**СОДЕРЖАНИЕ****Научный отдел****Математика**

- Бегматов А. Х., Пиримбетов А. О., Сеидуллаев А. К.** Слабо некорректные задачи интегральной геометрии с возмущением на семействе ломаных 3
- Бредихин Д. А., Попович А. В.** О многообразии полугрупп отношений с операцией рефлексивной двойной цилиндрификации 13
- Будаева А. А.** Использование метода эталонов для решения задач дискретной многокритериальной оптимизации 22
- Горбунов О. Б., Шие Ч.-Т., Юрко В. А.** Системы дифференциальных уравнений на оси с регулярными особенностями 27
- Дуплищева А. Ю.** О дифференциальных операторах и матрицах второго порядка 31
- Матвеев В. А., Матвеева О. А.** Обобщённые характеры числовых полей и аналог гипотезы Н. Г. Чудакова 36
- Рыжкова А. А., Тришина И. А.** О почти периодических на бесконечности решениях разностных уравнений 45
- Салимов Р. Б.** Решение однородной краевой задачи Римана со счётным множеством точек разрыва первого рода её коэффициента 50
- Хромов А. П.** О классическом решении одной смешанной задачи для волнового уравнения 56

**Механика**

- Безгласный С. П.** Управление движениями параметрического маятника 67
- Бессонов Л. В.** Численная реализация метода последовательного возмущения параметров при расчете напряжённо-деформированного состояния оболочечной конструкции в случае жесткого закрепления краев оболочки 74
- Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.** О слабых разрывах и уравнениях скачков на волновых поверхностях в микрополярных термоупругих континуумах 79
- Мирсалимов В. М., Калантарлы Н. М.** Моделирование зарождения трещины в круговом диске, нагруженном сосредоточенными силами 90
- Панкратов И. А.** Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата 97

**Информатика**

- Львов А. А., Светлов М. С., Ульянина Ю. А.** Модели информационных K-каналов с памятью 106
- Молчанов В. А.** Абстрактная характеристика полугрупп входных сигналов универсальных планарных автоматов 113

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций, свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года. Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017, раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки» Журнал выходит 4 раза в год

**Заведующий редакцией**  
Бучко Ирина Юрьевна

**Редактор**  
Митенёва Елена Анатольевна

**Художник**  
Соколов Дмитрий Валерьевич

**Редактор-стилист**  
Степанова Наталия Ивановна

**Верстка**  
Багаева Ольга Львовна

**Технический редактор**  
Ковалева Наталья Владимировна

**Корректор**  
Юдина Инна Геннадиевна

**Адрес редакции:**  
410012, Саратов, Астраханская, 83  
Издательство Саратовского университета  
**Тел.:** (845-2) 52-26-89, 52-26-85  
**E-mail:** izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 02.03.15.  
Формат 60x84 1/8.  
Усл. печ. л. 14,14 (15,25).  
Тираж 500 экз. Заказ 4.

Отпечатано в типографии  
Издательства Саратовского университета

© Саратовский государственный университет, 2015



## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 11 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: <http://mmi.sgu.ru>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru).

## CONTENTS

### Scientific Part

#### Mathematics

**Begmatov A. H., Pirimbetov A. O., Seidullaev A. K.** Weakly Ill-posed Problems of Integral Geometry with Perturbation on Polygonal Lines 3

**Bredikhin D. A., Popovich A. V.** On Variety of Semigroups of Relations with Operation of Reflexive Double Cylindrification 13

**Budaeva A. A.** Comparison Standards Method for Solving of the Multi-criterion Discrete Optimization Problems 22

**Gorbunov O. B., Shieh C.-T., Yurko V. A.** Systems of Differential Equations on the Line with Regular Singularities 27

**Duplishcheva A. Yu.** About Differential Operators and Matrices of the Second Order 31

**Matveev V. A., Matveeva O. A.** Generalized Characters Over Numerical Fields and a Counterpart of Chudakov Hypothesis 36

**Ryzhkova A. A., Trishina I. A.** Almost Periodic at Infinity Solutions of Difference Equations 45

**Salimov R. B.** The Solution of the Homogeneous Riemann Boundary Value Problem with a Countable Set of Points of Discontinuity of the First Kind its Coefficient 50

**Khromov A. P.** About the Classical Solution of the Mixed Problem for the Wave Equation 56

#### Mechanics

**Bezglasnyi S. P.** On Control of Motion of a Parametric Pendulum 67

**Bessonov L. V.** Numerical Realization of a Method of Subsequent Perturbation of a Parameters for Calculating a Stress-strain State of a Shell in Case of Hard Fixation of the Boundaries 74

**Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N.** On Weak Discontinuities and Jump Equations on Wave Surfaces in Micropolar Thermoelastic Continua 79

**Mirsalimov V. M., Kalantarly N. M.** Modelling of Cracking in Circular Disk Loaded by Concentrated Forces 90

**Pankratov I. A.** Analytical Solution of Equations of Near-circular Spacecraft's Orbit Orientation 97

#### Computer Sciences

**L'vov A. A., Svetlov M. S., Ulyanina Yu. A.** Models of Information K-channel with Memory 106

**Molchanov V. A.** Abstract Characterization of Semigroups of Input Signals of Universal Planar Automata 113



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»**

**Главный редактор**

Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Стальмахов Андрей Всеволодович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)

Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)

Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шамионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»**

**Editor-in-Chief** – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)

**Deputy Editor-in-Chief** – Stalmakhov A. V. (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Balash O. S. (Saratov, Russia)

Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)

Danilov V. N. (Saratov, Russia)

Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)

Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Makarov V. Z. (Saratov, Russia)

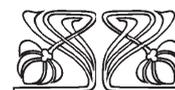
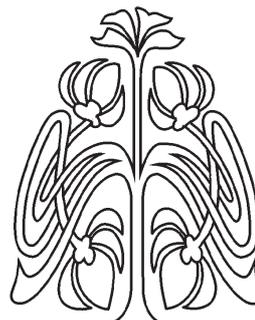
Prozorov V. V. (Saratov, Russia)

Usanov D. A. (Saratov, Russia)

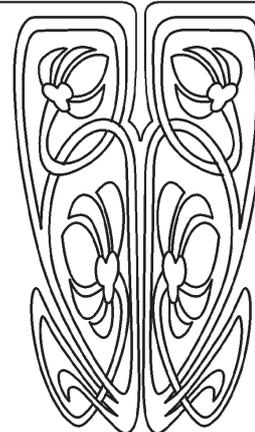
Ustyantsev V. B. (Saratov, Russia)

Shamionov R. M. (Saratov, Russia)

Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**





**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА  
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.  
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

**Главный редактор**

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Заместитель главного редактора**

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**Ответственный секретарь**

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

**Члены редакционной коллегии:**

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор

(Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Екатеринбург, Россия)

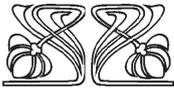
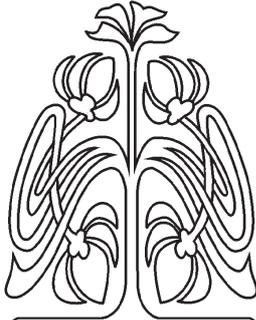
Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)



**РЕДАКЦИОННАЯ  
КОЛЛЕГИЯ**

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL  
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.  
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

**Editor-in-Chief** – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

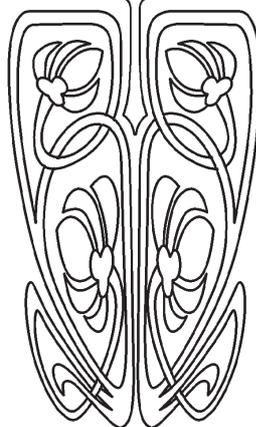
**Deputy Editor-in-Chief** – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)

**Executive Secretary** – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

**Members of the Editorial Board:**

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)  
Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)  
Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)  
Indeitsev D. A. (St.-Petersburg, Russia)  
Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)  
Kovalev V. A. (Moscow, Russia)  
Lomakin E. V. (Moscow, Russia)  
Manzhirou A. V. (Moscow, Russia)  
Matveenko V. P. (Perm, Russia)  
Morozov N. F. (St.-Petersburg, Russia)  
Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)

Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)  
Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)  
Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)  
Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)  
Speranskii D. V. (Moscow, Russia)  
Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)  
Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)  
Khromov A. P. (Saratov, Russia)  
Shalyto A. A. (St.-Petersburg, Russia)  
Shashkin A. I. (Voronezh, Russia)  
Yurko V. A. (Saratov, Russia)





# МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

## СЛАБО НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВОЗМУЩЕНИЕМ НА СЕМЕЙСТВЕ ЛОМАНЫХ

А. Х. Бегматов<sup>1</sup>, А. О. Пиримбетов<sup>2</sup>, А. К. Сеидуллаев<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, профессор кафедры инженерной математики, Новосибирский государственный технический университет, BegAH@ngs.ru

<sup>2</sup>Аспирант кафедры инженерной математики, Новосибирский государственный технический университет, azik.8622@mail.ru

<sup>3</sup>Аспирант кафедры инженерной математики, Новосибирский государственный технический университет, abat\_1984@inbox.ru

Изучается задача восстановления функции в полосе по известным интегралам от нее с заданной весовой функцией вдоль ломаных. Для двух классов весовых функций получены явные формулы обращения, на их основе доказаны теоремы единственности и существования решения. Получены оценки устойчивости решения задач в пространствах Соболева, откуда вытекает слабая некорректность задач. Для задач интегральной геометрии с возмущением также доказаны теоремы единственности и получены оценки устойчивости решения в пространствах Соболева.

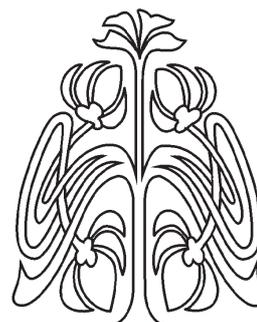
*Ключевые слова:* некорректные задачи, задачи интегральной геометрии, интегральные преобразования, формула обращения, единственность решения, теорема существования, слабая неустойчивость, возмущение.

### ВВЕДЕНИЕ

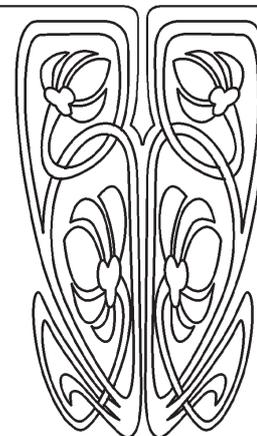
В работе рассматриваются задачи восстановления функции, если известны интегралы от нее по ломаным с заданной весовой функцией, а также суммы интегралов по ломаным и по областям, ограниченным ломаными и осью  $Ox$ . Задачи первого типа относятся к задачам интегральной геометрии [1]. Такие задачи на линейных многообразиях и других явно заданных кривых и поверхностях имеют многочисленные приложения в компьютерной, сейсмической и ультразвуковой томографии, задачах восстановления изображения [1–3].

Задача восстановления функции по известным интегралам от нее на семействе конусов в случае пространства четной размерности изучалась в статье [4]. Была доказана теорема единственности и построено представление решения, получены оценки устойчивости решения в пространствах Соболева и тем самым показана слабая некорректность задачи. Задача о восстановлении функции, заданной интегралами на  $n$ -параметрическом семействе конических поверхностей с вершинами, пробегающими фиксированную координатную ось, была рассмотрена С. В. Успенским [5].

В работах [6, 7] рассматривались новые постановки слабо некорректных задач интегральной геометрии на параболических кривых со специальными весовыми функциями. В [8] получено аналитическое представление для образа Фурье по первой переменной от искомой функции, из которого вытекает утверждение о сильной некорректности решения задачи.



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





В параграфе 1 мы рассматриваем задачу интегральной геометрии на семействе ломаных с весовой функцией Хевисайда. Выведена явная формула обращения, на основе которой доказана теорема единственности и получены оценки устойчивости решения задачи. Из этих оценок вытекает слабая некорректность задачи. Доказана теорема существования решения задачи. Для задачи интегральной геометрии с возмущением также представлены результаты по единственности и устойчивости ее решения.

В параграфе 2 получены аналогичные результаты для задачи интегральной геометрии на семействе ломаных с кусочно-постоянной весовой функцией и соответствующей задачи с возмущением.

Введем обозначения, которые будем использовать далее:

$$(x, y) \in R^2, \quad (\xi, \eta) \in R^2, \quad \lambda \in R^1, \quad \mu \in R^1, \quad L_H = \{(x, y) : x \in R^1, y \in [0, H], H < \infty\}.$$

В полосе  $L_H$  рассмотрим семейство ломаных, которые определяются соотношениями

$$\Gamma(x, y) = \{(\xi, \eta) : y - \eta = |x - \xi|, 0 \leq y \leq H\}.$$

**Задача 1.** Восстановить функцию двух переменных  $u(x, y)$ , если в полосе  $L_H$  известны интегралы от нее по кривым семейства  $\{\Gamma(x, y)\}$  с весовой функцией  $g(x, y)$ :

$$\int_{\Gamma(x, y)} g(x, \xi) u(x, y) d\xi = f(x, y). \tag{1}$$

**Задача 2.** Восстановить функцию двух переменных  $u(x, y)$ , если в полосе  $L_H$  известны суммы интегралов от нее вида

$$\int_{\Gamma(x, y)} g(x, \xi) u(x, y) d\xi + \int_0^y \int_{x-h}^{x+h} K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mathbb{F}(x, y), \tag{2}$$

где  $h = y - \eta$ .

Задача 1 является задачей интегральной геометрии вольтеровского типа [9], задача 2 соответствует задаче интегральной геометрии с возмущением [10, 11].

### 1. ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ ХЕВИСАЙДА

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x, y)$  известна для всех  $(x, y) \in L_H$ , весовая функция имеет вид

$$g(x, \xi) = \begin{cases} 1, & \xi > x, \\ 0, & \xi < x. \end{cases}$$

Тогда решение задачи 1 в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных с носителем в полосе  $L_H$  функций единственно, выражается через функцию  $f(x, y)$  по формуле

$$u(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, y) \tag{3}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|u(x, y)\|_{L_2} \leq C_1 \|f(x, y)\|_{W_2^{1,1}},$$

здесь  $C_1$  — некоторая константа.

**Доказательство.** Уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\int_0^y u(x + h, \eta) d\eta = f(x, y), \tag{4}$$



где  $h = y - \eta$ . Применим к обеим частям уравнения (4) преобразование Фурье по первой переменной. Получим:

$$\int_0^y \hat{u}(\lambda, \eta) e^{-i\lambda h} d\eta = \hat{f}(\lambda, y), \quad (5)$$

где  $\hat{u}(\lambda, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} u(x, y) dx$ ,  $\hat{f}(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x, y) dx$  — преобразования Фурье по переменной  $x$  от функций  $u(x, y)$  и  $f(x, y)$  соответственно.

Теперь применим к уравнению (5) преобразование Лапласа по переменной  $y$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-py} \hat{f}(\lambda, y) dy = \int_0^{\infty} e^{-py} \int_0^y \hat{u}(\lambda, \eta) e^{-i\lambda h} d\eta dy.$$

Сделаем замену  $t = y - \eta$ , имеем:

$$\int_0^{\infty} e^{-pn} \hat{u}(\lambda, \eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-(p+i\lambda)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-py} \hat{f}(\lambda, y) dy.$$

Таким образом, из уравнения (4) получаем:

$$\tilde{u}(\lambda, p) \cdot I(\lambda, p) = \tilde{f}(\lambda, p), \quad (6)$$

где  $\tilde{u}(\lambda, p) = \int_0^{\infty} e^{-pn} \hat{u}(\lambda, \eta) d\eta$ ,  $\tilde{f}(\lambda, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} \hat{f}(\lambda, y) dy$ ,  $I(\lambda, p) = \int_0^{\infty} e^{-(p+i\lambda)t} dt$ .

Последний интеграл легко вычислить:

$$I(\lambda, p) = \frac{1}{p + i\lambda}. \quad (7)$$

С учетом (7) перепишем уравнение (6) в виде

$$\tilde{u}(\lambda, p) = (p + i\lambda) \tilde{f}(\lambda, p). \quad (8)$$

Применим к уравнению (8) обратное преобразование Лапласа по  $p$  и обратное преобразование Фурье по  $\lambda$ . Учитывая свойства преобразования Лапласа и Фурье, приходим к формуле обращения

$$u(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, y).$$

Из последнего равенства получаем:

$$\|u(x, y)\|_{L_2(L_H)} = \left\| \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, y) \right\|_{L_2(L_H)}. \quad (9)$$

Используя свойства преобразования Лапласа и Фурье, а также учитывая (9), получим оценку

$$\|u(x, y)\|_{L_2} \leq C_1 \|f(x, y)\|_{W_2^{1,1}},$$

где  $C_1$  — некоторая константа. □

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(x, y)$  известна для всех  $(x, y) \in L_H$ , а также удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $f(x, y)$  финитна по переменной  $x$ ;
- 2)  $f(x, y)$  имеет непрерывные частные производные первого порядка;
- 3)  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \Big|_{y=H} = 0$ ;  $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \Big|_{y=H} = 0$ .

Тогда существует решение задачи 1 в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, финитных по аргументу  $x$ , определенное формулой (3).



**Доказательство.** Из условий, наложенных на функции  $f(x, y)$ , ясно, что к обеим частям (3) можно применить преобразование Фурье по переменной  $x$  и преобразование Лапласа по переменной  $y$ . Используя свойства преобразования Фурье и Лапласа, получим:

$$\tilde{u}(\lambda, p) = (p + i\lambda) \tilde{f}(\lambda, p),$$

или

$$\tilde{f}(\lambda, p) = \frac{1}{(p + i\lambda)} \tilde{u}(\lambda, p).$$

Используя формулу (7), можно получить

$$\tilde{f}(\lambda, p) = I(\lambda, p) \cdot \tilde{u}(\lambda, p), \tag{10}$$

где  $I(\lambda, p) = \int_0^\infty e^{-(p+i\lambda)t} dt$ .

Применяя к (10) обратное преобразование Лапласа по переменной  $p$ , приходим к следующему выражению:

$$\hat{f}(\lambda, y) = \int_0^y \hat{u}(\lambda, \eta) e^{i\lambda(y-\eta)} d\eta.$$

Применим к последнему уравнению обратное преобразование Фурье по  $x$ :

$$f(x, y) = \int_0^y u(x + h, \eta) d\eta. \quad \square$$

**Теорема 3.** Пусть функция  $\mathbb{F}(x, y)$  известна для всех  $(x, y) \in L_H$  и пусть функция  $K(x, y, \xi, \eta)$  финитна, имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно и вместе со своими производными обращается в нуль на  $\Gamma(x, y)$ .

Тогда решение задачи 2 с весовой функцией  $g(x, \xi) = \begin{cases} 1, & \xi > x, \\ 0, & \xi < x \end{cases}$  единственно в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в полосе  $L_H$  и имеют место оценки

$$\|u(x, y)\|_{L_2} \leq C_2 \|\mathbb{F}(x, y)\|_{W_2^{1,1}},$$

где  $C_2$  — некоторая константа.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $f_0(x, y) = \mathbb{F}(x, y) - f(x, y)$ , т. е. второе слагаемое из левой части уравнения (2):

$$\int_0^y \int_{x-h}^{x+h} K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = f_0(x, y), \quad h = y - \eta.$$

Проделив несложные вычисления, из равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_0(x, y) &= \int_0^y \int_{x-h}^{x+h} K_x(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^y K(x, y, x+h, \eta) u(x+h, \eta) d\eta - \\ &\quad - \int_0^y K(x, y, x-h, \eta) u(x-h, \eta) d\eta \end{aligned}$$

с учетом ограничений, наложенных на весовую функцию  $K(x, y, \xi, \eta)$ , найдем выражения для  $\frac{\partial}{\partial x} f_0(x, y)$  и  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0(x, y)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} f_0(x, y) = \int_0^y \int_{x-h}^{x+h} K_x(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$



$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0(x, y) = \int_0^y \int_{x-h}^{x+h} K_{xx}(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Входящие в правые части этих выражений производные весовой функции  $K(x, y, \xi, \eta)$  ограничены. Тогда при  $y < y_0$ , где  $y_0$  достаточно мало, получим оценку

$$\|f_0(x, y)\|_{W_2^{1,1}} \leq q \|u(x, y)\|_{L_2}, \quad 0 < q < 1.$$

Из принципа сжатых отображений для оператора в правой части (2) следует единственность «в малом». А так как это вольтерровский оператор по  $y$ , единственность имеет место не только «в малом», но и в целом [12].  $\square$

## 2. ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

**Теорема 4.** Пусть функция  $f(x, y)$  известна для всех  $(x, y) \in L_H$ , весовая функция имеет вид  $g(x, \xi) = \text{sgn}(x - \xi)$ .

Тогда решение задачи 1 в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных с носителем в полосе  $L_H$  функций единственно, выражается через функцию  $f(x, y)$  по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) \tag{11}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|u(x, y)\|_{W_2^{1,0}} \leq C_3 \|f(x, y)\|_{W_2^{2,2}},$$

где  $C_3$  — некоторая константа.

**Доказательство.** Уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\int_0^y [u(x - h, \eta) - u(x + h, \eta)] d\eta = f(x, y), \tag{12}$$

где  $h = y - \eta$ . Аналогично предыдущему случаю применим к этому уравнению преобразование Фурье по первой переменной:

$$\int_0^y \hat{u}(\lambda, \eta) \sin(\lambda h) d\eta = \phi(\lambda, y), \tag{13}$$

где  $\phi(\lambda, y) = -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x, y) dx$  — преобразование Фурье по переменной  $x$  от функции  $f(x, y)$ .

Применим к уравнению (13) преобразование Лапласа по переменной  $y$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-py} \phi(\lambda, y) dy = \int_0^{\infty} e^{-py} \int_0^y \hat{u}(\lambda, \eta) \sin(\lambda(y - \eta)) d\eta dy.$$

Сделав замену  $t = y - \eta$ , имеем:

$$\int_0^{\infty} e^{-p\eta} \hat{u}(\lambda, \eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin(\lambda t) dt = \int_0^{\infty} e^{-py} \phi(\lambda, y) dy.$$

Таким образом, из уравнения (12) получаем:

$$\tilde{u}(\lambda, p) \cdot J(\lambda, p) = \tilde{\phi}(\lambda, p), \tag{14}$$

где  $\phi(\lambda, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} \hat{f}(\lambda, y) dy$ ,

$$J(\lambda, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin(\lambda t) dt. \tag{15}$$



Интеграл (15) легко привести к виду

$$J(\lambda, p) = \frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}. \quad (16)$$

Из уравнения (14), учитывая (16), получим:

$$\lambda \tilde{u}(\lambda, p) = (p^2 + \lambda^2) \tilde{\phi}(\lambda, p). \quad (17)$$

Применим к уравнению (17) обратное преобразование Лапласа по  $p$  и обратное преобразование Фурье по  $\lambda$ . Учитывая свойства преобразования Лапласа и Фурье, приходим к формуле обращения

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y).$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right\|_{L_2} (L_H) = \left\| \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) \right\|_{L_2} (L_H). \quad (18)$$

Используя свойства преобразования Лапласа и Фурье, а также учитывая (18), получим оценку

$$\|u(x, y)\|_{W_2^{1,0}} \leq C_3 \|f(x, y)\|_{W_2^{2,2}},$$

где  $C_3$  — некоторая константа. □

**Теорема 5.** Пусть функция  $f(x, y)$  известна для всех  $(x, y) \in L_H$ , а также удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $f(x, y)$  финитна по переменной  $x$ ;
- 2)  $f(x, y)$  имеет все непрерывные частные производные до второго порядка включительно;
- 3)  $f(x, y)$  вместе со своими частными производными до второго порядка включительно обращается в нуль на границах полосы  $L_H$ , т. е. при  $y = 0$  и  $y = H$ .

Тогда существует решение задачи 1 в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, финитных по аргументу  $x$ , определенное формулой (11).

**Доказательство.** Из условий теоремы следует, что к обеим частям уравнения (11) можно применить преобразование Фурье по переменной  $x$ . Получим

$$i\lambda \hat{u}(\lambda, y) = \frac{1}{2} \left( \lambda^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \hat{f}(\lambda, y).$$

Применим к обеим частям последнего уравнения преобразование Лапласа по переменной  $y$ :

$$i\lambda \tilde{u}(\lambda, p) = \frac{1}{2} (\lambda^2 + p^2) \tilde{f}(\lambda, p).$$

Из последнего равенства и (14), (16) следует, что

$$\frac{1}{2} \tilde{f}(\lambda, p) = i\tilde{u}(\lambda, p) \int_0^\infty e^{-pt} \sin(\lambda t) dt. \quad (19)$$

Применим к обеим частям уравнения (19) обратное преобразование Лапласа по переменной  $p$ . Используя теорему умножения, получим:

$$i \int_0^y \hat{u}(\lambda, \eta) \sin(\lambda(y - \eta)) d\eta = \frac{1}{2} \hat{f}(\lambda, y). \quad (20)$$

Применим к обеим частям уравнения (20) обратное преобразование Фурье по переменной  $\lambda$ . Из теоремы о свертке следует, что

$$\frac{i\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\lambda x} \int_0^y \hat{u}(\lambda, \eta) \sin(\lambda(y - \eta)) d\eta d\lambda =$$



$$= \frac{1}{2} \int_0^y \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(x-h)} \hat{u}(\lambda, \eta) d\lambda d\eta - \frac{1}{2} \int_0^y \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(x+h)} \hat{u}(\lambda, \eta) d\lambda d\eta = \frac{1}{2} f(x, y).$$

Таким образом, (11) запишется в виде

$$\int_0^y [u(x-h, \eta) - u(x+h, \eta)] d\eta = f(x, y). \quad \square$$

**Теорема 6.** Пусть весовая функция имеет вид  $g(x, \xi) = \text{sgn}(x - \xi)$ , функция  $K(x, y, \xi, \eta)$  финитна, имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно и вместе со своими производными обращается в нуль на  $\Gamma(x, y)$ . Тогда решение задачи 2 в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций единственно и имеют место оценки

$$\|u(x, y)\|_{W_2^{1,0}} \leq C_4 \|\mathbb{F}(x, y)\|_{W_2^{2,2}},$$

где  $C_4$  — некоторая константа.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $f_0(x, y)$ , т.е. второе слагаемое из левой части уравнения (2):

$$\int_0^y \int_{x-h}^{x+h} K(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = f_0(x, y), \quad h = y - \eta.$$

Найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_0(x, y) &= \int_0^y \int_{x-h}^{x+h} K_x(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ \int_0^y K(x, y, x+h, \eta) u(x+h, \eta) d\eta - \int_0^y K(x, y, x-h, \eta) u(x-h, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая ограничения, наложенные на весовую функцию  $K(x, y, \xi, \eta)$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_0(x, y) &= \int_0^y \int_{x-h}^{x+h} K_x(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_0(x, y) &= \int_0^y \int_{x-h}^{x+h} K_{xx}(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Из этих выражений аналогично доказательству теоремы 3 при  $y < y_0$ , где  $y_0$  достаточно мало, получим оценку

$$\|f_0(x, y)\|_{W_2^{1,1}} \leq \rho \|u(x, y)\|_{L_2}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Из принципа сжатых отображений для оператора в правой части (2) и вольтерровости этого оператора вытекает единственность решения уравнения (2).  $\square$

### Библиографический список

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
2. Natterer F. The mathematics of computerized tomography (Classics in Applied Mathematics). Philadelphia: SIAM, 2001. 222 p.
3. Natterer F., Wubbeling F. Mathematical methods in image reconstruction. Philadelphia: SIAM, 2001. 213 p.
4. Бегматов А. Х. Задача интегральной геометрии для семейства конусов в  $n$ -мерном пространстве // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 500–505.
5. Успенский С. В. О восстановлении функции, заданной интегралами по одному семейству конических поверхностей // Сиб. матем. журн. 1977. Т. 18, № 3. С. 675–684.
6. Бегматов А. Х., Пиримбетов А. О., Сеидулла-



ев А. К. Задачи интегральной геометрии в полосе на семействах параболических кривых // Докл. АН ВШ РФ. 2012. № 2(19). С. 6–15.

7. Begmatov A. H., Pirimbetov A. O., Seidullaev A. K. Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography // Proc. of IFOST-2012. Tomsk Polytechnic University, 2012. Vol. II. P. 261–266.

8. Бегматов А. Х., Джайков Г. М. О восстановлении функции по сферическим средним // Докл. АН ВШ РФ. 2013. № 1(20). С. 6–16.

9. Бегматов А. Х. О единственности решения задачи

интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 4. С. 439–441.

10. Бегматов А. Х. Задача интегральной геометрии с возмущением в трехмерном пространстве // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 3–14.

11. Бегматов А. Х., Петрова Н. Н. Задача интегральной геометрии с возмущением на кривых эллиптического типа в полосе // Докл. АН. 2011. Т. 436, № 2. С. 151–154.

12. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 288 с.

## Weakly Ill-posed Problems of Integral Geometry with Perturbation on Polygonal Lines

A. H. Begmatov, A. O. Pirimbetov, A. K. Seidullaev

Novosibirsk State Technical University, 20, Prospekt K. Marksa, 630073, Novosibirsk, Russia, BegAH@ngs.ru, azik.8622@mail.ru, abat1984@inbox.ru

We study a problem of reconstruction of a function in a strip from their given integrals with known weight function along polygonal lines. We obtained two simple inversion formulas for the solution to the problem. Using these representations we prove uniqueness and existence theorems for solutions and obtain stability estimates of a solution to the problem in Sobolev's spaces and thus show their weak ill-posedness. Then we consider integral geometry problems with perturbation. The uniqueness theorems are proved and stability estimates of solutions in Sobolev spaces are obtained.

**Key words:** ill-posed problems, integral geometry problems, integral transforms, inversion formula, uniqueness, existence theorem, weak instability, perturbation.

### References

1. Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*. Providence, American Mathematical Society, 1986, 290 p. (in Russian).

2. Natterer F. *The mathematics of computerized tomography* (Classics in Applied Mathematics), Philadelphia, SIAM, 2001, 222 p.

3. Natterer F., Wubbeling F. *Mathematical methods in image reconstruction*. Philadelphia, SIAM, 2001, 213 p.

4. Begmatov A. H. The integral geometry problem for a family of cones in the  $n$ -dimensional space. *Siberian Math. J.*, 1996, vol. 37, no. 3, pp. 430–435. DOI: 10.1007/BF02104844.

5. Uspenskii S. V. О восстановлении функции, заданной интегралами по одному семейству конических поверхностей [On reconstruction of a function given integrals over a certain class of conic surfaces]. *Sibirsk. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 1977, vol. 18, no. 3, pp. 675–684 (in Russian).

6. Begmatov A. H., Pirimbetov A. O., Seidullaev A. K. Zadachi integral'noi geometrii v polose na semeistvakh parabolicheskikh krivyykh [Problems of integral geometry in a strip on families of parabolic curves]. *Doklady AN VSh RF* [Reports of Russian Higher Education Academy

of Sciences], 2012, vol. 2 (19), pp. 6–15 (in Russian).

7. Begmatov A. H., Pirimbetov A. O., Seidullaev A. K. Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography. *Proc. of IFOST-2012*, Tomsk Polytechnic University, vol. II, pp. 261–266.

8. Begmatov A. H., Djaykov G. M. О восстановлении функции по сферическим средним [Reconstruction of a function from its spherical means]. *Doklady AN VSh RF* [Reports of Russian Higher Education Academy of Sciences], 2013, vol. 1, no. 20, pp. 6–16 (in Russian).

9. Begmatov A. H. The uniqueness of a solution to a Volterra-type integral problem in the plane. *Doklady Math.*, 2009, vol. 80, no. 1, pp. 528–530. DOI: 10.1134/S1064562409040206.

10. Begmatov A. H. A perturbed integral geometry problem in three-dimensional space. *Siberian Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 1, pp. 1–12.

11. Begmatov A. H., Petrova N. N. The problem of integral geometry with perturbation on elliptic curves in a strip. *Doklady Math.*, 2011, vol. 83, no. 1, pp. 22–25. DOI: 10.1134/S1064562411010078.

12. Triкоми F. *Integral equations*. New York, Interscience Publishers, Inc.; London, Interscience Publishers Ltd., 1957. 238 p.



УДК 501.1

## О МНОГООБРАЗИИ ПОЛУГРУПП ОТНОШЕНИЙ С ОПЕРАЦИЕЙ РЕФЛЕКСИВНОЙ ДВОЙНОЙ ЦИЛИНДРОФИКАЦИИ

Д. А. Бредихин<sup>1</sup>, А. В. Попович<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., bredikhin@mail.ru

<sup>2</sup> Аспирант кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., popovich\_al@mail.ru

В работе находится базис тождеств многообразия, порожденного классом полугрупп бинарных отношений с дополнительной операцией двойной рефлексивной цилиндрификации.

*Ключевые слова:* алгебры отношений, многообразия, базис тождеств, операция двойной рефлексивной цилиндрификации.

### ВВЕДЕНИЕ

Множество  $Rel(U)$  всех бинарных отношений, заданных на  $U$ , относительно операции умножения отношений  $\circ$  образует полугруппу отношений и всякая полугруппа изоморфно вкладывается в полугруппу отношений  $(Rel(U), \circ)$ . Вместе с операцией умножения отношений на множестве  $Rel(U)$  могут быть рассмотрены и другие операции, несущие дополнительную информацию об указанной полугруппе. Возникающие при этом алгебраические структуры могут быть рассмотрены в рамках теории алгебр отношений. В общем случае под *алгеброй отношений* над данным множеством мы понимаем пару  $(\Phi, \Omega)$ , где  $\Omega$  — некоторая совокупность операций над отношениями и  $\Phi$  — множество отношений, замкнутое относительно операций из  $\Omega$ . Обозначим  $R\{\Omega\}$  класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений над всевозможными множествами с операциями из  $\Omega$ .

Исследование операций над отношениями восходит к работам Де Моргана, Пирса, Фреге и Шредера. Тарским был предложен аксиоматический подход к изучению алгебр отношений [1]. Им был рассмотрен класс алгебр отношений, в число операций которых наряду с булевыми операциями входят операции умножения  $\circ$  и обращения  $^{-1}$  отношений. Имеется также ряд других операций над отношениями, играющих важную роль в приложениях теории алгебр отношений в различных областях алгебры и логики, в частности в теории полугрупп; рассмотрению различных классов алгебр отношений посвящен обзор [2].

Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул логики предикатов. Такие операции называются *логическими*. Всякая формула  $\phi(z_0, z_1, r_1, \dots, r_m)$  логики предикатов первого порядка, содержащая  $m$  бинарных предикатных символов  $r_1, \dots, r_m$ , две свободные индивидуальные переменные  $z_0, z_1$  и какие-либо связанные индивидуальные переменные  $z_i$  (при  $i \geq 2$ ), определяет  $m$ -арную операцию  $F_\phi$  на  $Rel(U)$ :

$$F_\phi(\rho_1, \dots, \rho_m) = \{(u, v) \in U \times U : \phi(u, v, \rho_1, \dots, \rho_m)\},$$

где  $\phi(u, v, \rho_1, \dots, \rho_m)$  означает, что формула  $\phi$  выполняется, если  $z_0, z_1$  интерпретируются как  $u, v$  и  $r_1, \dots, r_m$  интерпретируются как отношения  $\rho_1, \dots, \rho_m$  из  $Rel(U)$ .

Логические операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Важным классом операций над отношениями является класс диофантовых операций. Операция называется *диофантовой*<sup>1</sup> [3, 4] (в другой терминологии — *примитивно-позитивной* [5]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. К числу диофантовых, в частности, относится упомянутые выше операции умножения и обращения отношений.

Диофантовы операции могут быть описаны с помощью графов [3–5]. Пусть  $N$  — множество всех натуральных чисел и  $[1, n] = \{k \in N : 1 \leq k \leq n\}$ . *Помеченным графом* назовём пару  $(V, E)$ , где  $V$  — конечное множество, называемое *множеством вершин*, и  $E \subseteq V \times N \times V$  — тернарное отношение.

<sup>1</sup> Термин «диофантова операция» был предложен первому из авторов Л. Н. Шевриным.



Тройку  $(u, k, v) \in E$  будем называть *ребром графа*, идущим из вершины  $u$  в вершину  $v$ , помеченным меткой  $k$ , и графически изображать следующим образом:  $u \xrightarrow{k} v$ . Мы также будем говорить, что вершины  $u$  и  $v$  инцидентны ребру  $(u, k, v)$ .

Под *двухполюсником* мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, т.е. систему вида  $G = (V, E, in, out)$ , где  $(V, E)$  — помеченный граф;  $in$  и  $out$  — две выделенные вершины, называемые *входом* и *выходом* двухполюсника соответственно.

Пусть  $F = F_\varphi$  — диофантова операция, задаваемая формулой  $\varphi$ . С этой операцией может быть ассоциирован двухполюсник  $G = G(\varphi)$ , определяемый следующим образом [5]:  $G = (V, E, in, out)$ , где  $V$  — множество всех индексов индивидуальных переменных  $z_i$ , входящих в формулу  $\varphi$ ;  $in = 0$ ,  $out = 1$ ;  $(i, k, j) \in E$  тогда и только тогда, когда атомарная формула  $r_k(z_i, z_j)$  входит в  $\varphi$ .

Обратно, всякий двухполюсник  $G = (V, E, in, out)$ , где  $V = \{v_0, \dots, v_n\}$ ,  $in = v_0$ ,  $out = v_1$ , задаёт диофантову формулу  $\varphi(G)$  с двумя свободными переменными  $z_0$  и  $z_1$ , какими-либо связанными индивидуальными переменными  $z_i$  (при  $i \geq 2$ ) и бинарными предикатными символами  $r_1, \dots, r_m$ , определяемую следующим образом:

$$\varphi(G) = (\exists z_2, \dots, z_m) \bigwedge_{(u_i, k, v_j) \in E} r_k(z_i, z_j).$$

Диофантову операцию, задаваемую формулой  $\varphi(G)$ , обозначим  $F_G$ . Так операции умножения отношений, задаваемой формулой

$$\rho \circ \sigma = \{(u, v) : (\exists w)(u, w) \in \rho \wedge (w, v) \in \sigma\},$$

соответствует двухполюсник следующего вида:



Назовём диофантову операцию *атомарной*, если она задаётся формулой, не содержащей операцию конъюнкции. Ясно, что такая формула может содержать лишь одну атомарную подформулу, и, следовательно, соответствующая операция над отношениями будет унарной. Далее при рассмотрении операций над бинарными отношениями предполагается, что это отношения на фиксированном множестве  $U$ , что в большинстве случаев явно не оговаривается. Существует девять различных атомарных диофантовых операций (отличных от тождественной  $F_0(\rho) = \rho$ ):  $F_1$  — операция обращения  $^{-1}$ ;  $F_2$  и  $F_3$  — операции цилиндрификации [6];  $F_4$  — операция двойной цилиндрификации;  $F_5$  и  $F_6$  — домино операции [7, 8];  $F_7$  и  $F_8$  — операции рефлексивной цилиндрификации [8];  $F_9$  — операция двойной рефлексивной цилиндрификации. Ниже приводятся формулы и двухполюсники  $G_k$  ( $k = 1, \dots, 9$ ), задающие соответствующие операции:

$F_1(\rho) = \{(u, v) : (v, u) \in \rho\},$	$G_1:$
$F_2(\rho) = \{(u, v) : (\exists w)(u, w) \in \rho\},$	$G_2:$
$F_3(\rho) = \{(u, v) : (\exists w)(w, v) \in \rho\},$	$G_3:$
$F_4(\rho) = \{(u, v) : (\exists w, z)(w, z) \in \rho\},$	$G_4:$
$F_5(\rho) = \{(u, v) : (\exists w)(w, u) \in \rho\},$	$G_5:$
$F_6(\rho) = \{(u, v) : (\exists w)(v, w) \in \rho\},$	$G_6:$
$F_7(\rho) = \{(u, v) : (u, u) \in \rho\},$	$G_7:$
$F_8(\rho) = \{(u, v) : (v, v) \in \rho\},$	$G_8:$
$F_9(\rho) = \{(u, v) : (\exists w)(w, w) \in \rho\},$	$G_9:$



Рассмотрение алгебр отношений в рамках аксиоматического подхода предполагает изучение их свойств, выразимых на языке логики предикатов первого порядка и, в частности, на языке тождеств. Это приводит к необходимости изучения многообразий  $Var\{\Omega\}$ , порождённых различными классами  $R\{\Omega\}$  алгебр отношений [9].

Базис тождеств многообразия  $Var\{\circ, ^{-1}\}$  найден в [10], а многообразий  $Var\{\circ, F_3\}$  и  $Var\{\circ, F_4\}$  в [11]. Целью этой работы является подробное доказательство результата, анонсированного в работе [12], в котором находится базис тождеств многообразия  $R\{\circ, F_9\}$  алгебр отношений с операциями умножения отношений и двойной рефлексивной цилиндрификации.

## ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сосредоточим внимание на операции произведения отношений  $\circ$  и унарной операции рефлексивной двойной цилиндрификации:

$$\nabla(\rho) = F_9(\rho) = \{(u, v) : (\exists w)(w, w) \in \rho\}.$$

Заметим, что эту операцию можно рассматривать как операцию-индикатор существования неподвижных точек для бинарных отношений. Действительно,  $\nabla(\rho) = U \times U$ , если  $\rho$  содержит пару вида  $(w, w)$ , и  $\nabla(\rho) = \emptyset$  — в противном случае.

В следующей теореме находится базис тождеств для многообразия  $Var\{\circ, \nabla\}$ .

**Теорема 1.** Алгебра  $(A, \cdot, *)$  типа  $(2, 1)$  принадлежит многообразию  $Var\{\circ, \nabla\}$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:

- 1)  $(xy)z = x(yz)$ ,
- 2)  $(x^*)^2 = x^*$ ,
- 3)  $x^*xx^* = x^*$ ,
- 4)  $(x^*y)^2 = x^*y$ ,
- 5)  $(xy^*)^2 = xy^*$ ,
- 6)  $(xy)^* = (yx)^*$ ,
- 7)  $x^*yz^* = z^*yx^*$ ,
- 8)  $(xy^*z)^* = y^*zxy^*$ ,
- 9)  $x^*yx^*zx^* = x^*zx^*yx^*$ ,
- 10)  $x^*(x^p)^* = x^*$  для любого простого числа  $p$ .

Найденный в теореме 1 базис тождеств является бесконечным. Естественно возникает вопрос о конечной базисуемости этого многообразия.

**Теорема 2.** Многообразию  $Var\{\circ, \nabla\}$  не является конечно базисуемым.

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Разобьём доказательство теоремы 1 на ряд последовательных шагов.

*Шаг 1.* Доказательство базируется на результате работы [13], дающем описание эквациональных теорий алгебр отношений с диофантовыми операциями. Приведём ряд определений и обозначений, необходимых для формулировки этого результата и используемых в дальнейшем изложении.

Пусть  $G = (V, E, in, out)$  и  $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$  ( $k = 1, \dots, m$ ) — двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовём *композицией* этих двухполюсников новый двухполюсник  $G(G_1, \dots, G_m)$ , который определяется следующим образом [5]: возьмём двухполюсник  $G$  и заменим каждое его ребро  $(u, k, v) \in E$  на двухполюсник  $G_k$ , отождествляя при этом вершину  $in_k$  с вершиной  $u$  и вершину  $out_k$  с вершиной  $v$ .

Рассмотрим множество диофантовых операций над отношениями  $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \dots, F_{\varphi_n}\}$  и пусть  $A = (A, f_1, \dots, f_n)$  — универсальная алгебра соответствующего типа. Положим  $G_1 = G(\varphi_1), \dots, G_n = G(\varphi_n)$ .

Для всякого терма  $p$  алгебры  $A$  определим следующим индуктивным образом двухполюсник  $G_p = (V_p, E_p, in(p), out(p))$ :

- а) если  $p = x_k$ , то  $G(p)$  представляет собой двухполюсник вида  $in \cdot \xrightarrow{k} \cdot out$ ;
- б) если  $p = f_k(p_1, \dots, p_m)$ , то  $G(p)$  есть композиция  $G_k(G(p_1), \dots, G(p_m))$ .

Обозначим через  $pr(E)$  множество всех рёбер, инцидентных некоторой вершине помеченного графа  $(V, E)$ . Пусть даны два помеченных графа  $(V_1, E_1)$  и  $(V_2, E_2)$ , отображение  $f : pr(E_2) \rightarrow pr(E_1)$  называется гомоморфизмом из  $E_2$  в  $E_1$ , если  $(f(u), k, f(v)) \in E_1$  для всякого ребра  $(u, k, v) \in E_2$ .

Пусть  $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$  и  $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$  — двухполюсники. Отображение  $f : V_2 \rightarrow V_1$  называется гомоморфизмом  $G_2$  в  $G_1$ , если  $f(in_2) = in_1$ ,  $f(out_2) = out_1$  и  $(f(u), k, f(v)) \in E_1$  для всякого ребра  $(u, k, v) \in E_2$ .

Мы будем писать  $E_1 \prec E_2$  ( $G_1 \prec G_2$ ), если существует гомоморфизм  $E_2$  в  $E_1$  ( $G_2$  в  $G_1$ ), и  $E_1 \cong E_2$  ( $G_1 \cong G_2$ ), если  $E_1 \prec E_2$  и  $E_2 \prec E_1$  ( $G_1 \prec G_2$  и  $G_2 \prec G_1$ ).



Обозначим через  $E_q\{\Omega\}$  эквациональную теорию класса  $R\{\Omega\}$ . Теперь мы готовы сформулировать основной результат работы [12].

**Теорема 3.** Тожество  $p = q$  принадлежит эквациональной теории  $E_q\{\Omega\}$  тогда и только тогда, когда  $G(p) \cong G(q)$ .

*Шаг 2.* Докажем дополнительные тождества, необходимые нам в дальнейшем. Если при доказательстве используется тождество с номером  $k$ , то мы будем использовать символ  $\stackrel{k}{=}$ .

**Лемма 1.** Пусть алгебра  $(A, \cdot, *)$  типа  $(2, 1)$  удовлетворяет тождествам 1)–10). Тогда она также удовлетворяет тождествам:

$$\begin{aligned} 11) \ x^*y^* &= y^*x^*, & 12) \ (x^*yz^*)^* &= x^*yz^*, & 13) \ xyz^* &= xyz^*xz^*, & 13') \ x^*yz &= x^*zx^*yz, \\ 14) \ (xy)^* &= (xy)^*x(xy)^*, & 15) \ x^*yz^* &= z^*x^*yz^*, & 16) \ x^*(x^n)^* &= x^*, \end{aligned}$$

где  $n \in \mathbb{N}$ .

**Доказательство.** Докажем тождество 11):

$$x^*y^* \stackrel{2}{=} x^*x^*y^* \stackrel{7}{=} y^*x^*x^* \stackrel{2}{=} y^*x^*.$$

Покажем, что тождество 12) справедливо:

$$\begin{aligned} (x^*yz^*)^* &\stackrel{3}{=} (x^*xx^*yz^*)^* = ((x^*x)x^*(yz^*))^* \stackrel{8}{=} x^*(yz^*)(x^*x)x^* = x^*yz^*x^*x^* \stackrel{3}{=} x^*yz^*x^* \stackrel{7}{=} \\ &= z^*yx^*x^* \stackrel{2}{=} z^*yx^* \stackrel{7}{=} x^*yz^*. \end{aligned}$$

Докажем тождество 13):

$$xyz^* \stackrel{5}{=} xyz^*xyz^* \stackrel{4}{=} xyz^*xz^*xyz^* \stackrel{9}{=} xyz^*xyz^*xz^* \stackrel{5}{=} xyz^*xz^*.$$

Докажем тождество 13'):

$$x^*yz \stackrel{4}{=} x^*yzx^*yz \stackrel{5}{=} x^*yzx^*zx^*yz \stackrel{9}{=} x^*zx^*yzx^*yz \stackrel{4}{=} x^*zx^*yz.$$

Докажем теперь справедливость тождества 14):

$$(xy)^* \stackrel{3}{=} (xy)^*xy(xy)^* \stackrel{13}{=} (xy)^*xy(xy)^*x(xy)^* \stackrel{3}{=} (xy)^*x(xy)^*.$$

Докажем тождество 15):

$$x^*yz^* \stackrel{7}{=} z^*yx^* \stackrel{2}{=} z^*z^*yx^* \stackrel{7}{=} z^*x^*yz^*.$$

Тожество 10) справедливо для любого простого числа  $p$ . Покажем что оно справедливо и для любого натурального числа  $n$ . Число  $n$  можно представить в виде  $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ , где  $p_1, \dots, p_m$  — простые числа. Отсюда:

$$\begin{aligned} x^* &\stackrel{10}{=} x^*(x^{p_1})^* \stackrel{10}{=} x^*(x^{p_1})^*((x^{p_1})^{p_1})^* = x^*(x^{p_1})^*(x^{p_1^2})^* \stackrel{10}{=} \dots \stackrel{10}{=} x^*(x^{p_1})^*(x^{p_1^2})^* \dots (x^{p_1^{k_1}})^* \stackrel{10}{=} \\ &= x^*(x^{p_1})^* \dots (x^{p_1^{k_1}})^*((x^{p_1^{k_1}})^{p_2})^* \stackrel{10}{=} x^*(x^{p_1})^* \dots (x^{p_1^{k_1}})^*((x^{p_1^{k_1}})^{p_2})^*((x^{p_1^{k_1}p_2})^{p_2})^* \stackrel{10}{=} \dots \stackrel{10}{=} \\ &= x^*(x^{p_1})^* \dots (x^{p_1^{k_1}})^*((x^{p_1^{k_1}})^{p_2})^* \dots (x^{p_1^{k_1}p_2^{k_2}})^* \stackrel{10}{=} \dots \stackrel{10}{=} x^*(x^{p_1})^* \dots (x^{p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}})^* \stackrel{10}{=} \dots \stackrel{10}{=} \\ &= x^*(x^{p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}})^* = x^*(x^n)^*. \end{aligned}$$

Мы доказали тождество 16). □

*Шаг 3.* Введём некоторые обозначения. Пусть  $\Sigma$  — эквациональная теория алгебр, удовлетворяющих тождествам 1)–10). Для алгебры  $(A, \cdot, *)$  типа  $(2, 1)$  обозначим через  $\Xi$  множество всех термов указанной сигнатуры. Для любых двух термов  $p, q \in \Xi$  мы пишем  $p \cong q$ , если тождество  $p = q$  принадлежит  $\Sigma$ . Пусть  $\Lambda$  — множество слов над алфавитом  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  и  $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\odot\}$ , где  $\odot$  — пустое слово.

Если при установке эквивалентности термов используется тождество с номером  $(k)$ , то мы будем писать  $p_1 \stackrel{k}{\cong} p_2$ . Ссылки на тождество ассоциативности 1) будут опускаться.

Слово  $\beta$  является подсловом слова  $\alpha$ , если  $\alpha = \alpha_1\beta\alpha_2$  для некоторых  $\alpha_1, \alpha_2 \in \tilde{\Lambda}$ . В том случае, когда  $\alpha_1 = \odot$  ( $\alpha_2 = \odot$ ), назовём  $\beta$  начальным (конечным) подсловом слова  $\alpha$ .



**Лемма 2.** Для любого терма  $p \in \Xi$  существуют такие  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$ ,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \Lambda$  ( $n \geq 0$ ), что  $p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n$ .

**Доказательство.** Доказательство проводится индукцией, согласно определению терма  $p$ . Утверждение очевидно для  $p = x_k$ . Далее предположим, что  $p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n$ . Тогда по тождеству 8) получаем:

$$(p)^* = (\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n)^* \cong \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n \alpha_0 \beta_1^*.$$

Пусть  $p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n$  и  $q \cong \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \dots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\alpha}_m$ , тогда

$$pq = \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \dots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\alpha}_m. \quad \square$$

**Лемма 3.** Любой терм  $p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n$ , где  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$ ,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \Lambda$  ( $n \geq 0$ ), можно представить в виде

$$p \cong \alpha_0 (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* (\beta_n^* \alpha_2 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \alpha_n.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} p &\cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_{n-1}^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \alpha_n \stackrel{15}{\cong} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_n^* \beta_{n-1}^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \alpha_n \stackrel{2}{\cong} \\ &\cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_n^* \beta_{n-1}^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \alpha_n \stackrel{7}{\cong} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_n^* \beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \alpha_n \cong \dots \cong \\ &\cong \alpha_0 \beta_n^* \beta_n^* \alpha_1 \beta_n^* \beta_n^* \dots \alpha_{n-2} \beta_n^* \beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \dots \beta_n^* \alpha_n \stackrel{2}{\cong} \alpha_0 \beta_n^* \alpha_1 \beta_n^* \beta_n^* \dots \alpha_{n-2} \beta_n^* \beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \dots \beta_n^* \beta_n^* \alpha_n \stackrel{11}{\cong} \\ &\cong \alpha_0 \beta_n^* \alpha_1 \beta_n^* \beta_n^* \dots \alpha_{n-2} \beta_n^* \beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \beta_n^* \dots \beta_n^* \alpha_n \stackrel{12}{\cong} \alpha_0 (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \alpha_n. \quad \square \end{aligned}$$

**Шаг 4.** Согласно определению граф  $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$  для  $p$  может быть построен следующим образом.

Положим  $p = \alpha = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$  ( $n \geq 1$ ), тогда  $V_p = V_\alpha = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ ,  $E_p = E_\alpha = \{(v_{k-1}, i_k, v_k) : k \in [1, n]\}$  и  $in(p) = in(\alpha) = v_0$ ,  $out(p) = out(\alpha) = v_n$ . Соответствующий данному терму граф будет иметь вид:

$$in(\alpha) = v_0 \xrightarrow{i_1} \dots \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_n} v_n = out(\alpha).$$

Если  $p = \alpha = \odot$ , то положим по определению  $V_p = V_\alpha = \{v_0\}$ ,  $E_p = E_\alpha = \emptyset$ ,  $in(p) = in(\alpha) = out(p) = out(\alpha) = v_0$ .

Пусть  $p = (\beta)^*$ , где  $\beta = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_m}$ , тогда  $V_p = V_{\beta^*} = \{u_0, u_1, \dots, u_{m+1}\}$ ,  $E_p = E_{\beta^*} = \{(u_k, i_k, u_{k+1}) : k \in [1, m-1]\} \cup \{(u_m, i_m, u_1)\}$ ,  $in(p) = in(\beta^*) = u_0$ ,  $out(p) = out(\beta^*) = u_{m+1}$ . Соответствующий граф будет иметь вид как на рис. 1.

Пусть теперь  $p = \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n$  и  $n > 1$ . Будем предполагать, что множества  $V_{\alpha_0}, V_{\beta_1^*}, V_{\alpha_1}, \dots, V_{\beta_n^*}, V_{\alpha_n}$  попарно не пересекаются. Тогда  $V_p = V_{\alpha_0} \cup pr(E_{\beta_1^*}) \cup V_{\alpha_1} \cup \dots \cup pr(E_{\beta_n^*}) \cup V_{\alpha_n}$ ,  $E_p = E_{\alpha_0} \cup E_{\beta_1^*} \cup \dots \cup E_{\beta_n^*} \cup E_{\alpha_n}$ ,  $in(p) = in(\alpha_0)$ ,  $out(p) = out(\alpha_n)$ . Схематично соответствующий граф изображен на рис. 2.

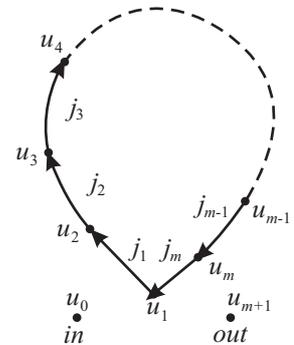


Рис. 1. Граф, соответствующий терму  $p = (\beta)^*$

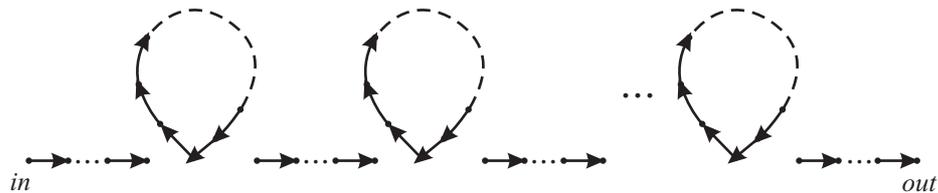


Рис. 2. Граф, соответствующий терму  $p = \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n$

Если  $n = 0$ , то граф будет связным. В общем случае число компонент связности данного графа будет  $n + k$ , где  $k$  — это число слов  $\alpha_i$ , отличных от пустого слова.

**Лемма 4.** Если  $E_\alpha \prec E_\beta$ , где  $\alpha, \beta \in \tilde{\Lambda}$ , то найдутся такие  $\beta_1, \beta_2 \in \tilde{\Lambda}$ , что  $\alpha = \beta_1 \beta_2$ .



**Доказательство.** Пусть  $\alpha = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n}$  и  $\beta = x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_m}$ ,  $V_\alpha = \{v_0, \dots, v_n\}$ ,  $V_\beta = \{v'_0, \dots, v'_m\}$ . Очевидно, что  $n \geq m$ . Пусть  $f$  — гомоморфизм из  $E_\beta$  в  $E_\alpha$ , т. е.  $(f(u), k, f(v)) \in E_\alpha$  для всякого ребра  $(u, k, v) \in E_\beta$ . Предположим, что  $f(v'_0) = v_k$ , тогда  $f(v'_r) = v_t$  и  $x_{j_r} = x_{i_t}$ , где  $t = k + r$  и  $r = 1, \dots, m$ . Положим  $\beta_1 = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k}$  ( $\beta_1 = \odot$ , если  $k = 0$ );  $\beta_2 = x_{i_s}x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_n}$  ( $\beta_2 = \odot$ , если  $k + m = n$ ), где  $s = k + m + 1$ . Тогда  $\alpha = \beta_1\beta_2$  (рис. 3).

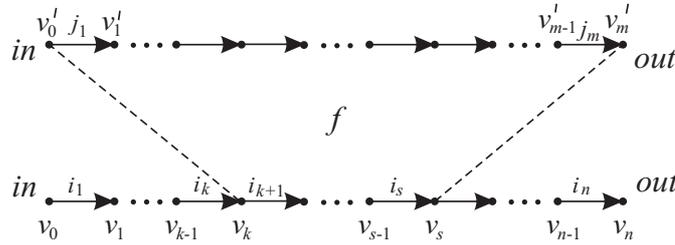


Рис. 3. Гомоморфизм  $f$  из  $E_\beta$  в  $E_\alpha$

□

Из леммы 4 непосредственно вытекает следующая лемма.

**Лемма 5.** Если  $E_\alpha \cong E_\beta$ , то  $\alpha = \beta$ .

В дальнейшем  $|X|$  обозначает число элементов множества  $X$ .

**Лемма 6.** Если  $E_{\beta^*} \prec E_{\tilde{\beta}^*}$  и  $f$  — гомоморфизм из  $E_{\tilde{\beta}^*}$  в  $E_{\beta^*}$ , где  $\beta, \tilde{\beta} \in \Lambda$ , то существуют такие  $\lambda, \mu \in \tilde{\Lambda}$ , что  $\beta = \lambda\mu$  и  $\tilde{\beta} = (\mu\lambda)^k$  для некоторого натурального  $k \geq 1$  и для каждой вершины  $v \in pr(E_{\beta^*})$  выполняется условие  $|f^{-1}(v)| = k$ .

