

12. *Царьков И. Г.* Компактные и слабо компактные чебышёвские множества в линейных нормированных пространствах // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 169–184.

13. *Алимов А. Р.* Всякое ли чебышёвское множество выпукло? // Матем. просвещение. Сер. 3. 1998. № 2. С. 155–172.

14. *Алимов А. Р.* О структуре дополнения к чебышёвским множествам // Функц. анализ и его прил. 2001. Т. 35, № 3. С. 19–27. DOI: 10.4213/faa255.

15. *Bunt L. N. H.* Bijdrage tot de theorie der convexe puntverzamelingen. Thesis. Amsterdam : Univ. Groningen, 1934.

16. *Карлов М. И., Царьков И. Г.* Выпуклость и связность чебышёвских множеств и солнц // Фундам. и прикл. матем. 1997. Т. 3, № 4. С. 967–978.

17. *Klee V. L.* A characterization of convex sets // Amer. Math. Monthly. 1949. Vol. 56. P. 247–249. DOI: 10.2307/2304766.

18. *Klee V. L.* Convex bodies and periodic homeomor-

phisms in Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 74. P. 10–43. DOI: 10.1090/S0002-9947-1953-0054850-X.
19. *Madsen I. B., Milgram R. J.* The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds. Princeton, NJ : Princeton Univ. Press, 1979.
20. *Dold A.* Homology of symmetric products and other functors of complexes // Ann. Math. 1958. Vol. 68, № 1. P. 64–80. DOI: 10.2307/1970043.
21. *Dold A., Thom R.* Quasifaserunger und unendliche symmetrische Produkte // Ann. Math. 1958. Vol. 67. P. 239–281. DOI: 10.2307/1970005.
22. *Дранишников А. Н.* Абсолютные F-значные ретракты и пространства функций в топологии поточечной сходимости // Сиб. матем. журн. 1986. Т. 27, № 3. С. 74–86.
23. *Alimov A. R.* A number of connected components of sun's complement // East J. Approx. 1995. Vol. 1, № 4. P. 419–429.
24. *Brown A. L.* Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional // Math. Ann. 1987, Vol. 279. P. 87–101. DOI: 10.1007/BF01456192.
25. *Brown A. L.* Suns in polyhedral spaces // Seminar of Mathem. Analysis : Proc. / eds. D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo, R. V. Caro, Univ. Malaga and Seville (Spain), Sept. 2002 – Feb. 2003. Sevilla : Universidad de Sevilla, 2003. P. 139–146.
26. *Алимов А. Р.* Монотонная линейная связность и солнечность связных по Менгеру множеств в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. математическая. 2014. Т. 78, № 4. С. 3–18. DOI: 10.4213/im8128.

Convexity of Bounded Chebyshev Sets in Finite-dimensional Asymmetrically Normed Spaces

A. R. Alimov

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, 1, Main Building, Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russia, alexey.alimov@gmail.com

The well-known Tsar'kov's characterisation of finite-dimensional Banach spaces in which every bounded Chebyshev set (bounded P-acyclic set) is convex is extended to the asymmetrical setting.

Key words: bounded Chebyshev set, convexity, asymmetric norm.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00022).

References

1. Efimov N. V., Stechkin S. B. Some properties of Chebyshev sets, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol.118, no. 1, pp. 17–19 (in Russian).
2. Tsar'kov I. G. Bounded Chebyshev sets in finite-dimensional Banach spaces, *Math. Notes*, 1984, vol. 36, no. 1, pp. 530–537. DOI: 10.1007/BF01139554.
3. Cobzaş S. *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*. Basel, Birkhäuser, 2012.
4. Akhiezer N. I., Krein M. G., *O nekotorykh voprosah teorii momentov* [Some Problems of the Theory of Moments]. Kharkov, Gonti, 1938.
5. Borodin P. A. On the convexity of N-Chebyshev sets. *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 889–914. DOI:10.1070/IM2011v075n05ABEH002557.
6. Berdyshev V. I. On a question of Chebyshev sets. *Dokl. AN AzSSR* 1966, vol. 22, no. 9, pp. 3–5 (in Russian).
7. Brøndsted A. Convex sets and Chebyshev sets II. *Math. Scand.*, 1966, vol. 18, pp. 5–15.
8. Brown A. L. Chebyshev sets and the shapes of convex bodies. *Methods of Functional Analysis in Approximation Theory*, Proc. Intern. Conf., Indian Inst. Techn. Bombay, 16–20.XII.1985 / eds. C. A. Micchelli. Bombay, 1986, pp. 97–121.
9. Brown A. L. Chebyshev sets and facial systems of convex sets in finite-dimensional spaces. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 1980, vol. 41, pp. 297–339. DOI: 10.1112/plms/s3-41.2.297.
10. Vlasov L. P. Approximative properties of sets in normed linear spaces. *Russ. Math. Surv.*, 1973, vol. 28, no. 6, pp. 1–66. DOI:10.1070/RM1973v028n06ABEH001624.
11. Balaganskii V. S., Vlasov L. P. The problem of convexity of Chebyshev sets. *Russ. Math. Surv.*, 1996, vol. 51, no 6, pp. 125–188. DOI: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003002.
12. Tsar'kov I. G. Compact and weakly compact Chebyshev sets in linear normed spaces. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 189, pp. 199–215.
13. Alimov A. R. Is every Chebyshev set convex? *Matematicheskoe prosviashchenie, Ser. 3*, 1998, no. 2, pp. 155–172. (in Russian).
14. Alimov A. R. On the structure of the complements of Chebyshev sets. *Funct. Anal. Appl.*, 2001, vol. 35, no. 3, pp. 176–182. DOI: 10.1023/A:1012370610709.
15. Bunt L. N. H. *Bijdrage tot de Theorie der Convexe Puntverzamelingen*. Thesis. Amsterdam, Univ. Groningen, 1934.
16. Karlov M. I., Tsar'kov I. G., Convexity and connectedness of Chebyshev sets and suns. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 967–978.
17. Klee V. L. A characterization of convex sets. *Amer. Math. Monthly*, 1949, vol. 56, pp. 247–249. DOI: 10.2307/ 2304766.
18. Klee V. L. Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.*,

1953, vol. 74, pp. 10–43. DOI: 10.1090/S0002-9947-1953-0054850-X.
19. Madsen I. B., Milgram R. J. *The Classifying Spaces for Surgery and Cobordism of Manifolds*. Princeton, NJ, Princeton Univ. Press, 1979.
20. Dold A. Homology of symmetric products and other functors of complexes *Ann. Math. (2)*, 1958, vol. 68, no. 1, pp. 64–80. DOI: 10.2307/1970043.
21. Dold A., Thom R. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. *Ann. Math. (2)*, 1958, vol. 67, no. 2, pp. 239–281. DOI: 10.2307/1970005
22. Dranishnikov A. N. Absolute F-valued retracts and spaces of functions in the topology of pointwise convergence. *Siberian Math. J.*, 1986, vol. 27, no. 3, pp. 366–376. DOI: 10.1007/BF00969273.
23. Alimov A. R. A number of connected components of sun's complement *East J. Approx.*, 1995, vol. 1, no. 4, pp. 419–429.
24. Brown A. L. Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional *Math. Ann.*, 1987, vol. 279, pp. 87–101. DOI: 10.1007/BF01456192.
25. Brown A. L. Suns in polyhedral spaces. *Seminar Math. Anal.*, Proceedings / eds.: D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo, R. V. Caro, Univ. Malaga and Seville (Spain), Sept. 2002 – Feb. 2003. Sevilla, Universidad de Sevilla, 2003, pp. 139–146.
26. Alimov A. R. Monotone path-connectedness and solarity of Menger-connected sets in Banach spaces. *Izv. Math.*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 641–655. DOI: 10.1070/IM2014v078n04ABEH002702.

УДК 517.518

О РАСХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ РЯДОВ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Н. Ю. Антонов

Доктор физико-математических наук, заведующий отделом теории приближения функций, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Рассматривается один вид сходимости двойных тригонометрических рядов Фурье, промежуточный между сходимостью по квадратам и λ-сходимостью при $\lambda > 1$. Построен пример непрерывной функции двух переменных, ряд Фурье которой расходится в указанном смысле почти всюду.

Ключевые слова: кратные ряды Фурье, сходимость почти всюду.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно, $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi)^2$ — двумерный тор,

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} a_{k,l}e^{i(kx+ly)}, \qquad (x, y) \in \mathbb{T}^2, \tag{1}$$

— двойной тригонометрический ряд Фурье 2π-периодической по каждой переменной и суммируемой на $\mathbb{T}^2$ функции f и для $(m, n) \in \mathbb{N}^2$

$$S_{m,n}(f, x, y) = \sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{Z}^2:\\ |k|\leqslant m,\ |l|\leqslant n}} a_{k,l}e^{i(kx+ly)}$$

— (m, n)-я прямоугольная частичная сумма ряда (1).

Говорят, что ряд (1) сходится по Прингсхейму в точке $(x, y) \in \mathbb{T}^2$, если существует

$$\lim_{\min\{m,n\}\to\infty} S_{m,n}(f, x, y). \tag{2}$$

Пусть $\lambda \geqslant 1$. Ряд (1) называется λ-сходящимся в точке $(x, y) \in \mathbb{T}^2$, если существует предел (2), рассматриваемый только по тем парам (m, n), для которых $1/\lambda \leqslant m/n \leqslant \lambda$. В случае $\lambda = 1$ λ-сходимость называется сходимостью по квадратам.

Аналогичным образом определяются кратный ряд Фурье, его прямоугольные частичные суммы и упомянутые виды сходимости для функций d переменных при $d > 2$.

Через $f \in C(\mathbb{T}^2)$ и $L^p(\mathbb{T}^2)$, $p \geqslant 1$, будем обозначать множества 2π-периодических по каждой переменной функций, которые непрерывны и суммируемы с p-й степенью соответственно.

В случае сходимости по квадратам (кубам) известно [1, 2], что если функция f принадлежит классу $L^p(\mathbb{T}^d)$, $p > 1$, $d \geqslant 2$, в частности, если f непрерывна, то ряд Фурье этой функции сходится (по кубам) почти всюду. С другой стороны, Ч. Фефферман (C. Fefferman) [3] построил пример непрерывной функции двух переменных, ряд Фурье которой расходится по Прингсхейму всюду. М. Бахбух и Е. М. Никишин [4] доказали, что существует функция $f \in C(\mathbb{T}^2)$ с расходящимся на множестве положительной меры рядом Фурье и удовлетворяющая следующему условию на модуль непрерывности: $\omega(f,\delta) = O\left(\ln^{-1}(1/\delta)\right)$ при $\delta \to +0$. А. Н. Бахвалов [5] установил, что для любого $\lambda > 1$ найдется функция $f \in C(\mathbb{T}^{2m})$ такая, что ее ряд Фурье λ-расходится всюду, а модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$\omega(f,\delta) = O\left(\ln^{-m}(1/\delta)\right), \qquad \delta \to +0. \tag{3}$$

Затем в работе [6] Бахвалов доказал существование функции $f \in C(\mathbb{T}^{2m})$, удовлетворяющей условию (3) и такой, что ее ряд Фурье λ-расходится всюду для всех $\lambda > 1$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел,

$$\Omega_\Lambda = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \frac{1}{1+\lambda_m} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1+\lambda_n\right\}.$$

Двойной ряд Фурье функции $f \in L(\mathbb{T}^2)$ назовем Λ-сходящимся в точке $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ к числу A, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех пар $(m,n) \in \Omega_\Lambda$ из условия $m,n > N$ следует $|S_{m,n}(f,x,y) - A| < \varepsilon$. Ряд, не являющийся Λ-сходящимся, будем называть Λ-расходящимся.

Заметим, что если $\lambda_\nu \equiv \lambda - 1$ для некоторого $\lambda > 1$, то условие Λ-сходимости превращается в определенное выше условие λ-сходимости. А если $\lambda_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$, то условие Λ-сходимости является более слабым, чем условие λ-сходимости при любом $\lambda > 1$.

Ниже будет доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть невозрастающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\ln^2\lambda_\nu = o(\ln\nu)$ при $\nu \to \infty$. Тогда существует функция $F \in C(\mathbb{T}^2)$ такая, что ее ряд Фурье Λ-расходится почти всюду на $\mathbb{T}^2$.*

Доказательство. Обозначим через $\operatorname{mes} E$ плоскую лебегову меру измеримого множества $E \subset \mathbb{T}^2$, через $\lfloor x \rfloor$ — целую часть числа $x \in \mathbb{R}$, через $D_n(t)$ — ядро Дирихле порядка n: $D_n(t) = (\sin(n+1/2)t)/(2\sin(t/2))$. Через $C_1, C_2, C_3, \ldots$ будем обозначать абсолютные положительные константы. Не ограничивая общности, будем считать, что $\lambda_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$.

1. Зафиксируем некоторое достаточно большое натуральное число ν. Обозначим:

$$A_\nu = [\pi - 2\lambda_\nu, \pi + 2\lambda_\nu]^2, \qquad B_\nu = [\pi - \lambda_\nu/2, \pi + \lambda_\nu/2]^2.$$

Определим функцию g_ν следующим образом:

$$g_\nu(x,y) = \begin{cases} e^{i\nu xy}, & x \in A_\nu, \\ 0, & x \in [0,2\pi)^2 \backslash A_\nu. \end{cases}$$

Продолжим эту функцию 2π-периодически по каждой переменной. Зафиксируем $(x,y) \in B_\nu$. Пусть $m = \lfloor \nu y \rfloor$, $n = \lfloor \nu x \rfloor$. Не трудно проверить, что если ν достаточно большое, то $(m,n) \in \Omega_\Lambda$. Оценим величину (m,n)-й частичной суммы ряда Фурье функции g_ν в точке (x,y). Будем следовать с некоторыми видоизменениями схеме доказательства теоремы $1'$ из работы [3].

Воспользуемся представлением

$$S_{m,n}(g_\nu,x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_{\mathbb{T}} D_m(u-x)\,D_n(v-y)\,g_\nu(u,v)\,du\,dv =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\nu y(u-x)\ \sin\nu x(v-y)}{(u-x)\ (v-y)}\ g_\nu(u,v)\,du\,dv + R_\nu(g_\nu,x,y) = \frac{I}{\pi^2} + R_\nu(g_\nu,x,y),$$

где величина $R_\nu(g_\nu,x,y)$ ограничена некоторой абсолютной константой.

Рассмотрим интеграл из правой части последнего равенства. Согласно определению функции g_ν

$$I = \int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu}\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{\sin\nu y(u-x)\ \sin\nu x(v-y)}{(u-x)\ (v-y)}\ e^{i\nu uv}\,du\,dv.$$

Положим для произвольных $M, N \in \mathbb{Z}$

$$P_{M,N}(x,y) = \int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \left(\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{\cos(My(u-x)+Nx(v-y)-\nu(uv-xy))}{(u-x)\ (v-y)}\ dv \right) du,$$
$$Q_{M,N}(x,y) = \int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \left(\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{\sin(My(u-x)+Nx(v-y)-\nu(uv-xy))}{(u-x)\ (v-y)}\ dv \right) du,$$

где интегралы в правых частях понимаются в смысле главного значения, т. е. как

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{\pi+2\lambda_\nu} \right) \qquad \text{и} \qquad \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{y-\varepsilon} + \int\limits_{y+\varepsilon}^{\pi+2\lambda_\nu} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} 4e^{-i\nu xy} I = P_{\nu,-\nu}(x,y) - P_{-\nu,\nu}(x,y) + P_{-\nu,-\nu}(x,y) - P_{\nu,\nu}(x,y) + \\ + iQ_{\nu,-\nu}(x,y) - iQ_{-\nu,\nu}(x,y) + iQ_{-\nu,-\nu}(x,y) - iQ_{\nu,\nu}(x,y). \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим последнее слагаемое в правой части (4). Имеем:

$$Q_{\nu,\nu}(x,y) = \int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \left(\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{\sin\nu(y(u-x)+x(v-y)-(uv-xy))}{(u-x)\ (v-y)}\ dv \right) du =$$
$$= -\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \left(\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{\sin\nu(u-x)(v-y)}{(u-x)(v-y)}\ dv \right) du =$$
$$= -\left(\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{x-8/(\lambda_\nu\nu)} + \int\limits_{x-8/(\lambda_\nu\nu)}^{x+8/(\lambda_\nu\nu)} + \int\limits_{x+8/(\lambda_\nu\nu)}^{\pi+2\lambda_\nu} \right) \left(\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{\sin\nu(u-x)(v-y)}{(u-x)(v-y)}\, dv \right) du = -(J_1+J_2+J_3). \tag{5}$$

Оценим каждое из трех слагаемых в правой части (5). Начнем с третьего слагаемого:

$$J_3 = \int\limits_{x+8/(\lambda_\nu\nu)}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{1}{(u-x)} \left(\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{\sin\nu(u-x)(v-y)}{(v-y)}\ dv \right) du.$$

Используя равенство $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$, нетрудно проверить, что если $A, B \geqslant 8$, то $\int\limits_{-A}^{B} \frac{\sin t}{t}\, dt \geqslant 1$. Поэтому для $u \geqslant x + 8/(\lambda_\nu \nu)$

$$\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{\sin\nu(u-x)(v-y)}{(v-y)}\ dv = \int\limits_{\nu(u-x)(\pi-2\lambda_\nu-y)}^{\nu(u-x)(\pi+2\lambda_\nu-y)} \frac{\sin t}{t}\ dt \geqslant 1.$$

Отсюда при достаточно большом ν

$$J_3 \geqslant \int\limits_{x+8/(\lambda_\nu\nu)}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{du}{(u-x)}\ \geqslant \ln\frac{3\,\nu{\lambda_\nu}^2}{16} \geqslant \frac{\ln\nu}{2}.$$

Аналогичным образом можно показать, что $J_1 \geqslant (\ln\nu)/2$. Оценим теперь J_2. Так как

$$\left| \frac{\sin\nu(u-x)(v-y)}{(v-y)} \right| \leqslant \nu|u-x|,$$

то

$$|J_2| = \left| \int\limits_{x-8/(\lambda_\nu \nu)}^{x+8/(\lambda_\nu \nu)} \frac{1}{(u-x)} \left(\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{\sin \nu(u-x)(v-y)}{(v-y)}\, dv \right) du \right| \leqslant \int\limits_{x-8/(\lambda_\nu \nu)}^{x+8/(\lambda_\nu \nu)} 4\lambda_\nu \nu\, du = 64.$$

Таким образом,

$$|Q_{\nu,\nu}(x,y)| \geqslant C_1 \ln \nu.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (4). Имеем:

$$P_{\nu,-\nu}(x,y) = -\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{1}{(u-x)} \left(\int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{\cos \nu(u+x)(v-y)}{(v-y)}\, dv \right) du.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} m_y &= \min\{\pi - y + 2\lambda_\nu,\, y - \pi + 2\lambda_\nu\}, \qquad & M_y &= \max\{\pi - y + 2\lambda_\nu,\, y - \pi + 2\lambda_\nu\}, \\ m_x &= \min\{\pi - x + 2\lambda_\nu,\, x - \pi + 2\lambda_\nu\}, \qquad & M_x &= \max\{\pi - x + 2\lambda_\nu,\, x - \pi + 2\lambda_\nu\}. \end{aligned}$$

Используя нечетность функций $\varphi(t) = \cos(\nu(u+x)t)/t$ и $\psi(s) = 1/s$, получаем:

$$|P_{\nu,-\nu}(x,y)| = \left| \int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{1}{(u-x)} \left(\int\limits_{m_y}^{M_y} \frac{\cos \nu(u+x)t}{t}\, dt \right) du \right| = \left| \int\limits_{\pi-2\lambda_\nu - x}^{\pi+2\lambda_\nu - x} \frac{1}{s} \left(\int\limits_{m_y}^{M_y} \frac{\cos \nu(2x+s)t}{t}\, dt \right) ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_0^{m_x} \frac{1}{s} \left(\int\limits_{m_y}^{M_y} \frac{\cos \nu(2x+s)t}{t}\, dt - \int\limits_{m_y}^{M_y} \frac{\cos \nu(2x-s)t}{t}\, dt \right) ds \right| + \left| \int\limits_{m_x}^{M_x} \frac{1}{s} \left(\int\limits_{m_y}^{M_y} \frac{\cos \nu(2x+s)t}{t}\, dt \right) ds \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^{m_x} \frac{1}{s} \left(\int\limits_{\nu(2x+s)m_y}^{\nu(2x+s)M_y} \frac{\cos t}{t}\, dt - \int\limits_{\nu(2x-s)m_y}^{\nu(2x-s)M_y} \frac{\cos t}{t}\, dt \right) ds \right| + \left| \int\limits_{m_x}^{M_x} \frac{1}{s} \left(\int\limits_{\nu(2x+s)m_y}^{\nu(2x+s)M_y} \frac{\cos t}{t}\, dt \right) ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_0^{m_x} \frac{1}{s} \int\limits_{\nu(2x-s)M_y}^{\nu(2x+s)M_y} \frac{\cos t}{t}\, dt\, ds \right| + \left| \int\limits_0^{m_x} \frac{1}{s} \int\limits_{\nu(2x-s)m_y}^{\nu(2x+s)m_y} \frac{\cos t}{t}\, dt\, ds \right| + \left| \int\limits_{m_x}^{M_x} \frac{1}{s} \left(\int\limits_{\nu(2x+s)m_y}^{\nu(2x+s)M_y} \frac{\cos t}{t}\, dt \right) ds \right|. \qquad (6)$$

Поскольку для $s \in [0, m_x]$

$$\left| \int\limits_{\nu(2x-s)M_y}^{\nu(2x+s)M_y} \frac{\cos t}{t}\, dt \right| \leqslant \frac{2s}{(2x-s)},$$

то

$$\left| \int\limits_0^{m_x} \frac{1}{s} \int\limits_{\nu(2x-s)M_y}^{\nu(2x+s)M_y} \frac{\cos t}{t}\, dt\, ds \right| \leqslant 4.$$

Второе слагаемое в правой части (6) оценивается аналогично. Для третьего слагаемого в правой части (6), оценивая внутренний интеграл с помощью второй теоремы о среднем, получаем:

$$\left| \int\limits_{m_x}^{M_x} \frac{1}{s} \left(\int\limits_{\nu(2x+s)m_y}^{\nu(2x+s)M_y} \frac{\cos t}{t}\, dt \right) ds \right| \leqslant \frac{1}{\nu x m_y} \int\limits_{m_x}^{M_x} \frac{1}{s}\, ds \leqslant 1.$$

В итоге

$$|P_{\nu,-\nu}(x,y)| \leqslant C_2. \qquad (7)$$

Для слагаемых со второго по седьмое в правой части (4) с помощью рассуждений, подобных приведенным рассуждениям для $P_{\nu,-\nu}(x,y)$, можно получить оценку, аналогичную (7).

Таким образом, при достаточно больших ν для $(x,y)\in B_\nu$

$$|S_{m,n}(g_\nu,x,y)| \geqslant C_3 \ln\nu. \tag{8}$$

2. Пусть $\nu\in\mathbb{N}$, как и в предыдущем пункте, достаточно большое. Положим $L=L_\nu=\lfloor \pi/8\lambda_\nu\rfloor$. Определим функцию $h_\nu(x,y)$, $\quad (x,y)\in[0,2\pi)$, следующим образом:

$$h_\nu(x,y)=\sum_{j=-L}^{L-1}\sum_{k=-L}^{L-1} g_\nu\left(x-\frac{\pi j}{L},\, y-\frac{\pi k}{L}\right). \tag{9}$$

Продолжим 2π-периодически функцию $h_\nu(x,y)$ на всю плоскость $\mathbb{R}^2$.

Не трудно убедиться, что построенная функция h_ν является (π/L)-периодической по каждой переменной. Заметим также, что носитель функции $g_\nu(x,y)$ — квадрат A_ν со стороной $4\lambda_\nu$, а $\pi/L\geqslant 8\lambda_\nu$. Поэтому носители слагаемых в правой части равенства (9) попарно не пересекаются. Положим

$$E_\nu=\bigcup_{j=-L}^{L-1}\bigcup_{k=-L}^{L-1}\left\{(x,y):\left(x-\frac{\pi j}{L},\, y-\frac{\pi k}{L}\right)\in B_\nu\right\}.$$

Тогда

$$\operatorname{mes} E_\nu=(2L)^2\operatorname{mes} B_\nu=4\lambda_\nu^2\,\left\lfloor\frac{\pi}{8\lambda_\nu}\right\rfloor^2\geqslant\frac{\pi^2}{64}. \tag{10}$$

Пусть $(x,y)\in E_\nu$. Покажем, что найдется пара $(m,n)\in\Omega_\Lambda$ такая, что (m,n)-я частичная сумма ряда Фурье функции h_ν будет принимать в точке (x,y) «большое» значение. В силу (π/L)-периодичности функции h_ν можно без ограничения общности считать, что $(x,y)\in B_\nu$.

Итак, зафиксируем $(x,y)\in B_\nu$. Возьмем m и n такими, как в п. 1. Имеем:

$$\pi^2 S_{m,n}(h_\nu,x,y)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} D_m(u-x)\,D_n(v-y)\,h_\nu(u,v)\,du\,dv=$$

$$=\left(\int\limits_0^{\pi-4\lambda_\nu}+\int\limits_{\pi-4\lambda_\nu}^{\pi+4\lambda_\nu}+\int\limits_{\pi+4\lambda_\nu}^{2\pi}\right)\left(\int\limits_0^{\pi-4\lambda_\nu}+\int\limits_{\pi-4\lambda_\nu}^{\pi+4\lambda_\nu}+\int\limits_{\pi+4\lambda_\nu}^{2\pi}\right) D_m(u-x)\,D_n(v-y)\,h_\nu(u,v)\,du\,dv. \tag{11}$$

Правая часть равенства (11) естественным образом разбивается на девять слагаемых. Рассмотрим эти слагаемые.

Если $(u,v)\in[\pi-4\lambda_\nu,\,\pi+4\lambda_\nu]$, то $h_\nu(u,v)=g_\nu(u,v)$. Отсюда, используя (8) и определение функции g_ν, получаем:

$$\left|\int\limits_{\pi-4\lambda_\nu}^{\pi+4\lambda_\nu}\int\limits_{\pi-4\lambda_\nu}^{\pi+4\lambda_\nu} D_m(u-x)\,D_n(v-y)\,h_\nu(u,v)\,du\,dv\right|=\pi^2\,|S_{m,n}(g_\nu,x,y)|\geqslant C_3\ln\nu. \tag{12}$$

Далее, так как $|h_\nu(u,v)|\leqslant 1$, то

$$\left|\int\limits_{\pi+4\lambda_\nu}^{2\pi}\int\limits_{\pi+4\lambda_\nu}^{2\pi} D_m(u-x)\,D_n(v-y)\,h_\nu(u,v)\,du\,dv\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\pi+4\lambda_\nu-x}^{2\pi-x}|D_m(u)|\,du\int\limits_{\pi+4\lambda_\nu-y}^{2\pi-y}|D_m(v)|\,dv\leqslant C_4\ln^2\lambda_\nu. \tag{13}$$

Еще три слагаемых из правой части (11), аналогичные только что рассмотренному, оцениваются подобным образом.

Наконец, рассмотрим слагаемое третьего типа из правой части (11). Пусть $u \in [\pi + 4\lambda_\nu, 2\pi]$. Тогда либо для всех $v \in [\pi - 4\lambda_\nu, \pi + 4\lambda_\nu]$ имеет место равенство $h_\nu(u, v) = 0$, либо для некоторого числа b, зависящего от u,

$$\left| \int\limits_{\pi-4\lambda_\nu}^{\pi+4\lambda_\nu} D_n(v-y)\, h_\nu(u,v)\, dv \right| = \left| \int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} D_n(v-y)\, e^{ibv}\, dv \right| \leqslant \left| \int\limits_{\pi-2\lambda_\nu}^{\pi+2\lambda_\nu} \frac{\sin n(v-y)\, e^{ibv}\, dv}{v-y} \right| + C_5 =$$

$$= \left| \int\limits_{\pi-y-2\lambda_\nu}^{\pi-y+2\lambda_\nu} \frac{\sin nt\; e^{ibt}\, dt}{t} \right| + C_5 \leqslant \left| \int\limits_{\pi-y-2\lambda_\nu}^{\pi-y+2\lambda_\nu} \frac{\cos(n-b)t dt}{2t} \right| + \left| \int\limits_{\pi-y-2\lambda_\nu}^{\pi-y+2\lambda_\nu} \frac{\cos(n+b)t dt}{2t} \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\pi-y-2\lambda_\nu}^{\pi-y+2\lambda_\nu} \frac{\sin(n-b)t\; dt}{2t} \right| + \left| \int\limits_{\pi-y-2\lambda_\nu}^{\pi-y+2\lambda_\nu} \frac{\sin(n+b)t\; dt}{2t} \right| + C_5.$$

Отсюда, учитывая, что для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\left| \int\limits_{\pi-y-2\lambda_\nu}^{\pi-y+2\lambda_\nu} \frac{\cos at\, dt}{2t} \right| \leqslant C_6 \ln(1/\lambda_\nu), \qquad \left| \int\limits_{\pi-y-2\lambda_\nu}^{\pi-y+2\lambda_\nu} \frac{\sin at\, dt}{2t} \right| \leqslant C_6,$$

получаем:

$$\left| \int\limits_{\pi-4\lambda_\nu}^{\pi+4\lambda_\nu} D_n(v-y)\, h_\nu(u,v)\, dv \right| \leqslant C_7 \ln(1/\lambda_\nu),$$

$$\left| \int\limits_{\pi+4\lambda_\nu}^{2\pi} \int\limits_{\pi-4\lambda_\nu}^{\pi+4\lambda_\nu} D_m(u-x)\, D_n(v-y)\, h_\nu(u,v)\, dv\, du \right| \leqslant C_7 \ln(\lambda_\nu^{-1}) \int\limits_{\pi-x+4\lambda_\nu}^{2\pi} |D_m(u)| du \leqslant C_8 \ln^2 \lambda_\nu. \tag{14}$$

Также справедливы еще три оценки, подобные (14), для аналогичных слагаемых из правой части (11).

Из (11)–(13), трех оценок, аналогичных (13), (14), трех оценок, аналогичных (14), а также из условия теоремы на рост $\ln^2 \lambda_\nu$ вытекает существование константы $K = K(\Lambda) > 0$, зависящей только от Λ такой, что

$$\max_{\substack{(m,n)\in\Omega_\Lambda,\\ m,n\leqslant 4\nu}} |S_{m,n}(h_\nu, x, y)| \geqslant (K+1) \ln \nu, \qquad (x,y) \in E_\nu. \tag{15}$$

3. Пусть $\nu \in \mathbb{N}$, как и в предыдущем пункте, достаточно большое. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \lambda_\nu$, $(x, y) \in [0, 2\pi)^2$. Обозначим через $\rho(x, y) = \rho(x, y; E_\nu)$ расстояние от точки (x, y) до множества E_ν : $\rho(x, y) = \min\{\|(x, y) - (u, v)\|_{\mathbb{R}^2} : (u, v) \in E_\nu\}$. Если $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$, то ближайший к (x, y) элемент множества E_ν (существует и) единственен. Обозначим этот элемент через $(\bar{x}, \bar{y})$. Положим

$$f_\nu(x,y) = f_\nu^\varepsilon(x,y) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\rho(x,y)}{\varepsilon}\right) h_\nu(\bar{x}, \bar{y}), & \rho(x,y) \leqslant \varepsilon; \\ 0, & \rho(x,y) > \varepsilon. \end{cases}$$

Продолжим функцию f_ν 2π-периодически по каждой переменной. Заметим, что если $(x, y) \in E_\nu$, то $(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)$ и $f_\nu(x, y) = h_\nu(x, y)$. Число $\varepsilon > 0$ можно выбрать таким маленьким, чтобы

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f_\nu(u,v) - h_\nu(u,v)|\, du\, dv \leqslant \left(\frac{2\pi}{8\nu+1}\right)^2. \tag{16}$$

Будем считать ε таким, что для $f_\nu = f_\nu^\varepsilon$ соотношение (16) выполняется. Из (16) следует, что для всех $m, n \leqslant 4\nu$ и $(x, y) \in [0, 2\pi)^2$ $\quad |S_{m,n}(f_\nu, x, y)| \geqslant |S_{m,n}(h_\nu, x, y)| - 1$. Отсюда и из (15) вытекает

$$\max_{(m,n)\in\Omega_\Lambda,\, m,n\leqslant 4\nu} |S_{m,n}(f_\nu, x, y)| \geqslant K \ln \nu, \qquad (x,y) \in E_\nu. \tag{17}$$

Не трудно проверить, что функция f_ν является липшицевой. Следовательно (см., напр., [7, теорема 1]), найдется константа $M_\nu > 0$ такая, что

$$\sup_{m,n\in\Omega_\Lambda} \max_{(x,y)\in[0,2\pi)^2} |S_{m,n}(f_\nu, x, y)| \leqslant M_\nu. \tag{18}$$

4. Выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ по следующему правилу. Пусть ν_1 — такое большое, чтобы для $\nu \geqslant \nu_1$ все приведенные выше в доказательстве рассуждения были справедливы. Предположим, что ν_1, ν_2, ..., ν_{k-1} уже выбраны. Выберем ν_k так, чтобы

$$\sqrt{\ln \nu_k} \geqslant 2\sqrt{\ln \nu_{k-1}}, \tag{19}$$

$$\sqrt{\ln \nu_k} \geqslant \frac{3}{K}\sum_{j=1}^{k-1} M_{\nu_j}, \tag{20}$$

где M_{ν_j} — величины из (18), а K — из (17);

$$\sqrt{\ln \nu_k} \geqslant \frac{6(8\nu_{k-1}+1)^2}{K}. \tag{21}$$

Рассмотрим последовательность множеств $\{E_{\nu_k}\}_{k=1}^{\infty}$. В силу (10) и двумерного аналога леммы 1.24 из [8, гл. 13] найдется последовательность точек $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, 2\pi)^2$ такая, что множество

$$E = \bigcap_{q=1}^{\infty}\bigcup_{k=q}^{\infty} \{(x, y) : (x - x_k, y - y_k) \in E_{\nu_k}\}$$

имеет полную меру: $\operatorname{mes} E = 4\pi^2$. Положим

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{\nu_k}(x - x_k, y - y_k)}{\sqrt{\ln \nu_k}}.$$

Из того, что $\|f_{\nu_k}\|_{C(\mathbb{T}^2)} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, и (19) вытекает непрерывность функции F.

Покажем, что ряд Фурье функции F Λ-расходится всюду на множестве E и, следовательно, почти всюду на $[0, 2\pi)^2$. Пусть $(x, y) \in E$, $M > 0$ — произвольное сколь угодно большое число. Тогда согласно определению множества E найдется номер $k > M$ такой, что $(x-x_k, y-y_k) \in E_{\nu_k}$. Используя определение функции F, имеем:

$$\begin{aligned} \max_{\substack{(m,n)\in\Omega_\Lambda,\\ m,n\leqslant 4\nu_k}} |S_{m,n}(F, x, y)| &\geqslant \max_{\substack{(m,n)\in\Omega_\Lambda,\\ m,n\leqslant 4\nu_k}} \frac{|S_{m,n}(f_{\nu_k}, x - x_k, y - y_k)|}{\sqrt{\ln \nu_k}} - \\ -\sum_{j=1}^{k-1} \max_{\substack{(m,n)\in\Omega_\Lambda,\\ m,n\leqslant 4\nu_k}} \frac{|S_{m,n}(f_{\nu_j}, x - x_j, y - y_j)|}{\sqrt{\ln \nu_j}} &- \sum_{j=k+1}^{\infty} \max_{\substack{(m,n)\in\Omega_\Lambda,\\ m,n\leqslant 4\nu_k}} \frac{|S_{m,n}(f_{\nu_j}, x - x_j, y - y_j)|}{\sqrt{\ln \nu_j}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Оценим каждое слагаемое из правой части (22). Согласно (17)

$$\max_{\substack{(m,n)\in\Omega_\Lambda,\\ m,n\leqslant 4\nu_k}} \frac{|S_{m,n}(f_{\nu_k}, x - x_k, y - y_k)|}{\sqrt{\ln \nu_k}} \geqslant K\sqrt{\ln \nu_k}. \tag{23}$$

С помощью (18) и (20) имеем:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k-1} \max_{\substack{(m,n)\in\Omega_\Lambda,\\ m,n\leqslant 4\nu_k}} \frac{|S_{m,n}(f_{\nu_j}, x - x_j, y - y_j)|}{\sqrt{\ln \nu_j}} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \sup_{(m,n)\in\Omega_\Lambda} \max_{(u,v)\in[0,2\pi)^2} \frac{|S_{m,n}(f_{\nu_j}, u, v)|}{\sqrt{\ln \nu_j}} \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} M_{\nu_j} \leqslant \frac{K\sqrt{\ln \nu_k}}{3}. \end{aligned} \tag{24}$$

Наконец, оценивая суммы Фурье путем замены подынтегрального выражения в их интегральном представлении максимумом модуля этого выражения, а затем применяя (21) и (19), получаем:

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \max_{\substack{(m,n)\in\Omega_\Lambda,\\ m,n\leqslant 4\nu_k}} \frac{|S_{m,n}(f_{\nu_j}, x-x_j, y-y_j)|}{\sqrt{\ln\nu_j}} \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(8\nu_k+1)^2}{\sqrt{\ln\nu_j}} \leqslant \frac{K}{6}\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln\nu_{k+1}}}{\sqrt{\ln\nu_j}} \leqslant \frac{K}{3}. \qquad (25)$$

Объединяя (22)–(25), заключаем

$$\max_{\substack{(m,n)\in\Omega_\Lambda,\\ m,n\leqslant 4\nu_k}} |S_{m,n}(F,x,y)| \geqslant \frac{K\sqrt{\ln\nu_k}}{3}.$$

Поскольку номер k можно выбрать сколь угодно большим, получаем:

$$\sup_{(m,n)\in\Omega_\Lambda} |S_{m,n}(F,x,y)| = +\infty.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект №* 14-01-00496) *и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-4538.2014.1).

Библиографический список

1. *Тевзадзе Н. Р.* О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом // Сообщ. АН ГССР. 1970. Т. 58, № 2. С. 277–279.
2. *Fefferman C.* On the convergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, № 5. P. 744–745.
3. *Fefferman C.* On the divergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, № 2. P. 191–195.
4. *Бахбух М., Никишин Е. М.* О сходимости двойных рядов Фурье от непрерывных функций // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14, № 6. С. 1189–1199.
5. *Бахвалов А. Н.* О расходимости всюду рядов Фурье непрерывных функций многих переменных // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 8. С. 45–62. DOI: 10.4213/sm240.
6. *Бахвалов А. Н.* О λ-расходимости всюду ряда Фурье непрерывной функции многих переменных // Матем. заметки. 2002. Т. 72, № 4. С. 490–501. DOI: 10.4213/mzm438.
7. *Степанец А. И.* Оценки отклонений частных сумм Фурье на классах непрерывных периодических функций многих переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44, № 5. С. 1150–1190.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 2. М. : Мир, 1965. 538 с.

On Divergence Almost Everywhere of Fourier Series of Continuous Functions of Two Variables

N. Yu. Antonov

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, 16, S. Kovalevskoy str., Ekaterinburg, 620990, Russia, Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

We consider one type of convergence of double trigonometric Fourier series intermediate between convergence over squares and λ-convergence for $\lambda > 1$. We construct an example of continuous functions of two variables, Fourier series of which diverges in this sense, almost everywhere.

Key words: multiple Fourier series, almost everywhere convergence.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 14-01-00496) *and by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of leading scientific schools* (*project* НШ-4538.2014.1).

References

1. Tevzadze N. R. On the convergence of double Fourier series of quadratic summable functions. *Soobshcheniia Akad. Nauk Gruzin. SSR.*, 1970, vol. 58, no. 2, pp. 277–279 (in Russian).
2. Fefferman C. On the convergence of multiple Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 77, no. 5, pp. 744–745. DOI: 10.1090/S0002-9904-1971-12793-3
3. Fefferman C. On the divergence of multiple Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1971, vol. 77, no. 2, pp. 191–195. DOI: 10.1090/S0002-9904-1971-12675-7

4. Bakhbukh M., Nikishin E. M. The convergence of the double Fourier series of continuous functions. *Siberian Math. J.*, 1973, vol. 14, iss. 6, pp. 832–839. DOI: 10.1007/BF00975888
5. Bakhvalov A. N. Divergence everywhere of the Fourier series of continuous functions of several variables. *Sb. Math.*, 1997, vol. 188, no. 8, pp. 1153–1170. DOI: 10.1070/SM1997v188n08ABEH000240.
6. Bakhvalov A. N. λ-divergence of the Fourier series of continuous functions of several variables. *Math. Notes*, 2002, vol. 72, iss. 3–4, pp. 454–465. DOI: 10.4213/mzm438.
7. Stepanec A. I. Estimates of deviations of partial Fourier sums on classes of continuous periodic functions of several variables. *Math. USSR Izv.*, 1981, vol. 17, iss. 2, pp.369–403. DOI: 10.1070/IM1981v017n02ABEH001364.
8. *Zygmund A.* Trigonometric series. Vol. 2. Cambridge Univ. Press, 1959.

УДК 517.51

СИСТЕМЫ СЖАТИЙ И СДВИГОВ В ЗАДАЧЕ СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

А. А Барышев[1], Д. С. Лукомский[2], С. Ф. Лукомский[3]

[1]Кандидат физико-математических наук, инженер-программист, ООО «Геофизтехника», Саратов, baryshevaa@gmail.com,
[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, lukomskiids@info.sgu.ru
[3]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, lukomskiids@info.sgu.ru

Рассматривается новый подход к построению двумерных p-ичных систем Хаара и Виленкина. Для полученных систем разработаны быстрые алгоритмы преобразования Фурье – Хаара и Фурье – Виленкина. Проведен сравнительный анализ разработанных алгоритмов в задаче сжатия изображения.

Ключевые слова: преобразование Хаара, преобразование Виленкина, компактная группа, сжатие изображений.

ВВЕДЕНИЕ

В проблеме сжатия изображений можно выделить три направления — сжатие без потери данных, с потерями и смешанные методы. К первому направлению можно отнести RLE и LZW-алгоритмы, кодирование по Хаффману и т. д. [1]. Группа вторых методов основана на представлении исходного изображения как двумерного массива данных и разложения его по какой-либо системе функций. Из смешанных методов наиболее известен стандарт сжатия данных JPEG, где применяется дискретное косинус-преобразование, а затем кодирование по Хаффману. Основной вклад в таких смешанных методах дает сжатие с потерями, и задача поиска ортогональной системы, обеспечивающей наилучшее сжатие, по-прежнему привлекает внимание. Широкое распространение для решения этой задачи в последнее время получили вейвлет-базисы [2]. Настоящая работа посвящена сравнительному анализу алгоритмов сжатия изображений с помощью обобщенной системы Хаара и системы Виленкина. Функция Хаара на поле p-адических чисел впервые появилась в работе С. В. Козырева [3]. Обобщенные функции Хаара на нуль-мерных группах были введены в работе [4]. В статье [5] предложен способ построения функций Хаара на произведении нуль-мерных групп. Он основан на сведении произведения групп к новой группе с новой основной цепочкой подгрупп. Такую основную цепочку можно выбирать разными способами, в результате получаются различные двумерные системы Хаара. Каждая такая система определяется некоторыми целыми параметрами (ν, s). В статье для любых допустимых значений этих параметров строится система Хаара, приводится быстрый алгоритм дискретного преобразования по этой системе. Приводится алгоритм быстрого дискретного преобразования Виленкина, основанный на той же идее сведения произведения групп к одномерной. Для сравнения алгоритмов сжатия по таким системам с косинус-преобразованием были написаны на языке СИ программы, реализующие эти алгоритмы, вычислены среднеквадратичное отклонение MSE (mean square error) и коэффициент PSNR (peak signal-to-noise ratio). Сравнительный анализ по этим системам и тригонометрической для традиционных изображений lenna и flowers приводится в последнем параграфе.

1. БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ – ХААРА НА КОМПАКТНОЙ ГРУППЕ

Пусть p — простое число, $(G, \dot{+})$ — p-ичная компактная нуль-мерная группа, $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ — основная цепочка, $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ — базисная последовательность, $(G_n^{\perp})_{n=0}^{\infty}$ — цепочка аннуляторов,

$r_n \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}$ — функции Радемахера. Определим функции Хаара на нуль-мерной группе $(G, \dot{+})$ [5] следующим образом:

$$H_0 \equiv 1; \qquad H_{jp^n+k}(x) = r_n^j(x \dot{-} q)\mathbf{1}_{G_n}(x \dot{-} q), \qquad k = 0, 1, \ldots, p^n - 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, p-1,$$

где k и q связаны соотношениями

$$k = a_{n-1} + a_{n-2}p + \cdots + a_1 p^{n-2} + a_0 p^{n-1}, \qquad q = a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1}.$$

Пусть $S_{p^{n+1}} = \sum\limits_{l=0}^{p^{n+1}-1} c_l H_l$. Ясно, что $S_{p^{n+1}}$ постоянны на смежных классах $G_{n+1} \dot{+} q_{n+1}$, где $q_{n+1} = a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n g_n$, $a_i = \overline{0, p-1}$, и пусть $\lambda^{(n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_n} = S_{p^{n+1}}(G_{n+1} \dot{+} q_{n+1}) = S_{p^{n+1}}(G_{n+1} \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n g_n)$ — значения $S_{p^{n+1}}$ на смежных классах по подгруппе G_{n+1}. Смежный класс $G_{n+1} \dot{+} q_{n+1}$ лежит внутри смежного класса $G_n \dot{+} q_n = G_n \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1}$. Функции Хаара $H_{jp^n \dot{+} q_n}$ при $q_n = a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1}$ будем нумеровать векторным индексом и писать $H_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$. Функции Хаара $H_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$ отличны от нуля на смежных классах $G_n \dot{+} q_n = G_n \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1}$ и постоянны на смежных классах $G_{n+1} \dot{+} q_n \dot{+} a_n g_n$, а именно

$$H_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}(G_{n+1} \dot{+} q_n \dot{+} a_n g_n) = \varepsilon_{a_n}^j, \qquad \varepsilon_{a_n} = e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot a_n}.$$

Записывая равенство

$$S_{p^{n+1}}(x) = S_{p^n}(x) + \sum_{l=p^n}^{p^{n+1}-1} c_l H_l(x)$$

при $x \in G_{n+1} \dot{+} q_{n+1}$, приходим к равенству

$$\lambda^{(n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_n} = \lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}} \cdot \varepsilon_{a_n}^j, \tag{1}$$

в котором $\lambda^{(n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_n} = S_{p^{n+1}}(G_{n+1} \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n g_n)$, $\lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}} = S_{p^n}(G_n \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1})$. При каждом кортеже $(a_0 a_1 \ldots a_{n-1})$ равенства (1) есть система из p линейных уравнений ($a_n = \overline{0, p-1}$ — номера уравнений) относительно неизвестных

$$\lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}, c_{1, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}, c_{2, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}, \ldots, c_{p-1, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}.$$

Матрица этой системы имеет вид $\mathscr{E} = (\varepsilon_i^j)_{i,j=0}^{p-1}$, причем матрица $\mathscr{E}\frac{1}{\sqrt{p}}$ является унитарной, значит, обратная $\left(\mathscr{E}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{-1} = \overline{\mathscr{E}\frac{1}{\sqrt{p}}}^T$.

Решая все системы (1) при фиксированном n находим коэффициенты Фурье – Хаара $c_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$ и значения $\lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$ частичной суммы $S_{p^n}(x)$ с номером в p раз меньше. Найденным коэффициентам $c_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$ присваиваем векторные номера $(a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, j)$ и помещаем в $n+1$-мерный массив коэффициентов Фурье – Хаара $c(j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, j_n^+)$. Значения $\lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$ помещаем в $n+1$-мерный массив $\lambda(j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, 0)$ с номерами $(a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, 0)$. Таким образом, после 1-го шага получаем массив $c^{(n)}(j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, j^+)$, в котором элементы с номерами $j_0, j_1, \ldots, j_{n-1} = \overline{0, p-1}$, $j^+ = \overline{1, p-1}$ есть найденные коэффициенты Фурье – Хаара, и массив значений $\lambda^{(n)}(j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, 0)$, в котором заданы элементы с номерами $(j_0, j_1, \ldots j_{n-1}, 0)$. Повторяя эти рассуждения, получаем после $n+1$-го шага схему для нахождения коэффициентов Фурье – Хаара:

$$\begin{array}{ccccccc}
\lambda^{(n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_n} & \longrightarrow & \lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}, 0} & \longrightarrow & \lambda^{(n-1)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-2}, 0, 0} & \ldots \longrightarrow & \lambda^{(0)}_{0,0,\ldots,0,0} = c_0 \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
& & c^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}, j^+} & & c^{(n-1)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-2}, j^+, 0} & & c^{(0)}_{j^+, 0, \ldots 0, 0}
\end{array}$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ – ХААРА НА ПРОИЗВЕДЕНИИ КОМПАКТНЫХ ГРУПП

Пусть $n \in \mathbb{N}_0$, (G_n) — основная цепочка, (g_n) — базисная последовательность. Для наглядности можно считать

$$G_n = \left[0, \frac{1}{p_n}\right), \qquad g_n = \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Построим систему Хаара на произведении групп $G \times G$. Для этого строим подгруппы

$$\mathfrak{G}_{2n+1} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (G_{n+1} \times G_{n+1} \dot{+} j\mathbf{g}_{2n+1}), \qquad \mathbf{g}_{2n+1} = (g_n, \nu g_n) = \left(\frac{1}{p^{n+1}}, \frac{\nu}{p^{n+1}}\right),$$

$$\mathfrak{G}_{2n} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (\mathfrak{G}_{2n+1} \dot{+} j\mathbf{g}_{2n}), \qquad \mathbf{g}_{2n} = (g_n, (\nu \dot{+} s)g_n), \qquad s = \overline{1, p-1}.$$

Знак $\dot{+}$ в определении вектора $\mathbf{g}_{2n}$ означает сложение по модулю p. Очевидно, что $\mathfrak{G}_{2n} = G_n \times G_n$. Известно [5], что подгруппы $\mathfrak{G}_n$ образуют основную цепочку. На произведении $G \times G$ по цепочке подгрупп $\mathfrak{G}_n$ построим функции

$$\mathbf{r}_{2n+1}(x_0, x_1) = r_n(\gamma_0, x_0) \cdot r_n(\gamma_1, x_1), \qquad \mathbf{r}_{2n}(x_0, x_1) = r_n(\xi_0, x_0) \cdot r_n(\xi_1, x_1),$$

где $\gamma_0 + \gamma_1 \nu \equiv 1 \bmod p$, $\xi_0 + \xi_1 \nu \ \equiv 0 \bmod p$, $\xi_1 s \equiv 1 \bmod p$, $\xi_1 \neq 0$.

Теорема 1 [5]. *Функции* $(\mathbf{r}_{2n}, \mathbf{r}_{2n+1})$ *образуют систему Радемахера и выполнены равенства*

$$\mathbf{r}_{2n}(\mathbf{g}_{2n}) = \mathbf{r}_{2n}(g_n, (\nu + s)g_n) = r_n(\xi_0, g_n) r_n(\xi_1, (\nu + s)g_n) = (r_n, g_n)^{\xi_0 + \xi_1(\nu + s)} = (r_n, g_n) = e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

$$\mathbf{r}_{2n+1}(\mathbf{g}_{2n+1}) = \mathbf{r}_{2n+1}(g_n, \nu g_n) = r_n(\gamma_0, g_n) r_n(\gamma_1, \nu g_n) = (r_n, g_n)^{\gamma_0 + \gamma_1 \nu} = (r_n, g_n) = e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Запишем функции Хаара на группе $\mathfrak{G} = G \times G$ с основной цепочкой подгрупп $(\mathfrak{G}_{2n}, \mathfrak{G}_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$, базисной последовательностью $(\mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ и системой Радемахера $(\mathbf{r}_{2n}(x_0, x_1), \mathbf{r}_{2n+1}(x_0, x_1))_{n=0}^{\infty}$ в виде

$$H_{jp^n+k}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_n(\mathbf{x} \dot{-} \mathbf{q}) \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_n \dot{+} \mathbf{q}}(x) \ \ (j = \overline{1, p-1}).$$

Здесь $\mathbf{q} = a_0 \mathbf{g}_0 \dot{+} a_1 \mathbf{g}_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} \mathbf{g}_{n-1}$, число k определяется по элементу $\mathbf{q}$ равенством $k = a_{n-1} + a_{n-2}p + \ldots + a_0 p^{n-1}$. Поэтому функцию H_{jp^n+k} для удобства запишем в векторной нумерации:

$$H_{j, p^n, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}}(x) = \mathbf{r}_n(\mathbf{x} \dot{-} \mathbf{q}) \mathbf{1}_{G_n \dot{+} q}(\mathbf{x}).$$

Частичную сумму $S_{p^{2n+2}} = \sum\limits_{l=0}^{p^{2n+2}-1} c_l H_l(\mathbf{x})$ представим в виде суммы

$$S_{p^{2n+2}} = \sum_{l=0}^{p^{2n+1}-1} c_l H_l(\mathbf{x}) + \sum_{l=p^{2n}+1}^{p^{2n+2}-1} c_l H_l(\mathbf{x}) = S_{p^{2n+1}}(\mathbf{x}) + \sum_{l=p^{2n}+1}^{p^{2n+2}-1} c_l H_l(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Сумма $S_{p^{2n+1}}(\mathbf{x})$ постоянна на смежных классах:

$$\mathfrak{G}_{2n+1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n} a_{2n} \dot{+} \mathbf{g}_{2n-1} a_{2n-1} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{g}_1 a_1 \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0 = \mathfrak{G}_{2n+1} \dot{+} \mathbf{q}. \tag{3}$$

Сумма $S_{p^{2n+2}}(\mathbf{x})$ постоянна на смежных классах:

$$\mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} \mathbf{g}_{2n+1} a_{2n+1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n} a_{2n} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{g}_1 a_1 \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0 = \mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} \mathbf{g}_{2n+1} a_{2n+1} \dot{+} \mathbf{q}. \tag{4}$$

Обозначим значения $S_{p^{2n+1}}$ и $S_{p^{2n+2}}$ на смежных классах (4) и (3) следующим образом:

$$S_{p^{2n+1}}(\mathfrak{G}_{2n+1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n} a_{2n} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0) = \lambda^{(2n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_{2n}},$$

$$S_{p^{2n+2}}(\mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} \mathbf{g}_{2n+1} a_{2n+1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n} a_{2n} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0) = \lambda^{(2n+2)}_{a_0 a_1 \ldots a_{2n} a_{2n+1}}.$$

На смежном классе $\mathfrak{G}_{2n+1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n} a_{2n} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0$ с учетом равенства (2) имеем:

$$\lambda^{(2n+2)}_{a_0 a_1 \ldots a_{2n} a_{2n+1}} = \lambda^{(2n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_{2n}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j, p^{2n+1}, a_0 a_1 \ldots a_{2n}} \mathbf{r}^j_{2n+1}(\mathfrak{G}_{2n+1}) =$$

$$= \lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}} \mathbf{r}^j_{2n+1}(\mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} a_{2n+1}\mathbf{g}_{2n+1}) =$$

$$= \lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}} (\mathbf{r}_{2n+1}, \mathbf{g}_{2n+1})^{a_{2n+1}\cdot j} =$$

$$= \lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}} \varepsilon^j_{a_{2n+1}} \qquad (a_{2n+1} = \overline{0, p-1}), \tag{5}$$

здесь $\varepsilon_{a_{2n+1}} = e^{\frac{2\pi i}{p} a_{2n+1}}$.

Равенства (5) при фиксированных $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ есть система p линейных уравнений, относительно неизвестных $\lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}}$, $c_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}}$ $(j = \overline{1, p-1})$. Решая системы (5) при фиксированном n, найдем коэффициенты $C_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}}$ и значения $\lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}}$ суммы $S_{p^{2n+1}}$ на смежных классах $\mathfrak{G}_{2n+1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n} a_{2n} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0$.