**Доказательство.** Пусть  $\beta = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n}$ ,  $\tilde{\beta} = x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_m}$ ,  $pr(E_{\beta^*}) = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $pr(E_{\tilde{\beta}^*}) = \{v'_1, \dots, v'_m\}$ . Очевидно, что  $n \leq m$ . Предположим, что  $f(v'_1) = v_l$ . Тогда  $f(v'_2) = v_{l+1}$  и  $x_{j_1} = x_{i_l}$ ,  $f(v'_{n+1}) = v_{l-1}$  и  $x_{j_n} = x_{i_{l-1}}$ . Если  $n = m$ , то  $\beta = \lambda\mu$ ,  $\tilde{\beta} = \mu\lambda$  и  $|f^{-1}(v)| = 1$ , где  $\lambda = x_{i_1} \cdots x_{i_{l-1}}$ ,  $\mu = x_{i_l} \cdots x_{i_n}$ . Если  $m > n$ , то  $f(v'_{n+2}) = v_{l+1}$  и  $x_{j_{n+1}} = x_{i_l}, \dots, f(v'_m) = v_l$  и  $x_{j_m} = x_{i_{l-1}}$ . Отсюда следует, что  $m = kn$ ,  $|f^{-1}(v)| = k$  для некоторого натурального  $k$ , и  $\beta = \lambda\mu$ ,  $\tilde{\beta} = (\mu\lambda)^k$ , где  $\lambda = x_{i_1} \cdots x_{i_{l-1}}$ ,  $\mu = x_{i_l} \cdots x_{i_n}$ . □

**Лемма 7.** Если  $E_{\beta^*} \prec E_\alpha$ , где  $\alpha \in \tilde{\Lambda}$  и  $\beta \in \Lambda$ , то существуют такие  $\lambda, \mu, \gamma \in \tilde{\Lambda}$ , что  $\beta = \lambda\mu$ ,  $\alpha\gamma = (\mu\lambda)^{k+1}$  для некоторого натурального  $k \geq 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\alpha = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n}$ ,  $\beta = x_{j_1}x_{j_2} \cdots x_{j_m}$ ,  $V_\alpha = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ ,  $pr(E_{\beta^*}) = \{v'_1, \dots, v'_m\}$  и  $f$  — гомоморфизм из  $E_\alpha$  в  $E_{\beta^*}$ . Предположим, что  $f(v_0) = v'_l$ . Положим  $\lambda = x_{j_1} \cdots x_{j_{l-1}}$ ,  $\mu = x_{j_l} \cdots x_{j_m}$ , тогда  $\beta = \lambda\mu$ . Пусть  $n = km + r$ , где  $r < m$ . Тогда  $\alpha$  является начальным подсловом слова  $(\mu\lambda)^{k+1}$ , т. е. существует такое  $\gamma$ , что  $\alpha\gamma = (\mu\lambda)^{k+1}$ . □

**Лемма 8.** Если  $E_{\beta^*} \prec E_{\tilde{\beta}^*}$ , где  $\beta, \tilde{\beta} \in \Lambda$ , то  $\beta^* \cong \beta^*\tilde{\beta}^*$ .

**Доказательство.** Согласно лемме 6 имеем  $\beta = \lambda\mu$  и  $\tilde{\beta} = (\mu\lambda)^k$  для некоторого натурального  $k \geq 1$ . Отсюда получаем  $\beta^* \stackrel{16}{\cong} \beta^*(\beta^k)^* \cong \beta^*((\lambda\mu)^k)^* \stackrel{6}{\cong} \beta^*((\mu\lambda)^k)^* \cong \beta^*\tilde{\beta}^*$ . □

**Лемма 9.** Если  $E_{\beta^*} \prec E_\alpha$ , где  $\alpha \in \tilde{\Lambda}$  и  $\beta \in \Lambda$ , то  $\beta^* \cong \beta^*\alpha\beta^*$ .

**Доказательство.** По лемме 7 имеем  $\beta = \lambda\mu$ ,  $\alpha\gamma = (\mu\lambda)^{k+1}$  для некоторого натурального  $k \geq 0$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \beta^*\alpha\beta^* &\stackrel{16}{\cong} \beta^*(\beta^{k+1})^*\alpha\beta^* \cong \beta^*((\lambda\mu)^{k+1})^*\alpha\beta^* \stackrel{6}{\cong} \beta^*((\mu\lambda)^{k+1})^*\alpha\beta^* \cong \beta^*(\alpha\gamma)^*\alpha\beta^* \stackrel{7}{\cong} \\ &\cong \beta^*\beta^*\alpha(\alpha\gamma)^* \stackrel{16}{\cong} \beta^*\beta^*(\beta^{k+1})^*\alpha(\alpha\gamma)^* \cong (\beta^*)^2(\alpha\gamma)^*\alpha(\alpha\gamma)^* \stackrel{2}{\cong} \beta^*((\alpha\gamma)^*\alpha(\alpha\gamma)^*) \stackrel{14}{\cong} \beta^*(\alpha\gamma)^* \cong \\ &\cong \beta^*((\mu\lambda)^{k+1})^* \stackrel{6}{\cong} \beta^*((\lambda\mu)^{k+1})^* \cong \beta^*(\beta^{k+1})^* \stackrel{16}{\cong} \beta^*. \end{aligned}$$

□

**Лемма 10.** Если  $p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2 \dots \beta_n^*\alpha_n$ ,  $q \cong \lambda$  и  $E_p \prec E_q$ , где  $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ , то

$$p \cong \alpha_0\beta_1^*\alpha_1\beta_2^*\alpha_2 \dots \beta_n^*\lambda\beta_n^*\alpha_n.$$



**Доказательство.** Так как при гомоморфизме компоненты связности графа переходят в компоненты связности, то возможны два случая:  $E_{\alpha_{i-1}} \prec E_\lambda$  для некоторого  $i = 2, \dots, n$ ;  $E_{\beta_i^*} \prec E_\lambda$  для некоторого  $i = 1, \dots, n$ .

Предположим, что  $E_{\alpha_{i-1}} \prec E_\lambda$ . Тогда по лемме 4 имеем  $\alpha_{i-1} = \gamma_1 \lambda \gamma_2$ . Отсюда для  $i = 2, \dots, n$  получаем:

$$\begin{aligned} p &\cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_{i-1}^* \alpha_{i-1} \beta_i^* \dots \beta_n^* \alpha_n \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_{i-1}^* \gamma_1 \lambda \gamma_2 \beta_i^* \dots \beta_n^* \alpha_n \cong \\ &\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_{i-1}^* \gamma_1 (\lambda \gamma_2 \beta_i^*) \dots \beta_n^* \alpha_n \stackrel{13}{\cong} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_{i-1}^* \gamma_1 \lambda \gamma_2 \beta_i^* \lambda \beta_i^* \dots \beta_n^* \alpha_n \cong \\ &\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_{i-1}^* \alpha_{i-1} \beta_i^* \lambda \beta_i^* \alpha_i \beta_{i+1}^* \dots \beta_n^* \alpha_n. \end{aligned}$$

Далее по лемме 3 получаем:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_{i-1}^* \alpha_{i-1} \beta_i^* \lambda \beta_i^* \alpha_i \beta_{i+1}^* \dots \beta_n^* \alpha_n \cong \\ &\cong \alpha_0 (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{i-1} \beta_n^*)^* (\beta_n^* \lambda \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \alpha_n \stackrel{11}{\cong} \\ &\cong \alpha_0 (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* (\beta_n^* \lambda \beta_n^*)^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \alpha_n \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_n^* \lambda \beta_n^* \alpha_n. \end{aligned}$$

Для случая  $i = n + 1$  получаем:

$$\begin{aligned} p &\cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n \cong \\ &\cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \gamma_1 \lambda \gamma_2 \stackrel{13'}{\cong} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \lambda \beta_n^* \gamma_1 \lambda \gamma_2 \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \lambda \beta_n^* \alpha_n. \end{aligned}$$

Пусть теперь  $E_{\beta_i^*} \prec E_\lambda$ , тогда по лемме 9 имеем  $\beta_i^* \cong \beta_i^* \lambda \beta_i^*$ . Отсюда получаем:

$$p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_{i-1}^* \alpha_{i-1} \beta_i^* \dots \beta_n^* \alpha_n \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_{i-1}^* \alpha_{i-1} \beta_i^* \lambda \beta_i^* \alpha_i \beta_{i+1}^* \dots \beta_n^* \alpha_n.$$

Далее, используя лемму 3, получаем:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_{i-1}^* \alpha_{i-1} \beta_i^* \lambda \beta_i^* \alpha_i \beta_{i+1}^* \dots \beta_n^* \alpha_n \cong \\ &\alpha_0 (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{i-1} \beta_n^*)^* (\beta_n^* \lambda \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \alpha_n \stackrel{11}{\cong} \\ &\alpha_0 (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* (\beta_n^* \lambda \beta_n^*)^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \alpha_n \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_n^* \lambda \beta_n^* \alpha_n. \quad \square \end{aligned}$$

**Лемма 11.** Если  $p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_n^* \alpha_n$ ,  $q \cong \gamma^*$  и  $E_p \prec E_q$ , где  $\gamma \in \Lambda$ , то

$$p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \gamma^* \beta_n^* \alpha_n.$$

**Доказательство.** Так как при гомоморфизме компоненты связности графа переходят в компоненты связности, имеем  $E_{\beta_i^*} \prec E_{\gamma^*}$  для некоторого  $i = 1, \dots, n$ . Отсюда по лемме 8 получаем  $\beta^* \cong \beta^* \gamma^*$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} p &\cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_i^* \alpha_i \beta_{i+1}^* \dots \beta_n^* \alpha_n \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_i^* \gamma^* \alpha_i \beta_{i+1}^* \dots \beta_n^* \alpha_n \stackrel{2}{\cong} \\ &\cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_i^* \gamma^* \alpha_i \beta_{i+1}^* \beta_{i+1}^* \dots \beta_n^* \alpha_n \stackrel{7}{\cong} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_i^* \beta_{i+1}^* \alpha_i \gamma^* \beta_{i+1}^* \dots \beta_n^* \alpha_n \stackrel{11}{\cong} \\ &\cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_{i+1}^* \beta_i^* \alpha_i \beta_{i+1}^* \gamma^* \dots \beta_n^* \alpha_n \stackrel{7}{\cong} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_{i+1}^* \beta_{i+1}^* \alpha_i \beta_i^* \gamma^* \dots \beta_n^* \alpha_n \stackrel{2}{\cong} \\ &\cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_{i+1}^* \alpha_i \beta_i^* \gamma^* \dots \beta_n^* \alpha_n \stackrel{7}{\cong} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_i^* \alpha_i \beta_{i+1}^* \gamma^* \dots \beta_n^* \alpha_n \cong \dots \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \dots \beta_n^* \gamma^* \alpha_n. \quad \square \end{aligned}$$

**Шаг 5.** Непосредственной проверкой убеждаемся, что операции  $\circ$  и  $\nabla$  удовлетворяют тождествам 1)–10), т. е.  $\Sigma \subset Eq\{\circ, \nabla\}$ . Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что  $Eq\{\circ, \nabla\} \subset \Sigma$ .

Предположим, что тождество  $p = q$  принадлежит  $Eq\{\circ, \nabla\}$ . Согласно сформулированной ранее теореме 3 из [12] имеем  $G(p) \cong G(q)$ , т. е.  $G(p) \prec G(q)$  и  $G(q) \prec G(p)$ . Это означает, что существуют гомоморфизмы  $f_1$  из  $G(q)$  в  $G(p)$  и  $f_2$  из  $G(p)$  в  $G(q)$ . Согласно лемме 1, не нарушая общности, можно предположить, что  $p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n$  и  $q \cong \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \dots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\alpha}_m$ .



Предположим, что  $\alpha_0 \neq \odot$ . Тогда существует ребро в  $G(p)$ , выходящее из вершины  $in(p)$ . Отсюда следует, что существует ребро в  $G(q)$ , выходящее из вершины  $f_2(in(p)) = in(q)$ , значит,  $\tilde{\alpha}_0 \neq \odot$ . Аналогично,  $\tilde{\alpha}_0 \neq \odot$  влечет  $\alpha_0 \neq \odot$ .

Аналогично показываем, что  $\alpha_n \neq \odot$  влечет  $\tilde{\alpha}_m \neq \odot$  и  $\tilde{\alpha}_m \neq \odot$  влечет  $\alpha_n \neq \odot$ .

Предположим, что  $\alpha_0 \neq \odot$  и  $\tilde{\alpha}_0 \neq \odot$ . Так как  $f_1(out(q)) = f_1(out(\tilde{\alpha}_0)) = out(p) = out(\alpha_0)$  и  $f_2(out(p)) = f_2(out(\alpha_0)) = out(q) = out(\tilde{\alpha}_0)$ , то  $f_1(V_{\tilde{\alpha}_0}) \subset V_{\alpha_0}$  и  $f_2(V_{\alpha_0}) \subset V_{\tilde{\alpha}_0}$ . Отсюда по лемме 5 получаем, что  $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0$ . Аналогично показываем, что  $\alpha_n \neq \odot$  и  $\tilde{\alpha}_m \neq \odot$  влечет  $\alpha_n = \tilde{\alpha}_m$ .

Таким образом, нами показано, что  $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0$  и  $\alpha_n = \tilde{\alpha}_m$ .

Далее рассмотрим все возможные случаи значений  $m$  и  $n$ .

Пусть  $n = 0$ , т. е.  $p = \alpha_0$ . Тогда согласно структуре графа  $G(\alpha_0)$  существует путь в  $G(p)$  из  $in(p)$  в  $out(p)$ . Следовательно, существует путь в  $G(q)$  из  $f_2(in(p)) = in(q)$  в  $f_2(out(p)) = out(q)$   $G(q)$ , что возможно лишь в случае  $m = 0$ . Следовательно,  $n = 0$  влечет  $m = 0$ . Аналогично,  $m = 0$  влечет  $n = 0$ .

Пусть  $m = n = 0$ , тогда  $p = \alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = q$ . Предположим теперь, что  $n, m > 0$ . Учитывая, что  $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0$  и  $\alpha_n = \tilde{\alpha}_m$ , получаем:

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_m.$$

Так как  $G(p) \prec G(q)$ , имеем  $E_p \prec E_{\tilde{\alpha}_1}$ . Отсюда по лемме 10 получаем:

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^* \tilde{\alpha}_m.$$

Продельвая это для всех  $\tilde{\alpha}_k$  ( $k = 1, \dots, m - 1$ ), мы получим:

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^* \tilde{\alpha}_2 \dots \beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_m.$$

Аналогично, используя лемму 11, получаем:

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^* \tilde{\alpha}_2 \dots \beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_m.$$

Продельвая эти действия для всех  $\tilde{\beta}_k^*$  ( $k = 1, \dots, m$ ), имеем

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^* \tilde{\alpha}_2 \dots \beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \beta_n^* \tilde{\beta}_1^* \dots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\alpha}_m.$$

По лемме 3 мы можем представить терм  $p$  в виде

$$p \cong \tilde{\alpha}_0 (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* (\beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \beta_n^*)^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \tilde{\beta}_1^* \dots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\alpha}_m.$$

Аналогичным образом представляем терм  $q$  в следующем виде:

$$q \cong \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \dots \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_m^* \alpha_1 \tilde{\beta}_m^* \alpha_2 \dots \tilde{\beta}_m^* \alpha_{n-1} \tilde{\beta}_m^* \beta_1 \dots \beta_n^* \tilde{\alpha}_m.$$

Отсюда, используя лемму 3, получаем:

$$\begin{aligned} q &\cong \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \dots \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_m^* \alpha_1 \tilde{\beta}_m^* \alpha_2 \dots \tilde{\beta}_m^* \alpha_{n-1} \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \tilde{\alpha}_m \stackrel{2}{\cong} \\ &\cong \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \dots \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_m^* \alpha_1 \tilde{\beta}_m^* \alpha_2 \dots \tilde{\beta}_m^* \alpha_{n-1} \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \beta_n^* \tilde{\alpha}_m \stackrel{11}{\cong} \\ &\cong \tilde{\alpha}_0 \tilde{\beta}_1^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2^* \tilde{\alpha}_2 \dots \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_m^* \alpha_1 \tilde{\beta}_m^* \alpha_2 \dots \tilde{\beta}_m^* \alpha_{n-1} \beta_n^* \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \tilde{\alpha}_m \cong \\ &\cong \tilde{\alpha}_0 (\tilde{\beta}_n^* \tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_n^*)^* \dots (\tilde{\beta}_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \tilde{\beta}_n^*)^* (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \beta_n^* \tilde{\beta}_1^* \dots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \tilde{\alpha}_m \stackrel{11}{\cong} \\ &\cong \tilde{\alpha}_0 (\beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \beta_n^*)^* (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \tilde{\beta}_1^* \dots \tilde{\beta}_m^* \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \beta_n^* \tilde{\alpha}_m \stackrel{2}{\cong} \\ &\cong \tilde{\alpha}_0 (\beta_n^* \tilde{\alpha}_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \tilde{\alpha}_{m-1} \beta_n^*)^* (\beta_n^* \alpha_1 \beta_n^*)^* \dots (\beta_n^* \alpha_{n-1} \beta_n^*)^* \tilde{\beta}_1^* \dots \tilde{\beta}_m^* \beta_1^* \dots \beta_n^* \tilde{\alpha}_m. \end{aligned}$$

Таким образом, используя тождество 11), получаем  $p \cong q$ , следовательно, тождество  $p = q$  принадлежит эквациональной теории  $\Sigma$ , т. е.  $Eq\{o, \nabla\} \subset \Sigma$ . Теорема 1 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 2. Напомним, что двухполюсники  $G_o = (V_o, E_o, in_o, out_o)$  и  $G_\nabla = (V_\nabla, E_\nabla, in_\nabla, out_\nabla)$ , соответствующие операции умножения отношений  $\circ$  и операции  $\nabla$ , задаются следующим образом:  $V_o = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $E_o = \{(v_1, 1, v_2), (v_2, 2, v_3)\}$ ,  $in_o = v_1, out_o = v_3$  и  $V_\nabla = \{v_0, v_1, v_2\}$ ,  $E_\nabla = \{(v_1, 1, v_1)\}$ ,  $in_\nabla = v_0, out_\nabla = v_2$ .



Пусть  $\Theta$  — множество всех двухполюсников  $G(p)$ , где  $p \cong \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2 \dots \beta_n^* \alpha_n$  для некоторых  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$  ( $n \geq 0$ ),  $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_n^* \in \Lambda$ . Определим две операции на  $\Theta$  арности 2 и 1 как следующую композицию графов. Для заданных  $G, Q \in \Theta$ , положим  $G \cdot Q = G \circ (G, Q)$  и  $G^* = G \nabla (G)$ , где  $G \circ$  и  $G \nabla$  — двухполюсники, соответствующие операциям  $\circ$  и  $\nabla$  над отношениями.

Будем писать  $G \overset{k}{\prec} Q$  ( $k \geq 2$ ), если существует гомоморфизм  $f$  из  $Q$  в  $G$ , удовлетворяющий условию: для любой вершины  $v$  из  $G \quad |f^{-1}(v)| \leq k$ . Далее, будем писать  $G \overset{K}{\prec} Q$ , если  $G = G_1 \overset{k}{\prec} G_2 \overset{k}{\prec} \dots \overset{k}{\prec} G_n = Q$  для некоторых  $G_1, G_2, \dots, G_n \in \Theta$ , и  $G \overset{K}{\cong} Q$ , если  $G \overset{k}{\prec} Q$  и  $Q \overset{k}{\prec} G$ . Легко проверить, что отношение  $\overset{K}{\cong}$  является конгруэнтностью алгебры  $(\Theta, \cdot, *)$  и фактор-алгебра  $A_k = (\Theta, \cdot, *) / \overset{K}{\cong}$  удовлетворяет тождествам 1)–9).

Обозначим через  $Pr$  множество всех простых чисел,  $Pr[1, n] = PR \cap [1, n]$  и  $Pr(n)$  — множество всех простых делителей  $n$ .

**Лемма 12.** Если  $G(\beta^*) \overset{K}{\prec} G((\beta^l)^*)$ , то  $Pr(l) \subset Pr[1, k]$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $G(\beta^*) \overset{K}{\prec} G((\beta^l)^*)$ , т. е.

$$G(\beta^*) = G_1 \overset{k}{\prec} G_2 \overset{k}{\prec} \dots \overset{k}{\prec} G_{n-1} \overset{k}{\prec} G_n = G((\beta^l)^*)$$

для некоторых  $G_1, G_2, \dots, G_{n-1}, G_n \in \Theta$ , и  $f_i$  — соответствующий гомоморфизм из  $G_i$  в  $G_{i-1}$  ( $i = 2, \dots, n$ ).

Положим  $\tilde{G}_{n-1} = f_n(G_n), \tilde{G}_{n-2} = f_{n-1}(\tilde{G}_{n-1}), \dots, \tilde{G}_1 = f_2(\tilde{G}_2)$ .

Легко видеть, что  $G(\beta^*) \overset{k}{\prec} \tilde{G}_1 \overset{k}{\prec} \tilde{G}_2 \overset{k}{\prec} \dots \overset{k}{\prec} \tilde{G}_{n-1} \overset{k}{\prec} G_n = G((\beta^l)^*)$ . Пусть  $f$  композиция гомоморфизмов  $f_n, f_{n-1}, \dots, f_2$ . Согласно лемме 6 имеем  $f_i^{-1}(v) = k_i \leq k$  для всякой вершины  $v \in V(\tilde{G}_{i-1})$  такой, что  $v \neq in(\tilde{G}_{i-1}) = out(\tilde{G}_{i-1})$ . Отсюда следует, что  $f^{-1}(v) = k_2 k_3 \dots k_n$  для всякой вершины  $v \in V(G(\beta^*))$  такой, что  $v \neq in(G(\beta^*)) = out(G(\beta^*))$ . Таким образом, согласно лемме 6 имеем  $l = k_2 k_3 \dots k_n$ , следовательно,  $Pr(l) \subset Pr[1, k]$ .  $\square$

Пусть  $l$  — простое число такое, что  $l \notin Pr[1, k]$ . Предположим, что  $G(\beta^*) \circ G((\beta^l)^*) \overset{K}{\cong} G(\beta^*)$ , тогда  $G(\beta^*) \overset{K}{\prec} G((\beta^l)^*)$ , следовательно, по лемме 12  $l \in Pr[1, k]$ , что противоречит сделанному предположению. Таким образом, система тождеств 1)–10) не эквивалентна никакой своей подсистеме, следовательно, многообразие  $Var\{\circ, \nabla\}$  не является конечно базлируемым. Теорема 2 доказана.

### Библиографический список

1. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. № 4. С. 73–89.
2. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. Vol. 1, № 1. P. 1–62.
3. Бредихин Д. А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. АН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
4. Бредихин Д. А. О квазитожествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. матем. журн. 1997. № 38. С. 29–41.
5. Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
6. Henkin L., Monk J. D., Tarski A. Cylindric Algebras. Amsterdam, North-Holland, 1971.
7. Kuhn S. The domino relations : flattening a two-dimensional logic // J. Philosophical Logic. 1989. Vol. 18. P. 173–195.
8. Venema Y. Many-dimensional modal logic. Amsterdam, Universiteit van Amsterdam, 1989.
9. Jónsson B. Varieties of relation algebras // Algebra Univers. 1982. Vol. 54. P. 273–299.
10. Schein B. M. Representation of involuted semigroups by binary relations // Fundamenta Math. 1974. Vol. 82, № 2. P. 121–141.
11. Bredikhin D. A. On varieties of semigroups of relations with operations of cylindrification // Contributions to General Algebra. 2005. Vol. 16. P. 1–6.
12. Бредихин Д. А., Попович А. В. Тожества полугрупп отношений с операцией рефлексивной двойной цилиндрификации // Изв. вузов. Матем. 2014. № 8. С. 90–95.
13. Бредихин Д. А. Эквациональная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Матем. 1993. № 3. С. 23–30.



## On Variety of Semigroups of Relations with Operation of Reflexive Double Cylindrification

D. A. Bredikhin, A. V. Popovich

Saratov State Technical University, 77, Politehnicheskaja str., Saratov, 410054, Russia, bredikhin@mail.ru, popovich\_al@mail.ru

In the paper, the basis of identities for the variety generated by semigroups of relations with the operation of reflexive double cylindrification is found.

*Key words:* algebras of relations, varieties, basis of identities, operation of reflexive double cylindrification.

### References

1. Tarski A. On the calculus of relations. *J. Symbolic Logic*, 1941, iss. 4, pp. 73–89.
2. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups. *Semigroup Forum*, 1970, vol. 1, iss. 1, pp. 1–62.
3. Bredikhin D. A. Relation algebras with diophantine operations. *Doklady Math.*, 1998, vol. 57, no. 3, pp. 435–436.
4. Bredikhin D. A. On quasi-identities of relation algebras with diophantine operations. *Siberian Math. J.*, 1997, vol. 38, iss. 1, pp. 23–33. DOI: 10.1007/BF02674896.
5. Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations. *Contributions to general algebras*, 1991, vol. 7, pp. 50–70.
6. Henkin L., Monk J. D., Tarski A. *Cylindric Algebras*. Amsterdam, North-Holland, 1971.
7. Kuhn S. The domino relations : flattening a two-dimensional logic. *J. Philosophical Logic*, 1989, vol. 18, pp. 173–195.
8. Venema Y. *Many-dimensional modal logic*. Amsterdam, Universiteit van Amsterdam, 1989.
9. Jónsson B. Varieties of relation algebras. *Algebra Univers.*, 1982, vol. 54, pp. 273–299.
10. Schein B. M. Representation of involuted semigroups by binary relations. *Fundamenta Math.*, 1974, vol. 82, iss. 2, pp. 121–141.
11. Bredikhin D. A. On varieties of semigroups of relations with operations of cylindrification. *Contributions to General Algebra*, 2005, vol. 16, pp. 1–6.
12. Bredikhin D. A. Popovich A. V. Identities of semigroups of relations with an operator of reflexive double cylindrification. *Russian Math. [Izvestiya VUZ. Matematika]*, 2014, vol. 58, iss. 8. pp. 74–77. DOI: 10.3103/S1066369X14080106.
13. Bredikhin D. A. The equational theory of algebras of relations with positive operations. *Russian Math. [Izvestiya VUZ. Matematika]*, 1993, vol. 37, iss. 3. pp. 21–28.

УДК 519.81

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЭТАЛОНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А. А. Будаева

Кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизированной обработки информации, Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет), Владикавказ, budalina@yandex.ru

Результаты исследований задач планирования и управления показывают, что в реальной постановке эти задачи являются многокритериальными. Для эффективного решения такой задачи необходимо в первую очередь построить многокритериальную математическую модель, которую затем нужно оптимизировать, предварительно выбрав наиболее подходящий для этого метод. Предлагается подход к решению задач дискретной многокритериальной оптимизации, в основе которого лежат понятия эталона и расстояния, и рассматривается многокритериальная задача дискретной оптимизации, которая решается с помощью этого метода.

*Ключевые слова:* многокритериальные задачи, дискретная оптимизация, эталон, расстояние, вектор идеального значения целевой функции, экспертные оценки.

### ВВЕДЕНИЕ

Проблемы принятия оптимальных проектных решений, возникающие в различных областях науки и техники, часто могут быть сформулированы как задачи дискретной оптимизации. Отличительная особенность задач дискретной оптимизации состоит в наличии конечного множества допустимых решений, которые теоретически можно перебрать и выбрать наилучшее (дающее минимум или максимум целевой функции).



Для решения задач дискретного программирования разработано большое число методов, основными из которых являются метод ветвей и границ и динамическое программирование. Достоинством этих методов является получение глобально оптимального решения. Однако они предназначены для решения только однокритериальных задач.

Все задачи, реально возникающие в системах управления, по сути своей многокритериальны. Это объективно связано с тем, что в каждой экономической, производственной, транспортной системе имеется ряд участников, каждый из которых по-своему оценивает качество принимаемых решений. Кроме того, некоторые участники могут оценивать принимаемые решения по нескольким показателям. Так, при экономической оценке проекта, критериями служат экономическая эффективность, стоимость, реализуемость. При покупке оборудования мы опять сталкиваемся с несколькими критериями: стоимость, надежность, производительность и т.д. В общем виде задача дискретной многокритериальной оптимизации записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \forall i : F_i(\vec{X}) \rightarrow \max(\min), \\ \forall j : \varphi_j(\vec{X}) \leq b_j, \\ \forall k : x_k \in X_k; \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $F_i(\vec{X})$  —  $i$ -й критерий ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $\vec{X}$  — вектор переменных,  $\varphi_j(\vec{X})$  —  $j$ -е ограничение,  $X_k$  — множество значений, принимаемых  $k$ -й переменной.

Поиск решения задачи (1) не представляет особых сложностей, когда: *критерии кооперируются* (предпочтение по одному критерию влечет за собой такое же предпочтение по другому критерию); *критерии нейтральны по отношению друг к другу* (поиск решения по одному критерию никаким образом не отражается на поиске решения по другому критерию).

Основная же сложность решения многокритериальных задач состоит в том, что в большинстве случаев критерии конкурируют друг с другом: поиск более предпочтительного решения по одному критерию приводит к тому, что решение становится менее предпочтительным по другому критерию, т. е. решения несравнимы между собой.

Анализ таких ситуаций может быть осуществлен при помощи выделения области компромиссов — решений, оптимальных по Парето [1]. Вектор переменных считается Парето-оптимальным, если улучшение значений одних критериев может быть достигнуто только за счет ухудшения значений других критериев. У данного подхода есть несколько недостатков: во-первых, поиск оптимального решения ограничен областью компромиссов, которая, как правило, уже всей области допустимых решений; во-вторых, сравнительно большая мощность множества оптимальных планов может оказаться соизмеримой с мощностью множества всех допустимых планов [2].

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭТАЛОНОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Одним из основных методов решения задач дискретной оптимизации является метод типа ветвей и границ. Главным достоинством этого метода является возможность получения глобально оптимального решения. В основе метода лежит идея последовательного разбиения множества допустимых решений. На каждом шаге метода элементы разбиения (подмножества) подвергаются анализу — содержит ли данное подмножество оптимальное решение или нет. Допустимое решение, дающее наилучшую верхнюю оценку, называют рекордом. Очевидно, что для однокритериальных задач значение рекорда вычисляется однозначно. В случае же многокритериальных задач при конкурирующих критериях решения неоднозначны. Следовательно, для применения метода ветвей и границ к многокритериальным задачам требуется свести исходную задачу (1) к однокритериальной.

На сегодняшний день существуют различные способы такого преобразования, например, выделение главного критерия, переход к одному обобщенному критерию и др. [3–5]. Метод главного критерия сводится к оптимизации по одному выбранному критерию, при условии, что остальные критерии не больше (или не меньше) приемлемых значений. Метод обобщенного критерия заключается в свёртке набора критериев в числовую функцию, которая и будет являться новой целевой функцией.

Виды свёрток:

- 1) линейная свёртка:  $f = \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_n F_n$ ;
- 2) мультипликативная свёртка:  $f = F_1^{\alpha_1} * \dots * F_n^{\alpha_n}$ ;



3) приведенная свёртка:  $f = \min_i \frac{F_i}{\alpha_i}$  или  $f = \max_i \frac{F_i}{\alpha_i}$ ;

4) и др.

Основной минус указанных методов состоит в необходимости привлечения экспертов на разных этапах решения задачи, например, при выборе главного критерия или при определении весовых коэффициентов. Мнения экспертов часто противоречивы, вследствие чего решения, получаемые приведенными методами, могут оказаться неоднозначными. Применение метода эталонов, с одной стороны, позволяет получать Парето-оптимальные решения, с другой стороны — не требует экспертной оценки исходной информации. Суть метода состоит в выделении эталонного решения: наилучшего или наихудшего. Наилучший эталон будет иметь в качестве своих характеристик наилучшие значения целевых критериев задачи (1), а наихудший соответственно наихудшие значения.

Рассмотрим еще две задачи:

$$\begin{cases} \forall i : \vec{K}_i = F_i(\vec{X}) \rightarrow \max(\min), \\ \forall j : \varphi_j(\vec{X}) \leq b_j, \\ \forall k : x_k \in X_k, \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \forall i : \vec{W}_i = F_i(\vec{X}) \rightarrow \min(\max), \\ \forall j : \varphi_j(\vec{X}) \leq b_j, \\ \forall k : x_k \in X_k, \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}. \end{cases} \quad (3)$$

Решая задачи (2) и (3) применительно к каждому критерию, получаем 2 вектора: вектор наилучших значений критериев —  $\vec{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$  и вектор наихудших значений критериев —  $\vec{W} = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ .

Тогда задача (1) преобразуется в однокритериальную задачу вида

$$\begin{cases} \Delta(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n [K_i - F_i(\vec{X})]^2 \rightarrow \min, \\ \forall j : \varphi_j(\vec{X}) \leq b_j, \\ \forall k : x_k \in X_k, \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \end{cases} \quad (4)$$

с учетом близости с наилучшим эталоном или вида

$$\begin{cases} \delta(\vec{X}) = \sum_{i=1}^n [W_i - F_i(\vec{X})]^2 \rightarrow \max, \\ \forall j : \varphi_j(\vec{X}) \leq b_j, \\ \forall k : x_k \in X_k, \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \end{cases} \quad (5)$$

с учетом удаленности от наихудшего эталона. В качестве меры близости объектов воспользуемся квадратом евклидова расстояния.

Целевые функции в полученных задачах (4) и (5) нелинейны. Однако, принимая во внимание дискретность значений вектора  $\vec{X}$  для решения задач (4) и (5), можно воспользоваться методом ветвей и границ.

Таким образом, решение задачи (1) состоит из двух основных этапов: оптимизация каждой отдельной целевой функции с учетом заданных ограничений и минимизация критерия  $\Delta(\vec{X})$  (или максимизация критерия  $\delta(\vec{X})$ ).

Далее доказывается, что оптимальные решения задач (4) и (5) являются Парето-оптимальными решениями системы (1).

**Теорема.** *Оптимальное решение системы (4) является Парето-оптимальным решением системы (1).*

**Доказательство.** Обозначим через  $\vec{X}_{opt}$  оптимальный вектор переменных системы (4), т. е.

$$\Delta(\vec{X}_{opt}) = \min_{\{\vec{X}\}} \Delta(\vec{X}), \quad (6)$$

где  $\{\vec{X}\}$  — множество допустимых решений системы (4).



Докажем эту теорему методом от противного. Пусть теорема неверна, и вектор  $\vec{X}_{opt}$  не является Парето-оптимальным решением системы (1). Тогда существует Парето-оптимальный вектор переменных  $\vec{X}_1$ , множество критериев  $F$  которого можно разделить на два подмножества  $F'_1$  и  $F'_2$ , таких что:

$$\Delta_F(\vec{X}) = \Delta_{F'_1}(\vec{X}) + \Delta_{F'_2}(\vec{X}).$$

К подмножеству критериев  $F'_1$  отнесем критерии, значения которых улучшить нельзя, тогда можно записать:

$$\forall F_i \in F'_1 : F_i(\vec{X}_1) = \Delta_{F_i}(\vec{X}_{opt}) \Rightarrow \Delta_{F'_1}(\vec{X}_1) = \Delta_{F'_1}(\vec{X}_{opt}).$$

Значения критериев подмножества  $F'_2$  улучшить можно, следовательно, справедливо выражение:

$$\forall F_i \in F'_2 : F_i(\vec{X}_1) > \Delta_{F_i}(\vec{X}_{opt}) \Rightarrow \Delta_{F'_2}(\vec{X}_1) < \Delta_{F'_2}(\vec{X}_{opt}). \quad (7)$$

Выражение (7) противоречит (6). Если  $\vec{X}_{opt}$  является оптимальным среди всех допустимых решений системы (4), то выражение (7) может быть справедливо только тогда, когда вектор переменных  $\vec{X}_1$  не является допустимым (следовательно, не является Парето-оптимальным решением системы (1)), в противном случае  $\Delta_{F'_2}(\vec{X}_1) = \Delta_{F'_2}(\vec{X}_{opt})$ .

Итак, доказано, что оптимальное решение системы (4) является оптимальным по Парето решением системы (1).  $\square$

Таким же образом можно показать, что оптимальное решение системы (5) является Парето-оптимальным решением системы (1).

Аналогичный результат — оптимальность предлагаемого решения по Парето — можно получить, если воспользоваться понятием обобщенного критерия, введенного в работе [5].

Под построением обобщенного критерия в многокритериальной ЗПР понимается процедура, которая «синтезирует» набор оценок по заданным критериям (называемым в этом случае частными, или локальными, критериями), в единую численную оценку, выражающую итоговую полезность этого набора оценок для принимающего решения. Показано, что полученное отображение множества допустимых решений в  $\mathbf{R}$  является строго изотонным относительно Парето-предпочтения.

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Утверждение.** *Отображение, которое каждому решению ставит в соответствие его расстояние до эталонного решения, является обобщенным критерием.*

Из этого утверждения следует, что решение, на котором достигается минимальное значение критерия  $\Delta(\vec{X})$  (или максимальное значение критерия  $\delta(\vec{X})$ ), является Парето-оптимальным.

## ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

Проиллюстрируем на примере применение метода ветвей и границ к решению многокритериальной задачи.

Пусть дана следующая многокритериальная задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \rightarrow \max, \\ F_2 = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \rightarrow \min, \\ F_3 = 8x_1 + x_2 + 4x_3 \rightarrow \min, \\ F_4 = 9x_1 + 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \max, \\ F_5 = 6x_1 + 3x_2 + 1x_3 \rightarrow \max, \\ 10x_1 + 17x_2 + 2x_3 \leq 20, \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 \geq 5, \\ \forall i : x_i = \overline{1, 0}. \end{array} \right. \quad (8)$$

Задача (8) содержит 5 конкурирующих критериев. На первом этапе найдем глобально оптимальные решения для каждого отдельного критерия. Результат решения имеет вид

$$\begin{array}{llllll} K_1 = 7, & \vec{X}_1 = \{0, 1, 1\}; & K_2 = 7, & \vec{X}_2 = \{1, 0, 1\}; & K_3 = 1, & \vec{X}_3 = \{0, 1, 0\}; \\ & & K_4 = 11, & \vec{X}_4 = \{1, 0, 1\}; & K_5 = 3, & \vec{X}_5 = \{0, 1, 0\}. \end{array}$$



Используя полученный вектор  $\vec{K} = \{7, 7, 1, 11, 3\}$ , выполним преобразование задачи (8) к виду (4). Целевой критерий  $\Delta(\vec{X})$  после упрощений примет вид (9)

$$\Delta(\vec{X}) = 206x_1^2 + 120x_2^2 + 34x_3^2 + 246x_1x_2 + 148x_1x_3 + 100x_2x_3 - 348x_1 - 320x_2 - 128x_3 + 229 \rightarrow \min. \quad (9)$$

Решая исходную задачу (8) с одним целевым критерием (9), получим в качестве решения точку  $\vec{X} = \{0, 1, 0\}$ . Значение  $\Delta(\vec{X})$  при этом равно 29, а значения целевых критериев:  $F_1(\vec{X}) = 5$ ,  $F_2(\vec{X}) = 7$ ,  $F_3(\vec{X}) = 1$ ,  $F_4(\vec{X}) = 6$ ,  $F_5(\vec{X}) = 3$ .

Для сравнения, приведем значения оценок  $\Delta(\vec{X})$  в точках, полученных в задачах одноцелевой оптимизации:

$$\vec{X}_1 = \{0, 1, 1\}, \quad \Delta(\vec{X}_1) = 35; \quad \vec{X}_2 = \{1, 0, 1\}, \quad \Delta(\vec{X}_2) = 141; \quad \vec{X} = \{0, 1, 0\}, \quad \Delta(\vec{X}) = 29.$$

Таким образом, видно, что полученная точка является наиболее оптимальной.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный выше подход позволяет с единых позиций подойти к решению дискретных многокритериальных задач, используя при этом достоинства методов однокритериальной дискретной оптимизации. Использование при этом метода эталонов дает возможность, с одной стороны, получать Парето-оптимальные решения, с другой стороны, «естественно» переходить от поиска оптимального решения многокритериальных задач к оптимальному решению задач с одной целевой функцией без привлечения дополнительных условий [3].

## Библиографический список

1. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Физматлит, 2007.
2. Виноградская Т. М., Гафт М. Г. Точная верхняя оценка числа неподчиненных решений в многокритериальных задачах // Автоматика и телемеханика. 1974. № 9. С. 111–118.
3. Вагин В. С., Гропен В. О., Позднякова Т. А., Будаева А. А. Многокритериальное ранжирование объектов методом эталонов как инструмент оптимального управления // Устойчивое развитие горных территорий. 2010. № 1. С. 47–55.
4. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях : предпочтения и замещения. М. : Радио и связь, 1981.
5. Розен В. В. Математические модели принятия решений в экономике. М. : Высш. шк., 2002.

## Comparison Standards Method for Solving of the Multi-criterion Discrete Optimization Problems

A. A. Budaeva

North Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University), 44, Nikolaeva str., 362021, Vladikavkaz, North Ossetia-Alania, Russia, budalina@yandex.ru

Research results of management and planning problems show that in real statement these problems are multi-criterion. For effective solution to these problems it is necessary to construct multi-criterion mathematical model and then it is necessary to optimize it, beforehand selecting the most appropriate method for this purpose. Proposed approach for multi criteria discrete optimization problems is based on the concepts of measurement standards and distances. With the help of this method the multi-criterion discrete optimization problem solution is considered.

*Key words:* multi-criterion problems, discrete optimization, measurement standards, distance, ideal value vector of objective function, expert assessments.

## References

1. Podinovskii V. V., Nogin V. D. *Pareto-optimal'nye resheniia mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-optimal solutions of multicriterial problems]. Moscow, Fizmatlit, 2007 (in Russian).
2. Vinogradskaiia T. M., Gaft M. G. *Tochnaia verkhniaia otsenka chisla nepodchinennykh reshenii v mnogokriterial'nykh zadachakh*. [Exact Upper Estimate of The Number of Non-subordinate Problems in Multi-Criterion



Problems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1974, no. 9, pp. 111–118 (in Russian).

3. Vagin V. S., Gropen V. O., Pozdniakova T. A., Budaeva A. A. Mnogokriterial'noe ranzhirovanie ob"ektov metodom etalonov kak instrument optimal'nogo upravleniia. *Ustoichivoe razvitie gornykh territorii* [Sustainable Development of Mountain Territories], 2010, no 1. pp. 47–55 (in Russian).

4. Keeney R. L., Raiffa H. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1976. (Rus. ed. : Keeney R. L., Raiffa H. Priniatie reshenii pri mnogikh kriteriakh: predpochtenii i zameshcheniia. Moscow, Radio i sviaz', 1981).

5. Rosen V. V. *Matematicheskie modeli priniatiia reshenii v ekonomike*. [Mathematic decision-making models in economy]. Moscow, Vysshiaia shkola, 2002 (in Russian).

## SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE LINE WITH REGULAR SINGULARITIES

O. B. Gorbunov<sup>1</sup>, C.-T. Shieh<sup>2</sup>, V. A. Yurko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, GorbunovOB@gfm.ru, yurkova@info.sgu.ru

<sup>2</sup>Tamkang University, Taiwan, ctshieh@mail.tku.edu.tw

Non-selfadjoint second order differential systems on the line having a non-integrable regular singularity are studied. We construct special fundamental systems of solutions with prescribed analytic and asymptotic properties. Asymptotics of the corresponding Stockes multipliers is established.

*Key words:* differential systems, singularity, spectral analysis.

### INTRODUCTION

Consider the Dirac system on the line with a regular singularity:

$$BY'(x) + (Q_0(x) + Q(x))Y(x) = \lambda Y(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1)$$

where

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -q_1(x) \end{pmatrix}, \quad Q_0(x) = \frac{\mu}{x} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

here  $\mu$  is a complex number,  $q_j(x)$  are complex-valued absolutely continuous functions, and  $q'_j(x) \in L(-\infty, +\infty)$ . In this short note we construct special fundamental systems of solutions for system (1) with prescribed analytic and asymptotic properties. Behavior of the corresponding Stockes multipliers is established. These fundamental systems of solutions will be used for studying direct and inverse problems of spectral analysis by the contour integral method and by the method of spectral mappings [1, 2].

Differential equations with singularities inside the interval play an important role in various areas of mathematics as well as in applications. Moreover, a wide class of differential equations with turning points can be reduced to equations with singularities. For example, such problems appear in electronics for constructing parameters of heterogeneous electronic lines with desirable technical characteristics [3, 4]. Boundary value problems with discontinuities in an interior point appear in geophysical models for oscillations of the Earth [5]. The case when a singular point lies at the endpoint of the interval was investigated fairly completely for various classes of differential equations in [6–8] and other works. The presence of singularity inside the interval produces essential qualitative modifications in the investigation (see [9]).

Our plan is the following. In the next section we consider a model Dirac operator with the zero potential  $Q(x) \equiv 0$  and without the spectral parameter. It is important that this system is studied in the complex  $x$ -plane. We construct fundamental matrices for the model system. Using analytic continuations and symmetry we calculate directly the Stockes multipliers for the model system. Then we consider the Dirac system on the real  $x$ -line with  $Q(x) \equiv 0$  and with the complex spectral parameter, and carry over our constructions to this system. In the last section 3 we construct fundamental matrices for system (1) with necessary analytic and asymptotic properties. Asymptotic properties of the Stockes multipliers for system (1) are also established.



### 1. SYSTEMS WITHOUT SPECTRAL PARAMETERS

Let for definiteness,  $\operatorname{Re} \mu > 0$ ,  $1/2 - \mu \notin \mathbf{N}$ . Consider the model Dirac system in the complex  $x$ -plane:

$$BY'(x) + Q_0(x)Y(x) = Y(x). \tag{2}$$

Let  $x = re^{i\varphi}$ ,  $r > 0$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ,  $x^\xi = \exp(\xi(\ln r + i\varphi))$ , and  $\Pi_-$  be the  $x$ -plane with the cut  $x \leq 0$ . Let numbers  $c_{10}, c_{20}$  be such that  $c_{10}c_{20} = 1$ . Then equation (2) has the matrix solution

$$C(x) = \widehat{C}(x)H(x),$$

where

$$H(x) = \begin{pmatrix} x^{\mu_1} & 0 \\ 0 & x^{\mu_2} \end{pmatrix}, \quad \widehat{C}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \begin{pmatrix} xc_{1,2k+1} & c_{2,2k} \\ -c_{1,2k} & xc_{2,2k+1} \end{pmatrix},$$

$$c_{j,2k} = (-1)^k \frac{c_{j0}}{2^k k! \prod_{s=0}^{k-1} (2\mu_j + 1 + 2s)}, \quad c_{j,2k+1} = (-1)^k \frac{c_{j0}}{2^k k! \prod_{s=0}^k (2\mu_j + 1 + 2s)},$$

$\mu_j = (-1)^j \mu$ ,  $j = 1, 2$ . We agree that if a certain symbol denotes a matrix solution of the system, then the same symbol with one index denotes columns of the matrix, and this symbol with two indices denotes entries, for example,  $C(x) = (C_1(x), C_2(x)) = \begin{pmatrix} C_{11}(x) & C_{12}(x) \\ C_{21}(x) & C_{22}(x) \end{pmatrix}$ .

The functions  $\widehat{C}_k(x)$ ,  $k = 1, 2$ , are entire in  $x$ , and the functions  $C_k(x)$ ,  $k = 1, 2$  are regular in  $\Pi_-$ . The functions  $C_k(x)$ ,  $k = 1, 2$ , form the fundamental system of solutions for (2), and  $\det C(x) \equiv 1$ . Denote

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e^0(x) = \begin{pmatrix} ie^{ix} & -ie^{-ix} \\ e^{ix} & e^{-ix} \end{pmatrix}.$$

Note that the matrix  $e^0(x)$  is a solution of the system  $BY'(x) = Y(x)$ .

The matrix Jost-type solution  $e(x) = (e_1(x), e_2(x))$  of system (2) is constructed from the following system of integral equations:

$$e(x) = \frac{1}{d(x)} \left( I + \frac{\mu}{2x} J \right) e^0(x) \left( I - \frac{1}{2} \int_x^\infty e^{0,-1}(t) (J + \mu B) \frac{\mu}{t^2} e(t) dt \right), \tag{3}$$

where  $e^{0,-1}(t) = (e^0(t))^{-1}$ ,  $d(x) := \det \left( I - \frac{1}{2} Q_0(x) \right) = 1 - \frac{\mu^2}{4x^2}$ . One can check that if  $e(x)$  is a solution of equation (5), then  $e(x)$  satisfies system (2). The following theorem is proved in [10]. Denote  $R_1 = i$ ,  $R_2 = -i$ ,  $z_j(x) = e^{-R_j x} e_j(x)$ ,  $z_j^0(x) = e^{-R_j x} e_j^0(x)$ ,  $j = 1, 2$ .

**Theorem 1.** Equation (3) has the analytic in  $\Pi_-$  solution  $e(x) = (e_1(x), e_2(x))$  such that

- 1)  $|z_1(x) - z_1^0(x)| \leq C/|x|$  for  $|x| \geq x_0$ ,  $\arg x \in [-\pi + \delta_0, \pi]$ ;
- 2)  $|z_2(x) - z_2^0(x)| \leq C/|x|$  for  $|x| \geq x_0$ ,  $\arg x \in [-\pi, \pi - \delta_0]$ ,

where the constant  $C$  depends only on  $x_0, \delta_0, \mu$ , and  $x_0 \sin \delta_0 \geq 4\pi|\mu|(1 + |\mu|)$ .

The matrix  $e(x)$  is a fundamental matrix for system (2), and  $\det e(x) = 2i$ . For  $x \in D_+ := \{z | \arg z \in (0, \pi]\}$  the following relations hold

$$-Ke_2(-x) \equiv e_1(x), \quad KC_j(-x) \equiv (-1)^j e^{-i\pi\mu_j} C_j(x), \quad j = 1, 2.$$

In the domain  $|\arg x| \leq \pi - \delta_0$  we have two fundamental matrices; then  $e(x) = C(x)\gamma^0$  and  $C(x) = e(x)\beta^0$ ; the matrices  $\gamma^0, \beta^0$  are called the Stockes multipliers.

**Theorem 2.** For the Stockes multipliers of system (2) the following relations hold  $\det \gamma^0 = 2i$ ,  $\gamma_{11}^0 = e^{-i\pi\mu_1} \gamma_{12}^0$ ,  $\gamma_{21}^0 = -e^{-i\pi\mu_2} \gamma_{22}^0$ ,  $\gamma_{11}^0 \gamma_{21}^0 = (i \cos \pi\mu)^{-1}$ .



**Proof.** The first assertion follows from the relations  $\det e(x) = \det C(x) \det \gamma^0$ ,  $\det e(x) \equiv 2i$ ,  $\det C(x) \equiv 1$ . In order to prove the second assertion we rewrite  $e(x) = C(x)\gamma^0$  in the vector form:

$$e_1(x) = \gamma_{11}^0 C_1(x) + \gamma_{21}^0 C_2(x), \quad e_2(x) = \gamma_{12}^0 C_1(x) + \gamma_{22}^0 C_2(x).$$

Let  $x \in D_+$ . Substituting  $-x$  to the second relation and multiplying on  $(-K)$ , we get  $e_1(x) = \gamma_{12}^0 e^{-i\pi\mu_1} C_1(x) + \gamma_{22}^0 (-e^{-i\pi\mu_2}) C_2(x)$ . Therefore  $\gamma_{11}^0 = e^{-i\pi\mu_1} \gamma_{12}^0$ ,  $\gamma_{21}^0 = -e^{-i\pi\mu_2} \gamma_{22}^0$ . Since  $\det \gamma^0 = \gamma_{11}^0 \cdot (-e^{i\pi\mu_2}) \gamma_{21}^0 - e^{i\pi\mu_1} \gamma_{11}^0 \gamma_{21}^0$ , it follows that  $\gamma_{11}^0 \gamma_{21}^0 = (i \cos \pi\mu)^{-1}$ .

Theorem 2 is proved. □

**Corollary.** The following properties of the Stockes multipliers  $\beta^0$  hold:

$$\det \beta^0 = (2i)^{-1}, \quad \beta_{11}^0 = e^{-i\pi\mu_1} \beta_{21}^0, \quad \beta_{12}^0 = -e^{-i\pi\mu_2} \beta_{22}^0, \quad \beta_{21}^0 \beta_{22}^0 = (4i \cos \pi\mu)^{-1}.$$

Now we consider the system

$$BY' + Q_0(x)Y = \lambda Y \tag{4}$$

for real  $x \neq 0$  and complex  $\lambda$ . We will use a simple but important property: if  $Y(x)$  is a solution of (2), then  $Y(\lambda x)$  is a solution of (4).

Denote  $C(x, \lambda) = C(x\lambda)H(\lambda^{-1})$ ,  $e(x, \lambda) = e(x\lambda)$ . Clearly,  $C_j(x, \lambda) = x^{\mu_j} \widehat{C}_j(x, \lambda)$ , where  $\widehat{C}_j(x, \lambda) = \widehat{C}_j(x\lambda)$ ,  $e_j(x, \lambda) = e^{R_j \lambda x} z_j(x\lambda)$ ,  $j = 1, 2$ . The following theorem is obvious.

**Theorem 3.** 1)  $C(x, \lambda)$  is a fundamental matrix for system (4),  $\det C(x, \lambda) \equiv 1$ ,  $C(x, \lambda)$  is entire in  $\lambda$ , and  $|\widehat{C}(x\lambda)| \leq C$  for each  $x\lambda$  from a compact set.

2)  $e(x, \lambda)$  is a fundamental matrix for system (4),  $\det e(x, \lambda) \equiv 2i$ , and  $|z_j(x\lambda) - z_j^0| \leq C_0 |x\lambda|^{-1}$  for  $|x\lambda| \geq x_0$ ,  $\arg(x\lambda) \in [-\pi + \delta_0, \pi]$  for  $j = 1$ ,  $\arg(x\lambda) \in [-\pi, \pi - \delta_0]$  for  $j = 2$ , where  $C_0$  depends only on  $x_0, \mu, \delta_0$ , and  $x_0 \sin \delta_0 \geq 4\pi|\mu|(1 + |\mu|)$ .

3) Let  $e(x, \lambda) = C(x, \lambda)\gamma^0(\lambda)$  and  $C(x, \lambda) = e(x, \lambda)\beta^0(\lambda)$ . Then

$$\gamma_{jk}^0(\lambda) = \lambda^{\mu_j} \gamma_{jk}^0, \quad \beta_{kj}^0(\lambda) = \lambda^{-\mu_j} \beta_{kj}^0, \quad k, j = 1, 2.$$

## 2. SYSTEMS WITH THE SPECTRAL PARAMETER

Now we consider system (1) and assume that

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^{-2 \operatorname{Re} \mu} |Q(x)| dx + \int_{|x| \geq 1} |Q(x)| dx < \infty.$$

In this section we construct fundamental matrices for system (1) and establish properties of their Stockes multipliers. The following assertion is proved by the well-known method (see, for example, [1, 2]).

**Theorem 4.** System (1) has a fundamental system of solutions  $S_j(x, \lambda) = x^{\mu_j} \widehat{S}_j(x, \lambda)$ ,  $j = 1, 2$ , where the functions  $\widehat{S}_j(x, \lambda)$  are solutions of the integral Volterra equations (5):

$$\widehat{S}_j(x, \lambda) = \widehat{C}_j(x, \lambda) + \int_0^x C(x, \lambda) C^{-1}(t, \lambda) \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu_j} BQ(t) \widehat{S}_j(t, \lambda) dt, \quad j = 1, 2. \tag{5}$$

The functions  $S_j(x, \lambda)$  are entire in  $\lambda$ , and  $|\widehat{S}_j(x, \lambda)| \leq C$  on compact sets.

Let us now construct the Birkhoff-type fundamental system of solutions for system (1). For definiteness, we confine ourselves to the case  $x > 0$ . In section 2 we constructed the solution  $e(x, \lambda)$  of equation (4) for  $|x\lambda| \geq x_0$ ,  $|\arg \lambda| \leq \pi - \delta_0$ , where  $x_0 > 0$ ,  $\delta_0 > 0$  are such that  $x_0 \sin \delta_0 \geq 4\pi|\mu|(1 + |\mu|)$ . The Stockes multipliers allow one to extend this solution by  $e(x, \lambda) = C(x, \lambda)\gamma^0(\lambda)$  on  $\Pi_-$  and  $x \neq 0$ . Denote

$$F(x\lambda) = \begin{pmatrix} F_1(x\lambda) & 0 \\ 0 & F_2(x\lambda) \end{pmatrix}, \quad F_j(x\lambda) = \begin{cases} (x\lambda)^{-\mu} & \text{for } |x\lambda| < 2|\mu|, \\ e^{R_j \lambda x} & \text{for } |x\lambda| \geq 2|\mu|. \end{cases}$$

Let  $U^0(x, \lambda) = (U_1^0(x, \lambda), U_2^0(x, \lambda)) := e(x, \lambda)F^{-1}(x\lambda)$ . It is easy to check that  $|U^0(x, \lambda)| \leq C$  for  $x > 0$ ,  $|\arg \lambda| \leq \pi/2$ . The Birkhoff-type solutions  $E_j(x, \lambda)$ ,  $j = 1, 2$ , of system (1) is constructed from the following systems of integral equations:



1) for  $x \leq a_\lambda := 2|\mu|/|\lambda|$

$$E_1(x, \lambda) = e_1(x, \lambda) + e(x, \lambda) \left( I_1 \int_0^x e^{-1}(t, \lambda) BQ(t) E_1(t, \lambda) dt - I_2 \int_x^{a_\lambda} e^{-1}(t, \lambda) BQ(t) E_1(t, \lambda) dt - \frac{1}{2} I_2 e^{-1}(a_\lambda, \lambda) Q^{-1}(a_\lambda, \lambda) Q(a_\lambda) E_1(a_\lambda, \lambda) \right), \quad (6)$$

$$E_2(x, \lambda) = e_2(x, \lambda) + e(x, \lambda) \int_0^x e^{-1}(t, \lambda) BQ(t) E_2(t, \lambda) dt; \quad (7)$$

2) for  $x \geq a_\lambda$

$$E_1(x, \lambda) = e_1(x, \lambda) - \frac{1}{2} Q^{-1}(x, \lambda) Q(x) E_1(x, \lambda) + e(x, \lambda) \left( I_1 \int_0^{a_\lambda} e^{-1}(t, \lambda) BQ(t) E_1(t, \lambda) dt + \frac{1}{2} I_1 \int_{a_\lambda}^x e^{-1}(t, \lambda) L(t, \lambda) E_1(t, \lambda) dt - \frac{1}{2} I_2 \int_x^\infty e^{-1}(t, \lambda) L(t, \lambda) E_1(t, \lambda) dt + \frac{1}{2} I_1 e^{-1}(a_\lambda, \lambda) Q^{-1}(a_\lambda, \lambda) Q(a_\lambda) E_1(a_\lambda, \lambda) \right), \quad (8)$$

$$E_2(x, \lambda) = e_2(x, \lambda) - \frac{1}{2} Q^{-1}(x, \lambda) Q(x) E_2(x, \lambda) + e(x, \lambda) \left( \int_0^{a_\lambda} e^{-1}(t, \lambda) BQ(t) E_2(t, \lambda) dt + \frac{1}{2} \int_{a_\lambda}^x e^{-1}(t, \lambda) L(t, \lambda) E_2(t, \lambda) dt + \frac{1}{2} e^{-1}(a_\lambda, \lambda) Q^{-1}(a_\lambda, \lambda) Q(a_\lambda) E_2(a_\lambda, \lambda) \right), \quad (9)$$

where  $I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $Q(x, \lambda) = Q_0(x) - \lambda I$ ,

$$L(t, \lambda) = \left( Q^{-1}(t, \lambda) Q(t) \right)' + Q^{-1}(t, \lambda) \left( Q(t) BQ(t) + Q(t) BQ(t, \lambda) + Q(t, \lambda) BQ(t) \right).$$

One can check that if  $E_j(x, \lambda)$ ,  $j = 1, 2$  are solutions of these systems, then they are solutions of system (1). Denote  $U(x, \lambda) = (U_1(x, \lambda), U_2(x, \lambda)) := E(x, \lambda) F^{-1}(x, \lambda)$ , where  $E(x, \lambda) = (E_1(x, \lambda), E_2(x, \lambda))$ . The following two theorems are proved by similar arguments as in [7].

**Theorem 5.** *Systems (6)–(7) and (8)–(9) have solutions  $E_j(x, \lambda)$ ,  $j = 1, 2$  for  $x > 0$  and  $\lambda \in \{\lambda : |\lambda| \geq \lambda_0, \arg \lambda \in (0, \pi/2]\}$ , and  $|U_j(x, \lambda) - U_j^0(x, \lambda)| \leq M/|\lambda|^\nu$ , where the constant  $M$  depends on  $\mu$ ,  $Q(x)$ ,  $Q'(x)$ .*

Since  $E(x, \lambda)$  and  $S(x, \lambda)$  are fundamental matrices of system (1), it follows that  $E(x, \lambda) = S(x, \lambda) \gamma(\lambda)$  and  $S(x, \lambda) = E(x, \lambda) \beta(\lambda)$ ; the matrices  $\gamma(\lambda)$  and  $\beta(\lambda)$  are called the Stokes multipliers.

**Theorem 6.** *The following relations hold:*

1)  $\gamma_{j2}(\lambda) = \lambda^{\mu_j} \gamma_{j2}^0$ ,  $j = 1, 2$ ;

2)  $\gamma_{j1}(\lambda) = \lambda^{\mu_j} \gamma_{j1}^0 (1 + O(|\lambda|^{-\nu}))$  for  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $j = 1, 2$ ,

where  $\gamma_{ij}^0$  are the Stokes multipliers from  $e(x) = C(x) \gamma^0$ .

**Corollary.**  $|\beta_{kj}(\lambda) - \beta_{kj}^0 \cdot \lambda^{-\mu_j}| \leq C|x\lambda|^{-\nu}$ ,  $k, j = 1, 2$ .

*The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.1436.2014K) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00134).*

## References

1. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. New York, Ungar, 1967, pt. I; 1968, pt. II. *Heterogenous Lines and their Applications in Radio Engineering*. Moscow, Radio, 1964 (in Russian).
2. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*. Inverse and Ill-posed Problems Series, Utrecht, VSP, 2002.
3. Litvinenko O. N., Soshnikov V. I. *The Theory of*
4. Freiling G., Yurko V. A. Reconstructing parameters of a medium from incomplete spectral information. *Results Math.*, 1999, vol. 35, iss. 3–4, pp. 228–249. DOI: 10.1007/BF03322815.



5. Lapwood F. R., Usami T. *Free Oscillations of the Earth*. Cambridge, Cambridge University Press, 1981.
6. Gasymov M. G. Determination of Sturm–Liouville equation with a singular point from two spectra. *Sov. Math. Dokl.*, 1965, vol. 6, pp. 396–399.
7. Yurko V. A. Inverse problem for differential equations with a singularity. *Differ. Equations*, 1992, vol. 28, pp. 1100–1107.
8. Yurko V. A. On higher-order differential operators with a regular singularity. *Sb. Math.*, 1995, vol. 186, no. 6, pp. 901–928. DOI: 10.1070/SM1995v186n06ABEH000048.
9. Yurko V. A. Integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval. *Integral Transforms and Special Functions*, 1997, vol. 5, no. 3–4, pp. 309–322.
10. Gorbunov O., Shieh C.-T., Yurko V. Spectral analysis of the Dirac system with a singularity in an interior point. arXiv:1410.2020v1 [math.SP], 17 p.

УДК 517.984

## Системы дифференциальных уравнений на оси с регулярными особенностями

О. Б. Горбунов<sup>1</sup>, Ч.-Т. Шие<sup>2</sup>, В. А. Юрко<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, GorbunovOB@gfm.ru

<sup>2</sup>Профессор, Тамканский университет, г. Тайбэй, Тайвань, ctshieh@mail.tku.edu.tw

<sup>3</sup>Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, yurkova@info.sgu.ru

Исследуются несамосопряженные дифференциальные системы второго порядка на оси с неинтегрируемой регулярной особенностью. Построены специальные фундаментальные системы решений с указанными аналитическими и асимптотическими свойствами. Получена асимптотика соответствующих множителей Стокса.

*Ключевые слова:* дифференциальные системы, сингулярность, спектральный анализ.

*Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1436.2014К) и при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00134).*

### Библиографический список

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.
2. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002.
3. Литвиненко О. Н., Сошников В. И. Неоднородные линии и их приложения в радиотехнике. М. : Радио, 1964.
4. Freiling G., Yurko V. A. Reconstructing parameters of a medium from incomplete spectral information // Results. Math. 1999. Vol. 35. P. 228–249.
5. Lapwood F. R., Usami T. *Free Oscillations of the Earth*. Cambridge : Cambridge University Press, 1981.
6. Гасымов М. Г. Определение уравнения Штурма–Лиувилля с особенностью по двум спектрам // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. С. 274–276.
7. Юрко В. А. Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностью // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. 1355–1362.
8. Юрко В. А. О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью // Матем. сб. 1995. Т. 186, № 6. С. 133–160.
9. Yurko V. A. Integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval // Integral Transforms and Special Functions. 1997. Vol. 5, № 3–4. P. 309–322.
10. Gorbunov O., Shieh C.-T., Yurko V. Spectral analysis of the Dirac system with a singularity in an interior point. arXiv:1410.2020v1 [math.SP]. 17 p.

УДК 517.9

## О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ И МАТРИЦАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Ю. Дуплищева

Аспирантка кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, dupl\_ayu@mail.ru

Изучаются дифференциальные операторы второго порядка. Приводятся условия их обратимости. Основные результаты получены на основе сопоставления исследуемому оператору операторной матрицы второго порядка.

*Ключевые слова:* дифференциальный оператор, обратимый оператор, ядро оператора, образ оператора.



**ВВЕДЕНИЕ**

Пусть  $X$  — комплексное банахово пространство,  $\text{End } X$  — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в  $X$  с нормой  $\|B\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Bx\|$ ,  $x \in X$ ,  $B \in \text{End } X$ . Линейный замкнутый оператор  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  называется обратимым, если его ядро  $\text{Ker } A = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$  нулевое и образ  $\text{Im } A = \{Ax, x \in D(A)\}$  оператора  $A$  совпадает со всем пространством  $X$ .

Далее введем в рассмотрение следующие пространства:

$C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$  — банахово пространство непрерывных и ограниченных на промежутке  $\mathbb{R}$  функций со значениями в банаховом пространстве  $X$ ;

$L_p = L_p(\mathbb{R}, X)$ ,  $p \in [1, \infty)$  — банахово пространство суммируемых со степенью  $p \in [1, \infty)$  на промежутке  $\mathbb{R}$  классов функций со значениями в банаховом пространстве  $X$  и нормой  $\|x\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p dt \right)^{1/p}$ ;

$L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}, X)$  — банахово пространство существенно ограниченных на промежутке  $\mathbb{R}$  классов функций со значениями в банаховом пространстве  $X$  и нормой  $\|x\|_\infty = \text{vrai sup}_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$ ;

$C^l(\mathbb{R}) = C^l(\mathbb{R}, X)$  — банахово пространство  $l$  раз непрерывно дифференцируемых функций на  $\mathbb{R}$  со значениями в банаховом пространстве  $X$ , у которых ограничены все производные порядка  $l$  и ниже, с нормой  $\|x\|_{C^l} = \sum_{|k| \leq l} \|x^{(k)}\|_{C_b}$ ;

$W_p^l(\mathbb{R}) = W_p^l(\mathbb{R}, X)$  — пространство Соболева,  $W_p^l(\mathbb{R}) = \{x \in C^{l-1}(\mathbb{R}) : x^{(l-1)}$  — абсолютно непрерывна,  $x^{(l)} \in L_p(\mathbb{R})\}$ . Норма функции  $f \in W_p^l(\mathbb{R})$  определяется при помощи равенства  $\|f\|_{W_p^l(\mathbb{R})} = \sum_{|k| \leq l} \|f^{(k)}\|_{L_p(\mathbb{R})}$ .

Рассмотрим в пространстве  $L_p$  дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} + B_1(t)\dot{x} + B_2(t)x = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in W_p^2, \quad p \in [1, \infty], \quad f \in L_\infty(\mathbb{R}, X), \quad (1)$$

где  $B_i \in L_\infty(\mathbb{R}, \text{End } X)$ ,  $i = 1, 2$ .

Далее путем замены

$$y_1(t) = x(t), \quad y_2(t) = \dot{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

дифференциальное уравнение вида (1) сводится к уравнению вида

$$\dot{y} + \mathbb{B}(t)y = \tilde{f}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in W_p^1(\mathbb{R}, X \times X), \quad p \in [1, \infty], \quad \tilde{f} \in L_\infty(\mathbb{R}, X \times X), \quad (3)$$

где функция  $\mathbb{B} \in L_\infty(\mathbb{R}, \text{End } (X \times X))$  имеет вид

$$(\mathbb{B}y)(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(t) & B_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Из способа задания уравнения (3) по уравнению (1) следует

**Теорема 1.** *Функция  $x \in L_p$  является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда  $y \in L_p(\mathbb{R}, X \times X)$ , построенная по правилу (2), является решением уравнения (3).*

Используя операторный подход, уравнение (1) запишем в виде

$$\mathcal{D}x = f,$$

где оператор  $\mathcal{D} \in W_p^2(\mathbb{R}, X) \subset L_p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, X)$  определяется формулой

$$\mathcal{D}x = \ddot{x} + \tilde{B}_1\dot{x} + \tilde{B}_2x.$$

Операторы  $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in \text{End } W_p^2$  есть операторы умножения в  $W_p^2$  на операторные функции  $B_1, B_2 : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } X$  соответственно, т. е.

$$(\tilde{B}_k x)(t) = B_k(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in W_p^2.$$



Уравнение (3) также запишем в операторном виде:

$$\mathbb{D}y = \tilde{f},$$

где  $\mathbb{D} \in W_p^1 \times W_p^1 \subset \tilde{L}_p \rightarrow \tilde{L}_p = L_p(\mathbb{R}, X) \times L_p(\mathbb{R}, X)$  представим в виде  $\mathbb{D}y = \dot{y} + \mathbb{B}y$ , где  $\dot{y} = (y_1, y_2)$ , если  $y = (y_1, y_2) \in W_p^1(\mathbb{R}, X \times X)$ , и оператор  $\mathbb{B} \in \text{End } L_p(\mathbb{R}, X \times X)$  определяется равенствами:

$$(\mathbb{B}x)(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(t) & B_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Естественным образом возникает вопрос об одновременной обратимости операторов  $\mathcal{D}$  и  $\mathbb{D}$ . Следующая теорема является одним из основных результатов статьи.

**Теорема 2.** *Оператор  $\mathcal{D} \in W_p^2(\mathbb{R}, X) \subset L_p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, X)$  обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор  $\mathbb{D} \in W_p^1 \times W_p^1 \subset \tilde{L}_p \rightarrow \tilde{L}_p = L_p(\mathbb{R}, X) \times L_p(\mathbb{R}, X)$ .*

Для линейных операторов и, более того, для линейных отношений в статьях [1–5] было введено понятие состояний обратимости, которое характеризует определенные свойства ядер и образов линейных операторов (их размерность, дополняемость и т. д.). В данном случае, следуя указанным статьям, можно также доказать (получить) совпадение множества состояний обратимости рассматриваемых операторов.

## 1. АБСТРАКТНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть  $\mathcal{X}$  — банахово пространство. Рассмотрим более общую задачу:  $A : D(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  — линейный замкнутый оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве  $\mathcal{X}$ ,  $C_1, C_2$  — операторы из алгебры  $\text{End } \mathcal{X}$ . По ним построим оператор вида

$$\mathcal{A} = A^2 + C_1A + C_2 : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X},$$

где  $D(\mathcal{A}) = D(A^2) = \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}$ .

Наряду с оператором  $\mathcal{A}$  рассмотрим оператор  $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ , заданный в  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  матрицей  $\begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}$ , т. е.  $\mathbb{A}x = (Ax_1 - x_2, C_2x_1 + Ax_2 + C_1x_2)$ , где  $x = (x_1, x_2) \in D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A) \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ .

В дальнейшем, как правило, для задания оператора  $\mathbb{A}$  будем использовать запись

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ C_2x_1 + Ax_2 + C_1x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A}).$$

Отметим, что верна следующая

**Теорема 3.** *Оператор  $\mathcal{A}$  обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор  $\mathbb{A}$ .*

Обратимся сначала к доказательству инъективности операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{A}$ .

**Лемма 1.** *Ядра операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{A}$  изоморфны, причем изоморфизм осуществляет оператор*

$$J : \text{Ker } \mathcal{A} \rightarrow \text{Ker } \mathbb{A}, \quad Jx = (x, Ax), \quad x \in \text{Ker } \mathcal{A}.$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in \text{Ker } \mathcal{A}$ . Поскольку  $\mathbb{A}(x, Ax) = (0, \mathcal{A}x) = (0, 0)$ , то  $(x, Ax) \in \text{Ker } \mathbb{A}$ , т. е. оператор  $J$  определен корректно. Очевидно, что он инъективен. Установим его сюръективность. Пусть  $(x_1, x_2) \in \text{Ker } \mathbb{A}$ . Тогда  $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 - x_2, C_2x_1 + Ax_2 + C_1x_2) = (0, 0)$ . Таким образом,  $x_2 = Ax_1$ . Поэтому  $\mathcal{A}x_1 = C_2x_1 + A^2x_1 + C_1Ax_1 = 0$  и, следовательно,  $Jx_1 = (x_1, x_2) = (x_1, Ax_1)$ ,  $x_1 \in \text{Ker } \mathcal{A}$ .  $\square$

В следующей лемме используется другой подход, основанный на использовании сопряженных к  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{A}$  операторов. Сопряженный к  $\mathcal{A}$  оператор  $A^*$  имеет вид

$$\mathcal{A}^* = (A^*)^2 + (A^*B_1^* + B_2^*) : D(\mathcal{A}^*) \subset \mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X}^*,$$



где  $D(\mathcal{A}^*) = D((A^*)^2) = \{x \in D(A^*) : A^*x \in D(A^*)\}$ . Для описания сопряженного оператора к  $\mathbb{A}$  сопряженное  $(\mathcal{X} \times \mathcal{X})^*$  к  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  пространство канонически отождествляется с пространством  $\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*$   $((\xi_1, \xi_2)(x_1, x_2) = \xi_1(x_1) + \xi_2(x_2), (x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}, (\xi_1, \xi_2) = \xi \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*)$ . Сопряженный к  $\mathbb{A}$  оператор  $\mathbb{A}^* \in \text{End}(\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}^*)$  определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} A^* & B_2^* \\ -I & A^* + B_1^* \end{pmatrix}.$$

**Лемма 2.** Ядра  $\text{Ker } \mathcal{A}^*$ ,  $\text{Ker } \mathbb{A}^*$  операторов  $\mathcal{A}^*$ ,  $\mathbb{A}^*$  изоморфны. Изоморфизм осуществляет оператор

$$J_1 : \text{Ker } \mathcal{A}^* \rightarrow \text{Ker } \mathbb{A}^*, \quad J_1 \xi = ((A + B_1)\xi, \xi), \quad \xi \in \text{Ker } \mathcal{A}^*.$$

**Доказательство.** Пусть  $\xi \in \text{Ker } \mathcal{A}^*$ . Поскольку  $\mathbb{A}^*((A^* + B_1^*)\xi, \xi) = (0, 0)$ , то  $J_1 \xi \in \text{Ker } \mathbb{A}^*$ . Таким образом, оператор  $J_1$  корректно определен. Поскольку оператор  $J_1$  инъективен, то осталось доказать его сюръективность. Пусть  $(\xi_1, \xi_2) \in \text{Ker } \mathbb{A}^*$ , и поэтому

$$\mathbb{A}^*(\xi_1, \xi_2) = (A^*\xi_1 + B_2^*\xi_2, -\xi_1 + (A^* + B_1^*)\xi_2) = (0, 0).$$

Следовательно,  $\xi_1 = (A^* + B_1^*)\xi_2$  и  $\mathcal{A}^*\xi_2 = 0$ , т.е.  $\xi_2 \in \text{Ker } \mathcal{A}^*$ . Из этих равенств получаем, что  $J_1 \xi_1 = (\xi_1, \xi_2) = ((A^* + B_1^*)\xi_1, \xi_1)$ .  $\square$

В двух следующих леммах отражены вспомогательные утверждения для доказательства одновременной замкнутости образа рассматриваемых операторов.

**Лемма 3.** Произвольный элемент  $z \in \mathcal{X}$  принадлежит образу оператора  $\mathcal{A}$  тогда и только тогда, когда пара  $(0, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  принадлежит образу оператора  $\mathbb{A}$ .

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть  $z \in \text{Im } \mathcal{A}$ , т.е. найдется элемент  $x \in \mathcal{X}$  такой, что  $z = \mathcal{A}x = (A^2 + C_1A + C_2)x$ . Имеют место равенства:

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax - Ax \\ C_2x + (A + C_1)Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Следовательно, устанавливаем, что пара  $(0, z)$  принадлежит образу оператора  $\mathbb{A}$ .

*Достаточность.* Предположим теперь, что пара  $(0, z) \in \text{Im } \mathbb{A}$ . Тогда найдется пара  $(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  такая, что

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ C_2x_1 + (A + C_1)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Откуда ясно, что  $\mathcal{A}x_1 = z$ , т.е.  $z$  принадлежит образу оператора  $\mathbb{A}$ .  $\square$

**Лемма 4.** Пара  $(y_1, y_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  принадлежит образу оператора  $\mathbb{A}$  тогда и только тогда, когда вектор  $y_2 + (A + C_1)y_1$  принадлежит образу оператора  $\mathcal{A}$ .

**Доказательство.** *Необходимость.* Рассмотрим произвольную пару  $(y_1, y_2)$  из образа оператора  $\mathbb{A}$ . Тогда найдется такая пара  $(x_1, x_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ , что выполнены равенства:

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ C_2x_1 + (A + C_1)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $x_2 = Ax_1 - y_1$ , и поэтому  $\mathcal{A}x_1 = y_2 + (A + C_1)y_1$ , т.е. образ оператора  $\mathcal{A}$  представим в требуемом виде.

*Достаточность.* Пусть пара  $(y_1, y_2)$  такова, что  $y_2 + (A + C_1)y_1$  принадлежит образу оператора  $\mathcal{A}$ , т.е. найдется некоторый элемент  $x \in \mathcal{X}$ , что выполняется равенство:  $\mathcal{A}x = y_2 + (A + C_1)y_1$ . Докажем, что пара  $(y_1, y_2)$  принадлежит образу оператора  $\mathbb{A}$ , т.е. найдется такая пара  $(x_1, x_2)$  из



пространства  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ , что  $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ . В качестве пары  $(x_1, x_2)$  возьмем пару  $(x, Ax - y_1)$  из пространства  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ . Рассмотрим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \begin{pmatrix} x \\ Ax - y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Ax - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax - Ax + y_1 \\ C_2x + (A + C_1)(Ax - y_1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ \mathcal{A}x - (A + C_1)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + (A + C_1)y_1 - (A + C_1)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Обратимся теперь к доказательству одновременной замкнутости операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{A}$ .

**Лемма 5.** *Образ оператора  $\mathcal{A}$  замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ оператора  $\mathbb{A}$ .*

**Доказательство.** *Необходимость.* Для доказательства, воспользуемся результатами леммы 3 и леммы 4. Пусть образ оператора  $\mathcal{A}$  замкнут. Рассмотрим последовательность  $(u_n, v_n)$ ,  $n \geq 1$ , принадлежащую образу оператора  $\mathbb{A}$  и сходящуюся к элементу  $(u_0, v_0)$  из пространства  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ . Покажем, что  $(u_0, v_0)$  принадлежит образу оператора  $\mathbb{A}$ . В силу леммы 4 последовательность  $v_n + (A + C_1)u_n$  принадлежит образу оператора  $\mathcal{A}$ . В силу замкнутости образа оператора  $\mathcal{A}$  и сходимости  $(u_n, v_n) \rightarrow (u_0, v_0)$  получаем, что  $v_0 + (A + C_1)u_0$  принадлежит образу оператора  $\mathcal{A}$ . Используя вновь результаты леммы 4, устанавливаем, что пара  $(u_0, v_0)$  принадлежит образу оператора  $\mathbb{A}$ , что и доказывает замкнутость образа оператора  $\mathbb{A}$ .

*Достаточность.* Предположим, что образ оператора  $\mathbb{A}$  — замкнутое подпространство из  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ . Докажем замкнутость образа оператора  $\mathcal{A}$ . Пусть произвольная последовательность  $z_n = \mathcal{A}x_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $x_n \in \mathcal{X}$  сходится к  $z_0 \in \mathcal{X}$ . Тогда пара  $(0, z_n)$  принадлежит образу оператора  $\mathbb{A}$  и сходится к элементу  $(0, z_0)$ , принадлежащему образу оператора  $\mathbb{A}$ . В силу леммы 3 ясно, что  $z_0$  принадлежит образу оператора  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Лемма 6.** *Операторы  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{A}$  одновременно обратимы.*

**Доказательство.** Из сюръективности одного из операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{A}$ , из леммы 5 следует замкнутость образа второго. Докажем, что он сюръективен. Для любого линейного подпространства  $M$  из  $\mathcal{X}$  символом  $M^\perp$  обозначим (замкнутое) подпространство из  $\mathcal{X}^*$  вида:  $\{\xi \in \mathcal{X}^* : \xi(x) = 0 \text{ для любого } x \in M\}$ . Следовательно, из равенств [6, теорема 4.12]

$$(\text{Im } \mathbb{A})^\perp = \text{Ker } \mathbb{A}^*, \quad (\text{Im } \mathcal{A})^\perp = \text{Ker } \mathcal{A}^*$$

следует сюръективность другого оператора.  $\square$

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

В силу одновременной инъективности и сюръективности операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathbb{A}$  верно утверждение об их одновременной обратимости, сформулированное в теореме 3. Кроме того, если оператор  $\mathcal{A}$  обратим, то непосредственной проверкой убеждаемся в том, что обратный к оператору  $\mathbb{A}$  определяется матрицей:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{-1}(A + C_1) & \mathcal{A}^{-1} \\ A\mathcal{A}^{-1}(A + C_1) - I & A\mathcal{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

## 3. ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим оператор  $\mathcal{L}_p : W_p^2(\mathbb{R}, X) \subset L_p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, X)$ ,  $\mathcal{L}_p x = \ddot{x} + A(t)\dot{x} + B(t)x$ ,  $x \in W_p^2$ ,  $p \in [1, \infty]$ , и поставим ему в соответствие оператор

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}_p = \frac{d}{dt} - \tilde{A} : W_p^1 \times W_p^1 \subset \tilde{L}_p \rightarrow \tilde{L}_p = L_p(\mathbb{R}, X) \times L_p(\mathbb{R}, X),$$

где операторнозначная функция  $\tilde{A} : \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(X \times X)$  задаётся с помощью матричной функции:

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ A(t) & B(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



**Теорема 4.** Операторы  $\mathcal{L}_p : W_p^2 \subset L_p \rightarrow L_p$ ,  $\widetilde{\mathcal{L}}_p : W_p^1 \times W_p^1 \subset L_p \times L_p \rightarrow L_p \times L_p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , обратимы одновременно.

В частном случае, когда  $X$  — конечномерное пространство, а операторнозначные функции  $A$  и  $B$  почти периодичны, утверждение теоремы 4 приведено в монографии [7].

Отмечу вышедшую из печати статью [8], в которой в качестве оператора  $A$  рассматривается оператор сдвига в пространстве двусторонних ограниченных последовательностей векторов. В отличие от данной статьи удается рассмотреть значительно большее число свойств разностного оператора. При этом существенно использовались результаты статьи [9].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00378, № 14-01-31196).*

### Библиографический список

1. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1. С. 77–128. DOI: 10.4213/гм9505.
2. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, № 2. С. 3–68. DOI: 10.4213/im2643.
3. Диденко В. Б. О непрерывной обратимости и фредгольмовости дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями // Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77, № 1. С. 5–22. DOI: 10.4213/im7800.
4. Диденко В. Б. О состояниях обратимости линейных дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 5–22.
5. Дуплищева А. Ю. Матрицы второго порядка в исследовании операторных уравнений // Научные ведомости БелГУ. Матем., физ. 2014. Вып. 34, № 5(176). С. 12–16.
6. Рудин У. Функциональный анализ. М. : Мир, 1975. 449 с.
7. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. М. : Наука, 1970. 352 с.
8. Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, № 2. С. 3–20.
9. Баскаков А. Г. Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченными полугрупп операторов на банаховом пространстве // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190. DOI: 10.4213/mzm10285.

## About Differential Operators and Matrices of the Second Order

A. Yu. Duplishcheva

Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 304006, Voronezh, Russia, dupl\_ayu@mail.ru

Differential operators of the second order are studied. Conditions of their invertibility are obtained. The main results are obtained on the comparison of the operator matrix of the second order with the researching operator.

**Key words:** differential operator, invertible operator, kernel of the operator, image of the operator.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-00378, no. 14-01-31196).*

### References

1. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russ. Math. Surv.* [UMN], 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: 10.1070/RM2013v068n01ABEH004822.
2. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators with unbounded operatorvalued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations. *Izv. Math.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 215–278. DOI: 10.1070/IM2009v073n02ABEH002445.
3. Didenko V. B. On the continuous invertibility and the Fredholm property of differential operators with multivalued impulse effects. *Izv. Math.*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 3–19. DOI: 10.1070/IM2013v077n01ABEH002626.
4. Didenko V. B. About reversibility states of linear differential operators with periodic unbounded operator coefficients. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 2, pp. 5–22 (in Russian).
5. Duplishcheva A. Yu. Second order matrices at the researching of operator equations. *Nauchniye vedomosti BelGU. Matem., phis.* [Belgorod State University Scienti-



fic Bulletin. Mathematics & Physics], 2014, iss. 34, no. 5(176), pp. 12–16 (in Russian).

6. Rudin U. *Functional analysis*. McGraw-Hill, 1973, 424 p. (Rus. ed. : Rudin U. *Functional analysis*. Moscow, Mir, 1975, 449 p.)

7. Krasnoselsky M. A., Burd V. Sh., Kolesov Yu. S. *Nelineyniye pochty periodicheskiye kolebaniya* [Nonlinear almost periodic fluctuations]. Moscow, Nauka, 1970, 352 p. (in Russian).

8. Baskakov A. G., Duplishcheva A. Yu. Difference operators and operator matrices of the second order. *Izv. RAN. Ser. Matem.*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 3–20 (in Russian).

9. Baskakov A. G. Harmonic and Spectral Analysis of Power Bounded Operators and Bounded Semigroups of Operators on Banach Spaces. *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. DOI: 10.1134/S0001434615010198.

УДК 511.3

## ОБОБЩЁННЫЕ ХАРАКТЕРЫ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ И АНАЛОГ ГИПОТЕЗЫ Н. Г. ЧУДАКОВА

В. А. Матвеев<sup>1</sup>, О. А. Матвеева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, vladimir.matweev@gmail.com

<sup>2</sup>Аспирантка кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, olga.matveeva.0@gmail.com

В случае числовых характеров известная гипотеза Н. Г. Чудакова, высказанная им в 1950 году, предполагает, что конечнозначный числовой характер  $h(n)$ , удовлетворяющий условиям: 1)  $h(p) \neq 0$  почти для всех простых  $p$ ; 2)  $S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = \alpha x + O(1)$ , является характером Дирихле. Числовой характер, удовлетворяющий условиям гипотезы Н. Г. Чудакова, получил название *обобщённого характера*: главного в случае  $\alpha \neq 0$  и неглавного, в противном случае. Для главных обобщённых характеров гипотеза Н. Г. Чудакова была доказана в 1964 году; для неглавных обобщённых характеров эта гипотеза остаётся открытой и по настоящее время. В работе даётся определение обобщённого характера в случае характеров числовых полей, высказывается аналог гипотезы Н. Г. Чудакова и приводится доказательство этого предположения в случае главных обобщённых характеров.

*Ключевые слова*: гипотеза Чудакова, обобщённые числовые характеры.

### ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\mathbb{K}$  — числовое поле, а  $\chi$  — конечнозначный характер, заданный на полугруппе целых идеалов поля  $\mathbb{K}$ .

**Определение 1.** Характер  $\chi$  будем называть *обобщённым характером*, если выполняются следующие условия:

1)  $\chi(\mathfrak{p}) \neq 0$  почти для всех простых идеалов  $\mathfrak{p}$  поля  $\mathbb{K}$ ;

2)  $S(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}, \\ N(\mathfrak{a}) \leq x}} \chi(\mathfrak{a}) = \alpha x + O(1)$ .

При этом обобщённый характер  $\chi$  будем называть *главным обобщённым характером*, если  $\alpha \neq 0$ , и *неглавным*, в противном случае.

**Замечание 1.** В общем случае даже для характеров Дирихле числовых полей известна [1] только оценка вида

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}, \\ N(\mathfrak{a}) \leq x}} \chi(\mathfrak{a}) = \begin{cases} O\left(x^{1-\frac{1}{\gamma}}\right), & \chi \neq \chi_0, \\ \alpha x + O\left(x^{1-\frac{1}{\gamma}}\right), & \chi = \chi_0, \end{cases}$$

где  $\gamma$  — некоторое натуральное число.

В данной работе мы укажем класс числовых полей, для которых существуют обобщённые характеры, выскажем аналог гипотезы Н. Г. Чудакова [2–4] о том, что такие характеры являются характерами Дирихле, и докажем это предположение для главных обобщённых характеров.



Отметим, что в основе доказательства этого утверждения лежит изучение аналитических свойств рядов Дирихле:

$$f(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \quad s = \sigma + it,$$

где  $\chi$  — главный обобщённый характер.

### 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ХАРАКТЕРОВ

**Определение 2.** Характер Дирихле  $\chi$  поля  $\mathbb{K}$  называется норменным, если существует числовой характер Дирихле  $\chi_1$ , такой, что для любого простого идеала  $\mathfrak{p}$  поля  $\mathbb{K}$  выполняется равенство

$$\chi(\mathfrak{p}) = \chi_1(N(\mathfrak{p})).$$

В работе [5] рассматривается задача описания числовых полей  $\mathbb{K}$ , для которых существуют норменные характеры Дирихле. В частности, если поле  $\mathbb{K}$  есть композит циклических круговых расширений поля  $\mathbb{Q}$  степеней  $q_i^{n_i}$ , где  $q_i$  — различные простые, то любой характер Дирихле поля  $\mathbb{K}$  является норменным.

Для норменных характеров Дирихле поля  $\mathbb{K}$  имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $\chi$  — неглавный норменный характер Дирихле числового поля  $\mathbb{K}$ . Тогда

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a} \\ N(\mathfrak{a}) \leq x}} \chi(\mathfrak{a}) = O(1),$$

где константа не зависит от  $x$ .

**Доказательство.** В работе [5] показано, что  $L$ -функция Дирихле

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

в случае неглавного норменного характера  $\chi$  раскладывается в конечное произведение  $L$ -функций Дирихле с неглавными числовыми характерами  $\chi_i$ :

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = \prod_{i=1}^r L(s, \chi_i). \quad (2)$$

Пусть  $g(z) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a})x^{N(\mathfrak{a})}$  и  $g_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_i(n)x^n$  есть степенные ряды, отвечающие (т. е. с теми же коэффициентами)  $L$ -функциям Дирихле  $L(s, \chi, \mathbb{K})$  и  $L(s, \chi_i)$  соответственно.

В силу (2) имеет место равенство:

$$g(z) = g_1(z) \circ g_2(z) \circ \dots \circ g_r(z), \quad (3)$$

где  $g_1(z) \circ g_2(z)$  — произведение по Дирихле двух степенных рядов  $g_1(x)$  и  $g_2(z)$ .

Рассмотрим случай произведения по Дирихле двух сомножителей:

$$g(z) = g_1(z) \circ g_2(z). \quad (4)$$

Каждый из сомножителей определяет рациональную функцию, голоморфную в точке  $z = 1$ , и, следовательно, частичные суммы этих рядов ограничены в совокупности на интервале  $[0, 1)$ .

Заметим, что ограниченность степенного ряда  $g(z)$  при  $z \rightarrow 1 - 0$  эквивалентна тому, что для любой точки  $x < 1$  существует такое  $N$ , что при всех  $n > N$  частичные суммы этого ряда  $S_n(x)$  удовлетворяют неравенству

$$|S_n(x)| < M,$$

где константа  $M$  не зависит от  $n$  и  $x$ .



По условию для каждого  $x$  существует  $N$  такое, что частичные суммы  $\sum_{n=1}^{N_1} \chi_1(n)x^n$  и  $\sum_{n=1}^{N_2} \chi_2(n)x^n$ , где  $N_1 > N$  и  $N_2 > N$ , ограничены константой  $M$ .

В силу абсолютной сходимости степенных рядов в единичном круге представим  $g(x)$  и  $g_1(x) \cdot g_2(x)$ , где используется обычное произведение степенных рядов в виде

$$g(x) = \lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ N_2 \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m)x^{nm}, \quad (5)$$

$$g_1(x) \cdot g_2(x) = \lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ N_2 \rightarrow \infty}} \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m)x^{n+m}. \quad (6)$$

Отсюда в силу (5) для ограниченности сумматорной функции  $S(x) = \sum_{N(\mathbf{a}) \leq x} \chi(\mathbf{a})$  достаточно показать, что для любого  $x \in [0, 1)$  существует  $N$  такое, что

$$\left| \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m)x^{nm} \right| < M, \quad (7)$$

где  $N_1 > N$ ,  $N_2 > N$ , и константа  $M$  не зависит от  $N$  и  $x$ .

В силу ограниченности  $g_1(x) \cdot g_2(x)$  имеем:

$$\left| \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m)x^{n+m} \right| < M. \quad (8)$$

Покажем, что из оценки (7) следует оценка вида

$$\left| \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m)x^{n+m}x^{nm-(n+m)} \right| < M. \quad (9)$$

В силу абсолютной сходимости слагаемые суммы (9) можно расположить по возрастанию показателей степеней  $x^{nm-(n+m)}$ . Тогда, применив к сумме (9) неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^N \lambda_n a_n \right| \leq \lambda_1 \max_{N_1 \leq N} \left| \sum_{n=1}^{N_1} a_n \right|,$$

где  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , которое получается в результате применения формулы суммирования Абеля, мы в силу (8) получим неравенство (9), что доказывает (7).

Ясно, что наше утверждение имеет место для произведения по Дирихле любого конечного числа сомножителей. Тем самым, утверждение теоремы 1 полностью доказано.  $\square$

**Замечание 2.** Можно показать, что если  $\chi$  — неглавный обобщённый характер числового поля, а  $\chi_0$  — главный характер Дирихле, то  $\chi_0\chi$  — главный обобщённый характер числового поля.

## 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЯДОВ ДИРИХЛЕ С ОБОБЩЁННЫМИ ХАРАКТЕРАМИ

Рассмотрим класс рядов Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{\mathbf{a}} \frac{\chi(\mathbf{a})}{N(\mathbf{a})^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (10)$$

где  $\chi$  — обобщённый характер числового поля  $\mathbb{K}$ .

Для рядов вида (10) докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Ряд Дирихле (10) определяет функцию, голоморфную почти во всех точках полуплоскости  $\sigma > 0$ , за возможным исключением точки  $s = 1$ , где она может иметь полюс первого порядка, и у которой на границе  $\sigma = 0$  нет точек «типа полюса».



**Замечание 3.** Здесь точка  $s = it_0$  называется точкой «типа полюса», если  $|f(\sigma + it_0)| \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow 0+$ .

Доказательству теоремы 2 предпшлём доказательство двух утверждений.

**Лемма 1.** Пусть  $\chi$  — неглавный обобщённый характер. Тогда степенной ряд

$$g(x) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a})x^{N(\mathfrak{a})} \tag{11}$$

определяет функцию, имеющую конечный односторонний предел в точке  $x = 1$ , т. е. предел вида

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \alpha_0.$$

**Замечание 4.** Ограниченность сумматорной функции для характера  $\chi$  обеспечивает только ограниченность функции (11) в окрестности точки  $x = 1$ .

**Доказательство леммы 1.** Рассмотрим пространства  $C[0, 1]$  и  $C[0, 1 - \varepsilon]$ , где  $\varepsilon > 0$ . Обозначим через  $E_{n,\varepsilon}(g)$  и  $E_{n,\varepsilon}^*(g)$  величины наилучшего приближения функции  $g(x)$  вида (11) на отрезке  $[0, 1 - \varepsilon]$  алгебраическими полиномами вида

$$\hat{P}_n(x) = \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq n} b(\mathfrak{a})x^{N(\mathfrak{a})}, \quad \hat{P}_n^*(x) = \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq n} \chi(\mathfrak{a})x^{N(\mathfrak{a})},$$

где  $b(\mathfrak{a})$  — произвольные, а  $\chi(\mathfrak{a})$  — мультипликативные коэффициенты. В случае ограниченности или непрерывности функции  $g(x)$  на отрезке  $[0, 1]$  соответствующие величины обозначим  $E_n(g)$  и  $E_n^*(g)$ .

Из результатов работы [6] следует, что в случае существования конечных величин  $E_n(g)$  и  $E_n^*(g)$  имеют место оценки вида

$$C_1 \frac{E_{n,\varepsilon}(g)}{E_{n,\varepsilon}^*(g)} \leq \frac{E_n(g)}{E_n^*(g)} \leq C_2 \frac{E_{n,\varepsilon}(g)}{E_{n,\varepsilon}^*(g)}, \tag{12}$$

где константы  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от  $g(x)$  и  $\varepsilon$ .

Из этой работы и асимптотики простых идеалов следует также, что

$$\frac{E_n(g)}{E_n^*(g)} = O(\ln^{-1} n). \tag{13}$$

Осталось заметить, что в силу ограниченности функций  $g(x)$  вида (11) в окрестности  $x = 1$  следует существование величин  $E_n(g)$  и  $E_n^*(g)$ , и, следовательно, оценки (12), (13) доказывают утверждение леммы 1.  $\square$

Методы работы [6] позволяют доказать следующий результат.

**Лемма 2.** Пусть  $\chi$  — конечнозначный характер поля  $\mathbb{K}$ , для которого

$$S(x) = \sum_{N(\mathfrak{a}) \leq x} \chi(\mathfrak{a}) = \alpha x + O(1), \quad \alpha \neq 0.$$

Тогда степенной ряд

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{\substack{\mathfrak{a}, \\ N(\mathfrak{a})=n}} \chi(\mathfrak{a}) - \alpha \right] x^n$$

имеет конечный предел вида

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x).$$

**Доказательство теоремы 2.** Запишем известное интегральное представление:

$$f(s) = s \int_1^{\infty} \frac{S(u)}{u^{s-1}} du.$$



Это представление в случае обобщённого характера даёт аналитическое продолжение  $f(s)$  в полуплоскость  $\sigma > 0$ .

Рассмотрим преобразование Меллина:

$$f(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx, \tag{14}$$

где  $g(e^{-x}) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a})e^{-N(\mathfrak{a})x}$ ,  $\Gamma(s)$  — гамма-функция Эйлера.

Запишем равенство (14) в виде

$$f(s)\Gamma(s) = \int_1^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx + \int_0^1 g(e^{-x})x^{s-1}dx.$$

Первый интеграл этого равенства абсолютно сходится при любом  $s$ . Действительно, для любого  $s$

$$\left| \int_1^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx \right| \leq \int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}} \left( \sum_{\mathfrak{a}} e^{-(N(\mathfrak{a})-\frac{1}{2})x} \right) x^{\sigma-1}dx < C.$$

Исследуем второй интеграл равенства (14). В силу леммы 1 и леммы 2 функции  $g(x) = \sum_{n=1}^\infty \left( \sum_{\mathfrak{a}, N(\mathfrak{a})=n} \chi(\mathfrak{a}) \right) x^n$  (при  $\alpha = 0$ ) и  $g(x) = \sum_{n=1}^\infty \left[ \sum_{\mathfrak{a}, N(\mathfrak{a})=n} \chi(\mathfrak{a}) - \alpha \right] x^n$  (при  $\alpha \neq 0$ ) непрерывны на отрезке  $[0, 1]$  и раскладываются в степенные ряды с ограниченными в совокупности коэффициентами. Следовательно, в силу теоремы 6.1 монографии [7] существует последовательность полиномов  $P_n(x)$ , равномерно сходящаяся к  $g(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$ , и их коэффициенты ограничены в совокупности.

Представим  $f(s)$  следующим образом:

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left[ \int_1^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx + \int_0^1 [g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})]x^{s-1}dx + \int_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}dx \right].$$

Отсюда получаем:

$$|f(s)| \leq \frac{1}{|\Gamma(s)|} \left[ C_0 + \frac{\varepsilon_n}{\sigma} + \left| \int_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}dx \right| \right].$$

При надлежащем выборе  $n$  имеем:

$$|f(s)| \leq \frac{1}{|\Gamma(s)|} \left[ C_1 + \left| \int_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}dx \right| \right], \tag{15}$$

где константа  $C_1$  не зависит от  $\sigma$ .

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 e^{-kx}x^{s-1}dx.$$

Интегрируя его по частям, получаем:

$$\int_0^1 e^{-kx}x^{s-1}dx = \frac{e^{-k}}{s} + \frac{ke^{-k}}{s(s+1)} + \dots$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}dx = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \int_0^1 e^{-kx}x^{s-1}dx = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} e^{-k} \sum_{m=0}^\infty \frac{k^m}{s(s+1)\dots(s+m)}. \tag{16}$$

Так как

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1 = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \frac{x^m}{m+1}, \quad \int_0^x (e^t - 1) dt = e^x - x - 1 = x^2 \sum_{m=0}^\infty \frac{x^m}{(m+2)!},$$



то

$$\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+2)!}.$$

Отсюда при  $|t| > 2$  получаем:

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{s(s+1)\dots(s+m)} \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m+2)} = \frac{e^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}.$$

Таким образом, в силу (16) имеем:

$$\left| \int_0^1 P_n(e^{-x}) x^{s-1} dx \right| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{e^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} \right) e^{-k} \leq M_0.$$

Тогда в силу (15) получаем при  $\sigma < 0$ :

$$|f(s)| \leq \frac{C}{|\Gamma(s)|} = O(1),$$

где константа зависит только от  $|t|$ , что и завершает доказательство теоремы 2. □

**Следствие.** Пусть  $\chi(\mathfrak{p}) \neq \chi_1(\mathfrak{p})$  только для конечного числа простых идеалов  $\mathfrak{p}$ , где  $\chi_1$  — характер Дирихле. Тогда  $\chi$  не является обобщённым характером.

### 3. АНАЛОГ ГИПОТЕЗЫ Н. Г. ЧУДАКОВА И ЕГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В СЛУЧАЕ ГЛАВНЫХ ОБОБЩЁННЫХ ХАРАКТЕРОВ

Для обобщённых характеров числовых полей выскажем предположение, которое является аналогом известной гипотезы Н. Г. Чудакова относительно обобщённых числовых характеров. А именно можно предположить, что обобщённые характеры числовых полей являются характерами Дирихле. В случае главных обобщённых характеров будет доказана

**Теорема 3.** Главный обобщённый характер числового поля  $\mathbb{K}$  является характером Дирихле этого поля.

Доказательству теоремы 3 предпошлём доказательство следующего утверждения.

**Лемма 3.** Пусть  $P$  — подмножество простых идеалов поля  $\mathbb{K}$ , а  $D_1$  — полугруппа целых идеалов, порождённая подмножеством  $P$ . Тогда имеет место равенство

$$Q(s) = \sum_{\mathfrak{p} \in P} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} = \sum_{\mathfrak{a} \in D_1} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})} \ln \varphi(N(\mathfrak{a})s),$$

где

$$\mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1, & \mathfrak{a} \text{ — единичный идеал,} \\ (-1)^k, & \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_r, \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j, \mathfrak{p}_i \in P, \\ 0, & \mathfrak{p}^2 | \mathfrak{a}, \end{cases}$$

а

$$\varphi(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in P} \left( 1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} \right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a} \in D_1} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}.$$

**Доказательство.** Положим норму единичного идеала равной единице.

Во-первых, имеем:

$$\ln \varphi(\sigma) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{p} \in P} \frac{1}{m} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^{m\sigma}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} Q(m\sigma).$$

Во-вторых, получаем:

$$\sum_{\mathfrak{a} \in D_1} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})} \ln(N(\mathfrak{a})s) = \sum_{\mathfrak{a} \in D_1} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} Q(N(\mathfrak{a})s) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Q(rs)}{r} \sum_{N(\mathfrak{a})|r} \mu(\mathfrak{a}) = Q(s).$$



Здесь мы воспользовались свойством функции  $\mu(\mathfrak{a})$  (см. [8, § 2.5]):

$$\sum_{N(\mathfrak{a})|r} \mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1, & r = 1, \\ 0, & r \neq 1. \end{cases} \quad \square$$

**Доказательство теоремы 3.** Пусть  $\mathfrak{m}$  — произведение простых идеалов  $\mathfrak{p}$ , для которых  $\chi(\mathfrak{p}) = 0$ , и  $\chi_0$  — главный характер Дирихле модуля  $\mathfrak{m}$ .

Обозначим

$$f(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \quad L(s, \chi_0, \mathbb{K}) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi_0(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \sum_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{m})=1} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}.$$

Известно, что  $L$ -функция  $L(s, \chi, \mathbb{K})$  имеет в точке  $s = 0$  нуль конечного порядка. Пусть  $k$  — порядок этого нуля. Будем говорить, что  $f(s)$  имеет в точке  $s = 0$  «нуль  $m$ -го порядка», если существует такая последовательность  $\sigma_n \rightarrow 0$ , что

$$0 < \frac{|f(\sigma_n)|}{\sigma_n^m} < C, \quad \frac{|f(\sigma_n)|}{\sigma_n^{m+1}} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим случай  $k \leq m$ . Запишем равенство:

$$f(s) = L(s, \chi_0, \mathbb{K}) \cdot \varphi(s), \quad \sigma > 0,$$

где функция

$$\varphi(s) = \prod_{\substack{\mathfrak{p}, \\ \chi(\mathfrak{p}) \neq 0, 1}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{\substack{\mathfrak{p}, \\ \chi(\mathfrak{p}) \neq 0, 1}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right) \quad (17)$$

определена в точке  $s$ .

В силу предположения  $k \leq m$  и теоремы 2 функция  $\varphi(s)$  ограничена в точках  $s = \sigma_n$ ,  $n > N_0$ , и, следовательно,

$$\operatorname{Re} \ln \varphi(\sigma_n) < C_1, \quad C_1 > 0. \quad (18)$$

Пусть  $\gamma$  — число,  $|\gamma| = 1$ , и пусть

$$\varphi_1(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in P} \left(1 - \frac{\gamma}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}.$$

Точно так же, как и в лемме 3, выводится формула

$$\sum_{\mathfrak{p} \in P} \frac{\gamma}{N(\mathfrak{p})^s} = \sum_{\mathfrak{a} \in D_1} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})} \ln \varphi_1(N(\mathfrak{a})s). \quad (19)$$

Обозначим через  $P_k$ ,  $k = \overline{1, l}$ , множество простых идеалов  $\mathfrak{p}$ , для которых  $\chi(\mathfrak{p}) = \gamma_k$ , где  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$  — различные значения  $\chi(\mathfrak{a})$ , не равные 0 и 1.

Тогда для функции  $\ln \varphi(s)$ , где  $\varphi(s)$  определена равенством (17), имеет место выражение

$$\ln \varphi(s) = \sum_{k=1}^l \sum_{\mathfrak{p} \in P_k} \frac{1 - \gamma_k}{N(\mathfrak{p})^s} + \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{p} \in P_k} \frac{1 - \gamma_k^m}{N(\mathfrak{p})^{ms}}. \quad (20)$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\sum_{k=1}^l \sum_{\mathfrak{p} \in P_k} \frac{1 - \gamma_k}{N(\mathfrak{p})^s}.$$

В силу леммы 3, формулы (19) и того факта, что  $\ln \varphi_1(N(\mathfrak{a})s) \sim 2^{-N(\mathfrak{a})\sigma}$  для любого  $\sigma > 0$  для точки  $s = \sigma + it$ , в которой определена функция  $\ln \varphi(s)$ , имеет место оценка вида

$$\sum_{k=1}^l \sum_{\mathfrak{p} \in P_k} \frac{1 - \gamma_k}{N(\mathfrak{p})^s} = \sum_{k=1}^l \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in P_k, \\ N(\mathfrak{p}) \leq n_0}} \frac{1 - \gamma_k}{N(\mathfrak{p})^s} + O(1), \quad (21)$$

где  $n_0\sigma > 1$ .



Для второго слагаемого для любого  $\sigma > 0$  существует такое  $m_0$  ( $m_0\sigma > 1$ ), что верна оценка вида

$$\sum_{k=1}^l \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\mathfrak{p} \in P_k} \frac{1 - \gamma_k^m}{N(\mathfrak{p})^{ms}} = \sum_{k=1}^l \sum_{m=2}^{m_0} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in P_k, \\ N(\mathfrak{p}) \leq n_0}} \frac{1 - \gamma_k^m}{N(\mathfrak{p})^{ms}} + O(1). \quad (22)$$

Таким образом, в силу (20)–(22) для любого  $\sigma > 0$  имеет место оценка вида

$$\ln \varphi(s) = \sum_{k=1}^l \left( \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in P_k, \\ N(\mathfrak{p}) \leq n_0}} \frac{1 - \gamma_k}{N(\mathfrak{p})^s} + \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in P_k, \\ N(\mathfrak{p}) \leq n_0}} \frac{1 - \gamma_k^m}{N(\mathfrak{p})^{ms}} \right) + O(1) \quad (23)$$

для любой точки  $s$ , где определена функция  $\ln \varphi(s)$ .

В силу следствия к теореме 2 число простых идеалов  $\mathfrak{p}$ , для которых  $\chi(\mathfrak{p}) \neq 0, 1$ , не может быть конечным. Следовательно, для любой константы  $M > 0$  найдётся такое  $\sigma_0 > 0$ , что для  $\sigma_n$ ,  $0 < \sigma_n \leq \sigma_0$ , существует такое  $n_0$ , что имеет место оценка

$$\sum_{k=0}^l \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in P_k, \\ N(\mathfrak{p}) \leq n_0}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^{\sigma_n}} > M. \quad (24)$$

Заметим, что из оценки (23) следует оценка вида

$$\operatorname{Re} \ln \varphi(\sigma_n) > C_3 \sum_{k=1}^l \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in P_k, \\ N(\mathfrak{p}) \leq n_0}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^{\sigma_0}},$$

которая в совокупности с оценкой (24) противоречит оценке (18), что и доказывает, что при всех  $\mathfrak{p}$

$$\chi(\mathfrak{p}) = \chi_0(\mathfrak{p}).$$

В случае, когда  $k > t$ , нужно рассмотреть равенство

$$L(s, \chi_0, \mathbb{K}) = f(s)\varphi(s),$$

где

$$\varphi(s) = \prod_{\substack{\mathfrak{p}, \\ \chi(\mathfrak{p}) \neq 0, 1}} \left( 1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} \right) \cdot \prod_{\substack{\mathfrak{p}, \\ \chi(\mathfrak{p}) \neq 0, 1}} \left( 1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} \right)^{-1}$$

и провести приведённые выше рассуждения для  $\operatorname{Re}(-\ln \varphi(\sigma_n))$ .

Таким образом, теорема 3 полностью доказана.  $\square$

### Библиографический список

1. Хейльбронн Х.  $\zeta$ -функции и  $L$ -функции // Алгебраическая теория чисел. М.: Мир, 1968. С. 310–346.
2. Чудаков Н. Г., Линник Ю. А. Об одном классе вполне мультипликативных функций // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74, № 2. С. 193–196.
3. Чудаков Н. Г., Родосский К. А. Об обобщённом характере // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74, №3. С. 1137–1138.
4. Глазков В. В. Характеры мультипликативной полугруппы натуральных чисел // Исследования по теории чисел: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1968. № 2. С. 3–40.
5. Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В., Кривобок В. В. К задаче о разложении в произведение  $L$ -функций Дирихле числовых полей // Чебышевский сб. 2004. Т. 5, вып. 3. С. 51–64.
6. Водлазов А. М., Кузнецов В. Н. К вопросу аналитического продолжения рядов Дирихле с вполне мультипликативными коэффициентами // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 43–59.
7. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972, 368 с.
8. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971, 416 с.



## Generalized Characters Over Numerical Fields and a Counterpart of Chudakov Hypothesis

V. A. Matveev, O. A. Matveeva

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, vladimir.matveev@gmail.com, olga.matveeva.0@gmail.com

The well-known Chudakov hypothesis for numeric characters, conjectured by Chudakov in 1950, suggests that finite-valued numeric character  $h(n)$ , which satisfies the following conditions: 1)  $h(p) \neq 0$  for almost all prime  $p$ ; 2)  $S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = \alpha x + O(1)$ , is a Dirichlet character. A numeric character which satisfies these conditions is called a *generalized character*, principal if  $\alpha \neq 0$  and non-principal otherwise. Chudakov hypothesis for principal characters was proven in 1964, but for non-principal ones thus far it remains unproved. In this paper we present a definition of generalized character over numerical fields, suggest an analog of Chudakov hypothesis for these characters and provide its proof for principal generalized characters.

*Key words:* Chudakov hypothesis, generalized numerical characters.

### References

1. Kheil'bronn H.  $\zeta$ -funktzii i  $L$ -funktzii [ $\zeta$ -functions and  $L$ -functions]. *Algebraicheskaia teoriia chisel* [Algebraic Number Theory]. Moscow, Mir, 1968, pp. 310–346 (in Russian).
2. Chudakov N. G., Linnik J. A. On certain class of completely multiplicative functions. *USSR AS Reports*, 1950, vol. 74, iss. 2, pp. 193–196 (in Russian).
3. Chudakov N. G., Rodosskii K. A. On generalized character. *USSR AS Reports*, 1950, vol. 74, iss. 3, pp. 1137–1138 (in Russian).
4. Glazkov V. V. Characters of multiplicative semigroup of natural numbers. *Number theory research: Interacademic tractate collection*, Saratov, Saratov Univ. Press, 1968, vol. 2, pp. 3–40 (in Russian).
5. Kuznetsov V. N., Setsinskaia E. V., Krivobok V. V. On a problem of decomposition into a product of Dirichlet  $L$ -functions over numerical fields. *Chebyshevskii sbornik* [Chebyshev collection], 2004, vol. 5, iss. 3, pp. 51–64 (in Russian).
6. Vodolazov A. M., Kuznetsov V. N. On analytical continuation of Dirichlet series with multiplicative coefficients. *Research on algebra, number theory and complementary areas: Interacademic tractate collection*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2003, iss. 1, pp. 43–59 (in Russian).
7. Dem'ianov V. F., Malozemov V. N. *Vvedenie v minimaks* [Introduction to minimax]. Moscow, Nauka, 1982, 368 p. (in Russian).
8. Postnikov A. G. *Vvedenie v analiticheskuiu teoriyu chisel* [Introduction to analytical number theory]. Moscow, Nauka, 1971, 416 p. (in Russian).

УДК 501.1

## О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Рыжкова<sup>1</sup>, И. А. Тришина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Аспирантка кафедры нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет, anna-ryzhkova212@rambler.ru

<sup>2</sup>Аспирантка кафедры нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет, I.A.Trishina@gmail.com

Введен в рассмотрение класс почти периодических на бесконечности последовательностей. Необходимость исследования таких последовательностей связана с тем, что они возникают при рассмотрении разностных уравнений. Основные результаты статьи связаны с доказательством почти периодичности на бесконечности решений разностных уравнений.

*Ключевые слова:* периодические на бесконечности последовательности, разностные уравнения, спектральная теория.

### ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел и  $X$  — комплексное банахово пространство. Через  $l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}, X)$  обозначим банахово пространство ограниченных последовательностей  $x : \mathbb{Z} \rightarrow X$  с нормой  $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|$ . Через  $c_0$  обозначим (замкнутое) подпространство последовательностей из  $l^\infty$ , убывающих на бесконечности, т. е.  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \|x(n)\| = 0$ ,  $x \in c_0$ . В пространстве  $l^\infty$  рассмотрим операторы сдвига  $S(n) : l^\infty \rightarrow l^\infty$ ,  $(S(n)x)(k) = x(k+n)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in l^\infty$ . Используемые результаты из гармонического анализа, функции и векторов, содержатся в работах [1–7]. Следуя [1, 6, 7], дадим определение медленно меняющейся на бесконечности последовательности.



**Определение 1.** Последовательность  $x \in l^\infty$  называется *медленно меняющаяся на бесконечности*, если  $S(1)x - x \in c_0$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(n+1) - x(n)\| = 0$ .

Примером медленно меняющейся на бесконечности последовательности является последовательность  $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  вида

$$x(n) = \sin(\ln(\alpha + |n|)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha > 0.$$

Множество медленно меняющихся на бесконечности последовательностей образует замкнутое подпространство из  $l^\infty$ , которое обозначим символом  $l_{sl,\infty}^\infty = l_{sl,\infty}^\infty(\mathbb{Z}, X)$ .

В статье [6] было введено понятие почти периодической на бесконечности функции. Такие функции использовались для описания ограниченных решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. При рассмотрении разностных уравнений в данной статье будет использовано вводимое здесь понятие почти периодической последовательности. В отличие от [6] в основу определения положено определение Бора.

**Определение 2.** Пусть  $\varepsilon > 0$ . Число  $m \in \mathbb{Z}$  называется  $\varepsilon$ -периодом последовательности  $x \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$  на бесконечности, если существует такое число  $k \in \mathbb{N}$ , что  $\sup_{|n|>k} \|x(n+m) - x(n)\| < \varepsilon$ .

Множество  $\varepsilon$ -периодов последовательности  $x$  на бесконечности обозначим через  $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$ .

**Определение 3.** Множество  $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$  называется *относительно плотным* на  $\mathbb{Z}$ , если существует такое  $l \in \mathbb{N}$ , что  $\{n, n+1, \dots, n+l\} \cap \Omega_\infty(x, \varepsilon) \neq \emptyset$  для всех  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Определение 4 (определение Бора).** Последовательность  $x \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$  называется *почти периодической на бесконечности*, если для любого  $\varepsilon > 0$  множество  $\Omega_\infty(x, \varepsilon)$  относительно плотно на  $\mathbb{Z}$ .

Множество почти периодических на бесконечности последовательностей обозначим символом  $AP_\infty(\mathbb{Z}, X)$ .

**Теорема 1.** Множество  $AP_\infty(\mathbb{Z}, X)$  образует банахово пространство и банахову алгебру, если  $X$  — банахова алгебра.

**Доказательство.** Если  $x, y \in AP_\infty(\mathbb{Z}, X)$ , то доказательство почти периодичности на бесконечности их суммы (произведения, если  $X$  банахова алгебра) проводится точно по той же схеме, что и доказательство соответствующих свойств для почти периодических функций (см. [8, § 1.2, свойство 6]). Докажем, что  $AP_\infty(\mathbb{Z}, X)$  — банахова алгебра (с поточечным умножением последовательностей, если  $X$  — банахова алгебра). Докажем полноту пространства  $AP_\infty(\mathbb{Z}, X)$ . Пусть  $(x_n)$  — фундаментальная последовательность из  $AP_\infty(\mathbb{Z}, X)$  и  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  (используется полнота пространства  $l^\infty$ ). Докажем, что  $x \in AP_\infty(\mathbb{Z}, X)$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Выберем натуральное число  $N$  так, чтобы  $\|x - x_N\|_\infty < \varepsilon/4$ . Рассмотрим множество  $\Omega(\varepsilon/4, x_N)$  ( $\varepsilon/4$ -периодов последовательности  $x_N$ ). Следовательно, существует  $k = k_\varepsilon \in \mathbb{N}$  такое, что  $\sup_{|n|>k} \|x_N(n+m) - x_N(n)\| < \varepsilon/4$  для любого  $m \in \Omega(\varepsilon/4, x_N)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|x(n+m) - x(n)\| &\leq \|x(n+m) - x_N(n+m)\| + \|x_N(n+m) - x_N(n)\| + \|x_N(n) - x(n)\| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

для всех  $n \in \mathbb{Z}$ , для которых  $|n| > k$ .

Поэтому

$$\sup_{|n|>k} \|x_N(n+m) - x_N(n)\| < \varepsilon.$$

Таким образом, доказано включение  $\Omega_\infty(\varepsilon/4, x_N) \subset \Omega_\infty(\varepsilon, x_N)$ , и, следовательно, множество  $\varepsilon$ -периодов последовательности  $x$  относительно плотно на  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

Отметим, что банахово пространство  $AP(\mathbb{Z}, X)$  почти периодических последовательностей содержится в  $AP_\infty(\mathbb{Z}, X)$ .



**Определение 5 (аппроксимационное).** Последовательность  $x \in l^\infty$  называется *почти периодической*, если для любого  $\varepsilon > 0$  существуют последовательности  $x_k \in l_{sl,\infty}^\infty$  и числа  $\gamma_k \in \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$  такие, что  $\|x(n) - \sum_{k=0}^N x_k(n)\gamma_k^n\| < \varepsilon$ .

Можно доказать, что эти определения (Бора и аппроксимационное) эквивалентны.

Ясно, что  $l_{sl,\infty}^\infty(\mathbb{Z}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{Z}, X)$ . Это свойство отмечалось в статье [6].

**Определение 6.** Последовательность  $x_n$  из  $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$  *сходится к последовательности*  $x_0 \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$  *на бесконечности*, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать число  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  такое, что  $\sup_{|k| \geq n_\varepsilon} \|x(k) - x_0(k)\| < \varepsilon$ .