Запишем смежный класс $\mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} \mathbf{g}_{2n+1} a_{2n+1} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0$ как произведение одномерных смежных классов. Учитывая, что $\mathbf{g}_{2k} = (g_k, (\nu \dot{+} s) g_k)$ и $\mathbf{g}_{2k+1} = (g_k, \nu g_k)$, имеем:

$$\mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} \mathbf{q} = \mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k \mathbf{g}_k = \mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} (g_n, \nu g_n) a_{2n+1} \dot{+} (g_n, (\nu \dot{+} s) g_n) a_{2n} \dot{+} \dots$$

$$\dots \dot{+} (g_0, \nu g_0) a_1 \dot{+} (g_0, (\nu \dot{+} s) g_0) a_0 = G_{n+1} \times G_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n} g_k (a_{2k} \dot{+} a_{2k+1}) \sum_{k=0}^{n} g_k ((\nu \dot{+} s) a_{2k} \dot{+} \nu a_{2k+1}) \right).$$

При переходе на отрезок заменяем g_k на $1/p^{k+1}$ и получаем:

$$\mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} \mathbf{q} = G_{n+1} \times G_{n+1} + \left(\frac{1}{p^{n+1}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} p^{n-k} (a_{2k} \dot{+} a_{2k+1})}_{=k^{(0)}}, \frac{1}{p^{n+1}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} p^{n-k} (\nu a_{2k+1} \dot{+} (\nu \dot{+} s) a_{2k})}_{=k^{(1)}} \right) =$$

$$= \left[0, \frac{1}{p^{n+1}}\right) \times \left[0, \frac{1}{p^{n+1}}\right) + \left(\frac{k^{(0)}}{p^{n+1}}, \frac{k^{(0)}}{p^{n+1}} \right). \tag{6}$$

На практике изображение задается матрицей интенсивностей пикселей, которые нумеруются по горизонтали и вертикали, т. е. заданы числа $\lambda^{(2n+2)}_{k^{(0)},k^{(1)}}$. Поэтому вначале надо от номеров пикселей $(k^{(0)}, k^{(1)})$ перейти к кортежам $a_0, a_1, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}$. Для этого по p-ичным разложениям чисел $k^{(0)}$ и $k^{(1)}$

$$k^{(0)} = \beta^{(0)}_0 + \beta^{(0)}_1 p + \dots + \beta^{(0)}_n p^n, \qquad k^{(1)} = \beta^{(1)}_0 + \beta^{(1)}_1 p + \dots + \beta^{(1)}_n p^n,$$

получаем системы уравнений

$$\begin{cases} a_{2k} \dot{+} a_{2k+1} = \beta^{(0)}_{n-k}, \\ \nu a_{2k+1} \dot{+} (\nu \dot{+} s) a_{2k} = \beta^{(1)}_{n-k}, \end{cases}$$

в которых операция $\dot{+}$ есть сложение по модулю p. Решая при каждом k такую систему, находим a_{2k} и a_{2k+1}. Решая систему (5), находим значения $\lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}}$, т. е. значения суммы $S_{p^{2n+1}}$ на смежных классах (3) и коэффициенты $c_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}}$. Теперь мы должны найти значения суммы $S_{p^{2n}}$ на смежных классах $(\mathfrak{G}_{2n} \dot{+} \mathbf{g}_{2n-1} a_{2n-1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n-2} a_{2n-2} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{g}_1 a_1 \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0)$ и коэффициенты $c_{j,p^{2n},a_0a_1\dots a_{2n-1}}$.

Обозначим

$$S_{p^{2n}}(\mathfrak{G}_{2n} \dot{+} \mathbf{g}_{2n-1} a_{2n-1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n-2} a_{2n-2} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{g}_1 a_1 \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0) = \lambda^{(2n)}_{a_0a_1\dots a_{2n}a_{2n-1}}.$$

Приравнивая значения на соответствующих смежных классах, получаем равенства, которые дают систему

$$\lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}} = \lambda^{(2n)}_{a_0a_1\dots a_{2n}a_{2n-1}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j,p^{2n},a_0a_1\dots a_{2n-1}} \varepsilon^j_{a_{2n}}, \quad a_{2n=\overline{0,p-1}} \tag{7}$$

с той же матрицей $\mathscr{E}$. Формулы для пересчета смежных классов $\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}\mathbf{q}$ на отрезок $[0,1]$ отличаются от (6) и задаются следующим образом:

$$\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}\mathbf{q}=\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}\sum_{k=0}^{2n}a_kg_k=\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}(g_n,(\nu\dot{+}s)g_n)a_{2n}+(g_{n-1},\nu g_{n-1})a_{2(n-1)+1}+$$
$$+(g_{n-1},(\nu+s)g_{n-1})a_{2(n-1)}+\cdots+(g_0,\nu g_0)a_1+(g_0,(\nu\dot{+}s)g_0)a_0=$$
$$=\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}(g_n,(\nu\dot{+}s)g_n)a_{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}g_k(a_{2k}\dot{+}a_{2k+1}),\sum_{k=0}^{n-1}g_k((\nu\dot{+}s)a_{2k}\dot{+}\nu a_{2k+1})\right)=$$
$$=\bigsqcup_{a_{2n+1}=0}^{p-1}(G_{n+1}\times G_{n+1}\dot{+}a_{2n+1}(g_n,\nu g_n))+(g_n,(\nu\dot{+}s)g_n)a_{2n}+\sum_{k=0}^{n-1}g_k(a_{2k}+a_{2k+1}),$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}((\nu+\beta)a_{2k}+\nu a_{2k+1})g_k=\bigsqcup_{a_{2n+1}=0}^{p-1}\left(\left[0,\frac{1}{p^{n+1}}\right)\times\left[0,\frac{1}{p^{n+1}}\right)\dot{+}\left(\sum_{k=0}^{n}g_k(a_{2k}+a_{2k+1}),\right.\right.$$
$$\left.\left.\sum_{k=0}^{n}g_k((\nu\dot{+}s)a_{2k}+\nu a_{2k+1})\right)\right)=\bigsqcup_{a_{2n+1}=0}^{p-1}\left(\left[0,\frac{1}{p^{n+1}}\right]\times\left[0,\frac{1}{p^{n+1}}\right]\left(\frac{k^{(0)}}{p^{n+1}},\frac{k^{(1)}}{p^{n+1}}\right)\right),$$

где $k^{(0)}$ и $k^{(1)}$ те же, что и в (6). Таким образом, мы перешли от массива размерности $p^{n+1}\times p^{n+1}$ к массиву размерности $p^n\times p^n$ и на этом первый шаг алгоритма закончен. После $n+1$-го шага получаем матрицу из коэффициентов Фурье.

Аналогичным образом строятся одномерное и двумерное преобразования по системе Виленкина. Только в этом случае, в отличие от преобразования Хаара, где большая часть коэффициентов находится после каждой итерации, здесь все коэффициенты получаются после последнего шага.

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Приведем алгоритм сжатия, основанный на системах Хаара и Виленкина.

1. Исходное изображение разбивается на квадраты размерности $p^n\times p^n$, где p — простое число, а n — натуральное. Затем выделяются цветовые каналы из RGB палитры и выполняются преобразования к каждому каналу для каждого квадрата в отдельности.

2. Проводится анализ коэффициентов, выделяется определенное количество наибольших по модулю, а остальные коэффициенты обнуляются.

3. К оставшимся массивам данных применяется обратное преобразование.

4. Для полученного изображения проводится сравнение с исходным и вычисляется погрешность отклонения.

Для оценки погрешности воспользуемся следующими критериями. Пусть $K(i,j)$ — исходное изображение, $N(i,j)$ — восстановленное изображение. Определим среднеквадратичное отклонение MSE (mean square error) между изображениями по формуле

$$MSE=\frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}(N(i,j)-K(i,j))^2,$$

где m и n — ширина и высота картинки.

Далее введем величину

$$PSNR=10\log\left(\frac{255^2}{MSE}\right).$$

PSNR (peak signal-to-noise ratio) — это соотношение между максимумом возможного значения сигнала и мощностью шума, искажающего значения сигнала. Таким образом, чем меньше MSE и чем больше PSNR — тем меньше отклонение восстановленного изображения от оригинала.

Для тестирования алгоритма рассматривались изображения lenna (табл. 1) и flowers (табл. 2). Кроме сравнения между собой преобразований Хаара и Виленкина было проведено сравнение с дискретным косинус-преобразованием. Рассматривались разные степени сжатия, т. е. различный процент обнуленных коэффициентов. Индекс MSE приводится для каждой цветовой компоненты отдельно.

Таблица 1

Значения MSE и PSNR при сжатии изображения lenna

Система, используемая для сжатия	Сжатие в 38 раз				Сжатие в 50 раз			
	PSNR	MSE			PSNR	MSE		
Дискретное косинус-преобразование	21.14	41.39	51.86	73.46	2.87	3953	2056	5193
Система Хаара	19.6	187.24	25.37	25.21	9.6	1876	3412	3215
Система Виленкина	24.02	61.26	12.24	12.32	23.66	61.26	15.99	16.07

Таблица 2

Значения MSE и PSNR при сжатии изображения flowers

Система, используемая для сжатия	Сжатие в 38 раз				Сжатие в 50 раз			
	PSNR	MSE			PSNR	MSE		
Дискретное косинус-преобразование	22.14	42.25	31.42	54.74	7.89	1422	818	1283
Система Хаара	20.76	138.36	29.23	13.76	15.6	876	734	628
Система Виленкина	24.88	55.52	10.27	4.68	24.19	55.52	18.38	8.62

Таким образом, сжатие с использованием системы Виленкина более эффективно, чем дискретное косинус-преобразование и преобразование по системе Хаара.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

Библиографический список

1. *Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В.* Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. М. : ДИАЛОГ-МИФИ, 2002.

2. *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображения в действии. М. : Триумф, 2003.

3. *Козырев С. В.* Вейвлет анализ как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, № 2. С. 149–158. DOI: 10.4213/im381.

4. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 14–19.

5. *Lukomskii S. F.* Haar system on a product of zero-dimensional compact groups // Central Europ. J. Math. 2011. Vol. 9, № 3. С. 627–639.

Systems of Scales and Shifts in the Problem Still Image Compression

A. A. Baryshev[1], D. S. Lukomskii[2], S. F. Lukomskii[2]

[1]LLC «Geofiztekhnika», 1, Lomonosov str., Saratov, 410041, Russia, baryshevaa@gmail.com,

[2]Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, lukomskiids@info.sgu.ru, lukomskiisf@info.sgu.ru

A new approach to the construction of two-dimensional Haar and Vilenkin considered. To the obtained systems fast algorithms Fourier – Haar and Fourier – Vilenkin developed. Comparative analysis of algorithms developed in the problem still image compression performed.

Key words: Haar transform, Vilenkin transform, compact group, image processing.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00102).

References

1. Vatolin D., Ratushnyak A., Smirnov M., Yoockin V. Data compression methods. Structure of archivers, compression of images and video. Moscow, Dialog–MIFI Publ., 2002 (in Russian).

2. Welstead S. Fractal and Wavelet Image Compression Techniques. Bellinham, WA, SPIE Optical Engineering Press, 1999.

3. Kozyrev S. V. Wavelet theory as p-adic spectral analysis. *Izv. Math.*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 367–376. DOI: 10.1070/IM2002v066n02ABEH000381.

4. Lukomskii S. F. Haar series on compact zero-dimensional abelian group. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 14–19 (in Russian).

5. Lukomskii S. F. Haar system on a product of zero-dimensional compact groups. *Central Europ. J. Math.*, 2011, vol. 9, no. 3, pp. 627–639.

УДК 517.51

КМА НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

А. М. Водолазов[1], С. Ф. Лукомский[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, vam21@yandex.ru

[2]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, lukomskiids@info.sgu.ru

Доказано, что локальное поле положительной характеристики есть линейное пространство над конечным полем.

Ключевые слова: локальные поля, конечные поля, кратномасштабный анализ.

ВВЕДЕНИЕ

Последние годы активно изучаются вопросы построения всплесковых базисов на неархимедовых структурах: полях p-адических чисел, группах Виленкина, локальных полях и нуль-мерных группах. При построении всплесковых базисов на локальных полях используются методы, изложенные в [1], которые используют понятие примитивного (prime) элемента. В работах [2–5] получены аналоги некоторых основных фактов и методов классического и p-адического анализа. Приведем наиболее заметные из них. В работе [2] предлагается метод, с помощью которого по известной масштабирующей функции строятся вейвлеты. Этот метод сводится к построению некоторой унитарной матрицы. В работе [3] получены необходимые и достаточные условия, при которых функция будет масштабирубщей для некоторого кратномасштабного анализа (КМА). В работе [4] доказано, что две масштабирующие функции двух сопряженных КМА порождают биортонормированную вейвлет-систему. Отмеченные результаты имеют два существенных недостатка. Во-первых, они относятся только к полям положительной характеристики. Во-вторых, даже в этом случае удается построить только хааровские базисы. Мы хотим предложить иной взгляд на локальные поля положительной характеристики, который должен помочь перенести известные для групп Виленкина результаты на локальные поля.

1. ЛОКАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

Под локальным полем K понимают топологическое пространство, в котором определены непрерывные операции «$\dot{+}$», «$\cdot$» — сложения и умножения, для которых выполнены аксиомы поля. K является локально компактным, вполне не связным, не дискретным, полным топологическим пространством.

Так как K — локальное поле, то аддитивная группа K^+ есть локально компактная группа, в ней определены мера Хаара $\mu(x)$, причем $\mu(\alpha x) = |\alpha| \cdot \mu(x)$. Число $|\alpha|$ обладает свойствами:

1) $|\alpha| \geqslant 0$, $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$;
2) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$;
3) $|\alpha \dot{+} \beta| \leqslant \max(|\alpha|, |\beta|)$ (ультраметрическое неравенство треугольника).

Поле $\mathbb{Q}_p$ — классический пример локального поля. В группе Виленкина $(\mathfrak{G}, \dot{+})$ можно ввести операцию умножения так, что она (группа) станет полем.

В поле K вводят оператор растяжения следующим образом. Единичный шар

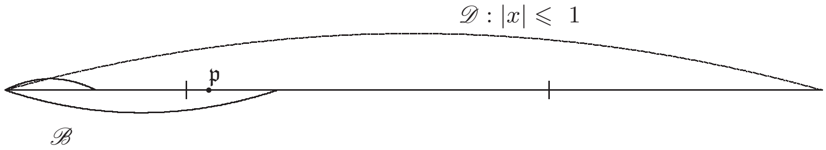
$$\mathscr{D} = \{x \in K : \ |x| \leqslant 1\}, \qquad \mu\mathscr{D} = 1,$$

является кольцом, в котором существует единственный максимальный идеал:

$$\mathscr{B} = \{x \in K : \ |x| < 1\}.$$

Элемент $\mathfrak{p} \in \mathscr{B}$ с наибольшей нормой $|\mathfrak{p}|$ называют примитивным элементом. Для него $\mu\mathscr{B} = |\mathfrak{p}| = \frac{1}{p^s}$, где p — простое, $s \in \mathbb{N}$. Если $x \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{B}$, то $|x| = 1$.

Справедливо равенство $\mathscr{B} = \mathfrak{p}\mathscr{D}$, и фактор кольцо $\mathscr{D}/\mathscr{B}$ изоморфно конечному полю $GF(p^t)$. Таким образом, с каждым локальным полем связано простое число p и пара натуральных s, t. Определенные выше объекты представлены графически на следующем рисунке:



Строение кольца $\mathscr{D}$

Любой элемент $x \in K$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l \mathfrak{p}^l = \mathfrak{p}^l \sum_{\nu=0}^{+\infty} c_k \mathfrak{p}^k, \qquad c_l \in U, \qquad c_\nu \neq 0,$$

где U — множество представлений смежных классов фактор-группы $\mathscr{D}/\mathscr{B}$. По определению полагаем:

$$\mathscr{B}^k = \mathfrak{p}^k \mathscr{D} = \{x \in K: \ |x| \leqslant p^{-sk}\}.$$

Определение 1. *Оператор растяжения* $\mathscr{A}$ определяем равенством $\mathscr{A}x = x \cdot \frac{1}{\mathfrak{p}}$. Очевидно, что $|\mathscr{A}x| = |x| p^s$.

Определение 2. *Множество сдвигов* определяется равенством

$$I_K = \{g = a_{-1}\mathfrak{p}^{-1} \dot{+} a_{-2}\mathfrak{p}^{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-\nu}\mathfrak{p}^{-\nu}: \ \nu \in \mathbb{N}, a_{-j} \in GF(p^s)\}.$$

Имея оператор растяжения и множество сдвигов, можно определить КМА в $L_2(K)$ стандартным образом.

Определение 3. Пусть K — локальное поле положительной характеристики, $\mathfrak{p}$ есть примитивный элемент, I_K — множество сдвигов. *КМА в* $L_2(K)$ есть множество подпространств $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ таких, что

1) $V_n \subset V_{n+1}$;

2) $\overline{\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} V_n} = K$, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{Z}} K_n = \{0\}$;

3) $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(\mathscr{A}x) = f(\mathfrak{p}^{-1}x) \in V_{n+1}$;

4) существует $\varphi \in L_2(K)$ такая, что $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in I_K}$ — ортонормированный базис (или базис Рисса) в V_0. $\varphi(x)$ называется *scaling function*.

В таком виде определение дано в работе [2].

2. КОНЕЧНЫЕ ПОЛЯ

Поле K называется *конечным*, если $\sharp K < +\infty$. Известно [6], что число элементов в конечном поле K равно p^m при некотором простом p и $m \in \mathbb{N}$. Конечное поле порядка p^m обычно обозначают $GF(p^m)$. При $m = 1$ $GF(p^m)$ есть кольцо (поле) классов вычетов по модулю p и $GF(p) = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Операция сложения в $GF(p)$ определяется равенством $a \dot{+} b = (a+b) \bmod p$, т. е. это остаток от деления $a+b$ на p. Операция умножения определяется равенством $a \cdot b = \underbrace{a \dot{+} a \dot{+} \ldots \dot{+} a}_{b}$.

Пусть $m \geqslant 2$, тогда существует неприводимый над полем $GF(p)$ многочлен $p_m(x)$ степени m. Элементами поля $GF(p^m)$ являются векторы $(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$ длины m, где $a_j \in GF(p)$.

Операция сложения определяется покоординатно, т. е. $(a_j) \dot{+} (b_j) = ((a_j + b_j) \bmod p)_{j=0}^{m-1}$. Для того чтобы определить $\mathbf{ab}$, векторы $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) \in GF(p^m)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}) \in GF(p^m)$ надо представить в виде формальных многочленов:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{b}(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1},$$

а элементы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ умножить как многочлены над полем $GF(p)$, тогда получим многочлен

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} a_j b_k x^{j+k} = \sum_{l=0}^{2m-2} x^l \sum_{k,j:\, k+j=l} a_j b_k,$$

в котором коэффициенты $\beta_l = \sum\limits_{k,j:\,k+j=l} a_j b_k$ вычисляются по операциям в поле $GF(p)$. После этого делим $Q(x)$ с остатком на $p_m(x)$. Коэффициенты полученного остатка $\mathbf{H}$ и есть произведение $\mathbf{ab}$.

Известно [6], что неприводимый многочлен $p_m(x)$ над полем $GF(p)$ существует для любого $m \geqslant 2$. Существуют алгоритмы нахождения $p_m(x)$.

3. ЛОКАЛЬНЫЕ ПОЛЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

В дальнейшем мы будем рассматривать только поля положительной характеристики. Пусть p — простое число, $s \in \mathbb{N}$, $GF(p^s)$ — конечное поле. Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно (теорема Ковальского – Понтрягина [7]) множеству формальных степенных рядов:

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad a_i \in GF(p^s).$$

Операции сложения и умножения определяются как сумма и произведение таких рядов, т. е. если

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i, \qquad b = \sum_{i=k}^{\infty} b_i t^i,$$

то

$$a \dot{+} b = \sum_{i=k}^{\infty} (a_i \dot{+} b_i) t^i, \qquad a_i \dot{+} b_i = (a_i + b_i) \operatorname{mod} p, \qquad ab = \sum_{l=2k}^{\infty} t^l \sum_{i,j: i+j=l} (a_i b_j).$$

Топология в $F^{(s)}$ задается базой окрестностей нуля

$$F_n^{(s)} = \left\{ a = \sum_{j=n}^{\infty} a_j t^j \,\middle|\, a_j \in GF(p^s) \right\}.$$

Если $a = \sum\limits_{j=n}^{\infty} a_j t^j$, $a_n \neq 0$, то по определению полагаем $\|a\| = (p^{-s})^n$ и, значит,

$$F_n^{(s)} = \{ x \in F^{(s)} : \|x\| \leqslant (p^{-s})^n \}$$

Обозначим через $F^{(s)+}$ аддитивную группу поля $F^{(s)}$. Окрестности $F_n^{(s)}$ являются компактными подгруппами группы $F^{(s)+}$, обозначим их через $F_n^{(s)+}$. Они обладают следующими свойствами: 1) $\dots \subset F_1^{(s)+} \subset F_0^{(s)+} \subset F_{-1}^{(s)+} \dots$; 2) $F_n^{(s)+}/F_{n+1}^{(s)+} \cong GF(p^s)^+$ и $\sharp(F_n^{(s)+}/F_{n+1}^{(s)+}) = p^s$.

Поэтому можно считать, что локальное поле $F^{(s)}$ характеристики p состоит из бесконечных в обе стороны последовательностей $a = (\dots, 0_{n-1}, a_n, \dots, a_0, a_1, \dots)$, $a_j \in GF(p^s)$, в которых лишь конечное число элементов a_j с отрицательными номерами отлично от нуля, операции сложения и умножения определены равенствами

$$a \dot{+} b = ((a_i \dot{+} b_i))_{i \in \mathbb{Z}}, \qquad ab = \left(\sum_{i,j: i+j=l} (a_i b_j) \right)_{l \in \mathbb{Z}}, \tag{1}$$

где операции «$\dot{+}$» и «$\cdot$» — сложение и умножение в поле $GF(p^s)$.

В этом случае

$$\|a\| = \|(\dots, 0_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)\| = (p^{-s})^n, \quad \text{если} \quad a_n \neq 0,$$
$$F_n^{(s)} = \{ a = (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} : a_j \in GF(p^s);\ a_j = 0\ \forall\ j < n \},$$
$$\dots \subset F_1^{(s)} \subset F_0^{(s)} \subset F_{-1}^{(s)} \dots,$$

$F_n^{(s)}$ — компактные подгруппы в $F^{(s)+}$ и $\sharp(F_n^{(s)}/F_{n+1}^{(s)}) = p^s$.

Отсюда сразу следует, что при $s = 1$ $F^{(1)+}$ есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$. Верно и обратное: во всякой группе Виленкина $(\mathfrak{G}, \dot{+})$ с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$ можно ввести операцию умножения равенством (1). С такой операцией умножения $(\mathfrak{G}, \dot{+}, \cdot)$ становится полем, изоморфным $F^{(1)}$, единичный элемент имеет вид $e = (\ldots, 0, 0_{-1}, 1_0, 0_1, \ldots)$.

Теорема 1. *При $s > 1$ аддитивная группа $F^{(s)+}$ поля $F^{(s)}$ изоморфна произведению групп Виленкина, т. е.*

$$F^{(s)+} \cong F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times \cdots \times F^{(1)+} = (F^{(1)+})^s.$$

Этот изоморфизм переводит базу топологии группы $F^{(s)+}$ в базу топологии произведения $F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times \cdots \times F^{(1)+}$ групп Виленкина.

Доказательство. Пусть $a = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in F^{(s)}$. Так как $a_j \in GF(p^s)$, то

$$a_j = (a_j^{(0)}, a_j^{(1)}, \ldots, a_j^{(s-1)}), \qquad a_j^{(l)} \in GF(p).$$

Определим отображение

$$\varphi : F^{(s)+} \to (F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times \cdots \times F^{(1)})) = (F^{(1)+})^s$$

равенством

$$\varphi(a) = (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(s-1)}), \qquad \alpha^{(0)} = (a_j^{(0)})_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \ldots, \quad \alpha^{(s-1)} = (a_j^{(s-1)})_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Очевидно, что φ отображает $F^{(s)+}$ на $(F^{(1)+})^s$ взаимно однозначно. Кроме того,

$$\varphi(a \dot{+} b) = \varphi(a) \dot{+} \varphi(b), \tag{2}$$

$$\varphi(F_n^{(s)+}) = F_n^{(1)+} \times F_n^{(1)+} \times \ldots F_n^{(1)+} = (F_n^{(1)+})^s. \tag{3}$$

Множества $F_n^{(s)+}$ образуют базу окрестностей нуля в $F^{(s)+}$, множества $(F_n^{(1)+})^s$ образуют базу окрестностей нуля в $(F^{(1)+})^s$. Поэтому из (2) и (3) следует, что отображение φ переводит базу топологии группы $F^{(s)+}$ в базу топологии произведения $F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times \cdots \times F^{(1)+}$ групп Виленкина. □

4. ГРУППА ВИЛЕНКИНА КАК ЛОКАЛЬНОЕ ПОЛЕ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО НАД ПОЛЕМ $GF(p)$

Пусть $(G, \dot{+})$ — p-ичная группа Виленкина. В ней можно ввести операцию умножения на число $\lambda \in Z_p = GF(p)$ равенством

$$a\lambda = \underbrace{a \dot{+} a \dot{+} \ldots \dot{+} a}_{\lambda}$$

Определим модуль числа $\lambda \in Z_p$ как

$$|\lambda| = \begin{cases} 1, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

и норму элемента a равенством

$$\|a\| = p^{-n}, \tag{4}$$

если

$$a = (\ldots 0_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots), \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad a_j \in Z_p, \qquad a_n \neq 0.$$

Нетрудно проверить, что $(G, \dot{+}, \cdot\lambda)$ есть линейное пространство, и равенство (4) определяет неархимедову норму. Таким образом, $(G, \dot{+}, \cdot\lambda)$ можно рассматривать как линейное нормированное пространство на полем Z_p. Известно, что любой элемент a из группы Виленкина единственным образом представим в виде ряда

$$a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n g_n, \qquad \lambda_n \in Z_p,$$

где (g_n) — фиксированная базисная последовательность, т. е. $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. Это означает, что система (g_n) есть базис линейного пространства. Очевидно, что если в группе Виленкина ввести операцию умножения равенством (1), то с такой операцией умножения $(\mathfrak{G}, \dot{+}, \cdot)$ становится полем, изоморфным $F^{(1)}$.

5. ЛОКАЛЬНОЕ ПОЛЕ КАК ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Рассмотрим теперь локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p. Его элементы — бесконечные последовательности

$$a = (\dots, 0_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots), \qquad a_j \in GF(p^s),$$

т. е.

$$a_j = (a_j^{(0)}, a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(s-1)}), \qquad a_j^{(\nu)} \in GF(p).$$

Норма в $F^{(s)}$ определена равенством $\|a\| = p^{-sn}$ если $a_n \neq 0$. Так как

$$\lambda a = (\dots 0_{-1}, \lambda, 0_1, \dots)(\dots 0_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots) = (\lambda + 0x + 0x^2 + \dots)(a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \dots) = \\ = \lambda a_n x^n + \lambda a_{n+1} x^{n+1} + \dots = (\dots 0_{n-1}, \lambda a_n, \lambda a_{n+1}, \dots),$$

то произведение λa определяется покоординатно. Если мы теперь определим модуль числа $\lambda \in GF(p^s)$ как

$$|\lambda| = \begin{cases} 1, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0 \end{cases}$$

и норму элемента a при $a_n \neq 0$ равенством $\|a\| = p^{-ns}$, то $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$ и поле $F^{(s)}$ можно рассматривать как линейное нормированное пространство над конечным полем $GF(p^s)$, и у нас полная аналогия со случаем группы Виленкина.

Обозначим для краткости $K := F^{(s)}$, $K_n = F_n^{(s)}$, и выберем фиксированный элемент $g \in K_1 \setminus K_2$. Известно [1], что любой элемент $a \in K$ однозначно представим в виде

$$a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n g^n, \tag{5}$$

где λ_n — представители смежных классов фактор группы K_0/K_1. Справедливо более общее утверждение

Теорема 2. *Пусть $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фиксированная базисная последовательность в K, т. е. $g_n \in \in K_n \setminus K_{n+1}$. Любой элемент $a \in K$ однозначно представим в виде ряда*

$$a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n g_n, \qquad \lambda_n \in GF(p^s).$$

Доказательство. Выбираем произвольное $a \in K$. Если $a = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $a \neq 0$. Тогда существует $n \in \mathbb{Z}$, что $a \in K_n^+ \setminus K_{n+1}^+$. Это означает, что

$$a = (\dots 0_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots), \qquad a_j \in GF(p^s), \qquad a_n \neq 0.$$

Тогда существует $\lambda_n \in GF(p^s)$ так, что

$$a = \lambda_n g_n \dot{+} \alpha_{n+1}, \qquad \alpha_{n+1} \in K_{n+1}.$$

В самом деле, так как $g_n \in K_n \setminus K_{n+1}$, то

$$g_n = (\dots 0_{n-1}, g_n^{(n)}, g_{n+1}^{(n)}, \dots), \qquad g_n^{(n)} \neq 0.$$

Выбираем $\lambda_n \in GF(p^s)$ так, чтобы $\lambda_n g_n^{(n)} = a_n$. Тогда

$$\lambda_n g_n = (\dots 0_{n-1}, \lambda_n g_n^{(n)}, \lambda_n g_{n+1}^{(n)} \dots) = (\dots 0_{n-1}, a_n, \tilde{a}_{n+1} \dots).$$

Поэтому

$$a \dot{-} \lambda_n g_n = (\dots 0_{n-1}, 0_n, a_{n+1} - \tilde{a}_{n+1} \dots) = \alpha_{n+1} \in K_{n+1}^+,$$

т. е. $a = \lambda_n g_n \dot{+} \alpha_{n+1}$. Продолжая этот процесс получаем утверждение теоремы. □

Следствие. *Если $g \in K_1 \setminus K_2$, то $g^n \in K_n \setminus K_{n+1}$ и в равенстве* (5) *можно взять $g_n = g^n$.*

Определение 4. Оператор

$$\mathscr{A} : a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n g_n \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n g_{n-1}$$

назовем *оператором растяжения*.

Замечание. Если $g_n = g^n$ и $a = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n g^n$, то $ag^{-1} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n g^{n-1}$, т. е. в этом случае оператор растяжения может быть определен равенством $\mathscr{A}x = g^{-1}x$ (можно сравнить с определением 1).

6. МНОЖЕСТВО ХАРАКТЕРОВ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ КАК ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Множество X характеров локального поля положительной характеристики образует абелеву группу с операцией произведения характеров $(\chi * \phi)(a) = \chi(a) \cdot \phi(a)$. Обратный элемент определяется как $\chi^{-1}(a) = \overline{\chi(a)}$, а единичным элементом является характер $e(a) \equiv 1$.

Определение 5. Определим *характеры* r_n *поля* $F^{(s)}$ следующим образом. Если $a = (\dots, 0_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots)$, $a_j \in GF(p^s)$, $a_j = \left(a_j^{(0)}, a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(s-1)}\right)$, $a_j^{(\nu)} \in GF(p)$, то $r_n(a) = e^{\frac{2\pi i}{p} a_k^{(l)}}$, где $n = ks + l$ и $0 \le l < s$. Функции r_n назовем *функциями Радемахера*.

Лемма 1. *Любой характер $\chi \in X$ однозначно представим в виде произведения*

$$\chi = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} r_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_n = \overline{0, p-1},$$

в котором множителей с положительными номерами конечное число.

Доказательство. Так как аддитивная группа $F^{(s)+}$ есть группа Веленкина, то функции $r_{ks+l}(x) = e^{\frac{2\pi i}{p} x_{ks+l}}$, где $x = (\dots, \mathbf{0}, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots)$, $\mathbf{x}_k = (x_{ks+0}, x_{ks+1}, \dots, x_{ks+(s-1)})$ есть функции Радемахера в $F^{(s)+}$, и любой характер χ, определенный на $F^{(s)+}$, можно представить в виде произведения

$$\chi = \prod_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_n = \overline{0, p-1}, \qquad n = ks + l. \qquad \square$$

Запишем характер χ в виде

$$\chi = \prod_{k \in \mathbb{Z}} r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} \cdot r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \cdot \dots \cdot r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}}$$

и обозначим $\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} = r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} \cdot r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \cdot \dots \cdot r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}}$, где $\mathbf{a}_k = (a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(s-1)}) \in GF(p^s)$. Положим по определению $(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k})^{\mathbf{b}_k} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k}$, $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k \in GF(p^s)$. В этом случае

$$\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} = (\mathbf{r}_k^{(1,0,\dots,0)})^{\mathbf{a}_k} = \mathbf{r}_k^{(a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(s-1)})} = r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \dots r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}},$$

Поэтому χ можно представить в виде произведения

$$\chi = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}. \qquad (6)$$

Определим возведение характера в степень $\mathbf{b} \in GF(p^s)$ равенством

$$\chi^{\mathbf{b}} = \left(\prod \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}\right)^{\mathbf{b}} = \prod \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{b}}.$$

Лемма 2. *Справедливо равенство* $\mathbf{r}_k^{\mathbf{u} \dot{+} \mathbf{v}} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{v}}$.

Доказательство. По определению функций Радемахера имеем для $x = \left(x_k^{(l)}\right)$:

$$(\mathbf{r}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{v}}, x) = (\mathbf{r}_k^{\mathbf{u}}, x)(\mathbf{r}_k^{\mathbf{v}}, x) = \prod_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{p} u_{ks+l}^{(l)} x_k^{(l)}} \cdot \prod_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{p} v_{ks+l}^{(l)} x_k^{(l)}} = \prod_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{p} (u_{ks+l}^{(l)} + v_{ks+l}^{(l)}) x_k^{(l)}} = (\mathbf{r}_k^{\mathbf{u}+\mathbf{v}}, x). \quad \square$$

Теорема 2. *Множество характеров поля $F^{(s)}$ есть линейное пространство $(X, *, \cdot^{GF(p^s)})$ над конечным полем $GF(p^s)$ с произведением в качестве внутренней операции и возведением в степень $\mathbf{a} \in GF(p^s)$ в качестве внешней операции.*

Доказательство. 1. Проверим, что $\chi^{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \chi^{\mathbf{u}} \chi^{\mathbf{v}}$, для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in GF(p^s)$. Пусть $\chi^{\mathbf{u}} = \prod\limits_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{u}}$, $\chi^{\mathbf{v}} = \prod\limits_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{v}}$. По лемме 2

$$\chi^{\mathbf{u}} \chi^{\mathbf{v}} = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{u}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{v}} = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k (\mathbf{u} \dot{+} \mathbf{v})} = \chi^{\mathbf{u} \dot{+} \mathbf{v}}.$$

2. Проверим, что $\chi_1^{\mathbf{u}}\chi_2^{\mathbf{u}} = (\chi_1\chi_2)^{\mathbf{u}}$. Пусть $\chi_1^{\mathbf{u}} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k\mathbf{u}}$, $\chi_2^{\mathbf{u}} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{b}_k\mathbf{u}}$. Тогда снова по лемме 2

$$\chi_1^{\mathbf{u}}\chi_2^{\mathbf{u}} = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k\mathbf{u}} \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{b}_k\mathbf{u}} = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{(\mathbf{a}_k\dot{+}\mathbf{b}_k)\mathbf{u}} = (\chi_1\chi_2)^{\mathbf{u}}.$$

3. Так как единицей в мультипликативной группе поля $GF(p^s)$ является элемент $\mathbf{1} = (1, 0, \ldots, 0)$, то $\chi^{\mathbf{1}} = \chi^{(1,0,\ldots,0)} = \prod\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{1}} = \prod\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} = \chi$.

4. Равенство $(\chi^{\mathbf{u}})^{\mathbf{v}} = \chi^{\mathbf{uv}}$ выполнено по определению.

Таким образом, все аксиомы внешней операции выполнены. Справедливость аксиом внутренней операции очевидна из леммы 2. $\square$

Из (6) сразу следует, что аннулятор $(F_k^{(s)})^\perp$ состоит из характеров вида $\chi = \mathbf{r}_{k-1}^{\mathbf{a}_{k-1}}\mathbf{r}_{k-2}^{\mathbf{a}_{k-2}}\ldots$ Очевидно также, что

1) последовательность функций Радемахера $(\mathbf{r}_k)$ образует базис пространства $(X, *, \cdot^{GF(p^s)})$;

2) любая последовательность характеров $\chi_k \in (F_{k+1}^{(s)})^\perp \backslash (F_k^{(s)})^\perp$ также образует базис пространства $(X, *, \cdot^{GF(p^s)})$.

Теорема 4. *Пусть* $g_j = (\ldots, \mathbf{0}_{j-1}, (1, 0, \ldots, 0)_j, \mathbf{0}_{j+1}, \ldots) \in F^{(s)}$, $\mathbf{a}_k, \mathbf{u} \in GF(p^s)$. *Тогда для любых* $k \neq j$ $(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}, \mathbf{u}g_j) = 1$.

Доказательство. Так как $\mathbf{u}g_j = (\ldots, \mathbf{0}_{j-1}, (u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(s-1)})_j, \mathbf{0}_{j+1}, \ldots)$, то

$$(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}, \mathbf{u}g_j) = \prod_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{p} a_k^{(l)} u^{(l)}} = \prod_{l=0}^{s-1} e^0 = 1. \qquad \square$$

Теоремы 3 и 4 позволяют использовать методы, развитые в работах [8–10], для построения КМА на локальных полях положительной характеристики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект №* 13-01-00102).

Библиографический список

1. *Taibleson M. H.* Fourier Analysis on Local Fields. Princeton : Princeton Univ. Press, 1975.
2. *Jiang H., Li D., Jin N.* Multiresolution analysis on local fields // J. Math. Anal. Appl. 2004. Vol. 294. P. 523–532.
3. *Behera B., Jahan Q.* Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions // Adv. Pure Appl. Math. 2012. Vol. 3. P. 181–202.
4. *Behera B, Jahan Q.* Biorthogonal Wavelets on Local Fields of Positive Characteristic // Communications in Math. Anal. 2013. Vol. 15, № 2. P. 52–75.
5. *Behera B, Jahan Q.* Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 395. P. 1–14.
6. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля : в 2 т. М. : Мир, 1988.
7. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции. М. : Наука, 1966.
8. *Lukomskii S. F.* Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, № 1. P. 42–65.
9. *Lukomskii S. F.* Trees in Wavelet analysis on Vilenkin groups. Preprint arxiv.org/abs/1303.5635.
10. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 6. С. 934–952. DOI: 10.4213/mzm4181.

MRA on Local Fields of Positive Characteristic

A. M. Vodolasov, S. F. Lukomskii

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, vam21@yandex.ru, lukomskiisf@info.sgu.ru

We prove that the local field of positive characteristic is a vector space over a finite field.

Key words: local fields, finite fields, multiresolution analysis.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00102).

References

1. Taibleson M. H. *Fourier Analysis on Local Fields*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1975.
2. Jiang H., Li D., Jin N. Multiresolution analysis on local fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, vol. 294, pp. 523–532.
3. Behera B, Jahan Q. Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions. *Adv. Pure Appl. Math.*, 2012, vol. 3, pp. 181–202.
4. Behera B., Jahan Q. Biorthogonal Wavelets on Local Fields of Positive Characteristic. *Communications in Math. Anal.*, 2013, vol. 15, no 2, pp. 52–75.
5. Behera B, Jahan Q. Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 395, pp. 1–14.
6. Lidl R., Niederreiter H. *Finite fields*. Encyclopedia Math. Appl., vol. 20, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1983.
7. Gelfand I. M., Graev M. I., Piatetski-Shapiro I. I. *Teoriia predstavlenii i avtomorfnye funktsii* [Representation Theory and Automorphic Functions]. Moscow, Nauka, 1966 (in Russian).
8. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 42–65.
9. Lukomskii S. F. *Trees in Wavelet analysis on Vilenkin groups*. Preprint arxiv.org /abs/1303.5635.
10. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, no. 6, pp. 843–859. DOI: 10.1134/S0001434607110296.

УДК 517.518

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ $\mathbf{P}$-ИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ И VMO

С. С. Волосивец

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, VolosivetsSS@mail.ru

В настоящей статье доказаны некоторые теоремы вложения типа П. Л. Ульянова для пространств Гельдера, связанных с метриками $\mathbf{P}$-ичных пространств Харди, VMO, а также L^1 и равномерной метрикой на группах Виленкина. Установлена их неулучшаемость. Даны достаточные условия сходимости ряда Фурье по мультипликативной системе в пространстве Харди и в равномерной метрике.

Ключевые слова: $\mathbf{P}$-ичное пространство Харди, $\mathbf{P}$-ичное пространство VMO, теоремы вложения, неулучшаемость, равномерная сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, не меньших 2. Обозначим через $\mathbb{Z}(p_k)$ дискретную циклическую группу $\{0, 1, \dots, p_k - 1\}$ порядка p_k со сложением по модулю p_k и определим $G = G(\mathbf{P})$ как прямое произведение $\mathbb{Z}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, с операцией $\oplus$, мерой μ и топологией, соответствующими прямому произведению. Элементами G являются последовательности $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, где $x_k \in \mathbb{Z}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Важную роль при этом играют подгруппы $G_n = \{x \in G : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, и смежные классы $G_n(y) = y \oplus G_n = \{x \in G : x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in G$. Если $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $m_0 = 1$, то мера $\mu(G_n(y))$ равна m_n^{-1} ($\mu(G) = 1 = m_0^{-1}$). Известно, что $G_n(y)$ являются одновременно открытыми и компактными. Аналоги функций Радемахера на группе G задаются формулами $r_k(x) = \exp(2\pi i x_k / p_k)$. Если

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \qquad n_k \in \mathbb{Z}(p_k), \tag{1}$$

есть $\mathbf{P}$-ичное представление $n \in \mathbb{Z}_+$, то по определению $\chi_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} r_k^{n_k}(x)$, $x \in G$ (на самом деле произведение конечно). Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, называемая системой характеров группы G, ортонормирована на G и полна в $L^1(G)$. Для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $x, y \in G$, верны равенства

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y), \qquad \chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}, \tag{2}$$

где $\ominus$ — операция, обратная к $\oplus$. Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, 3]. Далее считаем, что $p_n \le N$, $n \in \mathbb{N}$.

Введем коэффициенты Фурье функции $f \in L^1(G)$, частичную сумму Фурье и ядро Дирихле по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ формулами

$$\hat{f}(k) = \int_G f(x)\overline{\chi_k(x)}\,d\mu(x), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$
$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x), \qquad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Пространства $L^p(G)$, $1 \le p < \infty$, рассматриваются с нормами $\|f\|_p = \left(\int_G |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$. Пространство $C(G)$ непрерывных на G функций снабжено нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in G}|f(x)|$. $\mathbf{P}$-ичная максимальная функция $M(f)$ для измеримой функции f на G задается формулой

$$M(f)(x) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |S_{m_n}(f)(x)| = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} m_n \left|\int_{G_n(x)} f(x)\,dx\right|, \qquad x \in G.$$

Во втором равенстве была использована лемма 1. Если $f \in L^1(G)$ и при этом $\|f\|_H = \|M(f)\|_1 < \infty$, то f принадлежит пространству Харди $H^1(G)$. Если для интегрируемой на G функции f величина

$$\|f\|_{BMO}^{(k)} = \sup_{x\in G}\sup_{n\ge k} m_n \int_{G_n(x)} |f(t) - S_{m_n}(f)(t)|\,d\mu t$$

конечна при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, то $f \in BMO(G)$, если же $\lim\limits_{k\to\infty}\|f\|_{BMO}^{(k)} = 0$, то $f \in VMO(G)$. Все введенные пространства являются банаховыми относительно своих норм (для $\|\cdot\|_{BMO} := \|\cdot\|_{BMO}^{(0)}$ следует рассматривать фактор пространство $BMO(G)$ или $VMO(G)$ по подпространству констант). Эти пространства $X(G)$ (кроме $BMO(G)$) являются сепарабельными и однородными в следующем смысле: 1) множество $\mathscr{P}$ полиномов по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ содержится и плотно в $X(G)$; 2) для $f \in X(G)$ верно включение $f \in L^1(G)$ и неравенство $\|f\|_1 \le C\|f\|_X$, C не зависит от f; 3) для любых $f \in X(G)$ и $h \in G$ верно включение $f(\cdot \oplus h) \in X(G)$ и равенство $\|f\|_X = \|f(\cdot\oplus h)\|_X$. Как установлено в [2, гл. 4, лемма 1] в двоичном случае, для f, принадлежащей однородному пространству $X(G)$ и $g \in L^1(G)$, их свертка $f * g(x) = \int_G f(x \ominus t)g(t)\,d\mu(t)$, существует в $X(G)$ и при этом

$$\|f * g\|_X \le \|f\|_X\|g\|_1. \tag{3}$$

Пусть $\mathscr{P}_n = \{f \in L^1(G) : \hat{f}(k) = 0,\ k \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Введем модуль непрерывности и наилучшее приближение во введенных пространствах $X(G)$:

$$\omega_n(f)_X = \sup_{h\in G_n} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_X, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$
$$E_n(f)_X = \inf\{\|f - t_n\|_X : t_n \in \mathscr{P}_n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

В случае $X(G) = L^p(G)$, $1 \le p < \infty$, будем писать $E_n(f)_p$ и $\omega_n(f)_p$, а в случае $X(G) = C(G)$ соответственно $E_n(f)_\infty$ и $\omega_n(f)_\infty$. Известны неравенства А. В. Ефимова (см. [3, гл. 10, § 10.5] для $X = L^p$, $1 \le p < \infty$, или $X = C$)

$$E_{m_n}(f)_X \le \|f - S_{m_n}(f)\|_X \le \omega_n(f)_X \le 2E_{m_n}(f)_X, \qquad f \in X(G), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

В остальных случаях они доказываются с помощью неравенства (3) и его обобщения из [2, гл. 4, лемма 1].

Пусть $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ убывает к нулю. Тогда по определению $H_X^\omega(G) = \{f \in X(G) : \omega_n(f)_X \le C\omega_n,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$. Тот факт, что $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ может быть точным модулем непрерывности в $C(G)$, $L^1(G)$, $L^2(G)$, установлен А. И. Рубинштейном (см. [1, гл. 2, § 7]). Для $X = L^p$, $1 \le p < \infty$, вместо $H_X^\omega(G)$ будем писать $H_p^\omega(G)$.

Дадим краткий обзор предшествующих результатов. Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности и $1 \le p < \infty$. Тогда

$$H_p^\omega[0,1] = \left\{f \in L^p[0,1] : \sup_{0\le h\le\delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p[0,1-h]} \le C\omega(\delta)\right\}.$$

Для 2π-периодических функций можно аналогично ввести пространство $\tilde{H}_p^\omega$, заменяя в определении $\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_{L^p[0,1-h]}$ на $\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_{L^p[0,2\pi]}$ и подпространство $\tilde{H}_C^\omega$ пространства 2π-периодических непрерывных функций. П. Л. Ульяновым [4] установлена

Теорема A. *Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности, а $p\in[1,\infty)$ — фиксированное число. Для того чтобы всякая функция $\psi\in\tilde{H}_p^\omega$ была эквивалентна (равна п. в.) непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/p-1}\omega(k^{-1})<\infty.$$

Теорема A в части достаточности была доказана в 1958 г. Я. Л. Геронимусом [5].

Также в [4] был получен критерий принадлежности всякой функции $\psi\in\tilde{H}_p^\omega$ пространству Липшица $Lip(\alpha)$. В. А. Андриенко [6] распространил последний результат на случай произвольного подпространства $\tilde{H}_C^{\omega_1}$, где $\omega_1(\delta)$ также является модулем непрерывности. В работе [7] среди других результатов о вложении пространств $H_p^\omega[0,1]$ П. Л. Ульяновым была доказана следующая теорема.

Теорема B. *Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности, $1\le p<q<\infty$. Для того чтобы имело место вложение $H_p^\omega[0,1]\subset L^q[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p-2}\omega^q(k^{-1})<\infty.$$

Кроме того, в [7] был установлен критерий вложения $H_p^\omega[0,1]\subset Lip(\alpha,L^q[0,1])$. В. А. Андриенко получил критерий вложения $H_p^\omega[0,1]\subset H_q^{\omega_1}[0,1]$, где $\omega_1(\delta)$ также является модулем непрерывности.

Б. И. Голубов [8] (см. также [3, § 10.3, 10.4]) получил условия вложения в пространство $L^q[0,1]$ в терминах $E_n^{(p)}(f)=\inf\limits_{\{a_k\}\subset\mathbb{R}}\left\|f-\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kw_k\right\|_{L^p[0,1]}$ — наилучших приближений f в метрике $L^p[0,1]$ по системе Уолша.

Теорема C. *Пусть $1\le p<q<\infty$ и $f\in L^p[0,1]$. Тогда справедливы неравенства*

$$\|f\|_{L^q[0,1]}\le C_1\left(\|f\|_{L^p[0,1]}+\left[\sum_{k=1}^{\infty}k^{q/p-2}(E_k^{(p)}(f))^q\right]^{1/q}\right),$$

$$E_n^{(q)}(f)\le C_2\left(n^{1/p-1/q}E_n^{(p)}(f)+\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{q/p-2}(E_k^{(p)}(f))^q\right]^{1/q}\right).$$

Эти неравенства остаются верными при замене $E_k^{(p)}(f)$ на $E_k^{(p)}(f)_h$ — наилучшие приближения по системе Хаара.

М. Ф. Тиман и А. И. Рубинштейн (см. [9] или [1, гл. 4, § 9]) перенесли результаты П. Л. Ульянова и В. А. Андриенко на случай функций, определенных на компактных коммутативных нуль-мерных группах со второй аксиомой счетности.

Теорема D. *1. Для вложения $H_p^\omega(G)\subset L^q(G)$, где $\omega=\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ убывает к нулю, в случае $p_n\le C$ необходимо и достаточно, чтобы*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{q/p-1}\omega_n^q<\infty,\quad 1\le p<q<\infty,$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{1/p}\omega_n<\infty,\quad 1\le p<q=\infty.$

2. Для вложения $H_p^\omega(G)\subset H_q^{\omega^*}(G)$, где ω^* и ω убывают к нулю, в случае $p_n\le C$ необходимо и достаточно, чтобы

а) $\sum\limits_{k=n}^{\infty} m_k^{q/p-1}\omega_k^q\le C_1(\omega_n^*)^q$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $1\le p<q<\infty$,

б) $\sum\limits_{k=n}^{\infty} m_k\omega_k\le C_1\omega_n^*$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $1\le p<q=\infty$.

Здесь $L^\infty(G)$ отождествляется с $C(G)$, а $H_\infty^\omega(G)$ — с $H_C^\omega(G)$.

Ш. Фридли (S. Fridli) [10] получил уточнения предельных случаев теоремы D в случае $p_i\equiv 2$, заменяя $H_1^\omega(G)$ на $H_H^\omega(G)$ и $H_C^\omega(G)$ на $H_{VMO}^\omega(G)$. Кроме того, он изучил вложения вида $H_1^\omega(G)\subset H_H^{\omega^*}(G)$ и $H_{VMO}^\omega(G)\subset H_C^{\omega^*}(G)$.

Целью нашей работы является доказательство результатов из [10] для более общих групп G при ограничении $p_n \le N$.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. *Для $n \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in G$ справедлива формула $D_{m_n}(x) = m_n X_{G_n}$, где X_E — характеристическая функция множества E. Если $n \in \mathbb{N}$, то $\|D_n\|_1 \le C\ln(n+1)$.*

Доказательство леммы 1 можно найти в [1, гл. 4, § 3, 4].

Лемма 2. *Пусть $f \in L^1(G)$ и $\Delta_k(f) := S_{m_{k+1}}(f) - S_{m_k}(f)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\|\Delta_k(f)\|_H = \|\Delta_k(f)\|_1$ и $N^{-1}\|\Delta_k(f)\|_\infty \le \|\Delta_k(f)\|_{BMO} \le \|\Delta_k(f)\|_\infty$.*

Доказательство. Из ортонормированности системы $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ следует, что

$$S_{m_l}(S_{m_n}(f))(x) = S_{m_k}(f)(x), \qquad k = \min(l,n), \qquad l,n \in \mathbb{Z}_+, \qquad x \in G. \tag{5}$$

Поэтому $S_{m_l}(\Delta_k(f)) = 0$ при $l \le k$ и $S_{m_l}(\Delta_k(f)) = \Delta_k(f)$ при $l \ge k+1$. В результате получаем, что $\sup\limits_{l \in \mathbb{Z}_+} |S_{m_l}(\Delta_k(f))(x)| = |\Delta_k(f)(x)|$ при $x \in G$, откуда вытекает первое утверждение леммы. Также по формуле (5) имеем равенства $\Delta_k(f) - S_{m_l}(\Delta_k(f)) = \Delta_k(f)$ при $l \le k$ и $\Delta_k(f) - S_{m_l}(\Delta_k(f)) = 0$ при $l \ge k+1$. Поэтому

$$\sup_{l \in \mathbb{Z}_+} m_l \int_{G_l(x)} |\Delta_k(f)(t) - S_{m_l}(\Delta_k(f))(t)|\, d\mu(t) = \sup_{l \le k} m_l \int_{G_l(x)} |\Delta_k(f)(t)|\, d\mu(t) \le \|\Delta_k(f)\|_\infty, \tag{6}$$

и аналогичная оценка верна для $\|\Delta_k(f)\|_{BMO}$. С другой стороны, $\Delta_k(f)$ постоянна на всех смежных классах $G_{k+1}(x)$, и $\|\Delta_k(f)\|_\infty$ равна значению $|\Delta_k(f)|$ на некотором смежном классе $G_{k+1}(y)$. Пусть $G_{k+1}(y) \subset G_k(z)$, тогда

$$\|\Delta_k(f)\|_{BMO} \ge m_k \int_{G_k(z)} |\Delta_k(f)(t)|\, d\mu(t) \ge m_k \int_{G_{k+1}(y)} |\Delta_k(f)(t)|\, d\mu(t) =$$
$$= m_k \|\Delta_k(f)\|_\infty / m_{k+1} \ge N^{-1}\|\Delta_k(f)\|_\infty. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть группа G такова, что $2 \le p_n \le N$ при $n \in \mathbb{N}$, $f \in L^1(G)$. Тогда*

$$C_1\|Q(f)\|_1 \le \|f\|_H \le C_2\|Q(f)\|_1, \quad \text{где} \quad Q(f) = \left(|\hat{f}(0)|^2 + \sum_{k=0}^\infty |\Delta_k(f)|^2\right)^{1/2}.$$

Утверждение леммы можно найти в [11, § 2.2, следствие 2.23].

Лемма 4. *Пусть $f \in X(G)$, $j \in (m_n, m_{n+1}] \cap \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$E_j(f)_X \le \|S_{m_{n+1}}(f) - f\|_X + \inf_{q \in \mathscr{P}_j} \|\Delta_n(f) - \Delta_n(q)\|_X.$$

Доказательство. Пусть $f \in X(G)$, $j \in (m_n, m_{n+1}] \cap \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathscr{P}_j$. Тогда в силу равенства $S_{m_{n+1}}(q) = q$ имеем:

$$\|f - q\|_X \le \|f - S_{m_{n+1}}(f)\|_X + \|S_{m_{n+1}}(f-q) - S_{m_n}(f-q)\|_X + \|S_{m_n}(f-q)\|_X. \tag{8}$$

Если $S_{m_n}(q) = S_{m_n}(f)$, то третье слагаемое правой части (8) равно нулю, а второе не зависит от $\hat{q}(i)$, $0 \le i < m_n$. Поэтому, переходя в (8) к точной нижней грани по $q \in \mathscr{P}_j$, получаем неравенство леммы.

2. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

Теорема 1. *Пусть $f \in L^1(G)$ и $\omega = \{\omega_n\}_{n=0}^\infty$, $\eta = \{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ — убывающие к нулю последовательности. Тогда*

1) если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty k^{-1}E_k(f)_1$, то $f \in H^1(G)$ и справедливо неравенство

$$E_j(f)_H \le C\left(E_j(f)_1 + \sum_{k=j+1}^\infty k^{-1}E_k(f)_1\right), \qquad j \in \mathbb{N};$$

2) вложение $H_1^\omega(G) \subset H^1(G)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k < \infty$;

3) вложение $H_1^\omega(G) \subset H_H^\eta(G)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k \le C\eta_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Используя лемму 3, неравенство А. В. Ефимова (4) и неравенство Йенсена, получаем:

$$\|f - S_{m_n}(f)\|_H \le C_1 \left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_k(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \le C_1 \left\| \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_k(f)| \right\|_1 \le$$

$$\le C_1 \sum_{k=n}^{\infty} \|S_{m_{k+1}}(f) - f + f - S_{m_k}(f)\|_1 \le$$

$$\le 4C_1 \sum_{k=n}^{\infty} E_{m_k}(f)_1 \le C_2 \left(E_{m_n}(f)_1 + \sum_{k=m_n+1}^{\infty} k^{-1} E_k(f)_1 \right). \tag{9}$$

т. е. в силу неравенства А. В. Ефимова (4) утверждение 1) доказано при $j = m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Используя (9), лемму 4, лемму 2 и оценку $\|S_{m_n}(f)\|_1 \le \|f\|_1$ для $f \in L^1(G)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ (она вытекает из (3) и леммы 1), находим, что при $j \in (m_n, m_{n+1}]$

$$E_j(f)_H \le E_j(S_{m_{n+1}}(f))_H + \|f - S_{m_{n+1}}\|_H \le \inf_{q \in \mathscr{P}_j} \|\Delta_n(f - q)\|_1 +$$

$$+ C_2 \left(E_{m_{n+1}}(f)_1 + \sum_{k=m_{n+1}+1}^{\infty} k^{-1} E_k(f)_1 \right) \le C_3 \left(E_j(f)_1 + \sum_{k=j+1}^{\infty} k^{-1} E_k(f)_1 \right),$$

утверждение 1) доказано. Используя промежуточное неравенство из (9) и (4), имеем: $\omega_n(f)_H \le \le C_4 \sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k(f)_1$, $n \in \mathbb{N}$. Из последнего неравенства вытекает достаточность условий $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k < \infty$ и $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k \le C\eta_n$, $n \in \mathbb{N}$, в 2) и 3) соответственно. Покажем необходимость этих условий. Пусть $g(x) = c_{n+1}$ на $G_n \setminus G_{n+1}$, где $c_{n+1} = m_n(\omega_{n-1} - \omega_n) + c_n$, $c_0 = c_1 = 0$, т. е. $c_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(\omega_{k-1} - \omega_k)$, $n \in \mathbb{N}$. По определению g

$$\int_G |g(x)|\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |g(x)|\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(m_n^{-1} - m_{n+1}^{-1}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1} - c_n) m_n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_{n-1} - \omega_n) = \omega_0,$$

т. е. $f \in L^1(G)$. В самом деле, в силу преобразования Абеля

$$\sum_{n=0}^{M} c_{n+1}(m_n^{-1} - m_{n+1}^{-1}) = \sum_{n=0}^{M} (c_{n+1} - c_n) m_n^{-1} - c_{M+1} m_{M+1}^{-1}.$$

Последнее слагаемое правой части стремится к нулю по теореме Штольца, и можно перейти к пределу при $M \to \infty$.

Согласно [1, гл. 2, § 7, формула (1.6)] справедливо равенство

$$\omega_n(g)_1 = 2 \sup_{k \ge n} \sum_{s=k+1}^{\infty} |c_{s+1} - c_{k+1}|(m_s^{-1} - m_{s+1}^{-1}).$$

Так как у нас $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастает, то, меняя порядок суммирования, получаем:

$$\omega_n(g)_1 = 2 \sum_{s=n+1}^{\infty} (c_{s+1} - c_{n+1})(m_s^{-1} - m_{s+1}^{-1}) = 2 \sum_{s=n+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{s} m_k(\omega_{k-1} - \omega_k)(m_s^{-1} - m_{s+1}^{-1}) =$$

$$= 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{s=k}^{\infty} (m_s^{-1} - m_{s+1}^{-1}) m_k (\omega_{k-1} - \omega_k) = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} (\omega_{k-1} - \omega_k) = 2\omega_n.$$

Таким образом, $g \in H_1^{\omega}(G)$. Далее, оценим

$$\|g - S_{m_n}(g)\|_H \geq \int_{G_n} M(g - S_{m_n}(g))(x)\, d\mu(x) \geq$$

$$\geq \int_{G_n} M(g)(x)\, d\mu(x) - \geq \int_{G_n} M(S_{m_n}(g))(x))\, d\mu(x). \tag{10}$$

В силу формулы (5) и возрастания последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ для $x \in G_n$ верно равенство

$$M(S_{m_n}(g))(x) = \sup_{0 \leq l \leq n} S_{m_l}(g)(x) = S_{m_n}(g)(x).$$

Используя лемму 1 и понятие свертки на группе, легко установить, что $S_{m_n}(f)(x)$ равно $m_n \int_{G_n(x)} f(t)\, d\mu(t)$ при $f \in L^1(G)$, т. е. $\int_{G_n} g(t)\, d\mu(t) = \int_{G_n} S_{m_n}(g)(t)\, d\mu(t)$.

Также в силу возрастания $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ для $x \in G_j \setminus G_{j+1}$ справедливо равенство

$$M(g)(x) = m_j \int_{G_j} g(t)\, d\mu(t) = m_j \sum_{k=j}^{\infty} c_{k+1} (m_k^{-1} - m_{k+1}^{-1}).$$

В силу (10), (4) и последнего равенства находим, что

$$\omega_n(g)_H \geq \|g - S_{m_n}(g)\|_H \geq \sum_{j=n}^{\infty} \int_{G_j \setminus G_{j+1}} (M(g)(x) - g(x))\, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} m_j (m_j^{-1} - m_{j+1}^{-1}) \sum_{k=j}^{\infty} (c_{k+1} - c_{j+1})(m_k^{-1} - m_{k+1}^{-1}) \geq$$

$$\geq 2^{-1} \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} (c_{k+1} - c_{j+1})(m_k^{-1} - m_{k+1}^{-1}) \geq 4^{-1} \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} (c_{k+1} - c_{j+1}) m_k^{-1} \geq$$

$$\geq 4^{-1} \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} (\omega_{k-1} - \omega_k) = 4^{-1} \sum_{j=n}^{\infty} \omega_j. \tag{11}$$

В конце выкладок использовано неравенство $c_{k+1} - c_{j+1} \geq c_{k+1} - c_k = m_k(\omega_{k-1} - \omega_k)$. Возвращаясь к доказательству пунктов 2) и 3), отметим что при $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \omega_j = \infty$ из (11) выводим $g \notin H^1(G)$, а при $\sum\limits_{j=n}^{\infty} \omega_j \neq O(\eta_n)$ получаем противоречие между (11) и предположением $g \in H_H^{\eta}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $f \in VMO(G)$ и $\omega = \{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\eta = \{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ — убывающие к нулю последовательности. Тогда*

1) если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1} E_k(f)_{BMO}$, то f эквивалентна $f_0 \in C(G)$ и справедливо неравенство

$$E_j(f_0)_{\infty} \leq C \left(E_j(f)_{BMO} + \sum_{k=j+1}^{\infty} k^{-1} E_k(f)_{BMO} \right), \qquad j \in \mathbb{N};$$

2) вложение $H_{VMO}^{\omega}(G) \subset C(G)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k < \infty$;

3) вложение $H_{VMO}^{\omega}(G) \subset H_C^{\eta}(G)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k \leq C\eta_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. По леммам 4 и 2, а также неравенству (3) и лемме 1 аналогично доказательству теоремы 1 при $j \in (m_n, m_{n+1}]$ получаем:

$$E_j(f_0)_{\infty} \leq \|f - S_{m_{n+1}}(f_0)\|_{\infty} + \inf_{q \in P_j} \|\Delta_n(f_0 - q)\|_{\infty} \leq N \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\Delta_k(f)\|_{BMO} +$$

$$+N\inf_{q\in P_j}\|\Delta_n(f-q)\|_{BMO}\le C_1\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}E_{m_k}(f)_{BMO}+E_j(f)_{BMO}\right)\le$$
$$\le C_2\left(E_j(f)_{BMO}+\sum_{k=j+1}^{\infty}k^{-1}E_k(f)_{BMO}\right).$$

Существование $f_0\in C(G)$ доказывается аналогично. При $j=m_{n+1}$ получаем неравенство $E_{m_{n+1}}(f_0)_\infty\le 2C_1\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}E_{m_k}(f)_{BMO}$, из которого с помощью (4) следует достаточность условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k<\infty$ в 2) и $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\omega_k\le C\eta_n$ в 3). Для доказательства необходимости этих условий рассмотрим функцию $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k(x)$, где $g_k(x)=m_k^{-1}\omega_k(D_{m_{k+1}}(x)-D_{m_k}(x))$. Тогда

$$g(x)-S_{m_n}(g)(x)=\sum_{k=n}^{\infty}m_k^{-1}\omega_k(D_{m_{k+1}}(x)-D_{m_k}(x)) \tag{12}$$

и при $x\notin G_n$ и $k\ge n$ в силу леммы 1 верно $D_{m_{k+1}}(x)-D_{m_k}(x)=0$, т. е. $g(x)-S_{m_n}(g)(x)=0$. Поэтому для $G_i(x)$, не содержащих G_n, имеем: $\int_{G_i(x)}|g(x)-S_{m_n}(g)(x)-S_{m_j}(g-S_{m_n}(g))(x)|\,d\mu(x)=0$, а для $G_i(x)$, содержащих G_n, такой же интеграл равен интегралу по одному из G_j, $j\ge n$. Следовательно, в силу (5), (12) и леммы 1

$$\|g-S_{m_n}(g)\|_{BMO}=\sup_{j\ge n}m_j\int_{G_j}|g(x)-S_{m_n}(g)(x)-S_{m_j}(g-S_{m_n}(g))(x)|\,d\mu(x)=$$
$$=\sup_{j\ge n}m_j\int_{G_j}|g(x)-S_{m_j}(g)(x)|\,d\mu(x)\le\sup_{j\ge n}m_j\sum_{k=j}^{\infty}m_k^{-1}2\omega_k\le$$
$$\le C_3\omega_n\sup_{j\ge n}m_jm_j^{-1}=C_3\omega_n,\qquad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{13}$$

Благодаря (4) и (13) получаем $g\in H^{\omega}_{VMO}(G)$. С другой стороны, по лемме 1 верно $g_k(0)==m_k^{-1}(m_{k+1}-m_k)\omega_k\ge\omega_k$. Поэтому $\omega_n(f)_\infty\ge\|g-S_{m_n}(g)\|_\infty\ge\sum\limits_{k=n}^{\infty}\omega_k$, откуда аналогично теореме 1 легко вытекает необходимость в 2) и 3). Теорема доказана.

Замечание. Вложения в 2) и 3) понимаются как принадлежность эквивалентных функций соответствующим пространствам непрерывных функций.

Теорема 3. *1. Пусть $f\in L^1(G)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k(f)_1<\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\|_H=0$.*

2. Пусть $f\in VMO(G)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k(f)_{BMO}<\infty$. Тогда f эквивалентна $f_0\in C(G)$ и справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_0-S_n(f_0)\|_\infty=0$.

Доказательство. 1. Так как в условиях пункта 1) теоремы 3 по теореме 1 имеем $f\in H^1(G)$ и, как следствие, $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-S_{m_n}(f)\|_H=0$, то докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_j(f)-S_{m_{n+1}}(f)\|_H=0$ равномерно по $j\in[m_n,m_{n+1})\cap\mathbb{Z}$. Отметим, что в силу (3), лемм 1, 2 и (4) верно неравенство

$$\|S_j(f)-S_{m_{n+1}}(f)\|_H=\|\Delta_n(f-f*D_j)\|_H\le\|\Delta_n(f)\|_H+\|\Delta_n(f*D_j)\|_H\le$$
$$\le\|\Delta_n(f)\|_1+\|\Delta_n(f)\|_1\|D_j\|_1\le C_1\ln(j+1)\|\Delta_n(f)\|_1\le C_2(n+1)\omega_n(f)_1. \tag{14}$$

Но $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k(f)_1$ сходится и $\{\omega_k(f)_1\}_{k=0}^{\infty}$ убывает, поэтому $\omega_k(f)_1=o(k^{-1})$, $k\to\infty$, и правая часть (14) стремится к нулю, откуда следует сходимость $S_j(f)$ в $H^1(G)$.

2. Доказывается аналогично 1) с использованием теоремы 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.
2. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh series. An introduction to dyadic analysis. Budapest : Akademiai Kiado, 1990. 560 c.
3. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.
4. *Ульянов П. Л.* Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Матем. сб. 1967. Т. 72, № 2. С. 193–225.
5. *Геронимус Я. Л.* О некоторых свойствах функций класса L^p // Изв. вузов. Матем. 1958. № 1. С. 24–32.
6. *Андриенко В. А.* Вложение некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31, № 6. С. 1311–1326.
7. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.
8. *Голубов Б. И.* Наилучшие приближения функций в метрике L_p полиномами Хаара и Уолша // Матем. сб. 1972. Т. 87, № 2. С. 254–274.
9. *Тиман М. Ф., Рубинштейн А. И.* О вложении классов функций, определенных на нуль-мерных группах // Изв. вузов. Матем. 1980. № 6. С. 66–76.
10. *Fridli S.* Embedding theorems involving dyadic Hardy and VMO spaces // Approximation theory (Kecskemet, 1990). P. 287–301; Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. Vol. 58. North-Holland, Amsterdam, 1991.
11. *Weisz F.* Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis // Lecture Notes in Math. Vol. 1568. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1994. 228 p.

Embedding Theorems for $\mathbf{P}$-nary Hardy and VMO Spaces

S. S. Volosivets

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, VolosivetsSS@mail.ru

In the present paper several embedding theorems of P. L. Ul'yanov type for Hölder spaces connected with $\mathbf{P}$-nary Hardy, VMO, L^1 and uniform metric on Vilenkin groups are proved. Its sharpness is also established. The sufficient conditions for the convergence of Fourier series with respect to multiplicative systems in Hardy space and uniform metric are also given.

Key words: $\mathbf{P}$-nary Hardy space, $\mathbf{P}$-nary VMO space, embedding theorems, sharpness, uniform convergence.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00238).

References

1. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzhafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funkcii i garmonicheskii analiz na nul'-mernyh gruppah* [Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups]. Baku, Elm, 1980 (in Russian).
2. Schipp F., Wade W. R., Simon P. *Walsh series. An introduction to dyadic analysis*. Budapest, Akademiai Kiado, 1990.
3. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh series and transforms. Theory and applications.* Dordrecht, Kluwer, 1991.
4. Ul'janov P. L. Absolute and uniform convergence of Fourier series. *Math. USSR-Sb.*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 169–197. DOI: 10.1070/SM1967v001n02ABEH001973.
5. Geronimus Ya. L. Some properties of functions of class L^p. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1958, no. 1, pp. 24–32 (in Russian).
6. Andrienko V. A. The imbedding of certain classes of functions. *Math. USSR-Izv.*, 1967, vol. 1, no. 6, pp. 1255–1270. DOI: 10.1070/IM1967v001n06ABEH000614.
7. Ul'janov P. L. The imbedding of certain function classes H_p^ω. *Math. USSR-Izv.*, 1968, vol. 2, no. 3, pp. 601–637. DOI: 10.1070/IM1968v002n03ABEH000650
8. Golubov B. I. Best approximations of functions in the L_p metric by Haar and Walsh polynomials. *Math. USSR-Sb.*, 1972, vol. 16, no. 2, pp. 265–285. DOI: 10.1070/SM1972v016n02ABEH001425.
9. Timan M. F., Rubinshtejn A. I. On imbedding of classes of functions, defined in zero-dimensional groups. *Soviet Math.*, 1980, vol. 24, no. 8, pp. 74–85.
10. Fridli S. Embedding theorems involving dyadic Hardy and VMO spaces. *Approximation theory (Kecskemet, 1990)*, pp. 287–301, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, vol. 58, North-Holland, Amsterdam, 1991.
11. Weisz F. Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis. *Lecture Notes in Math.*, vol. 1568. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1994, 228 p.

УДК 517.518.826, 519.65

О МОДИФИКАЦИИ АЛГОРИТМА ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ТИПА РАВЕНСТВА

И. Ю. Выгодчикова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, VigodchikovaIY@info.sgu.ru

Рассматривается дискретная задача аппроксимации зашумлённых данных алгебраическим полиномом с ограничением типа равенства. Цель исследования — получение свойств решения задачи и разработка на их основе нового, более эффективного, по сравнению с существующими приёмами решения, алгоритма. Задачи исследования — получение свойств решения задачи, изложение алгоритма и демонстрация его реализации. Методика исследования продолжает аппарат П. Л. Чебышёва и алгоритмизацию Валле-Пуссена. Получен критерий оптимальности решения, являющийся модификацией известного в теории приближений альтернанса П. Л. Чебышёва. Разработан рациональный алгоритм решения по аналогии с алгоритмом Валле-Пуссена. Рассматриваемая задача может применяться для оценки шумовых явлений при аппроксимации сложных хаотических процессов.

Ключевые слова: минимакс, многозначное отображение, аппроксимирующий полином, свойства решения, вычислительный алгоритм.

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее последовательно результаты вклада в проблему минимакса основоположника теории приближений и прикладной математики П. Л. Чебышёва собраны в работах В. Ф. Демьянова и его последователей. Рассмотрим новые методы решения минимаксных задач приближения многозначных отображений с сегментными образами алгебраическими полиномами фиксированной степени с ограничением типа равенства на базе обобщения алгоритмизации Валле-Пуссена для безусловной дискретной задачи Чебышёва.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $n \geqslant 0$ (степень алгебраического полинома), $N \geqslant n+1$, $T = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N\}$, $\nu \in \mathbb{R}$.

Кроме того, считаем, что на множестве T определено многозначное отображение $\Phi(\cdot)$ с сегментными образами: $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \geq y_{1,k}$, $k = \overline{0,N}$.

Введём обозначение $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ для алгебраического полинома степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть $t_s \in T$. Положим $D = \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : p_n(A,t_s) = \nu\}$. Обозначим

$$f_i(A,t_k) = (-1)^i (y_{i,k} - p_n(A,t_k)), \qquad i = 1,2, \qquad k = \overline{0,N},$$
$$f(A,t_k) = \max\{f_1(A,t_k), f_2(A,t_k)\}, \qquad k = \overline{0,N}.$$

Рассмотрим задачу

$$\rho(A) = \max_{k=\overline{0,N}} f(A,t_k) \to \min_{A \in D}. \tag{1}$$

Обозначим $\rho^{**} = \min\limits_{A \in D} \rho(A)$, $\mathfrak{R}^D = \{A \in D : \rho(A) = \rho^{**}\}$. Сформулируем задачу без ограничений (см., напр., [1]):

$$\rho(A) = \max_{k=\overline{0,N}} f(A,t_k) \to \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}, \tag{2}$$

Положим $\rho^* = \min\limits_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$, $\mathfrak{R} = \{A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^*\}$.

Задачу (1) несложно свести к задаче линейного программирования (как и задачу (2), по аналогии с [2, с. 302]), однако объём вычислений при этом существенно возрастает с ростом узлов дискретной сетки. Проблемы могут возникнуть и с нахождением начального базисного плана, поэтому решать подобные задачи традиционным симплекс-методом нецелесообразно. Для решения оптимизационных задач в прикладных программах используются методы регуляризации, которые позволяют с заданной точностью найти решение, однако не дают ответа на вопрос о его однозначности. Кроме того, погрешность вычислений зависит от начального приближения, а ответить на вопрос, насколько точным получился результат, без изучения его свойств невозможно [3].

Как уже было отмечено, методы регуляризации не позволяют найти всех решений или даже сделать вывод о наличии ситуации неединственности.

Альтернативный предлагаемый ниже метод основан на новых свойствах решения задачи, которые позволят не только установить, получено ли верное решение, но также указать, будет ли оно единственным. На основе этих свойств и известного алгоритма Валле-Пуссена разработан рациональный алгоритм со значительно меньшим объёмом вычислений на каждом шаге, поскольку в расчётах используется всего одна вспомогательная переменная.

2. КРИТЕРИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Доказано, что задачи (1) и (2) имеют решение (см., напр., [1, 4]). Будем считать, что $\Re \cap D = \varnothing$. В таком случае имеем:

$$\rho(A) > \rho^* \geqslant m = \max_{k=\overline{0,N}} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}, \qquad \forall A \in \Re^D. \tag{3}$$

Не сложно показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $n \geqslant 1$, $x_0 < \ldots < x_{n+1}$, $A \neq 0_{n+1}$, $p_n(A, x_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$, *существуют* $l \in \overline{1, n+1}$ *и* $z_l \in (x_{l-1}; x_l)$ *такие, что* $(-1)^l p_n(A, z_l) < 0$. *Тогда* $(-1)^i p_n(A, x) < 0$ *при любом* $x \in (x_{i-1}; x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$.

Частичным базисом назовём такое множество $\sigma = \{t_{j_0} < \ldots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$, что существует $r \in \overline{0, n+1}$, для которого $t_{j_r} = t_s$, множество всех частичных базисов обозначим через Ω.

Определим на каждом частичном базисе функции $\varphi_0(\sigma, \cdot)$ и $\varphi_1(\sigma, \cdot)$, присвоив им следующие значения:

$\varphi_0(\sigma, t_{j_k}) = y_{2,\, j_k}$, $k = \overline{0, n+1}$, k — четно, $k \neq r$;
$\varphi_0(\sigma, t_{j_k}) = y_{1,\, j_k}$, $k = \overline{0, n+1}$, k — нечетно, $k \neq r$;
$\varphi_1(\sigma, t_{j_k}) = y_{1,\, j_k}$, $k = \overline{0, n+1}$, k — четно, $k \neq r$;
$\varphi_1(\sigma, t_{j_k}) = y_{2,\, j_k}$, $k = \overline{0, n+1}$, k — нечетно, $k \neq r$;
$\varphi_i(\sigma, t_{j_r}) = \nu$.

Наряду с (1) рассмотрим на каждом частичном базисе вспомогательные задачи:

$$\rho_i(A, \sigma) = \max_{k=\overline{0,n+1}} |\varphi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(A, t_{j_k})| \to \min_{A \in D}, \qquad i \in \{0, 1\}. \tag{4}$$

Каждая из задач (4) (для $i = 0$ или $i = 1$) может рассматриваться как частный случай задачи (1) для многозначного отображения (м. о.), образами которого в узлах базиса являются значения соответствующей функции φ_i.

Обозначим $\theta = \max\{y_{2,s} - \nu, \nu - y_{1,s}\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\Re \cap D = \varnothing$. *Вектор* $A^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ *является решением задачи* (1) *тогда и только тогда, когда*

$$p_n(A^*, t_{j_r}) = \nu \tag{5}$$

и выполняется хотя бы одно из условий:

(I) $\rho(A^*) = \theta$*;*

(II) для некоторого частичного базиса выполняются равенства:

$$\varphi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(A^*, t_{j_k}) = (-1)^{k+i} h_i(\sigma), \qquad k = \overline{0, n+1} \setminus \{r\}, \tag{6}$$

и при этом $\rho(A^*) = h_i(\sigma)$.

Замечание. Систему равенств (6) можно охарактеризовать термином «прерванный альтернанс».

Доказательство. *Необходимость.* 1. При $n = 0$ утверждение очевидно, считаем $n \geqslant 1$. Пусть $A^* \in \Re^D$ и условие (I) не выполняется. Тогда

$$\rho(A^*) > \theta. \tag{7}$$

Рассмотрим множество $S := \{t_k \in T \backslash \{t_s\} : f(A^*, t_k) = \rho(A^*)\}$. Из (7) вытекает, что $S \neq \varnothing$. Ввиду (3) $f_1(A^*, t) \neq f_2(A^*, t)$ для любого $t \in S$ [1].

Будем говорить, что в точке $t \in S$ *действует* функция f_j, если $f(A^*, t) = f_j(A^*, t)$. Разобьем множество S на следующие друг за другом непересекающиеся подмножества $\{S_i\}_{i=1}^{w}$, на каждом из которых действует только одна из функций $f_1(f_2)$.

Если допустить, что $w > n+1$, то получим условие, из которого вытекает, что $A^* \in \mathfrak{R}$ (см., напр., [1]). Последнее противоречит предположению $\mathfrak{R} \cap D = \varnothing$. Следовательно,

$$w \leqslant n+1. \tag{8}$$

2. Пусть $\overline{\theta}_i = \max\limits_{t \in S_i} t$, $\underline{\theta}_i = \min\limits_{t \in S_i} t$, $i = \overline{1, w}$. Покажем, что не существует индекса $l \in \overline{1, w-1}$ такого, что

$$\overline{\theta}_l < t_s < \underline{\theta}_{l+1}. \tag{9}$$

Допустим, (9) выполняется. Для определенности считаем, что на множестве S_l действует функция f_1.

Возьмем $x_i \in (\overline{\theta}_i; \underline{\theta}_{i+1})$, $i = \overline{1, l-1} \cup \overline{l+1, w-1}$, $x_l = t_s$, и, если $w < n+1$, возьмём ещё $n+1-w$ различных между собой точек x_i так, чтобы $x_i > t_N$, $i = \overline{w, n}$.

Из леммы вытекает, что для вектора A^ε, определяемого равенствами

$$\begin{gathered} p_n(A^\varepsilon, x_i) = p_n(A^*, x_i), \qquad i = \overline{1, n}, \\ p_n(A^\varepsilon, \overline{\theta}_l) = p_n(A^*, \overline{\theta}_l) - \varepsilon, \end{gathered}$$

выполняется

$$\rho(A^\varepsilon) < \rho(A^*), \tag{10}$$

противоречащее оптимальности A^*.

3. Пусть $\underline{\theta}_l < t_s < \overline{\theta}_l$, при этом в точках множества S_l действует функция f_2.

Если $w = n+1$, выбираем по одной точке из каждого множества разбиения, включаем t_s и тем самым получаем (II).

Ввиду (8) осталось рассмотреть случай $w < n+1$. Возьмем $x_i \in (\overline{\theta}_i; \underline{\theta}_{i+1})$, $i = \overline{1, l-1}$, $x_l \in (\overline{\theta}_l; t_s)$, $x_{r+1} \in (t_s; \underline{\theta}_{r+1})$, $x_{i+1} \in (\overline{\theta}_i; \underline{\theta}_{i+1})$ $i = \overline{l+1, w-1}$, и, если $w < n$, возьмём ещё $n-w$ различных между собой точек x_i так, чтобы $x_i > t_N$, $i = \overline{w+1, n}$.

Фиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и решаем относительно A^ε систему

$$\begin{gathered} p_n(A^\varepsilon, x_i) = p_n(A^*, x_i), \qquad i = \overline{1, n}, \\ p_n(A^\varepsilon, t_s) = p_n(A^*, t_s) - \varepsilon. \end{gathered}$$

Применяя лемму, приходим к (10), которое противоречит оптимальности A^*.

Проводим аналогичные рассуждения для случая, если в точках множества S_l действует функция f_1. Случаи $t_s < \underline{\theta}_1$ или $t_s > \overline{\theta}_w$ рассматриваются аналогично.

Достаточность. Имеем $\mathfrak{R} \cap D = \varnothing$ и выполняется (5).

1. Пусть справедливо условие (I) теоремы. Тогда для любого A, удовлетворяющего равенству $p_n(A, t_s) = \nu$, имеем:

$$\rho(A) \geqslant f(A, t_s) = \theta = \rho(A^*),$$

что свидетельствует об оптимальности A^*.

2. Пусть справедливо условие (II) теоремы. Обозначим $\Delta := \{t_{q_0} < \ldots < t_{q_n}\} \subset \{t_{j_0} < \ldots < t_{j_{n+1}}\} \backslash \{t_s\}$. Рассмотрим сначала случай $t_{q_0} < t_s < t_{q_n}$. Тогда найдется l такое, что $t_{q_l} < t_s < t_{q_{l+1}}$, причем в точках t_{q_l} и $t_{q_{l+1}}$ действует функция f_2 или f_1 (для определённости пусть f_2).

Допустим, что

$$A^{**} \in \mathfrak{R}(\nu), \qquad A^{**} \neq A^*. \tag{11}$$

Тогда $p_n(A^{**}, t_s) = \nu$, откуда, учитывая (5), получаем:

$$p_n(A^{**} - A^*, t_s) = 0. \tag{12}$$

Если в точке t_{q_g} действует функция f_1, то $p_n(A^{**}, t_{q_g}) < p_n(A^*, t_{q_g})$, если же в точке t_{q_g} действует f_2, то $p_n(A^{**}, t_{q_g}) > p_n(A^*, t_{q_g})$.

Тогда ввиду (II), $p_n(A^{**} - A^*, t)$ обращается в 0 на каждом интервале $(t_{q_g}; t_{q_{g+1}})$, $g = \overline{0, l-1}$, $g = \overline{l+1, n-1}$.

Отсюда и из (12) вытекает, что полином $p_n(A^{**} - A^*, t)$ имеет n нулей. Следовательно, полином $\frac{d}{dt} p_n(A^* - A^{**}, t)$ имеет $n-1$ нулей в точках, отличных от t_s.

3. Ввиду рассуждений, приведённых выше (п. 2 доказательства достаточности) и (12), на интервале $(t_{q_l}; t_{q_{l+1}})$ полином $p_n(A^{**} - A^*, t)$ имеет нулевое значение лишь при $t = t_s$, в остальных точках значение полинома положительно, как и в точках t_{q_l} и $t_{q_{l+1}}$, где действует функция f_2.

Следовательно, в точке t_s этот полином достигает локального минимума, поэтому $\frac{d}{dt} p_n(A^* - A^{**}, t_s) = 0$. Учитывая выводы, сделанные выше (п. 2 доказательства достаточности), получаем, что полином $\frac{d}{dt} p_n(A^* - A^{**}, t)$ имеет n нулей, то есть является константой. что противоречит (11).

4. При $t_s < t_{q_0}$ или $t_s > t_{q_n}$ из (12), (II) вытекает, что полином $p_n(A^{**} - A^*, t)$ имеет $n+1$ нулей, что невозможно ввиду предположения (11). Теорема доказана.

3. МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БАЗИСА

Разработаем правила, согласно которым, по аналогии с алгоритмом Валле-Пуссена [5, с. 26] можно переходить к новому частичному базису путём замены одной точки так, что значение целевой функции текущей базисной подзадачи увеличивается, приведя в итоге за конечное число шагов к решению задачи, удовлетворяющему условию (II) теоремы 1. Если же такой переход на каком-то шаге окажется невозможным ввиду предположения об отсутствии среди решений задачи (2) решений задачи (1), будет получен вывод о выполнении условия (I) теоремы 1 и неединственности решения задачи (1).

Применим к (4) теорему 1.

Теорема 2. *Решение задачи* (4) *единственно,* $i = 0$ *или* $i = 1$. *Вектор* $A^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ *является решением задачи* (4) *тогда и только тогда, когда выполняется* (5) *и равенства:*

$$\varphi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(A^*, t_{j_k}) = (-1)^{k+i} h_i(\sigma), \qquad k = \overline{0, n+1} \setminus \{r\}, \tag{13}$$

при этом $\rho_i(A^*, \sigma) = h_i(\sigma)$.

Приведём факт, доказанный в [6].

Теорема 3. *Пусть решение задачи* (4) *единственно,* $h \geqslant 0$, $w > 0$, $v \in \overline{0, n+1} \setminus \{r\}$. *Если для некоторого* $\widetilde{A} \in D$ *выполняются соотношения:*

$$\varphi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(\widetilde{A}, t_{j_k}) = (-1)^{k+i} h, \qquad k = \overline{0, n+1} \setminus \{\{r\} \cup \{v\}\},$$
$$\varphi_i(\sigma, t_{j_v}) - p_n(\widetilde{A}, t_{j_v}) = (-1)^{v+i}(h + w), \qquad p_n(\widetilde{A}, t_{j_r}) = y_s,$$

то $h_i(\sigma)$ *из* (5), (13) *удовлетворяет неравенству* $h_i(\sigma) > h$.

В [4, 6] рассмотрены некоторые элементы алгоритмизации, обобщим и продолжим рассуждения. Приведём монотонный алгоритм, позволяющий отыскать решение задачи (1), удовлетворяющее условию (II) теоремы 1 или сделать вывод о его неединственности.

Как и прежде, считаем $\mathfrak{R} \cap D = \varnothing$, то есть используем предположение об отсутствии среди решений задачи (2) решений задачи (1).

Приведём описание шагов *алгоритма*.

Начальный шаг. Выберем произвольно $\sigma \in \Omega$.

Решение базисных задач. Положим $\beta = 0$, если $h_0(\sigma) \geqslant h_1(\sigma)$, и $\beta = 1$ в противном случае. Пусть $\widetilde{A}$ — решение системы (5), (13) при $i = \beta$. По теореме 2 имеем $\rho^*_\beta(\sigma) = \rho_\beta(\widetilde{A}, \sigma) = h_\beta(\sigma)$.

Анализ текущего вектора на оптимальность. Проверяем условие:

$$\rho(\widetilde{A}) = \rho^*_\beta(\sigma). \tag{14}$$

Если (14) выполнено, алгоритм завершается, и решение задачи (1) совпадает с решением задачи (4) на текущем частичном базисе при $i = \beta$.

Если это не так, ищем $k_0 \in \overline{0, N}$: $t_{k_0} \notin \sigma$,

$$f(\widetilde{A}, t_{k_0}) = \max_{t_k \in \{T \setminus \sigma\}} f(\widetilde{A}, t_k), \qquad f(\widetilde{A}, t_{k_0}) > h_\beta(\sigma).$$

Если такого k_0 не найдено, алгоритм заканчиваем с выводом о неединственности решения задачи (1). Иначе продолжаем рассуждения.

Анализ вариантов перехода к новому базису. Возможны следующие варианты расположения точки t_{k_0} относительно узлов текущего частичного базиса.

1. $t_{j_0} < t_{k_0} < t_{j_{n+1}}$.

1.1. Существует $v \neq r$ такое, что $t_{j_v} < t_{k_0} < t_{j_{v+1}}$. Полагаем $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{0, n+1}$, $l \neq v$, $l \neq v+1$, $\overline{\beta} := \beta$.

1.1.1. Если для $i \in \{0, 1\}$ справедливы:

$$h_\beta(\sigma) = (-1)^i (p_n(\widetilde{A}, t_{j_v}) - y_{1+i, j_v}), \qquad f(\widetilde{A}, t_{k_0}) = (-1)^i (p_n(\widetilde{A}, t_{k_0}) - y_{1+i, k_0}), \tag{15}$$

то осуществляем присвоение: $\overline{j}_v := k_0$, $\overline{j}_{v+1} := j_{v+1}$.

1.1.2. Если (15) не выполняются, то $\overline{j}_v := j_v$, $\overline{j}_{v+1} := k_0$.

1.2. $v = 1, r = 0$ и $t_{j_0} < t_{k_0} < t_{j_1}$. Полагаем $\overline{j}_0 := j_r$, $\overline{j}_1 := k_0$.

1.2.1. Если выполняются равенства (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = 1$, берём $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{2, n+1}$, $\overline{\beta} := \beta$.

1.2.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_l := j_{l-1}$, $l = \overline{2, n+1}$, $\overline{\beta} := 1 - \beta$.

1.3. $v = n, r = n+1$ и $t_{j_n} < t_{k_0} < t_{j_{n+1}}$. Полагаем $\overline{j}_{n+1} := j_r$, $\overline{j}_n := k_0$.

1.3.1. Если выполняются равенства (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = n$, берём $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{0, n-1}$, $\overline{\beta} := \beta$.

1.3.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_l := j_{l+1}$, $l = \overline{0, n-1}$, $\overline{\beta} := 1 - \beta$.

2. $t_{k_0} < t_{j_0}$.

2.1. $r = 0$. Полагаем $\overline{j}_0 := k_0$, $\overline{j}_1 := j_r$.

2.1.1. Если выполняются (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = 1$, берём $\overline{j}_l := j_{l-1}$, $l = \overline{2, n+1}$ и $\overline{\beta} := 1 - \beta$.

2.1.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{2, n+1}$ и $\overline{\beta} := \beta$.

2.2. $0 < r \leqslant n+1$.

2.2.1. Если выполняются (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = 0$, берём $\overline{j}_0 := k_0$, $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{1, n+1}$ и $\overline{\beta} := \beta$.

2.2.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_0 := k_0$, $\overline{j}_l := j_{l-1}$, $l = \overline{1, n}$, $\overline{\beta} := 1 - \beta$; $\overline{j}_{n+1} := j_r$, если $r = n+1$; $\overline{j}_{n+1} := j_n$, если $r < n+1$.

3. $t_{k_0} > t_{j_{n+1}}$.

3.1. $0 \leqslant r < n+1$.

3.1.1. Если выполняются (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = n+1$, берём $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{0, n}$, $\overline{j}_{n+1} := k_0$ и $\overline{\beta} := \beta$.

3.1.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_0 := j_r$, если $r = 0$; $\overline{j}_0 := j_1$, если $r > 0$; $\overline{j}_l := j_{l+1}$, $l = \overline{1, n}$, $\overline{j}_{n+1} := k_0$; $\overline{\beta} := 1 - \beta$.

3.2. $r = n+1$.

3.2.1. Полагаем $\overline{j}_n := j_r$, $\overline{j}_{n+1} := k_0$. Если выполняются (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = n$, берём $\overline{j}_l := j_{l+1}$, $l = \overline{0, n-1}$ и $\overline{\beta} := 1 - \beta$.

3.2.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{0, n-1}$ и $\overline{\beta} := \beta$.

Условие монотонности $h_{\overline{\beta}}(\overline{\sigma}) > h_\beta(\sigma)$ при наличии единственности, приводящее к получению решения задачи (1), вытекает из теоремы 3 — достаточно положить $h := h_\beta(\sigma)$ и переобозначить $\sigma := \overline{\sigma}$. После смены базиса возвращаемся к шагу алгоритма, на котором производится решение базисных задач. Перебор базисов заканчивается с выполнением (14).

Пример. Пусть $T = \{0 < 0.5 < 1 < 2 < 3\}$, $\Phi(0) = [0; 0]$, $\Phi(0.5) = [0.5; 4]$, $\Phi(1) = [0; 4]$, $\Phi(2) = [5; 8]$, $\Phi(3) = [8; 8]$, $n = 1$, $s = 0$, $\nu = 1$.

Выбираем начальный базис $\sigma = \{0 < 0.5 < 1\}$. Находим решения задач (4) при $i = 0$: $p_1(t) = 1 + 5t/3$, $h_0 = 4/3$; при $i = 1$: $p_1(t) = 1 + 4t/3$, $h_1 = 7/3$. Следовательно, $\beta = 1$.

Вычисляем уклонение м. о. от полинома $p_1(t) = 1 + 4/3t$ на множестве $\{T \setminus \sigma\}$, оно достигается в точке $t_3 = 2$ и составляет $8 - (1 + 8/3) = 13/3$, поэтому $k_0 = 2$.

Следуя правилу преобразования базиса, исключаем из базиса элемент 0.5 и включаем элемент 2 (п. 3.1.2. алгоритма, $r = 0$).

На новом базисе $\sigma = \{0 < 1 < 2\}$ получаем решения задач (4) при $i = 0$: $p_1(t) = 1 + 2t$, $h_0 = 3$; при $i = 1$: $p_1(t) = 1 + t/3$, $h_1 = 8/3$, и определяем $\beta = 0$.

Вычисляем уклонение м. о. от полинома $p_1(t) = 1 + 2t$ на T, оно составляет 3 и совпадает с h_0.

Решение задачи (1) единственно, $p_1(t) = 1 + 2t$, удовлетворяет условию (II), $\rho^{**} = 3$.

Решением задачи (2) является $p_1(t) = 8t/3$, $\rho^{*} = 8/3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена дискретная задача наилучшего приближения многозначного отображения с сегментными образами алгебраическим полиномом при наличии ограничения типа равенства. Получен критерий оптимальности решения, разработан рациональный алгоритм решения, являющийся модификацией алгоритма Валле-Пуссена.Рассматриваемая задача может применяться для оценки шумовых явлений при аппроксимации сложных хаотических процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект №* 13-01-00175).

Библиографический список

1. *Выгодчикова И. Ю.* О единственности решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6, вып. 1, 2. С. 11–19.
2. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. М. : Наука, 1967. 460 с.
3. *Выгодчикова И. Ю.* О методе аппроксимации многозначного отображения алгебраическим полиномом // Вестн. СГТУ. Сер. Математика и механика. 2013. Вып. 2(70). С. 7–12.
4. *Выгодчикова И. Ю.* Об условной задаче наилучшего приближения сегментной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 12–15.
5. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1972. 368 с.
6. *Выгодчикова И. Ю.* О монотонном алгоритме решения задачи аппроксимации сегментной функции алгебраическим полиномом с ограничением // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 20–23.

About the Retrofit of the Valle'e-Poussin's Algorithm for Approximations of Multivalued Mappings by Algebraic Polynomial with Type Constraint Equality

I. Yu. Vygodchikova

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, VigodchikovaIY@info.sgu.ru

The discrete approximation of noisy data by algebraic polynomial with restriction of type equality is studied. The aim of the investigation is to obtain the fundamental properties of solution of the problem and development by them the new algorithm, more effective, in comparison with existing methods of the solution. The tasks of the research — gets the properties of the solution of the problem, presentation of the algorithm and the demonstration of its implementation. Research methodology continues P. L. Chebyshjov's and Valle-Pussen's method. Results. The criterion for optimality of the solution, which is a retrofit of the well-known in the theory of approximations of alternance P. L. Chebyshjov. Developed a rational algorithm, similar to the algorithm Vallee-Poussin. The conclusions. This problem has application to assess noise events at approximation to complex chaotic processes.

Key words: minimax, multivalued mapping, approximating polynomial, solutions's properties, computational algorithm.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00175).

References

1. Vygodchikova I. Yu. On the uniqueness of the solution of problems in the best approximation of multivalued mappings algebraic polynomial. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2006, vol. 6, iss. 1, pt. 2, pp. 11–19 (in Russian).
2. Zuhovickij S. I., Avdeeva L. I. Linejnoe i vypukloe programmirovanie [Linear and convex programming]. Moscow, Nauka, 1967, 460 p. (in Russian).
3. Vygodchikova I. Yu. O metode approksimacii mnogoznachnogo otobrazhenija algebraicheskim polinomom [On the method of approximation of multivalued display algebraic polynomial]. *Vestnic SSTU, Ser.: Math. Mech.*, 2013, iss. 2 (70), pp. 7–12 (in Russian).
4. Vygodchikova I. Yu. Ob uslovnoj zadache nailuchshego priblizhenija segmentnoj funkcii algebraicheskim polinomom [About conditional task best the segment approximation of functions by algebraic polynomial]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Sa-

ratov, Saratov Univ. Press, 2008, iss. 10, pp. 12–15 (in Russian).
5. Dem'janov V. F., Malozemov V. N. Vvedenie v minimaks [Introduction to minimax]. Moscow, Nauka, 1972, 368 p. (in Russian).
6. Vygodchikova I. Yu. O monotonnom algoritme reshenija zadachi approksimacii segmentnoj funkcii algebraicheskim polinomom s ogranicheniem [About the monotone algorithm for solving task segment approximation of functions by algebraic polynomial with restriction]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2012, iss. 14, pp. 20–23 (in Russian).

УДК 519.853.6

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕТОДОВ НАИСКОРЕЙШЕГО И ГИПОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКОВ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

М. В. Долгополик[1], Г. Ш. Тамасян[2]

[1]Аспирант кафедры математической теории моделирования систем управления, Санкт-Петербургский государственный университет, maxim.dolgopolik@gmail.com

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории моделирования систем управления, Санкт-Петербургский государственный университет, g.tamasyan@spbu.ru

В настоящее время при исследовании экстремальных задач с ограничениями широко используется метод точных штрафных функций. Указанный метод успешно применяется при решении ряда задач вариационного исчисления, теории управления, вычислительной геометрии и математической диагностики. В статье с помощью теории точных штрафных функций исследуются бесконечномерные экстремальные задачи с линейными ограничениями. Рассматриваются методы наискорейшего и гиподифференциального спусков для решения данных задач, их свойства и показывается, в каких случаях данные методы эквиваленты.

Ключевые слова: негладкий анализ, недифференцируемая оптимизация, точная штрафная функция, гиподифференциал, субдифференциал, метод гиподифференциального спуска, вариационное исчисление.

ВВЕДЕНИЕ

Существует множество разнообразных методов решения гладких и негладких задач условной оптимизации, в частности, модификация метода множителей Лагранжа и метод штрафных функций. В последнее время при исследовании экстремальных задач с ограничениями широко используется метод точных штрафных функций [1–6], который позволяет сводить задачи условной оптимизации к эквивалентным задачам безусловной оптимизации. Данный подход был успешно применен при решении задач вариационного исчисления, теории управления, вычислительной геометрии, математической диагностики [5, 7–12]. Отметим, что даже если исходная задача условной оптимизации является гладкой, построенная с помощью теории точных штрафных функций, эквивалентная задача безусловной оптимизации всегда является существенно негладкой [5, 6].

На сегодняшний день имеется хорошо разработанная теория негладкого анализа [13] и недифференцируемой оптимизации [14], с помощью которой можно исследовать и эффективно решать широкий круг негладких задач. Одними из центральных понятий данной теории являются понятия субдифференциала и субдифференцируемости [13–17]. С помощью субдифференциала можно проверять необходимые условия экстремума исследуемой функции, находить направления спуска, а также строить численные методы решения негладких оптимизационных задач. Отметим, что во многих задачах на условный экстремум построенная точная штрафная функция принадлежит к классу субдифференцируемых функций, который совпадает с классом гиподифференцируемых функций [5, 7, 8, 11]. Поэтому к данному классу задач можно применить методы наискорейшего и гиподифференциального спусков [13, 16, 18]. При этом оказывается, что в ряде задач данные методы совпадают, если начальная точка удовлетворяет ограничениям в рассматриваемой задаче [5, 8, 18].

Целью данной статьи является выделить общий класс задач, в котором методы наискорейшего и гиподифференциального спусков для минимизации штрафной функции в рассматриваемой задаче совпадают, а также исследовать некоторые общие свойства этих методов в контексте данного класса задач. Оказалось, что таким классом задач являются экстремальные задачи с линейными ограничениями.

В данной работе рассматриваются бесконечномерные экстремальные задачи с линейными ограничениями. Приводятся достаточные условия того, что штрафная функция в данных задачах является точной штрафной. Также подробно описываются методы наискорейшего и гиподифференциального спусков для минимизации штрафной функции и доказывается, что если начальная точка в данных методах удовлетворяет ограничениям, то методы совпадают. Указан метод нахождения начальной точки, удовлетворяющей ограничениям, основанный на методе гиподифференциального спуска. При некоторых дополнительных предположениях получена явная формула для направления наискорейшего спуска штрафной функции.

1. ТОЧНАЯ ШТРАФНАЯ ФУНКЦИЯ В ЗАДАЧАХ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Пусть X — пространство со скалярным произведением, функционал $f\colon X \to \mathbb{R}$ дифференцируем по Гато на X, $\ell_i\colon X \to \mathbb{R}$ — линейный непрерывный функционал на X, $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$. Будем предполагать, что для любого $x \in X$ существует градиент Гато $f'(x) \in X$ функционала f в точке x и существуют $\ell_i \in X$ такие, что

$$\ell_i(x) = \langle \ell_i, x \rangle \quad \forall\, x \in X,\ i \in I,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в X.

Замечание 1. *Если X является гильбертовым пространством, то существование градиента Гато $f'(x)$ и векторов $\ell_i \in X$ требовать не нужно, поскольку их существование вытекает из полноты пространства X.*

Введём множество допустимых планов:

$$\Omega = \{x \in X \mid \ell_i(x) = a_i \quad \forall\, i \in I\}.$$

Везде далее предполагается, что Ω не пусто. Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$f(x) \to \inf_{x \in \Omega}.$$

Мы будем решать данную задачу с помощью теории точных штрафных функций [1, 3–5]. Введём функции $\varphi_i(x) = \ell_i(x) - a_i$, $i \in I$ и

$$\varphi(x) = \sum_{i \in I} |\varphi_i(x)|.$$

Ясно, что $\Omega = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\}$ и $\varphi(x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$. При $\lambda \geqslant 0$ рассмотрим штрафную функцию

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda \varphi(x).$$

Покажем, что для достаточно большого λ функция F_λ является точной штрафной функцией, т. е. для достаточно большого λ любая точка глобального минимума штрафной функции F_λ является решением исходной задачи. Для этого нам потребуются вспомогательные сведения.

Лемма 1. (о биортогональном базисе) *Пусть $h_1, \ldots, h_k$ — линейные непрерывные функционалы на X, причём $h_1, \ldots, h_k$ — линейно независимы. Тогда существуют $x_1, \ldots, x_k \in X$ такие, что для всех i, $j \in \{1, \ldots, k\}$ будет $h_i(x_i) = 1$ и $h_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$.*

Пусть векторы $\{\ell_{j_1}, \ldots, \ell_{j_r}\}$ образуют максимальную линейно независимую подсистему системы $\{\ell_1, \ldots, \ell_n\}$. Введём множество $J = \{j_1, \ldots, j_r\} \subset I$ и функции

$$\varphi_0(x) = \sum_{j \in J} |\varphi_j(x)|, \quad \Phi_\lambda(x) = f(x) + \lambda \varphi_0(x),$$

где $\lambda \geqslant 0$.

Замечание 2. *Не трудно понять, что $x \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $\varphi_0(x) = 0$. Следовательно, функция Φ_λ является штрафной функцией для исходной задачи. Далее будет показано, что при некоторых дополнительных предположениях штрафная функция Φ_λ является точной штрафной. Откуда, воспользовавшись очевидным неравенством $\Phi_\lambda(\cdot) \leqslant F_\lambda(\cdot)$, легко получить, что штрафная функция F_λ также является точной штрафной.*

Скоростью наискорейшего спуска [5, 19] функции φ_0 в точке $x \in X$ называется величина

$$\varphi_0^{\downarrow}(x) = \liminf_{y \to x} \frac{\varphi_0(y) - \varphi_0(x)}{\|y - x\|},$$

где $\|y-x\| = \sqrt{\langle y - x, y - x \rangle}$. Отметим, что величина $\varphi_0^{\downarrow}(x)$ с точностью до знака совпадает с сильным наклоном (англ. strong slope) [15] функции φ_0 в точке x.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Существует $\sigma > 0$ такое, что для любого $x \in X \setminus \Omega$ справедливо неравенство $\varphi_0^{\downarrow}(x) \leqslant -\sigma < 0$.*

Доказательство. По лемме о биортогональном базисе существуют $x_i \in X$, $i \in J$, такие, что для всех i, $j \in J$ будет $\ell_i(x_i) = 1$ и $\ell_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$.

Пусть $x \in X \setminus \Omega$. Тогда существует $i \in J$ такое, что $\ell_i(x) \neq a_i$. Положим

$$v = -\mathrm{sign}\,(\ell_i(x) - a_i)x_i.$$

Тогда

$$\varphi_0^{\downarrow}(x) = \liminf_{y \to x} \frac{\varphi_0(y) - \varphi_0(x)}{\|y - x\|} \leqslant \liminf_{\alpha \downarrow 0} \frac{\varphi_0(x + \alpha v) - \varphi_0(x)}{\alpha \|v\|} =$$
$$= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{|\alpha \ell_i(v) + \ell_i(x) - a_i| - |\ell_i(x) - a_i|}{\alpha \|x_i\|} = -\frac{1}{\|x_i\|},$$

где $\alpha \downarrow 0$ означает $\alpha \to +0$. Следовательно,

$$\varphi_0^{\downarrow}(x) \leqslant -\min_{i \in J} \frac{1}{\|x_i\|} \quad \forall x \in X \setminus \Omega,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теперь не трудно получить теоремы, дающие достаточные условия того, что функция F_λ является точной штрафной функцией.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1. $\inf\limits_{x \in X} f(x) > -\infty$;
2. *существует $\lambda_0 < \infty$ такое, что для любого $\lambda \geqslant \lambda_0$ множество $\arg\min\limits_{x \in X} \Phi_\lambda(x)$ не пусто;*
3. *существует $\delta > 0$ такое, что функция f удовлетворяет условию Липшица на множестве $\Omega_\delta \setminus \Omega$, где $\Omega_\delta = \{x \in X \mid \varphi_0(x) \leqslant \delta\}$.*

Тогда существует такое $\lambda^* \geqslant \lambda_0$, что для любого $\lambda > \lambda^*$ множество $\arg\min\limits_{x \in X} F_\lambda(x)$ не пусто и для всех $x_\lambda \in \arg\min\limits_{x \in X} F_\lambda(x)$ будет

$$x_\lambda \in \Omega, \quad f(x_\lambda) = \inf_{x \in \Omega} f(x),$$

т. е. F_λ является точной штрафной функцией.

Доказательство. Учитывая теорему 1 и теорему 3.4.2 из [5], получаем, что существует $\lambda^* \geqslant \lambda_0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda^*$ и для любого $x_\lambda \in \arg\min\limits_{x \in X} \Phi_\lambda(x)$ будет

$$x_\lambda \in \Omega, \quad f(x_\lambda) = \inf_{x \in \Omega} f(x),$$

т. е. штрафная функция Φ_λ является точной штрафной. Откуда для того чтобы показать, что функция F_λ является точной штрафной, достаточно доказать, что для любого $\lambda > \lambda^*$ будет $\arg\min\limits_{x \in X} F_\lambda(x) = \arg\min\limits_{x \in X} \Phi_\lambda(x)$.

Для этого зафиксируем произвольное $\lambda > \lambda^*$. Заметим, что $F_\lambda(x) \geqslant \Phi_\lambda(x)$ для всех $x \in X$, при этом $F_\lambda(x) = \Phi_\lambda(x) = f(x)$ для любого $x \in \Omega$.

Пусть $x_\lambda \in \arg\min_{x\in X} \Phi_\lambda(x)$. Тогда $x_\lambda \in \Omega$ и

$$F_\lambda(x_\lambda) = \Phi_\lambda(x_\lambda) \leqslant \Phi_\lambda(y) \leqslant F_\lambda(y) \quad \forall y \in X.$$

Следовательно, $x_\lambda \in \arg\min_{x\in X} F_\lambda(x)$.

Предположим теперь, что найдётся такое $x_\lambda \in \arg\min_{x\in X} F_\lambda(x)$, такое, что $x_\lambda \notin \arg\min_{x\in X} \Phi_\lambda(x)$. Тогда для любого $y \in \arg\min_{x\in X} \Phi_\lambda(x)$ будет $y \in \Omega$ и

$$F_\lambda(y) = \Phi_\lambda(y) < \Phi_\lambda(x_\lambda) \leqslant F_\lambda(x_\lambda),$$

что противоречит определению точки глобального минимума. □

Также справедлива следующая теорема о точках локального минимума штрафной функции F_λ.

Теорема 3. [5] *Пусть $x^* \in \Omega$ является точкой локального минимума функции f на множестве Ω и пусть функция f удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки x^*. Тогда существует $\lambda^* < \infty$ такое, что для любого $\lambda > \lambda^*$ точка x^* является точкой локального минимума функции F_λ на X.*

Далее мы будем решать задачу минимизации штрафной функции F_λ.

2. НАПРАВЛЕНИЕ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Функция F_λ является субдифференцируемой [13] в точке x, т. е. для любого $g \in X$ справедливо разложение

$$F_\lambda(x + \varepsilon g) = F_\lambda(x) + \varepsilon \max_{v\in\partial F_\lambda(x)} \langle v, g\rangle + o(\varepsilon, g), \tag{1}$$

где $o(\varepsilon, v)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$ и $\partial F_\lambda(x) \subset X$ субдифференциал функции F_λ в точке x. Не трудно проверить, что

$$\partial F_\lambda(x) = \{f'(x)\} + \lambda\Big[\{p(x)\} + \sum_{k\in I_0(x)} \mathrm{co}\,\{\ell_k, -\ell_k\}\Big], \quad p(x) = \sum_{i\in I\setminus I_0(x)} \ell_i \mathrm{sign}\,\varphi_i(x),$$

где $f'(x)$ — градиент Гато функционала f в точке x, $I_0(x) = \{k \in I \mid \varphi_k(x) = 0\}$.

Лемма 2. [5, 13] *Для того чтобы в точке $x^* \in X$ функция F_λ достигала своего наименьшего значения, необходимо, а в случае, когда функция f выпукла, и достаточно, чтобы*

$$\mathbb{O} \in \partial F_\lambda(x^*). \tag{2}$$

Здесь и далее по тексту $\mathbb{O} \in X$ — нулевой элемент пространства X. Точка x^* которая удовлетворяет условию (2) называется *стационарной*.

Каждый элемент $v \in \partial F_\lambda(x)$ можно описать следующим образом:

$$v(\gamma) = f'(x) + \lambda p(x) + \sum_{k\in I_0(x)} \gamma_k \ell_k,$$

где γ — вектор-столбец, составленный из $\gamma_k \in [-\lambda, \lambda]$, $k \in I_0(x)$.

Найдем минимальный по норме субградиент $v^* \in \partial F_\lambda(x)$, т. е. решим задачу

$$\min_{v\in\partial F_\lambda(x)} \|v\|^2 = \min_{\substack{|\gamma_k|\leqslant\lambda \\ k\in I_0(x)}} \Big\|f'(x) + \lambda p(x) + \sum_{k\in I_0(x)} \gamma_k \ell_k\Big\|^2 = \|v^*\|^2. \tag{3}$$

В силу строгой выпуклости пространства со скалярным произведением и компактности субдифференциала $\partial F_\lambda(x)$ решение данной задачи существует и единственно.

Заметим, что

$$\|v\|^2 = \gamma^T W \gamma + 2\gamma^T V(x) + \|f'(x) + \lambda p(x)\|^2,$$

где W — матрица Грама, составленная из векторов ℓ_k, $k \in I_0(x)$, $V(x)$ — вектор столбец, т. е. $W = \{\langle \ell_k, \ell_j\rangle\}$, $k, j \in I_0(x)$, $V(x) = \{\langle f'(x) + \lambda p(x), \ell_k\rangle\}$, $k \in I_0(x)$.

Таким образом, задача (3) является задачей квадратичного программирования с неотрицательно определённой матрицей квадратичной формы. Пусть γ_k^*, $k \in I_0(x)$ являются единственным решением данной задачи. Тогда функция

$$G_\lambda(x) := v^* = f'(x) + \lambda \sum_{i \in I \setminus I_0(x)} \ell_i \operatorname{sign} \varphi_i(x) + \sum_{k \in I_0(x)} \gamma_k^* \ell_k \tag{4}$$

является наименьшим по норме субградиентом функционала F_λ в точке x.

Если точка x не стационарна, то $\|G_\lambda\| > 0$ и вектор

$$v_\lambda(x) = -\frac{G_\lambda(x)}{\|G_\lambda\|} \tag{5}$$

является направлением наискорейшего спуска функционала F_λ в точке x.

3. МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Итак, если точка $x \in X$ не является стационарной точкой (см. (2)) функционала F_λ, то можно найти направление наискорейшего спуска (см. (5), (4)) функционала F_λ в точке x. Опишем теоретическую схему метода наискорейшего спуска для функции F_λ.

1. Выбрать $x_0 \in X$.
2. k-я итерация ($k \geqslant 0$):
   (a) Вычислить $\partial F_\lambda(x_k)$.
   (b) Проверить, выполнено ли условие (2). Если выполнено, то точка x_k является стационарной, и процесс прекращается.
   (c) Решив задачу (3), найти субградиент $v_k^* \in \partial F_\lambda(x_k)$ такой, что
   $$\min_{v \in \partial F_\lambda(x_k)} \|v\| = \|v_k^*\|.$$
   (d) Найти $\beta_k \geqslant 0$ такое, что
   $$\min_{\beta \geqslant 0} F_\lambda(x_k - \beta v_k^*) = F_\lambda(x_k - \beta_k v_k^*).$$
   (e) Положить $x_{k+1} = x_k - \beta_k v_k^*$.

Известно [5, 16], что описанный алгоритм может и не привести к стационарной точке, поскольку субдифференциальное отображение $\partial F_\lambda(x)$ не является непрерывным в метрике Хаусдорфа.

Далее будет показано [5, 9], как данный метод можно скорректировать, чтобы обеспечить сходимость в следующем смысле: $\|v_k^*\| \longrightarrow 0$.