**Критерий (Бохнера).** Функция  $x \in l^\infty(\mathbb{Z}, X)$  является *почти периодической на бесконечности* тогда и только тогда, когда из любой последовательности сдвигов  $(S(k_n)x)$ ,  $n > 1$ , можно выделить подпоследовательность, сходящуюся на бесконечности к некоторой последовательности  $x_0 \in l^\infty$ .

**Лемма 1.** Сумма и произведение двух почти периодических на бесконечности последовательностей есть почти периодическая последовательность.

**Доказательство.** Пусть  $(\xi_k)$  — произвольная последовательность целых чисел. Выберем из нее такую подпоследовательность  $(\xi'_k)$ , что последовательность последовательностей  $S(\xi'_k)x$  сходится, а затем из  $(\xi'_k)$  — такую подпоследовательность  $(\xi''_k)$ , что сходится подпоследовательность последовательностей  $(S(\xi''_k)y)$ . Тогда очевидно, что будет сходиться  $S(\xi''_k)(x + y)$ .  $\square$

**Теорема 2.** Последовательность вида

$$x(n) = \sum_{k=1}^N x_k(n)\gamma_k^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x : \mathbb{Z} \rightarrow X,$$

где  $\gamma_k \in \mathbb{T}$ ,  $1 \leq k \leq N$ ,  $x_k \in l_{sl,\infty}^\infty(\mathbb{Z}, X)$ , является *почти периодической на бесконечности последовательностью* ( $x \in AP_\infty(\mathbb{Z}, X)$ ).

**Доказательство.** По доказанному в теореме 1 каждая последовательность  $x_k$  является почти периодической на бесконечности последовательностью. Любая периодическая на бесконечности последовательность является почти периодической на бесконечности последовательностью по определению. Последовательность  $\tilde{\gamma} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tilde{\gamma}(n) = \gamma^n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\gamma \in \mathbb{T}$ , является также почти периодической последовательностью согласно критерию Бохнера. По доказанному в лемме 1 произведение почти периодической последовательности есть последовательность почти периодическая, следовательно, функция вида (2) является почти периодической на бесконечности последовательностью. Как отмечалось,  $l_{sl,\infty}^\infty(\mathbb{Z}, X) \subset AP_\infty(\mathbb{Z}, X)$ , а также  $n \mapsto \gamma_k^n, 1 \leq k \leq n$ , — почти периодические последовательности.  $\square$

## О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

В банаховом пространстве  $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$ , где  $X$  конечномерное банахово пространство, рассмотрим разностное уравнение:

$$x(n + N) = Bx(n) + y(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где  $y \in c_0(\mathbb{Z}, X)$ ,  $B \in \text{End}X$  со свойством  $\sigma_0 = \sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$  — совокупность простых собственных значений, где  $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$  и  $\sigma(B)$  обозначает спектр оператора  $B$ .

**Теорема 3.** Каждое ограниченное решение  $x : \mathbb{Z} \rightarrow X$  уравнения (1) является почти периодической на бесконечности последовательностью, которая допускает представление вида

$$x(n) = \sum_{k=1}^N x_k(n)\gamma_k^n,$$

где  $x_k \in l_{sl,\infty}^\infty$ ,  $\gamma_k \in \mathbb{T}$ ,  $0 \leq k \leq N - 1$ .



**Доказательство.** Спектр оператора  $B$  представим в виде

$$\sigma(B) = \sigma_0 \cup \sigma_{in} \cup \sigma_{out},$$

где  $\sigma_0 = \sigma(B) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$  — совокупность собственных значений, лежащих на окружности;  $\sigma_{in} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda_j| < 1\}$  — совокупность собственных значений, лежащих внутри окружности  $\mathbb{T}$ ;  $\sigma_{out} = \{\lambda \in \sigma(B) : |\mu_j| > 1\}$  — совокупность собственных значений, лежащих вне окружности.

В соответствии с этим разбиением спектра рассмотрим проекторы  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_{in}, \mathcal{P}_{out}$ , которые соответственно построены по спектральным множествам  $\sigma_0, \sigma_{in}, \sigma_{out}$ . Таким образом,  $I = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_{in} + \mathcal{P}_{out}$ . Эти проекторы индуцируют разложение  $X = X_0 \oplus X_{in} \oplus X_{out}$  пространства  $X$ , где  $X_0 = \text{Im } \mathcal{P}_0$ ,  $X_{in} = \text{Im } \mathcal{P}_{in}$ ,  $X_{out} = \text{Im } \mathcal{P}_{out}$ . Эти подпространства являются инвариантными для оператора  $B$  и пусть  $B_0 = B|X_0$ ,  $B_{in} = B|X_{in}$ ,  $B_{out} = B|X_{out}$ . Таким образом,  $B = B_0 \oplus B_{in} \oplus B_{out}$  относительно построенного разложения пространства  $X$ . К обеим частям уравнения (1) применим проектор  $\mathcal{P}_{in}$ , и тогда получим последовательность  $x_{in} = \mathcal{P}_{in}x$ , удовлетворяющую равенству

$$S(N)x_{in}(n) = B_{in}x_{in}(n) + y_{in}(n), \tag{2}$$

где  $y_{in} = \mathcal{P}_{in}y \in c_0$ .

Из (2) следует, что

$$(I - B_{in}S(-N))x_{in} = S(-N)y_{in}. \tag{3}$$

Поскольку  $\|S(-N)\| = 1$ ,  $B_{in}S(-N)x_{in}(n) = S(-N)B_{in}x_{in}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , и спектральный радиус  $r(B_{in})$  оператора  $B_{in}$  меньше единицы, то оператор  $I - B_{in}S(-N)$  обратим и из (3) получаем, что  $x_{in} = (I - B_{in}S(-N))^{-1}S(-N)y_{in} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{in}^n S(-N(n+1))y_{in}$ . Ясно, что  $x_{in} \in c_0(\mathbb{Z}, X)$ . Аналогичный результат получим при применении проектора  $\mathcal{P}_{out}$  к уравнению (1):

$$(S(N)x_{out})(n) = B_{out}x_{out}(n) + y_{out}(n), \quad y_{out} = \mathcal{P}_{out}y \in c_0. \tag{4}$$

Оператор  $B_{out}$  обратим, и  $\sigma(B_{out}^{-1}) = \{1/\lambda_j, \lambda_j \in \sigma_{out}\}$ , т. е. его спектральный радиус меньше единицы. Используя перестановочность оператора  $S_N$  с  $B_{out}$  из (4), получим равенства

$$S(N)B_{out}^{-1}x_{out}(n) = x_{out}(n) + B_{out}^{-1}y_{out}(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

или

$$(I - S(N)B_{out}^{-1})x_{out}(n) = -B_{out}^{-1}y_{out}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$x_{out}(n) = -(I - S(N)B_{out}^{-1})^{-1}B_{out}^{-1}y_{out}(n) = -\sum_{n=0}^{\infty} (B_{out}^{-1}S(N))^k B_{out}^{-1}y_{out}, \quad y_{out} \in c_0.$$

Из этой формулы следует, что  $x_{out} \in c_0(\mathbb{Z}, X)$ . Проектор  $P_0$  можно представить в виде

$$P_0 = P_1 + \dots + P_N,$$

где  $P_k$  — проектор, и

$$AP_k = \gamma_k P_k,$$

где  $|\gamma_k| = 1, 1 \leq k \leq N$ .

Ввиду предполагаемой простоты собственных значений число  $\gamma_k$  представимо в виде  $\gamma_k = e^{i\lambda_k}$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Применим проектор  $P_0$  к разностному уравнению (1) и далее применим проектор  $P_k$ :

$$P_k x_0(n+1) = P_k B_0 x_0(n) + P_k y_0(n),$$

где  $x_0 = P_0 x_n$ ,  $x_k(n) = P_k x_0(n)$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Следовательно,  $x_k(n+1) = \gamma_k x_k(n) + y_k(n)$ , где  $x_k(n) = P_k x_0(n)$ ,  $k = \overline{1, N}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Сделав замену  $x_k(n) = \gamma_k^{-n} \tilde{x}_k(n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , получим:

$$\tilde{x}_k(n+1) = \tilde{x}_k(n) + \tilde{y}_k(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$



$\widetilde{x}_k$  — медленно меняющаяся последовательность, а  $x_k(n)$  отличается от  $\widetilde{x}_k(n)$  по формуле (1) на множитель  $\gamma_k^n$ , где  $\gamma_k$  — корень из единицы. Поскольку  $\widetilde{y}_k \in c_0$  и  $S(1)\widetilde{x}_k - \widetilde{x}_k \in c_0$ , следовательно,  $\widetilde{x}_k$ , где  $1 \leq k \leq t$ , — медленно меняющаяся на бесконечности последовательность.  $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00378, № 12-01-31196).

### Библиографический список

1. Баскаков А. Г., Калужина Н. С. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 643–661. DOI: 10.4213/mzm8963.
2. Баскаков А. Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // СМФН. 2004. Т. 9. С. 3–151.
3. Баскаков А. Г., Криштал И. А. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54. DOI: 10.4213/im639.
4. Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987.
5. Дуплищева А. Ю. О периодических на бесконечности решениях разностных уравнений // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2012. № 1. С. 110–117.
6. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1(409). С. 77–128. DOI: 10.4213/gm9505.
7. Баскаков А. Г., Калужина Н. С., Поляков Д. М. Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов // Изв. вузов. Математика. 2014. № 7. С. 3–14.
8. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М. : Изд-во МГУ, 1978.

## Almost Periodic at Infinity Solutions of Difference Equations

A. A. Ryzhkova, I. A. Trishina

Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 304006, Voronezh, Russia, anna-ryzhkova212@rambler.ru, I.A.Trishina@gmail.com

A class of sequences almost periodic at infinity is introduced and studied. The necessity to consider such sequences is based on the fact that they appear in difference equations under consideration. The main results relate to the proof of almost periodicity at infinity of solutions of difference equations.

*Key words:* periodic sequence at infinity, difference equations, spectral theory.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 12-01-31196, no. 13-01-00378).*

### References

1. Baskakov A. G., Kaluzhina N. S. Beurling's theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations. *Math. Notes*, 2012, vol. 92, iss. 5, pp. 587–605. DOI: 10.1134/S0001434612110016.
2. Baskakov A. G. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2006, vol. 137, no. 4, pp. 4885–5036. DOI: 10.1007/s10958-006-0286-4.
3. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. DOI: 10.4213/im639.
4. Baskakov A. G. *Garmonicheskii analiz lineinykh operatorov* [Harmonic analysis of linear operators]. Voronezh, Voronezh Univ. Press, 1987 (in Russian).
5. Duplishheva A. Ju. Periodic on infinity solutions of difference equations. *The Proceeding VSU. Ser. Physics. Mathematics*, 2012, vol. 1, pp. 110–117 (in Russian).
6. Baskakov A. G. Investigation of linear differential equations by the methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russ. Math. Surv.*, 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: 10.1070/RM2013v068n01ABEH004822.
7. Baskakov A. G., Kaluzhina N. S., Polyakov D. M. Slowly varying at infinity semigroup of operators. *Russian Math. [Izvestiya VUZ. Matematika]*, 2014, no. 7, pp. 3–14. DOI: 10.3103/S1066369X14070019.
8. Levitan B. M., Gikov V. V. *Pochti-periodicheskie funktsii i differentsial'nye uravneniya* [Almost-periodic functions and differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1978, 204 p. (in Russian).



УДК 501.1

# РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА СО СЧЁТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК РАЗРЫВА ПЕРВОГО РОДА ЕЁ КОЭФФИЦИЕНТА

Р. Б. Салимов

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики, профессор, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, salimov.rsb@gmail.com

Даётся решение однородной краевой задачи Римана со счётным множеством точек разрыва первого рода её коэффициента, когда требуется найти две функции, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскости, по заданному на действительной оси линейному краевому условию, связывающему граничные значения искомых функций.

*Ключевые слова:* краевая задача Римана, аналитическая функция, индекс задачи.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется найти функции  $\Phi^+(z)$  и  $\Phi^-(z)$ , аналитические соответственно в полуплоскостях  $D^+ : \text{Im } z > 0$  и  $D^- : \text{Im } z < 0$  плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  по заданному на действительной оси  $L$  краевому условию:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

с заданными на  $L$  коэффициентом задачи  $G(t)$  и свободным членом  $g(t)$ . В случае, когда индекс задачи, равный  $(\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty))/2\pi$ , конечен, полное решение этой задачи дано в монографиях [1, с. 136–139; 2, с. 118–121].

Начало исследования задачи (1) в случае бесконечного индекса было положено в работах Н. В. Говорова, результаты которых вошли в его монографию [3]. Этой проблеме посвящён ряд работ других авторов, отметим из них статьи [4–9], в которых изучены новые случаи задачи Римана с бесконечным индексом.

Краевая задача, соответствующая вышеуказанной при  $g(t) \equiv 0$  всюду на  $L$ , называется однородной, её краевое условие имеет вид

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L. \quad (2)$$

Рассмотрим решение этой однородной задачи с бесконечным индексом в случае, когда коэффициент  $G(t)$  имеет счётное множество точек разрыва первого рода.

Аналогичная задача, когда краевое условие (2) задавалось на луче — части действительной оси, ранее была рассмотрена в работе [10], в которой без доказательства приведен ряд теорем, определяющих решение рассматриваемой однородной задачи.

В настоящей работе для решения краевой задачи (2) с коэффициентом, имеющим счётное множество точек разрыва первого рода, используется метод, аналогичный применённому в книге [2, с. 430–435], когда разрывы коэффициента краевого условия устраняются и исходная краевая задача приводится к задаче с непрерывным коэффициентом.

Примем, что коэффициент  $G(t)$  краевого условия (2) есть функция, непрерывная всюду на  $L$ , кроме точек разрыва первого рода  $t_j, j = \pm 1, \pm 2, \dots$ , причём  $|G(t)| \neq 0$  всюду на  $L$ ,

$$\begin{aligned} 0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots, & \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty, \\ -\infty < t_{-k-1} < t_{-k} < \dots < t_{-1} < 0, & \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_{-k} = -\infty. \end{aligned}$$

Будем считать, что краевое условие (2) выполняется всюду на  $L$ , исключая точки  $t_k, t_{-k}, k = \overline{1, \infty}$ . Некоторые уточнения постановки задачи будут приведены ниже.

Примем, что непрерывные в интервалах  $t_{-k-1} < t < t_{-k}, t_k < t < t_{k+1}$  ветви  $\arg G(t)$  выбраны так, чтобы выполнялись соотношения

$$\arg G(t_k + 0) - \arg G(t_k - 0) = 2\kappa_k\pi, \quad 0 < \kappa_k < 1, \quad (3)$$

$$\arg G(t_{-k} + 0) - \arg G(t_{-k} - 0) = 2\kappa_{-k}\pi, \quad 0 < \kappa_{-k} < 1, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad (4)$$



когда искомые функции  $\Phi^+(t)$ ,  $\Phi^-(t)$  в точках  $t_k, t_{-k}$  будут иметь интегрируемые особенности (как и в [2, с. 433]).

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_{-k} = \infty. \quad (5)$$

Кроме того, для определённости в постановке задачи будем считать, что имеют место соотношения

$$\ln |G(t_k + 0)| - \ln |G(t_k - 0)| = -2\beta_k \pi, \quad 0 < \beta_k < 1, \quad (6)$$

$$\ln |G(t_{-k} + 0)| - \ln |G(t_{-k} - 0)| = -2\beta_{-k} \pi, \quad 0 < \beta_{-k} < 1, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad (7)$$

выбор величин  $\beta_k, \beta_{-k}$  в которых не влияет на характер особенностей искомых функций в точках  $t_k, t_{-k}$ . Будем считать

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{-k} < \infty.$$

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Предположим, что точки разрыва удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-t_{-k}} < \infty, \quad (8)$$

и рассмотрим следующие бесконечные произведения:

$$P_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{\varkappa_k + i\beta_k}, \quad P_-(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_{-k}}\right)^{\varkappa_{-k} + i\beta_{-k}}, \quad (9)$$

в которых [11, с. 275]

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_j}\right)^{\varkappa_j + i\beta_j} &= \exp \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (\varkappa_j + i\beta_j) \ln \left(1 - \frac{z}{t_j}\right) \right] = \\ &= \exp \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (\varkappa_j + i\beta_j) \left( \ln \left|1 - \frac{z}{t_j}\right| + i \arg \left(1 - \frac{z}{t_j}\right) \right) \right], \quad (10) \\ & \quad j = k \quad \text{или} \quad j = -k, \quad k = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Под  $\arg \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)$ ,  $\arg \left(1 - \frac{z}{t_{-k}}\right)$  понимаются однозначные ветви, обращающиеся в нуль при  $z = 0$  и непрерывные в плоскости  $z$ , разрезанной по части действительной оси, соединяющей точки  $t = t_k, t = +\infty$  для первой ветви и соединяющей точки  $t = -\infty, t = t_{-k}$  для второй ветви, когда

$$\arg \left(1 - \frac{z}{t_k}\right) = -\pi + \arg(z - t_k) \quad \text{при} \quad 0 \leq \arg(z - t_k) < 2\pi, \quad \arg t_k = 0, \quad k = \overline{1, \infty}, \quad (11)$$

$$\arg \left(1 - \frac{z}{t_{-k}}\right) = \arg(z - t_{-k}) \quad \text{при} \quad -\pi \leq \arg(z - t_{-k}) \leq \pi, \quad \arg(-t_{-k}) = 0, \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (12)$$

При выполнении условий (8) бесконечные произведения  $P_+(z)$  и  $P_-(z)$  формул (9) представляют собой функции, аналитические в плоскости  $z$ , разрезанной соответственно по лучу действительной оси, соединяющему точки  $t = t_1, t = +\infty$  и по лучу, соединяющему точки  $t = -\infty, t = t_{-1}$ . В силу аналогии обоснование сказанного достаточно провести относительно произведения  $P_+(z)$ .

Пусть  $G$  — замкнутая ограниченная область, расположенная внутри плоскости  $z$ , разрезанной по лучу с концами  $t = t_1, t = +\infty$  и лежащая в круге  $|z| < R$  достаточно большого радиуса  $R$ .

Выберем точку  $t_N$  множества  $\{t_k\}$  так, чтобы для  $z \in G$  выполнялись соотношения

$$\left| \frac{z}{t_N} \right| < \frac{R}{t_N} < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{z}{t_k} \right| < \frac{R}{t_k} < \frac{R}{t_N} < \frac{1}{2}, \quad k > N,$$



тогда будем иметь [11, с. 276]

$$\left| \ln \left( 1 - \frac{z}{t_k} \right) \right| < \frac{3}{2} \left| \frac{z}{t_k} \right| < \frac{3R}{2t_k}, \quad k > N.$$

Следовательно, для  $z \in G$  будет справедливо неравенство

$$|\varkappa_k + i\beta_k| \left| \ln \left( 1 - \frac{z}{t_k} \right) \right| < \frac{3R\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{t_k}, \quad k > N.$$

Здесь в правой части стоят члены сходящегося ряда с положительными членами, получаемого из первого ряда (8), ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varkappa_k + i\beta_k) \ln \left( 1 - \frac{z}{t_k} \right)$$

представляет собой аналитическую в области  $G$  функцию [11, с. 277], поэтому произведение  $P_+(z)$  является функцией, аналитической внутри плоскости с вышеуказанным разрезом. Функция  $P_+(z)$  представляет собой функцию, аналитическую и в точках берегов указанного разреза, кроме точек  $t_k$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ .

В формулах (9)–(12) значениям фигурирующих в них функций условимся приписывать верхний знак «+» или «-» соответственно при  $z \in D^+$  или  $z \in D^-$ .

В частности,  $P_+(z) = P_+^+(z)$  при  $z \in D^+$ ,  $P_+(z) = P_+^-(z)$  при  $z \in D^-$ . Кроме того, как и в формуле (10)

$$\begin{aligned} & \frac{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^+ \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}}{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^- \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}} = \frac{\exp \left[ (\varkappa_k + i\beta_k) \ln \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^+ \right]}{\exp \left[ (\varkappa_k + i\beta_k) \ln \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^- \right]} = \\ & = \exp \left[ i(\varkappa_k + i\beta_k) \left( \arg \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^+ - \arg \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^- \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда с учётом (11) имеем:

$$\frac{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^+ \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}}{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^- \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}} = \exp \left[ i(\varkappa_k + i\beta_k) \left( \arg (t - t_k)^+ - \arg (t - t_k)^- \right) \right].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^+ \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}}{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^- \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}} \right|_{t=t_k+0} = \exp [i(\varkappa_k + i\beta_k)(0 - 2\pi)], \\ & \left. \frac{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^+ \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}}{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^- \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}} \right|_{t=t_k-0} = \exp [i(\varkappa_k + i\beta_k)(\pi - \pi)] = 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left. \frac{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^+ \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}}{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^- \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}} \right|_{t=t_k+0} = \frac{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^+ \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}}{\left[ \left( 1 - \frac{t}{t_k} \right)^- \right]^{\varkappa_k + i\beta_k}} \Big|_{t=t_k-0} \exp(-2\pi i \varkappa_k + 2\pi \beta_k). \quad (13)$$



Нетрудно проверить, что будет справедливо соотношение, получаемое из последнего заменой  $k$  на  $(-k)$ .

Бесконечное произведение

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_j}\right)^{\varkappa_j + i\beta_j},$$

входящее в первую формулу (9), есть функция аналитическая в точке  $t_k$  любого берега вышеуказанного разреза. Поэтому на основании формул (9), (13) получаем:

$$\frac{P_+^+(t_k + 0)}{P_+^-(t_k + 0)} = \frac{P_+^+(t_k - 0)}{P_+^-(t_k - 0)} \exp(-2\pi i \varkappa_k + 2\pi\beta_k). \quad (14)$$

Совершенно аналогично, заменяя в формуле (13) число  $k$  на  $(-k)$ , будем иметь

$$\frac{P_-^+(t_{-k} + 0)}{P_-^-(t_{-k} + 0)} = \frac{P_-^+(t_{-k} - 0)}{P_-^-(t_{-k} - 0)} \exp(-2\pi i \varkappa_{-k} + 2\pi\beta_{-k}). \quad (15)$$

В силу формул (3)–(7) имеем:

$$G(t_k + 0) = G(t_k - 0)e^{2\pi i \varkappa_k - 2\pi\beta_k}, \quad (16)$$

$$G(t_{-k} + 0) = G(t_{-k} - 0)e^{2\pi i \varkappa_{-k} - 2\pi\beta_{-k}}. \quad (17)$$

Введем в рассмотрение определённую на  $L$  функцию

$$G_1(t) = G(t) \frac{P_+^+(t)}{P_+^-(t)} \cdot \frac{P_-^+(t)}{P_-^-(t)}. \quad (18)$$

Как видно из формул (14)–(17), эта функция является непрерывной в точках  $t_k, t_{-k}, k = \overline{1, \infty}$ .

Краевое условие (2) запишем в виде

$$\Phi^+(t)P_+^+(t)P_-^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t)P_+^-(t)P_-^-(t), \quad t \in L, \quad (19)$$

где  $G_1(t)$  – функция, определяемая формулой (18).

При  $t < t_1$  согласно (10), (11), замечая, что  $\arg(t - t_k) = \pi, \arg(1 - \frac{t}{t_k}) = 0$ , имеем:

$$\frac{P_+^+(t)}{P_+^-(t)} = 1 \quad \text{и} \quad \arg \frac{P_+^+(t)}{P_+^-(t)} = 0. \quad (20)$$

Аналогично при  $t > t_{-1}$  в силу (10), (12), замечая, что  $\arg(t - t_k) = 0$ , получим:

$$\frac{P_-^+(t)}{P_-^-(t)} = 1 \quad \text{и} \quad \arg \frac{P_-^+(t)}{P_-^-(t)} = 0. \quad (21)$$

В силу (9)–(11) будем иметь

$$\frac{P_+^+(t_k - 0)}{P_+^-(t_k - 0)} = \exp \left[ \sum_{j=1}^{k-1} -2\pi i \varkappa_j + \sum_{j=1}^{k-1} 2\pi\beta_j \right], \quad (22)$$

$$\frac{P_+^+(t_k + 0)}{P_+^-(t_k + 0)} = \exp \left[ \sum_{j=1}^k -2\pi i \varkappa_j + \sum_{j=1}^k 2\pi\beta_j \right], \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (23)$$

На основании формул (7), (10), (12) аналогично получим:

$$\frac{P_-^+(t_{-k} - 0)}{P_-^-(t_{-k} - 0)} = \exp \left[ \sum_{j=1}^k 2\pi i \varkappa_{-j} - \sum_{j=1}^k 2\pi\beta_{-j} \right], \quad (24)$$



$$\frac{P_{-}^{+}(t_{-k} + 0)}{P_{-}^{-}(t_{-k} + 0)} = \exp \left[ \sum_{j=1}^{k-1} 2\pi i \varkappa_{-j} - \sum_{j=1}^{k-1} 2\pi \beta_{-j} \right], \quad k = \overline{1, \infty}. \quad (25)$$

Обозначая

$$\Phi_1^{+}(z) = \Phi^{+}(z)P_{+}^{+}(z)P_{-}^{+}(z), \quad \Phi_1^{-}(z) = \Phi^{-}(z)P_{+}^{-}(z)P_{-}^{-}(z) \quad (26)$$

краевое условие (19) запишем так

$$\Phi_1^{+}(t) = G_1(t)\Phi_1^{-}(t), \quad t \in L. \quad (27)$$

Для простоты рассмотрим случай, когда в последнем краевом условии коэффициент  $G_1(t)$ , определяемый формулой (18), имеет конечный индекс  $\varkappa > 0$  и удовлетворяет условию Гельдера всюду на  $L$ . Тогда ограниченное решение однородной краевой задачи (27) определяется формулами [2, с. 119, 120]

$$\Phi_1^{+}(z) = \chi^{+}(z) \frac{P_{\varkappa}(z)}{(z+i)^{\varkappa}}, \quad \Phi_1^{-}(z) = \chi^{-}(z) \frac{P_{\varkappa}(z)}{(z+i)^{\varkappa}}, \quad (28)$$

где  $P_{\varkappa}(z)$  — многочлен степени не выше  $\varkappa$  с произвольными постоянными,

$$\begin{aligned} \chi^{+}(z) &= e^{\Gamma^{+}(z)}, \quad \chi^{-}(z) = \left( \frac{z-i}{z+i} \right)^{-\varkappa} e^{\Gamma^{-}(z)}, \\ \Gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left[ \left( \frac{\tau-i}{\tau+i} \right)^{-\varkappa} G_1(\tau) \right] \frac{d\tau}{\tau-z}, \\ \Gamma(z) &= \Gamma^{+}(z) \quad \text{при } z \in D^{+}, \quad \Gamma(z) = \Gamma^{-}(z), \quad \text{при } z \in D^{-}, \\ &\arg \frac{t-i}{t+i} = 2 \arg(t-i), \end{aligned}$$

где  $\arg(z-i)$  — ветвь, непрерывная в плоскости  $z$ , разрезанной по части мнимой оси, соединяющей точки  $z=i$ ,  $z=\infty$ .

В рассматриваемом случае, как это видно из формул (18), (20)–(25), индекс задачи (2) (коэффициента  $G(t)$ ) в силу (5) будет равен  $+\infty$ . Решение задачи (2) в классе функций, для которых произведения

$$\Phi^{+}(z)P_{+}^{+}(z)P_{-}^{+}(z), \quad \Phi^{-}(z)P_{+}^{-}(z)P_{-}^{-}(z) \quad (29)$$

являются ограниченными функциями при найденных функциях (28), определяется согласно (26) формулами

$$\Phi^{+}(z) = \frac{\Phi_1^{+}(z)}{P_{+}^{+}(z)P_{-}^{+}(z)}, \quad \Phi^{-}(z) = \frac{\Phi_1^{-}(z)}{P_{+}^{-}(z)P_{-}^{-}(z)} \quad (30)$$

и зависит от  $(\varkappa+1)$  произвольных постоянных. Отсюда, в частности, видно, что найденное решение в точках  $t_k, t_{-k}$  будет обращаться, вообще говоря, в бесконечность порядка соответственно  $\varkappa_k, \varkappa_{-k}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, приходим к теореме.

**Теорема.** Пусть выполняются условия (5) и индекс коэффициента краевой задачи (27)  $\varkappa > 0$  и конечен, тогда краевая задача (2) имеет бесконечный индекс, её решение в классе функций, для которых произведения (29) ограничены, определяются формулами (30) и зависят от  $\varkappa+1$  произвольных постоянных.

В случае, когда индекс краевой задачи (27) бесконечен, картина разрешимости задачи (2) будет другой. В частности, если задача (27) имеет бесконечный индекс степенного порядка, меньшего единицы, при исследовании картины разрешимости задачи (2) можно использовать результаты работы [4] или преобразовать краевое условие (27), по аналогии с подходом, применённым в статье [12], устраняя бесконечный разрыв аргумента его коэффициента, что требует специального рассмотрения. Можно показать, что решение (30) обладает следующим свойством. Если числа  $t_j, \varkappa_j, j = \pm 1, \pm 2, \dots$  таковы, что существуют отличные от нуля конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \varkappa_j}{x^{\varkappa_{+}}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^{k-1} \varkappa_{-j}}{x^{\varkappa_{-}}},$$



в которых  $\kappa_+$  и  $\kappa_-$  — известные положительные числа, не превышающие  $1/2$ , то для любого достаточно малого числа  $\delta > 0$  будем иметь

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \Phi^+(\rho e^{i\theta}) = 0, \quad \delta < \theta < \pi - \delta,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \Phi^-(\rho e^{i\theta}) = 0, \quad -\pi + \delta < \theta < -\delta.$$

Сказанное вытекает из соответствующих свойств функций (9).

### Библиографический список

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977.
3. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986.
4. Толочко М. Э. О разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1972. №5. С. 34–41.
5. Сандрыгайло И. Е. О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19, № 10. С. 872–875.
6. Монахов В. Н., Семенко Е. В. Краевые задачи с бесконечным индексом в пространствах Харди // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 544–547.
7. Алехно А. Г. Достаточные условия разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, 2002. Т. 14. С. 71–77.
8. Гарифьянов Ф. Н. Об одном особом случае задачи Римана // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1984. Т. 22. С. 66–68.
9. Кац Б. А. Об одной задаче Римана с осциллирующим коэффициентом // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1977. Т. 14. С. 110–120.
10. Журавлева М. И. Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом со счетным множеством разрывов первого рода её коэффициента // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210, № 1. С. 15–17.
11. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций : в 2 т. Т. 1. М. : Наука, 1987.
12. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. Метод регуляризующего множителя для решения одной задачи Гильберта с бесконечным индексом // Изв. вузов. Матем. 2001. № 4. С. 76–79.

## The Solution of the Homogeneous Riemann Boundary Value Problem with a Countable Set of Points of Discontinuity of the First Kind its Coefficient

R. B. Salimov

Kazan State Architecture and Building University, 1, Zelenaya str., 420043, Kazan, Russia, salimov.rsb@gmail.com

We consider the Riemann homogeneous boundary value problem with a countable set of points of discontinuity of the first kind in the case, when it is required to find two functions, analytic, respectively, in the upper and lower half-plane, for a given linear boundary condition on the real axis, connecting the boundary values of the unknown functions.

*Key words:* Riemann boundary value problem, analytic functions, finite index.

### References

1. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations*. Moscow, Nauka, 1968, 511 p. (in Russian).
2. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka, 1977, 640 p. (in Russian).
3. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka, 1986, 239 p. (in Russian).
4. Tolochko M. E. About the solvability of the homogeneous Riemann boundary value problem for the half-plane with infinite index. *Izvestiya Akad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 1972, no. 5, pp. 34–41 (in Russian).
5. Sandrygailo I. E. On Hilbert – Riemann boundary value problem for half-plane with infinite index. *Izvestiya Akad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 1974, no. 6, pp. 872–875 (in Russian).
6. Monahov V. N., Semenko E. V. Boundary value problem with infinite index in Hardy spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 291, no. 3, pp. 544–547 (in Russian).
7. Alehno A. G. Sufficient conditions for the solvability of homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index. *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo*, Kazan, 2002, vol. 14, pp. 71–77 (in Russian).
8. Garifianov F. N. About a special case of the Riemann problem. *Trydu seminaru po kraevum zadacham*. Kazan, 1984, no 22, pp. 66–68 (in Russian).
9. Katc B. A. About Riemann problem with an oscillating coefficient. *Trydu seminaru po kraevum zadacham*. Kazan, 1977, no. 14, pp. 110–120 (in Russian).
10. Zhuravleva M. I. Homogeneous Riemann boundary problem with infinite index with scating many discontinuities of the first kind itfactor. *Dokl. Akad. Nauk*



- SSSR, 1973, vol. 210, no. 1, pp. 15–17 (in Russian).  
11. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions : in 2 vol.* Moscow, Nauka, 1968, vol. 2, 624 p. (in Russian).  
12. Salimov R. B., Shabalin P. L. The regularizing factor method for solving a homogeneous Hilbert problem with an infinite index. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2001, vol. 45, iss. 4, pp. 74–77.

УДК 517.95; 517.984

## О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. П. Хромов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

В статье методом Фурье дается классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с комплексным потенциалом при минимальных условиях гладкости начальных данных. Используется резольвентный подход, состоящий в привлечении в формальном решении метода Коши – Пуанкаре интегрирования резольвенты соответствующей спектральной задачи по спектральному параметру, не требующий никакой информации о собственных и присоединенных функциях и использующий лишь главную часть асимптотики собственных значений. Существенно используется прием А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье. Граничные условия таковы, что спектральная задача допускает кратный спектр и бесконечное множество присоединенных функций, что создает дополнительные трудности при анализе формального решения.

*Ключевые слова:* формальное решение, спектральная задача, резольвента, классическое решение.

### ВВЕДЕНИЕ

Настоящая публикация приурочена к 150-летию со дня рождения выдающихся отечественных ученых В. А. Стеклова (1884–1926) и А. Н. Крылова (1883–1945), внесших весомый вклад в решение смешанных задач методом Фурье.

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, полученных из него почленным дифференцированием нужное число раз. В. А. Стеклов, впервые давший строгое обоснование метода Фурье, придерживался этой точки зрения [1, с. 224], которая сделала метод Фурье очень популярным. Было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи.

Информация обзорного характера содержится, в частности, в книгах И. Г. Петровского [2], В. И. Смирнова [3], О. А. Ладыженской [4], В. А. Ильина [5] (см. также [6]), В. А. Черныгина [7]. Недостатком такого подхода является требование завышенной гладкости на начальные данные. Выход из этого положения намечен А. Н. Крыловым в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных [8]. Суть его приема состояла в том, что изучение вопроса о дифференцировании ряда Фурье решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (в этом случае не надо прибегать к почленному дифференцированию), а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать. На ряде прикладных задач им были успешно преодолены трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования. Приведем его слова: «Изложенный прием усиления быстроты сходимости рядов Фурье и нахождения производных от функций, ими представляемых, может служить для доказательства или проверки того, что представляемая рядом функция действительно удовлетворяет тому дифференциальному уравнению, как решение коего она найдена, хотя бы самый ряд и нельзя было дифференцировать почленно требуемое число раз.» [8, с. 227].

В. А. Черныгин [7] приемом А. Н. Крылова с применением асимптотик для собственных значений и собственных функций успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, а в ряде случаев эти условия гладкости стали минимально возможными. Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А. Н. Крылова и В. А. Черныгина, есть качественно новый шаг в методе Фурье, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать краевые задачи методом Фурье и ставящий много новых вопросов в теории функций.



В настоящей статье дается дальнейшее развитие метода А. Н. Крылова и В. А. Черныгина путем привлечения метода Коши – Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты оператора, порождаемого спектральной задачей из метода Фурье. Его преимущество сказывается особенно в случае несамосопряженной задачи из метода Фурье, в том числе и когда участвуют присоединенные функции в любом количестве. Такое положение и наблюдается в настоящей статье.

Мы будем изучать задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u'_x(0, t) - u'_x(1, t) - au(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad (3)$$

где  $q(x) \in C[0, 1]$  и комплекснозначна,  $a$  — комплексное число, условие  $u'_t(x, 0) = 0$  берется для простоты изложения.

Мы привлекаем еще спектральную задачу для оператора  $L_0$ :

$$L_0 y = -y''(x), \quad y(0) = y'(0) - y'(1) = 0.$$

Этот оператор рассматривался В. А. Ильиным (см. [5, 6]) и замечателен тем, что все его собственные значения двукратны, причем для каждого собственного значения оператора  $L_0$  имеется одна собственная и одна присоединенная функции. Оператор  $L_0$  участвует в формировании эталонной смешанной задачи (см. [9]) при использовании приема А. Н. Крылова по усилению скорости сходимости рядов, подобных рядам Фурье, т.е.  $L_0$  выполняет одну из важнейших функций в методе Фурье. В результате получаем классическое решение задачи (1)–(3) при минимальных требованиях на  $\varphi(x)$ :  $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ , комплекснозначна, причем

$$\varphi(0) = \varphi'(0) - \varphi'(1) - a\varphi(1) = \varphi''(0) = 0. \quad (4)$$

## 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора  $L$ :

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \\ y(0) = y'(0) - y'(1) - ay(1) = 0.$$

**Теорема 1.** Собственные значения  $\lambda_n = \rho_n^2$  ( $\lambda = \rho^2$ ,  $\text{Re} \geq 0$ ) оператора  $L$  образуют две серии  $\{\lambda'_n\}$ ,  $\{\lambda''_n\}$  с асимптотиками

$$\lambda'_n = \rho'^2_n, \quad \rho'_n = 2n\pi + \varepsilon'_n, \quad \lambda''_n = \rho''^2_n, \quad \rho''_n = 2n\pi + \varepsilon''_n,$$

где  $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ ,  $\varepsilon'_n$  и  $\varepsilon''_n$  есть  $O(1/n)$ . Если  $\varepsilon'_n \neq \varepsilon''_n$ , то они простые, если  $\varepsilon'_n = \varepsilon''_n$ , то двукратные.

Это хорошо известный факт (см., например, [10, с. 74–75]).

**Замечание.** В [10] приведена более точная асимптотическая формула для собственных значений, но она нам не потребуется.

Обозначим  $\gamma_n = \{\rho \mid |\rho - 2n\pi| = \delta\}$ , где  $\delta > 0$  и достаточно мало, а  $n \geq n_0$  и  $n_0$  таково, что при всех  $n \geq n_0$  внутрь  $\gamma_n$  попадают  $\rho'_n$  и  $\rho''_n$  и других корней квадратных из собственных значений нет ни внутри, ни на границе  $\gamma_n$ . Пусть  $\tilde{\gamma}_n$  — образ  $\gamma_n$  в  $\lambda$ -плоскости ( $\lambda = \rho^2$ ,  $\text{Re} \rho \geq 0$ ). Обозначим через  $R_\lambda$  резольвенту оператора  $L$ , т.е.  $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ , где  $E$  — единичный оператор и  $\lambda$  — спектральный параметр. Формальное решение по методу Фурье возьмем в виде (см. также [11, 12]):

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos pt \, d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_n} (R_\lambda \varphi) \cos pt \, d\lambda, \quad (5)$$

где  $r > 0$  фиксировано и взято таким, что все собственные значения по модулю меньше  $r$ , имеют номера, меньше  $n_0$ ; на контуре  $|\lambda| = r$  нет собственных значений. Таким образом, получаем, что в формальном решении  $u(x, t)$  не фигурируют ни собственные значения, ни собственные функции.

Проводим теперь дальнейшее преобразование ряда (5) с использованием эталонной задачи (см. п. 3).



**Лемма 1.** Пусть  $\mu_0$  не является собственным значением оператора  $L$  и таково, что  $|\mu_0| > r$  и  $\mu_0$  не находится ни внутри, ни на границе замкнутого контура  $\tilde{\gamma}$  ни при каком  $n \geq n_0$ , где  $\tilde{\gamma}$  либо  $|\lambda| = r$ , либо  $\tilde{\gamma}_n$ . Тогда

$$\int_{\tilde{\gamma}} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t \, d\lambda = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \cos \rho t \, d\lambda, \tag{6}$$

где  $g = (L - \mu_0 E)\varphi$ .

**Доказательство.** Так как  $\varphi(x) \in D_L$  (область определения оператора  $L$ ), то

$$g(x) = (L - \lambda E)\varphi(x) + (\lambda - \mu_0)\varphi(x).$$

Отсюда  $R_\lambda g = \varphi(x) + (\lambda - \mu_0)R_\lambda \varphi$  и поэтому имеет место (6). □

Наше преобразование формального решения с учетом эталонной задачи дается следующей теоремой.

**Теорема 2.** Для формального решения  $u(x, t)$  имеет место формула

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda^0 g) \cos \rho t \, d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda^0 g) \cos \rho t \, d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda^0 g) \cos \rho t \, d\lambda, \\ u_1(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [R_\lambda g - R_\lambda^0 g] \cos \rho t \, d\lambda, \\ u_2(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{\lambda - \mu_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} [R_\lambda g - R_\lambda^0 g] \cos \rho t \, d\lambda, \end{aligned}$$

где  $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ . Считаем еще, что ранее приведенные требования на  $\mu_0$  выполняются и для оператора  $L_0$ , при этом все собственные значения оператора  $L_0$  вне  $|\lambda| = r$  попадают внутрь контуров  $\tilde{\gamma}_n$  при  $n \geq n_0$ .

В дальнейшем будем использовать вместо (5) именно представление (7).

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0. \tag{8}$$

Пусть  $z_1(x, \rho)$ ,  $z_2(x, \rho)$  — решения уравнения (8) с начальными условиями:

$$z_1(0, \rho) = 1, \quad z_1'(0, \rho) = 0, \quad z_2(0, \rho) = 0, \quad z_2'(0, \rho) = 1.$$

Если  $q(x) = 0$ , то эти решения есть  $z_1^0(x, \rho)$ ,  $z_2^0(x, \rho)$ . Таким образом,

$$z_1^0(x, \rho) = \cos \rho x, \quad z_2^0(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho}.$$

**Теорема 3.** Для  $R_\lambda f$  имеет место формула

$$R_\lambda f = v_1(x, \rho)(f, z_1) + v_2(x, \rho)(f, z_2) + M_\rho f,$$



где

$$M_\rho f = \int_0^x M(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi, \quad M(x, \xi, \rho) = \begin{vmatrix} z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \\ z_1(\xi, \rho) & z_2(\xi, \rho) \end{vmatrix},$$

$$v_1(x, \rho) = \frac{1}{\Delta(\rho)} (z_2'(1, \rho) + az_2(1, \rho)) z_2(x, \rho), \quad v_2(x, \rho) = -\frac{1}{\Delta(\rho)} (z_1'(1, \rho) + az_1(1, \rho)) z_2(x, \rho),$$

$$\Delta(\rho) = z_2'(0, \rho) - z_2'(1, \rho) - az_2(1, \rho), \quad (f, g) = \int_0^1 f(\xi) g(\xi) d\xi.$$

**Доказательство.** Общее решение неоднородного уравнения

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = f(x) \quad (9)$$

есть

$$y(x, \rho) = c_1 z_1(x, \rho) + c_2 z_2(x, \rho) + M_\rho f(x), \quad (10)$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные. Если  $y = R_\lambda f$ , то  $y$  удовлетворяет (10) и граничным условиям

$$u_1(y) = y(0) = 0, \quad u_2(y) = y'(0) - y'(1) - ay(1) = 0.$$

Получаем отсюда

$$c_1 = 0, \quad c_2 \Delta(\rho) + u_2(M_\rho f) = 0,$$

где  $\Delta(\rho) = u_2(z_2)$ .

Далее,

$$u_2(M_\rho f) = - \int_0^1 \begin{vmatrix} z_1(\xi, \rho) & z_2(\xi, \rho) \\ z_1'(1, \rho) + az_1(1, \rho) & z_2'(1, \rho) + az_2(1, \rho) \end{vmatrix} f(\xi) d\xi.$$

Отсюда

$$u_2(M_\rho f) = -(f, z_1) (z_2'(1, \rho) + az_2(1, \rho)) + (f, z_2) (z_1'(1, \rho) + az_1(1, \rho)).$$

Таким образом, получаем:

$$R_\lambda f = \frac{1}{\Delta(\rho)} [(f, z_1) (z_2'(1, \rho) + az_2(1, \rho)) - (f, z_2) (z_1'(1, \rho) + az_1(1, \rho))] z_2(x, \rho) + M_\rho f. \quad \square$$

**Теорема 4.** Для  $R_\lambda^0 f$  имеет место формула

$$R_\lambda^0 f = v_1^0(x, \rho)(f, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(f, z_2^0) + M_\rho^0 f,$$

где

$$v_1^0(x, \rho) = \frac{1}{\Delta_0(\rho)} z_2^{0'}(1, \rho) z_2^0(x, \rho), \quad v_2^0(x, \rho) = -\frac{1}{\Delta_0(\rho)} z_1^{0'}(1, \rho) z_2^0(x, \rho),$$

$$\Delta_0(\rho) = 1 - \cos \rho, \quad M_\rho^0 f = \int_0^x \begin{vmatrix} z_1(x, \rho) & z_2^0(x, \rho) \\ z_1(\xi, \rho) & z_2^0(\xi, \rho) \end{vmatrix} f(\xi) d\xi.$$

**Доказательство** такое же, как и доказательство теоремы 3 (здесь  $u_1^0(y) = y(0)$ ,  $u_2^0(y) = y'(0) - y'(1)$ ).

**Теорема 5.** В полосе  $|\operatorname{Im} \rho| \leq h$  ( $h > 0$  любое) имеют место асимптотические формулы:

$$z_1(x, \rho) = \cos \rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad z_1'(x, \rho) = -\rho \sin \rho x + O(1),$$

$$z_2(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \quad z_2'(x, \rho) = \cos \rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

где оценки  $O(\dots)$  равномерны по  $x \in [0, 1]$ .



Эти оценки содержатся в [10, с. 59].

**Теорема 6.** Для  $z_j(x, \rho)$  ( $j = 1, 2$ ) имеют место формулы:

$$z_1(x, \rho) = \cos \rho x + \int_0^x K_1(x, \xi) \cos \rho \xi d\xi, \tag{11}$$

$$z_2(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K_2(x, \xi) \frac{\sin \rho \xi}{\rho} d\xi, \tag{12}$$

где  $K_j(x, \xi)$  ( $j = 1, 2$ ) непрерывно дифференцируемы по  $x$  и  $\xi$ ,  $K_2(x, 0) \equiv 0$ .

**Замечание.** Формулы (11), (12) хорошо известны как формулы операторов преобразования (см. [13, с. 17, 33]).

**Лемма 2.** При  $\rho \in \gamma_n$  имеют место асимптотические формулы:

$$v_1^{(j)}(x, \rho) = v_1^{0(j)}(x, \rho) + O(\rho^{j-2}), \tag{13}$$

$$v_2^{(j)}(x, \rho) = v_2^{0(j)}(x, \rho) + O(\rho^{j-1}), \tag{14}$$

где  $j = 0, 1, 2$ ,  $v_s^{(j)}(x, \rho) = \frac{d^j}{dx^j} v_s(x, \rho)$  и оценки  $O(\dots)$  равномерны по  $x$ .

**Доказательство.** Имеем:

$$\Delta(\rho) = z_2'(0, \rho) - z_2'(1, \rho) + a z_2(1, \rho) = 1 - \cos \rho + O\left(\frac{1}{\rho}\right) = \Delta_0(\rho) + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Отсюда при  $\rho \in \gamma_n$  имеем:

$$\frac{1}{\Delta(\rho)} = \frac{1}{\Delta_0(\rho)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta(\rho)}(z_2'(1, \rho) + a z_2(1, \rho)) &= \frac{1}{\Delta_0(\rho)} z_2^{0'}(1, \rho) + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \\ \frac{1}{\Delta(\rho)}(z_1'(1, \rho) + a z_1(1, \rho)) &= \frac{1}{\Delta_0(\rho)} z_1^{0'}(1, \rho) + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_1(x, \rho) &= \left(\frac{z_2^{0'}(1, \rho)}{\Delta_0(\rho)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \left(z_2^0(x, \rho) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right) = v_1^0(x, \rho) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \\ v_2(x, \rho) &= \left(-\frac{z_1^{0'}(1, \rho)}{\Delta_0(\rho)} + O(1)\right) \left(z_2^0(x, \rho) + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right) = v_2^0(x, \rho) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \end{aligned}$$

и тем самым (13) и (14) при  $j = 0$  установлены.

Используя теперь вместо  $z_2(x, \rho)$  асимптотики для  $z_2^{(j)}(x, \rho)$  ( $j = 1, 2$ ) придем аналогично к (13) и (14) при  $j = 1, 2$ . □

**Лемма 3.** Если  $g(x) \in C[0, 1]$  и  $\rho \in \gamma_n$ , то

$$(g, z_1) = (g_1(\xi) \cos \mu \xi, \cos 2n\pi \xi) - (g_1(\xi) \sin \mu \xi, \sin 2n\pi \xi), \tag{15}$$

$$(g, z_1 - z_1^0) = \frac{1}{2n\pi + \mu} [(g_2(\xi) \cos \mu \xi, \sin 2n\pi \xi) + (g_2(\xi) \sin \mu \xi, \cos 2n\pi \xi)], \tag{16}$$

где  $g_1(\xi) = g(\xi) + \int_{\xi}^1 K_1(\tau, \xi) g(\tau) d\tau$ ,  $g_2(\xi) = g(\xi) K_1(\xi, \xi) - \int_{\xi}^1 K_{1\xi}'(\tau, \xi) g(\tau) d\tau$ ,  $\rho = 2n\pi + \mu$ .



**Доказательство.** Имеем:

$$(g, z_1) = \left( g, \cos \rho \xi + \int_0^\xi K_1(\xi, \tau) \cos \rho \tau d\tau \right) = (g_1(\xi), \cos \rho \xi)$$

и отсюда следует (15). Формула (16) получается аналогично. □

**Лемма 4.** Если  $g(x) \in C[0, 1]$  и  $\rho \in \gamma_n$ , то

$$(g, z_2) = \frac{1}{2n\pi + \mu} [(g_3(\xi) \cos \mu \xi, \sin 2n\pi \xi) + (g_3(\xi) \sin \mu \xi, \cos 2n\pi \xi)], \quad (17)$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = \frac{1}{(2n\pi + \mu)^2} [(g_4(\xi) \cos \mu \xi, \cos 2n\pi \xi) - (g_4(\xi) \sin \mu \xi, \sin 2n\pi \xi)], \quad (18)$$

где  $g_3(\xi) = g(\xi) + \int_\xi^1 K_2(\tau, \xi) g(\tau) d\tau$ ,  $g_4(\xi) = -g(\xi) K_2(\xi, \xi) + \int_\xi^1 K_{2,\xi}(\tau, \xi) g(\tau) d\tau$ .

**Доказательство.** Формула (17) получается так же как и (15).

Далее, так как  $K_2(\xi, 0) \equiv 0$ , то имеем:

$$z_2 - z_2^0 = -\frac{1}{\rho} \cos \rho x K_2(x, x) + \frac{1}{\rho} \int_0^x \cos \rho \tau K'_{2,\tau}(x, \tau) d\tau.$$

Отсюда приходим к (18). □

**Лемма 5.** Обозначим через  $\psi(x)$  функции  $\cos x$  или  $\sin x$ . Пусть  $f(x) \in L_2[0, 1]$  и  $f(x, \mu) = f(x)\psi(\mu x)$ , где  $\mu \in \gamma_0$  и  $\beta_n(\mu) = (f(x, \mu), \psi(2n\pi x))$ . Тогда справедлива оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n} |\beta_n(\mu)| \leq C \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}}, \quad (19)$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $n_1$ ,  $n_2$  и  $\mu \in \gamma_0$ .

**Доказательство.** По неравенству Коши – Буняковского имеем:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n} |\beta_n(\mu)| \leq \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n^2(\mu)|}. \quad (20)$$

По неравенству Бесселя получаем:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |\beta_n^2(\mu)| \leq C \|f(x, \mu)\|^2, \quad (21)$$

где  $\|\cdot\|$  – норма в  $L_2[0, 1]$ . Но  $\|f(x, \mu)\| \leq C \|f\|$ , где  $C$  не зависит от  $\mu \in \gamma_0$ . Тем самым из (20) и (21) получаем (19). □

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ $u_0(x, t)$

**Лемма 6.** Для  $u_0(x, t)$  имеет место формула

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} \right) (R_\lambda^0 \varphi_1) \cos \rho t d\lambda, \quad (22)$$

где  $\varphi_1 = R_{\mu_0}^0 g$ .



**Доказательство.** Действительно, по лемме 1, взяв  $R_\lambda^0$  вместо  $R_\lambda$  и  $\varphi_1$  вместо  $\varphi$ , имеем:

$$\int_{\tilde{\gamma}} (R_\lambda^0 \varphi_1) \cos \rho t \, d\lambda = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{\lambda - \mu_0} R_\lambda^0 g_1 \cos \rho t \, d\lambda,$$

где  $g_1 = (L_1^0 - \mu_0 E)\varphi$ . Но  $g_1 = (L^0 - \mu_0 E)R_{\mu_0}^0 g = g$ . Значит, имеет место (6) с заменой  $R_\lambda$  на  $R_\lambda^0$  и  $\varphi$  на  $\varphi_1$ .  $\square$

**Лемма 7.** Собственные значения оператора  $L_0$  есть

$$\lambda_n^0 = \rho_n^{02} = 4\pi^2 n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

При этом  $\lambda_0^0$  — простое собственное значение, а остальные  $\lambda_n^0$  двукратные.

**Доказательство.** Все  $\rho_n^0$ , отличные от нуля, есть корни  $\Delta_0(\rho) = 1 - \cos \rho$ . Но  $1 - \cos \rho = 2 \sin^2(\rho/2)$ . Отсюда  $\rho_n^0 = 2\pi n$  и все они двукратны при  $n \neq 0$ . Докажем, что 0 есть простое собственное значение оператора  $L_0$ . Действительно, если  $y'' = 0$ , то  $y(x) = c_0 + c_1 x$ . Найдем  $c_0$  и  $c_1$  из граничных условий. Из  $y(0) = 0$  следует  $c_0 = 0$ , тогда  $y(x) = c_1 x$ . Отсюда  $y'(x) = c_1$ , т. е.  $y(x) = x$  есть собственная функция для собственного значения  $\lambda_0 = 0$ . Покажем, что присоединенных функций для  $\lambda_0$  нет. В противном случае существует  $\varphi(x)$  такое, что  $L_0 \varphi = x$ , т. е.  $-\varphi'' = x$ . Отсюда  $\varphi(x) = c_0 + c_1 x - \int_0^x (x-t)t \, dt$ . Для  $\varphi(x)$  должны выполняться условия:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(0) = \varphi'(1)$ . Но тогда  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = c_1 - \int_0^1 t \, dt$ , чего быть не может.  $\square$

**Лемма 8.** Для  $R_\lambda^0 f$  имеет место формула

$$R_\lambda^0 f = \frac{1}{1 - \cos \rho} \int_0^1 f(\xi) \cos \rho(1 - \xi) \, d\xi \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x - \xi)}{\rho} f(\xi) \, d\xi. \quad (23)$$

Утверждение леммы следует из теоремы 4.

**Теорема 7.** Имеем место формула

$$u_0(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^0(x, t), \quad (24)$$

где  $u_0^0(x, t) = 2x(\varphi_1, 1)$ ,  $u_n^0(x, t) = a_n \sin \rho_n^0 x \cos \rho_n^0 t + b_n x \cos \rho_n^0 x \cos \rho_n^0 t - b_n t \sin \rho_n^0 x \sin \rho_n^0 t$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $a_n = 4((1 - \xi)\varphi_1(\xi), \sin \rho_n^0 \xi)$ ,  $b_n = 4(\varphi_1(\xi), \cos \rho_n^0 \xi)$ .

Утверждение теоремы следует из (22) и (23) по теореме вычетов.

**Лемма 9.** Для функций  $u_n^0(x, t)$  справедливы формулы:

$$u_n^0(x, t) = \frac{1}{2}(v_n(x+t) + v_n(x-t)) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (25)$$

где  $v_0(x) = u_0^0(x, t)$  ( $u_0^0(x, t)$  не зависит от  $t$ ),  $v_n(x) = a_n \sin \rho_n^0 x + b_n x \cos \rho_n^0 x$ .

**Доказательство.** Для  $n = 0$  равенство (25) очевидно. Пусть  $n \geq 1$ . Тогда, используя формулы для умножения тригонометрических функций, имеем:

$$\begin{aligned} u_n^0(x, t) &= \frac{1}{2} \{ a_n (\sin \rho_n^0(x+t) + \sin \rho_n^0(x-t)) + b_n x (\cos \rho_n^0(x+t) + \cos \rho_n^0(x-t)) - \\ &- b_n t (\cos \rho_n^0(x-t) - \cos \rho_n^0(x+t)) \} = \frac{1}{2} \{ [a_n \sin \rho_n^0(x+t) + b_n(x+t) \cos \rho_n^0(x+t)] + \\ &+ [a_n \sin \rho_n^0(x-t) + b_n(x-t) \cos \rho_n^0(x-t)] \} = \frac{1}{2} (v_n(x+t) + v_n(x-t)). \quad \square \end{aligned}$$

Обозначим

$$F(x) = \sum_0^{\infty} v_n(x), \quad F_1(x) = \sum_1^{\infty} a_n \sin \rho_n^0 x, \quad F_2(x) = \sum_0^{\infty} b_n \cos \rho_n^0 x.$$



**Лемма 10.** *Функции  $F(x)$ ,  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  непрерывно дифференцируемы на оси  $(-\infty, \infty)$ ,  $F_1(x) = -F_1(-x)$ ,  $F_1(1+x) = F_1(x)$ ,  $F_2(x) = F_2(-x)$ ,  $F_2(1+x) = F_2(x)$ . При этом  $F(x) = \varphi_1(x)$  при  $x \in [0, 1]$ .*

**Доказательство.** Интегрируя два раза по частям формулы для  $a_n$  и  $b_n$  с учетом краевых условий на  $\varphi_1(x)$ , имеем:

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\rho_n^2}, \quad b_n = \frac{\alpha_n}{\rho_n^2},$$

где через  $\alpha_n$  обозначаем различные числа  $\alpha_n$ , лишь бы  $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$ . Отсюда следует гладкость  $F(x)$ ,  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ , если воспользоваться неравенством Коши – Буняковского. Свойства симметрии и периодичности  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  очевидны. То, что  $F(x) = \varphi_1(x)$  при  $x \in [0, 1]$ , следует из разложения функции  $\varphi_1(x)$  (как функции из области определения оператора  $L_0$ ) по собственным и присоединенным функциям оператора  $L_0$  в силу регулярности краевых условий.  $\square$

**Лемма 11.** *Если  $x \in [0, 1]$ , а  $m$  – любое целое число, то*

$$F(m+x) = m\varphi_1(1-x) + (m+1)\varphi_1(x). \quad (26)$$

**Доказательство.** Имеем  $F(x) = F_1(x) + xF_2(x)$  при  $x \in (-\infty, \infty)$ . Пусть теперь  $x \in [0, 1]$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(1-x) &= F_1(1-x) + (1-x)F_2(1-x) = -F_1(x) + (1-x)F_2(x) = \\ &= -F(x) + F_2(x) = -\varphi_1(x) + F_2(x). \end{aligned}$$

Но  $F(1-x) = \varphi_1(1-x)$ . Значит,  $F_2(x) = \varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} F(m+x) &= F_1(m+x) + (m+x)F_2(m+x) = F_1(x) + (m+x)F_2(x) = \\ &= F(x) + mF_2(x) = \varphi_1(x) + m(\varphi_1(x) + \varphi_1(1-x)) = m\varphi_1(1-x) + (m+1)\varphi_1(x). \end{aligned} \quad \square$$

**Следствие.**  $F(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ .

**Доказательство.** Имеем:  $-\varphi_1''(x) - \mu_0\varphi_1(x) = -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) - \mu_0\varphi(x)$ . Так как  $\varphi_1(0) = \varphi(0) = \varphi''(0) = 0$ , то и  $\varphi_1''(0) = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} F''(m+0) &= m\varphi_1''(1) + (m+1)\varphi_1''(0) = m\varphi_1''(1), \\ F''(m-0) &= F''(m-1+1-0) = (m-1)\varphi_1''(0) = m\varphi_1''(1) = m\varphi_1''(1), \end{aligned}$$

т. е.  $F''(m+0) = F''(m-0)$ .