4. МЕТОД ГИПОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКА

Помимо разложения (1) справедливо и другое представление. Имеем:

$$F_\lambda(x + \varepsilon g) = F_\lambda(x) + \max_{[c,w] \in dF_\lambda(x)} [c + \varepsilon \langle w, g \rangle] + o(\varepsilon, g),$$

где $o(\varepsilon, g)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$ и $dF_\lambda(x) \subset \mathbb{R} \times X$ — гиподифференциал [5, 13] функции F_λ в точке x вида

$$dF_\lambda(x) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ f'(x) \end{pmatrix} \right\} + \lambda \sum_{k \in I} \operatorname{co} \left\{ \begin{pmatrix} \varphi_k(x) - |\varphi_k(x)| \\ \ell_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varphi_k(x) - |\varphi_k(x)| \\ -\ell_k \end{pmatrix} \right\}.$$

В пространстве $\mathbb{R} \times X$ введем следующую норму: $\big\|[c, w]\big\| = \sqrt{|c|^2 + \|w\|^2}$.

Лемма 3 [5, 13, 18]. *Для того чтобы в точке $x^* \in X$ функция F_λ достигала своего наименьшего значения, необходимо, а в случае, когда функция f выпукла, и достаточно, чтобы*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{O} \end{pmatrix} \in dF_\lambda(x^*). \tag{6}$$

Точка x^*, которая удовлетворяет условию (6), называется *стационарной*. Отметим, что условия (2) и (6) эквивалентны.

Каждый элемент $\widetilde{v} = [c, w] \in dF_\lambda(x)$ можно описать следующим образом:

$$\widetilde{v}(\gamma) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k \in I} \gamma_k \varphi_k(x) - \lambda\varphi(x) \\ \sum\limits_{k \in I} \gamma_k \ell_k + f'(x) \end{pmatrix},$$

где γ — вектор-столбец, состоящий из элементов $\gamma_k \in [-\lambda, \lambda]$, $k \in I$.

Найдем минимальный по норме гипоградиент $[c^*, w^*] \in dF_\lambda(x)$. Для этого решим следующую задачу:

$$\min_{[c,w] \in dF_\lambda(x)} \big\|[c, w]\big\|^2 = \min_{\substack{|\gamma_k| \leqslant \lambda \\ k \in I}} \left[\Big(\sum_{k \in I} \gamma_k \varphi_k(x) - \lambda\varphi(x) \Big)^2 + \Big\| \sum_{k \in I} \gamma_k \ell_k + f'(x) \Big\|^2 \right]. \tag{7}$$

Ясно, что решение $[c^*, w^*]$ данной задачи существует и единственно.

Заметим, что

$$\|[c, w]\|^2 = \gamma^T \left(W + \Phi(x)\right) \gamma + 2\gamma^T \widetilde{V}(x) + \|f'(x)\|^2 + (\lambda\varphi(x))^2, \tag{8}$$

где W, $\Phi(x)$ — матрицы Грама, $\widetilde{V}(x)$ — вектор столбец, т. е. $W = \{\langle \ell_k, \ell_j \rangle\}$, $\Phi(x) = \{\varphi_k(x) \cdot \varphi_j(x)\}$, $\widetilde{V}(x) = \{\langle f'(x), \ell_k \rangle - \lambda\varphi(x) \cdot \varphi_k(x)\}$, $k,\, j \in I$.

Задача (7), так же как и задача (3), является задачей квадратичного программирования. Пусть $\widetilde{\gamma}_k^*$, $k \in I$, является единственным решением данной задачи. Тогда функция

$$H_\lambda(x) := w^* = f'(x) + \sum_{k \in I} \widetilde{\gamma}_k^* \ell_k \tag{9}$$

является наименьшим по норме гипоградиентом функционала F_λ в точке x.

Если точка x не стационарна, то $\|H_\lambda\| > 0$, и функция $h_\lambda(x) = -\dfrac{H_\lambda(x)}{\|H_\lambda\|}$ является направлением спуска функционала F_λ в точке x [13, 18].

Опишем теоретическую схему метода гиподифференциального спуска.

1. Выбрать $x_0 \in X$.
2. k-я итерация ($k \geqslant 0$):
   (a) Вычислить $dF_\lambda(x_k)$.
   (b) Проверить, выполнено ли условие (6). Если выполнено, то точка x_k является стационарной, и процесс прекращается.
   (c) Найти гипоградиент $[c_k^*, w_k^*] \in dF_\lambda(x_k)$ такой, что
   $$\min_{[c,w] \in dF_\lambda(x_k)} \big\|[c, w]\big\| = \big\|[c_k^*, w_k^*]\big\|.$$
   (d) Найти $\beta_k \geqslant 0$ такое, что
   $$\min_{\beta \geqslant 0} F_\lambda(x_k - \beta w_k^*) = F_\lambda(x_k - \beta_k w_k^*).$$
   (e) Положить $x_{k+1} = x_k - \beta_k w_k^*$.

В отличие от субдифференциального отображения $\partial F_\lambda(x)$ гиподифференциальное отображение $dF_\lambda(x)$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа [5, 13]. Можно показать, что при некоторых дополнительных предположениях описанный процесс сходится в следующем смысле: $\|w_k^*\| \longrightarrow 0$.

5. О СОВПАДЕНИИ МЕТОДОВ НАИСКОРЕЙШЕГО И ГИПОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКОВ

Пусть $x \in \Omega$, т. е. $\ell_i(x) = a_i$ для всех $i \in I$. Субдифференциал функции F_λ в этой точке имеет вид

$$\partial F_\lambda(x) = \{f'(x)\} + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mathrm{co}\,\{\ell_i, -\ell_i\},$$

а гиподифференциал функции F_λ в этой точке принимает вид

$$dF_\lambda(x) = \{[0, f'(x)]\} + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mathrm{co}\,\{[0, \ell_i], [0, -\ell_i]\}.$$

Имеем $dF_\lambda(x) = \{0\} \times \partial F_\lambda(x)$. Не трудно заметить (см. (3), (7)), что если $v_0 \in \partial F_\lambda(x)$ — вектор такой, что

$$\|v_0\| = \min_{v \in \partial F_\lambda(x)} \|v\|,$$

то

$$\min_{[c,w] \in dF_\lambda(x)} \big\|[c, w]\big\| = \big\|[0, v_0]\big\|,$$

где $\big\|[c, w]\big\| = \sqrt{|c|^2 + \|w\|^2}$. Откуда получаем, что направление наискорейшего спуска (5) функции F_λ в точке x совпадает с направлением (9), полученным по методу гиподифференциального спуска для функции F_λ в точке x [5, 8].

Покажем, как же найти допустимую точку, т. е. точку удовлетворяющую ограничениям в рассматриваемой задаче.

Лемма 4. *Пусть векторы ℓ_i, $i \in I$ линейно независимы, $x_0 \in X$, $\varphi_i(x_0) = 0$ и $\varphi_j(x_0) \neq 0$ при некоторых i, $j \in I$. Положим $x_1(\alpha) = x_0 + \alpha H_\lambda(x_0)$, где $H_\lambda(x_0)$ — наименьший по норме гипоградиент функционала F_λ в точке x_0 (см. (9)). Тогда для достаточно больших $\lambda > 0$ будет $\varphi_i(x_1(\alpha)) = 0$ для всех α, а $\varphi_j(x_1(\alpha_j)) = 0$ при $\alpha_j = -\dfrac{\varphi_j(x_0)}{\langle \ell_j, H_\lambda(x_0)\rangle}$.*

Доказательство. Сперва покажем, что $\varphi_i(x_1(\alpha)) = 0$ при всех α. Ясно, что для достаточно большого $\lambda > 0$ решением задачи (7) будет единственная стационарная точка $\widetilde{\gamma}^*$ функции (8), т. е.

$$(W + \Phi(x_0))\,\widetilde{\gamma}^* + \widetilde{V}(x_0) = \mathbb{O}. \tag{10}$$

Отметим, что поскольку векторы ℓ_i линейно независимы, то матрица W невырождена, поэтому матрица $W + \Phi(x_0)$ так же невырождена, как сумма положительно определенной и неотрицательно определенной матрицы. Заметим также, что для достаточно больших $\lambda > 0$ будет $|\widetilde{\gamma}^*_k| < \lambda$ для всех $k \in I$.

В силу условий леммы и (9) получаем:

$$\begin{aligned}\varphi_i(x_1(\alpha)) = \langle \ell_i, x_1(\alpha)\rangle - a_i = \varphi_i(x_0) + \alpha\langle \ell_i, H_\lambda(x_0)\rangle = \alpha\langle \ell_i, H_\lambda(x_0)\rangle = \\ = \alpha\langle \ell_i, f'(x_0) + \sum_{k \in I} \widetilde{\gamma}^*_k \ell_k\rangle = \alpha\Big[\langle \ell_i, f'(x_0)\rangle + \sum_{k \in I} \widetilde{\gamma}^*_k \langle \ell_i, \ell_k\rangle\Big].\end{aligned}$$

Не трудно заметить, что выражение в квадратных скобках является i-м уравнением системы (10). Таким образом, $\varphi_i(x_1(\alpha)) = 0$ при всех α.

Имеем:

$$\varphi_j(x_1(\alpha)) = \varphi_j(x_0) + \alpha\langle \ell_j, H_\lambda(x_0)\rangle.$$

Поэтому если $\langle \ell_j, H_\lambda(x_0)\rangle \neq 0$, то при $\alpha_j = -\dfrac{\varphi_j(x_0)}{\langle \ell_j, H_\lambda(x_0)\rangle}$ получим $\varphi_j(x_1(\alpha_j)) = 0$.

Покажем, что $\langle \ell_j, H_\lambda(x_0)\rangle \neq 0$. Действительно, предположим, что $\langle \ell_j, H_\lambda(x_0)\rangle = 0$. Тогда, учитывая выражение для $H_\lambda(x_0)$ (см. (9)) и тот факт, что $\varphi_j(x_0) \neq 0$, получим, что j-е уравнение системы (10) имеет вид

$$\sum_{k \in I} \varphi_k(x_0)\widetilde{\gamma}^*_k = \lambda\varphi(x_0). \tag{11}$$

Для достаточно большого $\lambda > 0$ будет

$$\Big|\sum_{k\in I}\varphi_k(x_0)\widetilde{\gamma}_k^*\Big| \leqslant \max_{k\in I}|\widetilde{\gamma}_k^*|\sum_{k\in I}|\varphi_k(x_0)| = \max_{k\in I}|\widetilde{\gamma}_k^*|\varphi(x_0) < \lambda\varphi(x_0),$$

что противоречит (11). Следовательно, $\langle \ell_j, H_\lambda(x_0)\rangle \neq 0$, что и требовалось доказать.

□

Следствие. *Пусть векторы ℓ_i, $i \in I$ линейно независимы и $x \in \Omega$. Тогда для достаточно большого $\lambda > 0$ направление $H_\lambda(x)$ не выводит из множества Ω, т. е. $x + \alpha H_\lambda(x) \in \Omega$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Таким образом, если векторы ℓ_i линейно независимы и начальная точка x_0 удовлетворяет ограничениям в рассматриваемой задаче, то для достаточно большого $\lambda > 0$ будет $x_k \in \Omega$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и, следовательно, методы наискорейшего и гиподифференциального спусков для функции F_λ совпадают. Здесь x_k — точка, построенная на k-м шаге метода наискорейшего спуска для штрафной функции F_λ. Кроме того, поскольку множество Ω замкнуто, то любая предельная точка последовательности $\{x_k\}$, если она существует, также будет принадлежать множеству Ω.

Замечание 3. На основании леммы 4 можно предложить метод нахождения точки, удовлетворяющей ограничениям в рассматриваемой задаче, основанный на методе гиподифференциального спуска. А именно выберем произвольную начальную точку $x_0 \in X$. Если $x_0 \notin \Omega$, то найдется такое $j \in I$, что $\varphi_j(x_0) \neq 0$. Тогда, вычислив $H_\lambda(x_0)$, положим

$$x_1 = x_0 - \frac{\varphi_j(x_0)}{\langle \ell_j, H_\lambda(x_0)\rangle} H_\lambda(x_0).$$

Следовательно, $\varphi_j(x_1) = 0$. При этом по лемме 4, если для некоторого $i \in I$ будет $\varphi_i(x_0) = 0$, то и $\varphi_i(x_1) = 0$. Продолжая далее аналогично, не более чем за n шагов получим точку, удовлетворяющую всем ограничениям в рассматриваемой задаче.

Заметим, что множество Ω представляет собой линейное многообразие в пространстве X. Поэтому существует замкнутое линейное подпространство $Y \subset X$ такое, что $\Omega = z + Y$ для всех $z \in \Omega$, где

$$Y = \{x \in X \mid \ell_i(x) = 0 \quad \forall i \in I\}.$$

Из доказательства леммы 4 следует, что если векторы ℓ_i линейно независимы, то для достаточно большого $\lambda > 0$ будет $H_\lambda(x) \in Y$ для всех $x \in \Omega$. Более того, покажем, что для любого $x \in \Omega$ направление $H_\lambda(x)$ совпадает с проекцией градиента функционала $f'(x)$ на подпространство Y, и, таким образом, его можно вычислить в явном виде.

Теорема 4. *Пусть $x \in \Omega$, векторы ℓ_i линейно независимы и пусть векторы h_k, $k \in I$ получены процессом ортогонализации Грама – Шмидта из векторов ℓ_i, $i \in I$. Тогда для достаточно больших $\lambda > 0$ справедливо равенство*

$$H_\lambda(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\|h_k\|^2}\langle f'(x), h_k\rangle h_k,$$

т. е. $H_\lambda(x)$ есть проекция градиента $f'(x)$ на подпространство Y.

Доказательство. Ясно, что

$$Y = \{x \in X \mid \langle h_k, x\rangle = 0 \ \forall\ k \in I\}.$$

Введём вектор

$$z = f'(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\|h_k\|^2}\langle f'(x), h_k\rangle h_k \in Y,$$

который, очевидно, является проекцией градиента $f'(x)$ на подпространство Y. Поскольку (см. (9))

$$H_\lambda(x) = f'(x) + \sum_{k\in I}\widetilde{\gamma}_k^*\ell_k,$$

то найдутся такие μ_k, $k \in I$, что

$$H_\lambda(x) = f'(x) + \sum_{k\in I}\mu_k h_k.$$

Имеем:

$$H_\lambda(x) = z + \sum_{k=1}^{n} \left(\mu_k - \frac{1}{\|h_k\|^2} \langle f'(x), h_k \rangle \right) h_k.$$

Поскольку $H_\lambda(x), z \in Y$, то

$$y = \sum_{k=1}^{n} \left(\mu_k - \frac{1}{\|h_k\|^2} \langle f'(x), h_k \rangle \right) h_k \in Y.$$

Следовательно, $\langle h_k, y \rangle = 0$ для всех $k \in I$. Отсюда, учитывая ортогональность векторов h_k, $k \in I$, получим:

$$\mu_k = \frac{1}{\|h_k\|^2} \langle f'(x), h_k \rangle \quad \forall\, k \in I,$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 4. Из предыдущей теоремы следует, что для достаточно большого $\lambda > 0$ метод наискорейшего спуска для минимизации штрафной функции F_λ с начальной точкой $x_0 \in \Omega$ совпадает с методом градиентного спуска для функции $g\colon Y \to \mathbb{R}$, $g(y) = f(x_0 + y)$ с начальной точкой $\mathbb{O}$. Поэтому можно применить общие теоремы о сходимости метода наискорейшего спуска для дифференцируемого, по Гато, функционала [21], определённого на нормированном пространстве, для того, чтобы получить некоторые результаты о сходимости методов наискорейшего и гиподифференциального спусков для штрафной функции F_λ. В частности, если $x_0 \in \Omega$ и функция f сильно выпукла, то для достаточно большого $\lambda > 0$ последовательность, построенная по методу гиподифференциального спуска для штрафной функции F_λ, сходится к единственному решению исходной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* № 12-01-00752_а, № 14-01-31521_мол_а), *гранта Санкт-Петербургского государственного университета* (*проект* № 9.38.205.2014).

Библиографический список

1. *Еремин И. И.* Метод «штрафов» в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 143, № 4. С. 748–751.

2. *Di Pillo G., Facchinei F.* Exact penalty functions for nondifferentiable programming problems // Nonsmooth Optimization and Related Topics / eds. F. H. Clarke, V. F. Demyanov, F. Giannessi. N. Y. : Plenum, 1989. P. 89–107.

3. *Demyanov V. F., Di Pillo G, Facchinei F.* Exact penalization via Dini and Hadamard conditional derivatives // Optim. Methods Softw. 1998. Vol. 9, № 1–3. P. 19–36.

4. *Демьянов В. Ф.* Точные штрафные функции в задачах негладкой оптимизации // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1994. Вып. 4 (№ 22). С. 21–27.

5. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. М. : Высш. шк., 2005. 335 с.

6. *Demyanov V. F.* Nonsmooth optimization // Lecture Notes in Math. / eds. G. Di Pillo, F. Schoen. 2010. Vol. 1989. P. 55–163. DOI: 10.1007/978-3-642-11339-0_2.

7. *Demyanov V. F., Tamasyan G. Sh.* Exact penalty functions in isoperimetric problems // Optimization. 2011. Vol. 60, iss. 1. P. 153–177. DOI: 10.1080/02331934.2010.534166.

8. *Тамасян Г. Ш.* Численные методы в задачах вариационного исчисления для функционалов, зависящих от производных высшего порядка // Проблемы матем. анализа. Новосибирск : Изд-во «Тамара Рожковская», 2012. Вып. 67. С. 113–132.

9. *Dolgopolik M. V., Tamasyan G. Sh.* Method of steepest descent for two-dimensional problems of calculus of variations // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics. Springer Optimization and its Applications. 2014. Vol. 87. P. 101–113. DOI: 10.1007/978-1-4614-8615-2_7.

10. *Demyanov V. F., Giannessi F., Karelin V. V.* Optimal Control Problems via Exact Penalty Functions // J. Global Optim. 1998. Vol. 12, № 3. P. 215–223.

11. *Тамасян Г. Ш., Чумаков А. А.* Нахождение расстояния между эллипсоидами // Дискретн. анализ и исслед. операторов. 2014. Т. 21, № 3. С. 87–102.

12. Demyanov V. F. Mathematical diagnostics via nonsmooth analysis // Optim. Method. Softw. 2005. Vol. 20, № 2–3. P. 197–212. DOI: 10.1080/10556780512331318236.

13. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. : Наука, 1990. 432 с.

14. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981. 384 с.

15. *Иоффе А. Д.* Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление // УМН. 2000. Т. 55, № 3(333). С. 103–162.

16. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1972. 368 с.

17. *Borwein J. M., Zhu Q. J.* A survey on subdifferential calculus with applications // Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications. 1999. Vol. 38, № 6. P. 687–773. DOI: 10.1016/S0362-546X(98)00142-4.

18. *Демьянов В. Ф., Долгополик М. В.* Кодифференцируемые функции в банаховых пространствах : методы и приложения к задачам вариационного ичисления // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2013. Вып. 3. С. 48–67.

19. *Demyanov V. F.* Conditions for an extremum in metric spaces // J. Global Optim. 2000. Vol. 17, № 1–4. P. 55–63. DOI: 10.1023/A:1026599021286.

20. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М. : Наука, 1988. 552 с.

21. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. СПб. : Невский Диалект ; БХВ–Петербург, 2004. 816 с.

On Equivalence of the Method of Steepest Descent and the Method of Hypodifferential Descent in Some Constrained Optimization Problems

M. V. Dolgopolik, G. Sh. Tamasyan

Saint Petersburg State University, 35, University ave., Peterhof, Saint Petersburg, 198504, Russia, maxim.dolgopolik@gmail.com, g.tamasyan@spbu.ru

The method of exact penalty functions is widely used for the study of constrained optimization problems. The approach based on exact penalization was successfully applied to the study of optimal control problems and various problems of the calculus of variations, computational geometry and mathematical diagnostics. It is worth mentioning that even if the constrained optimization problem under consideration is smooth, the equivalent unconstrained optimization problems constructed via exact penalization technique is essentially nonsmooth. In this paper, we study infinite dimensional optimization problems with linear constraints with the use of the theory of exact penalty functions. We consider the method of steepest descent and the method of hypodifferential descent for this type of problems. We obtain some properties of these methods and study the cases when they coincide.

Key words: nonsmooth analysis, nondifferentional nondifferentiable optimization, exact penalties, hypodifferential, subdifferential, method of hypodifferential descent, calculus of variations.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*projects no.* 12-01-00752_a, 14-01-31521_мол_a) *and by the Grant of the Saint Petersburg State University* (*project no.* 9.38.205.2014).

References

1. Eremin I. I. The Penalty Method in Convex Programming. *Doklady Acad. Nauk SSSR*, 1967, vol. 143, no. 4, pp. 748–751 (in Russian).

2. Di Pillo G., Facchinei F. Exact penalty functions for nondifferentiable programming problems. *Nonsmooth Optimization and Related Topics* / eds. F. H. Clarke, V. F. Demyanov, F. Giannessi, New York, Plenum, 1989, pp. 89–107.

3. Demyanov V. F., Di Pillo G, Facchinei F. Exact penalization via Dini and Hadamard conditional derivatives. *Optim. Methods Softw.*, 1998, vol. 9, no. 1–3, pp. 19–36.

4. Demyanov V. F. Exact penalty functions in nonsmooth optimization problems. *Vestnik of St. Petersburg Univ.*, Ser. 1, 1994, iss. 4 (no. 22), pp. 21–27.

5. Demyanov V. F. *Extremality Conditions and Variational Problems*. Moscow, Vyssh. Shkola, 2005, 335 p. (in Russian).

6. Demyanov V. F. Nonsmooth optimization. *Lecture Notes in Math.* / eds. G. Di Pillo, F. Schoen, 2010, vol. 1989, pp. 55–163. DOI: 10.1007/978-3-642-11339-0_2.

7. Demyanov V. F., Tamasyan G. Sh. Exact penalty functions in isoperimetric problems. *Optimization*, 2011, vol. 60. iss. 1, pp. 153–177. DOI: 10.1080/02331934.2010.534166.

8. Tamasyan G. Sh. Numerical methods in problems of calculus of variations for functionals depending on higher order derivatives. *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 188, no. 3, p. 299–321. DOI: 10.1007/s10958-012-1129-0.

9. Dolgopolik M. V., Tamasyan G. Sh. Method of steepest descent for two-dimensional problems of calculus of variations. *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics. Springer Optimization and Its Applications*, 2014, vol. 87, pp. 101–113. DOI: 10.1007/ 978-1-4614-8615-2_7.

10. Demyanov V. F., Giannessi F., Karelin V. V. Optimal Control Problems via Exact Penalty Functions. *J. Global Optim.*, 1998, vol. 12, no. 3, pp. 215–223.

11. Tamasyan G. Sh., Chumakov A. A. Finding the distance between the ellipsoids. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 2014, vol. 21, no. 3, pp. 87–102 (in Russian).

12. Demyanov V. F. Mathematical diagnostics via nonsmooth analysis. *Optim. Method. Softw.*, 2005, vol. 20, no. 2–3, pp. 197–212. DOI: 10.1080/10556780512331318236.

13. Demyanov V. F., Rubinov A. M. *Constructive nonsmooth analysis*. Frankfurt a/M, Verl. Peter Lang, 1995, 416 p.
14. Demyanov V. F., Vasiliev L. V. *Nondifferentiable optimization*. New York, Springer-Optimization Software, 1985, 452 p.
15. Ioffe A. D. Metric regularity and subdifferential calculus. *Russ. Math. Surv.*, 2000, vol. 55, no. 3, pp. 501–558, DOI: 10.1070/RM2000v055n03ABEH000292.
16. Demyanov V. F., Malozemov V. N. *Introduction to minimax*. New York, Dover, 1990, 307 p.
17. Borwein J. M., Zhu Q. J. A survey on subdifferential calculus with applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1999, vol. 38, no. 6, pp. 687–773. DOI: 10.1016/S0362-546X(98)00142-4.
18. Demyanov V. F., Dolgopolik M. V. Codifferentiable functions in Banach spaces: methods and applications to problems of variation calculus. *Vestnik St.-Petersburg. Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2013, iss. 3, pp. 48–67.
19. Demyanov V. F. Conditions for an extremum in metric spaces. *J. Global Optim.*, 2000, vol. 17, no. 1–4, pp. 55–63. DOI: 10.1023/A:1026599021286.
20. Gantmacher F. R. *The Theory of Matrices*. Reprinted by Amer. Math. Soc., AMS Chelsea Publ., 2000, 660 p.
21. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional analysis*. Oxford; New York, Pergamon Press, 1982, 589 p.

УДК 517.984

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА НА ПРОСТЕЙШЕМ НЕКОМПАКТНОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

М. Ю. Игнатьев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, IgnatievMU@info.sgu.ru

Исследуется обратная задача рассеяния для дифференциальных операторов переменных порядков на простейшем некомпактном графе с циклом. Приведена теорема единственности восстановления коэффициентов операторов по данным рассеяния.

Ключевые слова: квантовые графы, дифференциальные операторы переменных порядков, обратные спектральные задачи, обратные задачи рассеяния.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение многих процессов и явлений в различных областях естествознания и техники связано с исследованием прямых и обратных спектральных задач для дифференциальных уравнений на геометрических графах (пространственных сетях)[1–4]. Наиболее изучены такие задачи для часто встречающегося в приложениях оператора Штурма–Лиувилля. В то же время ряд практически важных задач приводит к уравнениям высших порядков, причем порядки уравнений на разных ребрах графа могут быть различными [4]. Такие задачи лишь недавно стали предметом систематического изучения, и на данный момент исследованы недостаточно. В работе [5] впервые рассматривалась обратная спектральная задача для оператора переменного порядка на графе, точнее, на графе-звезде. Более трудный для изучения случай графа с (одним) циклом исследован в работе [6]. В настоящей работе, в отличие от работ [5, 6], изучается обратная спектральная задача (задача рассеяния) на некомпактном графе. Исследуемый граф состоит из цикла и луча, соединенных в общей вершине. На луче рассматривается уравнение произвольного высшего порядка, порядок уравнения на цикле равен 3 (в отличие от работы [6], где порядок уравнения на цикле равен 2).

Работа построена следующим образом. В части 1 мы вводим и исследуем так называемые решения типа Вейля, определяемые как функции, удовлетворяющие заданным дифференциальным уравнениям на ребрах графа и некоторым условиям склейки в вершине, а также имеющие заданные асимптотики на бесконечности вдоль луча. Исходя из свойств решений типа Вейля мы определяем данные рассеяния, ассоциированные с лучом, аналогично тому, как это было сделано для операторов высшего порядка на оси в [7]. В части 2 показано, что данные рассеяния, ассоциированные с лучом, однозначно определяют коэффициенты дифференциального уравнения на луче (соответствующую обратную задачу мы называем частичной обратной задачей рассеяния). В части 3 рассматривается задача восстановления оператора на всем графе (полная обратная задача рассеяния) и устанавливается соответствующая теорема единственности.

1. РЕШЕНИЯ ТИПА ВЕЙЛЯ

Пусть Γ — геометрический граф, состоящий из замкнутой кривой r_0 длины T и луча r_1, исходящего из некоторой точки $v_1 \in r_0$. Функцию y на графе Γ будем трактовать как пару функций $(y_0(x), x \in [0,T], y_1(x), x \in [0,\infty))$.

На цикле r_0 рассмотрим уравнение

$$\ell_0 y_0 \equiv D^3 y_0 + p_{01}(x) D y_0 + p_{00}(x) y_0 = \rho^3 y_0, \tag{1}$$

где ρ — спектральный параметр, $D = -id/dx$ и коэффициенты $p_{00}(x)$, $p_{01}(x)$ таковы, что $\ell_0^* = \ell_0$.

На луче r_1 рассмотрим уравнение

$$\ell_1 y_1 \equiv D^N y_1 + \sum_{s=0}^{N-2} p_{1s}(x) D^s y_1 = \rho^N y_1, \tag{2}$$

где $N \geq 3$ и для некоторого $\tau > 0$ выполнено условие:

$$\int\limits_0^\infty |p_{1s}(x)| \exp(\tau x)\, dx < \infty. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение следующие линейные формы:

$$U_\nu(y) := \sigma_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \sum_{s=0}^{\nu-2} \sigma_{\nu s} y^{(s)}(0), u_{\xi\nu}(y) = (-1)^{\chi_{\xi\nu}} y^{(\nu-1)}(\xi),$$

где $\xi \in \{0,T\}$, $\chi_{0\nu} = 0$, $\chi_{T\nu} = \chi$, $\nu = 1,2$, $\chi_{T3} = \chi + 1$, $\chi \in \{0,1\}$. Для функции $y = (y_0, y_1)$ на Γ и $\nu \in \overline{1,N}$ определим условие склейки $C(\nu)$ как равенство $u_{0\nu}(y_0) = u_{T\nu}(y_0) = U_\nu(y_1)$, а условие $K(\nu)$ равенством $u_{0\nu}(y_0) + u_{T\nu}(y_0) + U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu \leq 3$ и $U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu > 3$.

Пусть $S_l := \{\arg(i\rho) \in ((l-1)\pi/N, l\pi/N)\}$. Для фиксированного l через R_k, $k = \overline{1,N}$ обозначим корни N-й степени из 1, занумерованные таким образом, что $\mathrm{Re}(i\rho R_1) < \mathrm{Re}(i\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(i\rho R_N)$ для всех $\rho \in S_l$.

Зафиксируем $\chi \in \{0,1\}$. Для каждого $k = \overline{1,N}$ в каждом из секторов S_l определим *решение типа Вейля порядка* k как решение системы (1), (2) $\psi_k(\rho) = (\psi_{k0}(x,\rho), \psi_{k1}(x,\rho))$ со следующими свойствами:

1) $\psi_{k1}(x,\rho) = \exp(i\rho R_k x)(1 + o(1))$, $x \to \infty$;

2) для $\psi_k(\rho)$ выполнены условия склейки $C(\nu)$, $\nu = \overline{1,\nu_k - 1}$, $\nu_k = \min\{k,3\}$, $K(\nu)$, $\nu = \overline{\nu_k, k}$.

Используя разложения $\psi_{k0}(x,\rho)$, $\psi_{k1}(x,\rho)$ по фундаментальным системам решений уравнений (1) и (2) соответственно, можно показать, что $\psi_k(\rho)$ существует и единственна при всех $\rho \in \bar{S}_l$ за исключением некоторого, не более чем счетного множества, не имеющего конечных предельных точек, кроме, возможно, точки 0. В дальнейшем мы будем считать, что эта последняя возможность исключена, более точно мы предполагаем выполненным следующее условие.

Условие G_0. При каждом k $\psi_{k1}(x,\rho)$ голоморфна в $S_l \cap \{|\rho| < \delta\}$ при некоторой $\delta > 0$, непрерывна в $\bar{S}_l \cap \{|\rho| < \delta\} \setminus \{0\}$ и $\psi_{k1}^{(\nu-1)}(x,\rho) = O\left(\rho^{-M}\right)$, $k,\nu = \overline{1,N}$ при $\rho \to 0$, где $M < \infty$.

Обозначим через $Y_{k1}^\alpha(x,\rho)$, $k = \overline{1,N}$, функции, образующие фундаментальную систему решений (свою для каждого сектора S_l) уравнения (2), построенную аналогично ФСР B_α^0 [8, § 3.1]. Напомним следующие свойства функций $Y_{k1}^\alpha(x,\rho)$:

1) при каждом $x \geq 0$ $Y_{k1}^\alpha(x,\rho)$ голоморфны по ρ в $S_l \cap \{|\rho| > \rho_\alpha\}$, причем $\rho_\alpha \to 0$ при $\alpha \to \infty$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} Y_{k1}^\alpha(x,\rho)\exp(-i\rho R_k x) = 1$;

3) $D^\nu Y_{k1}^\alpha(x,\rho) = (\rho R_k)^\nu \exp(i\rho R_k x)[1]$, $[1] := \left(1 + O(\rho^{-1})\right)$, $x \geq \alpha$, $\rho \to \infty$.

Зафиксируем α такое, что $Y_{k1}^\alpha(x,\rho)$ голоморфны в $S_l \cap \{|\rho| > \delta/2\}$ и непрерывны в $\bar{S}_l \cap \{|\rho| \geq \delta/2\}$. Тогда при $\rho \in \bar{S}_l \cap \{|\rho| \geq \delta/2\}$ с учетом условия 1 определения решений типа Вейля имеют место представления:

$$\psi_{k1}(x,\rho) = Y_{k1}^\alpha(x,\rho) + \sum_{j<k} \gamma_{jk}^\alpha(\rho) Y_{j1}^\alpha(x,\rho). \tag{4}$$

Для $\psi_{k0}(x,\rho)$ воспользуемся представлениями вида

$$\psi_{k0}(x,\rho)=\sum_{j=1}^{3}\beta_{jk}(\rho)C_j(x,\lambda), \tag{5}$$

где $\lambda=\rho^3$ и $C_j(x,\lambda)$ суть решения уравнения $\ell_0 y=\lambda y$ при условиях $C_j^{(\nu-1)}(0,\lambda)=\delta_{j,\nu}$.

Подставляя (4), (5) в условия склейки из условия 2 определения решений типа Вейля, получим некоторую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\gamma_{jk}^{\alpha}(\rho)$, $\beta_{jk}(\rho)$. Обозначим через $\Delta_k(\rho)$ определители этих СЛАУ и через Z_{kl} множества их нулей, лежащих в $\bar S_l\setminus\{0\}$ при $k\in\overline{2,N}$ и в $\bar S_l$ при $k=1$. Ясно, что $\psi_k(\rho)$ непрерывны на $\bar S_l\setminus(\{0\}\cup Z_{kl})$ и голоморфны в $S_l\setminus Z_{kl}$. Заметим, что при выполнении условия (3) функции $Y_{k1}^{\alpha}(x,\rho)$ допускают аналитическое продолжение в некоторую область вида $S_l^{\varepsilon}\setminus\{|\rho|\le\rho_\alpha\}$, где $S_l^{\varepsilon}:=S_l+i\varepsilon\exp\left(i\left(l-1/2\right)\pi/N\right)$. Следовательно, для любого $\rho_0\in Z_{kl}$ $\psi_{kj}(x,\rho)$ допускают голоморфное продолжение в некоторую проколотую окрестность ρ_0. Всюду далее предполагаем выполненным следующее условие.

Условие G_1. Множества Z_{kl} при различных k не пересекаются. Каждое $\rho_0\in Z_{kl}$ есть простой нуль $\Delta_k(\rho)$ и простой полюс $\psi_{kj}(x,\rho)$ (хотя бы при одном $j\in\{0,1\}$). Последнее означает, что существуют функции $\psi_{kj,\langle-1\rangle}(x,\rho_0)$, $j=0,1$, хотя бы одна из которых не является тождественным 0, такие, что функции

$$\psi_{kj}(x,\rho)-(\rho-\rho_0)^{-1}\psi_{kj,\langle-1\rangle}(x,\rho_0)$$

голоморфны в окрестности ρ_0.

Замечание. Поскольку $Y_{11}^{\alpha}(x,\rho)$ не зависит от α и при выполнении (3) допускает аналитическое продолжение в окрестность 0, определитель $\Delta_1(\rho)$ также допускает аналитическое продолжение в окрестность 0. Поэтому мы допускаем возможность $0\in Z_{1l}$, условие G_1 в этом случае требует, чтобы 0 был простым нулем $\Delta_1(\rho)$ и простым полюсом $\psi_1(\rho)$ (фактически, $\psi_{10}(x,\rho)$).

Из представления (4) вытекает, что для $\rho_0\in Z_{kl}$

$$\psi_{k1,\langle-1\rangle}(x,\rho_0)=\sum_{j<k}\gamma_{jk,\langle-1\rangle}^{\alpha}(\rho_0)Y_{j1}^{\alpha}(x,\rho_0).$$

В силу условия G_1 все $\psi_{j1}(x,\rho)$, $j<k$, голоморфны в окрестности ρ_0, а представления (4) можно обратить следующим образом:

$$Y_{j1}^{\alpha}(x,\rho_0)=\psi_{j1}(x,\rho_0)+\sum_{s<j}g_{sj}(\rho_0)\psi_{s1}(x,\rho_0),$$

что приводит к следующему утверждению.

Лемма 1. *Для любого $\rho_0\in Z_{kl}$ существуют (единственные) числа $v_{jk}^{l}(\rho_0)$, $j<k$, такие, что функции*

$$D^{\nu-1}\psi_{k1}(x,\rho)-(\rho-\rho_0)^{-1}\sum_{j<k}v_{jk}^{l}(\rho_0)D^{\nu-1}\psi_{j1}(x,\rho_0),\qquad \nu=\overline{1,N}$$

голоморфны в окрестности ρ_0.

Для исследования поведения решений типа Вейля при больших ρ запишем их в виде

$$\psi_{k1}(x,\rho)=Y_{k1}(x,\rho)+\sum_{j<k}\gamma_{jk}(\rho)Y_{j1}(x,\rho), \tag{6}$$

$$\psi_{k0}(x,\rho)=\sum_{j=1}^{3}\beta_{jk}(\rho)Y_{j0}(x,\rho). \tag{7}$$

Через $Y_{k1}(x,\rho)$ в (6) обозначены $Y_{k1}^{\alpha}(x,\rho)$ при $\alpha=0$. Через $Y_{k0}(x,\rho)$ в (7) обозначены решения Бирхгофа уравнения (1) [8, § 3.1]. Напомним, что для решений $Y_{k0}(x,\rho)$ справедливы асимптотики следующего вида:

$$D^{\nu}Y_{s0}(x,\rho)=(\rho\omega^s)^{\nu-1}\exp\left(i\rho\omega^s x\right)[1],\qquad \omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$$

при $\rho \to \infty$ по любому замкнутому сектору в ρ-плоскости такому, что выражения $\mathrm{Re}(i\rho(\omega^s - \omega^j))$ для любых j, s сохраняют знак в этом секторе.

Подставляя (6), (7) в условия склейки из условия 2 определения решений типа Вейля, получим некоторую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\gamma_{jk}(\rho)$, $\beta_{jk}(\rho)$. Строку этой системы, содержащую U_ν и (или) $Y_{j0}^{(\nu-1)}$, поделим на $(i\rho)^{\nu-1}$ (нетрудно заметить, что выражения такого вида в пределах одной строки соответствуют одному и тому же ν). Решая полученную таким образом СЛАУ по правилу Крамера, получим представления

$$\gamma_{sk}(\rho) = -\frac{D_{sk}(\rho)}{D_k(\rho)}, \tag{8}$$

где $D_k(\rho)$ — определитель системы, а $D_{sk}(\rho)$ могут быть получены из $D_k(\rho)$ формальной заменой Y_{s1} на Y_{k1}.

Рассмотрим следующую СЛАУ (она получается из описанной выше заменой Y_{kj} главными частями их асимптотик):

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)} = (-1)^{\chi_{T\nu}} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)} \exp(i\rho\omega^s T) = \sigma_\nu \left(\sum\limits_{s=1}^{k-1} \gamma_{ks} R_s^{\nu-1} + R_k^{\nu-1} \right), \quad \nu = \overline{1, \nu_k - 1} \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)} + (-1)^{\chi_{T\nu}} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)} \exp(i\rho\omega^s T) + \sigma_\nu \left(\sum\limits_{s=1}^{k-1} \gamma_{ks} R_s^{\nu-1} + R_k^{\nu-1} \right) = 0, \quad \nu = \overline{\nu_k, 3} \\ \sum\limits_{s=1}^{k-1} \gamma_{ks} R_s^{\nu-1} + R_k^{\nu-1} = 0, \quad \nu = \overline{4, k}. \end{cases}$$

Обозначим ее определитель через $D_k^0(\rho)$. Нетрудно показать, что для $D_k^0(\rho)$ имеют место представления следующего вида:

$$D_k^0(\rho) = A_{k0} + \sum_{m=1}^{3} \left(A_{km}^{+} \exp(i\rho\omega^m T) + A_{km}^{-} \exp(-i\rho\omega^m T) \right),$$

где числа A_{k0}, $A_{km}^{\pm}$ зависят только от коэффициентов σ_ν форм U_ν и сектора S_l. Для определителей $D_k(\rho)$, $D_{sk}(\rho)$ аналогично получаются следующие асимптотические представления:

$$D_k(\rho) = [A_{k0}] + \sum_{m=1}^{3} \left([A_{km}^{+}] \exp(i\rho\omega^m T) + [A_{km}^{-}] \exp(-i\rho\omega^m T) \right),$$
$$D_{sk}(\rho) = [A_{sk0}] + \sum_{m=1}^{3} \left([A_{skm}^{+}] \exp(i\rho\omega^m T) + [A_{skm}^{-}] \exp(-i\rho\omega^m T) \right),$$

где числа A_{sk0}, $A_{skm}^{\pm}$ также зависят только от коэффициентов σ_ν форм U_ν и сектора S_l. Пусть выполнено следующее условие регулярности.

Условие R. $A_{km}^{\pm} \neq 0$ для всех k, m, l.

Тогда из [9, теорема 5.8] вытекают (в частности) следующие утверждения.

Лемма 2. *Число элементов множества Z_{kl} в кольце $\{t \le |\rho| \le t+1\}$ ограничено некоторым числом, не зависящим от t.*

Лемма 3. *При $\rho \to \infty$, $\rho \in \bar{S}_l$, $dist(\rho, Z_{kl}) > \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ произвольно) справедливы асимптотики:*

$$D_k(\rho) = D_k^0(\rho)[1], \qquad |D_{sk}(\rho)| \le C|D_k^0(\rho)|, \qquad |D_{sk}(\rho) - D_{sk}^0(\rho)| \le C|\rho|^{-1}|D_k^0(\rho)|,$$

где $D_{sk}^0(\rho) := A_{sk0} + \sum\limits_{m=1}^{3} \left(A_{skm}^{+} \exp(i\rho\omega^m T) + A_{skm}^{-} \exp(-i\rho\omega^m T) \right).$

Из леммы 3 и представлений (6), (8) вытекает, в свою очередь, следующее утверждение.

Лемма 4. *При $\rho \to \infty$, $\rho \in \bar{S}_l$, $dist(\rho, Z_{kl}) > \varepsilon$ справедливы асимптотики:*

$$D^{\nu-1}\psi_{k1}(x, \rho) = (\rho R_k)^\nu \exp(i\rho R_k x)[1] - \sum_{s<k} \left(\frac{D_{sk}^0(\rho)}{D_k^0(\rho)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) (\rho R_s)^\nu \exp(i\rho R_s x).$$

2. ЧАСТИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Пусть $\chi \in \{0,1\}$ фиксировано и $\psi_k(\rho)$, $k = \overline{1,N}$, — решения типа Вейля, построенные, как описано в предыдущем параграфе, с выбранным значением χ в условиях склейки $C(\nu)$, $K(\nu)$. Исходя из свойств решений типа Вейля мы определим данные рассеяния, ассоциированные с лучом r_1 и покажем, что эти данные однозначно определяют коэффициенты уравнения (2).

Определим матрицу $\Psi = (\Psi_{\nu k})_{k,\nu=\overline{1,N}}$ (ν — номер строки): $\Psi_{\nu k}(x,\rho) := D^{\nu-1}\psi_{k1}(x,\rho)$. Для $\rho_0 \in \Sigma_l \setminus (Z_l \cup Z_{l+1})$ (где $\Sigma_l := \bar{S}_l \cap \bar{S}_{l+1}$, $Z_l := \bigcup\limits_k Z_{kl}$) определим: $\Psi_-(x_1,\rho_0) := \lim\limits_{\rho\to\rho_0,\rho\in S_l} \Psi(x,\rho)$, $\Psi_+(x,\rho_0) := \lim\limits_{\rho\to\rho_0,\rho\in S_{l+1}} \Psi(x,\rho)$ и матрицу $v(\rho_0) := \Psi_-^{-1}(x,\rho_0)\Psi_+(x,\rho_0)$. Далее, для $\rho_0 \in Z_{kl}$ определим матрицы $v_l(\rho_0) := \left(v_{jk}^l(\rho_0)\right)_{j,k=\overline{1,N}}$ (j — номер строки), где $v_{jk}^l(\rho_0)$ — числа из утверждения леммы 1.

Определение. *Данными рассеяния, ассоциированными с лучом* r_1, назовем набор

$$J_1^\chi = \left\{v(\rho),\ \rho \in \Sigma_l \setminus (Z_l \cup Z_{l+1}),\ Z_{kl},\ v_l(\rho),\ \rho \in Z_{kl},\ k = \overline{1,N},\ l = \overline{1,2N}\right\}.$$

Наряду с уравнениями (1), (2) рассмотрим уравнения того же вида, но с другими коэффициентами $\tilde{p}_{sj}$. Через $\tilde{\psi}_k(\rho)$ обозначим соответствующие решения типа Вейля (построенные при тех же условиях склейки). Предположим, что условия G_0, G_1 также выполнены, тогда можно определить данные рассеяния $\tilde{J}_1^\chi$.

Теорема 1. *При выполнении условий G_0, G_1 и условия регулярности склейки R из $\tilde{J}_1^\chi = J_1^\chi$ следует $\tilde{p}_{1s} = p_{1s}$, $s = \overline{0, N-2}$. Кроме того, $\tilde{\Psi} = \Psi$.*

Доказательство. Рассмотрим следующую *матрицу спектральных отображений* [7, 8]: $P(x,\rho) := \Psi(x,\rho)\tilde{\Psi}^{-1}(x,\rho)$. В силу равенств $\tilde{Z}_{kl} = Z_{kl}$ и $\tilde{v}(\rho) = v(\rho)$, $\rho \in \Sigma_l \setminus (Z_l \cup Z_{l+1})$ матрица $P(x,\rho)$ голоморфна по ρ в $\mathbf{C} \setminus \bigcup\limits_{k,l} Z_{kl} \setminus \{0\}$.

Из леммы 1 следует, что для любого $\rho_0 \in Z_{kl}$ матрица

$$\Psi(x,\rho)\left(I - (\rho-\rho_0)^{-1}v_l(\rho_0)\right),$$

где I — единичная матрица, голоморфна в окрестности ρ_0, и аналогичное утверждение справедливо для $\tilde{\Psi}$. В силу $\tilde{v}^l(\rho_0) = v^l(\rho_0)$ отсюда следует, что $P(x,\rho)$ ограничена в окрестности ρ_0, т.е. ρ_0 является устранимой особенностью $P(x,\rho)$. Таким образом, в условиях теоремы $P(x,\rho)$ голоморфна в $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Далее, из асимптотик леммы 4 вытекают оценки:

$$P_{jk}(x,\rho) = O\left(\rho^{j-k}\right), \qquad \rho \to \infty, \qquad \operatorname{dist}\left(\rho, \bigcup_{k,l} Z_{kl}\right) > \varepsilon, \tag{9}$$

а из условия G_0 — оценка

$$P_{jk}(x,\rho) = O\left(\rho^{-M_1}\right), \qquad M_1 < \infty, \qquad \rho \to 0. \tag{10}$$

С учетом леммы 2 из (9), (10) следует, что $P(x,\rho)$ представима в виде

$$P(x,\rho) = \sum_{\nu=-M_1}^{N-1} \rho^\nu P_{\langle\nu\rangle}(x). \tag{11}$$

Из условия 1 определения решений типа Вейля следует:

$$\lim_{x\to\infty} P_{\langle\nu\rangle}(x) = 0, \qquad \nu \neq 0, \qquad \lim_{x\to\infty} P_{\langle 0\rangle}(x) = I.$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.54 [7] выводим отсюда, что $P_{\langle\nu\rangle}(x) \equiv 0$ при $\nu \neq 0$, а рассуждая, как при доказательстве леммы 3.59 [7], заключаем, что при $j \le k$ $P_{\langle 0\rangle, jk}(x) \equiv \delta_{j,k}$. С учетом (11) это означает, в частности, что $P_{1k}(x,\rho) \equiv \delta_{1,k}$, т. е. первые строки матриц $\tilde{\Psi}$ и Ψ тождественно равны. А поскольку остальные строки в этих матрицах получаются дифференцированием первой строки, матрицы $\tilde{\Psi}$ и Ψ совпадают. $\square$

3. ПОЛНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Для восстановления коэффициентов уравнения (1) нам понадобятся два набора данных рассеяния, ассоциированных с лучом r_1 J_1^0, J_1^1 и, возможно, некоторый конечный набор чисел, связанных с (1) непосредственно.

Обозначим через $\Lambda^{\pm}$ спектры краевых задач для уравнения $\ell_0 y = \lambda y$ с условиями $y^{(\nu-1)}(0) \pm \pm y^{(\nu-1)}(T) = 0$, $\nu = \overline{1,3}$, через $\Lambda_s^{\pm}$, $s = 1,2$ — спектры задач для этого же уравнения с условиями $y^{(s-1)}(0) = y^{(s-1)}(T) = y^{(2-s)}(0) \pm y^{(2-s)}(T) = 0$ (все собственные значения берутся с учетом их алгебраической кратности). Характеристические функции указанных задач обозначим через $\Delta_{30}^{\pm}(\lambda)$ и $\Delta_{3s}^{\pm}(\lambda)$ соответственно. Определим $\Lambda_{3s}^{\pm} := \Lambda^{\pm} \cap \Lambda_s^{\pm}$.

Определение. *Глобальными данными рассеяния* назовем набор $J = \{J_1^0, J_1^1, \Lambda_{31}^+, \Lambda_{31}^-, \Lambda_{32}^+, \Lambda_{32}^-\}$.

Теорема 2. *При выполнении условий G_0, G_1 и условия регулярности склейки R из $\tilde{J} = J$ следует $\tilde{p}_{1s} = p_{1s}$, $s = \overline{0, N-2}$, $\tilde{p}_{0s} = p_{0s}$, $s = 0,1$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 из совпадения данных рассеяния следует совпадение коэффициентов уравнения (2) и решений типа Вейля на луче r_1. Теперь единственность восстановления коэффициентов уравнения (1) следует из единственности решения классической обратной задачи на конечном отрезке по матрице Вейля [8, гл. 3]. Покажем это.

Пусть $\Phi_k(x,\lambda)$, $k = 1,2$ суть решения Вейля для уравнения $\ell_0 y = \lambda y$, удовлетворяющие краевым условиям:

$$\Phi_1(0,\lambda) = 1, \qquad \Phi_1(T,\lambda) = \Phi_1'(T,\lambda) = 0,$$
$$\Phi_2(0,\lambda) = 0, \qquad \Phi_2'(0,\lambda) = 1, \qquad \Phi_2(T,\lambda) = 0.$$

Определим функции Вейля $M_{k\nu}(\lambda) := \Phi_k^{(\nu-1)}(0,\lambda)$. Имеют место представления [1, § 3.1]:

$$M_{12}(\lambda) = -\frac{d_{12}(\lambda)}{d_1(\lambda)}, \qquad M_{13}(\lambda) = -\frac{d_{13}(\lambda)}{d_1(\lambda)},$$

где

$$d_1 = \begin{vmatrix} C_2 & C_3 \\ C_2' & C_3' \end{vmatrix}, \qquad d_{12} = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 \\ C_1' & C_3' \end{vmatrix}, \qquad d_{13} = \begin{vmatrix} C_2 & C_1 \\ C_2' & C_1' \end{vmatrix}.$$

Здесь для краткости в выражениях вида $C_j^{(\nu)}(T,\lambda)$ аргументы (T,λ) опущены. Отметим, кроме того, что в силу самосопряженности дифференциального выражения ℓ_0 имеет место связь $M_{23}(\lambda) = \overline{M_{12}(\bar{\lambda})}$.

Вернемся к доказательству теоремы. Условия склейки для решения $\psi_3(\rho)$ приводят к следующим соотношениям (где различные знаки соответствуют разным $\chi \in \{0,1\}$):

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s3}\left(\delta_{s,1} \pm C_s(T,\lambda)\right) = 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s3}\left(\delta_{s,2} \pm C_s'(T,\lambda)\right) = 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s3}\left(\delta_{s,3} \pm C_s''(T,\lambda)\right) = -U_3(\psi_{31}^{\pm}), \\ \beta_{13} = U_1(\psi_{31}^{\pm}), \\ \beta_{23} = U_2(\psi_{31}^{\pm}), \end{cases} \tag{12}$$

Применяя к (12) теорему Кронекера – Капелли (как к СЛАУ относительно β_{s3}, $s = 1,2,3$), получим соотношения:

$$\begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_2 & C_3 & 0 \\ C_1' & C_2' \pm 1 & C_3' & 0 \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \pm 1 & \mp U_3(\psi_{31}^{\pm}) \\ 1 & 0 & 0 & U_1(\psi_{31}^{\pm}) \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_2 & C_3 & 0 \\ C_1' & C_2' \pm 1 & C_3' & 0 \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \pm 1 & \mp U_3(\psi_{31}^{\pm}) \\ 0 & 1 & 0 & U_2(\psi_{31}^{\pm}) \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Соотношения (13), (14) могут быть переписаны в терминах характеристических функций $\Delta_{3s}^{\pm}(\lambda)$, введенных в начале параграфа. С учетом представлений:

$$\Delta_{30}^{\pm} = \pm \begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_2 & C_3 \\ C_1' & C_2' \pm 1 & C_3' \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \pm 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{31}^{\pm} = \begin{vmatrix} C_2 & C_3 \\ C_2' \pm 1 & C_3' \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{32}^{\pm} = \begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_3 \\ C_1' & C_3' \end{vmatrix},$$

эти соотношения принимают вид

$$U_1(\psi_{31}^{\pm})\Delta_{30}^{\pm} \mp U_3(\psi_{31}^{\pm})\Delta_{31}^{\pm} = U_2(\psi_{31}^{\pm})\Delta_{30}^{\pm} \pm U_3(\psi_{31}^{\pm})\Delta_{32}^{\pm} = 0,$$

что приводит к соотношениям:

$$\frac{\Delta_{31}^{\pm}}{\Delta_{30}^{\pm}} = \pm\frac{U_1(\psi_{31}^{\pm})}{U_3(\psi_{31}^{\pm})}, \qquad \frac{\Delta_{32}^{\pm}}{\Delta_{30}^{\pm}} = \mp\frac{U_2(\psi_{31}^{\pm})}{U_3(\psi_{31}^{\pm})}.$$

В условиях теоремы, как уже было замечено, $\tilde{\psi}_{31}^{\pm} = \psi_{31}^{\pm}$ и, следовательно,

$$\frac{\tilde{\Delta}_{31}^{\pm}}{\tilde{\Delta}_{30}^{\pm}} = \frac{\Delta_{31}^{\pm}}{\Delta_{30}^{\pm}}, \qquad \frac{\tilde{\Delta}_{32}^{\pm}}{\tilde{\Delta}_{30}^{\pm}} = \frac{\Delta_{32}^{\pm}}{\Delta_{30}^{\pm}}. \tag{15}$$

Фигурирующие в (15) характеристические функции $\Delta_{3s}^{\pm}(\lambda)$ однозначно определяются заданием своих нулей, а в силу (15) и условия $\tilde{\Lambda}_{3s}^{\pm} = \Lambda_{3s}^{\pm}$ эти множества совпадают (с учетом кратностей). Таким образом, в условиях теоремы имеем:

$$\tilde{\Delta}_{3s}^{\pm} = \Delta_{3s}^{\pm}, \ s = \overline{0,2}. \tag{16}$$

Учитывая, что

$$d_1 = \frac{1}{2}\left(\Delta_{31}^{+} + \Delta_{31}^{-}\right), \qquad d_{12} = \frac{1}{2}\left(\Delta_{32}^{+} + \Delta_{32}^{-}\right),$$

из (16) следует, что $\tilde{d}_1 = d_1$, $\tilde{d}_{12} = d_{12}$. Это влечет, в свою очередь, $\tilde{M}_{12} = M_{12}$, $\tilde{M}_{23} = M_{23}$.

Осталось показать, что функция Вейля M_{13} также однозначно восстанавливается по глобальным данным рассеяния. Рассмотрим решение типа Вейля $\psi_1(\rho)$. Для него условия склейки приводят к системе вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s1}\left(\delta_{s,1} \pm C_s(T,\lambda)\right) + U_1(Y_{11}) = 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s1}\left(\delta_{s,2} \pm C_s'(T,\lambda)\right) + U_2(Y_{11}) = 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s1}\left(\delta_{s,3} \mp C_s''(T,\lambda)\right) + U_3(Y_{11}) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Определитель системы (17) представляет собой целую функцию $\Delta_{10}^{\pm}(\lambda)$ вида

$$\Delta_{10}^{\pm} = \pm \begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_2 & C_3 \\ C_1' & C_2' \pm 1 & C_3' \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \mp 1 \end{vmatrix}.$$

В силу условия G_1 $\Delta_{10}^{\pm}(\lambda)$ имеет только простые нули, совпадающие с 3 степенями элементов множества $\bigcup\limits_{l} Z_{1l}$ и, таким образом, в условиях теоремы $\tilde{\Delta}_{10}^{\pm}(\lambda) = \Delta_{10}^{\pm}(\lambda)$. Заметим теперь, что

$$\frac{1}{2}\left(\Delta_{10}^{\pm} - \Delta_{30}^{\pm}\right) = d_{13} \mp (C_1 + C_2'). \tag{18}$$

С учетом установленных ранее равенств $\tilde{\Delta}_{10}^{\pm}(\lambda) = \Delta_{10}^{\pm}(\lambda)$, $\tilde{\Delta}_{30}^{\pm}(\lambda) = \Delta_{30}^{\pm}(\lambda)$ (18) влечет $\tilde{d}_{13} = d_{13}$ и, следовательно, $\tilde{M}_{13} = M_{13}$. $\square$

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1436.2014К).

Библиографический список

1. *Langese J., Leugering G., Schmidt J.* Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures. Boston : Birkhauser, 1994.
2. *Kuchment P.* Quantum graphs. Some basic structures // Waves Random Media. 2004. Vol. 14. P. S107–S128.
3. *Pokornyi Yu., Borovskikh A.* Differential equations on networks (geometric graphs) // J. Math. Sci. (N.Y.). 2004. Vol. 119, № 6. P. 691–718.
4. *Покорный Ю. В., Белоглазова Т. В., Дикарева Е. В., Перловская Т. В.* О функции Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений разного порядка // Матем. заметки. 2003. Т. 74, № 1. С. 146–148.
5. *Юрко В. А.* Восстановление дифференциальных операторов на звездообразном графе с разными порядками на разных ребрах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 112–116.
6. *Bondarenko N.* An inverse problem for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges. Preprint arXiv:1309.5360v3.
7. *Beals R.* The inverse problem for ordinary differential operators on the line // Amer. J. Math. 1985. Vol. 107. P. 281–366.
8. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.
9. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М. : Физматлит, 1983. 176 с.

Uniqueness of Solution of the Inverse Scattering Problem for Various Order Differential Equation on the Simplest Noncompact Graph with Cycle

M. Yu. Ignatyev

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, IgnatievMU@info.sgu.ru

An inverse scattering problem is studied for variable orders differential operators on simplest noncompact graph with cycle. A uniqueness theorem of recovering coefficients of operators from the scattering data is provided.

Key words: quantum graphs, variable orders differential operators, inverse spectral problems, inverse scattering problems.

The results obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of education and science of the Russian Federation (*project no.* 1.1436.2014K).

References

1. Langese J., Leugering G., Schmidt J. *Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures.* Boston, Birkhauser, 1994.
2. Kuchment P. Quantum graphs. Some basic structures. *Waves Random Media*, 2004, vol. 14, pp. S107–S128.
3. Pokornyi Yu., Borovskikh A. Differential equations on networks (geometric graphs). *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 691–718.
4. Pokornyi Yu. V., Beloglazova T. V., Dikareva E. V., Perlovskaya T. V. Green function for a locally interacting system of ordinary equations of different orders. *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 1, pp. 141–143.
5. Yurko V. A. Recovering Differential Operators on Star-Type Graphs with Different Orders on Different Edges. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 2, pp. 112–116 (in Russian).
6. Bondarenko N. *An inverse problem for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges*. Preprint arXiv:1309.5360v3.
7. Beals R. The inverse problem for ordinary differential operators on the line. *Amer. J. Math.*, 1985, vol. 107, pp. 281–366.
8. Yurko V. A. *Vvedenie v teoriyu obratnyh spectralnyh zadach* [Introduction to the Theory of the Inverse Spectral Problems]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 384 p. (in Russian).
9. Leont'ev A. F. *Tselye functsii. Rjady eksponent* [Entire Functions. Series of Exponentials]. Moscow, Fizmatlit, 1983, 176 p. (in Russian).

УДК 517.956.223+517.575

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В. В. Карачик

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, karachik@susu.ru

Рассматривается классическая задача Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре. Для задачи Дирихле с полиномиальной правой частью и нулевыми граничными данными построено полиномиальное решение. Примененный подход основан на представлении Альманси полигармонических функций, а также на полученном ранее явном представлении гармонических компонент, выраженных через заданную полигармоническую функцию. В случае гармонического уравнения из полученной формулы следует известное представление решения задачи Дирихле через функцию Грина.

Ключевые слова: полигармоническое уравнение и полиномы, задача Дирихле.

Хорошо известна [1] классическая задача Дирихле для неоднородного полигармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

$$\Delta^m u(x) = Q(x), \quad x \in S; \qquad u_{|\partial S} = f_0(s), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}_{|\partial S} = f_{m-1}(s), \quad s \in \partial S,$$

где ν — внешняя нормаль к единичной сфере ∂S. Множество работ посвящено этой задаче. Из последних отметим работы [2, 3], посвященные представлению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения и ее свойствам.

Настоящая работа является продолжением исследований автора, начатых в [4–8] по построению важного класса решений задачи Дирихле — полиномиальных решений. В основе предлагаемого подхода лежит представление Альманси. Имеются многочисленные работы, посвященные обобщению представления Альманси на дифференциальные операторы, отличные от оператора Лапласа (см., напр., [1, 7, 8]). В работе [5] были построены полиномиальные решения задачи Дирихле, а также обобщенной третьей краевой задачи для уравнения Пуассона, а в работе [6] исследовалась задача Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре. Настоящая работа является обобщением этих исследований на задачу Дирихле для l-гармонического уравнения $\Delta^l u(x) = Q(x)$, $x \in S$.

Рассмотрим следующую однородную краевую задачу для неоднородного l-гармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

$$\Delta^l u(x) = Q(x), \qquad x \in S; \qquad u_{|\partial S} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}_{|\partial S} = 0 \tag{1}$$

с полиномиальной правой частью $Q(x)$ и при $n \geqslant 3$.

Пусть $(a, b)_k = a(a + b) \cdots (a + (k-1)b)$ — обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a, b)_0 = 1$. При $b = 1$ пишут $(a, 1)_k = (a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$. Факториальную степень $t^{[k]}$ определим равенством $t^{[k]} = t(t-1) \cdots (t-k+1)$ [9]. Введем оператор $\Lambda u(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k u_{x_k}(x)$. Отметим важное свойство оператора Λ.

Лемма 1. *На единичной сфере ∂S имеет место равенство* $\dfrac{\partial^k u}{\partial \nu^k}_{|\partial S} = \Lambda^{[k]} u_{|\partial S}$.

Исследуем задачу Дирихле (1) при $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$, где $R_{m-2s}(x)$ — однородный гармонический полином степени $m - 2s$. Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Решение $v_s(x)$ однородной задачи Дирихле* (1) *при $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$ имеет вид*

$$v_s(x) = \left(|x|^{2s+2l} - l \binom{s+l}{l} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-1-i} \binom{l-1}{i} \frac{|x|^{2i}}{s+l-i} \right) \frac{R_{m-2s}(x)}{C_{m,s,l}}, \tag{2}$$

где $C_{m,s,l} = (2s+2, 2)_l (2m - 2s + n, 2)_l$.

Доказательство. Пусть полином $v_s(x)$ определяется формулой

$$v_s(x) = \frac{1}{C_{m,s,l}} \left(|x|^{2s+2l} R_{m-2s}(x) - \sum_{i=0}^{l-1} |x|^{2i} H^i_{m-2s}(x) \right), \tag{3}$$

где $H^i_{m-2s}(x)$ — однородные гармонические полиномы степени $m-2s$. Используя значение константы $C_{m,s,l}$ из условия теоремы, получим:

$$\Delta^l v_s(x) = \frac{1}{C_{m,s,l}} \Delta^l \left(|x|^{2s+2l} R_{m-2s}(x) \right) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x),$$

т. е. полином $v_s(x)$ — решение уравнения из (1) при $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$. Будем подбирать однородные полиномы $H^i_{m-2s}(x)$ так, чтобы выполнялись однородные граничные условия из (1). Тогда будем иметь $R_{m-2s}(x) - \sum\limits_{i=0}^{l-1} H^i_{m-2s}(x) = 0 \Rightarrow v_{s|\partial S} = 0$. Далее, используя лемму 1 и для краткости изложения обозначения $\delta_i = m + 2i - 2s$ и $\delta = m + 2l$, получим:

$$\delta R_{m-2s}(x) - \sum_{i=0}^{l-1} \delta_i H^i_{m-2s}(x) = 0 \Rightarrow (\Lambda^{[1]} v_s)_{|\partial S} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_s}{\partial \nu}_{|\partial S} = 0,$$

$$\ldots$$

$$\delta^{[l-1]} R_{m-2s}(x) - \sum_{i=0}^{l-1} \delta_i^{[l-1]} H^i_{m-2s}(x) = 0 \Rightarrow (\Lambda^{[l-1]} v_s)_{|\partial S} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^{l-1} v_s}{\partial \nu^{l-1}}_{|\partial S} = 0,$$

и поэтому для определения $H^i_{m-2s}(x)$ необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=0}^{l-1} \delta_i^{[j]} H^i_{m-2s}(x) = \delta^{[j]} R_{m-2s}(x), \quad j = 0, \ldots, l-1. \tag{4}$$

Определитель $\mathscr{D}$ этой системы уравнений относительно $H^i_{m-2s}(x)$ имеет вид

$$\mathscr{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \delta_0 & \delta_1 & \cdots & \delta_{l-1} \\ \cdots & & & \\ \delta_0^{[l-1]} & \delta_1^{[l-1]} & \ldots & \delta_{l-1}^{[l-1]} \end{vmatrix} = W[\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{l-1}] = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant l-1} (\delta_i - \delta_j),$$

где $W[\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{l-1}]$ — определитель Вандермонда порядка l. Поскольку $\delta_i - \delta_j = 2(i-j)$, то получим $\mathscr{D} = \prod\limits_{i=1}^{l-1} (2i)!!$. Обозначим через $\mathscr{D}_{i-1}$ определитель, получающийся из определителя $\mathscr{D}$ заменой столбца с номером i на столбец свободных членов системы (4). Тогда имеем:

$$\mathscr{D}_{i-1} = R_{m-2s}(x) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \delta_0 & \cdots & \delta_{i-2} & \delta & \delta_i & \cdots & \delta_{l-1} \\ \cdots & & & & & & \\ \delta_0^{[l-1]} & \ldots & \delta_{i-2}^{[l-1]} & \delta^{[l-1]} & \delta_i^{[l-1]} & \ldots & \delta_{l-1}^{[l-1]} \end{vmatrix} =$$

$$= R_{m-2s}(x) W[\delta_0, \ldots, \delta_{i-2}, \delta, \delta_i, \ldots, \delta_{l-1}], \quad i = 1, \ldots, l.$$

Вычислим определитель Вандермонда $W[\delta_0, \ldots, \delta_{i-2}, \delta, \delta_i, \ldots, \delta_{l-1}]$. Имеем:

$$W[\delta_0, \ldots, \delta_{i-2}, \delta, \delta_i, \ldots, \delta_{l-1}] = W[\delta_0, \ldots, \delta_{l-1}] \frac{\prod\limits_{j=0}^{i-2} (\delta - \delta_j) \prod\limits_{j=i}^{l-1} (\delta_j - \delta)}{\prod\limits_{j=0}^{i-2} (\delta_{i-1} - \delta_j) \prod\limits_{j=i}^{l-1} (\delta_j - \delta_{i-1})} =$$

$$= W[\delta_0, \ldots, \delta_{l-1}] \frac{(-1)^{l-i} \prod\limits_{j=0,\, j \neq i-1}^{l-1} (\delta - \delta_j)}{(2i-2)!!(2l-2i)!!} = \mathscr{D} \frac{(-1)^{l-i}}{(l-1)!} \binom{l-1}{i-1} \prod_{j=1,\, j \neq l-i+1}^{l} (s+j),$$

где учтено, что $\delta_i = m + 2i - 2s$ и $\delta = m + 2l$. Отсюда вытекает, что

$$H_{m-2s}^{i-1}(x) = \frac{\mathscr{D}_{i-1}}{\mathscr{D}} = R_{m-2s}(x) l \binom{s+l}{l} (-1)^{l-i} \binom{l-1}{i-1} \frac{1}{s+l-i+1}$$

при $i = 1, \dots, l$. Подставляя полученные значения $H_{m-2s}^{i}(x)$ в формулу (3), получим:

$$v_s(x) = \frac{R_{m-2s}(x)}{C_{m,s,l}} \left(|x|^{2s+2l} - l\binom{s+l}{l} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-1-i} \binom{l-1}{i} \frac{|x|^{2i}}{s+l-i} \right).$$

Отсюда следует равенство (2), утверждаемое в лемме. □

Преобразуем полученное решение.

Лемма 3. *Решение* (2) *однородной задачи Дирихле* (1) *при* $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$ *можно записать в виде*

$$v_s(x) = (|x|^2 - 1)^l \frac{R_{m-2s}(x)}{C_{m,s,l}} \sum_{i=0}^{s} \binom{s+l}{i+l} (|x|^2 - 1)^i, \tag{5}$$

где $C_{m,s,l} = (2s+2, 2)_l (2m - 2s + n, 2)_l$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$P(\tau) = \tau^{s+l} - l\binom{s+l}{l} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-1-i} \binom{l-1}{i} \frac{\tau^i}{s+l-i}.$$

Тогда в соответствии с (2) имеет место равенство

$$v_s(x) = \frac{R_{m-2s}(x)}{C_{m,s,l}} P(|x|^2). \tag{6}$$

Преобразуем полином $P(\tau)$. Поскольку

$$\frac{\tau^i}{s+l-i} = \tau^i \int_0^1 t^{s+l-1-i} dt = \int_0^1 \tau^i t^{l-1-i} t^s dt,$$

то

$$P(\tau) = \tau^{s+l} - l\binom{s+l}{l} \int_0^1 t^s \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} \tau^i (-t)^{l-1-i} dt = \tau^{s+l} - l\binom{s+l}{l} \int_0^1 t^s (\tau - t)^{l-1} dt.$$

Не трудно видеть, что

$$l \int_0^1 (\tau - t)^{l-1} t^s dt = l \int_0^1 (\tau - t)^{l-1} d\frac{t^{s+1}}{s+1} = \frac{l}{s+1} (\tau - t)^{l-1} t^{s+1} \Big|_0^1 + \frac{l(l-1)}{s+1} \int_0^1 (\tau - t)^{l-2} t^{s+1} dt =$$

$$= \frac{l}{s+1} (\tau - 1)^{l-1} + \frac{l(l-1)}{(s+1)(s+2)} (\tau - t)^{l-2} t^{s+2} \Big|_0^1 + \frac{l(l-1)(l-2)}{(s+1)(s+2)} \int_0^1 (\tau - t)^{l-3} t^{s+2} dt = \dots =$$

$$= l!s! \sum_{k=0}^{l-2} \frac{(\tau-1)^{l-1-k}}{(s+k+1)!(l-1-k)!} + \frac{l!s!}{(s+l-1)!} \int_0^1 (\tau - t)^0 t^{s+l-1} dt = l!s! \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(\tau-1)^{l-1-k}}{(s+k+1)!(l-1-k)!} =$$

$$= l!s! \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(\tau-1)^j}{(s+l-j)!j!} = \frac{l!s!}{(s+l)!} \sum_{j=0}^{l-1} \binom{s+l}{j} (\tau - 1)^j.$$

Поэтому

$$P(\tau) = \tau^{s+l} - \sum_{j=0}^{l-1} \binom{s+l}{j} (\tau-1)^j = \sum_{j=l}^{s+l} \binom{s+l}{j} (\tau-1)^j = (\tau-1)^l \sum_{k=0}^{s} \binom{s+l}{k+l} (\tau-1)^k.$$

Подставляя полученное значение $P(\tau)$ в формулу (6), получим (5). □

Теперь можно построить полином $u_0(x)$ — решение задачи Дирихле (1) при $Q(x) = Q_m(x)$ — однородный полином степени m.

Лемма 4. *Решение* (2) *однородной задачи Дирихле* (1) *при* $Q(x) = Q_m(x)$ *можно записать в виде*

$$u_0(x) = (|x|^2-1)^l \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+l}} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{s} |x|^{2i} \binom{l-1+s-i}{l-1} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \frac{m-2s+2j+n/2-1}{j!(l+s-j)!(m-2s+j+n/2-1)_{s+l+1}}. \qquad (7)$$

Доказательство. Разложим однородный полином $Q_m(x)$ по формуле Альманси, а затем применим к каждому слагаемому лемму 3, где s заменяется на k и решение каждой такой однородной задачи обозначается через $v_k(x)$. Используя представление $R_{m-2k}(x)$ из [5], решение $u_0(x)$ рассматриваемой задачи запишем в виде

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} v_k(x) = (|x|^2-1)^l \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{R_{m-2k}(x)}{C_{m,k,l}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+l}{i+l} (|x|^2-1)^i =$$
$$= (|x|^2-1)^l \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{2m-4k+n-2}{(2,2)_k(2k+2,2)_l(2m-2k+n,2)_l} \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|^{2s} \Delta^{s+k} Q_m(x)}{(2,2)_s(2m-4k-2s+n-2,2)_{s+k+1}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+l}{i+l} (|x|^2-1)^i =$$
$$= (|x|^2-1)^l \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s(2m-4k+n-2)|x|^{2s}\Delta^{s+k}Q_m(x)}{(2,2)_s(2,2)_{k+l}(2m-4k-2s+n-2,2)_{s+k+l+1}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+l}{i+l} (|x|^2-1)^i =$$
$$= (|x|^2-1)^l \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Delta^r Q_m(x)}{4^{r+l}} \sum_{s=0}^{r} \frac{(-1)^s(m-2r+2s+n/2-1)|x|^{2s}}{s!(m-2r+s+n/2-1)_{r+l+1}} \sum_{i=0}^{r-s} \frac{(|x|^2-1)^i}{(i+l)!(r-s-i)!}. \qquad (8)$$

В полученном выражении участвует следующий полином:

$$R_m(t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(t-1)^i}{(i+l)!(m-i)!}.$$

Преобразуем его. Воспользуемся обозначением $\tau^{i,!} = \tau^i/i!$ и следующим равенством:

$$\frac{1}{(i+l)!} = \frac{1}{i!}\int_0^1 \tau^i (1-\tau)^{l-1,!} d\tau.$$

Тогда, используя свойства бета функции Эйлера $\mathrm{B}(x)$, будем иметь:

$$R_m(t) = \sum_{i=0}^{m} \int_0^1 \frac{((t-1)\tau)^i}{i!(m-i)!}(1-\tau)^{l-1,!} d\tau = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-\tau)^{l-1,!} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} ((t-1)\tau)^i \, d\tau =$$
$$= \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-\tau)^{l-1,!}((t-1)\tau+1)^m \, d\tau = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-\tau)^{l-1,!}(t\tau+1-\tau)^m \, d\tau =$$
$$= \frac{1}{(l-1)!}\sum_{i=0}^{m} \frac{t^i}{i!(m-i)!}\int_0^1 \tau^i(1-\tau)^{l-1+m-i} d\tau = \frac{1}{(l-1)!}\sum_{i=0}^{m} \frac{\mathrm{B}(i+1,l+m-i)}{i!(m-i)!} t^i =$$
$$= \frac{1}{(l-1)!(l+m)!}\sum_{i=0}^{m} \frac{(l-1+m-i)!}{(m-i)!} t^i.$$

Подставляя значение полинома $R_{r-s}(|x|^2)$ в (8), найдем:

$$u_0(x) = \left(|x|^2-1\right)^l \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Delta^r Q_m(x)}{4^{r+l}} P_r\left(|x|^2\right), \qquad (9)$$

где обозначено

$$P_r(|x|^2) = \frac{1}{(l-1)!}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^s(m-2r+2s+n/2-1)|x|^{2s}}{s!(m-2r+s+n/2-1)_{r+l+1}(l+r-s)!}\sum_{i=0}^{r-s}\frac{(l-1+r-s-i)!}{(r-s-i)!}|x|^{2i}.$$

Теперь преобразуем полином $P_r(|x|^2)$. Имеем:

$$P_r(|x|^2) = \frac{1}{(l-1)!}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^s(m-2r+2s+n/2-1)}{s!(m-2r+s+n/2-1)_{r+l+1}(l+r-s)!}\sum_{i=0}^{r-s}\frac{(l-1+i)!}{i!}|x|^{2r-2i} =$$

$$= \frac{1}{(l-1)!}\sum_{i=0}^{r}\frac{(l-1+i)!}{i!}\sum_{s=0}^{r-i}\frac{(-1)^s(m-2r+2s+n/2-1)}{s!(m-2r+s+n/2-1)_{r+l+1}(l+r-s)!}|x|^{2r-2i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{r}\frac{(l-1+r-i)!}{(l-1)!(r-i)!}|x|^{2i}\sum_{s=0}^{i}\frac{(-1)^s(m-2r+2s+n/2-1)}{s!(m-2r+s+n/2-1)_{r+l+1}(l+r-s)!}.$$

Заменяя r на s и s на j получим:

$$P_s(|x|^2) = \sum_{i=0}^{s}\binom{l-1+s-i}{l-1}|x|^{2i}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\frac{m-2s+2j+n/2-1}{j!(m-2s+j+n/2-1)_{s+l+1}(l+s-j)!}.$$

Подставляя полученное значение $P_s(|x|^2)$ в (9) получим (7). $\square$

Еще немного преобразуем полученное решение $u_0(x)$.

Теорема 1. *Решение однородной задачи Дирихле* (1) *при* $Q(x) = Q_m(x)$ *записывается в виде*

$$u_0(x) = (|x|^2-1)^l\sum_{s=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l-1}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+l}(s+l)!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{|x|^{2k}}{(m-2s+k+n/2)_{s+l}}. \tag{10}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 4 для записи решения $u_0(x)$ задачи (1) при $Q(x) = Q_m(x)$. В формуле (7) обозначим константу

$$A_{s,i} = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j\frac{A_s+2j-1}{j!(l+s-j)!(A_s+j-1)_{s+l+1}},$$

где $A_s = m-2s+n/2$, и преобразуем ее к более простому виду. Для этого воспользуемся формулой замечания 1 из работы [6], в которой было сделано предположение о виде решения $u_0(x)$. Из нее следует, что

$$A_{s,i} = (-1)^i\frac{(l+s-i)_i}{i!(l+s)!(A_s+i)_{s+l}}. \tag{11}$$

Докажем эту формулу методом математической индукции. Пусть $i=0$. Тогда

$$A_{s,0} = \sum_{j=0}^{0}(-1)^j\frac{A_s+2j-1}{j!(l+s-j)!(A_s+j-1)_{s+l+1}} = \frac{A_s-1}{(l+s)!(A_s-1)_{s+l+1}} = \frac{(l+s)_0}{(l+s)!(A_s)_{s+l}},$$

и, значит, формула (11) верна при $i=0$. Пусть формула (11) верна при некотором $i\in\mathbb{N}_0$. Докажем ее верность и при $i+1$. Используя предположение индукции, найдем:

$$A_{s,i+1} = \sum_{j=0}^{i+1}\frac{(-1)^j(A_s+2j-1)}{j!(l+s-j)!(A_s+j-1)_{s+l+1}} = A_{s,i} + \frac{(-1)^{i+1}(A_s+2i+1)}{(i+1)!(l+s-i-1)!(A_s+i)_{s+l+1}} =$$

$$\underset{\text{инд.}}{=} \frac{(-1)^i(l+s-i)_i}{i!(l+s)!(A_s+i)_{s+l}} + \frac{(-1)^{i+1}(A_s+2i+1)}{(i+1)!(l+s-i-1)!(A_s+i)_{s+l+1}} =$$

$$= (-1)^{i+1}\frac{(A_s+2i+1)(l+s)-(A_s+i+s+l)(i+1)}{(A_s+i)_{s+l+1}(l+s-i-1)!(i+1)!} =$$

$$= (-1)^{i+1}\frac{(A_s+i)(l+s)-(A_s+i)(i+1)}{(A_s+i)_{s+l+1}(l+s-i-1)!(i+1)!} = \frac{(-1)^{i+1}(A_s+i)(l+s-i-1)}{(A_s+i)_{s+l+1}(l+s-i-1)!(i+1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{i+1}(l+s-i-1)}{(A_s+i+1)_{s+l}(l+s-i-1)!(i+1)!} = (-1)^{i+1}\frac{(l+s-i-1)_{i+1}}{(i+1)!(l+s)!(A_s+i+1)_{s+l}},$$

т. е. формула (11) верна и при $i+1$. Подставляя значение $A_{s,i}$ из (11) в формулу (7) и учитывая, что

$$\binom{l-1+s-i}{l-1}\frac{(l+s-i)_i}{i!} = \frac{(l-1+s)!}{(l-1)!s!}\,\frac{s!}{i!(s-i)!} = \binom{l-1+s}{l-1}\binom{s}{i}$$

и $A_s = m-2s+n/2$, и заменяя индекс i на k, получим:

$$u_0(x) = (|x|^2-1)^l\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+l}(l+s)!}\sum_{i=0}^{s}(-1)^i|x|^{2i}\binom{l-1+s-i}{l-1}\frac{(l+s-i)_i}{i!(A_s+i)_{s+l}} =$$
$$= (|x|^2-1)^l\sum_{s=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l-1}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+l}(s+l)!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{|x|^{2k}}{(m-2s+k+n/2)_{s+l}}.$$

Теорема доказана. □

Из полученной формулы (10) при $l=1,2$ следуют формулы (23) и (17) из работ [5, 6] соответственно. Пусть функция $v(x)$, заданная в $\overline{S}$, может быть записана в виде $v_0(x) = (|x|^2-1)^l S(x)$, где $S(x)\in C^{l-1}(\overline{S})$ и $l\in\mathbb{N}$. Тогда она удовлетворяет однородным условиям Дирихле на ∂S: $v_{|\partial S}=0$, $\frac{\partial v}{\partial \nu}_{|\partial S}=0,\ldots,\frac{\partial^{l-1}v}{\partial\nu^{l-1}}_{|\partial S}=0$. На основании этого утверждения полином $u_0(x)$ из теоремы 1 удовлетворяет всем однородным условиям Дирихле из (1). Еще немного преобразуем многочлен $u_0(x)$, являющийся решением задачи Дирихле (1) при $Q(x)=Q_m(x)$ так, чтобы затем иметь возможность получить формулу для неоднородного полинома $Q(x)$.

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-t|x|^2)^s(1-t)^{s+l-1}}{(2s)!!(2s+2l)!!}\Delta^s Q_m(tx)t^{n/2-1}\,dt. \tag{12}$$

Доказательство. Пользуясь формулой (10), запишем:

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{2^s(2s+2l)!!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{(s+1)(s+2)\cdots(s+l-1)}{(A-2s+k)_{s+l}}\,|x|^{2k}, \tag{13}$$

где $A=m+n/2$. Преобразуем внутреннюю сумму в полученном выражении. Используя определение символа Похгаммера $(a)_k$, данное после формулы (1), свойство гамма функции $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ и связь гамма $\Gamma(x)$ и бета $\mathrm{B}(x)$ функций Эйлера можем записать:

$$\frac{1}{(A-2s+k)_{s+l}} = \frac{1}{(A-2s+k)\cdots(A-s+k+l-1)} = \frac{\Gamma(m+n/2-2s+k)}{\Gamma(m+n/2-s+k+l)} =$$
$$= \frac{\mathrm{B}(s+l,m+n/2-2s+k)}{\Gamma(s+l)} = \frac{1}{(s+l-1)!}\int_0^1(1-t)^{s+l-1}t^{m+n/2+k-2s-1}\,dt.$$

С помощью этого равенства запишем внутреннюю сумму в (13) в виде

$$\frac{1}{s!}\int_0^1(1-t)^{s+l-1}t^{m+n/2-2s-1}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}|x|^{2k}t^k\,dt = \frac{1}{s!}\int_0^1(1-t)^{s+l-1}(1-t|x|^2)^s\,t^{m-2s}t^{n/2-1}\,dt.$$

Следовательно, многочлен $u_0(x)$ можно записать в форме

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-t)^{s+l-1}(1-t|x|^2)^s}{(2s+2l)!!(2s)!!}\Delta^s Q_m(tx)t^{n/2-1}\,dt,$$

что совпадает с формулой (12). □

Получим решение задачи Дирихле (1) с неоднородным многочленом $Q(x)$.

Теорема 2. *Решение задачи Дирихле* (1) *можно записать в виде*

$$u(x)=\frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\int_0^1\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+l-1}}{(2s)!!(2s+2l)!!}\Delta^s Q(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha. \qquad (14)$$

Замечание. *Функцию (оператор) Грина задачи Дирихле* (1) *в единичном шаре в случае полиномиальных функций $Q(x)$ можно записать в виде*

$$G_l[Q](x;\alpha)=\frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+l-1}}{(2s)!!(2s+2l)!!}\,\alpha^{n/2-1}(\Delta^s Q)(\alpha x)$$

и тогда решение (14) *задачи Дирихле в шаре* (1) *имеет вид*

$$u_l(x)=\int_0^1 G_l[Q](x;\alpha)\,d\alpha. \qquad (15)$$

Теорема 3. *Формула* (15) *при $l=1$ совпадает с представлением решения однородной задачи Дирихле в единичном шаре через функцию Грина $G(x,\xi)$*

$$u_1(x)=\int_0^1 G[Q](x;\alpha)\,d\alpha=-\frac{1}{\omega_n}\int_S G(x,\xi)Q(\xi)\,d\xi,$$

где $G(x,\xi)=E(x,\xi)-E(x/|x|,\xi|x|)$, $E(x,\xi)=(n-2)^{-1}|x-\xi|^{2-n}$ — элементарное решение уравнения Лапласа, а ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $Q(x)=|x|^{2k}H_s^{(i)}(x)$, где $H_s^{(i)}(x)$ — один из полиномов ортогональной системы гармонических полиномов [10] с нормировкой $\int_{\partial S}(H_s^{(i)}(x))^2ds=\omega_n$. Из леммы 2 следует, что

$$\int_0^1 G\big[|x|^{2k}H_s^{(i)}(x)\big](x;\alpha)\,d\alpha=\frac{|x|^{2k+2}-1}{(2k+2)(2k+2s+n)}H_s^{(i)}(x). \qquad (16)$$

В [5, теорема 13] было показано, что

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,\xi)|\xi|^{2k}H_s^{(i)}(\xi)\,d\xi=\frac{|x|^{2k+2}H_s^{(i)}(x)}{(2k+2)(2k+2s+n)}-\frac{H_s^{(i)}(x)}{(2k+2)(2s+n-2)}.$$

Далее, поскольку при $|x|<|\xi|$ справедливо представление (см. [5, лемма 11])

$$E(x,\xi)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{-(2s+n-2)}}{2s+n-2}\sum_{i=1}^{h_s}H_s^{(i)}(x)H_s^{(i)}(\xi),$$

где $h_s=\dfrac{2s+n-2}{n-2}\binom{s+n-3}{n-3}$ [9], то в силу равномерной сходимости ряда по $|\xi|<1$ и ортогональности полиномов $H_s^{(i)}(x)$ на единичной сфере имеем:

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|<1}E(x/|x|,\xi|x|)|\xi|^{2k}H_s^{(i)}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|x/|x||^{-(2m+n-2)}}{2m+n-2}\sum_{j=1}^{h_m}H_m^{(j)}(x/|x|)\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|<1}H_m^{(j)}(\xi|x|)|\xi|^{2k}H_s^{(i)}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+n-2}\sum_{i=1}^{h_m}H_m^{(j)}(x)\int_0^1 r^{2k+m+s+n-1}\,dr\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}H_m^{(j)}(\xi)H_s^{(i)}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{H_s^{(i)}(x)}{(2s+n-2)(2k+2s+n)}.$$

Таким образом, в силу (16)

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_S G(x,\xi)|\xi|^{2k}H_s^{(i)}(\xi)\,d\xi=\frac{|x|^{2k+2}H_s^{(i)}(x)}{(2k+2)(2k+2s+n)}-\frac{H_s^{(i)}(x)}{2s+n-2}\Big(\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+2s+n}\Big)=$$

$$= \frac{|x|^{2k+2}-1}{(2k+2)(2k+2s+n)} H_s^{(i)}(x) = \int_0^1 G\big[|x|^{2k} H_s^{(i)}(x)\big](x;\alpha)\, d\alpha.$$

Поскольку любой полином $Q(x)$ в силу формулы Альманси может быть разложен по полиномам вида $|x|^{2k}H_s^{(i)}(x)$, то теорема доказана. $\square$

Библиографический список

1. *Nicolescu N.* Probléme de l'analyticité par rapport á un opérateur linéaire // Studia Math. 1958. Vol. 16. P. 353–363.
2. *Кальменов Т. Ш., Сураган Д.* О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 441–445.
3. *Кангужин Б. Е., Кошанов Б. Д.* Представление и свойства функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений // Матем. журн. 2008. Т. 8, № 1(27). С. 50–58.
4. *Карачик В. В.* Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 4. С. 61–74.
5. *Карачик В. В.* Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 9. С. 1674–1694.
6. *Карачик В. В., Антропова Н. А.* Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 2. С. 250–254.
7. *Карачик В. В.* Об одном разложении типа Альманси // Матем. заметки. 2008. Т. 83, № 3. С. 370–380.
8. *Карачик В. В.* Применение формулы Альманси к построению полиномиальных решений задачи Дирихле для уравнения второго порядка // Изв. вузов. Матем. 2012. Т. 6. С. 24–35.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М. : Наука, 1966.
10. *Karachik V. V.* On one set of orthogonal harmonic polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126, № 12. P. 3513–3519. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-05019-9.

Green Function of the Dirichlet Boundary Value Problem for Polyharmonic Equation in a Ball Under Polynomial Data

V. V. Karachik

South Ural State University, 76, pr. Lenina, Chelyabinsk, 454080, Russia, karachik@susu.ru

The classical Dirichlet boundary value problem for the polyharmonic equation in the unit ball is considered. For this problem with polynomial right-hand side and zero boundary data a polynomial solution is constructed. Our approach is based on the Almansi representation of polyharmonic functions and on the previously obtained an explicit representation of the harmonic components, expressed through the given polyharmonic function. In the case of the harmonic equation the known representation of the solution through the Green function is obtained.

Key words: Polyharmonic equation, polyharmonic polynomials, Dirichlet problem.

References

1. Nicolescu N. Probléme de l'analyticité par rapport á un opérateur linéaire. *Studia Math.*, 1958, vol. 16, pp. 353–363.
2. Kal'menov T. S., Suragan D. On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation. *Differ. Equations*, 2012, vol. 48, no. 3. pp. 441–445. DOI: 10.1134/S0012266112030160.
3. Kanguzhin B. E., Koshanov B. D. The Green function representation and properties in the Dirichlet problem for polyharmonic equations. *Math. J.*, 2008, vol. 8, no. 1. pp. 50–58.
4. Karachik V. V. On Solvability Conditions for the Neumann Problem for a Polyharmonic Equation in the Unit Ball. *J. Appl. Industr. Math.*, 2014, vol. 8, no. 1, pp. 1–14. DOI: 10.1134/S1990478914010074.
5. Karachik V. V. Construction of polynomial solutions to some boundary value problems for Poisson's equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1567–1587. DOI: 10.1134/s0965542511090120.
6. Karachik V. V., Antropova N. A. Polynomial Solutions of the Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in the Ball. *Differ. Equations*, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 251–256. DOI: 10.1134/S0012266113020122.
7. Karachik V. V. On an expansion of Almansi type. *Math. Notes*, 2008, vol. 83, no. 3–4, pp. 335–344. DOI: 10.1134/S000143460803005X.
8. Karachik V. V. Application of the Almansi formula for

constructing polynomial solutions to the Dirichlet problem for a second-order equation. *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 6, pp. 20–29. DOI: 10.3103/S1066369X120 60035.
9. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions*. Vol. 2. New York, McGraw-Hill, 1953.
10. Karachik V. V. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, vol. 126, no 12, pp. 3513–3519. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-05019-9.

УДК 517.984

БАЗИСЫ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ИНВОЛЮЦИЮ

В. П. Курдюмов[1], А. П. Хромов[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KurdyumovVP@yandex.ru
[2]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

При предположении существования обратного к интегральному оператору, ядро которого терпит разрывы на диагоналях единичного квадрата, доказана базисность Рисса его собственных и присоединенных функций в пространстве $L_2[0,1]$.

Ключевые слова: базис Рисса, резольвента, краевое условие.

В данной работе исследуется вопрос о базисности Рисса в $L_2[0,1]$ собственных и присоединенных функций (с. п. ф.) интегрального оператора:

$$Af = \alpha \int\limits_0^x A_1(x,t) f(t)\,dt + \int\limits_{1-x}^1 A_2(1-x,t) f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $\alpha^2 \neq 1$, $A_i(x,t) (i = 1,2)$ имеют непрерывные производные:

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t) \qquad (0 \le k+l \le 2, \quad l \le 1)$$

при $x \ge t$ для $A_1(x,t)$, при $x \le t$ для $A_2(x,t)$, и $A_1(x,x-0) = A_2(x,x+0) = 1$. Таким образом, ядро оператора A терпит разрыв на диагоналях $t = x$ и $t = 1-x$.

Оператор (1) и более общего вида интегральные операторы с ядрами, допускающими разрывы самих ядер или некоторых их производных впервые рассматривались одним из авторов [1]. В дальнейшем таким операторам было уделено много внимания (см., напр., [2–4]).

В [5] для решения вопроса о базисности Рисса с. п. ф. оператора (1) было проведено сведение этого оператора к оператору $\tilde{A}$ в пространстве вектор-функций размерности 2 и установлена базисность Рисса с. п. ф. оператора (1) при дополнительном предположении существования оператора $\tilde{A}^{-1}$. В настоящей работе базисность Рисса с. п. ф. оператора (1) устанавливается лишь при предположении существования обратного к оператору (1),что упрощает доказательство основного результата.

1. СВЕДЕНИЕ К ОПЕРАТОРАМ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Сведем оператор A к оператору в пространстве вектор-функции размерности 2. Введем следующий оператор:

$$\tilde{A}\tilde{f} = (\tilde{A}\tilde{f})(x) = \tilde{A}\tilde{f}(x) = \int\limits_0^1 \tilde{A}(x,t)\tilde{f}(t)\,dt,$$

где $\tilde{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (T — знак транспонирования),

$$\tilde{A}(x,t) = \begin{pmatrix} \alpha\varepsilon(x,t)A_1(x,t) & \varepsilon(x,t)A_2(1-x,1-t) \\ \varepsilon(t,x)A_2(x,t) & \alpha\varepsilon(t,x)A_1(1-x,1-t) \end{pmatrix},$$

$\varepsilon(x,t) \equiv 1$ при $x \ge t$, $\varepsilon(x,t) = 0$ при $x < t$.

Так же, как и в [5], имеет место

Теорема 1. *Если* $y = Af$, *то* $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{f}$, *где* $\tilde{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(1-x)$, $\tilde{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y(1-x)$. *Обратно: если* $\tilde{y} = \tilde{A}\tilde{f}$ *и* $f_1(x) = f_2(1-x)$, *то* $y_1(x) = y_2(1-x)$ *и* $y_1 = Af_1$.

Замечание. Ядро $\tilde{A}(x,t)$ терпит разрыв лишь на линии $t = x$.

Пусть $P = \left\{\tilde{f}(x) : \tilde{f}(x) = (f(x), f(1-x))^T, f \in L_2[0,1]\right\}$. Ясно, что P является подпространством пространства $L_2^2[0,1]$. Обозначим через $\tilde{A}_0$ сужение оператора $\tilde{A}$ на P.

Теорема 2. *Пусть существует* A^{-1}, *тогда существует и* $\tilde{A}_0^{-1}$, *причем если*

$$\tilde{y}(x) = \tilde{A}_0\tilde{f}(x), \tag{2}$$

то

$$\tilde{A_0}^{-1}\tilde{y}(x) = ((A^{-1}y)(x), (A^{-1}y)(1-x))^T,$$

где $y(x)$ *есть первая компонента вектора* $\tilde{y}(x)$.

Доказательство. Пусть имеет место (2). Тогда по теореме 1 $y(x) = Af(x)$. Отсюда $\tilde{f}(x) = ((A^{-1}y)(x), (A^{-1}y)(1-x))^T$. Теорема доказана.

Займемся построением оператора $\tilde{A_0}^{-1}$. Продифференцируем $\tilde{y}(x) = \tilde{A}_0\tilde{f}(x)$:

$$\tilde{y}'(x) = \int_0^1 \tilde{A}_x(x,t)\tilde{f}(t)\,dt + B^{-1}\tilde{f}(x),$$

где $B^{-1} = \tilde{A}(x, x-0) - \tilde{A}(x, x+0) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$. Отсюда

$$B\tilde{y}'(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{A}_1\tilde{f}, \tag{3}$$

где $\tilde{A}_1\tilde{f} = \int_0^1 B\tilde{A}_x(x,t)\tilde{f}(t)\,dt$. Покажем, что $\tilde{A}_1\tilde{f} \in P$. Так как по теореме 1 $\tilde{y}(x) = (y(x), y(1-x))^T$, то

$$B\tilde{y}'(x) = \frac{1}{1-\alpha^2}\begin{pmatrix} -\alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y'(x) \\ -y'(1-x) \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\alpha^2}\left(-\alpha y'(x) + y'(1-x), y(x) - \alpha y'(1-x)\right)^T \in P,$$

и поэтому из (3) следует, что $\tilde{A}_1\tilde{f} \in P$. Следовательно, оператор A_1 отображает Р в себя.

Пусть $\{\sqrt{2}\varphi_k(x)\}$ — ортонормированный базис в $L_2[0,1]$, состоящий из достаточно гладких функций. Тогда для $f \in L_2[0,1]$:

$$f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)_1\varphi_k(x), \qquad f(1-x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)_1\varphi_k(1-x),$$

где $(\cdot,\cdot)_1$ — скалярное произведение в $L_2[0,1]$. Отсюда, так как для $\tilde{f}, \tilde{g} \in P$ выполняется $(\tilde{f}, \tilde{g}) = 2(f,g)_1$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2^2[0,1]$, то для $\tilde{f} \in P$ получим:

$$\tilde{f}(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)_1(\varphi_k(x), \varphi_k(1-x))^T = \sum_{k=1}^{\infty}(\tilde{f}, \tilde{\varphi_k})\tilde{\varphi_k}(x).$$

Ясно, что $\{\tilde{\varphi_k}(x)\}$ есть ортонормированный базис в P. Так же как и в [6, с. 267–268], представим оператор $\tilde{A}_1$ на подпространстве Р в виде $\tilde{A}_1 = W + V$, где $\|W\| < 1$ ($\|\cdot\|$ — норма в $L_2^2[0,1]$), а V — конечномерный:

$$V\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{m}(\tilde{f}, \tilde{\psi_k})\tilde{\varphi_k}(x).$$

Из (3) получаем:

$$(E + W)\tilde{f}(x) = B\tilde{y'}(x) - V\tilde{f}(x). \tag{4}$$

Отсюда следует, что оператор $E+W$, а следовательно, и оператор W отображают P в P. А так как $\|W\|<1$, то оператор $(E+W)^{-1}$ существует и он также есть отображение P в себя. Из (4) получаем:

$$(E+W)^{-1}B\tilde{y}'(x)=\tilde{f}(x)+(E+W)^{-1}V\tilde{f}(x). \tag{5}$$

Так же как и в [5, лемма 1], имеет место

Лемма 1. *Оператор $\tilde{A_0}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang} M=m$, *где*

$$M=\begin{pmatrix} E+(\theta,\psi)^T \\ \int\limits_0^1 \tilde{A}(0,T)\theta^T(t)dt \end{pmatrix}.$$

Здесь E — единичная матрица $m\times m$, $(\theta,\psi)=(\tilde{\theta}_j,\tilde{\psi}_k)_{j,k=1}^m$,

$$\tilde{\theta_j}=(E+W)^{-1}\tilde{\varphi}_j, \theta^T=(\tilde{\theta_1},\dots,\tilde{\theta_m}), \psi=(\tilde{\psi_1},\dots,\tilde{\psi_m}).$$

Обозначим через Δ минор матрицы M, образованный из первых m строк, через $\Delta_{i,j}$ — его алгебраические дополнения, и пусть $W_1(x,t)$ — ядро оператора W_1, определенного соотношением

$$(E+W)^{-1}=E+W_1. \tag{6}$$

Теорема 3. *Область определения оператора $\tilde{A}_0^{-1}$ принадлежит подпространству P и справедливо представление*

$$\tilde{A}_0^{-1}\tilde{y}(x)=l(\tilde{y})(x)=B\tilde{y}'(x)+a_1(x)\tilde{y}(0)+a_2(x)\tilde{y}(x)+\int\limits_0^1 a(x,t)\tilde{y}(t)dt, \tag{7}$$

$$\tilde{M}_0\tilde{y}(0)+\tilde{M}_1\tilde{y}(1)=0, \tag{8}$$

где

$$a_1(x)=B_1(x)-\frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^m\tilde{\theta}_k(x)(b_j-\int\limits_0^1 S_j(t)B_1(t)dt)\Delta_{jk},\qquad B_1(x)=W_1(x,1)BE_1-W_1(x,0)B,$$

$$E_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \tilde{\theta}_k(x)=(E+W_1)\tilde{\varphi}_k(x),\qquad b_j=S_j(1)BE_1-S_j(0)B,\qquad S_j(x)=\bar{\tilde{\psi}}_j^T(x),$$

$$a_2(x)=(W_1(x,x-0)-W_1(x,x+0))B,$$

$$a(x,t)=B(x,t)+\frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^m\tilde{\theta}_k(x)(S_j'(t)B-S_j(t)a_2(t)-\int\limits_0^1 S_j(\tau)B(\tau,t)d\tau)\Delta_{jk},\quad B(x,t)=-W_{1_t}(x,t)B,$$

$$S_j'(x)=p_j(x)BA_1(x)+\int\limits_0^1 p_j(t)B\tilde{A}_{xt}(t,x)dt, \tag{9}$$

$$p_j(x)=\bar{\tilde{\varphi}}_k^T(x),\qquad A_1(x)=\tilde{A}_\zeta(\zeta,x)\Big|_{\zeta=x-0}-\tilde{A}_\zeta(\zeta,x)\Big|_{\zeta=x+0},\qquad \tilde{M}_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \tilde{M}_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Принадлежность области определения оператора $\tilde{A}_0^{-1}$ подпространству P следует из теоремы 1. Докажем формулы (7), (8). Для определенности считаем. что $\Delta\neq 0$. Из (5) получаем систему

$$\Big((E+W)^{-1}B\tilde{y}',\tilde{\psi}_j\Big)=(\tilde{f},\tilde{\psi}_j)+\Big((E+W)^{-1}V\tilde{f},\tilde{\psi}_j\Big)=$$
$$=(\tilde{f},\tilde{\psi}_j)+\sum_{k=1}^m(\tilde{f},\tilde{\psi}_k)(\tilde{\theta}_k,\tilde{\psi}_j)\qquad(j=1,\dots,m). \tag{10}$$

Определитель системы (10) есть Δ. Найдем явно $(\tilde f, \tilde\psi_k)$ из (10) и подставим в (5):

$$\tilde f(x) = (E+W)^{-1}B\tilde y'(x) - \sum_{k=1}^m (\tilde f, \tilde\psi_k)\tilde\theta_k(x) =$$

$$= (E+W)^{-1}B\tilde y'(x) - \frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^m \Big((E+W)^{-1}B\tilde y', \tilde\psi_j\Big)\Delta_{jk}\tilde\theta_k(x). \qquad (11)$$

Подставим (6) в (11) и рассмотрим каждое из полученных слагаемых. Имеем:

$$(E+W)^{-1}B\tilde y'(x) = B\tilde y'(x) + W_1 B\tilde y'(x). \qquad (12)$$

Из (6) следует справедливость соотношений

$$W_1(x,t) = -W(x,t) - \int_0^1 W(x,\tau)W_1(\tau,t)\,d\tau = -W(x,t) - \int_0^1 W_1(x,\tau)W(\tau,t)d\tau, \qquad (13)$$

где $W(x,t)$ — ядро оператора W. Из (13), так же как и в [7, с. 385–386], получаем, что $W_1(x,t)$ обладает теми же дифференциальными свойствами, что и $W(x,t)$, а в силу равенства $W = \tilde A_1 - V$ теми же свойствами, что и $\tilde A_x(x,t)$. В частности, $W_1(x,t)$ терпит разрыв на диагонали $t = x$. Проводя в (12) интегрирование по частям и учитывая формулу

$$\tilde y(1) = E_1\tilde y(0), \qquad (14)$$

найдем

$$(E+W)^{-1}B\tilde y'(x) = B\tilde y'(x) + B_1(x)\tilde y(0) + a_2(x)\tilde y(x) + \int_0^1 B(x,t)\tilde y(t)dt. \qquad (15)$$

Из (15) сразу получаем:

$$\Big((E+W)^{-1}B\tilde y', \tilde\psi_j\Big) = \Big(B\tilde y'(x) + B_1(x)\tilde y(0) + a_2(x)\tilde y(x) + \int_0^1 B(x,t)\tilde y(t)dt, \tilde\psi_j(x)\Big). \qquad (16)$$

Так как для $f, g \in L_2^2[0,1]$ справедливы формулы

$$(f,g) = \int_0^1 (f(x), g(x))_2 dx = \int_0^1 \bar g^T(x) f(x)dx, \qquad (17)$$

где $(\cdot,\cdot)_2$ — скалярное произведение в двумерном комплексном пространстве, то для первого слагаемого из (16) находим:

$$\Big(B\tilde y'(x), \tilde\psi_j(x)\Big) = \int_0^1 \Big(B\tilde y'(x), \tilde\psi_j(x)\Big)_2\,dx = \int_0^1 \Big(\tilde y'(x), \bar B^T\tilde\psi_j(x)\Big)_2\,dx = \int_0^1 \bar{\tilde\psi}_j^T(x)B\tilde y'(x)\,dx.$$

Проводя здесь интегрирование по частям, учитывая формулу (14), получим:

$$\Big(B\tilde y'(x), \tilde\psi_j(x)\Big) = b_j\tilde y(0) - \int_0^1 S_j'(t)B\tilde y(t)\,dt, \qquad (18)$$

где для $S_j'(t)$ имеет место формула (9), которая получается из равенства $\tilde\psi_k = \tilde A_1^*\tilde\varphi_k$, записанного в виде $\tilde\psi_k(x) = \int_0^1 \bar{\tilde A}_t^T(t,x)\bar B^T\tilde\varphi_k(t)dt$. Для второго слагаемого из (16), опять используя (17), находим:

$$\Big(B_1(x)\tilde y(0), \tilde\psi_j(x)\Big) = \int_0^1 \Big(B_1(t)\tilde y(0), \tilde\psi_j(t)\Big)_2\,dt = \int_0^1 \Big(\tilde y(0), \bar B_1^T\tilde\psi_j(t)\Big)_2\,dt = \int_0^1 S_j(t)B_1(t)\,dt\tilde y(0). \qquad (19)$$

Аналогично рассматриваются третье и последнее слагаемые из (16):

$$\Big(a_2(x)\tilde{y}(x), \tilde{\psi}_j(x)\Big) = \int\limits_0^1 S_j(t)a_2(t)\tilde{y}(t)dt, \tag{20}$$

$$\Big(\int\limits_0^1 B(x,t)\tilde{y}(x)dt, \tilde{\psi}_j(x)\Big) = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^1 S_j(x)B(x,t)dx\Big)\tilde{y}(t)\,dt. \tag{21}$$

Теперь из (11), (15), (16), (18)–(21) получаем (7).

Докажем справедливость краевых условий (8). Так как $\tilde{y}(x) = \tilde{A}_0\tilde{f}(x)$, то $\tilde{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ удовлетворяют условию $\tilde{y}(0) = \int\limits_0^1 \tilde{A}(0,t)l(\tilde{y})(t)dt$, первая компонента которого в силу соотношения $y_1(x) = y_2(1-x)$ определяет два равносильных условия $y_1(0) = 0$ и $y_2(1) = 0$. Они определяют краевые условия одномерных операторов $\left(A^{-1}y_1\right)(x)$ и $\left(A^{-1}y_2\right)(1-x)$ из теоремы 2, и в векторной форме имеют вид (8). Теорема доказана.

Замечание. В (7) матричные функции $a_1(x), a_2'(x)$ непрерывны, $a(x,t)$ непрерывна при $x \le t$ и при $x \ge t$.

В дальнейшем считаем, что область определения оператора (7), (8) может не принадлежать подпространству P. Такой оператор рассматриваем как результат сведения оператора A^{-1} (который согласно теоремам 2 и 3 является интегродифференциальным, содержащим инволюцию) к оператору, не содержащему инволюцию в пространстве вектор-функций размерности 2.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА (7), (8)

Рассмотрим краевую задачу:

$$B\tilde{y}'(x) + a_1(x)\tilde{y}(0) + a_2(x)\tilde{y}(x) + \int\limits_0^1 a(x,t)\tilde{y}(t)dt - \lambda\tilde{y}(x) = \tilde{f}(x),$$

$$\tilde{M}_0\tilde{y}(0) + \tilde{M}_1\tilde{y}(1) = 0,$$

где $a_i(x)$ $(i = 1,2)$, $a(x,t)$ — те же, что и в теореме 3, $\tilde{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $\tilde{f}(x) \in P$. Выполним в ней замену переменных $\tilde{y}(x) = \Gamma y(x)$, где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{\alpha^2-1}-\alpha & \sqrt{\alpha^2-1}+\alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда получим:

$$y'(x) + P_1(x)y(0) + P_2(x)y(x) + Ny(x) - \lambda Dy(x) = m(x), \tag{22}$$

$$M_0y(0) + M_1y(0) = 0, \tag{23}$$

где $P_i(x) = D\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma (i = 1,2)$, $Ny(x) = \int\limits_0^1 N(x,t)y(t)\,dt$, $N(x,t) = D\Gamma^{-1}a(x,t)\Gamma$, $m(x) = D\Gamma^{-1}\tilde{f}(x)$, $M_0 = \tilde{M}_0\Gamma$, $M_1 = \tilde{M}_1\Gamma$, $D = \Gamma^{-1}B^{-1}\Gamma = \operatorname{diag}(\omega, -\omega)$, $\omega = \sqrt{\alpha^2-1}$.

Положим $H_0(x) = \operatorname{diag}(h_1(x), h_2(x))$, где $h_i(x) = e^{-\int\limits_0^x p_{ii}(t)dt}$, $p_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $P_2(x)$. Пусть, далее, $H_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & r_2(x) \\ r_1(x) & 0 \end{pmatrix}$ — кодиагональная матрица, являющаяся решением матричного уравнения:

$$H_0'(x) + P_2(x)H_0(x) + (H_1(x)D - DH_1(x)) = 0.$$

Так же как и лемма 16 из [3], получается

Лемма 2. *Замена* $y(x) = H(x,\lambda)v(x)$, *где* $H(x,\lambda) = H_0(\lambda) + \dfrac{1}{\lambda}H_1(x)$, *приводит систему* (22), (23) *к виду*

$$v'(x) + P_1(x,\lambda)v(0) + P_2(x,\lambda)v(x) + \int\limits_0^1 N_\lambda(x,t)v(t)dt - \lambda Dv(x) = m(x,\lambda), \tag{24}$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \tag{25}$$

где $P_1(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_1(x)H(0,\lambda)$, $P_2(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)\left[H_1'(x) + P_2(x)H_1(x)\right]$, $N_\lambda(x,t) = H^{-1}(x,\lambda)N(x,t)H(t,\lambda)$, $M_{0\lambda} = M_0H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1H(1,\lambda)$, $m(x\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x)$.

Рассмотрим простейший случай системы (24), (25):

$$\omega'(x) - \lambda D\omega(x) = m(x) \tag{26}$$

$$U(\omega) = 0. \tag{27}$$

Здесь сейчас $m(x)$ — произвольная вектор-функция с компонентами из $L_2[0,1]$. Обозначим через $S_1(S_2)$ полуплоскость в комплексной области, определяемую неравенством $\operatorname{Re}\lambda\omega \le 0$ ($\operatorname{Re}\lambda\omega \ge 0$). Для определенности будем рассматривать полуплоскость S_1.

Обозначим $g_1(x,t,\lambda) = \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega(x-t)}$, $g_2(x,t,\lambda = -\varepsilon(t,x)e^{-\lambda\omega(x-t)})$, $g(x,t,\lambda) = \operatorname{diag}(g_1(x,t,\lambda), g_2(x,t,\lambda))$. Имеют место следующие утверждения (см. [5, леммы 3, 4]).

Лемма 3. *Для решения* $\omega(x) = \omega(x,\lambda)$ *системы* (26), (27) *имеет место формула:*

$$\omega(x,\lambda) = g_\lambda m(x) - V(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)\Phi(m,\lambda),$$

где $g_\lambda m(x) = \int\limits_0^1 g(x,t,\lambda)m(t)dt$, $V(x,\lambda) = \operatorname{diag}(e^{\lambda\omega x}, e^{\lambda\omega(1-x)})$, $\Delta(\lambda) = U(V(x,\lambda))$, $\Phi(m,\lambda) = \int\limits_0^1 U_x(g(x,t,\lambda))m(t)\,dt$ *(*U_x *означает, что* U *применяется к* $g(x,t,\lambda)$ *по переменной* x*). Считается, что* λ *таково, что* $det\Delta(\lambda) \ne 0$.

Лемма 4. *Имеет место асимптотическая формула:*

$$\det\Delta(\lambda) = [\theta_0] + [\theta_1]e^{2\lambda\omega},$$

где $\theta_0 = (\omega + \alpha)h_2(1)$, $\theta_1 = (\omega - \alpha)h_1(1)$, $[a] = a + O(1/\lambda)$.

Из леммы 4 следует, что $\theta_0\theta_1 \ne 0$. Обозначим через $S_{1\delta}$ область, полученную из S_1 удалением всех точек $\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{1}{2}\ln\left(-\dfrac{\theta_0}{\theta_1}\right) + k\pi i\right)$ $(k = 0, \pm1, \ldots)$, являющихся нулями функции $\theta_0 + \theta_1e^{2\lambda\omega}$, вместе с окрестностями, ограниченными окружностями Γ_k одного и того же достаточно малого радиуса δ. Из леммы 4 следует, что в области $S_{1\delta}$ при достаточно больших $|\lambda|$ справедлива оценка

$$|\det\Delta(\lambda)| \ge C > 0, \tag{28}$$

где C не зависит от λ.

Из леммы 3 и оценки (28) получаем следующее утверждение о структуре решения краевой задачи (26), (27).