Если же  $x \neq m$ , то  $F''(x)$  непрерывны в силу (26).  $\square$

**Теорема 8.** *Функция  $u_0(x, t)$  есть классическое решение эталонной задачи (1)–(3), т. е. когда  $q(x) \equiv 0$  и вместо  $\varphi(x)$  берется  $\varphi_1(x)$ .*

**Доказательство.** Имеем:

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2}[F(x+t) + F(x-t)]. \quad (27)$$

Поэтому по следствию леммы 11

$$\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2}.$$

Выполнение начальных и граничных условий следует из (27) и законности почленного дифференцирования ряда (24) по  $x$ .  $\square$

Результаты этого параграфа получены совместно с В. В. Корневым.

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ $u_2(x, t)$

По теоремам 3 и 4 с учетом того, что  $M_\rho f$  и  $M_\rho^0 f$  есть целые функции по  $\lambda$  для  $u_2(x, t)$ , получаем следующее представление:

$$u_2(x, t) = \sum_{n \geq n_0} a_n(x, t),$$

где

$$a_n(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{2\rho \cos \rho t}{\rho^2 - \mu_0} [v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2) - v_1^0(x, \rho)(g, z_1^0) - v_2^0(x, \rho)(g, z_2^0)] d\rho. \quad (28)$$



**Лемма 12.** Ряды  $\sum a_{n,x^j}^{(j)}(x, t)$ ,  $\sum a_{n,t^j}^{(j)}(x, t)$  ( $j = 0, 1, 2$ ) сходятся абсолютно и равномерно по  $x \in [0, 1]$  и  $t \in [-T, T]$  при любом фиксированном  $T > 0$ .

**Доказательство.** Имеем:

$$J(x, \rho) = J_1(x, \rho) + J_2(x, \rho), \tag{29}$$

где  $J(x, \rho)$  — выражение в квадратных скобках в (28),

$$\begin{aligned} J_1(x, \rho) &= (v_1(x, \rho) - v_1^0(x, \rho))(g, z_1) + (v_2(x, \rho) - v_2^0(x, \rho))(g, z_2), \\ J_2(x, \rho) &= v_1^0(x, \rho)(g, z_1 - z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(g, z_2 - z_2^0). \end{aligned}$$

Обозначим через  $\beta_n(\mu)$  любой из функционалов:

$$\begin{aligned} (g_1(\xi) \cos \mu\xi, \cos 2n\pi\xi), & \quad -(g_1(\xi) \sin \mu\xi, \sin 2n\pi\xi), \\ (g_2(\xi) \cos \mu\xi, \cos 2n\pi\xi), & \quad -(g_2(\xi) \sin \mu\xi, \sin 2n\pi\xi), \\ (g_3(\xi) \cos \mu\xi, \sin 2n\pi\xi), & \quad (g_3(\xi) \sin \mu\xi, \cos 2n\pi\xi), \\ (g_4(\xi) \cos \mu\xi, \cos 2n\pi\xi), & \quad -(g_4(\xi) \sin \mu\xi, \sin 2n\pi\xi). \end{aligned}$$

Тогда по леммам 3 и 4 имеем:

$$\begin{aligned} (g, z_1) &= \beta_n(\mu) + \beta_n(\mu), & (g, z_2) &= \frac{1}{2n\pi + \mu} [\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)], \\ (g, z_1 - z_1^0) &= \frac{1}{2n\pi + \mu} [\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)], & (g, z_2 - z_2^0) &= \frac{1}{(2n\pi + \mu)^2} [\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)]. \end{aligned}$$

Тогда, используя также лемму 2 и оценки

$$v_1^{(j)}(x, \rho) = O(\rho^{j-1}), \quad v_2^{(j)}(x, \rho) = O(\rho^j), \tag{30}$$

получим из представления (29) оценку

$$\begin{aligned} J^{(j)}(x, \rho) &= O(n^{j-2}) [|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|] + O(n^{j-1}) \frac{1}{|2n\pi + \mu|} [|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|] + \\ &+ O(n^{j-1}) \frac{1}{|2n\pi + \mu|} [|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|] + O(n^j) \frac{1}{|2n\pi + \mu|^2} [|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|] = O(n^{j-2} \tilde{\beta}_n(\mu)), \end{aligned} \tag{31}$$

где  $\tilde{\beta}_n(\mu) = \sum_1^8 |\beta_n(\mu)|$  и оценки  $O(\dots)$  равномерны по  $x \in [0, 1]$  и  $\mu \in \gamma_0$ . Отсюда

$$|a_{n,x^j}^{(j)}(x, t)| = \left| \int_{\gamma_0} O(n^{j-3}) \tilde{\beta}_n(\mu) |d\mu| \right|.$$

Если  $j = 0, 1$ , то отсюда  $|a_{n,x^j}^{(j)}(x, t)| = O(n^{-2})$  и тем самым ряды  $\sum |a_{n,x^j}^{(j)}(x, t)|$  сходятся равномерно по  $x \in [0, 1]$  и  $t \in [-T, T]$ .

Далее из (31) следует оценка

$$|a_{n,x^2}^{(2)}(x, t)| = \int_{\gamma_0} O(n^{-1} \tilde{\beta}_n(\mu)) |d\mu|,$$

и поэтому по лемме 6

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |a_{n,x^2}^{(2)}(x, t)| = \int_{\gamma_0} O \left( \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}} \right) |d\mu| = O \left( \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}} \right),$$

где оценка  $O(\dots)$  равномерна по  $x \in [0, 1]$  и  $t \in [-T, T]$ . Тем самым утверждение леммы получено для рядов  $\sum a_{n,x^j}^{(j)}(x, t)$ .

Аналогично (даже проще) исследуются ряды  $\sum a_{n,t^j}^{(j)}(x, t)$ . □



## 5. КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3)

**Теорема 9.** *Формальное решение  $u(x, t)$  задачи (1)–(3) есть классическое решение при  $\varphi(x) \in C^2[0, \pi]$  и выполнении условий (4).*

**Доказательство.** Для формального решения (5) в силу формулы (9) и аналитичности  $M_\rho f$  по лемме 1 имеем формулу

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \cos \rho t \, d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2)}{\lambda - \mu_0} \cos \rho t \, d\lambda. \quad (32)$$

Отсюда в силу оценок (31) по леммам 2–4 получаем, что ряд (32) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием один раз по  $x$  и  $t$ , сходятся абсолютно и равномерно (см. также доказательство леммы 12). Таким образом, в этом случае процедура ускорения сходимости рядов не требуется. Поэтому  $u(x, t)$  удовлетворяет начальным и граничным условиям.

Далее, в силу теоремы 2 и леммы 12 формальное решение  $u(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируемо. Докажем, что  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1). Обозначим через  $M$  оператор  $M = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Тогда по теореме

$$Mu_0(x, t) = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} Mu_1(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} M((R_\lambda g)(x) \cos \rho t) \, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} M \left( \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi)(x) \cos \rho t \, d\lambda \right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} M((R_\lambda \varphi)(x) \cos \rho t) \, d\lambda = \frac{q(x)}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi)(x) \cos \rho t \, d\lambda. \end{aligned}$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} Mu_2(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} M([v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2) - \\ &\quad - v_1^0(x, \rho)(g, z_1^0) - v_2^0(x, \rho)(g, z_2^0)] \cos \rho t) \, d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} M([v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2)] \cos \rho t) \, d\lambda. \end{aligned}$$

Но

$$M(v_j(x, \rho) \cos \rho t) = -v_j''(x, \rho) \cos \rho t - \rho^2 v_j(x, \rho) \cos \rho t = -q(x) v_j(x, \rho) \cos \rho t.$$

Значит,

$$Mu_2(x, t) = \frac{q(x)}{2\pi i} \sum_{n \geq n_0} \int_{\tilde{\gamma}_n} (R_\lambda \varphi)(x) \cos \rho t \, d\lambda,$$

т. е.  $Mu = -q(x)u(x, t)$ . □

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).*

### Библиографический список

1. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М. : Наука, 1983. 432 с.
2. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1953. 360 с.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики : в 4 т. М. : Гостехиздат, 1953. Т. 4. 204 с.
4. Ладыженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. М. : Гостехиздат, 1953. 282 с.
5. Ильин В. А. Избранные труды : в 2 т. М. : Изд-во ООО «Макс-пресс», 2008. Т. 1. 727 с.
6. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН. 1960. Т. 15, вып. 2. С. 97–154.
7. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в сме-



шанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.

8. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.

9. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 2. С. 151–154.

10. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

11. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. М. : Наука, 1964. 462 с.

12. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.

13. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 332 с.

## About the Classical Solution of the Mixed Problem for the Wave Equation

A. P. Khromov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

The classic solution of the mixed problem for a wave equation with a complex potential and minimal smoothness of initial data is established by the Fourier method. The resolvent approach consists of constructing formal solution with the help of the Cauchy–Poincaré method of integrating the resolvent of the corresponding spectral problem over spectral parameter. The method requires no information about eigen and associated functions and uses only the main part of eigenvalues asymptotics. Krylov's idea of accelerating the convergence of Fourier series is essentially employed. The boundary conditions of the mixed problem can produce multiple spectrum and infinite number of associated functions in the spectral problem, thus making more difficult the analysis of the formal solution.

*Key words:* formal solution, spectral problem, resolvent, classical solution.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00238).*

### References

1. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [The main tasks of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1983. 432 p. (in Russian).

2. Petrovsky I. G. *Lectures on partial differential equations*. Dover Publ. Inc., 1992, 245 p. (Rus. ed. : Petrovskii I. G. *Lectioni ob uravneniakh s chastnymi proizvodnymi*. Moscow, GITTL, 1953, 360 p.).

3. Smirnov V. I. *Kurs vysshei matematiki* [A Course of Higher Mathematics : in 5 vol., vol. 4]. Moscow, Gostekhizdat, 1953, 204 p. (in Russian).

4. Ladyzhenskaya O. A. *Smeshannaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Mixed problem for a hyperbolic equation]. Moscow, Gostekhizdat, 1953, 282 p. (in Russian).

5. Il'in V. A. *Izbrannye trudy* [Selected works : in 2 vol.]. Moscow, ООО «Maks-press», 2008, vol. 1, 727 p. (in Russian).

6. Il'in V. A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Rus. Math. Surv.*, 1960, vol. 15, iss. 1, pp. 85–142.

7. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991, 112 p. (in Russian).

8. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniakh matematicheskoi fiziki, imeiushchikh prilozheniia v tekhnicheskikh voprosakh* [On some differential equations of mathematical physics with applications in technical matters]. Leningrad, GITTL, 1950, 368 p. (in Russian).

9. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial-boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 783–786.

10. Naymark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 p. (in Russian).

11. Rasulov M. L. *Metod konturnogo integrala* [The method of the contour integral]. Moscow, Nauka, 1964, 462 p. (in Russian).

12. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, Rostov Univ. Press, 1994, 106 p. (in Russian).

13. Marchenko V. A. *Sturm–Liouville Operators and Applications*. Kiev, Naukova Dumka, 1977, 332 p. (in Russian).



# МЕХАНИКА

УДК 62.534(031)

## УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯМИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

С. П. Безгласный

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С. П. Королева, bezglasnsp@rambler.ru

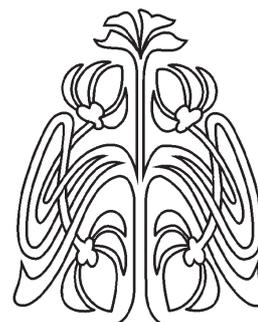
Статья посвящена проблеме синтеза пассивных управлений, решающих задачу об управлении плоских движений двухмассового параметрического маятника в поле силы тяжести. Актуальность исследований определена необходимостью в приборостроении математического конструирования систем управления автоматических механизмов, в частности при исследовании маятниковых движений механических систем. Маятник моделируется двумя одинаковыми невесомыми стержнями с двумя равными точечными массами, двигающимися по окружности вокруг точки закрепления. Управление реализуется путем непрерывного изменения угла между стержнями и является функцией, зависящей от изображающей точки центра масс маятника на фазовой плоскости. Построены два управляющих закона, реализующих процессы раскачивания и затухания маятника в окрестности нижнего положения равновесия по принципу качелей. Задача решена методом функций Ляпунова классической теории устойчивости. Управление получено в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Результаты работы могут быть использованы при проектировании систем управления механизмами в технике и приборостроении.

*Ключевые слова:* маятник, положение равновесия, принцип качелей, стабилизирующее управление, метод функции Ляпунова.

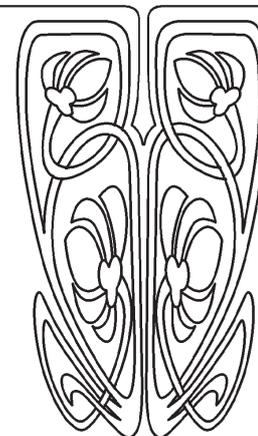
### ВВЕДЕНИЕ

Математический маятник и его обобщения широко используются в прикладных задачах при моделировании движений разных систем. Также он обнаруживает много качественных свойств динамики нелинейной системы, вызывая самостоятельный интерес у современных исследователей. Так, например, в работе [1] получены бифуркационные диаграммы равновесий, исследованы резонансы и показано наличие стохастической паутины вблизи равновесий в задаче о колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании при больших частотах вибраций и малых амплитудах колебаний длины маятника и точки его подвеса. В [2] с помощью метода предельных функций и предельных систем [3] исследована и решена задача о стабилизации релейным управлением программных движений маятника в переменном поле силы тяжести при наличии неучтенных воздействий. Задачи о построении асимптотически устойчивых заданных маятниковых движений волчка Лагранжа на подвижной платформе и руки робота-манипулятора, моделируемой двустепенным маятником переменной длины, решены в работах [4, 5] соответственно.

Одной из классических задач механики о маятниковых движениях является задача о движении качелей. При исследовании динамики



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ



качелей рассматривают две основные модели — одномассовый и двухмассовый маятники. Используя одномассовую модель в виде математического маятника переменной длины, авторы ряда работ, например [6—8], исследовали вопросы устойчивости и неустойчивости верхнего и нижнего положений, влияния сил (сухого, вязкого трений и аэродинамического сопротивления), выбора оптимальных режимов раскачки, гашения колебаний и возникновения резонансов. Двухмассовая модель качелей использована в работах [9—12]. В [9] методами усреднения и принципа максимума решены задачи управления и оптимизации движений для случаев малых колебаний и быстрых вращений путем регулируемой по скорости длиной маятника. В работе [10] синтезированы процессы оптимальной раскачки и оптимального торможения качелей релейным и «релейно-непрерывным» управлением длиной подвеса подвижной массы (без трения и с наличием разных видов трения). В отличие от большинства указанных выше работ, в которых задачи об управлении качелями решались с помощью скачкообразного (релейного) изменения величины перемещения подвижной массы, невозможного для практической реализации в силу инертности масс, авторами работы [11] был предложен гладкий закон движения подвижной массы с непрерывной производной, на основе которого были исследованы управляемые движения в окрестностях нижнего и верхнего положений равновесия качелей и оценены зоны застоя, возникающие при влиянии сил вязкого трения. Применению этого закона управления для диаметральной переориентации и гравитационной стабилизации плоских движений спутника на круговой орбите с помощью подвижной массы по принципу качелей посвящена работа [12]. Но управляющий закон, использованный в этих работах, предполагает неограниченность расстояния от точки подвеса до подвижной массы в обе стороны, в частности, в [11] авторами приведен численный пример, в котором теоретически считается, что стержень продлен вверх за точку подвеса маятника с предоставленной возможностью движения по нему подвижной массы, что является нецелесообразным и крайне затруднительным с точки зрения практической реализации. В работе [13] были предложены новые законы управления подвижной массой по принципу качелей, которые предполагают ограниченность относительного перемещения этой массы вдоль стержня.

В данной работе рассматривается модель параметрического маятника, представляющего совокупность двух симметрично отклоненных от оси симметрии одинаковых по длине и массе маятников с возможностью управлять величиной угла между ними. Предложены законы управления этим углом, позволяющие раскачивать и гасить колебания рассматриваемой модели по принципу качелей. Ограниченность и гладкость закона управления позволяют на основе классической теории устойчивости аналитически доказать асимптотическую устойчивость и неустойчивость различных движений маятника путем построения соответствующих функций Ляпунова. С помощью численного моделирования движений исследуемой системы графически иллюстрируется асимптотическая устойчивость полученных решений.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим параметрический двухмассовый маятник, состоящий из двух равных точечных масс  $m$ , неподвижно закрепленных на концах двух одинаковых невесомых стержней длиной  $b$  (рис. 1). Свободные концы стержней закреплены шарнирно в неподвижной точке  $O$ . Угол между стержнями обозначим  $2\psi$ , тогда на пересечении его биссектрисы с отрезком, соединяющим обе точечные массы, будет находиться центр масс маятника. Расстояние от точки  $O$  до центра масс обозначим  $l$ .

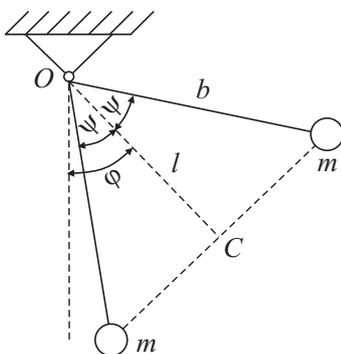


Рис. 1. Маятник

За обобщенную переменную, описывающую движение маятника, примем величину угла отклонения биссектрисы от вертикали  $\varphi$ . Движения маятника происходят в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Управлением будем считать величину угла  $\psi$ , являющуюся непрерывной функцией вектора фазового состояния:

$$\psi = \psi(\varphi, \varphi'),$$

где штрих обозначает производную по времени.

Кинетическая и потенциальная энергии маятника имеют вид

$$T = mb^2 (\varphi'^2 + \psi'^2), \quad \Pi = -2mgb \cos \varphi \cos \psi.$$

Записав лагранжиан рассматриваемой системы:

$$L = T - \Pi = mb^2 (\varphi'^2 + \psi'^2) + 2mgb \cos \varphi \cos \psi,$$



имеем уравнение движения маятника в виде уравнения Лагранжа второго рода:

$$\varphi'' + \frac{g}{b} \sin \varphi \cos \psi = 0, \quad (1)$$

где  $g$  — ускорение сил тяготения.

Поставим и решим следующие задачи управления плоскими движениями параметрического маятника — построить непрерывные законы правления величиной угла  $\psi$ , реализующие раскачку и асимптотическое успокоение колебаний соответственно в окрестности нижнего положения равновесия.

## 2. УПРАВЛЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИМИ ДВИЖЕНИЯМИ МАЯТНИКА

Решение задачи об асимптотическом успокоении колебаний двухмассового маятника относительно его нижнего положения равновесия получим на основе второго метода классической теории устойчивости. Выберем управляющий закон в виде

$$\psi = \arccos \frac{\ell_0 + a\varphi' \sin \varphi}{b}, \quad (2)$$

где величина  $\ell_0 = \text{const} > 0$  задает некоторое положение стержней маятника, соответствующее нижнему положению равновесия, число  $a$  удовлетворяет условию  $0 < a = \text{const} < \ell_0$ .

Подставив (2) в уравнение (1), получим:

$$\varphi'' + \frac{g}{b^2} (\ell_0 + a\varphi' \sin \varphi) \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Для доказательства асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3) выберем функцию Ляпунова  $V = V(\varphi, \varphi')$ :

$$V = \varphi'^2 (1 + k\varphi\varphi') + \frac{2g\ell_0}{b^2} (1 - \cos \varphi). \quad (4)$$

Эта функция при любых значениях коэффициента  $k$  в окрестности нижнего положения равновесия  $\varphi = \varphi' = 0$  является положительно определенной и допускает бесконечно малый высший предел по переменным  $\varphi, \varphi'$ . Оценим полную производную этой функции по времени в силу уравнения (3):

$$V' = -\frac{g}{b^2} (\ell_0 + a\varphi' \sin \varphi) \sin \varphi (2\varphi' + 3k\varphi\varphi'^2) + k\varphi'^4 + \frac{2g\ell_0}{b^2} \varphi' \sin \varphi. \quad (5)$$

Разложив в правой части равенства (5) функцию  $\sin \varphi$  в ряд и выполнив элементарные преобразования и отбросив слагаемые старше четвертой степени по переменным  $\varphi, \varphi'$ , получим, что в окрестности положения  $\varphi = \varphi' = 0$  производная (4) с точностью до слагаемых четвертого порядка малости представима выражением

$$V' \approx k\varphi'^4 - \varphi^2 \varphi'^2 g \left( \frac{3k\ell_0 + 2a}{b^2} \right).$$

При выборе коэффициента  $k$  согласно условиям

$$-\frac{2a}{3\ell_0} < k < 0,$$

например, выберем

$$k = -\frac{a}{3\ell_0},$$

будем иметь оценку производной функции Ляпунова  $V'$  в виде

$$V' \approx -\frac{a}{3\ell_0} \varphi'^4 - \frac{ag}{b^2} \varphi'^2 \varphi^2 \leq -\frac{a}{3\ell_0} \varphi'^4.$$

Таким образом, функция  $V'$  будет знакопостоянной отрицательной функцией по своим переменным  $\varphi, \varphi'$ . Множество, на котором эта производная обращается в ноль, есть множество  $\{\varphi' = 0\}$  и оно не содержит решений системы (3), кроме  $\varphi = 0$ . На основе теоремы Барбашина – Красовского [14] имеем асимптотическую устойчивость нижнего положения равновесия  $\varphi = \varphi' = 0$  маятника.



Проведенные численные расчеты подтверждают сделанные выводы об асимптотической устойчивости нижнего положения равновесия маятника и демонстрируют асимптотическое затухание амплитуды колебаний не только в малой окрестности, но и при произвольно больших начальных отклонениях. На рис. 2 изображен график зависимости угла  $\varphi$  от времени, полученный численным интегрированием уравнения движения (3) при следующих значениях параметров системы:  $l_0 = 2$  м,  $b = 4$  м,  $a = 1$  м,  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>, и начальных данных:  $\varphi(0) = 2$  рад,  $\varphi'(0) = 0$  рад/с. Интегрирование проведено на временном промежутке  $[0, 80]$  с.

На рис. 3 изображен фазовый портрет решения уравнения (3) с управлением (2). Фазовая траектория отображает затухание амплитуды и скорости колебаний маятника вокруг нулевого положения равновесия, начинающихся с достаточно больших значений  $\varphi(0) = 2$  рад начальных отклонений. Графики, представленные на рис. 2 и 3, иллюстрируют очень медленную сходимость решений к нулевому положению равновесия после значений  $\varphi = 0.3$  рад, что позволяет сделать вывод о слабой эффективности предложенных управлений при малых углах отклонений. Тем не менее численное интегрирование, проведенное на больших интервалах времени, подтверждает асимптотическую сходимость решений и отсутствие ненулевых предельных циклов.

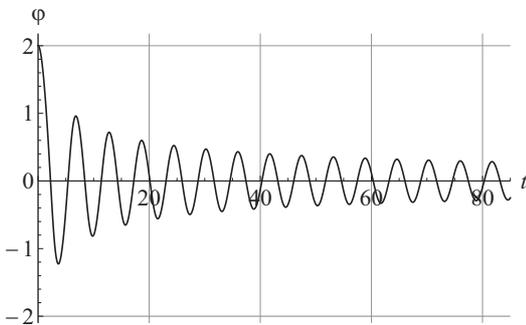


Рис. 2. График величины  $\varphi(t)$

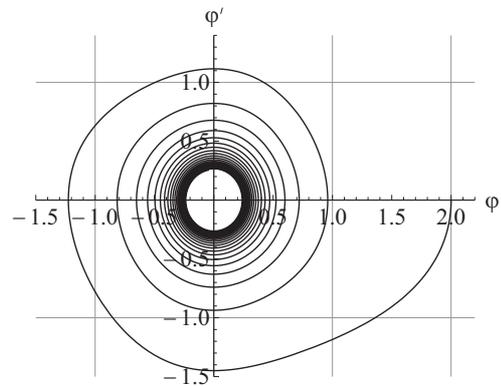


Рис. 3. Фазовый портрет

Рис. 4 демонстрирует поведение величины расстояния  $l$  от точки подвеса до центра масс маятника в зависимости от угла  $\varphi$ . Из него видно, что перемещения точки вдоль прямой  $O$  происходят в окрестности величины  $l_0$ , и точка с течением времени асимптотически приближается к положению  $l_0$ . На рис. 5 представлено поведение величины  $\psi(t)$ , изменяющейся согласно управляющему закону (2). График демонстрирует асимптотическое приближение величины  $\psi(t)$  к значению  $\psi = \arccos \frac{l_0}{b}$  с течением времени.

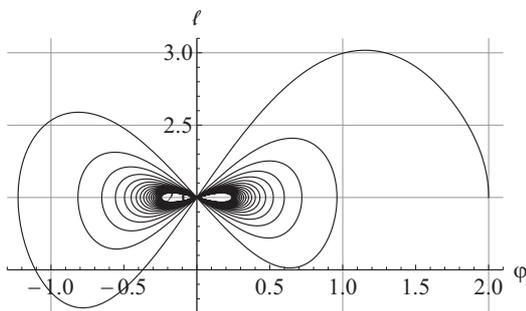


Рис. 4. График величины  $l(\varphi)$

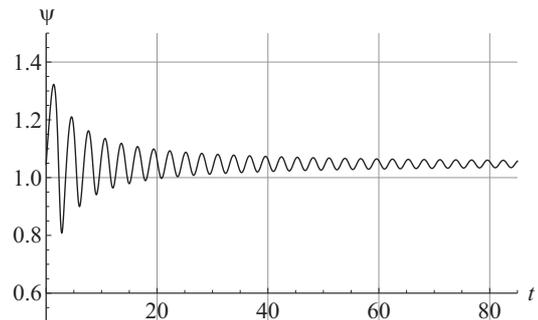


Рис. 5. График величины  $\psi(t)$

### 3. РАСКАЧКА МАЯТНИКА

Применим аналогичный подход к решению задачи о раскачке маятника из произвольной окрестности нижнего положения равновесия. Заметим, что при нулевых начальных значениях  $\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = 0$  система (1) является неуправляемой для всех  $t_0 < t < \infty$  при любом законе управ-



ления вида  $\psi = \psi(\varphi, \varphi')$ . Однако если выбором этого закона добиться, чтобы положение  $\varphi = \varphi' = 0$  системы было неустойчивым по Ляпунову, то действующие на систему внешние возмущения выведут ее из положения равновесия, и станет возможным эффективный процесс управления — раскачка.

Выбрав закон управления в виде

$$\psi = \arccos \frac{\ell_0 - a\varphi' \sin \varphi}{b} \quad (6)$$

и подставив (6) в уравнение (1), получим уравнение управляемого возмущенного движения маятника в окрестности исследуемого нулевого решения  $\varphi = \varphi' = 0$ :

$$\varphi'' + \frac{g}{b^2} (\ell_0 - a\varphi' \sin \varphi) \sin \varphi = 0. \quad (7)$$

Для доказательства неустойчивости нулевого решения системы (7) воспользуемся положительно определенной функцией Ляпунова (4). Ее полная производная по времени в силу уравнения (7) с точностью до слагаемых четвертого порядка малости включительно по переменным  $\varphi, \varphi'$  имеет вид

$$V' \approx k\varphi'^4 + \varphi^2 \varphi'^2 g \frac{2a - 3k\ell_0}{b^2}. \quad (8)$$

При выборе коэффициента  $k$  согласно условиям

$$0 < k < \frac{2a}{3\ell_0},$$

например, выберем

$$k = \frac{a}{3\ell_0},$$

будем иметь оценку производной (8) в виде

$$V' \approx \frac{a}{3\ell_0} \varphi'^4 + \frac{ag}{b^2} \varphi'^2 \varphi^2.$$

На основе первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [14] имеем неустойчивость нижнего положения равновесия  $\varphi = \varphi' = 0$  маятника.

На рис. 6 изображен график зависимости угла  $\varphi$  от времени, полученный численным интегрированием уравнения движения (7) при следующих значениях параметров системы:  $\ell_0 = 2$  м,  $b = 4$  м,  $a = 2/3$  м,  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup> и начальных данных:  $\varphi(0) = 0.3$  рад,  $\varphi'(0) = 0$  рад/с. Интегрирование проведено на временном промежутке  $[0, 120]$  с.

На рис. 7 изображен соответствующий фазовый портрет. Фазовая траектория отображает нарастание с течением времени амплитуды и скорости колебания двухмассового маятника и переход от колебаний к вращательному движению.

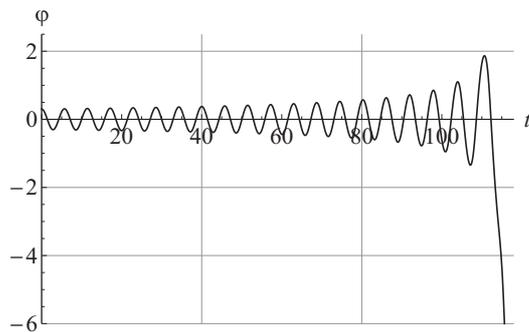


Рис. 6. График величины  $\varphi(t)$

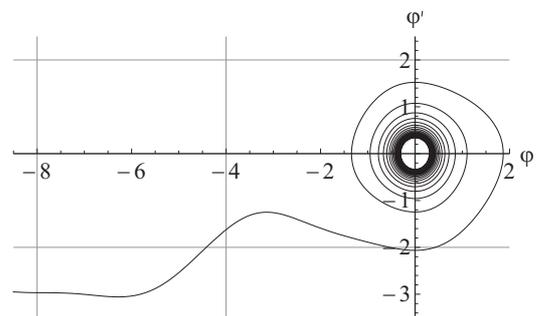
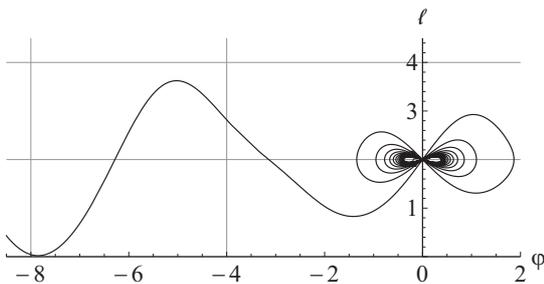
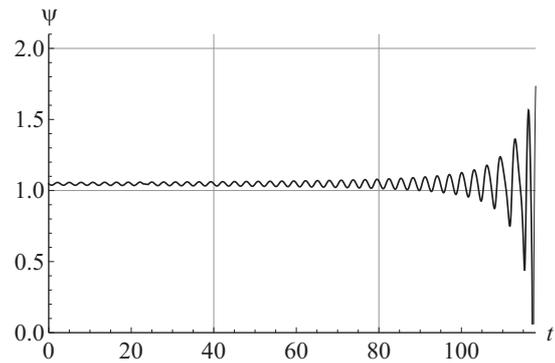


Рис. 7. Фазовый портрет

Рис. 8 демонстрирует поведение величины расстояния  $\ell$  от точки подвеса до центра масс маятника в зависимости от угла  $\varphi$ , которая при нарастании отклонений и скоростей и переходе маятника от колебательных к вращательным движениям может существенно удалиться от значения  $\ell_0$ .

На рис. 9 представлено поведение величины  $\psi(t)$ , изменяющейся согласно управляющему закону (6).

Рис. 8. График величины  $l(\varphi)$ Рис. 9. График величины  $\psi(t)$ 

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для задачи параметрического управления плоскими движениями двухмассового маятника предложены законы управления его раскачкой и асимптотическим успокоением путем непрерывного изменения величины угла между стержнями, зависящей от фазового состояния центра масс маятника. Для предложенных законов управления методом функций Ляпунова доказаны асимптотическая устойчивость и неустойчивость соответственно успокоения и раскачки маятника относительно нижнего положения равновесия. Теоретические результаты подтверждены и проиллюстрированы численными расчетами. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании управляемых маятниковых движений различных механических систем.

*Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 9.540.2014/К).*

## Библиографический список

1. Красильников П. С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании // ПММ. 2012. Т. 76, вып. 1. С. 36–51. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.03.003.
2. Андреев А. С. Метод функций Ляпунова в задачах управления // Журн. Средневолжского матем. о-ва. 2010. Т. 12, № 4. С. 64–73.
3. Андреев А. С. Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // ПММ. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 388–396. DOI: 10.1016/S0021-8928(96)00048-2.
4. Безгласный С. П., Мысина О. А. Стабилизация программных движений твердого тела на подвижной платформе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 44–52.
5. Безгласный С. П., Батина Е. С., Воробьев А. С. Синтез асимптотически устойчивых движений руки робота-манипулятора // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 36–42.
6. Стрижак Т. Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». Алма-Ата : Наука, 1981. 253 с.
7. Сейранян А. П. Качели. Параметрический резонанс // ПММ. 2004. Т. 68, вып. 5. С. 847–856. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2004.09.011.
8. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Устойчивость равновесия маятника переменной длины // ПММ. 2009. Т. 73, вып. 6. С. 893–901. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2010.01.004.
9. Акуленко Л. Д. Параметрическое управление колебаниями и вращениями физического маятника (качели) // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 2. С. 82–91. DOI: 10.1016/0021-8928(93)90058-T.
10. Лавровский Э. К., Формальский А. М. Оптимальное управление раскачиванием качелей // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 2. С. 92–101. DOI: 10.1016/0021-8928(93)90059-U.
11. Асланов В. С., Безгласный С. П. Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 3. С. 32–46. DOI: 10.3103/S002565441203003X.
12. Асланов В. С., Безгласный С. П. Гравитационная стабилизация спутника с помощью подвижной массы // ПММ. 2012. Т. 76, вып. 4. С. 563–573. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.007.
13. Безгласный С. П., Пиякина Е. Е., Талипова А. А. Ограниченное управление двухмассовым маятником // Автоматизация процессов управления. 2013. Т. 34, № 4. С. 35–41.
14. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. 530 с.



## On Control of Motion of a Parametric Pendulum

S. P. Bezglasnyi

S. P. Korolyov Samara State Aerospace University, 34, Moskovskoe shosse, 443086, Samara, Russia, bezglasnsp@rambler.ru

The paper is devoted to a passive control problem. The problem of control of plane motions of a two-mass parametric pendulum in a uniform gravitational field is considered. The problem is important for and necessary in software design of automated systems for control of mechanisms. In particular, it can be applied to various modeling problems of pendulum motions of mechanical systems. The pendulum is modeled by two equivalent weightless rods with two equivalent point masses moving along the circle centered at the pivot. The control is carried out by varying continuously the angle between two rods. It is a function that depends on the representative point of the gravity center of pendulum in the phase plane. Two control processes of excitation and damping pendulum near the lower equilibrium position by swing principle are constructed. The problem is resolved by the method of Lyapunov's functions known from the classical theory of stability. The control is obtained in the form of closed form solution in the class of continuous functions. The obtained results are an important contribution to development of control mechanisms in engineering.

**Key words:** pendulum, equilibrium position, swing principle, stabilizing control, the method of Lyapunov's functions.

*The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 9.540.2014/K).*

### References

1. Krasil'nikov P. S. The Non-linear oscillations of a pendulum of variable length on a vibrating base. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 2012, vol. 76, iss. 1, pp. 25–35. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.03.003.
2. Andreev A. S. Lyapunov Functions Method in the Problems of Control. *J. Srednevolzhskogo Math. Obschestva*, 2010, vol. 12, no. 4, pp. 64–73 (in Russian).
3. Andreev A. S. On the stability of equilibrium position of the non-autonomous mechanical system. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 1996, vol. 60, iss. 3, pp. 388–396. DOI: 10.1016/S0021-8928(96)00048-2.
4. Bezglasnyi S. P., Mysina O. A. Stabilization of Program Motions of a Rigid Body on a Moving Platform. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 4, pp. 44–52 (in Russian).
5. Bezglasnyi S. P., Batina E. S., Vorobyov A. S. Synthesis of Asymptotically Stable Motion of a Robot Arm Manipulator. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 4, pt. 1, pp. 36–42 (in Russian).
6. Strizhak T. G. *Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa «majatnik»* [Methods for Studying «Pendulum»-Type Dynamical Systems]. Alma-Ata, Nauka, 1981, 253 p. (in Russian).
7. Seyranian A. P. The swing : Parametric resonance. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 2004, vol. 68, iss. 5, pp. 757–764. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2004.09.011.
8. Akulenko L. D., Nesterov S. V. The stability of the equilibrium of a pendulum of variable length. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 2009, vol. 73, iss. 6, pp. 642–647. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2010.01.004.
9. Akulenko L. D. Parametric control of vibrations and rotations of a compound pendulum (a swing). *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 1993, vol. 57, iss. 2, pp. 301–310. DOI: 10.1016/0021-8928(93)90058-T.
10. Lavrovskii E. K., Formal'skii A. M. Optimal control of the pumping and damping of a swing. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 1993, vol. 57, iss. 2, pp. 311–320. DOI: 10.1016/0021-8928(93)90059-U.
11. Aslanov V. S., Bezglasnyi S. P. Stability and instability of controlled motions of a two-mass pendulum of variable length. *Mechanics of Solids*, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 285–297. DOI: 10.3103/S002565441203003X.
12. Aslanov V. S., Bezglasnyi S. P. Gravitational stabilization of a satellite using a movable mass. *J. Prikl. Mat. Mekh.*, 2012, vol. 76, iss. 4, pp. 405–412. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.007.
13. Bezglasnyi S. P., Pijakina E. E., Talipova A. A. Limited Control of Dual-mass Pendulum Motion. *Avtomatizacija processov upravlenija*, 2013, vol. 34, no. 4, pp. 35–41 (in Russian).
14. Malkin I. G. *Teoriya ustojchivosti dvizhenija* [Theory of Motion Stability]. Moscow, Nauka, 1966, 530 p. (in Russian).



УДК 539.3+514.4

## ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ В СЛУЧАЕ ЖЕСТКОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ КРАЕВ ОБОЛОЧКИ

Л. В. Бессонов

Старший преподаватель кафедры прикладной информатики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, lexh@sgu.ru

В статье исследуется модель Кармана для случая прямоугольной в плане оболочечной конструкции с жестким закреплением краев. Построена ортонормированная система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи. Решение модельной задачи получено методом В. В. Петрова — методом последовательного возмущения параметров — с использованием построенной системы базисных функций. Приведены решения с опорными промежуточными результатами для оболочечной конструкции, исполненной из катанного дюралюминия.

*Ключевые слова:* оболочечная конструкция, численный эксперимент, модель Кармана, метод последовательного возмущения параметров.

В работе впервые предложено использование ортонормированной системы функций, удовлетворяющей граничным условиям жесткого закрепления оболочечной конструкции, при расчёте напряжённно-деформированного состояния методом последовательного возмущения параметров [1–3]. На каждом шаге линеаризации исходной нелинейной задачи используется метод Бубнова – Галёркина, который в отличие от приводимых ранее в работе [4] вычислениях использует ортонормированную систему, удовлетворяющую граничным условиям, что позволяет повысить скорость вычислений.

Результаты вычислений говорят о том, что в случае оболочечной конструкции с жестким закреплением по краям не наблюдается потери устойчивости конструкции в целом. Стоит отметить, что ранее этот факт был теоретически получен в работе [5].

Проиллюстрируем указанный во введении метод на примере геометрически нелинейной модели Кармана для прямоугольной в плане оболочки с жёстким закреплением краёв:

$$\begin{cases} D\Delta^2 W - L(W, F) - \Delta_k F = q, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(W, W) - \Delta_k W, \\ W|_{\Gamma} = F|_{\Gamma} = \frac{\partial W}{\partial \eta}\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial F}{\partial \eta}\Big|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость, определяемая по формуле  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  ( $\nu$  — коэффициент Пуассона),  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $L(W, F) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$  — отражает гауссову кривизну деформированной срединной поверхности оболочки,  $\Delta_k = k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $k_x$  и  $k_y$  характеризуют кривизну поверхности оболочки вдоль соответствующих осей,  $q$  — величина нормальной нагрузки,  $W$  — функция прогиба,  $F$  — функция усилий,  $E$  — модуль Юнга.

На практике характеристику решений нелинейной модели (1) получают на основании решений системы нелинейных уравнений, которые получаются путём приведения уравнений (1) к безразмерному виду. Переход от системы (1) к системе уравнений в безразмерном виде осуществляется путём следующей замены переменных:

$$\begin{aligned} x &= L\bar{x}, & y &= R\bar{y}, & W &= H\bar{w}, & F &= EH^2\bar{f}, & k_y &= \frac{EH^4}{L^2 R^2} \bar{q}, \\ & & & & \bar{q} &= \bar{q}_1 \bar{K}_y^2, & \lambda &= \frac{1}{\tau}. \end{aligned}$$



Как показано в [6], соответствующая система уравнений в безразмерном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \\ = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + K_y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + q K_y^2, \\ \left( \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ w = \frac{\partial w}{\partial x} = F = \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, x = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Отметим, что в системе (2) используются те же обозначения для искомым функций и параметров, что и в системе (1). Будем считать в дальнейшем, что параметры кривизны  $K_x = 0$ ,  $K_y = 15$ , коэффициент соотношения сторон  $\lambda = 2$ , а коэффициент Пуассона  $\nu = 0,35$ , что соответствует катанному дюралюминию [7].

Построим линейно независимую систему функций, определенных в области  $D = [0, 1] \times [0, 1]$  и удовлетворяющих граничным условиям задачи Коши (2). С этой целью введём следующую вспомогательную функцию:

$$\phi(x, y) = (xy(x-1)(y-1))^2.$$

Определим систему функций  $\{p_{i,j}(x, y)\}$  следующим образом:

$$\mathcal{P} = \{p_{i,j}(x, y) : p_{i,j}(x, y) = \phi(x, y)x^i y^j\}, \quad i \in \mathbb{N}_+, \quad j \in \mathbb{N}_+.$$

Обозначим через  $\mathcal{P}_k$  подмножество  $\mathcal{P}$ , состоящее из  $p_{i,j}$ , где  $i = \overline{0, k-1}$ ,  $j = \overline{0, k-1}$ .

Выполним процедуру понижения размерности мультииндекса. Сведём мультииндекс  $(i, j)$  системы функций  $\mathcal{P}_k$  к одномерному индексу  $m$ . Для этого в качестве первого элемента возьмём новую систему функций  $p_{0,0}(x, y)$ . Считая, что  $\mathcal{P}_k$  — квадратная матрица порядка  $k$ , будем брать угловые миноры этой матрицы, исключая из них элементы, уже находящиеся в новой системе. Таким образом, новая система образуется из серий элементов  $\mathcal{P}_k$ . В таблице отмечены номера серий, в которые попадают исходные элементы  $\mathcal{P}_k$ . Для определенности внутри серии будем упорядочивать элементы сначала по убыванию номера столбца, а затем по возрастанию номера строки. Образованную в результате систему функций с непрерывной нумерацией по одномерному индексу обозначим  $\mathcal{R}_k$ .

$i \backslash j$	1	2	3	...	$k$
1	1	2	3	...	$k$
2	2	2	3	...	$k$
3	3	3	3	...	$k$
...	...	...	...	...	...
$k$	$k$	$k$	$k$	...	$k$

Легко видеть, что система функций  $\mathcal{R}_k$  является линейно независимой в области, ограниченной  $\Gamma$  для любого произвольного целого  $k$ . Действительно, каждая функция  $r_k$  представляет собой произведение двух элементов линейно независимых систем функций.

При построении приближённого решения задачи (2) ограничимся системой полиномов  $\mathcal{R}_3$ . Выполним процедуру понижения размерности мультииндекса для  $\mathcal{P}_3$  и запишем получившиеся функции системы  $\mathcal{R}_3$  в явном виде:

$$\begin{aligned} r_0(x, y) &= p_{0,0}(x, y) = x^4 y^4 - 2x^4 y^3 + x^4 y^2 - 2x^3 y^4 + 4x^3 y^3 - 2x^3 y^2 + x^2 y^4 - 2x^2 y^3 + x^2 y^2, \\ r_1(x, y) &= p_{0,1}(x, y) = x^4 y^5 - 2x^4 y^4 + x^4 y^3 - 2x^3 y^5 + 4x^3 y^4 - 2x^3 y^3 + x^2 y^5 - 2x^2 y^4 + x^2 y^3, \\ r_2(x, y) &= p_{1,0}(x, y) = x^5 y^4 - 2x^5 y^3 + x^5 y^2 - 2x^4 y^4 + 4x^4 y^3 - 2x^4 y^2 + x^3 y^4 - 2x^3 y^3 + x^3 y^2, \\ r_3(x, y) &= p_{1,1}(x, y) = x^5 y^5 - 2x^5 y^4 + x^5 y^3 - 2x^4 y^5 + 4x^4 y^4 - 2x^4 y^3 + x^3 y^5 - 2x^3 y^4 + x^3 y^3, \\ r_4(x, y) &= p_{0,2}(x, y) = x^4 y^6 - 2x^4 y^5 + x^4 y^4 - 2x^3 y^6 + 4x^3 y^5 - 2x^3 y^4 + x^2 y^6 - 2x^2 y^5 + x^2 y^4, \\ r_5(x, y) &= p_{1,2}(x, y) = x^5 y^6 - 2x^5 y^5 + x^5 y^4 - 2x^4 y^6 + 4x^4 y^5 - 2x^4 y^4 + x^3 y^6 - 2x^3 y^5 + x^3 y^4, \\ r_6(x, y) &= p_{2,0}(x, y) = x^6 y^4 - 2x^6 y^3 + x^6 y^2 - 2x^5 y^4 + 4x^5 y^3 - 2x^5 y^2 + x^4 y^4 - 2x^4 y^3 + x^4 y^2, \\ r_7(x, y) &= p_{2,1}(x, y) = x^6 y^5 - 2x^6 y^4 + x^6 y^3 - 2x^5 y^5 + 4x^5 y^4 - 2x^5 y^3 + x^4 y^5 - 2x^4 y^4 + x^4 y^3, \\ r_8(x, y) &= p_{2,2}(x, y) = x^6 y^6 - 2x^6 y^5 + x^6 y^4 - 2x^5 y^6 + 4x^5 y^5 - 2x^5 y^4 + x^4 y^6 - 2x^4 y^5 + x^4 y^4. \end{aligned}$$



Проведём процесс ортогонализации Гильберта – Шмидта для  $\mathcal{R}_3$ , а затем нормализацию построенных таким образом многочленов:

$$\widehat{\mathcal{R}}_3 = \left\{ \hat{r}_m(x, y) : \hat{r}_m(x, y) = \frac{\tilde{r}_m(x, y)}{\|\tilde{r}_m(x, y)\|_{L_2}}, \tilde{r}_0(x, y) = r_0, \tilde{r}_m(x, y) = r_m - \sum_{j=0}^{m-1} \langle r_m, r_j \rangle r_m(x, y) \right\}, \quad (3)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает

$$\langle u, v \rangle = \frac{\int_0^1 \int_0^1 u(x, y)v(x, y) dx dy}{\int_0^1 \int_0^1 v(x, y)v(x, y) dx dy}. \quad (4)$$

Система функций  $\widehat{\mathcal{R}}_3$  является ортонормированной. В формулах (3) и (4) двойной интеграл по области  $D$  заменён на повторный по отрезкам  $[0; 1]$  соответствующих координатных осей, так как несложно видеть, что многочлены  $r_m$  удовлетворяют теореме Тонелли – Фубини.

Выпишем полученную систему функций  $\widehat{\mathcal{R}}_3$  в явном виде:

$$\begin{aligned} \hat{r}_0(x, y) &= 630x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2, \\ \hat{r}_1(x, y) &= 1260\sqrt{11}(x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 - \frac{1}{2}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2), \\ \hat{r}_2(x, y) &= 1260\sqrt{11}(x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 - \frac{1}{2}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2), \\ \hat{r}_3(x, y) &= 27720x^3y^3(x-1)^2(y-1)^2 - 13860x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 - \\ &\quad - 13860x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 + 6930x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2, \\ \hat{r}_4(x, y) &= 2772\sqrt{65}(x^2y^4(x-1)^2(y-1)^2 - x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{5}{22}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2), \\ \hat{r}_5(x, y) &= 5544\sqrt{715}(x^3y^4(x-1)^2(y-1)^2 - x^3y^3(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{5}{22}x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}x^2y^4(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{1}{2}x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 - \frac{5}{44}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2), \\ \hat{r}_6(x, y) &= 2772\sqrt{65}(x^4y^2(x-1)^2(y-1)^2 - x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{5}{22}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2), \\ \hat{r}_7(x, y) &= 5544\sqrt{715}(x^4y^3(x-1)^2(y-1)^2 - \frac{1}{2}x^4y^2(x-1)^2(y-1)^2 - \\ &\quad - x^3y^3(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{1}{2}x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 + \frac{5}{22}x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 - \frac{5}{44}x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2), \\ \hat{r}_8(x, y) &= 792792x^4y^4(x-1)^2(y-1)^2 - 792792x^4y^3(x-1)^2(y-1)^2 + 180180x^4y^2(x-1)^2(y-1)^2 - \\ &\quad - 792792x^3y^4(x-1)^2(y-1)^2 + 792792x^3y^3(x-1)^2(y-1)^2 - 180180x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 + \\ &\quad + 180180x^2y^4(x-1)^2(y-1)^2 - 180180x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 + 40950x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2. \end{aligned}$$

Используем систему  $\widehat{\mathcal{R}}_3$  для нахождения приближённого решения модельной задачи (2) методом Бубнова – Галёркина. Запишем систему равенств (5), полученную на основании ортогональности функций, определённых уравнениями системы (2), и функций  $\hat{r}_m(x)$ ,  $m = 0, \dots, 8$ :

$$\begin{cases} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - K_y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - qK_y^2 \right] \hat{r}_m(x, y) dx dy = 0, \\ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \hat{r}_m(x, y) dx dy = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Подставив в систему равенств (5) приближённое решение в виде

$$w_9(x, y) = \sum_{m=0}^8 a_m \hat{r}_m(x, y), \quad F_9(x, y) = \sum_{m=0}^8 b_m \hat{r}_m(x, y), \quad (6)$$



и вычислив соответствующие двойные интегралы, получим систему 18 нелинейных алгебраических уравнений с 18 неизвестными коэффициентами разложения (6).

Более простым в плане вычислений является метод последовательного возмущения параметров, который сводит решение нелинейной системы уравнений (2) к последовательному решению ряда линейных систем уравнений. Разобьём параметр  $q$  на сумму параметров  $q_n$ :

$$\sum q_n = q, \quad \text{где} \quad \|q_n\| \leq 0,05.$$

Для получения функции прогиба и функции усилий на  $n$ -м шаге будем решать линейную систему уравнений, полученную в результате линеаризации системы (2) в точке  $(w^{n-1}, F^{n-1})$ . Подставляя выражения

$$w = w^n - w^{n-1} = \sum_{k=0}^8 a_k \hat{r}_k(x), \quad F = F^n - F^{n-1} = \sum_{k=0}^8 b_k \hat{r}_k(x), \quad (7)$$

в систему равенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \left( \frac{\partial^2 w_9^{(n-1)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_9^{(n-1)}}{\partial y^2} \right) - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial^2 w_9^{(n-1)}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F_9^{(n-1)}}{\partial x^2} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 w_9^{(n-1)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F_9^{(n-1)}}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\ \left. - K_y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - q_n K_y^2 \right] \hat{r}_m(x, y) dx dy = 0, \\ \int_0^1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) + \left( \frac{\partial^2 w_0^{(n-1)}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0^{(n-1)}}{\partial x^2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \hat{r}_m(x, y) dx dy = 0 \end{array} \right.$$

и вычисляя соответствующие двойные интегралы, получим систему 18 линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  разложения (7). В явном виде эта система выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} 228.97a_0 + 65.636a_2 - 16.409a_6 + 17.639a_8 + 180.0b_0 - 145.12b_6 - 7.875 = 0, \\ -180.0a_0 - 11.0a_4 + 145.12a_6 + 2430.0b_0 + 696.58b_2 - 174.14b_6 + 187.2b_8 = 0, \\ 1603.9a_1 - 74.752a_7 + 180.0b_1 - 145.12b_7 = 0, \\ -180.0a_1 + 11.0a_3 - 17.737a_5 + 145.12a_7 + 17022.0b_1 - 793.33b_7 = 0, \\ 65.636a_0 + 6361.9a_2 + 17.639a_6 - 165.18a_8 + 180.0b_2 - 145.12b_8 - 3.628 = 0, \\ -180.0a_2 + 17.737a_4 + 145.12a_8 + 696.58b_0 + 67518.0b_2 + 187.2b_6 - 1753.1b_8 = 0, \\ 382.75a_3 + 7.2929a_5 + 660.0b_3 = 0, \\ 11.0a_1 - 660.0a_3 - 17.737a_7 + 4062.0b_3 + 77.398b_5 = 0, \\ 1950.7a_4 + 660.0b_4 = 0, \\ -11.0a_0 + 17.737a_2 - 660.0a_4 + 17.737a_6 - 28.6a_8 + 20702.0b_4 = 0, \\ 7.2929a_3 + 7007.8a_5 + 660.0b_5 = 0, \\ -17.737a_1 - 660.0a_5 + 28.6a_7 + 77.398b_3 + 74372.0b_5 = 0, \\ -16.409a_0 + 17.639a_2 + 785.28a_6 - 83.139a_8 - 145.12b_0 + 1404.0b_6 - 3.628 = 0, \\ 145.12a_0 + 17.737a_4 - 1404.0a_6 - 174.14b_0 + 187.2b_2 + 8334.0b_6 - 882.33b_8 = 0, \\ -74.752a_1 + 2652.3a_7 - 145.12b_1 + 1404.0b_7 = 0, \\ 145.12a_1 - 17.737a_3 + 28.6a_5 - 1404.0a_7 - 793.33b_1 + 28148.0b_7 = 0, \\ 17.639a_0 - 165.18a_2 - 83.139a_6 + 8173.1a_8 - 145.12b_2 + 1404.0b_8 - 1.6714 = 0, \\ 145.12a_2 - 28.6a_4 - 1404.0a_8 + 187.2b_0 - 1753.1b_2 - 882.33b_6 + 86739.0b_8 = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

Решая получившуюся СЛАУ (8), определим функции  $w^k$  и  $F^k$ .



В результате итерационного процесса получаем соответствующую функцию прогиба, например:

$$w_9^{(8)}(x, y) = 909.63x^4y^4(x-1)^2(y-1)^2 - 909.59x^4y^3(x-1)^2(y-1)^2 + 1155.2x^4y^2(x-1)^2(y-1)^2 - \\ - 909.57x^3y^4(x-1)^2(y-1)^2 + 908.85x^3y^3(x-1)^2(y-1)^2 - 1154.8x^3y^2(x-1)^2(y-1)^2 + \\ + 234.96x^2y^4(x-1)^2(y-1)^2 - 234.62x^2y^3(x-1)^2(y-1)^2 + 448.8x^2y^2(x-1)^2(y-1)^2.$$

В процессе вычислительного эксперимента было выяснено, что величина отклонений приближённых решений, полученных в результате использования системы  $\mathcal{R}_3$  и  $\mathcal{R}_4$  отличаются на величину не превосходящую  $10^{-5}$ . Рассматривая системы  $\mathcal{R}_n$  и соответствующие приближённые решения нелинейной модели (2) при больших значениях  $n$ , можно заключить, что при жёстком закреплении краёв оболочечной конструкции не наблюдается потери устойчивости оболочки в целом. Этот факт был теоретически обоснован в работе [5]. Следует заметить также, что предложенная в данной работе методика нахождения функции прогиба применима не только для прямоугольных в плане оболочечных конструкций.

### Библиографический список

1. Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1975. 118 с.
2. Кузнецов В. В., Петров В. В. Использование метода возмущённой области интегрирования при решении нелинейных краевых задач теории гибких пластин и оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 176–178.
3. Петров В. В., Овчинников И. Г., Иноземцев В. К. Деформирование элементов конструкций из нелинейного равномодульного неоднородного материала. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1988. 160 с.
4. Шабанов Л. Е. Вопросы численной реализации метода последовательных возмущений параметров при расчёте оболочечных конструкций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2005.
5. Кузнецов В. Н. Метод последовательного возмущения параметров в приложении к расчету динамической устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций : дис. ... д-ра техн. наук. Саратов, 2000.
6. Бессонов Л. В. Численная реализация алгоритма спектрального критерия локальной потери устойчивости оболочечной конструкции // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 7. С. 3–9.
7. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наук. думка, 1988. 734 с.

## Numerical Implementation of Method of Subsequent Perturbation of Parameters for Computation of Stress-Strain State of a Shell Rigidly Fixed on the Boundaries

L. V. Bessonov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, lexx@sgu.ru

The Karman model for a shell rectangular in the plan with rigid fixation of the boundaries is considered. An orthonormalized system of basis functions satisfying the boundary conditions of the problem is obtained. Linearization of the problem is given and the solution is obtained by the method of subsequent perturbation of parameters due to Vladlen V. Petrov. The solutions including supporting intermediate results for the shell made of rolled duralumin are discussed.

*Key words:* shell, numerical experiment, the model Karman, method of sequential perturbation of a parameters.

### References

1. Petrov V. V. Metod posledovatel'nykh nagruzhenii v nelineinoi teorii plastin i obolochek [Method of successive loadings in nonlinear theory of plates and shells]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1975, 118 p. (in Russian).
2. Kuznecov V. V., Petrov V. V. Ispol'zovanie metoda vozmushchennoi oblasti integrirvaniia pri reshenii nelineinykh kraevykh zadach teorii gibkikh plastin i obolochek [Using the method of perturbed region of integration in the solution of nonlinear boundary value problems of the theory of flexible plates and shells]. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1985, no. 2, pp. 176–178 (in Russian).
3. Petrov V. V., Ovchinnikov I. G., Inozemcev V. K. Deformirovanie elementov konstruktzii iz nelineinogo ravnomodul'nogo neodnorodnogo materiala [The deformation of the structural elements of nonlinear runmodule heterogeneous material]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1988, 160 p.
4. Shabanov L. E. *Voprosy chislennoi realizatsii metoda posledovatel'nykh vozmushchenii parametrov pri raschete obolochechnykh konstruktzii*: Diss. kand. fiz.-



mat. nauk [Issues of numerical implementation of the method consistent perturbation parameters when calculating shell designs : Dr. phys. and math. sci. diss.]. Saratov, 2005. (in Russian).

5. Kuznecov V. N. *Metod posledovatel'nogo vozmushcheniia parametrov v prilozhenii k raschetu dinamicheskoi ustoiichivosti tonkostennykh obolochechnykh konstruksii* : Diss. kand. tehn. nauk [The method of successive perturbations of the parameters in the application to the calculation of dynamic stability of thin-walled shell structures : Dr. techn. sci. diss.]. Saratov, 2000 (in Russian).

6. Bessonov L. V. Chislennaia realizatsiia algoritma

spektral'nogo kriteriia lokal'noi poteri ustoiichivosti obolochechnoi konstruktsii [Numerical realization of algorithm of spectral criterion of local buckling of shell structures]. *Issledovaniia po algebre, teorii chisel, funktsional'nomu analizu i smezhnym voprosam* : mezhvuz. sb. nauch. tr. [Research in algebra, number theory, functional analysis and related issues : inter-university collection of scientific papers], Saratov, Saratov Univ Press, 2012, iss. 7, pp. 3–9.

7. Pisarenko G. S., Jakovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniiu materialov* [The reference resistance of materials]. Kiev, Naukova dumka, 1988, 734 p.

## ON WEAK DISCONTINUITIES AND JUMP EQUATIONS ON WAVE SURFACES IN MICROPOLAR THERMOELASTIC CONTINUA

V. A. Kovalev<sup>1</sup>, E. V. Murashkin<sup>2</sup>, Yu. N. Radayev<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Moscow City Government University of Management Moscow, 28, Sretenka str., 107045, Moscow, Russia, vlad\_koval@mail.ru

<sup>2</sup>National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), 31, Kashirskoe shosse, 115409, Moscow, Russia, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

<sup>3</sup>Institute for Problems in Mechanics of RAS, 101-1, Vernadskogo ave., 119526, Moscow, Russia, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

The present study is devoted to problem of propagating surfaces of weak and strong discontinuities of translational displacements, microrotations and temperature in micropolar (MP) thermoelastic (TE) continua. Problems of propagation of weak discontinuities in type-I MPTE continua are discussed. Geometrical and kinematical compatibility conditions due to Hadamard and Thomas are used to study possible wave surfaces of weak discontinuities. Weak discontinuities are discriminated according to spatial orientations of the discontinuities polarization vectors (DPVs). It is shown that the surfaces of weak discontinuities can propagate exist without weak discontinuities of the temperature field. Second part of the paper is concerned the discussions of the propagating surfaces of strong discontinuities of field variables in type-II MPTE continua. Constitutive relations for hyperbolic thermoelastic type-II micropolar continuum is derived by the field theory. The special form of the first variation of the action integral is used in order to obtained 4-covariant jump conditions on wave surfaces. Three-dimensional form of the jump conditions on the surface of a strong discontinuity of thermoelastic field are derived from 4-covariant form.