Теорема 4. *Если* $\lambda \in S_{1\delta}$ *и* $|\lambda|$ *достаточно велико, то существует единственное решение* $\omega(x,\lambda) = R_{1\lambda}m$ *краевой задачи* (26), (27), *для компонент которого имеют место представления:*

$$(R_{1\lambda}m)_1 = \int\limits_0^x e^{\lambda\omega(x-t)}m_1(t)\,dt + \Phi_1(m,\lambda)\sigma(x,\lambda),$$

$$(R_{1\lambda}m)_2 = -\int\limits_x^1 e^{-\lambda\omega(x-t)}m_2(t)\,dt + \Phi_2(m,\lambda)\sigma(x,\lambda),$$

где $\Phi_j(m,\lambda)$ *— линейные комбинации с ограниченными по* λ *коэффициентами интегралов* $\int\limits_0^1 \sigma(t,\lambda)m_j(t)dt$ *(здесь под* $\sigma(t,\lambda)$ *понимается любая из функций* $e^{\lambda\omega t}, e^{\lambda\omega(1-t)}$*) и* $m_j(t)$ $(j = 1,2)$ *— компоненты вектора* $m(t)$.

Изучим теперь краевую задачу (24), (25). Обозначим через $q(x)$ любой из векторов:

$$H_0^{-1}(x)m(x), -H_0^{-1}(x)H_1(x)H^{-1}(x)m(x).$$

Через $P(x)$ обозначим любую из матриц:

$$H_2(x) = H_0^{-1}(x)\left(H_1'(x) + P_2(x)H_1(x)\right), H_0^{-1}(x)P_1(x)H_0(0),$$
$$H_0^{-1}(x)P_1(x)H_1(0) - H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)P_1(x)H_0(0).$$

Далее, через M_λ обозначим любой из операторов:

$$N_1L_\lambda^{-1}, \qquad H_2(x)L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}, \qquad N_2L_\lambda^{-1}R_{1\lambda},$$

где $N_1 = H_0^{-1}(x)NH_0(x)$, $L_\lambda = E + R_{1\lambda}P_2(x,\lambda) + R_{1\lambda}N_\lambda$, N_λ — интегральный оператор с ядром $N_\lambda(x,t)$, $N_2 = H_0^{-1}(x)\left(NH_1(x) - H_1(x)H_0^{-1}NH_0(x)\right)$.

Наконец, через $b_1(\lambda)$ обозначим любой из векторов (не зависящих от x): $\alpha(\lambda)R_{1\lambda}q(x)|_{x=0}$, $\alpha(\lambda)R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}q(x)|_{x=0}$; $b_2(\lambda) = \alpha(\lambda)R_{1\lambda}\, M_\lambda q(x)|_{x=0}$, где $\alpha(\lambda)$ — некоторые квадратные матрицы с ограниченными по λ элементам из некоторого конечного набора таких матриц; $Q(\lambda)$ — вектор, с компонентами, допускающими оценку $O(\lambda^{-2}\|f\|)$, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.

Теорема 5. *Если λ — то же, что и в теореме 4, то существует единственное решение $v(x,\lambda)$ задачи (24), (25), которое представимо в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами следующих векторов:*

$$R_{1\lambda}q(x), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}q(x), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda q(x), \qquad R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}q(x), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}q(x),$$
$$R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda), \qquad R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda),$$
$$\frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}P(x)b_1(\lambda), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda P(x)b_1(\lambda),$$
$$\frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}P(x)b_2(\lambda), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}P(x)b_2(\lambda), \qquad Q(\lambda).$$

Доказательство. Для решения задачи (24), (25) имеем:

$$v(x,\lambda) = -R_{1\lambda}\left(P_1(x,\lambda)v(0,\lambda) + P_2(x,\lambda)v(x,\lambda) + N_\lambda v - m(x,\lambda)\right),$$

отсюда

$$L_\lambda v(x,\lambda) = -R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)v(0,\lambda) + R_{1\lambda}m(x,\lambda). \tag{29}$$

Для доказательства существования оператора L_λ^{-1} получим сначала представление для оператора $N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda)$. Имеем:

$$H^{-1}(x,\lambda) = \left(H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)\right)^{-1} = \left[H_0(x)\left(E + \frac{1}{\lambda}H_0^{-1}(x)H_1(x)\right)\right]^{-1} =$$
$$= H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}\left[H_0^{-1}(x)H_1(x)\left(E + \frac{1}{\lambda}H_0^{-1}(x)H_1(x)\right)^{-1}H_0^{-1}(x)\right] = H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}H_2(x,\lambda), \tag{30}$$

где $H_2(x,\lambda)$ — матрица, стоящая в квадратных скобках. Далее, так как для $H_2(x,\lambda)$ справедливо представление:

$$H_2(x,\lambda) = H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{31}$$

то из (30) и (31) получаем:

$$N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda) = \left(H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}H_2(x,\lambda)\right)NH(x,\lambda) =$$
$$= \left(H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}\left(H_0^{-1}H_1(x)H_0^{-1}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right)N\left(H_0(x) + \frac{1}{\lambda}H_1(x)\right) = N_1 + \frac{1}{\lambda}N_2 + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{32}$$

Покажем, что в $S_{1\delta}$ при $|\lambda|$ достаточно больших

$$\|R_{1\lambda}N_\lambda\|_1 = o(1), \tag{33}$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_2^2[0,1]$. В самом деле, из (32) следует, что

$$\|R_{1\lambda}N_\lambda - R_{1\lambda}N_1\|_1 = \|R_{1\lambda}(N_\lambda - N_1)\|_1 = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

а по лемме 6 из [7] $\|R_{1\lambda}N_1\|_1 = \|R_{1\lambda}H_0^{-1}NH_0\|_1 = o(1)$. Поэтому оценка (33) имеет место и, следовательно, существует оператор L_λ^{-1}. Из (29) находим

$$v(x,\lambda) = -L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)v(0,\lambda) + L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}m(x,\lambda). \tag{34}$$

Для нахождения $v(0,\lambda)$ из (34) получаем уравнение

$$\left(E + L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)\big|_{x=0}\right)v(0,\lambda) = L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}m(x\lambda)|_{x=0}, \tag{35}$$

в котором по лемме 6 из [7] $L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)|_{x=0} = o(1)$. Поэтому из (35) следует, что

$$v(0,\lambda) = \alpha(\lambda)L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}m(x,\lambda)\,|_{x=0}\,. \tag{36}$$

Из определения L_λ следует что

$$L_\lambda^{-1}R_{1\lambda} = R_{1\lambda} - R_{1\lambda}P_2(x,\lambda)L_\lambda^{-1}R_{1\lambda} - R_{1\lambda}N_\lambda L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}. \tag{37}$$

Найдем нужное представление для $P_2(x,\lambda)$. Используя (30), находим:

$$P_2(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\,H^{-1}(x,\lambda)\left(H_1'(x) + P_2(x)H_1(x)\right) = \frac{1}{\lambda}\left(H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}\,H_2(x,\lambda)\right)\left(H_1'(x) + P_2(x)H_1(x)\right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\,H_2(x) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{38}$$

Теперь, используя представления (32), (38) и обозначение для M_λ, найдем из (37), что оператор $L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}$ представим в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов

$$R_{1\lambda}, \qquad \frac{1}{\lambda}\,R_{1\lambda}M_\lambda, \qquad R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}, \qquad O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{39}$$

где $O(\lambda^{-2})$ — оператор с компонентами, имеющими указанную оценку. Далее, используем (30) и (31) для

$$m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x) = \left(H_0^{-1}(x) - \frac{1}{\lambda}\left(H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right)m(x) =$$
$$= q_1(x) + q_2(x) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{40}$$

где $q_1(x) = H_0^{-1}(x)m(x)$, $q_2(x) = -H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}m(x)$. Из (40) и представления $L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}$ в виде линейной комбинации операторов из (39) получим, что $L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}m(x,\lambda)$ представим в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами векторов

$$\frac{1}{\lambda^j}R_{1\lambda}q(x), \qquad \frac{1}{\lambda^j}R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}q(x) \qquad (j=0,1),$$
$$\frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda q(x), \qquad O\left(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\right). \tag{41}$$

Тогда вектор $v(0,\lambda) = \alpha(\lambda)L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}m(x,\lambda)|_{x=0}$ из (36) представим в виде линейной комбинации векторов

$$b_1(\lambda), \qquad \frac{1}{\lambda}b_1(\lambda), \qquad \frac{1}{\lambda}b_2(\lambda), \qquad O\left(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\right). \tag{42}$$

Наконец, используя формулу

$$P_1(x,\lambda) = P_{11}(x) + \frac{1}{\lambda}P_{12}(x) + O\left(\lambda^{-2}\right),$$

где $P_{11}(x) = H_0^{-1}(x)P_1(x)H_0(0)$, $P_{12}(x) = H_0^{-1}(x)P_1(x)H_0(0) - H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}P_1(x)H_0(0)$, найдем, что оператор $L_\lambda^{-1}R_{1\lambda}P_1(x,\lambda)$ представим в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов

$$\frac{1}{\lambda^j}R_{1\lambda}P(x), \qquad \frac{1}{\lambda^j}R_{1\lambda}M_\lambda R_{1\lambda}P(x) \qquad (j=0,1), \qquad \frac{1}{\lambda}R_{1\lambda}M_\lambda P(x), \qquad O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{43}$$

Теперь из (34), (41)–(43) следует утверждение теоремы.

Так же как и лемма 5 из [5], получается

Лемма 5. *Каждая компонента вектор-функции $R_{1\lambda}q(x)$ представима в виде линейной комбинации с постоянными коэффициентами операторов*

$$\int_0^x e^{\lambda\omega(x-t)}Tf(t)\,dt, \qquad \int_x^1 e^{-\lambda\omega(x-t)}Tf(t)\,dt$$

и с ограниченным по λ коэффициентами операторов

$$\sigma(x,\lambda)\int_0^x \sigma(t,\lambda)Tf(t)\,dt,$$

где $\sigma(x,\lambda)$ имеет тот же смысл, что и в теореме 4, $Tf(x)$ — один из операторов: $\Theta(x)f(x)$ или $\Theta(x)f(1-x)$, где $\Theta(x)$ — любая функция из некоторого конечного набора непрерывных функций.

3. РЕЗОЛЬВЕНТА ОПЕРАТОРА A

Теорема 6. *Если $R_\lambda = (E-\lambda A)^{-1}A$ существует, то*

$$R_\lambda f = y_1(x), \tag{44}$$

где $y_1(x)$ — первая компонента решения системы

$$l(\tilde y)(x) - \lambda\tilde y(x) = \tilde f(x), \tag{45}$$

$$\tilde M_0\tilde y(0) + \tilde M_1\tilde y(1) = 0, \tag{46}$$

где $\tilde f(x) \in P$. Обратно, пусть $\tilde y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ есть решение системы (45), (46) *и λ таково, что однородная краевая задача для* (45), (46) *имеет только нулевое решение, тогда R_λ существует и определяется по формуле* (44).

Доказательство. Пусть R_λ существует и $y_1(x) = R_\lambda f(x)$. Тогда

$$y_1(x) - \lambda A y_1(x) = Af(x). \tag{47}$$

Отсюда, как и в доказательстве теоремы 1, получим $\tilde y(x) - \lambda\tilde A_0\tilde y(x) = \tilde A_0\tilde f(x)$, где $\tilde y(x) = (y_1(x), y_1(1-x))^T$. Используя теорему 3, получим (45), (46).

Доказательство обратного утверждения приведем так же как и в лемме 1 из [2]. Пусть $\tilde y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ удовлетворяет системе (45), (46). Используя теоремы 2 и 3, не трудно показать, что вектор $\tilde u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$, где $u_1(x) = y_2(1-x)$, $u_2(x) = y_1(1-x)$, также удовлетворяет (45), (46). Значит, $\tilde y(x) = \tilde u(x)$ и, следовательно,

$$y_2(x) = y_1(1-x), \tag{48}$$

т. е. $\tilde y(x) \in P$. Поэтому система (45), (46) может быть записана в виде $\tilde A_0^{-1}\tilde y(x) - \lambda\tilde y(x) = \tilde f(x)$ или

$$\tilde y(x) - \lambda\tilde A_0\tilde y(x) = \tilde A_0\tilde f(x). \tag{49}$$

Используя (48) в первой компоненте уравнения (49), получим (47).

Покажем, что оператор $E-\lambda A$ обратим. В самом деле, если $v_1(x)-\lambda A v_1(x)=0$, то, как показано ранее, $\tilde{v}(x)=(v_1(x),v_2(x))^T$, где $v_2(x)=v_1(1-x)$, удовлетворяет уравнению (49) при $\tilde{f}(x)=0$. Значит, $v_1(x)=0$ и, следовательно, $E-\lambda A$ обратим. А тогда из (47) следует, что $y_1(x)=R_\lambda f(x)$. Лемма доказана.

Все дальнейшие рассуждения с очевидными изменениями повторяют приведенные в [5], поэтому их приводим без доказательств.

Лемма 6. *Если $v(x,\lambda)=(v_1(x,\lambda),v_2(x,\lambda))^T$ есть решение системы* (24), (25), *то*

$$R_\lambda f(x)=\sum_{j=1}^{2}\gamma_{ij}h_j(x)v_j(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{2}r_j(x)v_j(x,\lambda),$$

где γ_{ij} — элементы матрицы Γ, $r_1(x)=\gamma_{12}r_{21}(x)$, $r_2(x)=\gamma_{11}r_{12}(x)$, $r_{ij}(x)$ — элементы матрицы $H_1(x)$.

Обозначим $\sigma(x,\lambda_1,k)=\sigma(x,\lambda)|_{\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i}$; через $\omega(x,t,\lambda_1,k)$ — любую из функций $\varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega(x-t)}$ или $\varepsilon(t,x)e^{-\lambda\omega(x-t)}$ при $\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i$. Введем операторы A_k:

$$A_k g=\int_0^1 A(x,t,\lambda_1,k)g(t)dt,$$

где $A(x,t,\lambda_1,k)=\psi(x)\sigma(x,\lambda_1,k)\sigma(t,\lambda_1,k)$ или $A(x,t,\lambda_1,k)=\psi(x)\omega(x,t,\lambda_1,k)$, $\psi(x)$ совпадает с 1, либо с одной из функций $h_j(x),r_j(x)$ из леммы 6, и операторы M_k:

$$M_k g=\int_0^1 M(x,t,\lambda_1,k)g(t)dt,$$

где $M(x,t,\lambda_1,k)=M(x,t,\lambda)|_{\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i}$, $M(x,t,\lambda)$ есть одна из $M_{kj}(x,t,\lambda)$ $(k,j=1,2)$, а $M_{kj}(x,t,\lambda)$ являются компонентами ядра интегрального оператора M_λ.

Введем еще следующие функционалы: $d_1(f,k)=A_kTf|_{x=0}$, $d_2(f,k)=A_kM_kA_kTf|_{x=0}$, $d_3(f,k)=A_kM_kTf|_{x=0}$. Здесь в $A_kM_kA_k$ операторы A_k перед M_k и A_k после M_k, вообще говоря, различны.

Пусть $\lambda\in S_{1\delta}$, $\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i$ и λ_1 принадлежит ограниченной области в комплексной плоскости.

Лемма 7. *При больших $|\lambda|$ в $S_{1\delta}$ имеет место представление*

$$R_\lambda f|_{\lambda\omega=\lambda_1+k\pi i}=\Omega(x,\lambda_1,k;f)+O\left(\frac{\|f\|}{k^2}\right),$$

где $\Omega(x,\lambda_1,k;f)$ есть линейная комбинация с ограниченными по λ_1 и k коэффициентами следующих всевозможных операторов:

$$A_kTf,\qquad \frac{1}{k}A_kTf,\qquad A_kM_kA_kTf,\qquad \frac{1}{k}A_kM_kTf;$$
$$d_s(f,k)A_kp(x),\qquad d_s(f,k)A_kM_kA_kp(x),\qquad \frac{1}{k}d_s(f,k)A_kM_kp(x)\qquad (s=1,2);$$
$$\frac{1}{k}d_3(f,k)A_kp(x),\qquad \frac{1}{k}d_3(f,k)A_kM_kA_kp(x),$$

где $p(x)$ — любой элемент матрицы $P(x)$. При этом, если в первом операторе A_kTf ядро A_k совпадает с $\psi(x)\omega(x,t,\lambda_1,k)$, то коэффициент при A_kTf не зависит от λ_1 и k.

4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Лемма 8. *Если в $d_s(f,k)$ $(s=1,2)$ ядра операторов A_k, M_k отличаются лишь параметром k, то справедливы оценки:*

$$\sum_k |d_s(f,k)|^2\le \|f\|^2\qquad (s=1,2),$$

где C не зависит от λ_1 из ограниченной области.

Пусть Γ_k — окружности из определения $S_{1\delta}$ и без ограничений общности будем считать, что Γ_k находятся целиком в S_1. Пусть J — любой конечный набор достаточно больших по модулю целых чисел.

Лемма 9. *Имеет место оценка*

$$\| \sum_{k\in J} \int\limits_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda \| \le C,$$

где постоянная C не зависит от J.

Положим

$$E(\lambda_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda,$$

где теперь $\{\lambda_k\}$ — все характеристические значения оператора A и Γ_k — замкнутый контур в λ-плоскости, содержащий внутри себя лишь одно λ_k.

Лемма 10. *Если $f(x) \in L_2[0,1]$ и $E(\lambda_k)f = 0$ для всех k, то $f(x) = 0$ почти всюду.*

Из леммы 4 следует, что достаточно большие $|\lambda_k|$ простые, тогда, используя леммы 9 и 10 так же как и в [4, теорема 5], получаем основной результат.

Теорема 7. *Система собственных и присоединенных функций оператора A образует базис Рисса в $L_2[0,1]$.*

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (*проект* № 1.1520.2014K).

Библиографический список

1. *Хромов А. П.* Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Матем. заметки. 1998. Т. 64, № 6. С. 932–942. DOI: 10.4213/mzm1472.
2. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрыва производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50. DOI: 10.4213/sm601.
3. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142. DOI: 10.4213/sm1534.
4. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110. DOI: 10.4213/mzm92.
5. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 6. С. 106–121. DOI: 10.4213/im7797.
6. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М. : Наука, 1965.
7. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.

Riescz Basis Property of Eigen and Associated Functions of Integral Operators with Discontinuous Kernels, Containing Involution

V. P. Kurdumov, A. P. Khromov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, KurdyumovVP@yandex.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

For invertible integral operator which kernel is discontinuous on the diagonals of the unit square Riescz basis property of its eigen and associated functions in $L_2[0,1]$ is proved.

Key words: Riescz basis, resolvent, boundary condition.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (*project no.* 1.1520.2014K).

References

1. Khromov A. P. Inversion of integral operators with kernels discontinuous on the diagonal. *Math. Notes*, 1998, vol. 64, no. 6, pp. 804–813. DOI: 10.1007/BF02313039.
2. Kornev V. V., Khromov A. P. Equiconvergence of

expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1451–1469. DOI: 10.1070/SM2001v192n10ABEH000601.

3. Khromov A. P. Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 11, pp. 1669–1696. DOI: 10.1070/SM2006v197n11ABEH003817.

4. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz bases of eigenfunctions of an integral operator with a variable limit of integration. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 1, pp. 90–102. DOI: 10.1023/B:MATN.0000036745.53704.08.

5. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz bases of eigenfunctions of integral operators with kernels discontinuous on the diagonals. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 1175–1189. DOI: 10.1070/IM2012v076n06ABEH002620.

6. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *The elements of functional analysis*. Moscow, Nauka, 1965 (in Russian).

7. Hromov A. P. Equiconvergence theorems for integro-differential and integral operators. *Math. USSR-Sb.*, 1982, vol. 42, no. 3, pp. 331–355. DOI: 10.1070/ SM1982 v042 n03 ABEH002257.

УДК 517.518.3+519.216.8

МАРТИНГАЛЫ И ТЕОРЕМЫ КАНТОРА – ЮНГА – БЕРНШТЕЙНА И ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

М. Г. Плотников[1], **Ю. А. Плотникова**[2]

[1]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и механики, Вологодская государственная молочнохозяйственная академия им. Н. В. Верещагина, MGPlotnikov@gmail.com

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и механики, Вологодская государственная молочнохозяйственная академия им. Н. В. Верещагина, JAPlotnikova@yandex.ru

Во многих работах изучались вопросы единственности представления функций одномерными и кратными рядами по системе Хаара. Хорошо известно, что подпоследовательность частичных сумм ряда Хаара с номерами 2^k является мартингалом на некотором фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$. В нашей работе вводится понятие $\mathscr{U}$-множества для мартингалов и устанавливается ряд теорем единственности для мартингалов на произвольном компактном фильтрованном вероятностном пространстве. В частности, доказывается, что каждое множество $U \in \cup_{k=0}^{\infty}\mathscr{F}_k$ с $\mathbf{P}(U) = 0$ является $\mathscr{U}$-множеством для мартингалов на компактном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ (теорема типа Кантора – Юнга – Бернштейна). Приведенный результат дополняется рядом теорем типа Валле-Пуссена.

Ключевые слова: множество единственности, мартингал, фильтрованное вероятностное пространство, теорема Кантора – Юнга – Бернштейна, теорема Валле-Пуссена.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из фундаментальных результатов в теории ортогональных рядов является теорема Кантора – Юнга – Бернштейна (см., напр., [1; гл. 1, § 70, гл. 14]): *если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

всюду на $[0, 2\pi)$*, за исключением, быть может, точек из некоторого не более чем счетного множества, сходится к нулю, то этот ряд является* <u>*тождественно нулевым*</u>*, т. е. все его коэффициенты равны нулю*. С этой теоремы началось развитие разветвленной теории единственности представления функции ортогональными рядами. В частности, для тригонометрических рядов интересным оказался вопрос, можно ли заменить не более чем счетные множества в теореме Кантора – Юнга – Бернштейна на множества из более широкого класса. Оказывается, ответ на этот вопрос связан не только с их метрическими, но и с арифметическими характеристиками (см. по этому поводу [1, гл. 14] и библиографию, содержащуюся в данной монографии).

Теорему Кантора – Юнга – Бернштейна можно усиливать и в другом направлении, рассматривая вместо сходимости к нулю сходимость к конечной функции. В этом направлении хорошо известна (см., напр., [1, гл. 14, § 4]) теорема Валле-Пуссена (мы приводим эту теорему в не самой общей формулировке): *если ряд* (1) *сходится всюду, кроме, быть может, точек некоторого счетного множества, к суммируемой функции f, то данный ряд является рядом Фурье функции f.*

Возможность получить аналоги теорем Кантора – Юнга – Бернштейна и Валле-Пуссена изучалась и для других систем функций. Важную роль в теории функций играет система функций Хаара $\{H_n\}$ на отрезке $[0, 1]$ (см. [2, гл. 3]).

В 1910 г. А. Хаар показал, что если ряд $\sum c_n H_n$ сходится к нулю всюду на $[0, 1]$, то он является тождественно нулевым. Но доказательство Хаара содержало ошибку. Верное доказательство было получено в 1964 г. независимо сразу в 4 работах Ф. Г. Арутюняна, Ф. Г. Арутюняна и А. А. Талаляна, М. Б. Петровской, В. А. Скворцова. С другой стороны, в подобных теоремах сходимость всюду нельзя заменить даже на сходимость всюду, кроме одной точки: *для каждой точки* $x_0 \in [0, 1]$ *найдется нетривиальный ряд Хаара, сходящийся к нулю всюду на* $[0, 1]$, *кроме точки* x_0 (результат Г. Фабера, Д. МакЛафлина и Д. Прайса). По поводу результатов выше см. [3] и содержащуюся в этой работе библиографию. Таким образом, аналог теоремы Кантора – Юнга – Бернштейна для рядов Хаара справедлив лишь для сходимости к нулю всюду.

Для d-кратных рядов Хаара на $[0, 1]^d$ теорема типа Кантора – Юнга – Бернштейна установлена для сходимости по прямоугольникам [4], по 1/2-ограниченным прямоугольникам [5], а для сходимости по кубам она не имеет места [6] (речь идет о сходимости всюду). Теоремы типа Валле-Пуссена для одномерных и кратных рядов по системе Хаара содержатся в большом количестве работ (см., напр., [7–10]).

Ряды по системе Хаара интересны тем, что допускают большое количество представлений. Хорошо известен [11; 12, гл. 7, § 1] следующий факт. При подходящем выборе области определения функций Хаара, а также фильтрованного вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$, подпоследовательность частичных сумм ряда Хаара с номерами 2^k является мартингалом. Подобное представление имеет место и для кратных рядов Хаара.

Целью данной заметки является изучение вопроса о справедливости теорем типа Кантора – Юнга – Бернштейна и Валле-Пуссена для мартингалов на произвольных фильтрованных вероятностных пространствах $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$. Отметим, что теоремы типа Валле-Пуссена для сходимости почти всюду хорошо известны (см., напр., [12, гл. 7; 13; 14]), однако в них на мартингалы накладываются ограничения типа равномерной интегрируемости. Здесь мы будем рассматривать поточечную сходимость вместо сходимости почти всюду, но при этом будем обходиться без дополнительных ограничений на поведение мартингалов.

1. МАРТИНГАЛЫ: ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ

Всюду $\mathbf{N}$ означает множество целых неотрицательных чисел. До конца работы считаем, что имеется *фильтрованное вероятностное пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$, т. е. [15, гл. 1, § 2а, п. 5] вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ с выделенной последовательностью $(\mathscr{F}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ σ-алгебр (называемой *фильтрацией*) такой, что

$$\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{F}.$$

Пусть $(X_k)_{k=0}^{\infty}$ или просто (X_k) — последовательность случайных величин на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Тогда (X_k) называется *мартингалом* (по отношению к фильтрации $(\mathscr{F}_k)$), если для всех $k \in \mathbf{N}$ величина X_k является $\mathscr{F}_k$-измеримой, $\mathbf{E}\,|X_k| < \infty$ и

$$\mathbf{E}\,(X_{k+1}\,|\,\mathscr{F}_k) = X_k \quad (\mathbf{P}\text{-п. н.}), \quad k \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

(См. по этому поводу [12, гл. 7, § 1].) Отметим, что (2) эквивалентно тому, что

$$\int_B X_{k+1}\, d\mathbf{P} = \int_B X_k\, d\mathbf{P} \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbf{N}, \quad B \in \mathscr{F}_k. \tag{3}$$

Мартингал (X_k) будем называть *тривиальным*, если $X_k = 0$ ($\mathbf{P}$-п. н.) для каждого $k \in \mathbf{N}$. Множество $A \subset \Omega$ назовем *множеством единственности* для мартингалов (иначе, *множеством типа* $\mathscr{U}_M$), если только тривиальный мартингал (X_k) может обладать тем свойством, что $\lim_{k\to\infty} X_k(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega \setminus A$.

Множество $A \subset \Omega$ назовем *множеством типа* $\mathscr{V}_M$, если каждый мартингал (X_k), обладающий тем свойством, что $\lim_{k\to\infty} X_k(\omega) = \xi(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega \setminus A$ (ξ — случайная величина с $\mathbf{E}\,|\xi| < \infty$), восстанавливается по случайной величине ξ так:

$$X_k = \mathbf{E}\,(\xi\,|\,\mathscr{F}_k) \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}) \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Очевидно, каждое множество типа $\mathscr{V}_M$ является множеством типа $\mathscr{U}_M$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. *Пусть заданы $l \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$, мартингал (Y_k) и множество $A \in \mathscr{F}_l$, причем $\mathbf{P}(A) > 0$ и*

$$Y_l \geqslant \varepsilon \quad \text{всюду на} \quad A. \tag{5}$$

Тогда $\mathbf{P}(A') > 0$, где $A' \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in A : \ Y_{l+1}(\omega) \geqslant \varepsilon\}$.

Доказательство. Из (5) вытекает неравенство

$$\int_A Y_l \, d\mathbf{P} \geqslant \varepsilon \cdot \mathbf{P}(A). \tag{6}$$

Из определения множества A' следует, что

$$Y_{l+1} < \varepsilon \quad \text{всюду на } A \setminus A'.$$

Поэтому

$$\int_{A \setminus A'} Y_{l+1} \, d\mathbf{P} < \varepsilon \cdot \mathbf{P}(A \setminus A') \leqslant \varepsilon \cdot \mathbf{P}(A). \tag{7}$$

Имеем:

$$\int_{A'} Y_{l+1} \, d\mathbf{P} = \int_A Y_{l+1} \, d\mathbf{P} - \int_{A \setminus A'} Y_{l+1} \, d\mathbf{P} \stackrel{(3)}{=} \int_A Y_l \, d\mathbf{P} - \int_{A \setminus A'} Y_{l+1} \, d\mathbf{P} \stackrel{(6),\,(7)}{>} \varepsilon \cdot \mathbf{P}(A) - \varepsilon \cdot \mathbf{P}(A) = 0,$$

т. е. $\int_{A'} Y_{l+1} \, d\mathbf{P} > 0$. Отсюда $\mathbf{P}(A') > 0$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ обладает тем свойством, что*

$$\begin{gathered} \bigcap_{k=l}^{\infty} A_k \neq \varnothing \quad \text{для всякого } l \in \mathbf{N} \text{ и любой невозрастающей последовательности} \\ (A_k)_{k=l}^{\infty} \text{ множеств таких, что } A_k \in \mathscr{F}_k \text{ и } \mathbf{P}(A_k) > 0 \text{ для всех } k \geqslant l. \end{gathered} \tag{8}$$

Предположим, что заданы $l \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$, мартингал (Y_k) и множество $A_l \in \mathscr{F}_l$, для которых выполнено условие (5). *Тогда $\Omega_\varepsilon \cap A_l \neq \varnothing$, где*

$$\Omega_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in \Omega : \ \varliminf_{k \to \infty} Y_k(\omega) \geqslant \varepsilon\}. \tag{9}$$

Доказательство. Многократно применив лемму 1, отыщем невозрастающую последовательность $(A_k)_{k=l}^{\infty}$ множеств такую, что $\mathbf{P}(A_k) > 0$, $A_k \in \mathscr{F}_k$ и

$$Y_k(\omega) \geqslant \varepsilon \quad \text{всюду на } A_k \tag{10}$$

для всех $k \geqslant l$. Из (9) и (10) видно, что

$$\Omega_\varepsilon \cap A_l \supset \bigcap_{k=l}^{\infty} A_k. \tag{11}$$

Теперь утверждение леммы вытекает из (8) и (11). Лемма доказана. □

Лемма 3. *Предположим, что пространство $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ обладает свойством* (8). *Пусть заданы $l \in \mathbf{N}$, мартингал (Y_k) и множество $B \in \mathscr{F}_l$ такие, что*

$$\int_B Y_l \, d\mathbf{P} > 0. \tag{12}$$

Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение $\Omega_\varepsilon \cap B \neq \varnothing$, где Ω_ε определяется формулой (9).

Доказательство. Из (12) вытекает наличие $\varepsilon > 0$ и множества $A \in \mathscr{F}_l$, для которых выполнено условие (5). Теперь утверждение данной леммы вытекает из леммы 2. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Предположим, что пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8). *Пусть заданы множество* U *и мартингал* (Y_k), *причем* $U \in \mathscr{F}_q$ *для некоторого* $q \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(U) = 0$ *и*

$$\varliminf_{k\to\infty} Y_k(\omega) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \omega \in \Omega \setminus U. \tag{13}$$

Тогда

$$\int_B Y_l\, d\mathbf{P} \leqslant 0$$

для всех $l \geqslant q$ *и множеств* $B \in \mathscr{F}_l$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют $l \geqslant q$ и множество $B \in \mathscr{F}_l$ такие, что $\int_B Y_l\, d\mathbf{P} > 0$. Тогда $B \setminus U \in \mathscr{F}_l$ и $\int_{B\setminus U} Y_l\, d\mathbf{P} > 0$. Согласно лемме 3 найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $(\Omega_\varepsilon \cap B) \setminus U = \Omega_\varepsilon \cap (B \setminus U) \neq \varnothing$, Ω_ε определяется формулой (9). Значит, существует точка $\omega_0 \in B \setminus U$ такая, что $\varliminf\limits_{k\to\infty} Y_k(\omega_0) \geqslant \varepsilon$. Последнее соотношение противоречит (13). Лемма доказана. □

Лемма 5. *Предположим, что пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8). *Пусть заданы множество* U, *случайная величина* ξ *с* $\mathbf{E}\,|\xi| < \infty$ *и мартингал* (X_k), *причем* $U \in \mathscr{F}_q$ *для некоторого* $q \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(U) = 0$ *и*

$$\varliminf_{k\to\infty} X_k(\omega) \leqslant \xi(\omega) \quad \text{для всех } \omega \in \Omega \setminus U.$$

Тогда

$$\int_B X_l\, d\mathbf{P} \leqslant \int_B \xi\, d\mathbf{P}$$

для всех $l \geqslant q$ *и множеств* $B \in \mathscr{F}_l$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 4 к мартингалу (Y_k), где $Y_k \equiv X_k - \mathbf{E}\,(\xi \mid \mathscr{F}_k)$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Лемма доказана. □

3. ТЕОРЕМЫ КАНТОРА – ЮНГА – БЕРНШТЕЙНА И ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ МАРТИНГАЛОВ

Теорема 1. *Предположим, что пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8). *Пусть заданы*: *множество* U, *причем* $U \in \mathscr{F}_q$ *для некоторого* $q \in \mathbf{N}$ *и* $\mathbf{P}(U) = 0$; *случайная величина* ξ *с* $\mathbf{E}\,|\xi| < \infty$; *мартингал* (X_k) *такой, что*

$$\varliminf_{k\to\infty} X_k(\omega) \leqslant \xi(\omega) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} X_k(\omega) \tag{14}$$

для всех $\omega \in \Omega \setminus U$. *Тогда для каждого* $k \in \mathbf{N}$ *выполнено равенство* (4).

Доказательство. К мартингалам (X_k) и $(-X_k)$ применúма лемма 5. Для мартингала (X_k) указанная лемма дает неравенство

$$\int_B X_l\, d\mathbf{P} \leqslant \int_B \xi\, d\mathbf{P}, \tag{15}$$

а для мартингала $(-X_k)$ — неравенство

$$\int_B -X_l\, d\mathbf{P} \leqslant \int_B \xi\, d\mathbf{P}, \tag{16}$$

для всех $l \geqslant q$ и множеств $B \in \mathscr{F}_l$. Из (3), (15) и (16) вытекает равенство (4) для всех $k \geqslant q$. Так как (X_k) — мартингал, то равенство (4) распространяется и на все $0 \leqslant k \leqslant q - 1$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Предположим, что пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8). *Пусть заданы*: *множество* $U \in \cup_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k$ *с* $\mathbf{P}(U) = 0$; *случайная величина* ξ *с* $\mathbf{E}\,|\xi| < \infty$; *наконец, мартингал* (X_k) *такой, что для всякого* $\omega \in \Omega \setminus U$ *найдется возрастающая последовательность* (k_s) (*зависящая, вообще говоря, от* ω) *натуральных чисел, причем*

$$\lim_{s\to\infty} X_{k_s}(\omega) = \xi(\omega), \qquad \omega \in \Omega \setminus U. \tag{17}$$

Тогда для каждого $k \in \mathbf{N}$ *выполнено равенство* (4).

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из утверждения теоремы 1 и того факта, что условие (14) является следствием соотношения (17). Теорема доказана. □

Из теоремы 2 сразу вытекает

Теорема 3. *Предположим, что пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8). *Пусть заданы*: *множество* $U \in \cup_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k$ *с* $\mathbf{P}(U) = 0$; *случайная величина* ξ *с* $\mathbf{E}|\xi| < \infty$; *мартингал* (X_k) *такой, что* $\lim_{k\to\infty} X_k(\omega) = \xi(\omega)$ *для всех* $\omega \in \Omega \backslash U$. *Тогда для всех* $k \in \mathbf{N}$ *выполнено равенство* (4).

Следствие 4. *Если пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8), *то любое множество* $U \in \cup_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k$ *с* $\mathbf{P}(U) > 0$ *является множеством типа* $\mathscr{V}_M$ *и, как следствие, множеством типа* $\mathscr{U}_M$.

Следствие 5. *Если пространство* $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ *обладает свойством* (8), *то* $\varnothing$ *является множеством типа* $\mathscr{V}_M$ *и, как следствие, множеством типа* $\mathscr{U}_M$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* № 14-01-00417) *и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-3682.2014.1).

Библиографический список

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М : ГИФМЛ, 1961. 936 с.
2. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М : Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.
3. *Голубов Б. И.* Ряды по системе Хаара // Итоги науки. Сер. Математика. Матем. анализ. 1970, 1971. С. 109–146.
4. *Скворцов В. А.* О множествах единственности для многомерных рядов Хаара // Матем. заметки. 1973. Т. 14, № 6. С. 789–798.
5. *Плотников М. Г.* Вопросы единственности для кратных рядов Хаара // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 2. С. 97–116. DOI: 10.4213/sm1268.
6. *Плотников М. Г.* О нарушении единственности для двумерных рядов Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 2003. № 4. С. 20–24.
7. *Арутюнян Ф. Г., Талалян А. А.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 1391–1408.
8. *Скворцов В. А., Талалян А. А.* Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе // Матем. заметки. 1989. Т. 46, № 2. С. 104–113.
9. *Skvortsov V.* Henstock–Kurzweil type integrals in P-adic harmonic analysis // Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi. (N.S.). 2004. Vol. 20, № 2. P. 207–224.
10. *Плотников М. Г.* Некоторые свойства многомерных обобщенных интегралов и теоремы типа Дю Буа-Реймона для двойных рядов Хаара // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 7. С. 63–90. DOI: 10.4213/sm1506.
11. *Gundy R. F.* Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 124, № 2. P. 228–248.
12. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М. : Наука, 1989. 640 с.
13. *Skvortsov V. A.* Martingale closure theorem for A-integrable martingale sequences // Real Anal. Exchange. 1998–1999. Vol. 24, № 2. P. 815–820.
14. *Костин В. В.* Замкнутость справа мартингальных последовательностей в смысле A-интеграла // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 1. С. 98–104. DOI: 10.4213/mzm923.
15. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики : в 2 т. Т. 1. М. : Фазис, 1998. 512 с.

Martingales and Theorems of Cantor–Young–Bernstein and de la Vallée Poussin

M. G. Plotnikov[1], **Ju. A. Plotnikova**[2]

Vologda State Academy of Milk Industry, 2, Shmidt str., P.O. Molochnoe, Vologda, 160555, Russia, MGPlotnikov@gmail.com, JAPlotnikova@yandex.ru

Uniqueness problems for one-dimensional Haar series and for multiple ones have understood in numerous works. It is well-known that the subsequence of the partial sums S_{2^k} of an arbitrary Haar series can be represented as a discrete-time martingale on some filtered probability space $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$. In paper the concept of a $\mathscr{U}$-set for martingales is presented and some uniqueness theorems for martingales on arbitrary compact filtered probability spaces are established. In particular, it is proved that every set $U \in \cup_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k$ with $\mathbf{P}(U) = 0$ is a $\mathscr{U}$-set for martingales on a compact space $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_k), \mathbf{P})$ (Cantor–Young–Bernstein type theorem). The result above is supplemented by some de la Vallée Poussin type theorems.

Key words: set of uniqueness, martingale, filtered probability space, Cantor – Young – Bernstein theorem, de la Vallée Poussin theorem.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 14-01-00417) *and by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of leading scientific schools* (*project no.* НШ-3682.2014.1).

References

1. Bary N. K. *A treatise on trigonometric series*, vols. I, II. Oxford, Pergamon Press, 1964, 1061 p. (Rus. ed. : Bary N. K. *Trigonometricheskie ryady*. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 936 p.)
2. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal series*. Transl. Math. Monogr., vol. 75, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1989, 451 p. (Rus. ed. : *Ortogonal'nye ryady*. Moscow, AFC Publishers, 1999, 560 p.)
3. Golubov B. I. Series with respect to the Haar system. *J. Soviet Math.*, 1973, vol. 1, no. 6, pp. 704–726. DOI: 10.1007/BF01236362.
4. Skvortsov V. A. Uniqueness sets for multiple Haar series. *Math. Notes*, 1973, vol. 14, no. 6, pp. 1011–1016. DOI: 10.1007/BF01099583.
5. Plotnikov M. G. Uniqueness for multiple Haar series. *Sb. Math.*, 2005, vol. 196, no. 2, pp. 243–261. DOI: 10.1070/SM2005v196n02ABEH000879.
6. Plotnikov M. G. Violation of the uniqueness for two-dimensional uniqueness of double Haar series. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2003, vol. 58, no. 4, pp. 16–19.
7. Arutjunjan F. G., Talaljan A. A. Uniqueness of series in Haar and Walsh systems. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1964, vol. 28, iss. 6, pp. 1391–1408 (in Russian).
8. Skvortsov V. A., Talaljan A. A. Some uniqueness questions of multiple Haar and trigonometric series. *Math. Notes*, 1989, vol. 46, no. 2, pp. 646–653. DOI: 10.1007/BF01137630.
9. Skvortsov V. Henstock – Kurzweil type integrals in P-adic harmonic analysis. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi. (N. S.)*, 2004, vol. 20, no. 2, pp. 207–224.
10. Plotnikov M. G. Several properties of generalized multivariate integrals and theorems of the du Bois-Reymond type for Haar series. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 967–991. DOI: 10.1070/SM2007 v198n07ABEH003869.
11. Gundy R. F. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 124, no. 2, pp. 228–248.
12. Shiryaev A. N. *Probability*, 1nd ed. New York, Springer, 1995, 637 p. (Rus. ed. : Shiryaev A. N. *Verojatnost*. Moscow, Nauka, 1989, 640 p.)
13. Skvortsov V. A. Martingale closure theorem for A-integrable martingale sequences, *Real Anal. Exchange.*, 1998–1999, vol. 24, no. 2, pp. 815–820.
14. Kostin V. V. Right closure of martingale sequences in the sense of the A-integral, *Math. Notes*, 2000, vol. 68, no. 1, pp. 84–89. DOI: 10.1007/BF02674649.
15. Shiryaev A. N. *Essentials of Stochastic Finance*, Singapore, World Scientific Publ., 852 p. (Rus. ed. : Shiryaev A. N. *Osnovy stohasticheskoj finansovoj matematiki*. Vol. 1, Moscow, Fusis Publ., 1998, 512 p.)

УДК 517.927.25

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. С. Рыхлов[1], **О. В. Блинкова**[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, RykhlovVS@yandex.ru

[2]Старший преподаватель кафедры информатики, Саратовская государственная академия права, Oksana_Parfilova@mail.ru

Рассматривается класс пучков обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса простые, отличные от нуля, и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Формулируются достаточные условия n-кратной полноты системы корневых функций пучков этого класса в пространстве суммируемых с квадратом функций на основном отрезке.

Ключевые слова: пучок обыкновенных дифференциальных операторов, кратная полнота, корневые функции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ИСТОРИЯ ВОПРОСА И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением (д. в.):

$$\ell(y,\lambda) := p_n(x,\lambda)y^{(n)} + p_{n-1}(x,\lambda)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x,\lambda)y \qquad (1)$$

и линейно независимыми краевыми условиями:

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(\lambda)y^{(j)}(0) + b_{ij}(\lambda)y^{(j)}(1) = 0, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $p_j(x,\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{n-j} p_{js}(x)\lambda^s$, $p_{js}(x) \in L_1[0,1]$, а $a_{ij}(\lambda)$, $b_{ij}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ.

Далее будем использовать, не повторяя их в данной статье, известные определения собственных значений (с. з.), собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций (к. ф.), производных (по Келдышу) цепочек из [1, 2]. Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с. з. пучка $L(\lambda)$, а $Y := \{y_k\}$ — множество всех к. ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих множеству Λ.

Определение 1. Система Y к. ф. пучка $L(\lambda)$ называется m-кратно полной в пространстве $L_2[0,1]$ $(0 < m \le n)$, если из условия ортогональности вектор-функции $h \in L_2^m[0,1] := = \underbrace{L_2[0,1] \oplus \cdots \oplus L_2[0,1]}_{m\text{ раз}}$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе Y, следует равенство $h = 0$. $\square$

Решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота к. ф. в $L_2[0,1]$. В последнем случае естественно возникает вопрос об m-кратной полноте при $1 \le m \le n-1$.

Основополагающей по этой проблеме является работа [3], в которой была сформулирована (без доказательства) теорема об n-кратной полноте к. ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного д. в. (1) со специальной главной частью

$$y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$

и независящими от λ распадающимися краевыми условиями (2) (когда часть краевых условий берется только в конце 0 отрезка $[0,1]$, а остальные в 1). Эта теорема была доказана в [4] в случае аналитических коэффициентов д. в. и в [5] — в случае суммируемых коэффициентов. Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано в [6]. Случай произвольной главной части д. в. (1) был рассмотрен в [7, 8]. В работах [9, 10], относящихся к общему виду (1), (2) пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n-кратной полноты в $L_2[0,1]$ системы к. ф. в терминах степенной ограниченности по параметру λ функции Грина пучка $L(\lambda)$ на некоторых лучах. Наиболее полное исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте к. ф. пучка $L(\lambda)$ вида (1), (2), д. в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся (не менее половины краевых условий берутся только в одном конце) и не зависящие от λ, проведено в [11].

Но для некоторых классов пучков $L(\lambda)$ даже с постоянными коэффициентами вопрос о кратной полноте системы к. ф. еще не исследовался. В данной статье рассматривается именно такой пучок $L_0(\lambda)$, действующий в пространстве $L_2[0,1]$ и порожденный д. в. n-го порядка:

$$\ell_0(y,\lambda) := \sum_{j+s\leqslant n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \tag{3}$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} U_i^0(y,\lambda) &:= \sum_{j+s=\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0, \qquad i = \overline{1,l}, \\ U_i^0(y,\lambda) &:= \sum_{j+s\leqslant\varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) + \sum_{j+s\leqslant\varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0, \qquad i = \overline{l+1,n}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$.

Будем называть д. в. $\ell_0(y,\lambda)$ однородным, если в сумме (3) $p_{js} \equiv 0$ при $j+s<n$.

Пусть всюду далее выполняется основное предположение относительно д. в. $\ell_0(y,\lambda)$, а именно: корни $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ его характеристического уравнения $\sum\limits_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ различны, отличны от нуля и лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\omega_n < \omega_{n-1} < \cdots < \omega_{k+1} < 0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k \qquad (0 \leqslant k \leqslant n). \tag{5}$$

Пучок вида (3), (4) в случае, когда краевые условия не зависят от λ и

а) $2l > n$, то есть краевые условия полураспадающиеся;

б) существует прямая d, проходящая через начало координат и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше, чем $n-l$, детально рассмотрен в [11], где получены условия n-кратной и m-кратной полноты при $1 \le m \le n-1$ в пространстве $L_2[0,1]$ и показана точность этих результатов.

В работах [12–15] исследована кратная полнота системы к. ф. пучка $L_0(\lambda)$, для которого не выполняются условия а) или б). Это возможно при $0 \leqslant l \leqslant n-1$ и выполнении предположения (5) при определенных значениях k. В [12] рассмотрен случай $l = n-1$ и $k = n$, в [13] — случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $k = n$, в [14] — случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $k = n-1$, и, наконец, в [15] — случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $0 \leqslant k \leqslant n$. Во всех этих четырех случаях д. в. $\ell_0(y,\lambda)$ предполагалось однородным. Получены достаточные условия m-кратной полноты системы к. ф. в $L_2[0,1]$, где

$$m = \min\{k, n-l\} + \min\{n-k, n-l\}. \tag{6}$$

Но оставался не исследованным крайний случай $l = 0$. Данная статья восполняет этот пробел. В соответствии с формулой (6) в этом случае естественно ожидать n-кратную полноту.

Введем необходимые обозначения. Считаем, что краевые условия (4) упорядочены таким образом (это не нарушает общность), что при $s_0 = 0$, $s_{r+1} = n$ имеем:

$$\chi_{s_0+1} = \dots = \chi_{s_1} < \chi_{s_1+1} = \dots = \chi_{s_2} < \dots < \chi_{s_r+1} = \dots = \chi_{s_{r+1}},$$

где обозначено $\chi_i = \varkappa_{i1} - \varkappa_{i0}$, и γ, δ таковы, что

$$s_\gamma + 1 \leqslant n-k+1 \leqslant s_{\gamma+1}, \qquad s_\delta + 1 \leqslant k+1 \leqslant s_{\delta+1}. \tag{7}$$

В случае $l = 0$ считаем, что $\gamma = 0$, $\delta = r+1$ при $k = n$ и $\gamma = r+1$, $\delta = 0$ при $k = 0$.

Обозначим

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i0}} \alpha_{i\nu s}\omega_j^\nu, \qquad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i1}} \beta_{i\nu s}\omega_j^\nu, \qquad \varkappa_i = \min\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\}, \qquad i,j = \overline{1,n};$$
$$[n]_+ = \max\{0, n\}.$$

Пусть A и B есть соответственно определители

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{s_\gamma,k+1} & \dots & a_{s_\gamma,n} \\ b_{s_\gamma+1,1} & \dots & b_{s_\gamma+1,k} & a_{s_\gamma+1,k+1} & \dots & a_{s_\gamma+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s_\delta,1} & \dots & a_{s_\delta,k} & 0 & \dots & 0 \\ a_{s_\delta+1,1} & \dots & a_{s_\delta+1,k} & b_{s_\delta+1,k+1} & \dots & b_{s_\delta+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k} & b_{n,k+1} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть для пучка $L_0(\lambda)$ выполняются условия (5), $l = 0$ и*

$$A \ne 0, \qquad B \ne 0. \tag{8}$$

Тогда система к. ф. этого пучка n-кратно полна в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum_{i=1}^{n}[n-1-\varkappa_i]_+$ в случае, если выполняется хотя бы для одного $i = \overline{1,n}$ неравенство $\max\{\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}\} > n-1$, и с нулевым дефектом в противном случае. □

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству этой теоремы. Схема доказательства этой теоремы соответствует схеме доказательства теорем 2.1, 2.2 и 2.3 из [11] с модификациями, сделанными при доказательстве соответствующих теорем в [13, 14]. Центральную роль в доказательстве играет Лемма 1 об оценке, которая формулируется и доказывается в следующем параграфе.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ЛЕММА ОБ ОЦЕНКЕ

В [11, с. 23] доказано, что уравнение $l_0(y,\lambda) = 0$ имеет фундаментальную систему решений (ф. с. р.) $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, имеющую асимптотику

$$y_j^{(s-1)}(x,\lambda) = (\lambda\omega_j)^{s-1} e^{\lambda\omega_j x}[1], \qquad j,s = \overline{1,n}, \tag{9}$$

и аналитическую при $|\lambda| \gg 1$, где обозначено $[1] = 1 + O(1/\lambda)$.

Наряду с ф. с. р. (9) будет использоваться ф. с. р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, удовлетворяющая начальным условиям:

$$\tilde{y}_j^{(s-1)}(0,\lambda)=\delta_{js}, \qquad j,s=\overline{1,n},$$

где δ_{js} есть символ Кронекера. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ есть целые аналитические функции по λ.

Будем далее обозначать объекты, построенные по ф. с. р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, теми же буквами, что и объекты, построенные по ф. с. р. $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, но с волной наверху.

С. з. λ_ν, $\nu=1,2,\dots$, пучка (3), (4) являются нулями целой функции

$$\tilde{\Delta}(\lambda):=\det\bigl(U_i^0(\tilde{y}_j(x,\lambda),\lambda)\bigr)_{i,j=1}^n.$$

Обозначим через $\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)$ функцию, полученную из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ в результате замены i-й строки на строку $(\tilde{y}_1(x,\lambda),\dots,\tilde{y}_n(x,\lambda))$. Непосредственно можно убедиться в том, что столбцы

$$\left.\left(\frac{\partial^r\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^r},\dots,\frac{\partial^r\left(\lambda^{n-1}\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)\right)}{\partial\lambda^r}\right)^T\right|_{\lambda=\lambda_\nu}, \tag{10}$$

где $i=\overline{1,n}$, $r=\overline{0,s}$, являются производными, по Келдышу, n-цепочками для к. ф., соответствующих с. з. λ_ν, которое является нулем $\tilde{\Delta}(\lambda)$ кратности $s+1$.

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda)=\int_0^1\sum_{j=1}^m\frac{\lambda^{j-1}\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\,h_j(x)\,dx, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{11}$$

где $h_j(x)\in L_2[0,1]$.

Перепишем (11) в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda)=\frac{\tilde{\Delta}_i(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{12}$$

где $\tilde{\Delta}_i(\lambda)$ получается из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ заменой i-й строки строкой $(\tilde{u}_{n+1,1}(\lambda),\dots,\tilde{u}_{n+1,n}(\lambda))$, в которой

$$\tilde{u}_{n+1,j}(\lambda)=\int_0^1\sum_{\nu=1}^n h_\nu(x)\lambda^{\nu-1}\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx=\lambda^{n-1}\int_0^1 h_n(x,\lambda)\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx$$

и $h_n(x,\lambda)=\sum\limits_{\nu=1}^n h_\nu(x)\lambda^{\nu-n}$.

В [11, с. 48–49] доказаны следующие два простых утверждения, которые в случае $l=0$ формулируются следующим образом:

Утверждение 1. *Функции $\tilde{\Phi}_1(x,\lambda)$, ..., $\tilde{\Phi}_n(x,\lambda)$ являются линейно-независимыми решениями уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$.*

Утверждение 2. *Функции $\tilde{\Theta}_1(\lambda)$, ..., $\tilde{\Theta}_n(\lambda)$ не зависят от выбора ф. с. р. уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$.*

Из (12) и утверждения 2 получим:

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda)\equiv\Theta_i(\lambda)\equiv\frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\Pi_\varepsilon^+=\Bigl\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\arg\lambda\in\Bigl[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\Bigr]\Bigr\}, \qquad \Pi_\varepsilon^-=\Bigl\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\arg\lambda\in\Bigl[\frac{\pi}{2}+\varepsilon,\frac{3\pi}{2}-\varepsilon\Bigr]\Bigr\},$$

где $\varepsilon>0$ и достаточно мало.

Справедлива следующая лемма об оценке, которая является основной при доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть справеливы предположения* (5), (7), *$l=0$ и выполняются условия* (8). *Тогда при $\lambda\in\Pi_\varepsilon^+\bigcup\Pi_\varepsilon^-$ и $|\lambda|\gg1$ имеют место оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)|\leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{n-\frac{3}{2}-\varkappa_i}, \qquad i=\overline{1,n}, \tag{14}$$

где $C(\varepsilon)$ — некоторая константа, зависящая только от ε.

Доказательство. Так как справедливы соотношения (13), то чтобы оценить сверху $\Theta_i(\lambda)$, предварительно оценим снизу $|\Delta(\lambda)|$.

Пусть $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$. Исходя из вида ф. с. р. (9), в этом случае будем иметь при $\sigma = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$ (при $k = 0$ этого случая не будет):

$$U_\sigma(y_j,\lambda) = \sum_{\nu+s\le\varkappa_{\sigma0}} \alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}[1] + \sum_{\nu+s\le\varkappa_{\sigma1}} \beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}e^{\lambda\omega_j}[1] =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{\sigma1}}e^{\lambda\omega_j}\left(\sum_{\nu+s=\varkappa_{\sigma1}}\beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O(\lambda^{\varkappa_{\sigma0}-\varkappa_{\sigma1}}e^{-\lambda\omega_j})\right) = \lambda^{\varkappa_{\sigma1}}e^{\lambda\omega_j}[b_{\sigma j}]. \qquad (15)$$

При $\sigma = \overline{1,n}$, $j = \overline{k+1,n}$ (при $k = n$ этого случая не будет):

$$U_\sigma(y_j,\lambda) = \sum_{\nu+s\le\varkappa_{\sigma0}} \alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}[1] + \sum_{\nu+s\le\varkappa_{\sigma1}} \beta_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu\lambda^{\nu+s}e^{\lambda\omega_j}[1] =$$

$$= \lambda^{\varkappa_{\sigma0}}\left(\sum_{\nu+s=\varkappa_{\sigma0}}\alpha_{\sigma\nu s}\omega_j^\nu + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O(\lambda^{\varkappa_{\sigma1}-\varkappa_{\sigma0}}e^{\lambda\omega_j})\right) = \lambda^{\varkappa_{\sigma0}}[a_{\sigma j}]. \qquad (16)$$

Следовательно, подставляя (15), (16) в $\Delta(\lambda)$, вынося из первых k столбцов экспоненты $e^{\lambda\omega_\nu}$, а из всех строк множители $\lambda^{\varkappa_{\sigma0}}$, получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_{\sigma0}} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\begin{vmatrix} \lambda^{\chi_1}[b_{11}] & \dots & \lambda^{\chi_1}[b_{1k}] & [a_{1,k+1}] & \dots & [a_{1n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[b_{s_\gamma+1,1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[b_{s_\gamma+1,k}] & [a_{s_\gamma+1,k+1}] & \dots & [a_{s_\gamma+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\chi_{n-k+1}}[b_{n-k+1,1}] & \dots & \lambda^{\chi_{n-k+1}}[b_{n-k+1,k}] & [a_{n-k+1,k+1}] & \dots & [a_{n-k+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[b_{s_{\gamma+1},1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[b_{s_{\gamma+1},k}] & [a_{s_{\gamma+1},k+1}] & \dots & [a_{s_{\gamma+1},n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{\chi_n}[b_{n1}] & \dots & \lambda^{\chi_n}[b_{nk}] & [a_{n,k+1}] & \dots & [a_{nn}] \end{vmatrix}.$$

Разложим последний определитель по последним $n-k$ столбцам. Выделим главную часть — это будут в силу соотношений (7) слагаемые, являющиеся произведениями миноров последних $n-k$ столбцов на их алгебраические дополнения k-го порядка, образованные элементами, стоящими в первых k столбцах и в любых k строках из строк с номерами от $s_\gamma + 1$ до n. Все они будут иметь один и тот же наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1}-(n-k))\chi_{s_{\gamma+1}} + (s_{\gamma+2}-s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}} + \dots + (s_{r+1}-s_r)\chi_{r+1} = \sum_{\sigma=n-k+1}^{n}\chi_\sigma.$$

Затем только главные члены опять свернем в определитель. Получим с учетом (8):

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_{\sigma0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}(\varkappa_{\sigma1}-\varkappa_{\sigma0})} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\left(A + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma1}} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}A[1].$$

Следовательно, для $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ и $|\lambda| \gg 1$ получим при условии (8) оценку снизу:

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma1}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\right|. \qquad (17)$$

Оценим теперь сверху $\Delta_i(\lambda)$, $i = \overline{1,n}$, в соответствии с формулой (13). С учетом (9) получим после вынесения множителя λ^{n-1} из i-й строки и разложения определителя по элементам этой строки

$$\Delta_i(\lambda) = \lambda^{n-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}\int_0^1 h_n(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}[1]\,d\xi, \qquad (18)$$

где $\Delta_{ij}(\lambda)$ есть минор элемента (i,j) в определителе $\Delta(\lambda)$, то есть с учетом (15), (16)

$$\Delta_{ij}(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda^{\varkappa_{11}}e^{\lambda\omega_1}[b_{11}] & \ldots & \lambda^{\varkappa_{11}}e^{\lambda\omega_k}[b_{1k}] & \lambda^{\varkappa_{10}}[a_{1,k+1}] & \ldots & \lambda^{\varkappa_{10}}[a_{1n}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_1}[b_{n1}] & \ldots & \lambda^{\varkappa_{n1}}e^{\lambda\omega_k}[b_{nk}] & \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{n,k+1}] & \ldots & \lambda^{\varkappa_{n0}}[a_{nn}] \end{vmatrix}_{ij}, \tag{19}$$

где индекс $\{ij\}$ у определителя здесь и далее означает, что в этом определителе отсутствует i-я строка и j-й столбец.

Далее рассмотрим два случая: $1\leqslant j\leqslant k$ и $k+1\leqslant j\leqslant n$.

Пусть $1\leqslant j\leqslant k$. Вынося множители $\lambda^{\varkappa_{\sigma0}}$ из строк с номерами от 1 до $i-1$ и от $i+1$ до n, а также вынося экспоненты $e^{\lambda\omega_\nu}$ из первых $k-1$ столбцов с номерами от 1 до $j-1$ и от $j+1$ до k, получим следующее представление:

$$\Delta_{ij}(\lambda)=\lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_{\sigma0}-\varkappa_{i0}}e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu-\omega_j\right)}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \lambda^{\chi_1}[b_{11}] & \ldots & \lambda^{\chi_1}[b_{1k}] & [a_{1,k+1}] & \ldots & [a_{1n}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[b_{s_\gamma+1,1}] & \ldots & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[b_{s_\gamma+1,k}] & [a_{s_\gamma+1,k+1}] & \ldots & [a_{s_\gamma+1,n}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[b_{s_{\gamma+1},1}] & \ldots & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[b_{s_{\gamma+1},k}] & [a_{s_{\gamma+1},k+1}] & \ldots & [a_{s_{\gamma+1},n}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{\chi_n}[b_{n1}] & \ldots & \lambda^{\chi_n}[b_{nk}] & [a_{n,k+1}] & \ldots & [a_{nn}] \end{vmatrix}_{ij}.$$

Обозначим последний определитель как D_{ij}. Разложим этот определитель в сумму по последним $n-k$ столбцам. Выделим главную часть. Вид главной части зависит от того, как соотносятся величины i, $n-k+2$ и $s_{\gamma+1}$. Так как ввиду (7) справедливы неравенства $s_\gamma+2\leqslant n-k+2\leqslant s_{\gamma+1}+1$, то возможны только следующие случаи:

1.а) $1\leqslant i<n-k+2\leqslant s_{\gamma+1}$;
1.б) $1\leqslant i<n-k+2=s_{\gamma+1}+1$;
1.в) $n-k+2\leqslant s_{\gamma+1},\quad n-k+2\leqslant i\leqslant n$;
1.г) $n-k+2=s_{\gamma+1}+1,\quad n-k+2\leqslant i\leqslant n$.

Рассмотрим подробно, например, случай 1.а). В этом случае главная часть D_{ij} — это слагаемые, являющиеся произведениями миноров последних $n-k$ столбцов на алгебраические дополнения $(k-1)$-го порядка, образованные элементами, стоящими в первых $k-1$ столбцах и в любых $k-1$ строках с номерами от $s_\gamma+1$ до n. Все они будут иметь один и тот же наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1}-(n-k-1))\chi_{s_{\gamma+1}}+(s_{\gamma+2}-s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}}+\cdots+(s_{r+1}-s_r)\chi_{r+1}=\sum_{\sigma=n-k+2}^{n}\chi_\sigma.$$

Сворачивая затем только главные члены опять в определитель, получим:

$$\Delta_{ij}(\lambda)=\lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_{\sigma0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+2}^{n}(\varkappa_{\sigma1}-\varkappa_{\sigma0})}e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu-\omega_j\right)}[A_{ij}].$$

Аналогичная асимптотика получается и в случае 1.б).

Таким образом, в случаях 1.а) и 1.б) при $|\lambda|\gg1$ будем иметь оценку сверху вида

$$|\Delta_{ij}(\lambda)|\leqslant C|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k+1}\varkappa_{\sigma0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+2}^{n}\varkappa_{\sigma1}}\left|e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu-\omega_j\right)}\right|. \tag{20}$$

В случаях 1.в) и 1.г) аналогичным способом получим оценку

$$|\Delta_{ij}(\lambda)|\leqslant C|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma1}-\varkappa_{i1}}\left|e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu-\omega_j\right)}\right|. \tag{21}$$

Пусть теперь $k+1 \leqslant j \leqslant n$. Вынося множители $\lambda^{\varkappa_{\sigma 0}}$ в (19) из строк с номерами от 1 до $i-1$ и от $i+1$ до n, а также вынося экспоненты $e^{\lambda\omega_\nu}$ из первых k столбцов, получим следующее представление:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_{\sigma 0}-\varkappa_{i0}} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu} D_{ij}.$$

Разложим определитель D_{ij} в сумму по последним $n-k-1$ столбцам. Выделим главную часть. Вид главной части зависит от того, как соотносятся величины i, $n-k+1$ и s_γ. Так как ввиду (7) справедливы неравенства $s_\gamma \leqslant n-k < s_{\gamma+1}$, то возможны только следующие случаи:

2.а) $1 \leqslant i < n-k+1 \leqslant s_{\gamma+1}$; 2.б) $s_\gamma + 1 \leqslant n-k < s_{\gamma+1}, \quad n-k+1 \leqslant i \leqslant n$;
2.в) $s_\gamma = n-k, \quad n-k+1 \leqslant i \leqslant n$.

Рассмотрим подробно, например, случай 2.а). В этом случае главная часть D_{ij} — это слагаемые, являющиеся произведениями миноров последних $n-k-1$ столбцов на алгебраические дополнения k-го порядка, образованные элементами, стоящими в первых k столбцах и в любых k строках с номерами от $s_\gamma+1$ до n. Все они будут иметь один и тот же наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1}-(n-k))\chi_{s_{\gamma+1}} + (s_{\gamma+2}-s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}} + \dots + (s_{r+1}-s_r)\chi_{r+1} = \sum_{\sigma=n-k+1}^{n}\chi_\sigma.$$

Сворачивая затем только главные члены опять в определитель, получим:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n}\varkappa_{\sigma 0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}(\varkappa_{\sigma 1}-\varkappa_{\sigma 0})} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}[A_{ij}].$$

Таким образом, в случае 2.а) при $|\lambda| \gg 1$ будем иметь оценку сверху вида

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma 0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma 1}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\right|. \tag{22}$$

В случаях 2.б) и 2.в) аналогичным способом получим оценку

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C|\lambda|^{\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k-1}\varkappa_{\sigma 0}+\sum\limits_{\sigma=n-k}^{n}\varkappa_{\sigma 1}-\varkappa_{i1}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\right|. \tag{23}$$

Используя оценки (20), (22) в (18), получим при $1 \leqslant i \leqslant n-k$

$$\Delta_i(\lambda) = O\Bigg(|\lambda|^{n-1+\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma 0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma 1}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\right| \times$$
$$\times\left(|\lambda|^{-\chi_{n-k+1}}\sum_{j=1}^{k}\left|\int_0^1 h_n(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}[1]\,d\xi\right| + \sum_{j=k+1}^{n}\left|\int_0^1 h_n(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}[1]\,d\xi\right|\right)\Bigg). \tag{24}$$

Оценим интеграл $\int_0^1 h_n(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}[1]\,d\xi$ при $j=\overline{1,k}$. Положим $\lambda = re^{i\varphi}$ и пусть $\varphi \in [0, \pi/2-\varepsilon]$ (в случае $\varphi \in [-\pi/2+\varepsilon, 0]$ рассуждения проводятся аналогично). Используя неравенство Коши – Буняковского, получим при $j=\overline{1,k}$

$$\left|\int_0^1 h_n(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j(\xi-1)}[1]\,d\xi\right| \leqslant \int_0^1 |h_n(\xi,\lambda)|e^{r\frac{2}{\pi}\varepsilon\omega_1(\xi-1)}\,d\xi \leqslant \left(\int_0^1 |h_n(\xi,\lambda)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times\left(\int_0^1 e^{r\frac{4}{\pi}\varepsilon\omega_1(\xi-1)}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{\sigma=1}^{n}\frac{1}{|\lambda|^{n-\sigma}}\|h_\sigma\|_{L_2[0,1]}\frac{1}{\sqrt{r\frac{4}{\pi}\varepsilon\omega_1}}\left(1-e^{-r\frac{4}{\pi}\varepsilon\omega_1}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{\sqrt{|\lambda|}}. \tag{25}$$

Аналогично при $j=\overline{k+1,n}$

$$\left|\int_0^1 h_n(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_j\xi}[1]\,d\xi\right| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{\sqrt{|\lambda|}}. \tag{26}$$

Таким образом, из (24)–(26) получим при $1 \leqslant i \leqslant n-k$ (при $k=0$ здесь полагается $\chi_{n-k+1}=0$)

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{n-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma1}-\varkappa_{i0}+[-\chi_{n-k+1}]_+}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\right|. \tag{27}$$

Рассуждая аналогично предыдущему, из (18), (20), (21), (23) получим при $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$ (при $k=n$ здесь полагается $\chi_{n-k}=0$)

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon)|\lambda|^{n-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{n-k}\varkappa_{\sigma0}+\sum\limits_{\sigma=n-k+1}^{n}\varkappa_{\sigma1}-\varkappa_{i1}+[\chi_{n-k}]_+}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=1}^{k}\omega_\nu}\right|. \tag{28}$$

Так как в случае $1 \leqslant i \leqslant n-k$ при условии $\chi_{n-k+1} \geqslant 0$ справедливы неравенства $-\varkappa_{i0} + +[-\chi_{n-k+1}]_+ \leqslant -\varkappa_{i0}$, а при условии $\chi_{n-k+1}<0$ справедливы неравенства $-\varkappa_{i0}+[-\chi_{n-k+1}]_+ \leqslant -\varkappa_{i1}$, то при $1 \leqslant i \leqslant n-k$ в целом получим:

$$-\varkappa_{i0}+[-\chi_{n-k+1}]_+ \leqslant -\varkappa_i. \tag{29}$$

Аналогично, при $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$ получим неравенства

$$-\varkappa_{i1}+[\chi_{n-k}]_+ \leqslant -\varkappa_i. \tag{30}$$

Таким образом, из (13), (17), (27)–(30) получим оценку (14) в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ и $|\lambda| \gg 1$ при условии $A \neq 0$.

Пусть теперь $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$. Если сделать замену $\hat\lambda = -\lambda$, обозначить $\hat k = n-k$, $\hat\gamma = \delta$, $\hat\omega_j = \omega_{k+j}$ при $j = \overline{1,\hat k}$, $\hat\omega_j = \omega_{j-\hat k}$ при $j = \overline{\hat k+1,n}$, $\hat a_{i,\hat k+1} = a_{11}, \ldots, \hat a_{in} = a_{1k}$; $\hat b_{i1} = b_{i,k+1}, \ldots, \hat b_{i,\hat k} = b_{in}$ и воспользоваться для параметров с крышками уже полученным неравенством (14) для $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$, а затем вернуться от параметров с крышками к прежним параметрам, то получим оценку (14) и в случае $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ и $|\lambda| \gg 1$ при условии $B \neq 0$.

Таким образом, лемма 1 полностью доказана. □

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ

Пусть $\bar h := (\bar h_1, \ldots \bar h_n)^T \in L_2^n[0,1]$ и ортогональна всем производным n-цепочкам (10). Тогда в силу (11)–(13) все особенности мероморфных функций $\tilde\Theta_i(\lambda)$, $i=\overline{1,n}$, устранимы и они являются целыми функциями. Согласно оценкам (14) и принципу Фрагмена – Линделефа функции $\tilde\Theta_i(\lambda)$ есть полиномы степени $n-2-\varkappa_i$ при $n-2-\varkappa_i \geqslant 0$, которые можно записать в виде

$$\tilde\Theta_i(\lambda) \equiv \lambda^{n-2-\varkappa_i}\left(\bar h, \zeta_{i0}\right) + \lambda^{n-3-\varkappa_i}\left(\bar h, \zeta_{i1}\right) + \cdots + \left(\bar h, \zeta_{i,n-2-\varkappa_i}\right),$$

где $\zeta_{i\nu} \in L_2[0,1]$ есть вполне определенные вектор-функции, а при $n-2-\varkappa_i < 0$ справедливы тождества

$$\tilde\Theta_i(\lambda) \equiv 0.$$

В случае $n-2-\varkappa_i \geqslant 0$ в дефектном подпространстве производных n-цепочек выберем подпространство H, ортогональное вектор-функциям $\zeta_{i\nu}$, $\nu = \overline{0, n-2-\varkappa_i}$, $i=\overline{1,n}$. Очевидно,

$$\dim H \leqslant \sum_{i=1}^{n}[n-1-\varkappa_i]_+.$$

Пусть теперь $\bar h \in H$. Тогда $\tilde\Theta_i(\lambda) \equiv 0$, $i=\overline{1,n}$, и, следовательно, в силу (12)

$$\tilde\Delta_i(\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1}\tilde\Phi_i(x,\lambda)h_j(x)\,dx \equiv 0, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{31}$$

Так как в силу утверждения 1 система функций $\tilde\Phi_1, \ldots, \tilde\Phi_n$ является системой линейно-независимых решений уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$, то из (31) следует тождество

$$\int_0^1 y(x,\lambda)\sum_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}h_j(x)\,dx \equiv 0 \tag{32}$$

для любого решения $y(x,\lambda)$ уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\ell_0^*(z,\lambda) = \sum_{j=n}^{n} h_j(x)\lambda^{j-1}, \qquad z(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) = 0, \tag{33}$$

где $\ell_0^*(z,\lambda)$ есть сопряженное, по Лагранжу, д. в. к $\ell_0(y,\lambda)$.

Известно, что решение задачи (33) есть целая функция по λ, для которой имеет место следующее представление при $|\lambda| \gg 1$:

$$z(x,\lambda) = \int_0^x \sum_{j=1}^{n} z_i(x,\lambda) y_i(\xi,\lambda) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} h_j(\xi) \right) d\xi,$$

где

$$z_i(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} [\Omega_i]\, e^{-\lambda \omega_i x}, \qquad i = \overline{1,n},$$

есть решения уравнения $\ell_0^*(z,\lambda) = 0$.

В секторе $\lambda \in \Pi_0^+$ имеем:

$$z(x,\lambda) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} z_i(x,\lambda) y_i(\xi,\lambda) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} h_j(\xi) \right) d\xi +$$

$$+ \int_0^x \sum_{j=1}^{k} z_i(x,\lambda) y_i(\xi,\lambda) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} h_j(\xi) \right) d\xi - \int_x^1 \sum_{j=k+1}^{n} z_i(x,\lambda) y_i(\xi,\lambda) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} h_j(\xi) \right) d\xi.$$

Отсюда из (32) и (5) получим при $\lambda \in \Pi_0^+$ оценку $|z(x,\lambda)| \leqslant C$. Рассуждая аналогично, получим такую же оценку и при $\lambda \in \Pi_0^-$. Тогда по теореме Лиувилля будем иметь $z(x,\lambda) \equiv C$. Отсюда в силу нулевых начальных условий задачи (33) следует, что $z(x,\lambda) \equiv 0$, а тогда из дифференциального уравнения (33) получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} h_j(x) = 0 \quad \text{для п.в.} \quad x \in [0,1].$$

Отсюда следует, что $h_j(x) = 0$, $j = \overline{1,n}$, для п.в. $x \in [0,1]$.

Следовательно, система к. ф. рассматриваемого пучка n-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превосходящим числа $\sum\limits_{i=1}^{n} [n-1-\varkappa_i]_+$.

В случае, когда $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, дефект системы к. ф. будет равен нулю, так как в этом случае рассматриваемый пучок можно линеаризовать в пространстве $L_2^n[0,1]$ и справедливо утверждение [11, лемма 2.1, с. 49].

Теорема 1 полностью доказана. □

В заключение отметим, что постановка задачи, рассмотрение случая $\lambda \in \Pi_\varepsilon^+$ в лемме 1 и в теореме 1 принадлежат В. С. Рыхлову. Случай $\lambda \in \Pi_\varepsilon^-$ был рассмотрен О. В. Блинковой.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (*проект* № 1.1520.2014К).

Библиографический список

1. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. Т. 26, № 4. С. 15–41.

2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 526 с.

3. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.

4. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242 с.

5. *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, № 4. С. 69–80.

6. *Хромов А. П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов // Матем. сб. 1977. Т. 102(144), № 3. С. 457–472.

7. *Freiling G.* Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operatorbüschel // Math. Z. 1984. Vol. 188, № 1. P. 55–68.
8. *Тихомиров С. А.* Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1987. 126 с.
9. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. Семин. им. И. Г. Петровского. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.
10. *Гасымов М. Г., Магеррамов А. М.* О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов // Докл. АН АзССР. 1974. Т. 30, № 12. С. 9–12.
11. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д. : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.
12. *Рыхлов В. С.* О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2009. № 6. С. 42–53.

13. *Рыхлов В. С.* О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 24–34.

14. *Рыхлов В. С., Парфилова О. В.* О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 45–58.

15. *Рыхлов В. С.* Кратная полнота корневых функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на прямой // Спектральные и эволюционные задачи : Тр. XXIII Междунар. конф. «Крымская осенняя математическая школа-симпозиум» (КРОМШ-2012). Симферополь : Таврический нац. ун-т им. В. В. Вернадского. 2013. Т. 23. С. 134–142.

On Multiple Completeness of the Root Functions of a Certain Class of Pencils of Differential Operators with Constant Coefficients

V. S. Rykhlov[1], **O. V. Blinkova**[2]

[1]Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, RykhlovVS@yandex.ru
[2]Saratov State Academy of Law, 104, Chernyshevskogo str., Saratov, 410056, Russia, Oksana_Parfilova@mail.ru

We consider the class of pencils of ordinary differential operators of n-th order with constant coefficients. It is assumed that the roots of the characteristic equation of pencils from this class are simple, non-zero and lie on the same straight line passing through the origin. Sufficient conditions for n-fold completeness of the system of root functions of the pencils from this class in the space of summable with square functions on the main segment are formulated.

Key words: pencil of ordinary differential operators, multiple completeness, root functions.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (*project no.* 1.1520.2014K).

References

1. Keldysh M. V. On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators. *Russ. Math. Surveys*, 1971, vol. 26, no. 4, pp. 15–41 (in Russian). DOI: 10.1070/RM1971v026n04ABEH003985.

2. Naymark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969, 526 p. (in Russian).

3. Keldysh M. V. O sobstvennykh znacheniiakh i sobstvennykh funktsiiakh nekotorykh klassov nesamosopriazhennykh uravnenii [On Eigenvalues and Eigenfunctions of Some Classes of Nonselfadjoint Equations]. *Dokl. AN SSSR*, 1951, vol. 77, no. 1, pp. 11–14. (in Russian).

4. Khromov A. P. *Konechnomernye vozmushcheniia vol'terrovykh operatorov*. Diss. d-ra fiz.-mat. nauk [Khromov A. P. *Finite-dimensional perturbations of Volterra operators* : Dr. phys. and mat. sci. diss]. Novosibirsk, 1973. 242 p. (in Russian).

5. Shkalikov A. A. On completenes of eigenfunctions and associated function of an ordinary differential operator with separated irregular boundary conditions. *Funct. Anal. Appl.*, 1976, vol. 10, no. 4, pp. 305–316 (in Russian). DOI: 10.1007/BF01076030.

6. Khromov A. P. On generating functions of Volterra operators. *Math. USSR-Sb.*, 1977, vol. 31, no. 3, pp. 409–423. DOI: 10.1070/SM1977v031n03ABEH002311.

7. Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operatorbüschel. *Math. Z.*. 1984, vol. 188, no. 1, pp. 55–68.

8. Tikhomirov S. A. *Konechnomernye vozmushcheniia integral'nykh vol'terrovykh operatorov v prostranstve vektor-funktsii* : Diss. kand. fiz.-math. nauk [Tikhomirov S. A. *Finite-dimensional perturbations of Volterra integral operators in the space of vector-functions* : Cand. phys. and math. sci. diss.]. Saratov, 1987. 126 p.(in Russian).

9. Shkalikov A. A.. Boundary value problems for ordinary

differential equations with a parameter in the boundary conditions. *J. Soviet Math.*, 1986, vol. 33, iss. 6, pp. 1311—1342.

10. Gasymov M. G., Magerramov A. M. O kratnoi polnote sistemy sobstvennykh i prisoedinennykh funktsii odnogo klassa differentsial'nykh operatorov [On fold-completeness of a system of eigenfunctions and associated functions of a class of differential operators]. *Dokl. AN AzSSR*, 1974, vol. 30, no. 12, pp. 9–12 (in Russian).

11. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to spectral theory of differential operators]. Rostov on Don, Rostov Univ. Press, 1994, 160 p. (in Russian).

12. Rykhlov V. S. Completeness of eigenfunctions of one class of pencils of differential operators with constant coefficients. *Russ. Math.*, 2009, vol. 53, no. 6, pp. 33–43. DOI: 10.3103/S1066369X09060061.

13. Rykhlov V. S. On multiple completeness of the root functions for a class of the pencils of differential operators. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 2, pp. 24–34 (in Russian).

14. Rykhlov V. S., Parfilova O. V. On multiple completeness of the root functions of the pencils of differential operators with constant coefficients.*Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 4, pp. 45–58 (in Russian).

15. Rykhlov V. S. Multiple completeness of the root functions of the pencils of differential operators, the roots of the characteristic equation of which lie on a straight line [Kratnaia polnota kornevykh funktsii puchkov differentsial'nykh operatorov, korni kharakteristicheskogo uravneniia kotorykh lezhat na priamoi]. *Spectral and Evolutional Problems : Proc. of the Twenty-Third Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (CROMSH-2012)*. Simferopol, Tavricheskii nats. un-t im. V. V. Vernadskogo, 2013, vol. 23, pp. 134—142 (in Russian).

УДК 517.95

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА МНОГООБРАЗИЯХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. В. Светлов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций, Волгоградский государственный университет, a.v.svetlov@gmail.com

Работа посвящена исследованию структуры спектра оператора Шредингера на весовом квазимодельном многообразии с концом, представимым искривленным произведением специального вида. Получен критерий дискретности спектра в терминах поведения коэффициентов метрики многообразия и потенциала исследуемого оператора. В заключении сделаны замечания о следствиях из данного результата и его возможном обобщении на более сложные квазимодельные многообразия.

Ключевые слова: дискретность спектра, оператор Шредингера, римановы многообразия, квазимодельные многообразия, искривленные произведения.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что структура спектра оператора Лапласа – Бельтрами на римановом многообразии зависит от геометрии многообразия. Характер зависимости различных свойств спектра в различных условиях исследуется множеством авторов, начиная с последней четверти прошлого века (см., например, [1–5]). При этом свойства спектра оператора Шредингера, очевидно, зависят не только от геометрии многообразия, но и от поведения потенциала. Поэтому их исследование является более сложной задачей даже в случае $\mathbf{R}^n$. Результатов относительно структуры спектра оператора Шредингера на римановых многообразиях в несколько раз меньше, чем для лапласиана. В частности, можно отметить публикации [6–8]. Во всех этих работах накладываются разные условия на геометрию многообразия, но основным результатом в них являются утверждения о дискретности спектра оператора Шредингера при определенном поведении потенциала на бесконечности. В этом смысле процитированные исследования наиболее близки к представляемому в данной статье. Наиболее существенным отличием является класс изучаемых многообразий и методы работы с ним.

А именно мы рассматриваем полное риманово многообразие M, представимое в виде $B \cup D$, где B — компактное многообразие, а конец D изометричен произведению $\mathbf{I} \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \cdots \times \mathrm{S}_k$ (где $\mathbf{I} = (r_0, d)$ — конечный или бесконечный интервал, а S_i — компактные римановы многообразия без края) с метрикой

$$ds^2 = q_0^2(r)dr^2 + q_1^2(r)d\theta_1^2 + \cdots + q_k^2(r)d\theta_k^2,$$

где $d\theta_i^2$ метрика на S_i, а $q_i(r)$ — C^1–гладкие положительные на $\mathbf{I}$ функции, причем $q_0(r)$ удовлетворяет условию

$$\int_{r_0}^{d} q_0(r)dr = +\infty$$

для обеспечения полноты многообразия D. Считаем, что размерность $\dim \mathrm{S}_i = n_i$. Заметим, что такие многообразия являются простым обобщением искривленных произведений порядка k, поведение решений различных эллиптических уравнений на которых достаточно подробно изучено А. Г. Лосевым, Е. А. Мазепой, С. А. Корольковым (см., например, [9–11]) и другими авторами.

Далее, будем полагать, что на M задана борелева мера μ, не обязательно совпадающая с римановым объемом. Считаем, что мера μ имеет плотность

$$\sigma(r, \theta_1, \dots, \theta_k) = \tau(r)\eta_1(\theta_1)\dots\eta_k(\theta_k).$$

Рассмотрим на многообразии (M, μ) оператор Шредингера

$$-L_\mu = -\mathrm{div}_\mu \nabla + c(r).$$

Для полуограниченности оператора $-L_\mu$ будем считать, что существует некоторая $K = \mathrm{const}$, такая что $c(r) \geq -K$. Кроме того, потребуем, чтобы функция $c(r)$ была абсолютно интегрируемой на любом (конечном) интервале из $\mathbf{I}$.

Будем говорить, что спектр оператора дискретен, если он состоит лишь из собственных значений конечной кратности, т. е. его непрерывный спектр пуст.

Обозначим $s(r) = \tau(r)q_1^{n_1}(r)\dots q_k^{n_k}(r)$ и

$$F(r) = c(r) + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)' + \left(\frac{s'(r)}{2s(r)}\right)^2.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Если $F(r) > -C \quad (C = \mathrm{const} > 0)$, то для дискретности спектра оператора Шредингера $-L_\mu$ на многообразии (M, μ) необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\omega > 0$ было выполнено*

$$\lim_{r\to d} \int_{r(\rho)}^{r(\rho+\omega)} q_0(t)F(t)dt = +\infty,$$

где функция $r(\rho)$ определяется из соотношения $\rho(r) = \int\limits_{r_0}^{r} q_0(t)dt$.

Отметим, что структура данного утверждения повторяет известный критерий дискретности спектра А. М. Молчанова и, по сути, теорема 1 является обобщением данного критерия на случай квазимодельных многообразий. Более того, идея доказательства этого утверждения состоит в построении оператора Штурма – Лиувилля, дискретность спектра которого эквивалентна дискретности спектра исследуемого оператора Шредингера, благодаря чему становится возможным применение критерия А. М. Молчанова для завершения доказательства.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Напомним сначала, что на гладком римановом многообразии X размерности n оператор Лапласа – Бельтрами имеет вид

$$-\Delta = -\mathrm{div}\,\nabla = -\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

где $\|g_{ij}\|$ — риманов метрический тензор на X, g^{ij} — компоненты $\|g_{ij}\|^{-1}$, а $G = \det \|g_{ij}\|$. Однако нас будет интересовать случай, когда на X задана некоторая борелева мера μ, не обязательно совпадающая с римановым объемом. Будем предполагать, что μ имеет плотность $\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — гладкая положительная функция. (Очевидно, что если μ — риманов объем на X, то $\sigma(x) \equiv 1$.) Пару

(X, μ) называют весовым многообразием. Так как дивергенция — это оператор, сопряженный к градиенту относительно меры многообразия, на весовом многообразии очевидным образом изменяется представление оператора Лапласа – Бельтрами (см., например, [12]):

$$-\Delta_\mu = -\mathrm{div}_\mu \nabla = -\frac{1}{\sigma(x)\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma(x)\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Теперь рассмотрим риманово многообразие Z, изометричное произведению $X \times Y$ (где X — произвольное многообразие размерности n, а Y — компактное многообразие размерности m) с метрикой

$$dz^2 = dx^2 + \gamma^2(x) dy^2,$$

где $\gamma(x)$ — гладкая положительная функция, dx^2 и dy^2 — метрики на X и Y соответственно.

Пусть μ теперь — борелева мера на многообразии Z с плотностью $\sigma(z) = \tau(x)\eta(y)$, и $\sigma(z)$ — гладкая положительная функция. Непосредственным вычислением оператора Шредингера

$$-L_\mu = -\Delta_\mu + c(x)$$

на многообразии (Z, μ) может быть получено следующее утверждение (см. [13]).

Лемма. *Оператор Шредингера на многообразии (Z, μ) имеет вид*

$$-L_\mu = A_0 + \gamma^{-2}(-\Delta_\eta) + c(x) = B + \gamma^{-2}(-\Delta_\eta),$$

где A_0 и B — операторы Лапласа – Бельтрами и Шредингера на многообразии X с весовой функцией $\gamma^m(x)\tau(x)$ соответственно, а $-\Delta_\eta$ — лапласиан на многообразии Y с мерой плотности $\eta(y)$.

Далее, следуя [2, 14] и др., говоря о спектре незамкнутого, но замыкаемого оператора, мы имеем в виду спектр замыкания. Слова «спектр оператора» на самом деле относятся к спектру расширения по Фридрихсу этого оператора (см., например, [14]).

Сформулируем теперь критерий дискретности спектра оператора Шредингера на многообразии Z. При этом обозначим через ν меру с весовой функцией $\gamma^m(x)\tau(x)$ на многообразии X.

Теорема 2. *Оператор Шредингера на многообразии (Z, μ) имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда спектр оператора Шредингера на многообразии (X, ν) дискретен.*

Доказательство данной теоремы приведено в [13], однако отметим, что использованный метод предложил A. Baider в [2].

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Вернемся теперь к многообразию M, описанному во введении. Напомним, что на нем задана борелева мера μ с плотностью

$$\sigma(r, \theta_1, \ldots, \theta_k) = \tau(r)\eta_1(\theta_1)\ldots\eta_k(\theta_k).$$

Из принципа декомпозиции [15] следует, что спектр оператора Шредингера на многообразии дискретен тогда и только тогда, когда он дискретен вне любого компакта на этом многообразии. Дискретность спектра на многообразии $M = B \cup D$ равносильна дискретности спектра на многообразии D.

Произведем на многообразии D замену переменной, положив $\rho = \int\limits_{r_0}^{r} q_0(t)dt$. Тогда эта переменная ρ изменяется на $\mathbf{R}_+$, в силу полноты многообразия D, а многообразия S_i остаются неизменными. Кроме того, положим $c(r(\rho)) = \tilde{c}(\rho)$, $\tau(r(\rho)) = \tilde{\tau}(\rho)$, $q_i(r(\rho)) = \tilde{q}_i(\rho)$, $i = 1, \ldots, k$.

Рассмотрим многообразия $X = \mathbf{R}_+ \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \cdots \times \mathrm{S}_{k-1}$ и $Y = \mathrm{S}_k$, и пусть $Z = X \times Y$ с метрикой

$$dz^2 = dx^2 + \tilde{q}_k^2(\rho) dy^2$$

и борелевой мерой $\tau_1(x)\eta_k(\theta_k)$, где

$$\tau_1(x) = \tilde{\tau}(\rho)\eta_1(\theta_1)\ldots\eta_{k-1}(\theta_{k-1});$$

т. е. Z совпадает с многообразием, полученным из D заменой переменной. По теореме 2 оператор Шредингера на многообразии Z имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда дискретен спектр оператора Шредингера на многообразии X с весовой функцией

$$\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)\tau_1(x) = \tilde{q}_k^{n_k}(\rho)\tilde{\tau}(\rho)\eta_1(\theta_1)\dots\eta_{k-1}(\theta_{k-1}).$$

Далее, пусть многообразие $X_1 = \mathbf{R}_+ \times \mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_2 \times \dots \times \mathrm{S}_{k-2}$, а многообразие $Y_1 = \mathrm{S}_{k-1}$, и рассмотрим многообразие $Z_1 = X_1 \times Y_1$ с метрикой

$$dz_1^2 = dx_1^2 + \tilde{q}_{k-1}^2(\rho)dy_1^2$$

и весовой функцией $\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)\tau_2(x_1)\eta_{k-1}(\theta_{k-1})$, где $\tau_2(x_1) = \tilde{\tau}(\rho)\eta_1(\theta_1)\dots\eta_{k-2}(\theta_{k-2})$; т. е. оператор Шредингера на многообразии Z_1 совпадает с оператором, дискретность спектра которого мы исследуем. Снова применяя теорему 2, получаем, что оператор Шредингера на многообразии X с указанным весом имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда дискретен спектр оператора Шредингера на многообразии X_1 с весовой функцией

$$\tilde{q}_{k-1}^{n_{k-1}}(\rho)\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)\tau_2(x_1) = \tilde{q}_{k-1}^{n_{k-1}}(\rho)\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)\tilde{\tau}(\rho)\eta_1(\theta_1)\dots\eta_{k-2}(\theta_{k-2}).$$

Повторяя этот процесс еще $k-2$ раза, в итоге получим, что дискретность спектра оператора Шредингера на многообразии D эквивалентна дискретности спектра оператора Штурма – Лиувилля на $\mathbf{R}_+$ с весом $\tilde{\tau}(\rho)\tilde{q}_1^{n_1}(\rho)\dots\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)$.

Введем обозначение $\tilde{s}(\rho) = \tilde{\tau}(\rho)\tilde{q}_1^{n_1}(\rho)\dots\tilde{q}_k^{n_k}(\rho)$, тогда полученный оператор можно записать в виде

$$B = \tilde{s}^{-1}(\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\tilde{s}(\rho)\frac{d}{d\rho}\right) + \tilde{c}(\rho).$$

После преобразования получаем:

$$Bu = -u''(\rho) - \frac{\tilde{s}'(\rho)}{\tilde{s}(\rho)}u'(\rho) + \tilde{c}(\rho)u(\rho).$$

Сделаем замену переменных $\zeta(\rho) = \tilde{s}^{\frac{1}{2}}(\rho)u(\rho)$, т. е. $u = \tilde{s}^{-\frac{1}{2}}(\rho)\zeta(\rho)$. Тогда

$$u' = \zeta'\tilde{s}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}'\zeta,$$

$$u'' = \zeta''\tilde{s}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}'\zeta' - \frac{1}{2}\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}'\zeta' + \frac{3}{4}\tilde{s}^{-\frac{5}{2}}\tilde{s}'^2\zeta - \frac{1}{2}\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}''\zeta.$$

Подставляя в выражение для оператора B, получаем

$$Bu = -\zeta''\tilde{s}^{-\frac{1}{2}} + \zeta'\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}' - \frac{3}{4}\zeta\tilde{s}^{-\frac{5}{2}}\tilde{s}'^2 + \frac{1}{2}\zeta\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}'' - \zeta'\tilde{s}^{-\frac{3}{2}}\tilde{s}' + \frac{1}{2}\zeta\tilde{s}^{-\frac{5}{2}}\tilde{s}'^2 + \zeta\tilde{c}\tilde{s}^{-\frac{1}{2}},$$

$$B_0\zeta = \tilde{s}^{\frac{1}{2}}Bu = -\zeta'' - \zeta\left(\frac{\tilde{s}'^2}{4\tilde{s}^2} - \frac{\tilde{s}''}{2\tilde{s}} - \tilde{c}\right).$$

Далее обозначим

$$\tilde{F}(\rho) = \tilde{c}(\rho) + \frac{\tilde{s}''}{2\tilde{s}} - \frac{\tilde{s}'^2}{4\tilde{s}^2} = \tilde{c}(\rho) + \left(\frac{\tilde{s}'(\rho)}{2\tilde{s}(\rho)}\right)' + \left(\frac{\tilde{s}'(\rho)}{2\tilde{s}(\rho)}\right)^2,$$

и, таким образом, получаем оператор

$$B_0 = -\frac{d^2}{d\rho^2} + \tilde{F}(\rho).$$

Поскольку функция $\tilde{F}(\rho)$ локально интегрируема (в силу условий, наложенных на $\tilde{c}(\rho)$ и $\tilde{s}(\rho)$), то к последнему оператору применим критерий дискретности спектра А. М. Молчанова [16]. Получаем, что если функция $\tilde{F}(\rho)$ ограничена снизу, то спектр этого оператора, а, следовательно, и спектр исследуемого оператора Шредингера $-L_\mu$ на многообразии M, дискретен тогда и только тогда, когда среднее значение функции $\tilde{F}(\rho)$ на бесконечности стремится к бесконечности, т. е.

$$\forall\ \omega > 0 \quad \lim_{\rho\to\infty} \int\limits_{\rho}^{\rho+\omega} \tilde{F}(p)dp = +\infty.$$

Вернемся к исходной переменной r, сделав замену $p = \int\limits_{r_0}^{t} q_0(t)dt$. С учетом введенного перед теоремой обозначения $F(r)$ переписываем последнее условие в виде

$$\lim_{r \to d} \int\limits_{r(\rho)}^{r(\rho+\omega)} q_0(t)F(t)dt = +\infty,$$

что и доказывает данную теорему.

3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Отметим, что теорема, представленная в докладе [17], является простым следствием из доказанной теоремы 1 для случая многообразия M, борелева мера на котором совпадает с римановым объемом, т. е. $\sigma(r,\theta) = \tau(r) \equiv 1$.

Далее, нетрудно видеть, что в случае обычного весового искривленного произведения порядка k, т. е. $d = +\infty$, $q_0(r) = 1$, из теоремы 1 следует основной результат [8], а в случае невесового искривленного произведения — основной результат [4].

Кроме того, аналогично может быть рассмотрено квазимодельное многообразие M более общего вида, т. е. многообразие, представимое в виде объединения $B \cup D_1 \cup \dots \cup D_p$, где B — некоторый компакт, а концы D_i — простые искривленные произведения, аналогичные описанному выше многообразию D. Тогда из доказательства теоремы 1 нетрудно получить критерий дискретности спектра оператора Шредингера на квазимодельном многообразии — достаточно лишь потребовать выполнения условий этой теоремы на каждом конце D_i.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект №* 13-01-97038-р_поволжье_а).

Библиографический список

1. *Pinsky M.* The spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature I // J. Diff. Geom. 1978. Vol. 13. P. 87–91.
2. *Baider A.* Noncompact Riemannian manifolds with discrete spectra // J. Diff. Geom. 1979. Vol. 14. P. 41–57.
3. *Brooks R.* A relation between growth and the spectrum of the Laplacian // Math. Z. 1981. Vol. 178. P. 501–508. DOI: 10.1007/BF01174771
4. *Светлов А. В.* Критерий дискретности спектра оператора Лапласа – Бельтрами на квазимодельных многообразиях // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1362–1371.
5. *Harmer M.* Discreteness of the spectrum of the Laplacian and stochastic incompleteness // J. Geom. Anal. 2009. Vol. 19(2). P. 358–372. DOI: 10.1007/s12220-008-9055-6
6. *Kondratev V., Shubin M.* Discreteness of spectrum for the Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry // Operator theory : Advances and Applications. 1999. Vol. 110. P. 185–226. DOI: 10.1007/978-3-0348-8672-7_12
7. *Shen Z.* The spectrum of Schrödinger operators with positive potentials in Riemannian manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131, № 11. P. 3447–3456. DOI: 10.1090/S0002-9939-03-06968-5
8. *Svetlov A. V.* Discreteness criterion for the spectrum of the Schrödinger operator on weighted quasimodel manifolds // Intern. J. Pure Appl. Math. 2013. Vol. 89, № 3. P. 393–400. DOI: 10.12732/ijpam.v89i3.10
9. *Losev A. G.* On some Liouville theorems on noncompact Riemannian manifolds // Siberian Math. J. 1998. Vol. 39, № 1. P. 74–80. DOI: 10.1007/BF02732362.
10. *Losev A. G., Mazepa E. A.* Bounded solutions of the Schrödinger equation on Riemannian products // St. Petersburg Math. J. 2001. Vol. 13, № 1. P. 57–73.
11. *Korolkov S. A., Losev A. G.* Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends // Mathematische Zeitschrift. 2012. Vol. 272(1–2). P. 459–472. DOI: 10.1007/s00209-011-0943-2.
12. *Grigor'yan A. A.* Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 36. P. 135–249. DOI: 10.1090/S0273-0979-99-00776-4.
13. *Светлов А. В.* Спектр оператора Шреденгера на скрещенных произведениях // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. 2002. Вып. 7. С. 12–19.
14. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики : в 4 т. Т. 1. Функциональный анализ. М. : Мир, 1977. 360с.
15. *Schechter M.* Spectra of partial differential operators. Amsterdam : North-Holland, 1971. 295 p.
16. *Молчанов А. М.* Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. № 2. С. 169–199.
17. *Светлов А. В.* Критерий дискретности спектра оператора Шредингера на многообразиях специального вида // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й междунар. Сарат. зимн. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2014. С. 245–247.

On Spectrum of Schrödinger Operator on Manifold of a Special Type

A. V. Svetlov

Volgograd State University, 100, pr. Universitetsky, Volgograd, 400062, Russia, a.v.svetlov@gmail.com

The main subject of the paper is spectrum of the Schrödinger operator on weighted quasimodel manifold with an end, which is warped product of a special type. We prove the criterion of discreteness for the spectrum of the operator in terms of metric coefficients and potential of the operator. As the conclusion we made some remarks on the corollaries of the proved theorem and on its extension to more complex quasimodel manifolds.

Key words: spectrum discreteness, Schrödinger operator, Riemannian manifolds, quasimodel manifolds, warped products.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-97038-р_поволжье_а).

References

1. Pinsky M. The spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature I. *J. Diff. Geom.*, 1978, vol. 13, pp. 87–91.
2. Baider A. Noncompact Riemannian manifolds with discrete spectra. *J. Diff. Geom.*, 1979, vol. 14, pp. 41–57.
3. Brooks R. A relation between growth and the spectrum of the Laplacian. *Math. Z.*, 1981, vol. 178, pp. 501–508. DOI: 10.1007/BF01174771.
4. Svetlov A. V. A discreteness criterion for the spectrum of the Laplace–Beltrami operator on quasimodel manifolds. *Siberian Math. J.*, 2002, vol. 43(6), pp. 1103–1111. DOI: 10.1023/A:1021129703899.
5. Harmer M. Discreteness of the spectrum of the Laplacian and stochastic incompleteness. *J. Geom. Anal.*, 2009, vol. 19(2), pp. 358–372. DOI: 10.1007/s12220-008-9055-6.
6. Kondratev V., Shubin M. Discreteness of spectrum for the Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry. *Operator theory : Advances and Applications*, 1999, vol. 110, pp. 185–226. DOI: 10.1007/978-3-0348-8672-7_12.
7. Shen Z. The spectrum of Schrödinger operators with positive potentials in Riemannian manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2003, vol. 131, no. 11, pp. 3447–3456. DOI: 10.1090/S0002-9939-03-06968-5.
8. Svetlov A. V. Discreteness criterion for the spectrum of the Schrödinger operator on weighted quasimodel manifolds. *Intern. J. Pure and Appl. Math.*, 2013, vol. 89, no. 3, pp. 393–400. DOI: 10.12732/ijpam.v89i3.10.
9. Losev A. G. On some Liouville theorems on non-compact Riemannian manifolds. *Siberian Math. J.*, 1998, vol. 39, no. 1, pp. 74–80. DOI: 10.1007/BF02732362.
10. Losev A. G., Mazepa E. A. Bounded solutions of the Schrödinger equation on Riemannian products. *St. Petersburg Math. J.*, 2001, vol. 13, no. 1, pp. 57–73.
11. Korolkov S. A., Losev A. G. Generalized harmonic functions of Riemannian manifolds with ends. *Mathematische Zeitschrift*, 2012, vol. 272(1–2), pp. 459–472. DOI: 10.1007/s00209-011-0943-2.
12. Grigor'yan A. A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 36, pp. 135–249. DOI: 10.1090/S0273-0979-99-00776-4
13. Svetlov A. V. Spektr operatora Shredengera na skreshchennykh proizvedeniiakh [The spectrum of the Schrodinger operator on the warped products]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika*, 2002, iss. 7, pp. 12–19 (in Russian).
14. Reed M. C., Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional analysis*. Vol. 1. London, Academic Press, 1980, 325 p.
15. Schechter M. *Spectra of partial differential operators*. Amsterdam, North-Holland, 1971, 310p.
16. Molchanov A. M. Ob usloviiakh diskretnosti spektra samosopriazhennykh differentsial'nykh uravnenii vtorogo poriadka [On conditions for discreteness of the spectrum of self-adjoint differential equations of the second order], *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1953, no. 2, pp. 169–199 (in Russian).
17. Svetlov A. V. Kriterii diskretnosti spektra operatora Shredingera na mnogoobraziiakh spetsial'nogo vida [Discreteness criterion for the spectrum of the Schrödinger operator on manifolds of a special kind]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : Materialy 17-i mezhdunar. Saratovskoi zimnei shkoly* [Modern problems of function theory and its applications : texts of 17th Intern. Saratov Winter School], Saratov, 2014. p. 245–247 (in Russian).

УДК 513.51

О НОРМАХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

К. А. Смотрицкий[1], Е. В. Дирвук[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики, Гродненский государсвенный университет им. Янки Купалы, Беларусь, k_smotritski@mail.ru

[2]Аспирант кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики, Гродненский государсвенный университет им. Янки Купалы, Беларусь, dirvuk@gmail.com

Объектом исследования данной работы являются интерполяционные рациональные функции Лагранжа. Цель исследования — изучение аппроксимационных свойств указанных функций в пространстве квадратично-суммируемых функций. Во введении указана актуальность темы исследования, приведены ссылки на некоторые работы, связанные с данной статьей. Описано построение аппарата приближения — интерполяционных рациональных функций Лагранжа. В основной части работы вычислена норма интерполяционной рациональной функции Лагранжа в пространстве квадратично-суммируемых функций. Это позволило оценить погрешность приближения произвольной функции посредством интерполяционных рациональных функций Лагранжа в пространстве квадратично-суммируемых функций через наилучшие равномерные рациональные приближения данной функции. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования свойств интерполяционных рациональных функций и приближений ими в различных функциональных пространствах.

Ключевые слова: интерполяционная рациональная функция Лагранжа, норма интерполяционного оператора, приближение в пространстве квадратично-суммируемых функций.

ВВЕДЕНИЕ

Использование интерполяционных функций в качестве аппарата приближения является одним из классических методов теории рациональной аппроксимации, как со свободными, так и с фиксированными полюсами. При этом, как следует из неравенства Лебега, исследование существенным образом опирается на норму соответствующего оператора. Следует отметить, что задача о вычислении нормы интерполяционных рациональных операторов, действующих из $C[-1,1]$ в $C[-1,1]$, в случае фиксированных полюсов до настоящего времени не решена. В связи с этим возникает вопрос об аппроксимации в других пространствах.

Ранее авторами были решены задачи о сходимости в среднем соответствующих процессов в случае интерполяции на отрезке с узлами в нулях косинус и синус-дробей Чебышева – Маркова (см., например, [1]) и в случае интерполяции на всей вещественной оси с узлами в нулях косинус и синус-дробей Бернштейна (см. [2]). В настоящей работе исследуются свойства интерполяционных рациональных процессов на отрезке $[-1,1]$ с узлами в нулях специальных функций, обобщающих многочлены Якоби с весом $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$.

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ — последовательность комплексных чисел таких, что $a_n=0$, $|a_k|<1$, $k=1,\ldots,n$, причем если $\operatorname{Im} a_k \neq 0$, то эта последовательность содержит и число $\overline{a_k}$.

Рациональная функция $Q_n(x)$ определена следующим образом (см. [3]):

$$Q_n(x) = \frac{\sin \mu_{n+1/2}(x)}{\sqrt{1-x}}\,,$$

где

$$\mu_{n+1/2}(x) = \frac{1}{2}\arccos(x) + \sum_{k=1}^{n} \arccos\frac{x+a_k}{1+a_kx}\,, \qquad \lambda_{n+1/2}(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_kx}\,.$$

Рациональная функция $Q_n(x)$ имеет n простых вещественных нулей на интервале $(-1,1)$. Занумеруем их для удобства в следующем порядке:

$$-1 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < 1, \qquad N_n(x_k)=0, \qquad \mu_n(x_k)=k\pi, \qquad k=1,\ldots,n.$$

Для произвольной функции $f \in C[-1,1]$ составим интерполяционную рациональную функцию Лагранжа с узлами в точках x_k, $k = 1, \ldots, n$:

$$L_n(x; f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} f(x_k) Q_n(x) \sqrt{1+x_k}}{\lambda_{n+1/2}(x)(x - x_k)} . \tag{1}$$

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Для рассматриваемой интерполяционной функции Лагранжа (1) имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для произвольной функции* $f \in C[-1; 1]$ *имеет место соотношение*

$$\int_{-1}^{1} \frac{L_n^2(x; f)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi \sum_{k=0}^{n} \frac{f^2(x_k)}{\lambda_{n+1/2}(x_k)} . \tag{2}$$

Доказательство. Используя равенство (1), получим:

$$\int_{-1}^{1} \frac{|L_n(x; f)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} f(x_k) Q_n(x) \sqrt{1+x_k}}{\lambda_{n+1/2}(x)(x-x_k)} \right)^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^2(x_k)(1+x_k)}{\lambda^2_{n+1/2}(x_k)} I_k + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} f(x_k) f(x_l) \sqrt{1+x_k}\sqrt{1+x_l}}{\lambda_{n+1/2}(x_k)\lambda_{n+1/2}(x_l)} I_{kl} , \tag{3}$$

где

$$I_k = \int_{-1}^{1} \frac{\sin \mu_{n+1/2}(x)}{(1-x)(x-x_k)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} , \qquad I_{kl} = \int_{-1}^{1} \frac{\sin \mu_{n+1/2}(x)}{(1-x)(x-x_k)(x-x_l)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Вычислим интегралы $I_k, k = 1, \ldots, n$. Сделаем замену $x = (1-y^2)/(1+y^2)$. Известно, что

$$\sin \mu_n \left(\frac{1-y^2}{1+y^2} \right) = (-1)^n \sin \Phi_n(y),$$

— синус-дробь Бернштейна с нулями в точках $\pm y_k$, $y_k = \sqrt{(1-x_k)/(1+x_k)}$, $k = 1, \ldots, n$.

Отсюда получим, что интегралы $I_k, k = 1, \ldots, n$ равны

$$I_k = \frac{(1+y_k^2)^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+y^2)^2 \sin^2 \Phi_n(y) dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2} .$$

Как и в [4, с. 48] введем синус-дробь Бернштейна, полагая

$$\sin \Phi_n(y) = \frac{1}{2i} \left(\sqrt{\frac{y-i}{y+i}} \prod_{k=1}^{n} \frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}} - \sqrt{\frac{y+i}{y-i}} \prod_{k=1}^{n} \frac{y-\overline{z_k}}{y-z_k} \right),$$

где точки z_k являются корнями уравнения $y^2 + (1+a_k)/(1-a_k) = 0$, $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. При этом ограничения, налагаемые на параметры $a_k, k = 1, \ldots, n$, влекут выполнение следующих условий: 1) $z_1 = i$, 2) паре комплексно сопряженных параметров из множества $\{a_k\}_{k=1}^n$ соответствует пара симметричных относительно мнимой оси параметров из множества $\{z_k\}_{k=1}^n$.

Из представления $\sin \Phi_n(y)$ несложно получить

$$\sin^2 \Phi_n(y) = -\frac{1}{4} \left(\frac{y-i}{y+i} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}} \right)^2 - 2 + \frac{y+i}{y-i} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{y-\overline{z_k}}{y-z_k} \right)^2 \right).$$

Теперь интеграл I_k представим в виде суммы

$$I_k = -\frac{1}{4}(I_{k1} - 2I_{k2} + I_{k3}),$$

где

$$I_{k1}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y-i}{y+i}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2}\,,\qquad I_{k2}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+y^2)^2dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2}\,,$$

$$I_{k3}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y+i}{y-i}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-\overline{z_k}}{y-z_k}\right)^2\frac{(1+y^2)^2dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2}\,.$$

Далее интеграл I_{k1} запишем в следующем виде:

$$I_{k1}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{2yi}{1+y^2}-\frac{2}{1+y^2}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2}\,.$$

Разобьем интеграл на сумму интегралов. Далее продемонстрируем вычисление одного из интегралов

$$J(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2dy}{y^2(y^2-y_k^2)^2}\,.$$

Для нахождения этого интеграла воспользуемся методом вывода параметра в комплексную область, предложенным в [4, с. 92]. Отметим, что этот метод использовался в [1–3] для вычисления соответствующих интегралов. Рассмотрим вспомогательный интеграл:

$$J(z,w)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y-i}{y+i}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2\sin^2\Phi_n(y)dy}{(y-w)^2(y^2-z^2)^2}\,,$$

а затем интеграл $J(y)$ найдем с помощью предельного перехода:

$$J(y)=\lim_{\substack{z\to y_k,\,w\to 0\\ \operatorname{Im}z>0}}J(z,w).$$

Подынтегральная функция $J(z,w)$ в верхней полуплоскости имеет две особые точки $y=w$ и $y=z$, таким образом, получим:

$$J(z,w)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2dy}{(y-w)^2(y^2-z^2)^2}=$$

$$=2\pi i\left(\underset{y=z}{res}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2}{(y-w)^2(y^2-z^2)^2}+\underset{y=w}{res}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2}{(y-w)^2(y^2-z^2)^2}\right)=$$

$$=2\pi i\left(\lim_{y\to z}\frac{d}{dy}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2}{(y-w)^2(y+z)^2}+\lim_{y\to w}\frac{d}{dy}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)^2\frac{(1+y^2)^2}{(y^2-z^2)^2}\right).$$

Замечая, что

$$\frac{d}{dy}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{y-z_k}{y-\overline{z_k}}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k-\overline{z_k}}{(y-z_k)(y-\overline{z_k})}\,,$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{(1+y^2)^2}{(y-w)^2(y+z)^2}\right)=\frac{2(y^2+1)(2y-w+z+wy^2-y^2z+2wyz)}{(w-z)^3(y+z)^3}\,,$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{(1+y^2)^2}{(y^2-z^2)^2}\right)=\frac{4y(y^2+1)(z^2+1)}{(y^2-z^2)^3}\,,$$

и возвращаясь к вычислению интеграла $J(y)$, получим:

$$J(y)=4\pi i\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y_k-z_j}{y_k-\overline{z_j}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k-\overline{z_k}}{(y_k-z_k)(y_k-\overline{z_k})}\frac{(1+y_k^2)^2}{4y_k^4}+\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y_k-z_j}{y_k-\overline{z_j}}\right)^2\frac{(z^2+1)(z^2-3)}{z^5}+$$

$$+\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{z_j}{\overline{z_j}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k-\overline{z_k}}{z_k\overline{z_k}}\frac{1}{y_k^4}\,.$$

Аналогичным образом вычисляются оставшиеся интегралы из суммы интегралов I_{k1}, I_{k2}, I_{k3}.

Учитывая

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{y_k-z_j}{y_k-\overline{z_j}}=(-1)^n,$$

будем иметь:

$$I_k=-\frac{(1+y_k^2)^2}{8}\left(-\frac{2\pi}{1+y_k^2}+2\pi\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j-\overline{z_j}}{(y_k-z_j)(y_k-\overline{z_j})}\right).$$

Преобразуем сумму, стоящую в правой части с учетом симметричности чисел $\{z_k\}_{k=1}^n$:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j-\overline{z_j}}{(y_k-z_j)(y_k-\overline{z_j})}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{y_k-z_j}+\frac{1}{y_k-\overline{z_j}}\right)=\frac{-2\lambda(x_k)}{i(1+y_k^2)}\,.$$

Получим:

$$I_k=\frac{\pi(1+y_k^2)}{2}\left(-\frac{1}{2}-i(1+y_k^2)\sum_{j=1}^{n}\frac{z_j}{y_k^2-z_j^2}\right)=\frac{\pi\lambda(x_k)(1+y_k^2)}{2}=\frac{\pi\lambda(x_k)}{1+x_k}\,. \tag{4}$$

Теперь займемся интегралами I_{kl}. Проделав аналогичные вычисления получим:

$$I_{kl}=0. \tag{5}$$

Подставим полученные результаты для интегралов (4) и (5) в (3). Окончательно получим:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{L_n^2(x;f)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\pi\sum_{k=0}^{n}\frac{f^2(x_k)}{\lambda_{n+1/2}(x_k)}\,.$$

Теорема 1 доказана.