*Key words:* micropolar thermoelasticity, type-I continuum, type-II continuum, weak discontinuity, strong discontinuity, shock wave, longitudinal wave, transverse wave, compatibility condition, jump.

### 1. PRELIMINARY REMARKS

Problems of micropolar continua take its origin from the classical E. and F. Cosserat's paper [1]. Micropolar (MP) continuum theories include not only translational displacements but also additional degrees of freedom. These degrees of freedom are coupled with changes in reper (three directors) associated with microvolume. Such changes may be described by a rotation vector when reper associated with microvolume are rigid rotated. In contrary to conventional elasticity a continuum with microstructure is described by the asymmetric strain and stress tensors known from many previous discussions. Thus the asymmetric elastic theory is characterized by a comparatively large number of constitutive elastic constants need to be determined from the experimental observations. There are several phenomena (for example, the anomalous piezoelectric effect in quartz, the dispersion of elastic waves, as well as a number of other experimentally observed elastic properties of the pure crystals) being beyond the scope of the conventional thermoelasticity (CTE) and piezoelectroelasticity. That is why a development of complex theories seems to be actual.

The type-I micropolar thermoelastic (MPTE-I) continuum may be described in terms of field formalism, for example, from positions of the Green–Naghdi thermoelasticity (GN-theory). Now such mathematical frameworks of the thermoelastic behavior of solids are rapidly refined [2,3]. They are based on different modifications of the classical Fourier law of heat conduction. The refinements aim at derivations of *hyperbolic* partial differential equations of coupled thermoelasticity. Those are to



simultaneously fulfill the following conditions: 1.) Finiteness of the heat signal propagation velocity, and 2.) The ability of the spatial propagation of the thermoelastic waves without attenuation, and 3.) Existence of distortionless wave forms akin to the classical d'Alembert type waves. GN-thermoelasticity theory itself can be subdivided into the three different types. Type-I theory (GNI/CTE thermoelasticity) is based on the classical Fourier law of heat conduction with an infinite velocity of propagation of an exponentially decaying heat signal. Type-II theory (GNII, hyperbolic thermoelasticity) is characterised by the energy conservation and the finite propagation velocity of thermal waves known as *second sound waves*.

In-depth study of plane harmonic type-I thermoelastic waves is given in [4]. It is shown that dispersion equation has exactly two complex wavenumbers for a given frequency. Moreover their real and imaginary parts are strictly positive. Plane waves in type-II continua are studied in [5]. Plane thermoelastic wave or *second sound* wave is characterized by four real wavenumbers. Two of them are strictly positive. In [6] problems concerning plane harmonic wavenumbers of coupled type-III thermoelastic waves are discussed. In all studies [4–6] the linear symmetrical thermoelasticity is employed. They are summarized in the monograph [7].

The present study is devoted to problem of propagating surfaces of weak and strong discontinuities of translational displacements, microrotations and temperature in micropolar (MP) thermoelastic (TE) continua. In first part of the paper is discussed the problems of the propagation of weak discontinuities in type-I MPTE continua. After preliminary remarks (Sec. 1) in Sec. 2 the requisite equations for type-I linear micropolar thermoelastic continuum are considered. Those includes the equation of motion, conservation energy principle and entropy balance equations.

In Sec. 3 compatibility conditions for weak discontinuities propagation surfaces of displacements, microrotations and temperature in the type-I micropolar thermoelastic continuum are given. These conditions are derived from the requisite equations (Sec. 2) and the geometrical and kinematical conditions due to Hadamard and Thomas [8]. The admissible normal velocities of the propagating surfaces of weak discontinuities are found.

In Sec. 4 the distinguished cases of propagating wave surfaces in MPTE-I continuum are separately considered. Propagating surfaces of weak discontinuities are discriminated depending on the spatial orientations of DPVs.

In Sec. 5 the constitutive equations for hyperbolic thermoelastic type-II micropolar continuum is derived by the field theory. The special form of the first variation of the action integral is used in order to obtained 4-covariant jump conditions on wave surfaces.

In Sec. 6 the problems of the propagating surfaces of strong discontinuities of field variables in type-II MPTE continua are considered. Three-dimensional form of the jump conditions on the surface of a strong discontinuity of thermoelastic field are derived from 4-covariant form.

## 2. REMINDER OF BASIC EQUATIONS OF MPTE-I CONTINUUM

A framework of MPTE-I continuum (see [9] for details) is used throughout the paper. Such continua permit the existence of rotational degrees of freedom (a rotation vector  $\phi$ ) along with translational degrees of freedom (the translational displacement vector  $\mathbf{u}$ ). For MPTE-I continuum, equations of motion of micropolar medium are written in direct tensor representation for the case of the absence of mass forces and mass moments

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{m} + \epsilon \cdot \sigma = \mathfrak{J} \ddot{\phi}, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\rho$  is the mass density tensor,  $\mathfrak{J}$  is a tensor of inertia,  $\epsilon$  is the three-dimensional Levi–Civita symbol (permutation symbol, antisymmetric symbol, or alternating symbol),  $\nabla$  is the three-dimensional Hamiltonian differential operator (the nabla symbol), dot over a symbol denotes partial differentiation with respect to time at fixed spatial coordinates. For  $\rho$  and  $\mathfrak{J}$  tensors the symmetry conditions  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ ,  $\mathfrak{J}_{ij} = \mathfrak{J}_{ji}$  are obviously valid. where. Another form of the tensor representation of equations (1) is (see [10])

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{m} + \sigma \times \mathbf{I} = \mathfrak{J} \ddot{\phi}, \end{cases} \quad (2)$$

wherein  $\mathbf{I}$  is the second-order unit tensor.



Equations (1) and (2) in rectangular co-ordinate system can be deduced in form

$$\begin{cases} \partial_j \sigma_{ji} = \rho_{ij} \ddot{u}_j \\ \partial_j m_{ji} + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = \mathfrak{I}_{ij} \ddot{\phi}_j \end{cases}$$

where  $\partial_j$  is partial derivative on spatial coordinate  $x_j$ .

If the equation of entropy balance are taken in form

$$\dot{s} = \xi - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{h}}{\theta} \right), \quad (3)$$

where  $s$  denotes the entropy referred to the unit of volume,  $\mathbf{h}$  is the heat flux vector,  $\theta$  is the actual temperature,  $\xi$  denotes the internal entropy product, then the equations of energy balance may be written as

$$\dot{\psi} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{e}}) + \text{tr}(\mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}}) - s\dot{\theta} - \theta \left( \mathbf{h} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta^2} - \xi \right), \quad (4)$$

where  $\psi$  is the free energy per unit of volume.

The asymmetric strain tensor  $\mathbf{e}$  and bending–torsion tensor  $\boldsymbol{\Gamma}$  are associated with translational displacements  $\mathbf{u}$  and microrotations  $\boldsymbol{\phi}$  by formulae

$$\mathbf{e} = \nabla \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\phi}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \nabla \otimes \boldsymbol{\phi}. \quad (5)$$

The equation (5) are represented in a rectangular co-ordinate system as

$$e_{ji} = \partial_j u_i - \epsilon_{jik} \phi_k, \quad \Gamma_{ji} = \partial_j \phi_i.$$

Since the free energy  $\psi = \psi(\mathbf{e}, \boldsymbol{\Gamma}, \theta)$  is the function of the independent variables  $\mathbf{e}$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}$ ,  $\theta$  then

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial e_{ji}} \dot{e}_{ji} + \frac{\partial \psi}{\partial \Gamma_{ji}} \dot{\Gamma}_{ji} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta}. \quad (6)$$

Therefore the following equations can be obtained from the comparison of equations (4) and (6)

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial \psi}{\partial e_{ji}}, \quad \mu_{ji} = \frac{\partial \psi}{\partial \Gamma_{ji}}, \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \xi + \mathbf{h} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta^2} = 0. \quad (7)$$

The second law of thermodynamics is correct when the  $\xi \geq 0$ . Whence the Clausius – Duhem inequality can be written in form

$$-\mathbf{h} \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta^2} \geq 0. \quad (8)$$

The inequality (8) is satisfied by using the Fourier's law of heat conduction, which states the proportionality of the heat flux vector  $\mathbf{h}$  and negative spatial temperature gradient  $\theta$

$$\mathbf{h} = -\boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla \theta, \quad (9)$$

where  $\boldsymbol{\Lambda}$  is the material thermal conductivity tensor (thermal diffusion tensor).  $\boldsymbol{\Lambda}$  is a positive definite matrix.

The equation (3) and taken into account the equations (7) and (9) may be transformed as

$$\dot{s}\theta = -\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla \theta. \quad (10)$$

Let us expand the free energy  $\psi$  into the Taylor series in the vicinity of the natural state  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{0}$ ,  $\theta = 0$ , disregarding the terms of higher order than the second one. The following form of the expansion is obtained for isotropic, homogeneous and centrosymmetric bodies

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{\mu + \eta}{2} e_{ji} e_{ji} + \frac{\mu - \eta}{2} e_{ji} e_{ij} + \frac{\lambda}{2} e_{kk} e_{nn} + \frac{\gamma + \varepsilon}{2} \Gamma_{ji} \Gamma_{ji} + \frac{\gamma - \varepsilon}{2} \Gamma_{ji} \Gamma_{ij} + \\ & + \frac{\beta}{2} \Gamma_{kk} \Gamma_{nn} - \alpha e_{kk} \theta - \varsigma \Gamma_{kk} \theta - \frac{\Lambda_*}{2} \theta^2. \end{aligned}$$



The constitutive equations of MPTE-I continuum can be derived according to equations (7)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (\mu + \eta)\mathbf{e} + (\mu - \eta)\mathbf{e}^T + (\lambda \text{tr}\mathbf{e} - \alpha\theta)\mathbf{I}, \\ \mathbf{m} &= (\gamma + \varepsilon)\boldsymbol{\Gamma} + (\gamma - \varepsilon)\boldsymbol{\Gamma}^T + (\beta \text{tr}\boldsymbol{\Gamma} - \zeta\theta)\mathbf{I}, \\ s &= \alpha \text{tr}\mathbf{e} + \zeta \text{tr}\boldsymbol{\Gamma} + \Lambda_*\theta, \end{aligned} \tag{11}$$

wherein  $\lambda, \mu, \eta, \gamma, \beta, \varepsilon$  are isothermal constitutive constants of type-I micropolar thermoelastic continuum;  $\alpha, \zeta$  are constitutive constants providing coupling of equations of motion and heat conduction. Constants  $\alpha, \zeta$  depend not only on the mechanical properties of the continuum, but also depend on the thermal properties.

Rewrite (11) as follows

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= (\mu + \eta)e_{ji} + (\mu - \eta)e_{ij} + (\lambda \text{tr}e_{kk} - \alpha\theta)\delta_{ij}, \\ m_{ij} &= (\gamma + \varepsilon)\Gamma_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\Gamma_{ij} + (\beta \text{tr}\Gamma_{kk} - \zeta\theta)\delta_{ij}, \\ s &= \alpha e_{kk} + \zeta \Gamma_{kk} + \Lambda_*\theta. \end{aligned}$$

Note that

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)_{\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{e}} = \frac{\kappa}{\theta},$$

where  $\kappa$  is the heat capacity (per unit volume) at constant (zero) strains. Thus the equation is derived

$$ds = \alpha d\text{tr}\mathbf{e} + \zeta d\text{tr}\boldsymbol{\Gamma} + \frac{\kappa}{\theta}d\theta.$$

Integrating this equation for entropy in assumption that  $s = 0$  for natural state is obtained

$$s = \alpha \text{tr}\mathbf{e} + \zeta \text{tr}\boldsymbol{\Gamma} + \kappa \ln\left(\frac{\theta}{T_0}\right). \tag{12}$$

Expand the logarithm in (12) under condition of  $|\theta/T_0| \ll 1$  allows rewrite entropy equation in form

$$s = \alpha \text{tr}\mathbf{e} + \zeta \text{tr}\boldsymbol{\Gamma} + \frac{\kappa}{T_0}\theta. \tag{13}$$

Consequently the heat conduction equation can be derived by transforming equations (10) and (13) as

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla \theta - \kappa \dot{\theta} - \alpha \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \zeta \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} = 0.$$

After substituting the stress tensors  $\boldsymbol{\sigma}$  and  $\mathbf{m}$  from the formulas (11) in the equations of motion (1) and taking account of (5) the system of coupled partial differential equations of motion and heat conduction for a linear isotropic type-I micropolar thermoelastic continuum in the absence of mass forces, moments, and heat sources can be written as [9, 11]:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu - \eta)\nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mu + \eta)\nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\eta \nabla \times \boldsymbol{\phi} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ (\beta + \gamma - \varepsilon)\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{\phi} + (\gamma + \varepsilon)\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{\phi} - 4\eta \boldsymbol{\phi} + 2\eta \nabla \times \mathbf{u} - \zeta \nabla \theta - \mathfrak{J} \ddot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \theta - \frac{\kappa}{\Lambda_*} \dot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda_*} \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \frac{\zeta}{\Lambda_*} \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Hereafter  $\theta$  is the temperature increment over the referential temperature,  $\kappa$  is the heat capacity (per unit volume) at constant (zero) strains.

As pointed out the nonzero constitutive constants  $\alpha, \zeta$  provide coupling of micropolar thermoelasticity equations. It is usually assumed that  $\zeta = 0$  (see [9]). This constitutive constant is kept in all further considerations for the completeness analysis.

The scalar equation in the system (14) is called a generalized heat conduction equation conjugate to the equations of motion (the first and the second equations in (14)).



### 3. PROPAGATING WEAK DISCONTINUITIES OF THERMOMECHANICAL FIELDS IN MPTE-I CONTINUUM

This section is devoted to processes of propagating weak discontinuities of translational displacements  $\mathbf{u}$ , microrotations  $\phi$  and temperature  $\theta$  in the MPTE-I continuum. System of partial differential equations (14) includes partial derivative order not higher than the second. Let a wavefront (wave surface  $\Sigma$ ) of weak discontinuities displacements  $\mathbf{u}$ , microrotations  $\phi$  and temperature  $\theta$  be propagated in three-dimensional space with normal velocity  $G$ . Unit normal vector to that wave surface is denoted by  $\mathbf{n}$ . If surface  $\Sigma$  is parameterized by

$$x^i = \psi^i(y^1, y^2, t),$$

then components of first  $g^{\alpha\beta}$  and second  $b_{\alpha\beta}$  fundamental forms of surface  $\Sigma$  are computed by formulas

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial\psi^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial\psi^i}{\partial y^\beta} = \partial_{\alpha'} x^i \partial_{\beta'} x^i, \quad b_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2\psi^i}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} n^i = \partial_{\alpha'} \partial_{\beta'} x^i n^i, \quad \partial_\alpha n^i = -g^{\beta\gamma} b_{\beta\alpha} \partial_{\gamma'} x^i.$$

Kinematical and geometrical compatibility conditions of the second and the first order due to Hadamard and Thomas valid for an arbitrary physical field  $\varphi$  read

$$\begin{aligned} [[\partial_i \partial_j \varphi]] &= D n_i n_j + g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha'} C (n_i \partial_{\beta'} x_j + n_j \partial_{\beta'} x_i) - g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} C b_{\alpha\sigma} \partial_{\beta'} x_i \partial_{\tau'} x_j, \\ [[\partial_i \dot{\varphi}]] &= (-D^k G + \delta_4 C) n_i + g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha'} (CG) \partial_{\beta'} x_i, \\ [[\ddot{\varphi}]] &= (DG^2 - \delta_4 C) G + C \delta_4 G, \quad [[\partial_4 \varphi]] = -CG, \quad [[\partial_i \varphi]] = C n_i, \end{aligned} \quad (15)$$

where  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $\alpha, \beta, \tau, \sigma = 1, 2$ ; the prime in superscripts are denoted by the Greek indices related to surface Gaussian coordinates;  $D = [[\partial_i \partial_j \varphi]] n^i n^j$ ;  $\delta_4$  is the delta-derivative operator,  $[[\cdot]]$  denote 3-jumps of the field variables..

If, in particular, the first derivative of the function  $\varphi$  is continuous across the surface  $\Sigma$  the relations (15) can be reduced to

$$[[\partial_i \partial_j \varphi]] = D n_i n_j, \quad [[\partial_i \dot{\varphi}]] = -DG n_i, \quad [[\ddot{\varphi}]] = DG^2.$$

The obtained expressions are easy to rewrite in direct tensor notations

$$\begin{aligned} [[\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{u}]] &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}, & [[\nabla \otimes \nabla \otimes \phi]] &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{S}, \\ [[\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}]] &= -G \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}, & [[\nabla \otimes \dot{\phi}]] &= -G \mathbf{n} \otimes \mathbf{S}, \\ [[\ddot{\mathbf{u}}]] &= G^2 \mathbf{A}, & [[\ddot{\phi}]] &= G^2 \mathbf{S}, \\ [[\nabla \otimes \nabla \theta]] &= B \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (16)$$

where square brackets denote jump across surface of weak discontinuities.  $B, \mathbf{A}, \mathbf{S}$  are fields defined on this surface, and the equalities  $B = 0, \mathbf{A} = \mathbf{0}, \mathbf{S} = \mathbf{0}$  cannot be satisfied simultaneously at any point of the surface, if the surface is indeed the surface of weak discontinuities. Equations (14) and (16) give the following relations between the jumps of partial derivatives of the second order across the wave surface:

$$\begin{cases} (\rho G^2 - (\mu + \eta)) \mathbf{A} - (\lambda + \mu - \eta) \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{0}, \\ (\mathfrak{J} G^2 - (\gamma + \varepsilon)) \mathbf{S} - (\beta + \gamma - \varepsilon) \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) = \mathbf{0}, \\ B + \frac{\alpha G}{\Lambda_*} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} + \frac{\zeta G}{\Lambda_*} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

The polarization vectors of the wave  $\mathbf{A}, \mathbf{S}$  can be splitted into a sum of projections onto the tangent plane and on the normal direction to the wave surface:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_\perp \boldsymbol{\tau} + A_\parallel \mathbf{n}, & \mathbf{S} &= S_\perp \boldsymbol{\tau} + S_\parallel \mathbf{n}, \\ A_\perp &= \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau}, & A_\parallel &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, \\ S_\perp &= \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\tau}, & S_\parallel &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (18)$$

where  $\boldsymbol{\tau}$  is the tangential unit vector and  $\mathbf{n}$  is the normal unit one of the wave surface respectively. Taking account of equations (18) the system (17) is transformed into

$$\begin{cases} (\rho G^2 - (\mu + \eta))(A_\perp \boldsymbol{\tau} + A_\parallel \mathbf{n}) - (\lambda + \mu - \eta) A_\parallel \mathbf{n} = \mathbf{0}, \\ (\mathfrak{J} G^2 - (\gamma + \varepsilon))(S_\perp \boldsymbol{\tau} + S_\parallel \mathbf{n}) - (\beta + \gamma - \varepsilon) S_\parallel \mathbf{n} = \mathbf{0}, \\ B + \frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_\parallel + \frac{\zeta G}{\Lambda_*} S_\parallel = 0. \end{cases} \quad (19)$$



After rearrangements in equations (19) in view of (18) the following system is derived:

$$\begin{cases} (\rho G^2 - (\mu + \eta))A_{\perp} \boldsymbol{\tau} + (\rho G^2 - (\lambda + 2\mu))A_{\parallel} \mathbf{n} = \mathbf{0}, \\ (\mathfrak{J}G^2 - (\gamma + \varepsilon))S_{\perp} \boldsymbol{\tau} + (\mathfrak{J}G^2 - (\gamma + 2\beta))S_{\parallel} \mathbf{n} = \mathbf{0}, \\ B + \frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel} + \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\parallel} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

The third equation in (20) allows us to couple a weak discontinuity of temperature with a normal projection of weak discontinuities of translational displacements and microrotations by

$$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\parallel}.$$

This new equation is obtained by restrictions  $\varsigma \neq 0$ .

By the aid of orthogonality of the vectors  $\boldsymbol{\tau}$  and  $\mathbf{n}$  the following equations are obtained

$$\begin{cases} (\rho G^2 - (\mu + \eta))A_{\perp} = 0, & \{ (\mathfrak{J}G^2 - (\gamma + \varepsilon))S_{\perp} = 0, \\ (\rho G^2 - (\lambda + 2\mu))A_{\parallel} = 0, & \{ (\mathfrak{J}G^2 - (\gamma + 2\beta))S_{\parallel} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

#### 4. A CLASSIFICATION OF WEAK DISCONTINUITIES IN THE MPTE-I CONTINUUM

The 16 cases can be discriminated according to (5). These cases are gathered into the following Table. We proceed by considering the discriminated cases separately.

Cases	Intensity vectors projections of weak discontinuities of translational displacements		Intensity vectors projections of weak discontinuity of microrotations		Intensity of weak discontinuity of temperature
	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} = 0$	
I	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = 0$
II	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = 0$
III	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel}$
IV	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = 0$
V	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = -\frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\parallel}$
VI	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\parallel}$
VII	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = 0$
VIII	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel}$
IX	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\parallel}$
X	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel}$
XI	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = 0$
XII	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} = 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\parallel}$
XIII	$A_{\parallel} = 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\parallel}$
XIV	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} = 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\parallel}$
XV	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} = 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel}$
XVI	$A_{\parallel} \neq 0$	$A_{\perp} \neq 0$	$S_{\parallel} \neq 0$	$S_{\perp} \neq 0$	$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel} - \frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\parallel}$



Evidently in the first case  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$  and returning to (17) the scalar equation in (17) is satisfied identically, so the surface  $\Sigma$  is actually not a surface of weak discontinuities.

In the second case, the first equation of system (21) is valid only on a wave surface propagating with normal velocity

$$G = c_{\parallel}, \tag{22}$$

where

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

In this case the normal velocity of a weak discontinuity surface propagation  $G$ , (22) is the well known velocity of longitudinal elastic wave  $c_{\parallel}$ . In addition, if wave surface is bypassed, then the derivative of temperature field is broke according to the third equation in (20):

$$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel}.$$

In the third case a weak discontinuity of translational displacements exists only on the surface propagating with the velocity

$$G = c_{\perp}^{\mu}, \tag{23}$$

where

$$c_{\perp}^{\mu} = \sqrt{\frac{\mu + \eta}{\rho}}.$$

It can be elucidated that the velocity  $G$  (23) exactly coincides with the one of transverse elastic wave if the constitutive micropolar constant  $\eta$  equals to zero  $c_{\perp} = \sqrt{\mu/\rho}$ .

The fourth case implies existence of a weak discontinuity of microrotation. Then the third equation of system (20) is satisfied only on the surface of weak discontinuities propagating with normal velocity

$$G = c_{\parallel}^{\mu\mu},$$

where

$$c_{\parallel}^{\mu\mu} = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{\mathfrak{J}}}$$

is the wave velocity of torsion. As in the previous case, a weak discontinuity of microrotation is associated with a weak discontinuity of a temperature field according to third equation of system (20):

$$B = -\frac{\varsigma G}{\Lambda_*} S_{\parallel}.$$

Thus, the constitutive constants  $\alpha$ ,  $\varsigma$  characterize the intensity of thermal weak discontinuity.

In the fifth case, the fourth equation of the system (20) allows to compute the propagation velocity of a weak discontinuities of microrotation

$$G = c_{\perp}^{\mu\mu},$$

where

$$c_{\perp}^{\mu\mu} = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{\mathfrak{J}}}.$$

Focus attention that a weak discontinuity of temperature is not associated with the tangential projections of polarization vectors of weak discontinuities  $A_{\perp}$  and  $S_{\perp}$ .

In other cases (from the VI to the XVI) the propagation of wave surfaces of weak discontinuities displacements, microrotations and temperature is impossible if the constitutive characteristic of the type-I micropolar thermoelastic continuum does not satisfied certain limitations as determined by (21).

In a 6-th case the factors at  $A_{\parallel}$  and  $S_{\parallel}$  should be vanished simultaneously, it is impossible if  $c_{\parallel} \neq c_{\parallel}^{\mu\mu}$ . Clearly, then the considered surface will not be a wave one. If the continuum can be described constitutive equation of  $c_{\parallel} = c_{\parallel}^{\mu\mu}$ , then the wave surface is a wave propagating with a velocity

$$G = c_{\parallel} = c_{\parallel}^{\mu\mu},$$



and weak discontinuity of temperature field is out of condition

$$B = -\frac{\alpha G}{\Lambda_*} A_{\parallel} - \frac{\zeta G}{\Lambda_*} S_{\parallel}. \quad (24)$$

The above Eqs (24) implies a possibility of nondissipative propagation of longitudinal waves when  $B = 0$ , i.e.

$$\frac{\alpha}{\zeta} = -\frac{S_{\parallel}}{A_{\parallel}}.$$

In the seventh case, the factors at  $A_{\perp}$  and  $S_{\perp}$  can not be equal to zero simultaneously, if  $c_{\perp}^{\mu} \neq c_{\perp}^{\mu\mu}$ . In contrary, if the continuum characterizes matching of the transverse waves velocities  $c_{\perp}^{\mu} = c_{\perp}^{\mu\mu}$ , then the velocity of propagation of a wave surface is equal

$$G = c_{\perp}^{\mu} = c_{\perp}^{\mu\mu}.$$

Weak discontinuity of temperature field is again identified from the condition (24) and it disappears in the absence of normal polarization vectors projections.

Underline that in the 3-th and 5-th cases the surface of weak discontinuities in MPTE-I continuum can be propagated along with the absence of weak discontinuities of temperature field, which means non-dissipative mechanism for the such surfaces propagating.

### 5. ACTION. COMPATIBILITY CONDITIONS FOR JUMPS

A field theory formalism involves mathematical description of physical fields by integral action functional. A general form of action within a variable domain of 4-spacetime with the elementary volume of  $d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$  is

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{L}(X^{\beta}, \varphi^k, \partial_{\alpha} \varphi^k) d^4X,$$

where  $\varphi^k$  is the physical fields array,  $\mathcal{L}$  – the Lagrangian density.

The least action principle states that the actual field is realized in the spacetime in a way that the action of (1) is minimum, i.e. for any admissible variations of physical fields  $\varphi^k$  and non-variable coordinates  $X^{\beta}$  are  $\delta \mathcal{I} = 0$ . Then the classical Euler–Lagrange equations are held:

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \varphi^k)} = 0.$$

In general, a conservation law has the following form

$$\partial_{\beta} J^{\beta} = 0,$$

where the vector  $J^{\beta}$  is the vector 4-current. By finite variation  $\delta^{\nabla} = \delta/\varepsilon$  the 4-current can be obtained as

$$J^{\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\beta} \varphi^k)} \delta^{\nabla} \varphi^k + \left( \mathcal{L} \delta_{\alpha}^{\beta} - (\partial_{\alpha} \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\beta} \varphi^k)} \right) \delta^{\nabla} X^{\alpha},$$

if the variational symmetries of the action are known.

The finite variation of the action is (see [7])

$$\delta^{\nabla} \mathcal{I} = \int (\partial_{\beta} J^{\beta}) d^4X. \quad (25)$$

Assuming the temperature field is continuous and temperature gradient of the first order can be discontinuous by passing through some bilateral surface  $\Sigma^{\pm}$  propagating with the normal velocity  $G$  and normal unit 4-vector  $\mathcal{N}_{\beta}$  in 4-spacetime.

We replace the integral over 4-volume in equation (25) on sum of surface integrals. Then only two surface integrals over surface  $\Sigma$  are remained when the variations  $\delta^{\nabla} \varphi^k$  and  $\delta^{\nabla} X^{\beta}$  are fixed on the outer boundary of the field:

$$\delta^{\nabla} \mathcal{I} = \int_{\Sigma^+} (J^{\beta} \mathcal{N}_{\beta})^+ d\Sigma - \int_{\Sigma^-} (J^{\beta} \mathcal{N}_{\beta})^- d\Sigma = \int_{\Sigma} [J^{\beta}] \mathcal{N}_{\beta} d\Sigma. \quad (26)$$

Hereafter square brackets denote 4-jumps.



The equation  $\delta \text{Im} = 0$  is valid for the actual field and a variations of  $\delta\varphi^k$  and  $\delta X^\beta$  are continuous in passing through the surface  $\Sigma$ . Therefore following 4-covariant compatibility equations for strong discontinuities is obtained from (26):

$$\mathcal{N}_\beta \left[ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right] = 0, \quad \mathcal{N}_\beta \left[ \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right] = 0. \quad (27)$$

One can see, that the compatibility conditions on strong discontinuities surfaces contain the jumps of the energy-momentum 4-tensor and the Piola – Kirchhoff 4-tensor

$$S_4^{\beta \cdot k} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)}, \quad T_{\cdot \alpha}^\beta = \mathcal{L} \delta_\alpha^\beta - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)}. \quad (28)$$

The compatibility conditions of jumps of the energy-momentum 4-tensor in view of (28) is rewritten in form

$$\mathcal{N}_\beta [T_{\cdot \alpha}^\beta] = [\mathcal{L}] \mathcal{N}_\alpha + [\partial_\alpha \varphi^k] S_4^{\beta \cdot k} \mathcal{N}_\beta = 0. \quad (29)$$

Relations (29) can be transformed by the compatibility conditions of the strong discontinuities of the Piola – Kirchhoff 4-tensor into

$$[\mathcal{L}] \mathcal{N}_\alpha + [\partial_\alpha \varphi^k] S_4^{\beta \cdot k} \mathcal{N}_\beta = 0.$$

The only significant equation from the compatibility conditions for jumps of the energy-momentum 4-tensor by using the Hadamard – Thomas geometric first order compatibility conditions [8]  $[\partial_\alpha \varphi^k] = \mathcal{N}_\alpha \mathcal{F}^k$  is obtained

$$[\mathcal{L}] + S_4^{\beta \cdot k} \mathcal{N}_\beta \mathcal{F}^k = 0. \quad (30)$$

The three-dimensional form of the compatibility conditions on the surface of strong discontinuity of the field is derived from the resulting 4-covariant form (27), (30):

$$\begin{aligned} [[\mathcal{L}]] + (-G_4^{\lambda \cdot k} + n_\mu S_4^{\mu \cdot k})(-G[[\partial_\lambda \varphi^k]] + n_\mu [[\partial_\mu \varphi^k]]) &= 0; \\ -G[[S_4^{\lambda \cdot k}]] + n_\mu [[S_4^{\mu \cdot k}]] &= 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (31)$$

Hereafter  $n_\mu$  stand for normal unit 3-vector.

The compatibility conditions for strong discontinuities are complemented by well known three-dimensional geometrical and kinematic Hadamard – Thomas compatibility conditions of the first and the second order [8] valid for an arbitrary field  $\varphi^k$ . Those are also due to Rankine and Hugoniot [12, 13].

## 6. ACTION FOR MPTE-II CONTINUA

The theory GNII is the only thermodynamically correct theory which satisfies the principles listed in Sec. 1. The action taking into account of the polar microstructure can be adopted in the following form [7]

$$\mathcal{L} = \int \mathcal{L}(X^\alpha, x^j, d_\alpha^j, \vartheta, \partial_4 x^j, \partial_4 d_\alpha^j, \partial_4 \vartheta, \partial_\beta x^j, \partial_\beta d_\alpha^j, \partial_\beta \vartheta) dX^1 dX^2 dX^3 dX^4, \quad (32)$$

where  $X^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) are the Lagrangian coordinates;  $x^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) are the Eulerian coordinates;  $d_\alpha^j$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) are micropolar directors associated with microvolume;  $\vartheta$  is the thermal displacement field.

Action density (32) we define in the form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_4 x^k) \rho_{kj} (\partial_4 x^j) + \frac{1}{2}(\partial_4 d_\alpha^i)^{ab} \mathcal{J}_{ij} (\partial_4 d_\beta^j) - \psi(X^\alpha, x^j, d_\alpha^j, \vartheta, \partial_4 \vartheta, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_\alpha^j, \partial_\alpha \vartheta),$$

wherein  $\mathcal{J}_{ij}^{ab}$  – the microinertia tensor;  $\rho_{ij}$  – the mass density tensor;  $\psi$  – volume density of the Helmholtz's free energy. For tensors  $\mathcal{J}_{ij}^{ab}$  and  $\rho_{ij}$  the symmetry conditions  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ ,  $\mathcal{J}_{ij}^{ab} = \mathcal{J}_{ji}^{ab}$  are stated.

The field equations in this case read:

$$\partial_\alpha S_j^{\alpha \cdot} - \partial_4 P_j = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \quad (\alpha = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3),$$



$$\begin{aligned} \partial_\alpha \mathcal{M}_{:j}^{\alpha} + \mathcal{A}_j - \partial_4(\mathcal{Q}_j) &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3), \\ \partial_\alpha j_{\mathbb{R}}^\alpha + \partial_4 s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

and are supplemented by the constitutive equations:

$$\begin{aligned} S_{:j}^{\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)}, \quad \mathcal{M}_{:j}^{\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d^j)}, \quad \mathcal{A}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d^j}, \\ P_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 x^j)}, \quad \mathcal{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 d^j)}, \quad s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_4 \vartheta)}, \quad j_{\mathbb{R}}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \vartheta)}. \end{aligned}$$

Compatibility conditions on strong discontinuity surface propagating in MPTE-II continuum, according eqs. (30), (31), take the forms:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\partial_4 d^i \mathfrak{J}_{ij}^{ab} \partial_4 d^j] + (G \mathfrak{J}_{lk}^{ab} \partial_4 d^l - n_\mu \mathcal{M}_{:k}^{\mu}) (G [\partial_4 d^k] - n_\mu [\partial_\mu d^k]) + \frac{1}{2} [\partial_4 x^k \rho_{kj} \partial_4 x^j] + \\ + (G \rho_{lk} \partial_4 x^l - n_\mu S_{:k}^{\mu}) (G [\partial_4 x^k] - n_\mu [\partial_\mu x^k]) - [\psi] + (Gs - n_\mu j_{\mathbb{R}}^\mu) (G [\partial_4 \vartheta] - n_\mu [\partial_\mu \vartheta]) = 0, \quad (33) \\ G \rho_{kl} [\partial_4 x^k] = n_\mu [S_{:l}^{\mu}], \quad G \mathfrak{J}_{kl}^{ab} [\partial_4 d^k] = n_\mu [\mathcal{M}_{:l}^{\mu}], \quad G [s] = n_\mu [j_{\mathbb{R}}^\mu], \\ [\mathcal{L}] = \frac{1}{2} [\partial_4 x^k \rho_{kj} \partial_4 x^j] + \frac{1}{2} [\partial_4 d^i \mathfrak{J}_{ij}^{ab} \partial_4 d^j] - [\psi] \quad (j, k, l, \lambda, \mu = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

In the case of the propagating surface of strong discontinuity through unperturbed continuum the first of the compatibility equations (33) can be transformed to

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\partial_4 d^i \mathfrak{J}_{ij}^{ab} \partial_4 d^j] + (G \mathfrak{J}_{lk}^{ab} \partial_4 d^l - n_\mu \mathcal{M}_{:k}^{\mu}) (G [\partial_4 d^k] - n_\mu [\partial_\mu d^k]) + \\ + \frac{1}{2} [\partial_4 x^k \rho_{kj} \partial_4 x^j] + (G \rho_{lk} \partial_4 x^l - n_\mu S_{:k}^{\mu}) (G [\partial_4 x^k] - n_\mu [\partial_\mu x^k]) - \\ - [\psi] + (Gs - n_\mu j_{\mathbb{R}}^\mu) (G [\partial_4 \vartheta] - n_\mu [\partial_\mu \vartheta]) = 0 \quad (j, k, l, \lambda, \mu = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

The present work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00139 "Hyperbolic thermal waves in solids with microstructure") and the Ministry of Education and Science of Russia Federation grant given to Samara State Technical University (project no. 16.2518.2014/K).

## References

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theories of Deformable Bodies*. Paris, Scientific Library A. Hermann et Fils, 1909, 242 p.
2. Green A. E., Naghdi P. M. On Undamped Heat Waves in an Elastic Solid. *J. Therm. Stress*, 1992, vol. 15, pp. 253–264.
3. Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without Energy Dissipation. *J. Elasticity*, 1993, vol. 31, pp. 189–208.
4. Radayev Yu. N., Semenov D. A. Harmonic Coupled CTE-Thermoelastic Waves in a Free Cylindrical Waveguide. *Vestn. Samar. Gos. Univ. Natural sciences ser.*, 2008, no. 8/1(67), pp. 411–459 (in Russian).
5. Kovalev V. A., Radayev Yu. N., Semenov D. A. Coupled Dynamic Problems in Hyperbolic Thermoelasticity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 10, iss. 4, pt. 2, pp. 94–128 (in Russian).
6. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. Wavenumbers of Plane GNIII-Thermoelastic Waves and Inequality, Providing Their Normality. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 3, pp. 46–53 (in Russian).
7. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics*. Saratov, Saratov. Univ. Press, 2010, 328 p. (in Russian).
8. Thomas T. Y. *Plastic Flow and Fracture in Solids*. New York, Academic Press, 1961, 271 p.
9. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, 384 p.
10. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. for Rat. Mech. and Anal.*, 1962, vol. 11, iss. 1, pp. 415–448.
11. Eringen A. C. *Microcontinuum field theories. Vol. 1. Foundations and Solids*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1999, 325 p.
12. Rankine W. J. M. On the thermodynamic theory



of waves of finite longitudinal disturbance. *Proc. of the Royal Society of London*. London, The Royal Society, 1870, vol. 18, pp. 80–83.

13. Hugoniot P. H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et specialement dans les gaz parfaits. *J. Ecole Polytechnique*, 1887, vol. CLVII, pp. 3–98.

УДК 539.3

## О слабых разрывах и уравнениях скачков на волновых поверхностях в микрополярных термоупругих континуумах

В. А. Ковалев<sup>1</sup>, Е. В. Мурашкин<sup>2</sup>, Ю. Н. Радаев<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, профессор кафедры управления проектами и инвестициями, Московский городской университет управления Правительства Москвы, vlad\_koval@mail.ru

<sup>2</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

<sup>3</sup>Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Настоящее исследование посвящено проблеме распространения поверхностей сильных и слабых разрывов поступательных перемещений, микровращений и температуры в микрополярных (МП) термоупругих (ТЕ) континуумах. В первой части статьи обсуждаются проблемы распространения слабых разрывов в МРТЕ континуумах первого типа. Геометрические и кинематические условия совместимости Адамара и Томаса используются для изучения возможных волновых поверхностей слабых разрывов. Слабые разрывы классифицируются в соответствии с пространственной ориентировкой векторов поляризации разрывов (DPVs). Показано, что поверхности слабых разрывов могут распространяться без слабых разрывов температурного поля. Вторая часть работы посвящена распространению поверхностей сильных разрывов полевых переменных в МРТЕ континуумах второго типа. Определяющие соотношения для гиперболических термоупругих микрополярных континуумов второго типа получены с помощью формализма теории поля. Специальная форма первой вариации интеграла действия позволяет получить 4-ковариантные условия скачков на волновых поверхностях. Трехмерная форма условий скачков на поверхности сильного разрыва поля выводится из ее четырехмерной ковариантной формы.

**Ключевые слова:** микрополярная термоупругость, континуум первого типа, континуум второго типа, слабый разрыв, сильный разрыв, ударная волна, продольная волна, поперечная волна, условие совместимости, скачок.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой») и Минобрнауки РФ в рамках проектной части гос. задания ФГБОУ ВПО «СамГТУ» (проект № 16.2518.2014/(К)).*

### Библиографический список

1. *Cosserat E. et F.* Theorie des corps deformables. Paris : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
2. *Green A. E., Naghdi P. M.* On undamped heat waves in an elastic solid // *J. Therm. Stress*. 1992. Vol. 15. P. 253–264.
3. *Green A. E., Naghdi P. M.* Thermoelasticity without energy dissipation // *J. Elasticity*. 1993. Vol. 31. P. 189–208.
4. *Радаев Ю. Н., Семенов Д. А.* Гармонические связанные СТЕ-термоупругие волны в свободном цилиндрическом волноводе // *Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер.* 2008. № 8/1(67). С. 411–459.
5. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Семенов Д. А.* Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 2. С. 94–128.
6. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые числа плоских GNIII-термоупругих волн и неравенства, обеспечивающие их нормальность // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 46–53.
7. *Ковалев В. А., Радаев Ю. Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.
8. *Thomas T. Y.* Plastic Flow and Fracture in Solids. N. Y. : Academic Press, 1961. 271 p.
9. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford : Pergamon Press, 1986. 384 p.
10. *Mindlin R. D., Tiersten H. F.* Effects of couple-stresses in linear elasticity // *Arch. for Rat. Mech. and Anal.* 1962. Vol. 11, iss. 1. P 415–448.
11. *Eringen A. C.* Microcontinuum field theories. Vol. 1. Foundations and Solids. Berlin ; Heidelberg ; N. Y. : Springer, 1999. 325 p.
12. *Rankine W. J. M.* On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // *Proc. of the Royal Society of London*. London : The Royal Society, 1870. Vol. 18. P. 80–83.
13. *Hugoniot P. H.* Sur la propagation du mouvement dans les corps et specialement dans les gaz parfaits // *J. Ecole Polytechnique*. 1887. Vol. CLVII. P. 3–98.



УДК 539.375

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАРОЖДЕНИЯ ТРЕЩИНЫ В КРУГОВОМ ДИСКЕ, ЗАГРУЖЕННОМ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

В. М. Мирсалимов<sup>1</sup>, Н. М. Калантарлы<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, mir-vagif@mail.ru

<sup>2</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, nailyak1975@gmail.com

Рассматривается изотропный диск радиуса  $R$ , нагруженный на контуре двумя сосредоточенными силами  $P$ , приложенными в точках  $z_1 = R$  и  $z_2 = -R$ . Предложена модель зарождения трещины в круговом диске, основанная на рассмотрении зоны процесса трещинообразования. Полагается, что зона процесса трещинообразования представляет собой слой конечной длины, содержащий материал с частично нарушенными связями между отдельными структурными элементами. Получены соотношения для определения критического значения внешней нагрузки, при которой происходит появление трещины.

*Ключевые слова:* круговой диск, зона ослабленных межчастичных связей материала, силы сцепления, зарождение трещины.

### ВВЕДЕНИЕ

В современных машинах и агрегатах, паровых и газовых турбинах, в компрессорах и других устройствах широко используются круговые диски. Диски подвергаются нагрузкам, вызывающим в них сложное напряженное состояние. Задача о трещинообразовании в конструкциях и изделиях является важной проблемой теории прочности [1–3]. В [2, 3] предложена модель зарождения трещины с силами сцепления в наиболее нагруженных, но пока целостных областях деформируемого тела. Эта модель начального разрушения использовалась при расчете различных конструкций [4–9], при различных силовых и термосиловых воздействиях. В работе [9] предложена модель зарождения трещины в покрытии на упругом основании. В [10] разработана расчетная модель, в рамках которой описывается трещинообразование в барабане тормозного механизма при торможении автомобиля, и исследуется влияние малых отклонений от прямолинейной формы зоны ослабленных межчастичных связей материала на зарождение трещины в барабане. Статьи [11–18] посвящены исследованию трещинообразования в композиционных материалах и адгезионных соединениях. Для инженерной практики исследование вопросов трещинообразования имеет важное значение. К настоящему времени практически отсутствуют исследования по зарождению трещины в круговых дисках. Разработка расчетных моделей процесса трещинообразования в дисках представляет собой актуальную проблему механики материалов. Разработка методов исследования трещинообразования будет способствовать повышению работоспособности дисков, обоснованному выбору конструктивных параметров дисков на стадии проектирования.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим изотропный круговой диск радиуса  $R$ , нагруженный на контуре сосредоточенными удельными (отнесенными к толщине диска) силами  $P/h$ , приложенными в точках  $z_1 = R$ ,  $z_2 = -R$ . Задачу рассматриваем как квазистатическую в постановке плосконапряженного состояния. По мере нагружения кругового диска в процессе эксплуатации силовой нагрузкой в диске будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем [3] как области ослабленных межчастичных связей материала. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется путем введения между берегами зоны предразрушения связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа этих связей и размеры зоны предразрушения, в которой осуществляется взаимодействие берегов зоны ослабленных межчастичных связей, зависит от вида материала. Зародышевая трещина моделируется зоной предразрушения связями между берегами, которая рассматривается как область ослабленных межчастичных связей материала. Так как указанная зона (прослойка перенапряженного материала) мала по сравнению с остальной частью диска, ее можно мысленно удалить [3], заменив разрезом,



поверхности которого взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. В исследуемом случае появление трещины представляет собой процесс перехода зоны предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала. Размер зоны ослабленных межчастичных связей материала при этом заранее неизвестен и подлежит определению.

Зона предразрушения ориентирована в направлении максимальных растягивающих напряжений, возникающих в диске. В центре зоны предразрушения разместим начало локальной системы координат  $x_1 O_1 y_1$ , ось  $x_1$  которой совпадает с зоной ослабленных межчастичных связей материала и образует угол  $\alpha_1$  с осью  $(\theta = 0)$  (рис. 1). При действии внешних нагрузок на диск в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, будут возникать нормальные  $q_{y_1}(x_1)$  и касательные усилия. Величины этих напряжений заранее неизвестны и также подлежат определению.

Граничные условия на берегах зоны предразрушения будут иметь вид

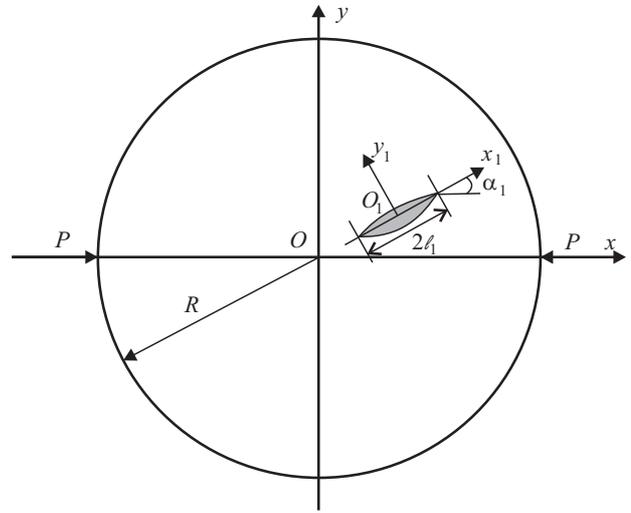


Рис. 1. Расчетная схема задачи

$$\sigma_{y_1} = q_{y_1}(x_1), \quad \tau_{x_1 y_1} = q_{x_1 y_1}(x_1) \quad \text{при} \quad |x_1| \leq l_1.$$

Основные соотношения рассматриваемой задачи должны быть дополнены следующим уравнением:

$$v^+(x_1, 0) - v^-(x_1, 0) - i(u^+(x_1, 0) - u^-(x_1, 0)) = \Pi(x_1, \sigma_1)(q_{y_1} - iq_{x_1 y_1}), \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \sqrt{q_{y_1}^2 + q_{x_1 y_1}^2}.$$

Здесь функция  $\Pi(x_1, \sigma_1)$  представляет собой эффективную податливость связей, зависящую от натяжения связей;  $\sigma_1$  — модуль вектора усилий в связях;  $(u^+ - u^-)$  — касательная,  $(v^+ - v^-)$  — нормальная составляющая раскрытия берегов зоны предразрушения.

Для нахождения значения внешней нагрузки, при котором происходит зарождение трещины, нужно постановку задачи дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем критерий критического раскрытия берегов зоны ослабленных межчастичных связей материала

$$|(v^+ - v^-) - i(u^+ - u^-)| = \delta_{cr},$$

где  $\delta_{cr}$  — характеристика сопротивления материала диска трещинообразованию. Напряженное состояние в круговом диске ищем в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1.$$

Здесь первые слагаемые  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  — напряжения, возникающие в круговом изотропном диске при отсутствии зоны предразрушения. Для определения введенных компонент напряжений  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ , удовлетворяющих уравнениям плоской задачи теории упругости, приходим к следующей краевой задаче:

$$\sigma_y^1 + i\tau_{xy}^1 = q_{y_1} + iq_{x_1 y_1} + f(x) \quad \text{при} \quad y_1 = 0, |x_1| \leq l_1, \quad (2)$$

$$\sigma_r^1 + i\tau_{r\theta}^1 = F(\tau) \quad \text{на контуре} \quad \tau = R \exp(i\theta). \quad (3)$$

Для компонент тензора напряжений  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0, \sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0$  [19] имеем:

$$\sigma_x^0 = -\frac{P}{2\pi} \left[ \frac{4(R-x)^3}{[(R-x)^2 + y^2]^2} + \frac{4(R+x)^3}{[(R+x)^2 + y^2]^2} - \frac{2}{R} \right],$$



$$\sigma_y^0 = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{2}{R} - \frac{4y^2(R-x)}{[(R-x)^2 + y^2]^2} - \frac{4y^2(R+x)}{[(R+x)^2 + y^2]^2} \right],$$

$$\tau_{xy}^0 = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{4(R-x)^2}{[(R-x)^2 + y^2]^2} - \frac{4(R+x)^2}{[(R+x)^2 + y^2]^2} \right],$$

$$\sigma_r^0 + \sigma_\theta^0 = \sigma_x^0 + \sigma_y^0, \quad \sigma_\theta^0 - \sigma_r^0 + 2i\tau_{r\theta}^0 = [\sigma_y^0 - \sigma_x^0 + 2i\tau_{r\theta}^0] e^{2i\theta}.$$

С помощью приведенных формул находятся функции  $f(x_1)$  и  $F(\tau)$ :

$$f(x_1) = -(\sigma_{y_1}^0 + i\tau_{x_1y_1}^0) \quad \text{при } y_1 = 0, |x_1| \leq l_1, \quad (4)$$

$$F(\tau) = -(\sigma_r^0 + i\tau_{r\theta}^0) \quad \text{при } |z| = R.$$

Используя формулы Колосова – Мусхелишвили [19], граничные условия (2) запишем в виде

$$\Phi_1(x_1) + \overline{\Phi_1(x_1)} + x_1\Phi_1(x_1) + \Psi_1(x_1) = q_{y_1} + iq_{x_1y_1} + f(x_1) \quad \text{при } |x_1| \leq l_1, \quad (5)$$

$$\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - e^{2i\theta} [\tau\Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] = \overline{F(\tau)}. \quad (6)$$

Здесь  $x_1$  — аффикс точек берегов зоны предразрушения. Комплексные потенциалы  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1$ , дающие решение краевой задачи (5), (6), ищем в виде

$$\Phi_1(z) = \Phi_{01}(z) + \Phi_{11}(z), \quad \Psi_1(z) = \Psi_{01}(z) + \Psi_{11}(z), \quad (7)$$

Здесь комплексные потенциалы  $\Phi_{11}(z)$  и  $\Psi_{11}(z)$  находим в виде

$$\Phi_{11}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1(t)dt}{t-z_1}, \quad \Psi_{11}(z) = \frac{e^{-2i\alpha_1}}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[ \frac{\overline{g_1(t)}}{t-z_1} - \frac{\overline{T_1}e^{i\alpha_1}}{(t-z_1)^2} g_1(t) \right] dt, \quad (8)$$

где  $T_1 = te^{i\alpha_1} + z_1^0$ ;  $z_1 = e^{-i\alpha_1}(z - z_1^0)$ ;  $g_1(t)$  — искомая функция, характеризующая раскрытие берегов зоны предразрушения.

Неизвестная функция  $g_1(t)$  и комплексные потенциалы  $\Phi_{01}(z)$  и  $\Psi_{01}(z)$  должны быть определены из краевых условий на контуре  $L(r = R)$  и берегах зоны предразрушения. Используя соотношения (7), (8) для нахождения комплексных потенциалов  $\Phi_{01}(z)$  и  $\Psi_{01}(z)$ , краевые условия (4) представим в виде

$$\Phi_{01}(\tau) + \overline{\Phi_{01}(\tau)} - e^{-2i\theta} [\tau\Phi_{01}'(\tau) + \overline{\Psi_{01}(\tau)}] = F(\tau) - f_1(\theta), \quad (9)$$

где

$$f_1(\theta) = \Phi_{11}(\tau) + \overline{\Phi_{11}(\tau)} - e^{-2i\theta} [\tau\Phi_{11}'(\tau) + \overline{\Psi_{11}(\tau)}].$$

Для решения граничной задачи (9) относительно комплексных потенциалов  $\Phi_{01}(z)$  и  $\Psi_{01}(z)$  используем метод Н. И. Мусхелишвили [19]. Для комплексных потенциалов  $\Phi_{01}(z)$  и  $\Psi_{01}(z)$  имеем:

$$\Phi_{01}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L N_*(\tau) \left( \frac{1}{\tau-z} - \frac{1}{2\tau} \right) d\tau, \quad N_*(\tau) = F(\tau) - f_1(\theta),$$

$$\Psi_{01}(z) = \frac{1}{z^2} \Phi_{01}(z) + \frac{1}{z^2} \overline{\Phi_{01}} \left( \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi_{01}'(z).$$

После интегрирования и некоторых преобразований получаем:

$$\Phi_{01}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left\{ \left( \frac{1}{z\overline{T_1} - 1} + \frac{1}{2} \right) \overline{T_1}e^{i\alpha_1} g_1(t) + \left[ \frac{T_1}{2} - \frac{z^2\overline{T_1} - 2z + T_1}{(z\overline{T_1} - 1)^2} \right] e^{-i\alpha_1} \overline{g_1(t)} \right\} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L F(\tau) \left( \frac{1}{\tau-z} - \frac{1}{2\tau} \right) d\tau,$$



$$\begin{aligned} \Psi_{01}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[ \frac{e^{i\alpha_1} \bar{T}_1^3}{(z\bar{T}_1 - 1)^2} g_1(t) + \left( z^2 \bar{T}_1^2 + 4 - 3z\bar{T}_1 + zT_1\bar{T}_1^2 - 3T_1\bar{T}_1 \right) \frac{\bar{T}_1 e^{-i\alpha_1}}{(z\bar{T}_1 - 1)^3} \overline{g_1(t)} \right] dt + \\ + \frac{1}{z^2} \Phi_{00}(z) + \frac{1}{z^2} \bar{\Phi}_{00} \left( \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi'_{00}(z), \\ \Phi_{00}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L F(\tau) \left( \frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{2\tau} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Удовлетворяя функциями (7), (8) граничным условиям (5) на берегах зоны предразрушения, после некоторых преобразований получим комплексное интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $g_1(x_1)$ :

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[ R(t, x_1) g_1(t) + S(t, x_1) \overline{g_1(t)} \right] dt = \pi [q_{y_1}(x_1) + iq_{x_1 y_1}(x_1) + f(x_1) + f_0(x_1)] \quad |x_1| \leq \ell_1.$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_0(x_1) = - \left[ \Phi_{00}(x_1) + \overline{\Phi_{00}(x_1)} + x_1 \overline{\Phi'_{00}(x_1)} + \overline{\Psi_{00}(x_1)} \right], \\ \Psi_{00}(z) = \frac{1}{z^2} \Phi_{00}(z) + \frac{1}{z^2} \bar{\Phi}_{00} \left( \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{z} \Phi'_{00}(z), \\ R(t, x_1) = \frac{e^{i\alpha_1}}{2} \left( \frac{1}{T_1 - X_1} + \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\bar{T}_1 - \bar{X}_1} \right) - \frac{e^{i\alpha_1}}{2} \left[ \frac{X_1 \bar{T}_1^2}{1 - X_1 \bar{T}_1} + \frac{\bar{X}_1^2 T_1 - 2\bar{X}_1 + \bar{T}_1}{(1 - T_1 \bar{X}_1)^2} + \right. \\ \left. + e^{-2i\alpha_1} \frac{2X_1(T_1 \bar{T}_1 - 1) + \bar{T}_1^2(\bar{X}_1 + \bar{T}_1)(\bar{X}_1 T_1 - 3) + 4T_1}{(1 - T_1 \bar{X}_1)^3} \right], \\ S(t, x_1) = \frac{e^{-i\alpha_1}}{2} \left[ \frac{1}{\bar{T}_1 - \bar{X}_1} - \frac{T_1 - X_1}{(\bar{T}_1 - \bar{X}_1)^2} e^{-2i\alpha_1} \right] - \\ - \frac{e^{-i\alpha_1}}{2} \left[ \frac{T_1^2 X_1}{1 - T_1 \bar{X}_1} + \frac{X_1^2 \bar{T}_1 - 2X_1 + T_1}{(1 - X_1 \bar{T}_1)^2} + \frac{T_1^2 (X_1 - T_1) e^{-2i\alpha_1}}{(1 - T_1 \bar{X}_1)^2} \right], \\ X_1 = x_1 e^{i\alpha_1} + z_1^0. \end{aligned}$$

Для внутренней зоны предразрушения к сингулярному интегральному уравнению необходимо добавить дополнительное равенство:

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} g_1(t) dt = 0, \tag{10}$$

обеспечивающее однозначность смещений при обходе контура зоны предразрушения. Так как напряжения в диске всюду ограничены, то решение сингулярного интегрального уравнения ищется в классе всюду ограниченных функций. Используя замену переменных и отделяя действительную и мнимую части и процедуру алгебраизации [20], вместо каждого действительного сингулярного интегрального уравнения при дополнительных условиях (10) получаем конечную алгебраическую систему, состоящую из  $M$  уравнений, относительно приближенных значений искомых функций  $v_1(t_m)$  и  $u_1(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) в узловых точках соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[ \ell_1 R(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) g_1^0(t_m) + \overline{g_1^0(t_m)} S(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) \right] = \\ = q_{y_1}(x_r) + iq_{x_1 y_1}(x_r) + f(x_r) + f_0(x_r) \quad (r = 1, 2, \dots, M - 1), \\ \sum_{m=1}^M g_1^0(t_m) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$



Здесь значения  $t_m$  и  $x_r$  определяются формулами

$$t_m = \cos \frac{(2m-1)\pi}{2M} \quad (m = 1, 2, \dots, M), \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{M} \quad (r = 1, 2, \dots, M-1).$$

Если перейти в (11) к сопряженным значениям, получаем еще  $M$  алгебраических уравнений.

Для замкнутости полученных алгебраических уравнений не хватает двух уравнений, выражающих условия разрешимости интегрального уравнения. Записывая эти условия:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M (-1)^m g_1^0(t_m) \operatorname{ctg} \frac{(2m-1)\pi}{4M} &= 0, \\ \sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_1^0(t_m) \operatorname{tg} \frac{(2m-1)\pi}{4M} &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

получим две замкнутые конечные алгебраические системы.