С учетом неотрицательных значений, принимаемых вещественнозначной функцией $\lambda_{n+1/2}(x)$ при заданном выборе параметров $\{a_k\}_{k=1}^n$ и точности интерполяционной функции Лагранжа для константы, коэффициенты полученных формул будут иметь следующие свойства.

Замечание. Коэффициенты $A_k=\pi/\lambda_{n+1/2}(x_k)$, $k=1,\ldots,n$, соотношения (2) удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}A_k>0,\qquad k=0,\ldots,n,\\ \sum_{k=1}^{n}A_k=\pi.\end{gathered} \tag{6}$$

Обозначим через $L_2(\rho)=L_2(\rho;[-1;1])$ пространство квадратично-суммируемых, по Лебегу, с весом $\rho=\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ функций с нормой

$$\|f\|_{L_2(\rho)}=\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)^{1/2}.$$

Теперь вычислим норму рациональной функции Лагранжа $L_n(x;f)$ в пространстве $L_2(\rho)$.

Лемма 1. *Для нормы оператора $L_n:\ \to L_2(\rho)$ справедливо равенство*

$$\|L_n\|_{C\to L_2(\rho)}=\sqrt{\pi}\,.$$

Доказательство. Для любой функции $f \in C[-1;1]$ с помощью теоремы 1 и равенства (6) находим:

$$\|L_n(x;f)\|_{C\to L_2(\rho)} \leqslant \sqrt{\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f^2(x_k)}{\lambda_{n+1/2}(x_k)}} \leqslant \|f\|_C \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{\lambda_{n+1/2}(x_k)}} = \sqrt{\pi}\|f\|_C .$$

С другой стороны, для $f(x) \equiv 1$ имеем

$$\|L_n(x;f)\|_{C\to L_2(\rho)} = \sup_{f\in C, \|f\|\leqslant 1} \|L_n(x;f)\|_{L_2(\rho)} \leqslant \|L_n(x;1)\|_{L_2(\rho)} = \|1\|_{L_2(\rho)} = \sqrt{\pi} .$$

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим вопрос приближения произвольной непрерывной на отрезке $[-1;1]$ функции.

Теорема 2. *Для любой функции $f \in C[-1;1]$ погрешность приближения ее интерполяционной функцией $L_n(x;f)$ может быть оценена с помощью неравенства*

$$\|f(x) - L_n(x;f)\|_{L_2(\rho)} \leqslant 2\sqrt{\pi} R_n(f,a),$$

где $R_n(f,a)$ — наилучшее равномерное приближение функции f посредством рациональных функций из $\mathscr{R}_n$ вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=2}^{n}(1+a_k x)} ,$$

где $p_n(x)$ — многочлен степени не выше n.

Доказательство. Пусть $r_n^* \in \mathscr{R}_n$ — рациональная функция наилучшего равномерного приближения. В силу того что $L_n(x;r_n^*) \equiv r_n^*(x)$ и леммы 1, получим:

$$\begin{gathered}\|f(x) - L_n(x;f)\|_{L_2(\rho)} \leqslant \|f(x) - r_n^*(x)\|_{L_2(\rho)} + \|L_n(x;f - r_n^*)\|_{L_2(\rho)} \leqslant \\ \leqslant \|f - r_n^*\|_{C[-1;1]} \cdot \|1\|_{L_2(\rho)} + \|L_n\|_{C\to L_2(\rho)} \cdot \|f - r_n^*\|_{C[-1;1]} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\pi} R_n(f,a) + R_n(f,a)\sqrt{\pi}.\end{gathered}$$

Теорема 2 доказана.

Следует отметить, что аналогичный результат получен при построении интерполяционной рациональной функции Лагранжа с узлами в точках x_k, $k = 1,\ldots,n$ и одной заранее фиксированной точке $x_0 = 1$. В частности, для произвольной функции $f \in C[-1,1]$ интерполяционная рациональная функция Лагранжа с вышеуказанными узлами имеет следующий вид:

$$L_n(x;f) = {\sum_{k=0}^{n}}' \frac{(-1)^{k+1} f(x_k)(1-x)Q_n(x)\sqrt{1+x_k}}{\sqrt{2}\lambda_{n+1/2}(x_k)(x-x_k)} , \tag{7}$$

где штрих после знака суммы означает, что первое слагаемое необходимо разделить на 2.

При этом для рассматриваемой интерполяционной рациональной функции Лагранжа (7) норма в пространстве квадратично-суммируемых функций описана в следующей теореме.

Теорема 3. *Для произвольной функции $f \in C[-1;1]$ имеет место соотношение*

$$\int_{-1}^{1} \frac{L_n^2(x;f)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi {\sum_{k=0}^{n}}' \frac{f^2(x_k)}{\lambda_{n+1/2}(x_k)} ,$$

где штрих после знака суммы означает, что первое слагаемое необходимо разделить на 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе вычислена норма интерполяционной рациональной функции Лагранжа в пространстве квадратично-суммируемых функций. На основании этого результата получена норма соответствующего интерполяционного оператора, действующего из пространства непрерывных функций в пространство функций, интегрируемых в квадрате и оценена погрешность приближения произвольной функции посредством интерполяционных рациональных функций Лагранжа в пространстве квадратично-суммируемых функций через наилучшие равномерные рациональные приближения данной функции.

Библиографический список

1. *Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышева — Маркова // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 5. С. 11–15.
2. *Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* Сходимость в среднем интерполяционных рациональных процессов в нулях дробей Бернштейна // Весці НАН Беларусі. 2010. № 3. С. 5–9.
3. *Ровба Е. А.* Об одной ортогональной системе рациональных функций и квадратурах типа Гаусса // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матем. навук. 1998. № 3. С. 31–35.
4. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск : Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1979. 176 с.

About the Norms of Interpolation Processes with Fixed Nodes

K. A. Smotritski, Y. V. Dirvuk

Yanka Kupala State University of Grodno, 22, Ozheshko str., 230023, Grodno, Belarus, k_smotritski@mail.ru, dirvuk@gmail.com

The object of study is interpolating rational Lagrange functions. The aim of the research — the study of approximation properties of these functions in the space of square integrated functions. In the introduction the relevance of the research is indicated, references to some works related to this article are given. We also describe the construction of the apparatus of approximation — interpolating rational Lagrange functions. In the main part the norm of the interpolating rational function in the space of the square integrated functions is calculated. This enabled us to estimate the error of the approximation of an arbitrary function by interpolating rational Lagrange functions in the space of square integrated functions in terms of best uniform rational approximation of this function. The results can be used for further investigation of the properties of interpolating rational functions and their approximations in various functional spaces.

Key words: interpolating rational Lagrange function, the norm of the interpolating process, approximation in the space of square integrated functions..

References

1. Rovba E. A., Smotritski K. A. Rational interpolation at the zeros of sine-fractions Chebyshev – Markov. *Doklady NAN Belarusi*, 2008, vol. 52, no. 5, pp. 11–15 (in Russian).
2. Rovba E. A., Smotritski K. A. Convergence in the mean of rational interpolating processes in the zeroes of Bernstein fractures. *Vesti NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk*, 2005, no. 1, pp. 6–10 (in Russian).
3. Rovba E. A. Orthogonal system of rational functions and quadratures of Gauss-type. *Mathematica Balkanica*, 1999, vol. 13, no. 1–2, pp. 187–198.
4. Rusak V. N. *Racional'nye funkcii kak apparat priblizhenija* [Rational functions as approximating tool]. Minsk, 1979, 176 p. (in Russian).

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННОГО ОПЕРАТОРА СТЕКЛОВА

А. А. Хромов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

На базе модификации оператора Стеклова построены семейства интегральных операторов, позволяющие получать равномерные приближения к функции и ее производной на отрезке.

Ключевые слова: производная, равномерные приближения, оператор Стеклова..

1. Пусть $f(x) \in C^1[0,1]$. Из операторов

$$S_{\alpha 1} f = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)\,dt, \qquad S_{\alpha 2} f = \frac{1}{\alpha} \int\limits_{x}^{x+\alpha} f(t)\,dt$$

построим операторы:

$$S_\alpha^{(2)} f = \begin{cases} S_{\alpha 2}^2 f & \text{при } x \in [0,1/2], \\ S_{\alpha 1}^2 f & \text{при } x \in [1/2,1] \end{cases} \qquad \text{и} \qquad DS_\alpha^{(2)} f = \begin{cases} DS_{\alpha 2}^2 f & \text{при } x \in [0,1/2], \\ DS_{\alpha 1}^2 f & \text{при } x \in [1/2,1], \end{cases}$$

где D — оператор дифференцирования по x. Из-за разрывности функций $S_\alpha^{(2)} f$ и $DS_\alpha^{(2)} f$ в точке $x = 1/2$ будем использовать метрику пространства $L_\infty[0,1]$, норма в котором в нашем случае будет определяться по формуле

$$\|\cdot\|_{L_\infty[0,1]} = \max\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\}.$$

Лемма 1. *Операторы $S_{\alpha 1}^2$ и $S_{\alpha 2}^2$ имеют вид*

$$S_{\alpha 1}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[\int\limits_{x-2\alpha}^{x-\alpha} (2\alpha - (x-t)) f(t)\, dt + \int\limits_{x-\alpha}^{x} (x-t) f(t)\, dt\right],$$

$$S_{\alpha 2}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[\int\limits_{x}^{x+\alpha} (t-x)) f(t)\, dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (2\alpha - (t-x)) f(t))\, dt\right], \qquad \alpha \le 1/4.$$

Доказательство получается, если к повторным интегралам в выражениях для операторов $S_{\alpha 1}^2$ и $S_{\alpha 2}^2$ применить формулу интегрирования по частям.

Чтобы аргументы функций $S_{\alpha j}^2 f$, $j = 1, 2$, не вышли за границы отрезка $[0, 1/2]$ при $j = 2$ и $[1/2, 1]$ при $j = 1$ должны выполняться условия: $\frac{1}{2} + 2\alpha \leqslant 1$ и $\frac{1}{2} - 2\alpha \geqslant 0$.

Отсюда следует ограничение $\alpha \leqslant 1/4$, которое не ограничивает общности приведенных здесь доказательств.

Лемма 2. *Операторы $DS_{\alpha 1}^2$ и $DS_{\alpha 2}^2$ имеют вид*

$$DS_{\alpha 1}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int\limits_{x-2\alpha}^{x-\alpha} f(t)\, dt + \int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)\, dt\right], \qquad DS_{\alpha 2}^2 f = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\int\limits_{x}^{x+\alpha} f(t)\, dt + \int\limits_{x+\alpha}^{x+2\alpha} f(t)\, dt\right].$$

Теорема 1. *Для любой непрерывной функции $f(x)$ выполняется сходимость:*

$$\|S_\alpha^{(2)} f - f\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{1}$$

Доказательство получается, если использовать равенство $S_{\alpha j}^2 1 = 1$, $j = 1, 2$, из которого получается оценка: $|S_{\alpha j}^2 f - f| \leqslant \omega(2\alpha)$, $j = 1, 2$, где $\omega(2\alpha)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Теорема 2. *Для $f(x) \in C^1[0,1]$ выполняется сходимость*

$$\|DS_\alpha^{(2)} f - f'\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0. \tag{2}$$

Доказательство. При дифференцировании функций в формулах леммы 1 заменим дифференцирование по x на дифференцирование по t, после чего возьмем соответствующие интегралы по частям, «перебросив» производную на функцию $f(x)$. Поскольку подстановки при этих вычислениях обратятся в ноль, мы придем к равенствам:

$$DS_{\alpha j}^2 f = S_{\alpha j}^2 f', \qquad j = 1, 2. \tag{3}$$

Тогда из теоремы 1 будет следовать утверждение теоремы 2.

2. Пусть $f(x) \in C^1[0,1]$ задана ее δ-приближением $f_\delta(x)$ в среднеквадратичной метрике. Найдем приближения к $f(x)$ и $f'(x)$ с помощью построенных выше операторов.

Введем в рассмотрение величины:

$$\Delta(\delta, S_\alpha^{(2)}, f) = \sup\{\|S_\alpha^{(2)} f - f\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\},$$

$$\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, f) = \sup\{\|DS_\alpha^{(2)} f - f'\|_{L_\infty} : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\}.$$

Лемма 3. *Для сходимости* $\Delta(\delta, S_\alpha^{(2)}, f) \to 0$ *при* $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ *необходимо и достаточно, чтобы: а) выполнялось условие* (1)*; б) выполнялось согласование* $\alpha = \alpha(\delta)$*, удовлетворяющее условиям:* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\|S_{\alpha(\delta)}^{(2)}\|_{L_2 \to L_\infty}\delta \to 0$ *при* $\delta \to 0$. *Для сходимости* $\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, f) \to 0$ *при* $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ *необходимо и достаточно выполнения условия* (2) *и приведенного выше условия б) с заменой* $S_\alpha^{(2)}$ *на* $DS_\alpha^{(2)}$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 1 из [1].

Лемма 4. *Справедливы равенства:*

$$\|S_\alpha^{(2)}\|_{L_2 \to L_\infty} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha^{-1/2}\,, \tag{4}$$

$$\|DS_\alpha^{(2)}\|_{L_2 \to L_\infty} = \sqrt{2}\alpha^{-3/2}\,. \tag{5}$$

Доказательство. Имеем:

$$\|S_\alpha^{(2)}\|_{L_2 \to L_\infty} = \max\left\{\|S_{\alpha 2}^2\|_{L_2[0,1]\to C[0,1]},\ \|S_{\alpha 1}^2\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]}\right\}.$$

Для норм операторов $DS_\alpha^{(2)}$ справедлива эта же формула с заменой $S_\alpha^{(2)}$ на $DS_\alpha^{(2)}$.

Операторы $S_{\alpha j}^2$, $DS_{\alpha j}^2$, $j = 1, 2$ — интегральные, действующие из $L_2[0,1]$ в $C[0,1/2]$ при $j = 2$ и в $C[1/2,1]$ при $j = 1$.

Рассмотрим оператор $S_{\alpha 2}^2$. Пользуемся формулой

$$\|S_{\alpha 2}^2\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]} = \max_{0\leqslant x\leqslant 1/2}\left(\int_0^1 (K_{\alpha 2}(x,t))^2\,dt\right)^{1/2},$$

где $K_{\alpha 2}(x,t)$ по лемме 1 имеет вид

$$K_{\alpha 2}(x,t) = \frac{1}{\alpha^2}\begin{cases} t - x, & x \leqslant t \leqslant x + \alpha,\\ 2\alpha - (t - x), & x + \alpha \leqslant t \leqslant x + 2\alpha.\end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$\|S_{\alpha 2}^2\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha^{-1/2}.$$

Такая же формула получается и для нормы оператора $S_{\alpha 1}^2$. Отсюда следует (4). Аналогично доказывается и формула (5).

Из теорем 1,2 и лемм 3,4 вытекает

Теорема 3. *Для сходимости* $\Delta(\delta, S_\alpha^{(2)}, f) \to 0$ *при* $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ *необходимо и достаточно выбрать* $\alpha = \alpha(\delta)$ *так, чтобы* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta(\alpha(\delta))^{-1/2} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Для сходимости $\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, f) \to 0$ *при* $\alpha \to 0$, $\delta \to 0$ *необходимо и достаточно выбрать* $\alpha = \alpha(\delta)$ *так, чтобы* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta(\alpha(\delta))^{-3/2} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

3. Если о функции $f(x)$ известна дополнительная информация, то можно указать конкретные формулы для выбора $\alpha = \alpha(\delta)$ и получить оценки погрешности построенных приближений. В [2] такой результат приведен для операторов S_α и $f(x) \in Lip_1 1$. Здесь приведен аналогичный результат для приближений к $f'(x)$.

Пусть $f(x) \in M = \{f(x) \in C^1[0,1] : f'(x) \in Lip_k 1\}$.

Рассмотрим величины:

$$\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, M) = \sup\{\|DS_\alpha^{(2)} f_\delta - f'\|_{L_\infty} : f \in M, \|f_\delta - f\|_{L_2} \leqslant \delta\}, \tag{6}$$

$$\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) = \sup\{\|DS_\alpha^{(2)} f - f'\|_{L_\infty} : f \in M\}. \tag{7}$$

Очевидно, первая из них характеризует оценки погрешности приближений к $f'(x)$ после применения операторов $DS_\alpha^{(2)}$ к $f_\delta(x)$, а вторая – скорость аппроксимации производной функциями $DS_\alpha^{(2)} f$ на классе M.

Лемма 5. *Справедливо равенство* $\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) = K\alpha$.

Доказательство. Пользуемся равенством (3), из которого вытекает, что

$$\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) = \sup\{\|S_\alpha^{(2)}\varphi - \varphi\|_{L_\infty} : \varphi \in Lip_k 1\}.$$

Далее, из леммы 1, равенства $S_\alpha^{(2)} 1 \equiv 1$ и оценки $|\varphi(t) - \varphi(x)| \leqslant K|t - x|$ получаем оценку сверху:

$$\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) \leqslant K\alpha.$$

Из (7) следует, что

$$\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) \geqslant \|S_\alpha^{(2)}\varphi_0 - \varphi_0\|_{L_\infty},$$

где $\varphi_0(x) = Kx$. Очевидно, ей соответствует функция $f_0(x) = Kx^2/2$.

Из равенства $\|S_\alpha^{(2)}\varphi_0 - \varphi_0\|_{L_\infty} = K\alpha$ следует оценка $\Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) \geqslant K\alpha$, а отсюда — утверждение леммы.

Теорема 4. *Справедлива двусторонняя оценка, не улучшаемая по порядку δ:*

$$C_1 K^{3/5}\delta^{2/5} \leqslant \Delta(\delta, DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}, M) \leqslant C_2 K^{3/5}\delta^{2/5}, \tag{8}$$

где

$$\alpha(\delta) = \left(\frac{3}{K\sqrt{2}}\right)^{2/5}\delta^{2/5}, \tag{9}$$

$$C_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/5} 3^{1/5}, \qquad C_2 = C_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{3/5} 2^{1/5}.$$

Доказательство. Из очевидной оценки:

$$\|DS_\alpha^{(2)} f_\delta - f'\|_{L_\infty} \leqslant \|DS_\alpha^{(2)} f - f'\|_{L_\infty} + \delta\|DS_\alpha^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty}$$

вытекает оценка:

$$\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, M) \leqslant \Delta_1(DS_\alpha^{(2)}, M) + \delta\|DS_\alpha^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty}. \tag{10}$$

Из лемм 4 и 5 и оценки (10) следует оценка:

$$\Delta(\delta, DS_\alpha^{(2)}, M) \leqslant K\alpha + \sqrt{2}\alpha^{-3/2}\delta. \tag{11}$$

Обозначим через $\Phi(\alpha, \delta)$ правую часть (11) и найдем по аналогии с [3] согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия $\Phi(\alpha, \delta) \to \inf\limits_\alpha$. Тогда получим (9).

Отсюда, подставляя (9) в (11), получаем в (8) оценку сверху.

Далее, из (6) мы имеем: поскольку $\Delta_1 = \Delta_{/\delta=0} \leqslant \Delta$, а $\delta\|DS_\alpha^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty} \leqslant \Delta_{/f=0} \leqslant \Delta$, то справедлива оценка:

$$\Delta(\delta, DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}, M) \geqslant \max\{\Delta_1(DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}, M), \delta\|DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty}\}.$$

Легко установить, что

$$\Delta_1(DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}, M) \geqslant \delta\|DS_{\alpha(\delta)}^{(2)}\|_{L_2\to L_\infty}.$$

Отсюда и из формулы (5) получаем в (8) оценку снизу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* № 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Иванов В. К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференц. уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.
2. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 15-й Сарат. зимн. шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 181.
3. *Хромова Г. В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.

Approximation of Function and Its Derivative by the Modificated Steklov Operator

A. A. Khromov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

With the use of modification of Steklov operator are constructed families of integral operator which allow us to get uniform derivative on a closed.

Key words: derivative, uniform approximations, Steklov operator.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00238).

References

1. Ivanov V. K. Ob integral'nykh uravneniiakh Fredgol'ma I roda [Fredholm integral equation of the first kind]. *Differents. uravneniia* [Differ. Equations], 1967, vol. III, no. 3, pp. 410–421 (in Russian).
2. Khromov A. P., Khromova G. V. Ob odnoi modifikatsii operatora Steklova [One modification of the Steklov operator]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia: Tez. dokl. 15-i Sarat. zimn. shkoly* [Modern problems of function theory and their applications: abstracts of the 15-th Saratov winter school], Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, pp. 181 (in Russian).
3. Khromova G. V. Error estimates of approximate solutions to equations of the first kind. *Doklady Math.*. 2001, vol. 63, no. 3, 390–394.

УДК 517.51:571.968

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ РАЗРЫВНОГО ОПЕРАТОРА СТЕКЛОВА

Г. В. Хромова

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Для нахождения равномерных приближений к точному решению уравнения Абеля с приближенно заданной правой частью предложено простое по конструкции семейство интегральных операторов.

Ключевые слова: уравнение Абеля, оператор Стеклова, равномерные приближения, отрезок.

1. Рассмотрим уравнение Абеля:

$$Au \equiv \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(t)\,dt = f(x), \qquad 0<\beta<1, \qquad 0 \le x \le 1. \tag{1}$$

Пусть известно, что при данной $f(x)$ существует непрерывная функция $u(x)$, являющаяся решением уравнения (1), но сама функция $f(x)$ нам неизвестна — вместо нее известна $f_\delta(x)$ такая, что $\|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta$. Поставим задачу: по $f_\delta(x)$ и δ найти равномерные приближения к $u(x)$.

Возьмем разрывный оператор Стеклова из [1]:

$$S_\alpha u = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\int\limits_x^{x+\alpha} u(t)\mathrm{d}t, & x\in[0,1/2], \\ \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x} u(t)\mathrm{d}t, & x\in[1/2,1]. \end{cases} \tag{2}$$

По методу, предложенному в [2], построим семейство операторов $R_\alpha = S_\alpha A^{-1}$.

Теорема 1. *Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x,t)$, имеющими вид*

$$R_\alpha(x,t) = \begin{cases} (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 2}(x,t), & x\in[0,1/2], \\ (\alpha\Gamma(1-\beta))^{-1} R_{\alpha 1}(x,t), & x\in[1/2,1], \end{cases} \tag{3}$$

$$R_{\alpha 1}(x,t)=\begin{cases}(x-t)^{-\beta}-(x-\alpha-t)^{-\beta}, & 0\le t<x-\alpha,\\ (x-t)^{-\beta}, & x-\alpha\le t<x,\\ 0, & x\le t\le 1,\end{cases} \tag{4}$$

$$R_{\alpha 2}(x,t)=\begin{cases}(x+\alpha-t)^{-\beta}-(x-t)^{-\beta}, & 0\le t<x,\\ (x+\alpha-t)^{-\beta}, & x\le t<x+\alpha,\\ 0, & x+\alpha\le t\le 1.\end{cases} \tag{5}$$

Доказательство основано на том, что в данном случае вид оператора $^{-1}$ известен:

$$A^{-1}f=\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}f(t)\,dt. \tag{6}$$

Тогда из (2) и (6) следуют (3)–(5).

Теорема 2. *Операторы $R_{\alpha_j}, j=1,2$, при $0<\beta<1/2$ являются линейными, ограниченными при каждом значении α операторами, действующими из пространства $L_2[0,1]$ в $C[1/2,1]$ при $j=1$ и в $C[0,1/2]$ при $j=2$. При этом справедлива двусторонняя оценка:*

$$C_\beta\alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}}\le\|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty}\le\sqrt{2}C_\beta\alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}}, \tag{7}$$

где $C_\beta=(\Gamma(1-\beta))^{-1}(1-2\beta)^{-1/2}$, $\|\cdot\|_{L_\infty}=\max\left\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]},\|\cdot\|_{C[1/2,1]}\right\}$.

Доказательство. Из неравенства Буняковского следует, что операторы $R_{\alpha j}$, $j=1,2$, определены на всем пространстве $L_2[0,1]$ и ограничены при каждом фиксированном α и $0<\beta<1/2$. Действительно, например для $j=1$ и $t\in[x-\alpha,x)$ имеем:

$$\left|\int\limits_{x-\alpha}^x (x-t)^{-\beta}f(t)\,dt\right|\le\left(\int\limits_{x-\alpha}^x (x-t)^{-2\beta}dt\right)^{1/2}\|f\|_{L_2}=(1-2\beta)^{-1/2}\alpha^{1-2\beta}\|f\|_{L_2}.$$

Аналогичные оценки получаются для других интервалов изменения t и также для $j=2$.

При этом значения интегральных операторов с ядрами $R_{\alpha j}(x,t)$, определенными в (4), (5), являются непрерывными функциями на соответствующих половинах отрезка $[0,1]$. Это следует из непрерывности функции $\int\limits_0^x(x-t)^{-\beta}f(t)dt$, которая устанавливается при выводе формулы (6).

Далее, очевидно, что

$$\|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty}=\max\left\{\|R_{\alpha 1}\|_{L_2[0,1]\to C[1/2,1]},\|R_{\alpha 2}\|_{L_2[0,1]\to C[0,1/2]}\right\}. \tag{8}$$

При этом

$$\|R_{\alpha 1}\|_{L_2[0,1]\to C1/2,1}=[\alpha\Gamma(1-\beta)]^{-1}\max_{1/2\le x\le 1}\left(\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 1}(x,t)dt\right)^{1/2}, \tag{9}$$

$$\|R_{\alpha 2}\|_{L_2[0,1]\to C0,1/2}=[\alpha\Gamma(1-\beta)]^{-1}\max_{0\le x\le 1/2}\left(\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 2}(x,t)dt\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Рассмотрим сначала операторы $R_{\alpha 1}$. Подставив (4) в (9) и сделав замену переменных $x-t=\tau$, придем к выражению

$$\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 1}(x,t)dt=\int\limits_\alpha^x[\tau^{-\beta}-(\tau-\alpha)^{-\beta}]^2d\tau+\int\limits_0^\alpha\tau^{-2\beta}d\tau.$$

Отсюда имеем:

$$\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 1}(x,t)dt\ge(1-2\beta)^{-1}\alpha^{1-2\beta}. \tag{11}$$

Далее, поскольку $\tau^{-\beta} \le (\tau-\alpha)^{-\beta}$, то $[\tau^{-\beta}-(\tau-\alpha)^{-\beta}]^2 \le (\tau-\alpha)^{-2\beta}-\tau^{-2\beta}$, а отсюда следует:

$$\int\limits_{\alpha}^{x} [\tau^{-\beta}-(\tau-\alpha)^{-\beta}]^2\, d\tau \le (1-2\beta)^{-1}[(x-\alpha)^{1-2\beta}-x^{1-2\beta}+\alpha^{1-2\beta}].$$

Поскольку $(x-\alpha)^{1-2\beta} \le x^{1-2\beta}$, то в итоге приходим к оценке

$$\int\limits_{0}^{1} R^2_{\alpha 1}(x,t)dt \le 2(1-2\beta)^{-1}\alpha^{1-2\beta}. \tag{12}$$

Аналогично подставив (5) в (10) и сделав замену: $x+\alpha-t=\tau$, придем к оценкам (11), (12) для $\int\limits_0^1 R^2_{\alpha 2}(x,t)dt$.

Наконец, из (8)–(12) следует (7).

Следствие 1. *Операторы R_α являются регуляризующими [3, с. 44] для уравнения* (1).

Доказательство. Поскольку $R_\alpha A \equiv S_\alpha$, то требуемая для регуляризирующих операторов сходимость $\|R_\alpha Au-u\|_{L_\infty} \to 0$, где $u(x)$ — любая непрерывная функция, заданная на отрезке $[0,1]$, выполняется. Остальные требования к таким операторам устанавливаются в теореме 2.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta,R_\alpha,u) = sup\left\{\|R_\alpha f_\delta-u\|_{L_\infty} : \|f_\delta-f\|_{L_2} \le \delta\right\}.$$

Следствие 2. *Для сходимости $\Delta(\delta,R_\alpha,u) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha=\alpha(\delta)$ такого, что $\alpha(\delta)\to 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{2\beta+1}{2}} \to 0$ при $\delta \to 0$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из [4] с привлечением оценки (7).

2. Найдем конкретное согласование $\alpha=\alpha(\delta)$, обеспечивающее неулучшаемую по порядку оценку погрешности приближенных решений уравнения (1) в случае, когда $u(x) \in Lip_M 1$.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta,R_\alpha,Lip_M 1) = sup\left\{\|R_\alpha f_\delta-u\|_{L_\infty} : u \in Lip_M 1, \|f_\delta-f\|_{L_2} \le 1\right\}.$$

Теорема 3. *Справедлива неулучшаемая по порядку δ оценка:*

$$\frac{1}{2}C_1(\beta)\delta^{\frac{2}{3+2\beta}} \le \Delta(\delta,R_{\alpha(\delta)},Lip_M 1) \le C_2(\beta)\delta^{\frac{2}{3+2\beta}}, \tag{13}$$

где

$$\alpha(\delta) = D(\beta)\delta^{\frac{2}{3+2\beta}}, \tag{14}$$
$$D(\beta) = \left(2^{1/2}M^{-1}C_\beta(2\beta+1)\right)^{\frac{2}{3+2\beta}}, \qquad C_1(\beta) = \frac{M}{2}D(\beta)+C_\beta(D(\beta))^{-\frac{2\beta+1}{2}},$$

$C_2(\beta)$ отличается от $C_1(\beta)$ множителем 2 во втором слагаемом.

Доказательство. Пользуемся методом, приведенным в [5], и известной из теории некорректно поставленных задач оценкой:

$$\frac{1}{2}\varphi(\alpha,\delta) \le \Delta(\delta,R_\alpha,Lip_M 1) \le \varphi(\alpha,\delta), \tag{15}$$

где

$$\varphi(\alpha,\delta) = \Delta_1(R_\alpha A, Lip_M 1) + \delta\|R_\alpha\|_{L_2\to L_\infty}, \tag{16}$$
$$\Delta_1(R_\alpha A, Lip_M 1) = \sup\left\{\|R_\alpha Au-u\|_{L_\infty} : u \in Lip_M 1\right\}.$$

Очевидно, что

$$\Delta_1(R_\alpha A, Lip_M 1) \equiv \Delta_1(S_\alpha, Lip_M 1).$$

Далее, из условия Липшица следует оценка

$$\Delta_1(S_\alpha, Lip_M 1) \le M\frac{\alpha}{2},$$

которая достигается на функции $f_0(x) = Mx$. Отсюда получаем равенство:

$$\Delta_1(R_\alpha A, Lip_M 1) = M\frac{\alpha}{2}. \tag{17}$$

Из равенств (16), (17) и двусторонней оценки (7) получаем оценку:

$$\Phi_1(\alpha,\delta) \le \varphi(\alpha,\delta) \le \Phi_2(\alpha,\delta),$$

где $\Phi_1(\alpha,\delta) = M\frac{\alpha}{2} + C_\beta \alpha^{-\frac{2\beta+1}{2}}$, а $\Phi_2(\alpha,\delta)$ отличается от $\Phi_1(\alpha,\delta)$ множителем $\sqrt{2}$ во втором слагаемом.

В соответствии с [5] найдем $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия $\Phi_2(\alpha,\delta) \to \inf\limits_{\alpha}$ и придем к формуле (14). Подставляя (14) в оценку (15), получаем оценку (13).

Сравнение регуляризации, проведенной здесь, с регуляризацией уравнения Абеля из [6] показывает, что в данном случае и семейство регуляризирующих операторов, и доказательства соответствующих теорем являются более простыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 15-й Сарат. зимн. школы. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 181.
2. *Хромова Г. В.* Об одном способе построения методов регуляризации уравнений первого рода // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 7. С. 997–1002.
3. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
4. *Иванов В. К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода // Дифференц. уравнения. 1967. Т. III, № 3. С. 410–421.
5. *Хромова Г. В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.
6. *Хромова Г. В.* О приближенных решениях уравнения Абеля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2001. № 3. С. 5–9.

Regularization of Abel Equation with the Use of Discontinuous Steklov Operator

G. V. Khromova

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

For getting uniform approximations of the exact solution of Abel equation with an approximate right-hand part a simply constructed family of integral operators is suggested.

Key words: Abel equation, Steklov operator, uniform approximations, closed interval.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00238).

References

1. Khromov A. P., Khromova G. V. Ob odnoi modifikatsii operatora Steklova [One modification of the Steklov operator]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia: Tez. dokl. 15-i Sarat. zimn. shkoly* [Modern problems of function theory and their applications: abstracts of the 15-th Saratov winter school], Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, pp. 181 (in Russian).

2. Khromova G. V. On a technique for constructing regularization methods for equations of the first kind. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2000, vol. 40, no. 7, pp. 955–960.
3. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [Theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow, Nauka, 1978, 206 p.(in Russian).
4. Ivanov V. K. Ob integral'nykh uravneniiakh Fredgol'ma I roda [Fredholm integral equation of the first kind]. *Differents. uravneniia* [Differ. Equations], 1967, vol. III, no. 3, pp. 410–421 (in Russian).

5. Khromova G. V. Error estimates of approximate solutions to equations of the first kind. *Doklady Math.*. 2001, vol. 63, no. 3, 390–394.

6. Khromova G. V. On the approximate solutions of the Abel's equation. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15*, 2001, no. 4, pp. 5–9 (in Russian).

УДК 517.51

О ПРИБЛИЖЕНИИ И ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

О. И. Шаталина

Специалист отдела расчетных операций, Локо-Банк, Саратов, OShatalina@srt.lockobank.ru

В работе приведено семейство интегральных операторов, с помощью которых получаются равномерные приближения к непрерывной функции, удовлетворяющей краевым условиям (при этом указанные приближения удовлетворяют тем же условиям), и решена задача типа Колмогорова – Никольского на некотором компактном классе. Кроме того, с помощью полученного семейства интегральных операторов решается известная задача из теории некорректно поставленных задач, так называемая задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному приближению.

Ключевые слова: функционал Тихонова, семейство интегральных операторов, некорректно поставленная задача, задача типа Колмогорова – Никольского, равномерные приближения.

1. Пусть непрерывная функция $\overline{u}(x)$ удовлетворяет краевому условию:

$$\cup(\overline{u}) \equiv \beta_1\overline{u}(0) + \beta_2\overline{u}(1) = 0, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0. \tag{1}$$

Получим равномерные приближения к $\bar{u}(x)$, используя модификацию функционала Тихонова, известного в теории некорректно поставленных задач [1], а именно рассмотрим функционал

$$M^\alpha[u,\overline{u}] = \|u-\overline{u}\|^2_{L_2} + \alpha\|u\|^2_{W_2^1}, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ — параметр, $\|u\|_{W_2^1} = \left(\int\limits_0^1 (pu^2 + (qu')^2)\,dx\right)^{1/2}$, p, q — положительные константы. Это так называемый тихоновский функционал, но в данном случае он связывается не с интегральными уравнениями 1-го рода, как у А. Н. Тихонова, а с простейшим уравнением 1-го рода — уравнением с оператором вложения из пространства $C[0,1]$ в пространство $L_2[0,1]$. При этом будем считать допустимыми функциями функции, удовлетворяющие условию (1).

Обозначим через $u^\alpha(x)$ — функции, минимизирующие функционал (2) при каждом фиксированном значении α. Существование этих функций при каждом фиксированном α доказывается точно так же, как в классической постановке А. Н. Тихонова [2].

Лемма 1. *Минимизирующие функции $u^\alpha(x)$ при каждом фиксированном α являются решением краевой задачи:*

$$\begin{cases} -qy'' + (p+\frac{1}{\alpha})y = \frac{1}{\alpha}\overline{u}, \\ \beta_1 y(0) + \beta_2 y(1) = 0, \\ \beta_2 y'(0) + \beta_1 y'(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим функционал (2) и его приращение

$$\triangle M^\alpha[u,\bar{u}] = M^\alpha[u^\alpha + \beta\eta, \bar{u}] - M^\alpha[u^\alpha, \bar{u}],$$

где $\eta(x) \in W_2^1[0,1]$ и удовлетворяет условию (1), $\beta > 0$ — произвольное вещественное число.

Сделав необходимые преобразования, учитывая свойства скалярного произведения, получаем:

$$\triangle M^\alpha[u,\bar{u}] = 2\beta\left\{(u^\alpha - \bar{u}, \eta)_{L_2} + \alpha(u^\alpha,\eta)_{W_2^1}\right\} + \beta^2\left\{\|\eta\|^2_{L_2} + \alpha\|\eta\|^2_{W_2^1}\right\}.$$

Приравнивая линейную часть приращения функционала к нулю, получаем:

$$(u^\alpha - \bar{u}, \eta)_{L_2} + \alpha(u^\alpha,\eta)_{W_2^1} = 0. \tag{4}$$

Преобразуем (4), переходя от скалярного произведения в пространстве W_2^1 к скалярному произведению в пространстве L_2:

$$(u^\alpha - \bar{u} + \alpha p u^\alpha, \eta)_{L_2} + \alpha q (u^{\alpha'}, \eta')_{L_2} = 0.$$

Функция $u^\alpha(x)$ принадлежит области определения функционала (2), поэтому существует производная $(u^\alpha(x))'$. Убеждаемся, что существует $(u^\alpha(x))''$ и выполняется условие

$$\beta_2(u^\alpha(0))' + \beta_1(u^\alpha(1))' = 0.$$

Учитывая краевое условие (1), приходим к задаче (3).

Обозначим через T_α оператор, который каждой непрерывной функции $\bar{u}(x)$, удовлетворяющей условию (1), ставит в соответствие функцию, минимизирующую функционал (2).

Теорема 1. *При каждом фиксированном α оператор T_α имеет следующий интегральный вид:*

$$T_\alpha \bar{u} = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^1 K_\alpha(x,t)\bar{u}(t)dt = 0, \tag{5}$$

где

$$K_\alpha(x,t) = \frac{1}{2\alpha_1 q}\left[\pm \operatorname{sh}\alpha_1(x-t) + \frac{D(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1)}{B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)}\right],$$

знак «+» соответствует случаю $t \le x$, знак «−» — случаю $t \ge x$,

$$B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1) = (\beta_1^2+\beta_2^2)\operatorname{sh}\alpha_1 + 2\beta_1\beta_2,$$
$$D(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1) = (\beta_1^2-\beta_2^2)\operatorname{ch}\alpha_1 \operatorname{sh}\alpha_1(x+t)+$$
$$+(\beta_1^2+\beta_2^2)\operatorname{sh}\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_1(x-t) - (\beta_1^2-\beta_2^2)\operatorname{sh}\alpha_1(x+t)\operatorname{ch}\alpha_1,$$
$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{p}{q}+\frac{1}{\alpha q}},$$

β_1, β_2 — из условия (1), p, q — из определения функционала $M^\alpha[u,\bar{u}]$.

Доказательство. Применим метод вариации произвольных постоянных для решения краевой задачи (3). Решение дифференциального уравнения ищем в виде суммы

$$y(x) = C_1(x)e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{-\alpha_1 x}.$$

Для $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ согласно этому методу справедлива система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{\alpha_1 x} + C_2'(x)e^{-\alpha_1 x} = 0, \\ -qC_1'(x)\alpha_1 e^{\alpha_1 x} + qC_2'(x)\alpha_1 e^{-\alpha_1 x} = \dfrac{1}{\alpha_1}\bar{u}, \end{cases}$$

решая которую находим

$$\begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{2\alpha_1 q}\int\limits_0^x \bar{u}(t)e^{-\alpha_1 t}\,dt + C_1^\circ, \\ C_2(x) = \dfrac{1}{2\alpha_1 q}\int\limits_0^x \bar{u}(t)e^{\alpha_1 t}\,dt + C_2^\circ, \end{cases}$$

C_1° и C_2° определяем из краевых условий задачи (3). Тогда решение $y(x)$ теперь можно записать в виде

$$y(x) = \frac{1}{q\alpha_1}\int\limits_0^x \bar{u}(t)\operatorname{sh}\alpha_1(t-x)dt + \frac{1}{4q\alpha_1 B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)}\int\limits_0^1 \bar{u}(t)\Big[\operatorname{sh}\alpha_1(1-t)\beta_2(\beta_1+\beta_2 e^{\alpha_1})\times$$
$$\times(e^{-\alpha_1(1-x)} + e^{-\alpha_1 x}) + \operatorname{ch}\alpha_1(1-t)\beta_1(\beta_2+\beta_1 e^{\alpha_1})(e^{-\alpha_1(1-x)} - e^{-\alpha_1 x})\Big]dt.$$

Разбивая второй интеграл на сумму интегралов по отрезкам $[0,x]$ и $[x,1]$ и перегруппировывая слагаемые получим:

$$y(x) = \frac{1}{\alpha_1}\int\limits_0^x K_\alpha(x,t)\bar{u}(t)\,dt + \frac{1}{\alpha_1}\int\limits_x^1 K_\alpha(x,t)\bar{u}(t)\,dt$$

отсюда получаем (5).

Теорема 2. *Для любой непрерывной функции $\bar{u}(x)$, удовлетворяющей условию* (1)*, и семейства интегральных операторов T_α имеет место сходимость*

$$\|T_\alpha \bar{u} - \bar{u}\|_{C[0,1]} \to 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha \to 0.$$

Доказательство проводится в два этапа. Сначала предполагается, что $\bar{u}(x) \in W_2^1[0,1]$ и применяется классическая (Тихоновская) схема: устанавливается что $\bar{u}(x)$ и $u^\alpha(x)$ принадлежит одному и тому же компактному множеству, определяемому шаром в пространстве Соболева, откуда следует сходимость в этом случае [2]. Затем привлекается результат Г. В. Хромовой [3], согласно которому нормы $\|T_\alpha\|_{C[0.1]} \to C$ ограничены, откуда следует сходимость для любой непрерывной функции $\bar{u}(x)$.

2. Интегральный вид операторов T_α позволяет решить задачу об определении скорости сходимости полученных приближений на некотором классе.

Введем в рассмотрение класс функций:

$$M_B = \{u \in C[0,1] : \ U(u) = 0, \ u = B\vartheta, \ \|\vartheta\|_{L_2} \le 1\},$$

где B — интегральный оператор с ядром $B(x,t)$, имеющим вид

$$B(x,t) = \begin{cases} \beta_1, & 0 \le t \le x, \\ -\beta_2, & x < t \le 1 \end{cases} \tag{6}$$

и величину

$$\Delta_1(T_\alpha, M_B) = \sup\left\{\|T_\alpha u - u\|_{C[0,1]} : u \in M_B\right\}. \tag{7}$$

Для этого класса решаем задачу типа Колмогорова – Никольского. Эта задача нахождения точных по порядку α оценок верхних граней отклонения функций от их приближений на некотором классе. Классическая задача Колмогорова – Никольского состоит в получении асимптотически точных значений указанных граней. В теории приближений эта задача рассматривалась в случае периодических функций и операторов из теории рядов Фурье. Г. В. Хромовой было рассмотрено обобщение, а именно поставлена задача типа Колмогорова – Никольского — получение асимптотически точных оценок по α величины $\Delta_1(T_\alpha M_B)$ для непрерывных функций, заданных на отрезке, и операторов из теории некорректно поставленных задач.

В частном случае при $\beta_2 = 0$ и $p = q = 1$ поставленная задача решена в [4].

Теорема 3. *Для класса функций M_B, в котором ядро $B(x,t)$ имеет вид* (6)*, справедлива двусторонняя асимптотическая оценка по α при $\alpha \to 0$:*

$$\frac{1}{2}\tilde{\tilde{\beta}}^2 C^* \alpha^{1/4} - \psi_1(\alpha) \le \Delta_1(T_\alpha, M_B) \le \tilde{\beta}^2 C^* \alpha^{1/4} + \psi_2(\alpha),$$

где $\psi_1(\alpha) = O(\alpha)$, $\psi_2(\alpha) = O(\alpha)$, $C^* = \dfrac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} q^{1/4}$, $\tilde{\beta} = \max\{\beta_1, \beta_2\}$,

$$\tilde{\tilde{\beta}} = \begin{cases} \min(\beta_1, \beta_2), & \beta_1\beta_2 \ne 0, \\ 1, \quad \beta_1 = 0 \text{ или } \beta_2 = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Для оценок величины $\Delta_1(T_\alpha, M_B)$, определенной в (7), используем формулу из [5]:

$$\Delta_1(T_\alpha, M_B) = \sup_{0 \le x \le 1} \left(\int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha} \int_0^1 K_\alpha(x,\xi) B(\xi,t) d\xi - B(x,t) \right]^2 dt \right)^{1/2}.$$

Обозначим через $Y(x,t,\alpha) = \int\limits_0^1 K_\alpha(x,\xi) B(\xi,t) d\xi$, тогда, вычисляя этот интеграл, получаем:

$$Y(x,t,\alpha) = \begin{cases} A_1(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1) + O(\alpha) & \text{при } t \le x \\ A_2(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1) + O(\alpha) & \text{при } t \ge x, \end{cases}$$

где $B(\beta_1, \beta_2, \alpha_1)$ — из теоремы 1. Далее, имеем:

$$A_1(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1^2 q B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)} \left[\beta_1 B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1) - \beta_2^2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{sh}\alpha_1(1-x)\operatorname{sh}\alpha_1 t - \right.$$
$$\left. -\beta_1^2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{ch}\alpha_1(1-x)\operatorname{ch}\alpha_1 t - \beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{ch}\alpha_1(x-t)\right],$$
$$A_2(x,t,\beta_1,\beta_2,\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1^2 q B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)} \left[-\beta_1 B(\beta_1,\beta_2,\alpha_1) + \beta_1^2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{sh}\alpha_1(1-t)\operatorname{sh}\alpha_1 x + \right.$$
$$\left. +\beta_2^2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{ch}\alpha_1(1-t)\operatorname{ch}\alpha_1 x + \beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)\operatorname{ch}\alpha_1(x-t)\right].$$

Подставляем полученный результат в интеграл

$$Y_1 = \int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha}Y(x,t,\alpha) - B(x,t)\right]^2 dt,$$

обозначим его через $Y_1(x)$ и тогда, делая необходимые преобразования, получаем:

$$Y_1(x) = \frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{B^2(\beta_1,\beta_2,\alpha_1)} \left\{ \frac{\beta_1^4}{2}(x\operatorname{ch}^2\alpha_1(1-x) + (x-1)\operatorname{sh}^2\alpha_1 x) + \frac{\beta_2^4}{2}(x\operatorname{sh}^2\alpha_1(1-x) + (x-1)\operatorname{ch}^2\alpha_1 x) + \right.$$
$$+\frac{\beta_1^2\beta_2^2}{2} + \frac{\beta_1^4}{2\alpha_1}\operatorname{sh}\alpha_1 x\operatorname{ch}\alpha_1(1-x)\operatorname{ch}\alpha_1 + \frac{\beta_2^4}{2\alpha_1}\operatorname{ch}\alpha_1 x\operatorname{sh}\alpha_1(1-x)\operatorname{ch}\alpha_1 + \frac{\beta_1^2\beta_2^2}{2\alpha_1}\operatorname{sh}\alpha_1\operatorname{ch}\alpha_1(2x-1) +$$
$$+\beta_1^3\beta_2(x\operatorname{ch}\alpha_1(2x-1) + \operatorname{sh}\alpha_1 x\operatorname{sh}\alpha_1(1-x)) + \beta_2^3\beta_1(-x\operatorname{ch}\alpha_1(2x-1) + \operatorname{ch}\alpha_1 x\operatorname{ch}\alpha_1(1-x)) +$$
$$\left. +\frac{\beta_1^2\beta_2^2}{\alpha_1}\operatorname{sh}\alpha_1 x\operatorname{sh}\alpha_1(1-x)\operatorname{sh}\alpha_1 + \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1}\left[\beta_1^2\operatorname{ch}\alpha_1(1-x)\operatorname{sh}\alpha_1 x + \beta_2^2\operatorname{ch}\alpha_1 x\operatorname{sh}\alpha_1(1-x)\right]\right\}.$$

Представив все гиперболические функции через экспоненты, придем к выражению:

$$Y_1(x) = \frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{(\beta_1^2+\beta_2^2)^2} \left\{ \frac{(\beta_1^4-\beta_2^4)}{4}\varphi_1(x) + \frac{\beta_1^4}{4\alpha_1}\varphi_2(x) + \frac{\beta_2^4}{4\alpha_1}\varphi_3(x) + \frac{\beta_1^2\beta_2^2}{4\alpha_1}\varphi_3(x)\right\}\left(1+O(e^{-2\alpha_1})\right),$$

где $\varphi_1(x) = xe^{-2\alpha_1 x} + (x-1)e^{-2\alpha_1(1-x)}$, $\varphi_2(x) = 1 - e^{-2\alpha_1 x} + (x-1)e^{-2\alpha_1(1-x)}$, $\varphi_3(x) = 1 + e^{-2\alpha_1 x} - - e^{-2\alpha_1(1-x)}$.

Исследуем функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ на экстремум. Вводим $\tilde\beta$ и $\tilde{\tilde\beta}$ и получаем оценки сверху и снизу величины $\Delta_1(T_\alpha, M_B)$, учитывая, что $1/\alpha_1^2 = q\alpha(1+O(\alpha))$.

3. Рассмотрим случай, когда вместо точной функции $\overline{u}(x)$ нам известна функция $u_\delta(x)$ такая, что $\|u_\delta - u\| \le \delta$. Поставим задачу получения по u_δ и δ равномерных приближений к $\overline{u}(x)$. Это известная задача из теории некорректно поставленных задач (так называемая задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному δ-приближению). Общая постановка задачи восстановления для гильбертовых пространст дана в [6]. Задача восстановления функций на $[a,b]$ из $L_2 \to C$ рассматривалась Г. В. Хромовой [7].

Поставленную задачу позволяет нам решить опять же интегральный вид операторов T_α. Справедлива

Теорема 4. *Для нормы интегрального оператора T_α имеет место равенство*

$$\|T_\alpha\|_{L_2\to C} = \frac{\tilde\beta^2\alpha^{-1/4}}{\sqrt{2(\beta_1^2+\beta_2^2)}q^{1/4}} + O(\alpha^{3/4}),$$

асимптотическое по α при $\alpha \to 0$, где $\tilde\beta = \max\{\beta_1,\beta_2\}$.

Доказательство. Норму оператора считаем, по следующей формуле:

$$\|T_\alpha\|_{L_2\to C} = \frac{1}{\alpha}\max_{0\le x\le 1}\left(\int_0^1 K_\alpha^2(x,t)\,dt\right)^{1/2}, \tag{8}$$

где $K_\alpha(x,t)$ — из теоремы 1.

Вычисляем интеграл $\int\limits_0^1 K_\alpha^2(x,t)\,dt$ и, представив гиперболические функции через экспоненты и выполнив ряд преобразований, получаем:

$$\int\limits_0^1 K_\alpha^2(x,t)dt = \frac{1}{4\alpha_1^3 q^2}\left[1+\varphi(x,\alpha_1)+O(e^{-\alpha})\right],$$

где

$$\varphi(x,\alpha_1) = \frac{\beta_1^2-\beta_2^2}{\beta_1^2+\beta_2^2}\left[e^{-2\alpha_1(1-x)}(1+2\alpha_1(1-x)) - e^{-2\alpha_1 x}(1+2\alpha_1 x)\right].$$

Находим максимум по x функции $\varphi(x,\alpha_1)$ на отрезке $[0,1]$. Тогда возвращаясь к формуле (8), получаем утверждение теоремы.

Теоремы 3 и 4 дают возможность решить задачу о получении точной по порядку оценки погрешности приближенных решений задачи восстановления функций на классе M_B и получить согласование $\alpha=\alpha(\delta)$, обеспечивающее эту оценку.

Рассмотрим величину:

$$\Delta(\delta,T_\alpha,M_B) = \sup\left\{\|T_\alpha u_\delta - u\|_{C[0,1]}:\ u\in M_B,\ \|u-u_\delta\|_{L_2}\le\delta\right\}.$$

Теорема 5. *Справедлива двусторонняя ассимптотическая по δ, при $\delta\to 0$ оценка*

$$C_2\delta^{1/2} - \varkappa_2(\delta) \le \Delta(\delta,T_{\alpha(\delta)},M_B) \le C_1\delta^{1/2}+\varkappa_1(\delta),$$

где

$$C_1 = \frac{2^{3/4}\tilde\beta^2(\beta_1+\beta_2)^{1/2}}{(\beta_1^2+\beta_2^2)^{3/4}},\qquad C_2 = \frac{(\tilde{\tilde\beta}^2+2\tilde\beta^2)(\beta_1+\beta_2)^{1/2}}{2^{\frac94}(\beta_1^2+\beta_2^2)^{3/4}},$$
$$\alpha=\alpha(\delta) = \frac{\delta^2(\beta_1^2+\beta_2^2)}{2q(\beta_1+\beta_2)^2},\qquad \varkappa_j(\delta)=O(\delta^{1/2}),\qquad j=1,2.$$

Доказательство. Метод получения оценок погрешностей был разработан Г. В. Хромовой [8] на базе решения задачи типа Колмогорова – Никольского. Отправным моментом при доказательстве теоремы является известная оценка [8] для величины $\Delta(\delta,T_\alpha,M_B)$, которая применительно к нашей задаче имеет вид

$$\frac12(\Delta_1(T_\alpha,M_B)+\|T_\alpha\|_{L_2\to C}\delta) \le \Delta(\delta,T_\alpha,M_B) \le \Delta_1(T_\alpha,M_B)+\|T_\alpha\|_{L_2\to C}\delta.$$

Используя теорему 3 и теорему 4, получаем:

$$\frac12\left(\frac12\tilde{\tilde\beta}^2C^*\alpha^{1/4} + \frac{\tilde\beta^2\alpha^{-1/4}\delta}{\sqrt2(\beta_1^2+\beta_2^2)^{1/2}q^{1/4}} - \psi_1(\alpha)\right) \le \Delta(\delta,T_\alpha,M_B) \le$$
$$\le \tilde\beta^2C^*\alpha^{1/4} + \frac{\tilde\beta^2\alpha^{-1/4}\delta}{\sqrt2(\beta_1^2+\beta_2^2)^{1/2}q^{1/4}} + \psi_2(\alpha). \tag{9}$$

Обозначим через

$$\varphi(\alpha) = \tilde\beta^2C^*\alpha^{1/4} + \frac{\tilde\beta^2\alpha^{-1/4}\delta}{\sqrt2(\beta_1^2+\beta_2^2)^{1/2}q^{1/4}}.$$

Находим $\varphi'(\alpha)$, приравниваем ее к нулю и находим зависимость $\alpha=\alpha(\delta)$. Подставив найденное согласование в (9), приходим к утверждению теоремы.

Библиографический список

1. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
2. *Васин В. В., Иванов В. К., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
3. *Хромова Г. В.* О тихоновской регуляризации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 75–82.
4. *Шаталина О. И.* Оценка погрешностей приближенного решения задач восстановления функции на некотором компактном класе // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Уральск : Изд-во Уральск. федер. ун-та. 2011. С. 97–98.
5. *Хромова Г. В.* О модулях непрерывности неограниченных операторов // Изв. вузов. Математика. 2006. № 9 (532). С. 71–78.
6. *Морозов В. А.* О восстановлении функций методом регуляризации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7, № 4. С. 874–884.
7. *Хромова Г. В.* О задачах восстановления функций, заданных с погрешностью // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17, № 5. С. 1161–1171.
8. *Хромова Г. В.* Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.

Approximation and Reconstruction of Continuous Function with Boundary Conditions

O. I. Shatalina

LOCKO-Bank, 72, Pugacheva str., Saratov, 410056, Russia, OShatalina@srt.lockobank.ru

This work deals with a family of integral operators, which are used to get uniform approximations to continuous function with boundary conditions (stated approximations with the same conditions as well); the Kolmogorov – Nikolsky problem is solved on some compact class. Acquired problem from the theory of ill-posed problems (so-called problem of reconstruction of a continuous function using its mean-root-square approximation) is solved via the goal family of integral operators as well.

Key words: Tikhonov functional, family of integral operators, ill-posed problem, Kolmogorov – Nikolsky problem, uniform approximations.

References

1. Tikhonov A. N. The regularization of ill-posed problem. *Dokl. Akad. Nauk*, 1963, vol. 153, no. 1, pp. 49–52 (in Russian).
2. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [Theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow, Nauka, 1978, 206 p. (in Russian).
3. Khromova G. V. On Tikhonov's regularization. *Izv. Saratov Univ. (N. S.)*, 2001, vol. 1, iss. 2, pp. 75–82 (in Russian).
4. Shatalina O. I. Error estimate for the approximate solution of the problem of restoration of function on some compact class. *Algoritmicheskii analiz neustoichivykh zadach* [Algorithmic analysis of unstable problems], Uralsk, Publ. Ural Federal Univer, 2011, pp. 97–98 (in Russian).
5. Khromova G. V. On the moduli of continuity of unbounded operators. *Russ. Math.*, 2006, vol. 50, no. 9, pp. 67–74.
6. Morozov V. A. On restoring functions by the regularization method. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1967, vol. 7, no. 4, pp. 208–219. DOI: 10.1016/0041-5553(67)90153-X.
7. Khromova G. V. Restoration of an inaccurately specified function. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1977, vol. 17, no. 5, pp. 58–68. DOI: 10.1016/0041-5553(77)90008-8.
8. Khromova G. V. Error estimates of approximate solutions to equations of the first kind. *Doklady Math.*, 2001, vol. 63, no. 3, pp. 390–394.