В правые части системы (10) входят неизвестные значения нормальных  $q_{y_1}(x_1)$  и  $q_{x_1 y_1}(x_1)$  касательных напряжений в узловых точках зоны предразрушения. Условиями, определяющими неизвестные напряжения в связях между берегами зоны предразрушения, является дополнительное уравнение (1). В рассматриваемой задаче это дополнительное условие удобнее представить для производной раскрытия берегов зоны предразрушения:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [v_1^+(x_1, 0) - v_1^-(x_1, 0) - i(u_1^+(x_1, 0) - u_1^-(x_1, 0))] = \frac{\partial}{\partial x_1} [\Pi(x_1, \sigma_1)(q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1))].$$

Используя полученное решение, можно записать:

$$g_1(x_1) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx_1} [\Pi(x_1, \sigma_1)(q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1))].$$

Это комплексное уравнение служит для определения неизвестных напряжений  $q_{y_1}$  и  $q_{x_1 y_1}$  в связях между берегами зон предразрушения. Для левой части соотношения (1) имеем:

$$(v_1^+ - v_1^-) - i(u_1^+ - u_1^-) = -\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell_1}^{x_1} g_1(x_1) dx_1. \tag{13}$$

С учетом (1) соотношение (13) принимает вид

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell_1}^{x_1} g_1(x_1) dx_1 = \Pi(x_1, \sigma_1)(q_{y_1}(x_1) - iq_{x_1 y_1}(x_1)). \tag{14}$$

Отделяя в (14) действительные и мнимые части, получим:

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell_1}^{x_1} v_1(x_1) dx_1 = \Pi(x_1, \sigma_1) q_{y_1}(x_1), \tag{15}$$

$$-\frac{1+\kappa}{2\mu} \int_{-\ell_1}^{x_1} u_1(x_1) dx_1 = \Pi(x_1, \sigma_1) q_{x_1 y_1}(x_1). \tag{16}$$

Для построения недостающих уравнений, служащих для определения напряжений в связях между берегами зоны предразрушения, потребуем выполнения условий (15), (16) в узловых точках  $t_m$ , содержащихся в зоне предразрушения. В результате получим еще две системы из  $M$  уравнений для определения приближенных значений  $q_{y_1}(t_m)$  и  $q_{x_1 y_1}(t_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ):

$$\begin{cases} C_0 v_1^0(t_1) = \Pi(t_1, \sigma_1(t_1)) q_{y_1}(t_1), \\ C_0 (v_1^0(t_1) + v_1^0(t_2)) = \Pi(t_2, \sigma_1(t_2)) q_{y_1}(t_2), \\ \dots \\ C_0 \sum_{m=1}^M v_1^0(t_m) = \Pi(t_M, \sigma_1(t_M)) q_{y_1}(t_M), \end{cases}$$



$$\begin{cases} C_0 u_1^0(t_1) = \Pi(t_1, \sigma_1(t_1)) q_{x_1 y_1}(t_1), \\ C_0 (u_1^0(t_1) + u_1^0(t_2)) = \Pi(t_2, \sigma_1(t_2)) q_{x_1 y_1}(t_2), \\ \dots\dots\dots \\ C_0 \sum_{m=1}^M u_1^0(t_m) = \Pi(t_M, \sigma_1(t_M)) q_{x_1 y_1}(t_M), \end{cases}$$

где

$$C_0 = -\frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi \ell_1}{M}.$$

Для модуля вектора раскрытия берегов зоны предразрушения при  $x_1 = x_0$  получим:

$$V_0 = \sqrt{(v_1^+ - v_1^-)^2 + (u_1^+ - u_1^-)^2} = \frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi \ell_1}{M} \sqrt{A^2 + B^2}, \quad A = \sum_{m=1}^{M_1} v_1(t_m), \quad B = \sum_{m=1}^{M_1} u_1(t_m),$$

где  $M_1$  — число узловых точек, содержащихся в интервале  $(-l_1, x_0)$ . Для определения предельно-равновесного состояния диска, при котором происходит появление трещины, имеем условие

$$\frac{1 + \kappa}{2\mu} \frac{\pi \ell_1}{M} \sqrt{A^2 + B^2} = \delta_{cr}.$$

Полученная алгебраическая система (11), (12), (15), (16) из-за неизвестного размера зоны предразрушения даже при линейно-упругих связях оказывается нелинейной. Для ее решения использовали метод последовательных приближений. В каждом приближении алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента. В случае нелинейного закона деформирования связей для нахождения напряжений в зонах предразрушения используется итерационный метод, подобный методу упругих решений [21]. Численные расчеты проводились применительно к турбинному диску из стали ЭИ417. Радиус кругового диска был принят  $R = 0.47$  м. Результаты расчета напряжений в связях для случая одной зоны предразрушения при  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $\ell_1/R = 0.05$ ,  $z_1^0 = 0.25 \operatorname{Re}^{i\pi/18}$  вдоль зоны предразрушения представлены в виде графиков на рис. 2.

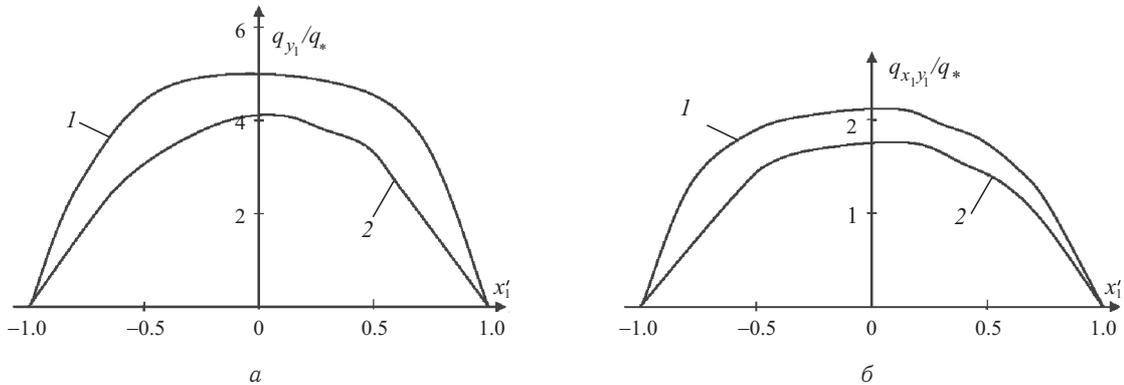


Рис. 2. Зависимость напряжений в связях зоны предразрушения: а — нормальные напряжения  $q_{y_1}(x_1)$ ; б — касательные напряжения  $q_{x_1 y_1}(x_1)$

В качестве постоянных межчастичного взаимодействия принимались параметры:  $V_* = 10^{-6}$  м,  $\sigma_* = 85$  МПа,  $\sigma_{cr}/c_* = 2.5$ ,  $\delta_{cr} = 2.5 \cdot 10^{-6}$  м,  $C_B = 2 \cdot 10^{-7}$  м/МПа ( $C_B$  — эффективная податливость связей). Кривая 1 соответствует линейному, а кривая 2 — билинейному (нелинейному) закону деформирования связей. При расчетах были использованы безразмерные величины  $x'_k = x_k/l_k$  ( $k = 1$ ),  $q_* = P/R$ .

**ВЫВОДЫ**

Совместное решение полученных алгебраических систем и предельного условия дает возможность (при заданных характеристиках материала кругового диска) определять критическую величину внешней нагрузки, размеры зон предразрушения для состояния предельного равновесия, при котором



происходит зарождение трещин. Размер предельной минимальной зоны предразрушения, при которой происходит трещинообразование, следует рассматривать как проектную характеристику материала диска. На основе предложенной расчетной модели, учитывающей наличие в диске зон ослабленных межчастичных связей, разработан метод расчета значений ряда параметров, при которых начинается трещинообразование.

### Библиографический список

1. Болотин В. В. Механика зарождения трещин и начального развития усталостных трещин // ФХММ. 1986. Т. 22, № 1. С. 18–23.
2. Мирсалимов В. М. Зарождение дефекта типа трещины во втулке контактной пары // Матем. моделирование. 2005. Т. 17, № 2. С. 35–45.
3. Мирсалимов В. М. К решению задачи механики контактного разрушения о зарождении и развитии трещины со связями между берегами во втулке фрикционной пары // ПММ. 2007. Т. 71, вып. 1. С. 132–151.
4. Мир-Салимзаде М. В. Зарождение трещин в перфорированной подкрепленной пластине // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6 (292). С. 1030–1039.
5. Вагари А. Р., Мирсалимов В. М. Зарождение трещин в перфорированном тепловыделяющем массиве, упругие свойства которого зависят от температуры // ПМТФ. 2012. № 4. С. 138–148.
6. Zolgharnein E., Mirsalimov V. M. Nucleation of a Crack under Inner Compression of Cylindrical Bodies // Acta Polytechnica Hungarica. 2012. Vol. 9, № 2. P. 169–183.
7. Ахмедова М. В. Зарождение трещин в тонкой пластине, ослабленной периодической системой криволинейных отверстий // Вестн. ЧПГУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2013. № 4 (18). С. 3–14.
8. Искендеров Р. А. Зарождение трещины при поперечном изгибе изотропной пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 3. С. 18–28.
9. Mirsalimov V. M., Hasanov Sh. G. Modeling of crack nucleation in covering on an elastic base // Intern. J. Damage Mech. 2014. Vol. 23(3). P. 430–450.
10. Зильфугаров Э. И. Моделирование зарождения искривленной трещины в тормозном барабане автомобиля // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2014. № 1 (303). С. 24–30.
11. Mohammed I., Liechti K. M. Cohesive zone modeling of crack nucleation at bimaterial corners // J. Mech. Phys. Solids. 2000. Vol. 48, iss. 4. P. 735–764.
12. Yang B. Examination of free-edge crack nucleation around an open hole in composite laminates // Intern. J. Fracture. 2002. Vol. 115, iss. 2. P. 173–191.
13. Yang Q., Cox B. Cohesive models for damage evolution in laminated composites // Intern. J. Fracture. 2005. Vol. 133, iss. 2. P. 107–137.
14. Lipperman F., Ryvkin M., Fuchs M. B. Nucleation of cracks in two-dimensional periodic cellular materials // Computational Mechanics. 2007. Vol. 39, iss. 2. P. 127–139.
15. Gutkin M. Yu., Ovid'ko I. A., Skiba N. V. Effect of inclusions on heterogeneous crack nucleation in nanocomposites // Physics of the Solid State. 2007. Vol. 49, iss. 2. P. 261–266.
16. Chen Z., Butcher C. Estimation of the Stress State Within Particles and Inclusions and a Nucleation Model for Particle Cracking // Micromechanics Modelling of Ductile Fracture: Solid Mechanics and Its Applications. 2013. Vol. 195. P. 223–243.
17. Гасанов Ф. Ф. Зарождение трещин в изотропной среде с периодической системой круговых отверстий, заполненных жесткими включениями, при продольном сдвиге // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 3. С. 44–50.
18. Гасанов Ф. Ф. Зарождение трещины в композите, армированном однонаправленными ортотропными волокнами при продольном сдвиге // Механика машин, механизмов и материалов. 2014. № 2 (27). С. 45–50.
19. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1966. 707 с.
20. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М. : Наука, 1987. 256 с.
21. Ильюшин А. А. Пластичность. М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. 376 с.

## Modelling of Cracking in Circular Disk Loaded by Concentrated Forces

V. M. Mirsalimov, N. M. Kalantarly

Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences, 9, B. Vahabzadeh str., AZ1141, Baku, Azerbaijan, mir-vagif@mail.ru, nailyak1975@gmail.com

An isotropic disk of radius  $R$ , loaded on the contour by two concentrated forces  $P$ , applied to the points  $z_1 = R$  and  $z_2 = -R$ , is considered. A model of cracking in a circular disk, based on consideration of fracture process zone, is proposed. It is assumed that the fracture process zone is a finite length layer, containing material with partially broken bonds between individual structural elements. Equations for determination of the external load critical value at which the crack is observed are obtained.

**Key words:** circular disk, zone of weakened interparticle material bonds, cohesive forces, crack nucleation.



## References

1. Bolotin V. V. Mechanics of the initiation and initial development of fatigue cracks. *Soviet materials science*, 1986, vol. 22, iss. 1, pp. 14–19. DOI: 10.1007/BF00720861.
2. Mirsalimov V. M. Initiation of defects such as a crack in the bush of contact pair. *Matem. Mod.*, 2005, vol. 17, no. 2, pp. 35–45 (in Russian).
3. Mirsalimov V. M. The solution of a problem in contact fracture mechanics on the nucleation and development of a bridged crack in the hub of a friction pair. *J. Appl. Math. Mech.*, 2007, vol. 71, iss. 1, pp. 132–151. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2007.03.003.
4. Mir-Salimzade M. V. Generation of Cracks in a Perforated Reinforced Plate. *J. Applied Mechanics and Technical Physics*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1030–1039.
5. Vagari A. P., Mirsalimov V. M. Nucleation of Cracks in a Perforated Heat-Releasing Material with Temperature-Dependent Elastic Properties. *J. Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, no. 4, pp. 138–148.
6. Zolgharnein E., Mirsalimov V. M. Nucleation of a Crack under Inner Compression of Cylindrical Bodies. *Acta Polytechnica Hungarica*, 2012, vol. 9, no. 2, pp. 169–183.
7. Akhmedova M. V. Cracks nucleation in thin plate, weakened by the periodic system of the curvilinear holes. *Vestnik chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ia. Iakovleva. Ser. Mekhanika predel'nogo sostoianiia*, 2013, no. 4 (18), pp. 3–14.
8. Iskenderov R. A. The crack nucleation in the isotropic plate, weakened by a periodical system of circular holes under transverse bending. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2013, no. 3, pp. 18–28.
9. Mirsalimov V. M., Hasanov Sh. G. Modeling of crack nucleation in covering on an elastic base. *Intern. J. Damage Mech.*, 2014, vol. 23(3), pp. 430–450.
10. Зульфугаров Э. И. Моделирование зарождения искривленной трещины в тормозном барабане автомобиля. *Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii* [Fundamental and applied problems of engineering and technology], 2014, no. 1 (303), pp. 24–30 (in Russian).
11. Mohammed I., Liechti K. M. Cohesive zone modeling of crack nucleation at bimaterial corners. *J. Mech. Phys. Solids*, 2000, vol. 48, iss. 4, pp. 735–764.
12. Yang B. Examination of free-edge crack nucleation around an open hole in composite laminates. *Intern. J. Fracture*, 2002, vol. 115, iss. 2, pp. 173–191.
13. Yang Q., Cox B. Cohesive models for damage evolution in laminated composites. *Intern. J. Fracture*, 2005, vol. 133, iss. 2, pp. 107–137.
14. Lipperman F., Ryvkin M., Fuchs M. B. Nucleation of cracks in two-dimensional periodic cellular materials. *Computational Mechanics*, 2007, vol. 39, iss. 2, pp. 127–139.
15. Gutkin M. Yu., Ovid'ko I. A., Skiba N. V. Effect of inclusions on heterogeneous crack nucleation in nanocomposites. *Physics of the Solid State*, 2007, vol. 49, iss. 2, pp. 261–266.
16. Chen Z., Butcher C. Estimation of the Stress State Within Particles and Inclusions and a Nucleation Model for Particle Cracking. *Micromechanics Modelling of Ductile Fracture: Solid Mechanics and Its Applications*, 2013, vol. 195, pp. 223–243.
17. Hasanov F. F. Nucleation of cracks in isotropic medium with periodic system of the circular holes filled with rigid inclusions, at longitudinal shear. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2014, no. 3, pp. 44–50 (in Russian).
18. Hasanov F. F. Nucleation of the crack in a composite, reinforced unidirectional orthotropic fibres at longitudinal shear. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2014, no. 2 (27), pp. 45–50 (in Russian).
19. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*. Moscow, Nauka, 1966, 707 p. (in Russian).
20. Mirsalimov V. M. *Multidimensional elasto-plastic problems*. Moscow, Nauka, 1987, 256 p. (in Russian).
21. Il'yushin A. A. *Plasticity*. Moscow; Leningrad, GITTL, 1948, 376 p. (in Russian).

УДК 629

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ ОКОЛОКРУГОВОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

И. А. Панкратов

Кандидат технических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, PankratovIA@info.sgu.ru

Рассмотрена задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА) с помощью ограниченного по модулю управления, ортогонального плоскости орбиты КА. Найдено приближённое аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты КА для постоянного на смежных участках активного движения КА управления.

*Ключевые слова:* космический аппарат, орбита, ориентация, кватернион, оптимальное управление.



### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вектор ускорения  $\mathbf{u}$  от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. В этом случае орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Движение центра масс КА будем рассматривать в инерциальной системе координат  $X$  — геоцентрической экваториальной системе координат  $OX_1X_2X_3(X)$  с началом в центре  $O$  притяжения Земли. Ось  $OX_3$  этой системы координат направлена вдоль оси суточного вращения Земли, оси  $OX_1$  и  $OX_2$  лежат в плоскости экватора Земли, ось  $OX_1$  направлена в точку весеннего равноденствия для Земли, ось  $OX_2$  дополняет систему до правой тройки векторов.

Введем также в рассмотрение орбитальную систему координат  $\eta$ . Начало этой системы координат находится в центре масс КА, ось  $\eta_1$  направлена вдоль радиуса-вектора центра масс КА, ось  $\eta_3$  перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора  $\mathbf{c}$  момента скорости центра масс КА, а ось  $\eta_2$  образует правую тройку с осями  $\eta_1$  и  $\eta_3$ . Ориентация системы координат  $\eta$  в инерциальной системе координат  $X$  задаётся долготой восходящего узла  $\Omega_u$ , наклоном орбиты  $I$ , угловым расстоянием перицентра от узла  $\omega_\pi$  и истинной аномалией  $\varphi$ , характеризующей положение КА на орбите.

Уравнения ориентации орбитальной системы координат  $\eta$  в параметрах Эйлера  $\lambda_j$  имеют вид [1–4]

$$2 \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = \frac{r}{c} u \mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2} \mathbf{i}_3, \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const.}$$

Здесь  $\boldsymbol{\lambda}$  — нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат  $\eta$ ,  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — векторные мнимые единицы Гамильтона,  $\circ$  — символ кватернионного умножения;  $\varphi$  — истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите;  $r = |\mathbf{r}|$  — модуль радиуса-вектора центра масс КА;  $p$  и  $e$  — параметр и эксцентриситет орбиты соответственно,  $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$  — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости  $\mathbf{v}$  центра масс КА);  $u$  — проекция вектора реактивного ускорения  $\mathbf{u}$  на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА).

Компоненты  $\lambda_j$  кватерниона  $\boldsymbol{\lambda}$  связаны с классическими угловыми переменными  $\Omega_u, I, \omega_\pi$  и  $\varphi$  соотношениями:

$$\lambda_0 = \cos \frac{I}{2} \cos \left( \frac{\Omega_u + \omega_\pi + \varphi}{2} \right), \quad \lambda_1 = \sin \frac{I}{2} \cos \left( \frac{\Omega_u - \omega_\pi - \varphi}{2} \right),$$

$$\lambda_2 = \sin \frac{I}{2} \sin \left( \frac{\Omega_u + \omega_\pi + \varphi}{2} \right), \quad \lambda_3 = \cos \frac{I}{2} \sin \left( \frac{\Omega_u - \omega_\pi - \varphi}{2} \right).$$

Пусть необходимо определить ограниченное по модулю управление  $\mathbf{u}$  :

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max},$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^h = \boldsymbol{\Lambda}^h \circ \left( \cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ?, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad \boldsymbol{\lambda}(t^*) = \pm \boldsymbol{\Lambda}^* \circ \left( \cos \frac{\varphi^*}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi^*}{2} \right)$$

и минимизирующее функционал

$$J_1 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0$$



или функционал

$$J_2 = \int_0^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0. \quad (2)$$

При  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$  имеем задачу быстродействия. При  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$  в случае минимизации функционала (2) имеем задачу минимизации затрат характеристической скорости [5].

Кватернионная переменная  $\mathbf{\Lambda}$  характеризует ориентацию орбиты КА, а переменная  $\varphi$  — положение КА на орбите. Величины  $c, p, e, \varphi_0, \mathbf{\Lambda}^n$  и  $\mathbf{\Lambda}^*$  заданы. Подлежат определению оптимальный закон управления  $u = u(t)$  и величины  $t^*, \varphi^*$ .

Аналитическое решение уравнений (1) в случае произвольного управления  $u = u(t)$  не найдено. Отметим, что задача интегрирования уравнений (1) есть известная задача Дарбу [6]. Решение указанной задачи в замкнутой форме найдено лишь для некоторых частных случаев (см., например, работу А. В. Молоденкова [7]). Известно, что оптимальное управление, находимое из условия максимума функции Гамильтона – Понтрягина по переменной  $u$ , в случае минимизации функционала (2) или при решении задачи быстродействия сохраняет постоянное значение на смежных участках активного движения КА [8, 9]. В работе [10] был предложен способ построения решения уравнений (1) при условии, что орбита КА является круговой ( $e = 0$ ), а управление  $u$  — постоянным.

Отметим, что для нахождения аналитического решения уравнений (1) удобно перейти к новой независимой переменной — истинной аномалии  $\varphi$  и ввести безразмерные переменные. Фазовые переменные  $\lambda_j$  являются безразмерными. Безразмерные переменные  $r^b, t^b$  и управление  $u^b$  связаны с размерными переменными  $r, t$  и управлением  $u$  соотношениями:  $r = Rr^b, u = u_{\max} u^b, t = Tt^b$ , где  $R$  — характерное расстояние (в его качестве принималась величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА);  $V, T$  — характерные скорость и время соответственно, определяемые соотношениями:  $V = c/R, T = R^2/c$ .

Отметим также, что при переходе к безразмерным переменным в уравнениях для фазовых переменных появляется характерный безразмерный параметр  $N^b = u_{\max} R^3/c^2$ .

Таким образом, система фазовых уравнений в безразмерных переменных примет вид [9]

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda} \circ [N^b (r^b)^3 u^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3], \quad r^b = \frac{1}{1 + e \cos \varphi}. \quad (3)$$

## 2. ПЕРВАЯ ПОПРАВКА

Предположим, что орбита КА является околокруговой ( $|e| \ll 1$ ), а управление постоянным. Следуя [11], будем искать решение в виде разложения по степеням малого параметра  $e$ :

$$\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)}(\varphi) + e\boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\varphi) + e^2\boldsymbol{\lambda}^{(2)}(\varphi) + \dots \quad (4)$$

Входящий в уравнения (1) множитель  $(r^b)^3$  можно также представить в виде ряда по степеням  $e$ :

$$(r^b)^3 = \frac{1}{(1 + e \cos \varphi)^3} = 1 + 3e \cos \varphi + 6e^2 \cos^2 \varphi + \dots$$

Ограничимся пока нахождением лишь первого поправочного члена ряда (4), т.е. будем искать приближённое решение задачи в виде

$$\boldsymbol{\lambda}(\varphi) = \boldsymbol{\lambda}^{(0)}(\varphi) + e\boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\varphi) + O(e^2). \quad (5)$$

Тогда уравнения для кватерниона  $\boldsymbol{\lambda}$  примут вид

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda} \circ \{ [N \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] - 3Ne \cos \varphi \mathbf{i}_1 \}. \quad (6)$$

Здесь  $N = N^b u^b = \text{const}$ .

Подставляя разложение (5) в кватернионное уравнение (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $e$ , имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}^{(0)}}{d\varphi} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}^{(0)} \circ [N \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3], \quad (7)$$



$$\frac{d\lambda^{(1)}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\lambda^{(1)} \circ [N \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] - \frac{3}{2}N \cos \varphi \left( \lambda^{(0)} \circ \mathbf{i}_1 \right). \quad (8)$$

При этом необходимо учитывать тот факт, что умножение кватернионов ассоциативно, но в общем случае не коммутативно [6, 12].

Уравнение (7) совпадает с уравнением ориентации орбитальной системы координат в случае, когда КА движется по круговой орбите под действием постоянного управления. Согласно [10] общее решение этого уравнения имеет вид

$$\lambda^{(0)} = \mathbf{C} \cos \left( \frac{\omega\varphi}{2} \right) + \mathbf{D} \sin \left( \frac{\omega\varphi}{2} \right), \quad (9)$$

где  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  – кватернионные постоянные интегрирования, а  $\omega = \sqrt{N^2 + 1} = \text{const}$ .

При этом уравнение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda^{(1)}}{d\varphi} = & \frac{1}{2}\lambda^{(1)} \circ [N \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] - \frac{3}{4}N \left\{ (\mathbf{C} \circ \mathbf{i}_1) \cdot \left[ \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} + 1 \right) \varphi \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} - 1 \right) \varphi \right] \right] + (\mathbf{D} \circ \mathbf{i}_1) \cdot \left[ \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} + 1 \right) \varphi \right] + \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} - 1 \right) \varphi \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Исключая из рассмотрения решение соответствующего однородного уравнения, будем искать решение (10) в виде

$$\lambda^{(1)} = \mathbf{A}^+ \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} + 1 \right) \varphi \right] + \mathbf{B}^+ \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} + 1 \right) \varphi \right] + \mathbf{A}^- \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} - 1 \right) \varphi \right] + \mathbf{B}^- \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} - 1 \right) \varphi \right], \quad (11)$$

где  $\mathbf{A}^+$ ,  $\mathbf{B}^+$ ,  $\mathbf{A}^-$ ,  $\mathbf{B}^-$  – постоянные кватернионы.

Подставляя (11) в уравнение (10) и приравнявая коэффициенты при косинусах и синусах с одинаковыми аргументами, получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \frac{3N}{8(1+\omega)} \mathbf{C} \circ [-N - \mathbf{i}_2] + \frac{3N(\omega+2)}{8(1+\omega)} (\mathbf{D} \circ \mathbf{i}_1), \\ \mathbf{B}^+ &= -\frac{3N(\omega+2)}{8(1+\omega)} (\mathbf{C} \circ \mathbf{i}_1) + \frac{3N}{8(1+\omega)} \mathbf{D} \circ [-N - \mathbf{i}_2], \\ \mathbf{A}^- &= \frac{3N}{8(1-\omega)} \mathbf{C} \circ [-N - \mathbf{i}_2] + \frac{3N(\omega-2)}{8(1-\omega)} (\mathbf{D} \circ \mathbf{i}_1), \\ \mathbf{B}^- &= -\frac{3N(\omega-2)}{8(1-\omega)} (\mathbf{C} \circ \mathbf{i}_1) + \frac{3N}{8(1-\omega)} \mathbf{D} \circ [-N - \mathbf{i}_2]. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, общее решение уравнения (3) с точностью до слагаемых, содержащих эксцентриситет орбиты КА в степени не выше первой, имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda = & \mathbf{C} \cos \left( \frac{\omega\varphi}{2} \right) + \mathbf{D} \sin \left( \frac{\omega\varphi}{2} \right) + \\ & + e \left\{ \left( \frac{3N}{8(1+\omega)} \mathbf{C} \circ [-N - \mathbf{i}_2] + \frac{3N(\omega+2)}{8(1+\omega)} (\mathbf{D} \circ \mathbf{i}_1) \right) \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} + 1 \right) \varphi \right] + \right. \\ & + \left( -\frac{3N(\omega+2)}{8(1+\omega)} (\mathbf{C} \circ \mathbf{i}_1) + \frac{3N}{8(1+\omega)} \mathbf{D} \circ [-N - \mathbf{i}_2] \right) \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} + 1 \right) \varphi \right] + \\ & + \left( \frac{3N}{8(1-\omega)} \mathbf{C} \circ [-N - \mathbf{i}_2] + \frac{3N(\omega-2)}{8(1-\omega)} (\mathbf{D} \circ \mathbf{i}_1) \right) \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} - 1 \right) \varphi \right] + \\ & \left. + \left( -\frac{3N(\omega-2)}{8(1-\omega)} (\mathbf{C} \circ \mathbf{i}_1) + \frac{3N}{8(1-\omega)} \mathbf{D} \circ [-N - \mathbf{i}_2] \right) \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} - 1 \right) \varphi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть необходимо найти частное решение уравнения (3), удовлетворяющее условию

$$\lambda(0) = \lambda^{\text{H}},$$

тогда для определения кватернионов  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  имеем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{C} \circ \mathbf{a}_{11} + \mathbf{D} \circ \mathbf{a}_{12} = \lambda^{\text{H}}, \quad \mathbf{C} \circ \mathbf{a}_{21} + \mathbf{D} \circ \mathbf{a}_{22} = \frac{d\lambda}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{2}\lambda^{\text{H}} \circ \{ [N \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] - 3N e \mathbf{i}_1 \}. \quad (14)$$



Здесь  $\mathbf{a}_{11} = 1 + 0.75e + (0.75e/N)\mathbf{i}_2$ ,  $\mathbf{a}_{12} = (0.75e/N)\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{a}_{21} = 3e \cdot (1 - 3N^2)/(8N)\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{a}_{22} = \omega \cdot (0.5 - 3e/8) - 3e \cdot \omega/(8N)\mathbf{i}_2$ .

Решение системы (14) имеет вид

$$\mathbf{D} = \left[ \boldsymbol{\lambda}^H \circ \mathbf{a}_{11}^{-1} - \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} \right] \circ (\mathbf{a}_{12} \circ \mathbf{a}_{11}^{-1} - \mathbf{a}_{22} \circ \mathbf{a}_{21}^{-1})^{-1}, \quad \mathbf{C} = \boldsymbol{\lambda}^H \circ \mathbf{a}_{11}^{-1} - \mathbf{D} \circ \mathbf{a}_{22} \circ \mathbf{a}_{11}^{-1}. \quad (15)$$

На рис. 1 показаны законы изменения компонент кватерниона погрешности определения ориентации орбитальной системы координат

$$err_j(e) = \max_{\varphi \in [0; 2\pi]} |\lambda_j^{\text{прибл}}(\varphi, e) - \lambda_j^{\text{ПК}}(\varphi, e)|, \quad j = \overline{0, 3}.$$

Здесь  $\boldsymbol{\lambda}^{\text{прибл}}(\varphi, e)$  — приближённое решение, рассчитанное по формулам (13), (15); а  $\boldsymbol{\lambda}^{\text{ПК}}(\varphi, e)$  — результат интегрирования уравнения (3) методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности с шагом  $h = 0.001$  рад. Отметим, что параметры задачи полагались равными:

$$\begin{aligned} \Omega_u^0 = \Omega_u(0) = 215.25^\circ, \quad I^0 = I(0) = 64.8^\circ, \quad \omega_\pi^0 = \omega_\pi(0) = 0^\circ, \\ \varphi_0 = 0 \text{ рад.}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N = 0.35. \end{aligned} \quad (16)$$

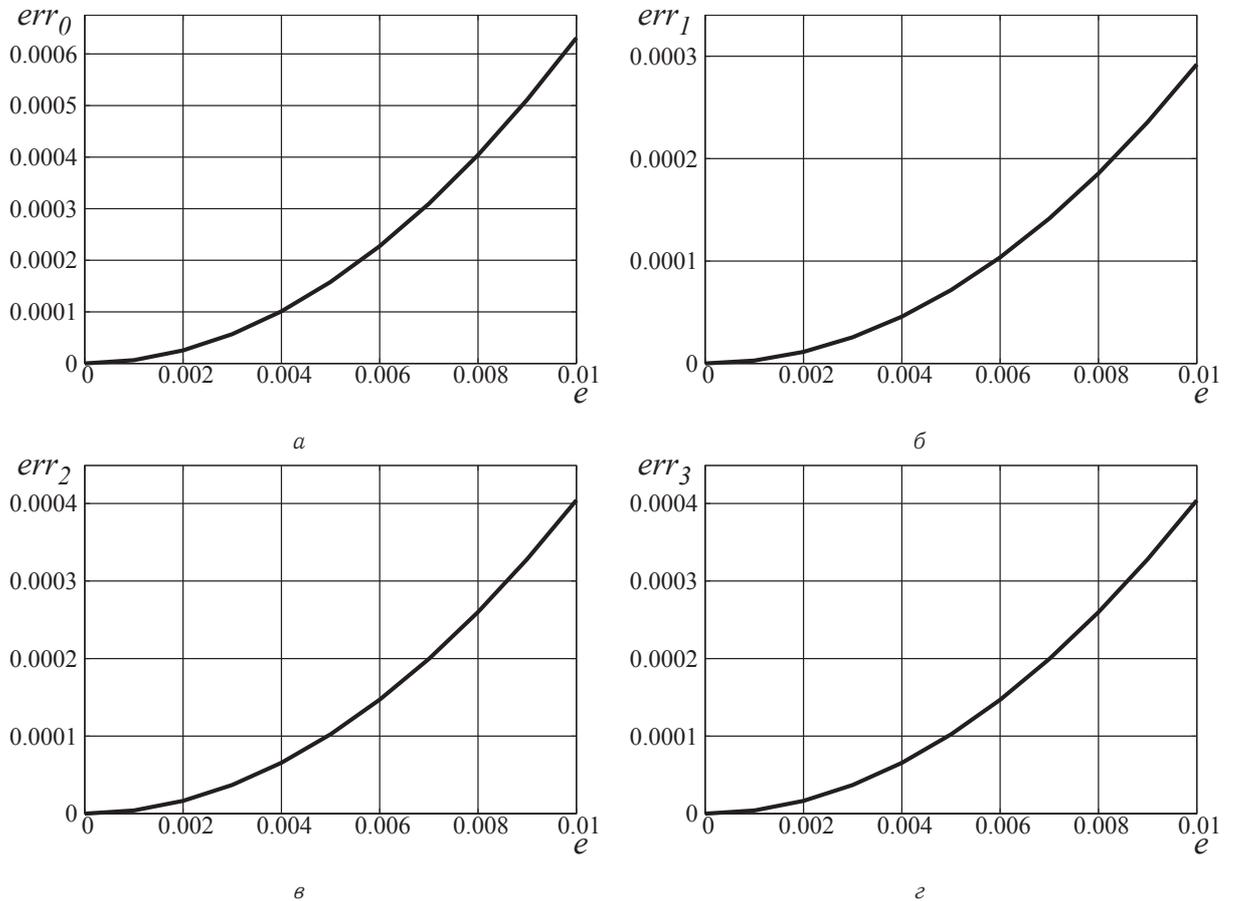


Рис. 1. Компоненты кватерниона погрешности (первая поправка): а — скалярная часть; б–г — компоненты векторной части

При этом компоненты начального кватерниона ориентации орбитальной системы координат имели вид

$$\lambda_0^H = -0.255650, \quad \lambda_1^H = -0.162241, \quad \lambda_2^H = 0.510674, \quad \lambda_3^H = 0.804694. \quad (17)$$

Указанный кватернион  $\boldsymbol{\lambda}^H$  соответствует ориентации орбиты одного из спутников группировки ГЛОНАСС (при условии, что начальное значение истинной аномалии  $\varphi$  — ноль радиан).



### 3. ВТОРАЯ ПОПРАВКА

Уточним полученное решение и найдём второй поправочный член ряда (4), т.е. теперь приближённое решение задачи примет вид

$$\lambda(\varphi) = \lambda^{(0)}(\varphi) + e\lambda^{(1)}(\varphi) + e^2\lambda^{(2)}(\varphi) + O(e^3). \quad (18)$$

В этом случае уравнения для кватерниона  $\lambda$  будут иметь вид

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{1}{2}\lambda \circ \{[N\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] - N(3e \cos \varphi - 6e^2 \cos^2 \varphi) \mathbf{i}_1\}, \quad (19)$$

Подставляя разложение (18) в кватернионное уравнение (19) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $e$ , имеем помимо (7), (8) следующее уравнение:

$$\frac{d\lambda^{(2)}}{d\varphi} = \frac{1}{2}\lambda^{(2)} \circ [N\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] - \frac{3}{2}N \cos \varphi (\lambda^{(1)} \circ \mathbf{i}_1) + 3N \cos^2 \varphi (\lambda^{(0)} \circ \mathbf{i}_1). \quad (20)$$

С учётом найденных ранее выражений (9), (11) для  $\lambda^{(0)}$  и  $\lambda^{(1)}$  уравнение (20) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda^{(2)}}{d\varphi} = & \frac{1}{2}\lambda^{(2)} \circ [N\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3] + \\ & + \frac{3}{4}N \left\{ (C - A^+) \circ \mathbf{i}_1 \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} + 2 \right) \varphi \right] + (D - B^+) \circ \mathbf{i}_1 \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} + 2 \right) \varphi \right] + \right. \\ & + (C - A^-) \circ \mathbf{i}_1 \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} - 2 \right) \varphi \right] + (D - B^-) \circ \mathbf{i}_1 \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} - 2 \right) \varphi \right] + \\ & \left. + (2C - A^+ - A^-) \circ \mathbf{i}_1 \cos \frac{\omega\varphi}{2} + (2D - B^+ - B^-) \circ \mathbf{i}_1 \sin \frac{\omega\varphi}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Так как функции  $\cos(\omega\varphi/2)$  и  $\sin(\omega\varphi/2)$  входят в фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, то решение уравнения (21) будем искать в виде [13]

$$\begin{aligned} \lambda^{(2)} = & E^+ \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} + 2 \right) \varphi \right] + F^+ \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} + 2 \right) \varphi \right] + E^- \cos \left[ \left( \frac{\omega}{2} - 2 \right) \varphi \right] + \\ & + F^- \sin \left[ \left( \frac{\omega}{2} - 2 \right) \varphi \right] + G\varphi \cos \frac{\omega\varphi}{2} + H\varphi \sin \frac{\omega\varphi}{2}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $E^+, F^+, E^-, F^-, G, H$  — постоянные кватернионы.

Подставляя (22) в уравнение (21) и приравнивая коэффициенты при косинусах и синусах с одинаковыми аргументами, имеем:

$$\begin{aligned} E^+ = & \frac{-3N}{16(\omega+2)} \left\{ C \circ \left[ -N - \frac{3N}{8(1+\omega)} (N^2 - 1 + (\omega+2)(\omega+4)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( 1 + \frac{3N^2}{4(1+\omega)} \right) \mathbf{i}_2 \right] + D \circ \left[ \left( \omega+4 + \frac{3N^2(\omega+3)}{4(1+\omega)} \right) \mathbf{i}_1 - \frac{3N}{4(1+\omega)} \mathbf{i}_3 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} F^+ = & \frac{3N}{16(\omega+2)} \left\{ C \circ \left[ \left( \omega+4 + \frac{3N^2(\omega+3)}{4(1+\omega)} \right) \mathbf{i}_1 - \frac{3N}{4(1+\omega)} \mathbf{i}_3 \right] + \right. \\ & \left. + D \circ \left[ N + \frac{3N}{8(1+\omega)} (N^2 - 1 + (\omega+2)(\omega+4)) + \left( 1 + \frac{3N^2}{4(1+\omega)} \right) \mathbf{i}_2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^- = & \frac{3N}{16(\omega-2)} \left\{ C \circ \left[ -N - \frac{3N}{8(1-\omega)} (N^2 - 1 + (\omega-2)(\omega-4)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( 1 + \frac{3N^2}{4(1-\omega)} \right) \mathbf{i}_2 \right] + D \circ \left[ \left( \omega-4 + \frac{3N^2(\omega-3)}{4(1-\omega)} \right) \mathbf{i}_1 + \frac{3N}{4(1-\omega)} \mathbf{i}_3 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} F^- = & \frac{3N}{16(\omega-2)} \left\{ -C \circ \left[ \left( \omega-4 + \frac{3N^2(\omega-3)}{4(1-\omega)} \right) \mathbf{i}_1 + \frac{3N}{4(1-\omega)} \mathbf{i}_3 \right] + \right. \\ & \left. + D \circ \left[ -N - \frac{3N}{8(1-\omega)} (N^2 - 1 + (\omega-2)(\omega-4)) - \left( 1 + \frac{3N^2}{4(1-\omega)} \right) \mathbf{i}_2 \right] \right\}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} &= \frac{3}{16} \{ \mathbf{C} \circ [5N - 3\mathbf{i}_2] - 3\omega (\mathbf{D} \circ \mathbf{i}_1) \} \circ \mathbf{i}_1, \\
 \mathbf{H} &= \frac{3}{16} \{ 3\omega (\mathbf{C} \circ \mathbf{i}_1) + \mathbf{D} \circ [5N - 3\mathbf{i}_2] \} \circ \mathbf{i}_1.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Таким образом, общее решение уравнения (3) с точностью до слагаемых, содержащих эксцентриситет орбиты КА в степени не выше второй, имеет вид (18), где кватернионы  $\lambda^{(0)}$ ,  $\lambda^{(1)}$ ,  $\lambda^{(2)}$  вычисляются по формулам (9), (11), (22); при этом постоянные кватернионы задаются формулами (12), (23)–(25).

На рис. 2 показаны законы изменения компонент  $err_j(e)$  кватерниона погрешности определения ориентации орбитальной системы координат с учётом слагаемых, содержащих эксцентриситет орбиты КА в степени не выше второй. Параметры задачи и начальный кватернион ориентации орбитальной системы координат по-прежнему имеют вид (16), (17).

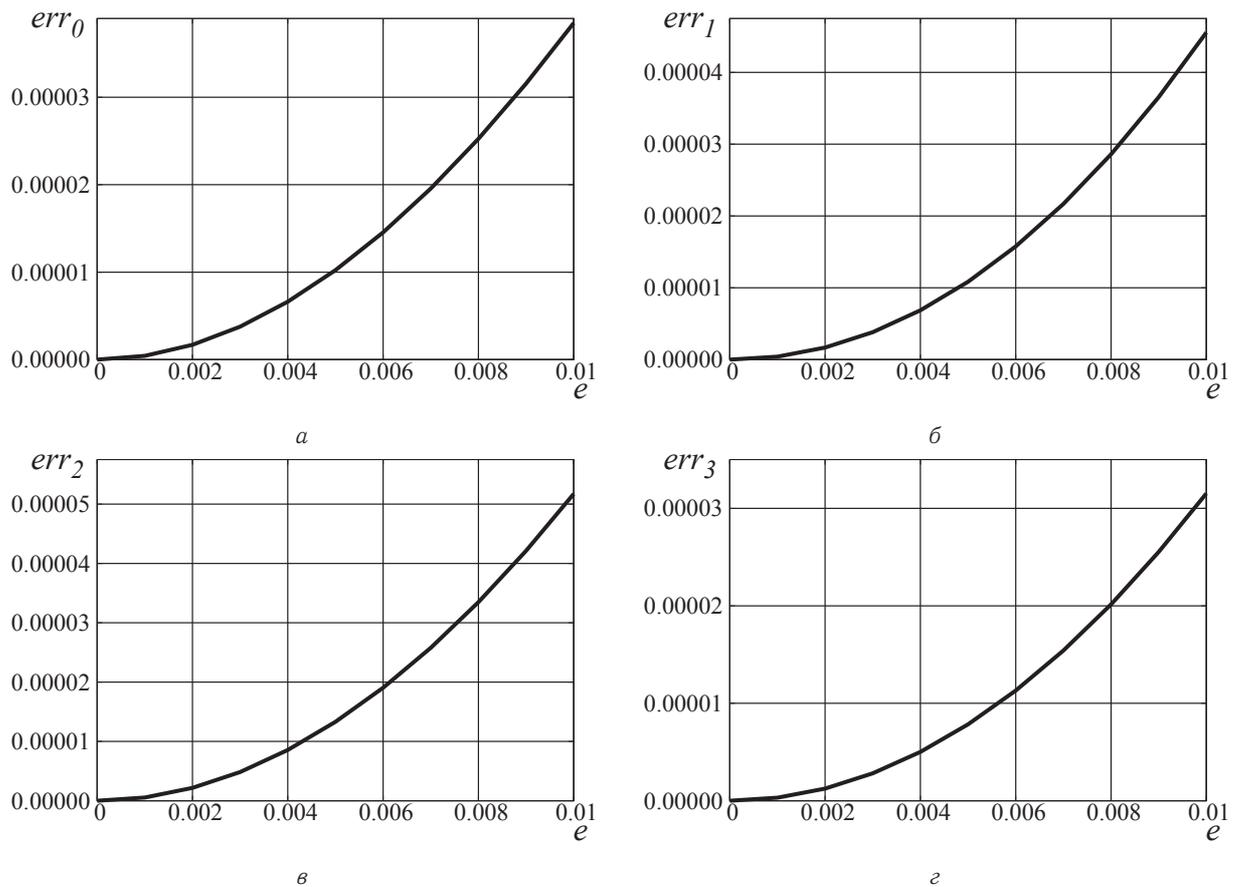


Рис. 2. Компоненты кватерниона погрешности (вторая поправка): а — скалярная часть; б–г — компоненты векторной части

Отметим, что полученное разложение (18) становится непригодным при больших значениях  $\varphi$  из-за присутствия в нём вековых слагаемых  $\varphi \cos(\omega\varphi/2)$  и  $\varphi \sin(\omega\varphi/2)$ . Очевидно, что при возрастании истинной аномалии указанные слагаемые будут того же порядка, что и первый поправочный член (при  $\varphi > O(e^{-1})$ ) или даже будут больше главного члена разложения (при  $\varphi > O(e^{-2})$ ). При этом все предыдущие выкладки были сделаны в предположении, что эти слагаемые должны быть малой поправкой.

Кроме того, необходимо дополнительно исследовать поведение полученных разложений в случае, когда КА оснащён двигателем малой тяги ( $N \ll 1$ ). Дело в том, что при этом  $\omega \approx 1$  и в формулах (12), (24) появляются малые знаменатели, что тоже служит источником неравномерности.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165-а).*



## Библиографический список

1. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 6. С. 759–770.
2. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I // Космические исследования. 2001. Т. 39, вып. 5. С. 502–517.
3. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. II // Космические исследования. 2003. Т. 41, вып. 1. С. 92–107.
4. Челноков Ю. Н., Панкратов И. А. Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 70–73.
5. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В. К. Абалякин, Е. П. Аксенов, Е. А. Гребенников [и др.]. М. : Наука, 1976. 864 с.
6. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.
7. Молоденков А. В. К решению задачи Дарбу // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 3–13.
8. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 231–234.
9. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.
10. Панкратов И. А., Челноков Ю. Н. Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 83–89.
11. Нейфэ А. Введение в методы возмущений. М. : Мир, 1984. 535 с.
12. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : Физматлит, 2006. 512 с.
13. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Физматлит, 2001. 576 с.

## Analytical Solution of Equations of Near-circular Spacecraft's Orbit Orientation

I. A. Pankratov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, PankratovIA@info.sgu.ru

The problem of optimal reorientation of spacecraft's orbit with a limited control, orthogonal to the plane of spacecraft's orbit, is considered. An approximate analytical solution of differential equations of near-circular spacecraft's orbit orientation by control, that is permanent on adjacent parts of the active spacecraft's motion, is obtained.

*Key words:* spacecraft, orbit, orientation, quaternion, optimal control.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 12-01-00165-a).*

## References

1. Chelnokov Yu. N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I. *Cosmic Research*, 1992, vol. 30, no. 6, pp. 612–621.
2. Chelnokov Yu. N. The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field : I. *Cosmic Research*, 2001, vol. 39, no. 5, pp. 470–484. DOI 10.1023/A:1012345213745.
3. Chelnokov Yu. N. The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: II. *Cosmic Research*, 2003, vol. 41, no. 1, pp. 85–99. DOI 10.1023/A:1022359831200.
4. Chelnokov Yu. N., Pankratov I. A. Pereorientatsiia krugovoi orbity kosmicheskogo apparata s tremia tochkami perekliucheniia upravleniia [The reorientation of circular spacecraft's orbit with three points of switching control]. *Mekhatronika, avtomatizatsiia, upravlenie* [Mechatronics, automation, control], 2011, no. 1, pp. 70–73 (in Russian).
5. Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebennikov E. A., Demin V. G., Ryabov Yu. A. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoi mekhanike i astrodinamike* [Reference guide on celestial mechanics and astrodynamics]. Moscow, Nauka, 1976, 864 p. (in Russian).
6. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Use of quaternions in the problems of orientation of solid bodies]. Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).
7. Molodenkov A. V. On the solution of the Darboux problem. *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 167–176. DOI 10.3103/S002565440702001X.
8. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Solution of a problem of spacecraft's orbit optimal



reorientation using quaternion equations of orbital system of coordinates orientation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 87–95 (in Russian).

9. Chelnokov Yu. N. Optimal'naja pereorientacija orbity kosmicheskogo apparata posredstvom reaktivnoj tjagi, ortogonal'noj ploskosti orbity [Optimal reorientation of spacecraft's orbit through thrust orthogonal to the plane of orbit]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, Saratov Univ. Press, 2006, iss. 8, pp. 231–234 (in Russian).

10. Pankratov I. A., Chelnokov Yu. N. Analytical solution of differential equations of circular spacecraft's orbit orientation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, iss. 1, pt. 1, pp. 83–89 (in Russian).

11. Nayfeh A. H. *Introduction to perturbation techniques*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley & Sons, 1981, 519 p.

12. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniia. Geometriia i kinematika dvizheniia* [Quaternion and bi-quaternion models and methods of solid state mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion]. Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian).

13. Zaitsev V. F., Polianin A. D. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook of ordinary differential equations]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 576 p. (in Russian).

# ИНФОРМАТИКА

УДК 519.711.3

## МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННЫХ $K$ -КАНАЛОВ С ПАМЯТЬЮ

А. А. Львов<sup>1</sup>, М. С. Светлов<sup>2</sup>, Ю. А. Ульянина<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Доктор технических наук, профессор кафедры информационных систем и технологий, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., alvova@mail.ru

<sup>2</sup> Доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, svetlovms@yandex.ru

<sup>3</sup> Аспирантка кафедры информационных систем и технологий, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., uyanina.ya@mail.ru

Исследование недвоичных ( $K$ -ичных,  $K \geq 3$ ) информационных каналов (ИК) с памятью как сложных стохастических структур — математически достаточно сложная задача. Существенный интерес представляет синтез упрощенных математических моделей таких каналов, позволяющих относительно просто выявить важнейшие закономерности протекающих в них реальных процессов. Моделирование  $K$ -ичных ИК ( $K$ -каналов) с памятью — актуальная задача, решение которой имеет как теоретическое, так и явно выраженное практическое значение. В работе рассмотрены модели дискретных  $K$ -каналов с памятью, построены их графы переходных вероятностей для различных режимов работы, оценены вероятности исходов приема символов используемого канального алфавита.

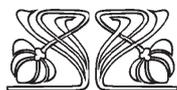
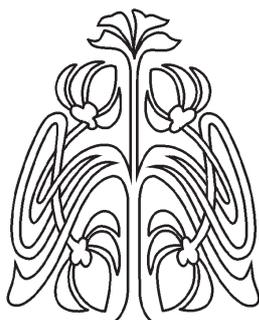
*Ключевые слова:*  $K$ -канал, математическая модель, переходная вероятность, безусловная вероятность.

### ВВЕДЕНИЕ

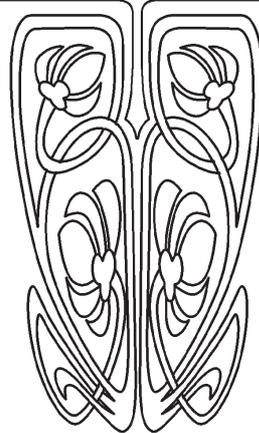
Синтез и исследование многофункциональных цифровых систем передачи информации (ЦСПИ) требуют математического моделирования наиболее ответственной части этих систем — информационного канала (ИК). Анализ ИК современных систем показал, что наибольший интерес при их описании представляют модели цифровых каналов с памятью. Простейшие модели таких каналов подробно рассмотрены в работах [1–3]. Особый интерес представляют модели цифровых ИК со стираниями [4–6]. Рассматриваемые в большинстве работ модели не позволяют в полной мере адекватно оценить влияние искажений в ИК на процессы передачи-приема символов канального алфавита. Целью настоящей работы является обсуждение принципов синтеза наиболее важных с теоретической и практической точек зрения вариантов математических моделей  $K$ -каналов на базе модели Маркова.

### 1. МОДЕЛЬ НЕСИММЕТРИЧНОГО $K$ -КАНАЛА ОБЩЕГО ТИПА

Наиболее общий вариант модели ИК — модель несимметричного  $K$ -канала, в котором помехи или, в общем случае, любые искажения передаваемого сигнала приводят к ошибкам произвольного типа — трансформации и (или) стирания. В таком канале возможно возникновение взаимных ошибок трансформации символов  $i, j$  канального



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





алфавита ( $i, j = 0, 1, 2, \dots, K - 1; i \neq j$ ) с вероятностями  $p_{ij}$  и ошибок стирания с вероятностями  $p_{ix_i}$ , приводящих к переходу канальных символов  $i$  в символы стирания  $x_i$ , отсутствующие во входном канальном алфавите. При синтезе моделей использована ранее предложенная авторами кодовая метрика [7], в соответствии с аксиомами которой переход ненулевых (токовых) символов канального алфавита друг в друга или в «чужие» символы стирания обусловлен двукратными ошибками в отличие от трансформаций и стираний с участием нулевых символов, соответствующих однократным ошибкам. Поэтому считается, что в последовательном синхронном канальном интерфейсе в каждом такте синхронизации в канале может возникнуть лишь однократная ошибка, искажающая один символьный разряд передаваемого кодового слова. Другими словами, не возможны однократные трансформации токовых символов друг в друга и стирания алфавитных символов в «чужие» символы стирания.

Матрица  $P_{0,nc}$  переходных вероятностей такой модели имеет вид

$$P_{0,nc} = \begin{bmatrix} q_0^0 & q_j^0 & p_{0j}^0 & p_{j0}^0 & p_{0x_j}^0 & p_{x_j0}^0 \\ q_0^i & q_j^i & p_{0j}^i & p_{j0}^i & p_{0x_j}^i & p_{jx_j}^i \\ q_0^{0i} & q_j^{0i} & p_{0j}^{0i} & p_{j0}^{0i} & p_{0x_j}^{0i} & p_{jx_j}^{0i} \\ q_0^{i0} & q_j^{i0} & p_{0j}^{i0} & p_{j0}^{i0} & p_{0x_j}^{i0} & p_{x_j0}^{i0} \\ q_0^{0x_i} & q_j^{0x_i} & p_{0j}^{0x_i} & p_{j0}^{0x_i} & p_{0x_j}^{0x_i} & p_{jx_j}^{0x_i} \\ q_0^{ix_i} & q_j^{ix_i} & p_{0j}^{ix_i} & p_{j0}^{ix_i} & p_{0x_j}^{ix_i} & p_{jx_j}^{ix_i} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В матрице (1) обозначено:  $q_0^0, q_j^0 (q_0^i, q_j^i)$  — условные вероятности правильного приема  $(l + 1)$ -го нулевого и токового символов соответственно при правильном приеме  $l$ -го нулевого (токового) символа;  $q_0^{0i}, q_j^{0i}, (q_0^{i0}, q_j^{i0})$  — условные вероятности правильного приема  $(l + 1)$ -го нулевого и токового символов соответственно при трансформации  $l$ -го нулевого (токового) символа;  $p_{0j}^0, p_{j0}^0 (p_{0j}^i, p_{j0}^i)$  — условные вероятности трансформации  $(l + 1)$ -го нулевого и токового символов соответственно при правильном приеме  $l$ -го нулевого (токового) символа;  $p_{0j}^{0i}, p_{j0}^{0i} (p_{0j}^{i0}, p_{j0}^{i0})$  — условные вероятности трансформации  $(l + 1)$ -го нулевого и токового символов соответственно если  $l$ -й нулевой (токовый) символ трансформирован;  $q_0^{0x_i}, q_j^{0x_i} (q_0^{ix_i}, q_j^{ix_i})$  — условные вероятности правильного приема  $(l + 1)$ -го нулевого и токового символов соответственно при стирании  $l$ -го нулевого (токового) символа;  $p_{0j}^{0x_i}, p_{j0}^{0x_i} (p_{0j}^{ix_i}, p_{j0}^{ix_i})$  — условные вероятности трансформации  $(l + 1)$ -го нулевого и токового символов соответственно при стирании  $l$ -го нулевого (токового) символа;  $p_{0x_j}^0, p_{x_j0}^0 (p_{0x_j}^i, p_{jx_j}^i)$  — условные вероятности стирания  $(l + 1)$ -го символа при правильном приеме  $l$ -го нулевого (токового) символа;  $p_{0x_j}^{0i}, p_{jx_j}^{0i} (p_{0x_j}^{i0}, p_{x_j0}^{i0})$  — условные вероятности стирания  $(l + 1)$ -го символа при трансформации  $l$ -го нулевого (токового) символа;  $p_{0x_j}^{0x_i}, p_{jx_j}^{0x_i} (p_{0x_j}^{ix_i}, p_{jx_j}^{ix_i})$  — условные вероятности стирания  $(l + 1)$ -го символа при стирании  $l$ -го нулевого (токового) символа.

Следует заметить, что значения последующих символов, в общем случае, не зависят от значений предыдущих символов на входе канала, поэтому для  $l$ -х и  $(l + 1)$ -х символов выполнение условия  $i \neq j$  не обязательно.

Граф переходных вероятностей, соответствующий матрице (1), приведен на рис. 1.

Уравнение математической модели:

$$\begin{aligned} & P(l_0) \left[ q_0 \left( q_0^0 + q_j^0 + \sum_{j=1}^{K-1} (p_{j0}^0 + p_{0x_j}^0) + p_{j0}^0 + p_{x_j0}^0 \right) + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{K-1} \left( p_{0i} \left( q_0^{0i} + q_j^{0i} + \sum_{j=1}^{K-1} (p_{j0}^{0i} + p_{0x_j}^{0i}) + p_{j0}^{0i} + p_{jx_j}^{0i} \right) + \right. \\ & \left. \left. + p_{0x_i} \left( q_0^{0x_i} + q_j^{0x_i} + \sum_{j=1}^{K-1} (p_{j0}^{0x_i} + p_{0x_j}^{0x_i}) + p_{j0}^{0x_i} + p_{jx_j}^{0x_i} \right) \right) \right] + \\ & + P(l_i) \left[ q_i \left( q_0^i + q_j^i + \sum_{j=1}^{K-1} (p_{j0}^i + p_{0x_j}^i) + p_{j0}^i + p_{jx_j}^i \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{K-1} \left( p_{i0} \left( q_0^{i0} + q_j^{i0} + \sum_{j=1}^{K-1} (p_{j0}^{i0} + p_{0x_j}^{i0}) + p_{j0}^{i0} + p_{jx_j}^{i0} \right) + \right. \right. \end{aligned}$$



$$+ p_{ix_i} \left( q_0^{ix_i} + q_j^{ix_i} + \sum_{j=1}^{K-1} (p_{j0}^{ix_i} + p_{0x_j}^{ix_i}) + p_{j0}^{ix_i} + p_{jx_j}^{ix_i} \right) \Big] = 1. \quad (2)$$

В уравнении (2)  $P(l_0)$  и  $P(l_i)$  – вероятности поступления на вход канала  $l$ -го нулевого и токовых символов канального алфавита соответственно.

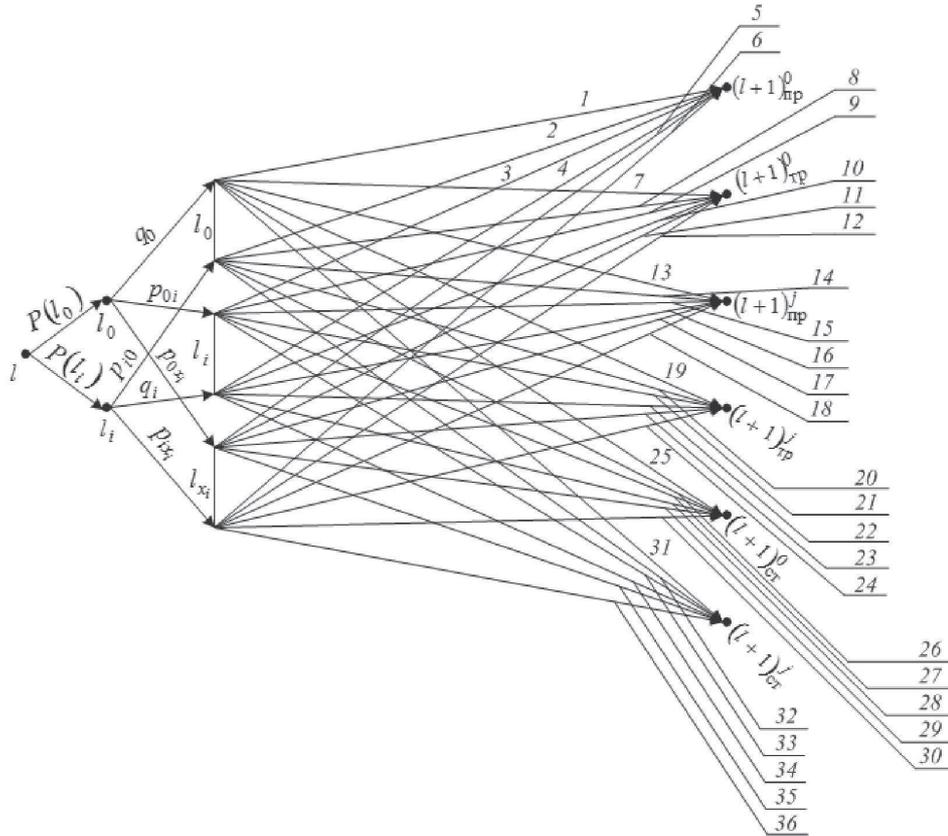


Рис. 1. Граф переходных вероятностей модели несимметричного  $K$ -канала общего вида: 1 –  $q_0^0$ ; 2 –  $q_0^{i0}$ ; 3 –  $q_0^{0i}$ ; 4 –  $q_0^i$ ; 5 –  $q_0^{0x_i}$ ; 6 –  $q_0^{ix_i}$ ; 7 –  $q_0^j$ ; 8 –  $q_0^{i0}$ ; 9 –  $q_0^{0j}$ ; 10 –  $q_0^{ij}$ ; 11 –  $q_0^{0x_i}$ ; 12 –  $q_0^{ix_i}$ ; 13 –  $q_j^0$ ; 14 –  $q_j^{i0}$ ; 15 –  $q_j^{0i}$ ; 16 –  $q_j^i$ ; 17 –  $q_j^{0x_i}$ ; 18 –  $q_j^{ix_i}$ ; 19 –  $q_{j0}^0$ ; 20 –  $q_{j0}^{i0}$ ; 21 –  $q_{j0}^{0i}$ ; 22 –  $q_{j0}^i$ ; 23 –  $q_{j0}^{0x_i}$ ; 24 –  $q_{j0}^{ix_i}$ ; 25 –  $q_{0x_j}^0$ ; 26 –  $q_{0x_j}^{i0}$ ; 27 –  $q_{0x_j}^{0i}$ ; 28 –  $q_{0x_j}^i$ ; 29 –  $q_{0x_j}^{0x_i}$ ; 30 –  $q_{0x_j}^{ix_i}$ ; 31 –  $q_{jx_j}^0$ ; 32 –  $q_{jx_j}^{i0}$ ; 33 –  $q_{jx_j}^{0i}$ ; 34 –  $q_{jx_j}^i$ ; 35 –  $q_{jx_j}^{0x_i}$ ; 36 –  $q_{jx_j}^{ix_i}$

Граф на рис.1 и уравнение (2) в совокупности представляют собой математическую модель марковского несимметричного  $K$ -канала с ошибками трансформации и стирания.

Условные вероятности  $q_0(l+1/l)$ ,  $q_j(l+1/l)$  правильного приема,  $p_{0j}(l+1/l)$ ,  $p_{j0}(l+1/l)$  трансформации и  $p_{0x_j}(l+1/l)$ ,  $p_{jx_j}(l+1/l)$  стирания  $(l+1)$ -х нулевого и единичного символов соответственно запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} q_0(l+1/l) &= q_0 q_0^0 + \sum_{i=1}^{K-1} (p_{0i} q_0^{0i} + p_{0x_i} q_0^{0x_i}) + p_{i0} q_0^{0i} + q_i q_0^i + p_{ix_i} q_0^{ix_i}, \\ q_j(l+1/l) &= q_0 q_j^0 + \sum_{i=1}^{K-1} (p_{0i} q_j^{0i} + p_{0x_i} q_j^{0x_i}) + p_{i0} q_j^{0i} + q_i q_j^i + p_{ix_i} q_j^{ix_i}, \\ p_{0j}(l+1/l) &= q_0 p_{0j}^0 + \sum_{i=1}^{K-1} (p_{0i} p_{0j}^{0i} + p_{0x_i} p_{0j}^{0x_i}) + p_{i0} p_{0j}^{0i} + q_i p_{0j}^i + p_{ix_i} p_{0j}^{ix_i}, \\ p_{j0}(l+1/l) &= q_0 p_{j0}^0 + \sum_{i=1}^{K-1} (p_{0i} p_{j0}^{0i} + p_{0x_i} p_{j0}^{0x_i}) + p_{i0} p_{j0}^{0i} + q_i p_{j0}^i + p_{ix_i} p_{j0}^{ix_i}, \\ p_{0x_j}(l+1/l) &= q_0 p_{0x_j}^0 + \sum_{i=1}^{K-1} (p_{0i} p_{0x_j}^{0i} + p_{0x_i} p_{0x_j}^{0x_i}) + p_{i0} p_{0x_j}^{0i} + q_i p_{0x_j}^i + p_{ix_i} p_{0x_j}^{ix_i}, \\ p_{jx_j}(l+1/l) &= q_0 p_{jx_j}^0 + \sum_{i=1}^{K-1} (p_{0i} p_{jx_j}^{0i} + p_{0x_i} p_{jx_j}^{0x_i}) + p_{i0} p_{jx_j}^{0i} + q_i p_{jx_j}^i + p_{ix_i} p_{jx_j}^{ix_i}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Система (3) позволяет определить значения безусловных вероятностей  $q_0, q_j$  правильного приема,  $p_{0j}, p_{j0}$  трансформации и  $p_{0x_j}, p_{jx_j}$  стирания для нулевого и токовых символов соответственно.

## 2. МОДЕЛЬ СИММЕТРИЧНОГО К-КАНАЛА ОБЩЕГО ТИПА

Представленная выше модель не проста для практической реализации, поэтому предпочтительнее использовать модели симметричных ИК, соответствующие ЦСПИ с искусственным симметрированием за счет особого построения первой решающей схемы приемных устройств систем. В этом случае будут выполняться соотношения:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q, & p_{0x_i} &= p_{ix_i} = p_x, & p_{0j}^0 &= p_{j0}^0 = p_{\text{тр}}^0, & p_{0i} &= p_{i0} = p_0, \\ q_0^i &= q_0^{\text{т}}, & q_0^{0i} &= q_0^{i0} = q_0^{\text{тп}}, & p_{0j}^i &= p_{j0}^i = p_{\text{тр}}^{\text{т}}, & p_{0j}^{0i} &= p_{j0}^{0i} = p_{0j}^{i0}, \\ q_j^0 &= q_{\text{т}}^0, & q_j^{0i} &= q_j^{i0} = q_{\text{т}}^{\text{тп}}, & p_{0j}^{ix_i} &= p_{j0}^{ix_i} = p_{\text{тр}}^x, & p_{0x_j}^{0i} &= p_{jx_j}^{0i} = p_{0x_j}^{i0}, \\ q_j^i &= q_{\text{т}}^{\text{т}}, & q_0^{0x_i} &= q_0^{ix_i} = q_0^x, & p_{0x_j}^0 &= p_{xj0}^0 = p_x^0, & p_{0x_j}^{0x_i} &= p_{jx_j}^{0x_i} = p_{0x_j}^{ix_i}, \\ & & q_j^{0x_i} &= q_j^{ix_i} = q_{\text{т}}^x, & p_{0x_j}^i &= p_{jx_j}^i = p_{\text{т}}^x, & & \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $q_0, q, p_0, p_x$  — вероятности правильного приема нулевого, токового, трансформации, стирания  $(l + 1)$ -го символа при правильном приеме нулевого, правильном приеме токового, трансформации, стирании  $l$ -го символа;  $q_0^0, q_0^{\text{т}}, q_0^{\text{тп}}, q_0^x$  ( $q_{\text{т}}^0, q_{\text{т}}^{\text{т}}, q_{\text{т}}^{\text{тп}}, q_{\text{т}}^x, p_{\text{тр}}^0, p_{\text{тр}}^{\text{т}}, p_{\text{тр}}^{\text{тп}}, p_{\text{тр}}^x, p_x^0, p_x^{\text{т}}, p_x^{\text{тп}}, p_x^x$ ) — условные вероятности правильного приема нулевого (правильного приема токового, трансформации, стирания)  $(l + 1)$ -го символа соответственно при правильном приеме нулевого, правильном приеме токового, трансформации, стирании  $l$ -го символа.

Тогда матрица  $P_{\text{о.нс}}$  переходных вероятностей (1) преобразуется к виду матрицы  $P_{\text{о.с}}$ :

$$P_{\text{о.с}} = \begin{bmatrix} q_0^0 & q^0 & p_{\text{тр}}^0 & p_x^0 \\ q_0^{\text{т}} & q_{\text{т}}^{\text{т}} & p_{\text{тр}}^{\text{т}} & p_x^{\text{т}} \\ q_0^{\text{тп}} & q_{\text{т}}^{\text{тп}} & p_{\text{тр}}^{\text{тп}} & p_x^{\text{тп}} \\ q_0^x & q_{\text{т}}^x & p_{\text{тр}}^x & p_x^x \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Граф переходных вероятностей для модели (5) симметричного ИК с ошибками трансформации и стирания представлен на рис. 2.

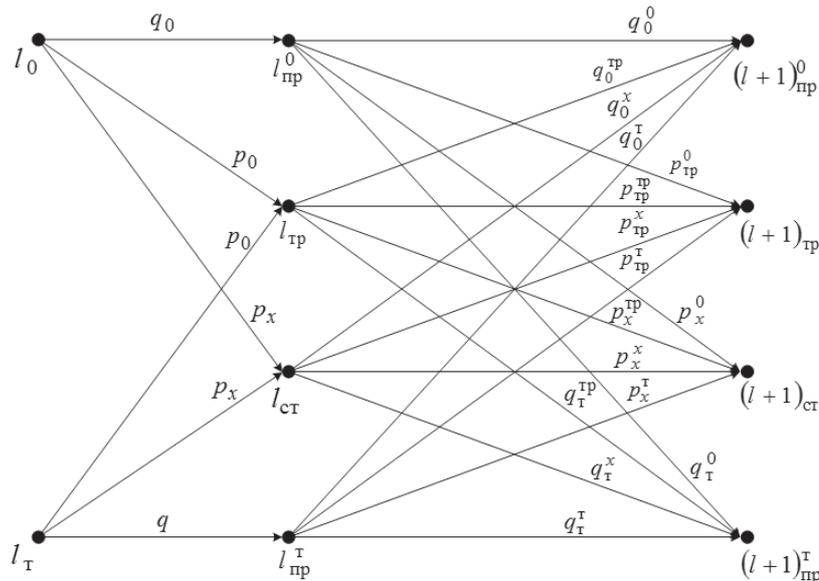


Рис. 2. Граф переходных вероятностей модели симметричного К-канала общего вида

По аналогии с (2) уравнение математической модели запишется в виде

$$q_0 \left( q_0^0 + q_0^{\text{т}} + K (p_{\text{тр}}^0 + p_x^0) \right) + q \left( q_0^{\text{т}} + q_0^{\text{ст}} + K (p_{\text{тр}}^{\text{т}} + p_x^{\text{т}}) \right) +$$



$$+p_0 \left( q_0^{\text{TP}} + q_{\tau}^{\text{TP}} + K \left( p_{\text{TP}}^{\text{TP}} + p_x^{\text{TP}} \right) \right) + p_x \left( q_0^x + q_{\tau}^x + K \left( p_{\text{TP}}^x + p_x^x \right) \right) = 1. \quad (6)$$

Граф на рис. 2 и обобщенное соотношение (6) в совокупности представляют собой математическую модель марковского симметричного ИК с ошибками трансформации и стирания.

По аналогии с предыдущим вариантом модели условные вероятности  $q_0(l+1/l)$ ,  $q(l+1/l)$ ,  $p_0(l+1/l)$ ,  $p_x(l+1/l)$  правильного приема нулевого, токового, трансформации, стирания соответственно для  $(l+1)$ -го символа запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} q_0(l+1/l) &= q_0 q_0^0 + q q_0^{\tau} + K \left( p_0 q_0^{\text{TP}} + p_x q_0^x \right), \\ q_{\tau}(l+1/l) &= q_0 q_{\tau}^0 + q q_{\tau}^{\tau} + K \left( p_0 q_{\tau}^{\text{TP}} + p_x q_{\tau}^x \right), \\ p_0(l+1/l) &= q_0 p_0^0 + q p_0^{\tau} + K \left( p_0 p_0^{\text{TP}} + p_x p_0^x \right), \\ p_x(l+1/l) &= q_0 p_x^0 + q p_x^{\tau} + K \left( p_0 p_x^{\text{TP}} + p_x p_x^x \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Решая систему уравнений (7), можно получить формулы для определения безусловных вероятностей  $q_0$ ,  $q$ ,  $p_0$ ,  $p_x$ .

Следует заметить, что в уравнении (6) не учитываются априорные вероятности  $P(l_0)$  и  $P(l_{\tau})$  появления на входе канала  $l$ -х нулевых и токовых символов соответственно, так как для симметричных  $K$ -каналов эти вероятности практически всегда считаются одинаковыми, если рабочее кодовое множество является полным:  $P(l_0) = P(l_{\tau}) = P(l) = 1/K$ .

### 3. МОДЕЛЬ СИММЕТРИЧНОГО $K$ -КАНАЛА С ОШИБКАМИ ТРАНСФОРМАЦИИ

Особый интерес представляют частные случаи модели симметричного  $K$ -канала с ошибками произвольного типа. Матрица  $P_{\tau}$  переходных вероятностей модели симметричного  $K$ -канала с ошибками трансформации (без стираний) запишется в виде

$$P_{\tau} = \begin{bmatrix} q_0^0 & q_0^{\tau} & p_0^{\text{TP}} \\ q_0^{\tau} & q_{\tau}^{\tau} & p_{\text{TP}}^{\tau} \\ q_0^{\text{TP}} & q_{\tau}^{\text{TP}} & p_{\text{TP}}^{\text{TP}} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Граф переходных вероятностей модели (8) представлен на рис. 3.

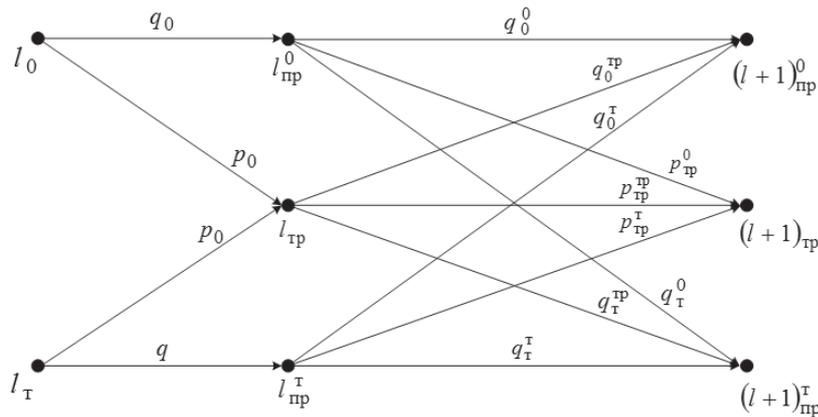


Рис. 3. Граф переходных вероятностей модели симметричного  $K$ -канала с ошибками трансформации

Уравнение математической модели:

$$q_0 \left( q_0^0 + q_{\tau}^0 + K p_{\text{TP}}^0 \right) + q \left( q_0^{\tau} + q_{\tau}^{\tau} + K p_{\text{TP}}^{\tau} \right) + p_0 \left( q_0^{\text{TP}} + q_{\tau}^{\text{TP}} + K p_{\text{TP}}^{\text{TP}} \right) = 1. \quad (9)$$

Граф на рис. 3 и обобщенное соотношение (9) в совокупности представляют собой математическую модель марковского симметричного ИК с ошибками трансформации.

По аналогии с предыдущим вариантом модели условные вероятности  $q_0(l+1/l)$ ,  $q(l+1/l)$ ,  $p_0(l+1/l)$ ,  $p_x(l+1/l)$  правильного приема нулевого, токового, трансформации, стирания соответственно для  $(l+1)$ -го символа запишутся в виде



$(l + 1)$ -го символа запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} q_0(l + 1/l) &= q_0q_0^0 + qq_0^T + Kp_0q_0^{TP}, \\ q_T(l + 1/l) &= q_0q_T^0 + qq_T^T + Kp_0q_T^{TP}, \\ p_0(l + 1/l) &= q_0p_{TP}^0 + qp_{TP}^T + Kp_0p_{TP}^{TP}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Решая систему уравнений (10), можно получить формулы для определения безусловных вероятностей  $q_0, q, p_0$ .

#### 4. МОДЕЛЬ СИММЕТРИЧНОГО К-КАНАЛА С ОШИБКАМИ СТИРАНИЯ

Матрица  $P_c$  переходных вероятностей модели симметричного К-канала с ошибками стирания (без трансформаций) запишется в виде:

$$P_c = \begin{bmatrix} q_0^0 & q_T^0 & p_x^0 \\ q_0^T & q_T^T & p_x^T \\ q_0^x & q_T^x & p_x^x \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Граф переходных вероятностей модели (11) представлен на рис. 4.

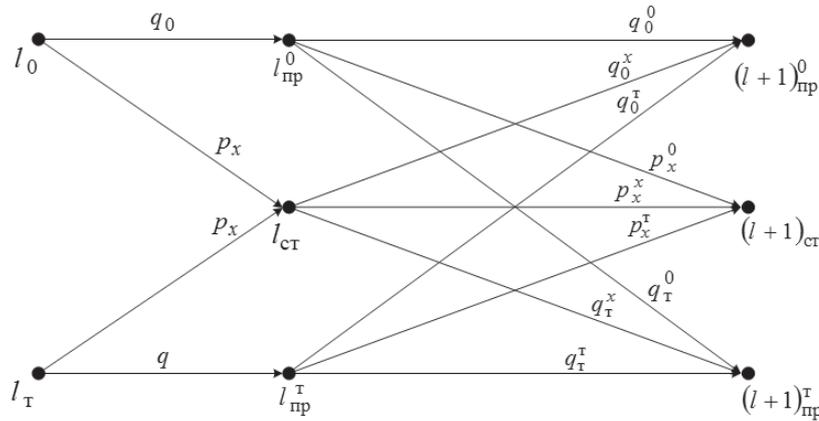


Рис. 4. Граф переходных вероятностей модели симметричного К-канала с ошибками стирания

Уравнение математической модели:

$$q_0 (q_0^0 + q_T^0 + Kp_x^0) + q (q_0^T + q_T^T + Kp_x^T) + p_0 (q_0^{TP} + q_T^{TP} + Kp_x^{TP}) = 1. \quad (12)$$

Граф на рис. 4 и уравнение (12) в совокупности представляют собой математическую модель марковского симметричного ИК с ошибками стирания.

По аналогии с предыдущим вариантом модели условные вероятности  $q_0(l+1/l), q(l+1/l), p_0(l+1/l), p_x(l+1/l)$  правильного приема нулевого, токового, трансформации, стирания соответственно для  $(l + 1)$ -го символа запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} q_0(l + 1/l) &= q_0q_0^0 + qq_0^T + Kp_xq_0^x, \\ q_x(l + 1/l) &= q_0q_x^0 + qq_x^T + Kp_xq_x^x, \\ p_x(l + 1/l) &= q_0p_x^0 + qp_x^T + Kp_xp_x^x. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Решая систему уравнений (13), можно получить формулы для определения безусловных вероятностей  $q_0, q, p_x$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Синтезированные на базе простой модели Маркова варианты математических моделей несимметричных и симметричных информационных К-каналов с ошибками произвольного типа дают возможность более адекватного оценивания процессов передачи – приема информации в современных ответственных ЦСПИ. Как показали результаты проведенного моделирования, при синтезе систем,



работающих в условиях действия помех большой интенсивности, когда  $i_{с.п.} = f_{с.п.}/f_{р.к.} \gg 1$  ( $i_{с.п.}$ ,  $f_{с.п.}$ ,  $f_{р.к.}$  — средние значения интенсивности, частоты случайной импульсной помехи, частоты формирования рабочих кодовых слов в канале соответственно), вызывающих как ошибки трансформации, так и стирания, может быть обеспечена достоверность приема информации, превышающая минимально на порядок аналогичные показатели при использовании традиционных вариантов моделей ИК с памятью.

### Библиографический список

1. Pimentel C., Blake F. Modeling Burst Channels Using Partitioned Fritchman's Markov Models // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 1998. № 47. P. 885–899.
2. Васильев К. К. Математическое моделирование систем связи. Ульяновск : УлГТУ, 2008. 170 с.
3. Теория электрической связи : учеб. пособие для вузов / К. К. Васильев [и др.]. Ульяновск : УлГТУ, 2008. 452 с.
4. Гладких А. А. Основы теории мягкого декодирования избыточных кодов в стирающем канале связи. Ульяновск : УлГТУ, 2010. 380 с.
5. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники : в 3 т. Т. 1. М. : Сов. радио, 1974. 552 с.
6. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. М. : Сов. радио, 1970. 728 с.
7. L'vov A. A., Svetlov M. S., Ulyanina Yu. A. Analysis of pseudo-random sequences in the non-binary communication channels // Naukowa mysl informacyjnej powieki–2014. Techniczne nauki : Materialy X Miedzynarodowej naukowo-praktycznej konferencji. Polska, Przemysl, 2014. P. 37–41.

## Models of Information $K$ -Channels with Memory

A. A. L'vov<sup>1</sup>, M. S. Svetlov<sup>2</sup>, Yu. A. Ulyanina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State Technical University named after Gagarin Yu. A., 77, Politechnicheskaya str., 410054, Saratov, Russia, alvova@mail.ru, ulyanina.ya@yandex.ru

<sup>2</sup>Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya str., 410028, Saratov, Russia, svetlovms@yandex.ru

Analysis of non-binary ( $K$ -ary,  $K \geq 3$ ) information channels (IC) with memory as complex stochastic structures is rather complicated mathematically. Of significant interest is the synthesis of simplified mathematical models for such channels that allow clarifying relatively simply the most important regularities occurring in real processes. Modeling of IC ( $K$ -channels) with memory is a vital problem that has both theoretical and practical importance. In this paper models of discrete  $K$ -channels with memory are presented, their graphs of transition probabilities for various operating conditions built, and probabilities of outcomes of reception for symbols of the used alphabet estimated.

*Key words:*  $K$ -channel, mathematical model, transition probability, unconditional probability.

### References

1. Pimentel C., Blake F. Modeling Burst Channels Using Partitioned Fritchman's Markov Models. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 1998, no 47, pp. 885–899.
2. Vasiliev K. K. *Matematicheskoe modelirovanie sistem svyazi* [Mathematical Modeling of Communication Systems]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Tech. Univ. Press, 2008, 170 p. (in Russian).
3. Vasiliev K. K. *Teoriia elektricheskoi svyazi* [Theory of telecommunications]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Tech. Univ. Press, 2008, 452 p. (in Russian).
4. Gladikh A. A. *Osnovy teorii miagkogo dekodirovaniia izbytochnykh kodov v stiraishchem kanale svyazi* [Fundamentals of the theory of soft decoding redundant codes in the erasure channel communication]. Ulyanovsk, Ulyanovsk State Tech. Univ. Press, 2010, 380 p. (in Russian).
5. Levin B. R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoi radiotekhniki* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering]. Vol. 1. Moscow, Sov. Radio, 1974, 552 p. (in Russian).
6. Fink L. M. *Teoriia peredachi diskretnykh soobshchenii* [Theory of discrete message transmission]. Moscow, Sov. Radio, 1970, 728 p. (in Russian).
7. L'vov A. A., Svetlov M. S., Ulyanina Yu. A. Analysis of pseudo-random sequences in the non-binary communication channels. *Naukowa mysl informacyjnej powieki–2014. Techniczne nauki: Materialy X Miedzynarodowej naukowo-praktycznej konferencji*, Polska, Przemysl, 2014, p. 37–41.



УДК 519.713.8, 512.53, 514.146

## АБСТРАКТНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПОЛУГРУПП ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ

В. А. Молчанов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, v.molchanov@inbox.ru

Универсальные планарные автоматы являются универсальными притягивающими объектами в категории автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены структурами плоскостей. Получены необходимые и достаточные условия, при которых произвольный автомат изоморфен универсальному планарному автомату и произвольная полугруппа изоморфна полугруппе входных сигналов универсального планарного автомата.

*Ключевые слова:* автомат, полугруппа, плоскость.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье продолжают исследования автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены дополнительной алгебраической структурой плоскости. Согласно [1] под плоскостью здесь понимается алгебраическая система вида  $\Pi = (X, L)$ , где  $X$  — непустое множество точек и  $L$  — семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам:  $(A_1)$  через любые две точки проходит одна и только одна прямая;  $(A_2)$  каждая прямая содержит по крайней мере три точки;  $(A_3)$  в множестве  $X$  есть три точки, не лежащие на одной прямой.

Пусть  $X, Y$  — непустые множества. Обозначим:  $T(X)$  — множество всех преобразований  $X$ ,  $F(X, Y)$  — множество всех отображений  $X$  в  $Y$ ,  $S(X, Y)$  — декартово произведение  $T(X) \times F(X, Y)$  множеств  $T(X), F(X, Y)$ . Элементами множества  $S(X, Y)$  являются упорядоченные пары  $(f_1, f_2)$  отображений  $f_1 : X \rightarrow X, f_2 : X \rightarrow Y$ , которые могут рассматриваться как вектор-функции  $f : X \rightarrow X \times Y$ , определяющиеся по формуле:  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$  (где  $x \in X$ ). Отображения  $f_1, f_2$  называются соответственно первой и второй компонентами вектор-функции  $f$ . Таким образом, вектор-функции могут отождествляться с упорядоченными парами их компонент.

Произведение вектор-функций  $f, g \in S(X, Y)$  определяется [2] по формуле:  $f \cdot g = (f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) = (f_1 g_1, f_1 g_2)$ , где  $f_1 g_1$  и  $f_1 g_2$  — композиции отображений  $f_1, g_1$  и  $f_1, g_2$ , соответственно. Так как эта операция ассоциативна, то множество  $S(X, Y)$  с операцией умножения вектор-функций образует полугруппу, которая называется симметрической полугруппой вектор-функций на  $X$  со значениями в  $X \times Y$ . Подполугруппы  $S(X, Y)$  называются полугруппами вектор-функций на  $X$  с значениями в  $X \times Y$ . Пусть  $\Pi_1 = (X_1, L_1), \Pi_2 = (X_2, L_2)$  — некоторые плоскости. Напомним, что точки плоскости называются коллинеарными, если они лежат на некоторой прямой этой плоскости. Отображение  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  называется гомоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_2$ , если оно коллинеарные точки плоскости  $\Pi_1$  отображает в коллинеарные точки плоскости  $\Pi_2$ . В частности, из аксиомы  $(A_1)$  следует, что для любой точки  $x \in X_2$  постоянное отображение  $c_x : X_1 \rightarrow \{x\}$  является гомоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_2$ . Множество всех гомоморфизмов обозначается  $\text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ . Гомоморфизм плоскости  $\Pi_1$  в себя называется эндоморфизмом этой плоскости. Множество всех эндоморфизмов плоскости  $\Pi_1$  с операцией композиции образует полугруппу  $\text{End}(\Pi_1)$ . Множество  $S(\Pi_1, \Pi_2) = \text{End}(\Pi_1) \times \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$  с операцией умножения вектор-функций образует полугруппу вектор-функций на  $X$  с значениями в  $X \times Y$ .

Следуя [2], под автоматом будем понимать алгебраическую систему  $\mathbf{A} = (X, Y, S, \delta, \lambda)$ , состоящую из множества состояний  $X$ , множества выходных сигналов  $Y$ , полугруппы входных сигналов  $S$ , функции переходов  $\delta : X \times S \rightarrow X$  и выходной функции  $\lambda : X \times S \rightarrow Y$  таких, что для любых  $x \in X$  и  $a, b, c \in S$ , выполняются равенства

$$(ab)c = a(bc), \quad \delta(x, ab) = \delta(\delta(x, a), b), \quad \lambda(x, ab) = \lambda(\delta(x, a), b). \quad (1)$$

Для каждого  $s \in S$  определим отображения  $\delta_s : X \rightarrow X, \lambda_s : X \rightarrow Y$  и вектор-функцию  $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$  по формулам:  $\delta_s(x) = \delta(x, s), \lambda_s(x) = \lambda(x, s)$ , где  $x \in X$ . По определению автомата последовательное действие входных сигналов  $s, t \in S$  удовлетворяет следующим условиям:

$$(f_s f_t)(x) = f_t(f_s(x)) = (\delta(\delta(x, s), t), \lambda(\delta(x, s), t)) = (\delta(x, st), \lambda(x, st)) = f_{st}(x).$$



Это означает, что соответствие  $s \mapsto f_s$  ( $s \in S$ ) является гомоморфизмом полугруппы  $S$  в симметрическую полугруппу вектор-функций  $S(X, Y)$ . В частности, это соответствие является мономорфизмом полугруппы  $S$  в симметрическую полугруппу  $S(X, Y)$ , если  $\mathbf{A} = (X, Y, S, \delta, \lambda)$  является автоматом без равнодействующих входных сигналов, т. е. для любых  $s, t \in S$ ,  $s \neq t$ , выполняется условие  $f_s \neq f_t$ . В этом случае действие входного сигнала  $s \in S$  полностью определяется действием пары отображений  $\delta_s, \lambda_s$  и можно отождествить входной сигнал  $s$  с вектор-функцией  $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ .

По определению [2] планарные автоматы являются структурированными автоматами  $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$  с множеством состояний  $X_1$  и множеством выходных сигналов  $X_2$ , наделенными структурами плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$  и  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ , полугруппой входных сигналов  $S$ , функцией переходов  $\delta : X_1 \times S \rightarrow X_1$  и выходной функцией  $\lambda : X_1 \times S \rightarrow X_2$ , для которых при каждом фиксированном  $s \in S$  отображение  $\delta_s$  является эндоморфизмом плоскости  $\Pi_1$ , и отображение  $\lambda_s$  является гомоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_2$ . Такие автоматы обозначаются символом  $\mathbf{A} = (\Pi_1, \Pi_2, S, \delta, \lambda)$ .

Главное внимание в наших исследованиях уделяется так называемым универсальным планарным автоматам [2], подавтоматами которых охватывают все гомоморфные образы рассматриваемых планарных автоматов. Такой универсальный автомат определяется для произвольных плоскостей  $\Pi_1, \Pi_2$  как автомат  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2) = (\Pi_1, \Pi_2, S, \delta, \lambda)$  с полугруппой входных сигналов  $S = S(\Pi_1, \Pi_2)$ , функцией переходов  $\delta(x, s) = \varphi(x)$  и выходной функцией  $\lambda(x, s) = \psi(x)$  (где  $x \in X_1$ ,  $s = (\varphi, \psi) \in S(\Pi_1, \Pi_2)$ ).

В таком контексте алгебраическая теория универсальных планарных автоматов имеет непосредственное отношение к одному из основных разделов современной алгебры – обобщенной теории Галуа, которая посвящается изучению математических объектов путем исследования некоторых производных алгебр отношений, специальным образом связанных с исходными объектами. В нашем случае изучаемым математическим объектом является универсальный планарный автомат  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ , а производной алгеброй отношений – его полугруппа входных сигналов  $S(\Pi_1, \Pi_2)$ .

Ввиду проблемы С. Улама [3] об определимости математических структур их эндоморфизмами и результатов Б. Йонсона [4] о конкретной и абстрактной характеристике алгебр отношений представляет интерес исследование таких проблем для универсальных планарных автоматов и их полугрупп входных сигналов. Основной результат работы [5] показывает, что универсальные планарные автоматы полностью определяются (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов. Решение проблемы конкретной характеристики таких автоматов получено в работе [6]. В настоящей работе приводится решение проблемы абстрактной характеристики универсальных планарных автоматов и их полугрупп входных сигналов.

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Проблема абстрактной характеристики универсальных планарных автоматов формулируется следующим образом: при каких условиях произвольный автомат  $\mathbf{A}$  будет изоморфен универсальному планарному автомату  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  для некоторых плоскостей  $\Pi_1, \Pi_2$ .

Проблема абстрактной характеристики полугрупп входных сигналов универсальных планарных автоматов формулируется следующим образом: при каких условиях произвольная полугруппа  $S$  будет изоморфна полугруппе входных сигналов универсального планарного автомата  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  для некоторых плоскостей  $\Pi_1, \Pi_2$ . Для исследования этих проблем напомним основные понятия и результаты из работы [6]. Пусть  $\Pi = (X, L)$  – произвольная плоскость. Отношением коллинеарности плоскости  $\Pi$  называется тернарное отношение  $C(\Pi)$  на множестве  $X$ , которое определяется по формуле

$$C(\Pi) = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 : x_1, x_2, x_3 \text{ — коллинеарные точки плоскости } \Pi\}.$$

В работе [6] доказано, что такое отношение  $C = C(\Pi)$  удовлетворяет следующим условиям:

- (T<sub>1</sub>)  $(x, x, y) \in C$  для любых  $x, y \in X$ ;
- (T<sub>2</sub>) из  $(x_1, x_2, x_3) \in C$  следует  $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in C$  для любых  $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 3$ ;
- (T<sub>3</sub>) для любых различных элементов  $x_1, x_2 \in X$  из  $(x, x_1, x_2) \in C$ ,  $(x_1, x_2, y) \in C$  следует  $(x, x_1, y) \in C$ ;
- (T<sub>4</sub>) для любых  $x_1, x_2 \in X$  найдется такой элемент  $x \in X$ , что  $x \neq x_1, x \neq x_2$  и  $(x_1, x_2, x) \in C$ ;
- (T<sub>5</sub>)  $C \neq X^3$ .

Тернарное отношение  $C \subset X^3$ , удовлетворяющее условиям (T<sub>1</sub>)–(T<sub>3</sub>), называется 3-эквивалентностью на множестве  $X$  [6]. При этом 3-эквивалентность называется квазиполной (соответственно нетривиальной), если она удовлетворяет условию (T<sub>4</sub>) (соответственно условию (T<sub>5</sub>)).



Пусть  $R$  — некоторое тернарное отношение на множестве  $X$ . Подмножество  $Y \subset X$  называется  $R$ -ограниченным [6], если  $Y^3 \subset R$ . Легко видеть, что любое  $R$ -ограниченное множество содержится в максимальном (относительно теоретико-множественного включения)  $R$ -ограниченном множестве.

**Лемма 1 (см. [6]).** Пусть  $X$  — непустое множество,  $R$  — нетривиальная квазиполная 3-эквивалентность на множестве  $X$  и  $L$  — множество всех максимальных  $R$ -ограниченных множеств. Тогда алгебраическая система  $\Pi = (X, L)$  является плоскостью с отношением коллинеарности  $C(\Pi) = R$ .

Для автомата  $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$  канонические тернарные отношения  $R_1, R_2$  на множествах  $X_1, X_2$  определяются по следующему правилу [6]: упорядоченная тройка  $(a_1, a_2, a_3)$  элементов множества  $X_1$  (соответственно  $X_2$ ) в том и только том случае принадлежит отношению  $R_1$  (соответственно  $R_2$ ), если для любых различных элементов  $x_1, x_2, x_3 \in X_1$  найдется такой элемент  $s \in S$ , что для каждого  $i = \overline{1, 3}$  выполняется равенство  $\delta_s(x_i) = a_i$  (соответственно  $\lambda_s(x_i) = a_i$ ).

**Лемма 2 (см. [6]).** Для любых плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1), \Pi_2 = (X_2, L_2)$  канонические тернарные отношения  $R_1, R_2$  универсального планарного автомата  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $R_1 = C(\Pi_1), R_2 = C(\Pi_2)$ ;
- 2) отображение  $\varphi : X_1 \rightarrow X_1$  в том и только том случае будет эндоморфизмом плоскости  $\Pi_1$ , если выполняется  $\varphi^3(R_1) \subset (R_1)$ ;
- 3) отображение  $\psi : X_1 \rightarrow X_2$  в том и только том случае будет гомоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_2$ , если выполняется  $\psi^3(R_1) \subset (R_2)$ .

**Теорема 1 (см. [6]).** Пусть  $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$  — автомат без равнодействующих входных сигналов. Тогда  $\mathbf{A}$  в том и только том случае будет универсальным планарным автоматом  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  для некоторых плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$  и  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ , если канонические отношения  $R_1, R_2$  этого автомата являются нетривиальными квазиполными 3-эквивалентностями соответственно на множествах  $X_1, X_2$  и выполняется следующее условие:

(T<sub>6</sub>) если для отображений  $f_1 : X_1 \rightarrow X_1, f_2 : X_1 \rightarrow X_2$  при любых значениях  $x_1, x_2, x_3 \in X_1$ , удовлетворяющих условию  $(x_1, x_2, x_3) \in R_1$ , существуют такие  $s, t \in S$ , что  $f_1(x_i) = \delta_s(x_i)$  и  $f_2(x_i) = \lambda_t(x_i)$  для всех  $i = \overline{1, 3}$ , то найдется такой элемент  $a \in S$ , что  $f_1(x) = \delta_a(x)$  и  $f_2(x) = \lambda_a(x)$  для всех  $x \in X_1$ .

Как известно [7], автомат  $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$  с алгебраической точки зрения представляет собой трехсортную алгебру с тремя базисными множествами  $X_1, X_2, S$  и с удовлетворяющими условиям (1) тремя бинарными операциями: полугрупповая операция умножения входных сигналов  $\cdot : S \times S \rightarrow S$ , функция переходов  $\delta : X_1 \times S \rightarrow X_1$  и выходная функция  $\lambda : X_1 \times S \rightarrow X_2$ . Изоморфизмом таких алгебраических систем  $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda), \mathbf{A}' = (X'_1, X'_2, S', \delta', \lambda')$  является упорядоченная тройка  $\gamma = (f, g, \pi)$  биекций  $f : X_1 \rightarrow X'_1, g : X_2 \rightarrow X'_2$ , и  $\pi : S \rightarrow S'$ , сохраняющих операции этих систем, т.е. для любых  $x \in X_1, a, b \in S$  выполняются условия  $f(\delta(x, a)) = \delta'(f(x), \pi(a)), g(\lambda(x, a)) = \lambda'(f(x), \pi(a)), \pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ . Согласно [7] для описания свойств автомата  $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$  используется язык узкого исчисления предикатов (УИП)  $\mathbf{L}_\mathbf{A}$  сигнатуры теории автоматов  $\Omega = \{\cdot, \delta, \lambda\}$ , которая состоит из символа « $\cdot$ » бинарной операции полугруппы  $S$  и символов  $\delta, \lambda$  бинарных операций функции переходов и выходной функции автомата  $\mathbf{A}$ . Алфавит такого языка состоит:

- 1) из счетного множества индивидуальных переменных первого сорта  $x^{(1)}, y^{(1)}, \dots$  для обозначения состояний автомата;
- 2) счетного множества индивидуальных переменных второго сорта  $x^{(2)}, y^{(2)}, \dots$  для обозначения выходных сигналов автомата;
- 3) счетного множества индивидуальных переменных третьего сорта  $x^{(3)}, y^{(3)}, \dots$  для обозначения входных сигналов автомата;
- 4) двухместного функционального символа  $\cdot$  для обозначения операции умножения полугруппы входных сигналов автомата;
- 5) двухместных функциональных символов  $\delta$  и  $\lambda$  для обозначения функции переходов и выходной функции автомата;
- 6) конечного множества логических и технических символов, таких как  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, =, (, )$ .



Для языка  $\mathbf{L}_A$  термы трех сортов получаются обычным комбинированием символа « $\cdot$ » с двумя термами третьего сорта и символов  $\delta$ ,  $\lambda$  с термами первого и третьего сорта, т. е. это выражения вида  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$ ,  $x^{(3)}$ ,  $t^{(3)} \cdot t_1^{(3)}$ ,  $\delta(t^{(1)}, t^{(3)})$ ,  $\lambda(t^{(1)}, t^{(3)})$ , где  $x^{(1)}$  и  $t^{(1)}$  — переменная и терм первого сорта,  $x^{(2)}$  — переменная второго сорта,  $x^{(3)}$  и  $t^{(3)}$ ,  $t_1^{(3)}$  — переменная и термы третьего сорта. При этом получаются термы  $\delta(t^{(1)}, t^{(3)})$ ,  $\lambda(t^{(1)}, t^{(3)})$  и  $t^{(3)} \cdot t_1^{(3)}$  первого, второго и третьего сортов соответственно.

Атомарными формулами языка  $\mathbf{L}_A$  являются выражения вида  $t = t'$ , где  $t, t'$  — термы одного и того же сорта. Формулы языка  $\mathbf{L}_A$  определяются по индукции обычным образом (см., например, [8]).

Рассмотрим следующие формулы языка  $\mathbf{L}_A$  :

$$\Phi_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = (\forall y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}) \left( \bigwedge_{i,j=1, i \neq j}^3 y_i^{(1)} \neq y_j^{(1)} \Rightarrow (\exists z^{(3)}) \left( \bigwedge_{i=1}^3 \delta(y_i^{(1)}, z^{(3)}) = x_i^{(1)} \right) \right),$$

$$\Phi_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}) = (\forall y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}) \left( \bigwedge_{i,j=1, i \neq j}^3 y_i^{(1)} \neq y_j^{(1)} \Rightarrow (\exists z^{(3)}) \left( \bigwedge_{i=1}^3 \lambda(y_i^{(1)}, z^{(3)}) = x_i^{(2)} \right) \right).$$

**Лемма 3.** Пусть  $A = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  — универсальный планарный автомат для некоторых плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ ,  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ . Тогда для любого  $i = 1, 2$  формула  $\Phi_i$  определяет на множестве  $X_i$  отношение коллинеарности  $C(\Pi_i)$  соответствующей плоскости  $\Pi_i$ , т. е. точки  $a, b, c \in X_i$ , в том и только том случае коллинеарны в плоскости  $\Pi_i$ , если для автомата  $A$  выполняется условие  $\Phi_i(a, b, c)$ .

**Доказательство.** Если точки  $a, b, c \in X_1$  коллинеарны в плоскости  $\Pi_1$ , то любое отображение  $\varphi : X_1 \rightarrow \{a, b, c\}$  является эндоморфизмом плоскости  $\Pi_1$ . Тогда для любых различных элементов  $y_1, y_2, y_3 \in X_1$  эндоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  будет отображение  $\varphi : X_1 \rightarrow X_1$ , определенное по формуле:  $\varphi(y_1) = a$ ,  $\varphi(y_2) = b$  и  $\varphi(x) = c$  для остальных значений  $x \in X_1$ . Следовательно, для любого  $\psi \in \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$  элемент  $s = (\varphi, \psi)$  является входным сигналом автомата  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ , и по определению выполняются равенства:  $\delta(y_1, s) = \varphi(y_1) = a$ ,  $\delta(y_2, s) = \varphi(y_2) = b$ ,  $\delta(y_3, s) = \varphi(y_3) = c$ . Это означает, что выполняется условие  $\Phi_1(a, b, c)$ . С другой стороны, из условия  $\Phi_1(a, b, c)$  следует, что для любых различных элементов  $y_1, y_2, y_3 \in X_1$  найдется такой входной сигнал  $s = (\varphi, \psi)$  автомата  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ , что  $\delta(y_1, s) = \varphi(y_1) = a$ ,  $\delta(y_2, s) = \varphi(y_2) = b$ ,  $\delta(y_3, s) = \varphi(y_3) = c$ . Так как по аксиоме  $(A_3)$  в плоскости  $\Pi_1$  можно выбрать три коллинеарные точки  $y_1, y_2, y_3 \in X_1$  и  $\varphi$  является эндоморфизмом этой плоскости, то точки  $a, b, c$  также коллинеарны в плоскости  $\Pi_1$ . Аналогично доказывается, что коллинеарность точек  $a, b, c \in X_2$  в плоскости  $\Pi_2$  равносильна выполнимости условия  $\Phi_2(a, b, c)$ .  $\square$

Таким образом, свойства  $(T_1)$ – $(T_5)$  канонических отношений  $R_1, R_2$  можно выразить следующими формулами языка  $\mathbf{L}_A$  :

$$(\theta_1) (\forall x^{(i)}, y^{(i)}) \Phi_i(x^{(i)}, x^{(i)}, y^{(i)}) \text{ (здесь и далее } i = 1, 2);$$

$$(\theta_2) (\forall x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) (\Phi_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) \Rightarrow \bigwedge_{t \in T} \Phi_i(x_{t(1)}^{(i)}, x_{t(2)}^{(i)}, x_{t(3)}^{(i)})), \text{ где } T \text{ — множество всех преоб-}$$

разований множества  $\{1, 2, 3\}$ ;

$$(\theta_3) (\forall x^{(i)}, y^{(i)}, x_1^{(i)} \neq x_2^{(i)}) (\Phi_i(x^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \wedge \Phi_i(x_2^{(i)}, x_1^{(i)}, y^{(i)}) \Rightarrow \Phi_i(x^{(i)}, x_1^{(i)}, y^{(i)}));$$

$$(\theta_4) (\forall x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) (\exists x^{(i)}) (x^{(i)} \neq x_1^{(i)} \wedge x^{(i)} \neq x_2^{(i)} \wedge \Phi_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x^{(i)}));$$

$$(\theta_5) (\exists x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) \neg \Phi_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}).$$

Свойство  $(T_6)$  канонических отношений  $R_1, R_2$  также можно выразить с помощью формул языка  $\mathbf{L}_A$  следующими образом:

$$(\theta_6) \text{ для любых отображений } f_i : X_1 \rightarrow X_i \text{ выполняется}$$

$$(\forall x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) (\Phi_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^2 \Phi_i(f_i(x_1^{(1)}), f_i(x_2^{(1)}), f_i(x_3^{(1)}))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists! z^{(3)}) (\forall x^{(1)}) (\delta(x^{(1)}, z^{(3)}) = f_1(x^{(1)}) \wedge \lambda(x^{(1)}, z^{(3)}) = f_2(x^{(1)})).$$

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1 дает возможность получить следующую абстрактную характеристику универсальных планарных автоматов с помощью языка УИП сигнатуры теории автоматов.



**Теорема 2.** Автомат  $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$  в том и только том случае будет изоморфен универсальному планарному автомату  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  для некоторых плоскостей  $\Pi_1, \Pi_2$ , если этот автомат  $\mathbf{A}$  удовлетворяет условиям  $(\theta_1)$ – $(\theta_6)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим универсальный планарный автомат  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2) = (\Pi_1, \Pi_2, S, \delta, \lambda)$  для некоторых плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ ,  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ . Из лемм 2, 3 следует, что канонические отношения  $R_1$  и  $R_2$  такого автомата  $\mathbf{A}$  определяются формулами  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  соответственно. По теореме 1 эти отношения  $R_1, R_2$  удовлетворяют условиям  $(T_1)$ – $(T_5)$ , которые на языке  $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$  выражаются формулами  $(\theta_1)$ – $(\theta_5)$ . Предположим, что для некоторых отображений  $f_1 : X_1 \rightarrow X_1$ ,  $f_2 : X_1 \rightarrow X_2$  выполняется посылка импликации  $(\theta_6)$ , т. е. формула

$$(\forall x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})(\Phi_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^2 \Phi_i(f_i(x_1^{(1)}), f_i(x_2^{(1)}), f_i(x_3^{(1)}))).$$

В силу вышеизложенного это означает, что  $f_1^3(R_1) \subset R_1$ ,  $f_2^3(R_1) \subset R_2$ , и по лемме 2  $f_1 \in \text{End}(\Pi_1)$ ,  $f_2 \in \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ . Тогда элемент  $s = (f_1, f_2)$  является входным сигналом автомата  $\mathbf{A}$ , для которого при любых  $x \in X_1$  выполняются равенства  $\delta(x, s) = f_1(x)$ ,  $\lambda(x, s) = f_2(x)$ . Это означает, что для автомата  $\mathbf{A}$  выполняется формула  $(\theta_6)$ .

Обратно, пусть автомат  $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$  удовлетворяет условиям  $(\theta_1)$ – $(\theta_6)$ . Из свойства  $(\theta_6)$  следует что  $\mathbf{A}$  является автоматом без равнодействующих входных сигналов и, значит, биекция  $\pi : s \mapsto (\delta_s, \lambda_s)$  (где  $s \in S$ ) определяет изоморфизм автомата  $\mathbf{A}$  и автомата  $\mathbf{A}' = (X_1, X_2, S', \delta', \lambda')$  с полугруппой входных сигналов вектор-функций  $S' = \{(\delta_s, \lambda_s) : s \in S\}$ , функцией переходов  $\delta'(x, (\delta_s, \lambda_s)) = \delta_s(x)$  и выходной функцией  $\lambda'(x, (\delta_s, \lambda_s)) = \lambda_s(x)$  (где  $x \in X, s \in S$ ). Тогда автомат  $\mathbf{A}'$  удовлетворяет условиям  $(\theta_1)$ – $(\theta_6)$  и, значит, канонические отношения  $R_1, R_2$  этого автомата  $\mathbf{A}'$  удовлетворяют условиям  $(T_1)$ – $(T_5)$ . Следовательно, по теореме 1 автомат  $\mathbf{A}'$  является универсальным планарным автоматом  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  для некоторых плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$  и  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$ . Таким образом, автомат  $\mathbf{A}$  изоморфен универсальному планарному автомату  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ .  $\square$

Напомним [9], что входной сигнал  $a \in S$  автомата  $\mathbf{A} = (X_1, Y_1, S, \delta, \lambda)$  называется автономным, если его действие не зависит от состояний этого автомата, т. е. найдется такое состояние автомата, обозначаемое  $a_1$ , и такой выходной сигнал автомата, обозначаемый  $a_2$ , что  $\delta(x, a) = a_1$ ,  $\lambda(x, a) = a_2$  для всех состояний автомата  $x \in X_1$ . Основной результат работы [9] показывает, что любой универсальный планарный автомат  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  изоморфен многосортной алгебраической системе, канонически построенной из автономных входных сигналов исходного автомата с помощью следующих канонических отношений:

- 1) множество  $C$  всех автономных входных сигналов автомата  $\mathbf{A}$ ;
- 2) бинарное отношение  $\varepsilon_1$ , которое состоит из таких упорядоченных пар  $(a, b)$  автономных входных сигналов, при действии которых автомат  $\mathbf{A}$  переходит в одинаковые состояния, т. е.  $\delta(x, a) = \delta(x, b)$  для всех  $x \in X_1$ ;
- 3) бинарное отношение  $\varepsilon_2$ , которое состоит из таких упорядоченных пар  $(a, b)$  автономных входных сигналов, при действии которых автоматом  $\mathbf{A}$  выдаются одинаковые выходные сигналы, т. е.  $\lambda(x, a) = \lambda(x, b)$  для всех  $x \in X_1$ ;
- 4) бинарное отношение  $\eta$ , которое состоит из таких упорядоченных пар  $(\alpha, \beta)$  элементов  $\alpha = (a, b)$  и  $\beta = (c, d)$  с автономными входными сигналами  $a, b, c, d \in C$ , при действии которых любые состояния автомата  $\mathbf{A}$  отображаются в коллинеарные точки  $a_i, b_i, c_i, d_i$  соответствующих плоскостей  $\Pi_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Покажем, что такие канонические отношения универсального планарного автомата определяются формулами элементарной теории полугрупп. Рассмотрим произвольные плоскости  $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ ,  $\Pi_2 = (X_2, L_2)$  и полугруппу  $S = S(\Pi_1, \Pi_2)$ . Обозначим через  $Z_S$  множество всех правых нулей полугруппы  $S$ , а через  $U_S$  — множество всех левых единиц этой полугруппы  $S$ . Эти множества в полугруппе  $S$  определяются соответственно формулами теории полугрупп  $RZ(x) = (\forall y)(yx = x)$  и  $LI(x) = (\forall y)(xy = y)$ . В работе [5] получен следующий результат.

**Лемма 4 (см. [5]).** Для любых плоскостей  $\Pi_1, \Pi_2$  и полугруппы  $S = S(\Pi_1, \Pi_2)$  справедливы следующие утверждения:

- 1) элемент  $a \in S$  в том и только том случае будет правым нулем полугруппы  $S$ , если найдутся такие элементы  $a_1 \in X_1, a_2 \in X_2$ , что  $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$  для постоянных отображений  $c_{a_1} : X_1 \rightarrow \{a_1\}, c_{a_2} : X_1 \rightarrow \{a_2\}$ ;



- 2) элемент  $s \in S$  в том и только том случае будет левой единицей полугруппы  $S$ , если  $s = (\Delta_{X_1}, \psi)$  для тождественного прообразования  $\Delta_{X_1}$  множества  $X_1$  и некоторого элемента  $\psi \in \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ ;
- 3) элементы  $a, b \in S$  в том и только том случае удовлетворяют условию

$$E_1(a, b) = RZ(a) \wedge RZ(b) \wedge (\forall x)(LI(x) \Rightarrow ax = bx),$$

если найдутся такие элементы  $a_1, b_1 \in X_1, a_2, b_2 \in X_2$ , что  $a = (c_{a_1}, c_{a_2}), b = (c_{b_1}, c_{b_2})$  и  $a_1 = b_1$ .

Рассмотрим следующие формулы элементарной теории полугрупп:

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \bigwedge_{i=1}^3 RZ(x_i) \wedge (\forall y_1, y_2, y_3) \left( \bigwedge_{i=1}^3 RZ(y_i) \wedge \bigwedge_{i,j=1, i \neq j}^3 \neg E_1(y_i, y_j) \Rightarrow (\exists z) \left( \bigwedge_{i=1}^3 y_i z = x_i \right) \right),$$

$$E_2(x, y) = RZ(x) \wedge RZ(y) \wedge (\forall z)(LI(z) \Rightarrow \Psi(x, y, xz)),$$

$$\Psi_i(x_1, x_2, x_3) = \bigwedge_{j=1}^3 RZ(x_j) \wedge (\forall y_1, y_2, y_3) \left( \bigwedge_{j=1}^3 RZ(y_j) \wedge \bigwedge_{j,k=1, i \neq j}^3 \neg E_1(y_j, y_k) \Rightarrow \right.$$

$$\left. \Rightarrow (\exists z) \left( \bigwedge_{j=1}^3 E_i(y_j z, x_j) \right) \right), \quad i = 1, 2.$$

**Лемма 5.** Для любых плоскостей  $\Pi_1 = (X_1, L_1), \Pi_2 = (X_2, L_2)$  и полугруппы  $S = S(\Pi_1, \Pi_2)$  справедливы следующие утверждения:

- 1) элементы  $a, b, d \in S$  в том и только том случае удовлетворяют условию  $\Psi(a, b, d)$ , если найдутся такие коллинеарные точки  $a_1, b_1, d_1 \in X_1$  плоскости  $\Pi_1$  и коллинеарные точки  $a_2, b_2, d_2 \in X_2$  плоскости  $\Pi_2$ , что  $a = (c_{a_1}, c_{a_2}), b = (c_{b_1}, c_{b_2})$  и  $d = (c_{d_1}, c_{d_2})$ ;
- 2) элементы  $a, b \in S$  в том и только том случае удовлетворяют условию  $E_2(a, b)$ , если найдутся такие элементы  $a_1, b_1 \in X_1$  и  $a_2, b_2 \in X_2$ , что  $a = (c_{a_1}, c_{a_2}), b = (c_{b_1}, c_{b_2})$  и  $a_2 = b_2$ .
- 3) элементы  $a, b, d \in S$  в том и только том случае удовлетворяют условию  $\Psi_1(a, b, d)$  (соответственно  $\Psi_2(a, b, d)$ ), если найдутся такие коллинеарные точки  $a_1, b_1, d_1 \in X_1$  плоскости  $\Pi_1$  и некоторые точки  $a_2, b_2, d_2 \in X_2$  плоскости  $\Pi_2$  (соответственно коллинеарные точки  $a_2, b_2, d_2 \in X_2$  плоскости  $\Pi_2$  и некоторые точки  $a_1, b_1, d_1 \in X_1$  плоскости  $\Pi_1$ ), что  $a = (c_{a_1}, c_{a_2}), b = (c_{b_1}, c_{b_2})$  и  $d = (c_{d_1}, c_{d_2})$ .

**Доказательство.** Пусть элементы  $a, b, d$  полугруппы  $S$  удовлетворяют условию  $\Psi(a, b, d)$ . Тогда  $RZ(a), RZ(b), RZ(d)$ , т.е.  $a, b, d \in Z_S$ , и в силу леммы 4  $a = (c_{a_1}, c_{a_2}), b = (c_{b_1}, c_{b_2}), d = (c_{d_1}, c_{d_2})$  для некоторых элементов  $a_1, b_1, d_1 \in X_1$  и  $a_2, b_2, d_2 \in X_2$ . Кроме того, для любых элементов  $x, y, z$  полугруппы  $S$ , удовлетворяющих условиям  $RZ(x), RZ(y), RZ(z), \neg E_1(x, y), \neg E_1(x, z)$  и  $\neg E_1(y, z)$ , найдется такой элемент  $s \in S$ , что  $xs = a, ys = b$  и  $zs = d$ . Тогда в силу леммы 4  $x = (c_{x_1}, c_{x_2}), y = (c_{y_1}, c_{y_2}), z = (c_{z_1}, c_{z_2})$  для некоторых различных элементов  $x_1, y_1, z_1 \in X_1$  и некоторых элементов  $x_2, y_2, z_2 \in X_2$ . Кроме того, по определению  $s = (\varphi_1, \varphi_2)$  для некоторых  $\varphi_1 \in \text{End}(\Pi_1), \varphi_2 \in \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ . Тогда  $xs = (c_{x_1}, c_{x_2}) \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = (c_{x_1} \varphi_1, c_{x_1} \varphi_2) = (c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)})$  и равенство  $xs = a$  равносильно условию  $(c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)}) = (c_{a_1}, c_{a_2})$ , или  $\varphi_1(x_1) = a_1, \varphi_2(x_1) = a_2$ . Аналогично, равенства  $ys = b$  и  $zs = d$  равносильны условиям  $\varphi_1(y_1) = b_1, \varphi_2(y_1) = b_2$  и  $\varphi_1(z_1) = d_1, \varphi_2(z_1) = d_2$ . В силу произвольности элементов  $x, y, z \in S$  их можно выбрать так, что  $x_1, y_1, z_1$  — три коллинеарные точки плоскости  $\Pi_1$ , которые существуют по аксиоме  $(A_1)$ , и  $x_2, y_2, z_2$  — произвольные точки плоскости  $\Pi_2$ . Такие элементы  $x, y, z$  удовлетворяют условиям  $RZ(x), RZ(y), RZ(z), \neg E_1(x, y), \neg E_1(x, z), \neg E_1(y, z)$ , и, значит, найдется такой элемент  $s = (\varphi_1, \varphi_2) \in \text{End}(\Pi_1) \times \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ , что  $\varphi_i(x_1) = a_i, \varphi_i(y_1) = b_i, \varphi_i(z_1) = d_i$ . Следовательно, по определению гомоморфизма плоскостей точки  $a_i, b_i, d_i$  коллинеарны в плоскости  $\Pi_i$  (здесь  $i = 1, 2$ ).

В то же время, если для элементов  $a, b, d \in Z_S$  точки  $a_i, b_i, d_i$  коллинеарны в плоскости  $\Pi_i$ , то любые отображения  $\varphi_i : X_1 \rightarrow \{a_i, b_i, d_i\}$  являются гомоморфизмами плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_i$  (здесь  $i = 1, 2$ ). Тогда для любых элементов  $x, y, z$  полугруппы  $S$ , удовлетворяющих условиям  $RZ(x), RZ(y), RZ(z), \neg E_1(x, y), \neg E_1(x, z)$  и  $\neg E_1(y, z)$  определим отображения  $\varphi_i : X_1 \rightarrow X_i$  по формуле:  $\varphi_i(x_1) = a_i, \varphi_i(y_1) = b_i$  и  $\varphi_i(u) = d_i$  для остальных значений  $u \in X_1$ . Так как для



каждого  $i = 1, 2$  отображение  $\varphi_i$  является гомоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_i$ , то элемент  $s = (\varphi_1, \varphi_2)$  принадлежит полугруппе  $S$  и выполняются условия:  $xs = (c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)}) = (c_{a_1}, c_{a_2}) = a$ ,  $ys = (c_{\varphi_1(y_1)}, c_{\varphi_2(y_1)}) = (c_{b_1}, c_{b_2}) = b$ ,  $zs = (c_{\varphi_1(z_1)}, c_{\varphi_2(z_1)}) = (c_{d_1}, c_{d_2}) = d$ . Это означает, что выполняется условие  $\Psi(a, b, d)$  и справедливо утверждение 1) леммы.

Пусть элементы  $a, b$  полугруппы  $S$  удовлетворяют условию  $E_2(a, b)$ . Тогда  $RZ(a)$ ,  $RZ(b)$ , т.е.  $a, b \in Z_S$  и в силу леммы 4  $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$ ,  $b = (c_{b_1}, c_{b_2})$  для некоторых элементов  $a_1, b_1 \in X_1$  и  $a_2, b_2 \in X_2$ . Кроме того, для любого элемента  $z \in S$ , удовлетворяющего  $LI(z)$ , выполняется условие  $\Psi(a, b, az)$ . Тогда по лемме 4  $z = (\Delta_{X_1}, \psi)$  для некоторого  $\psi \in \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$  и по определению произведения вектор-функций  $az = (c_{a_1}, c_{a_2}) \cdot (\Delta_{X_1}, \psi) = (c_{a_1}, c_{a_1}\psi) = (c_{a_1}, c_{\psi(a_1)})$ . Так как для любого  $d \in X_2$  по аксиоме  $(A_1)$  отображение  $c_d \in \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ , то при выборе  $\psi = c_d$  получаем равенство  $az = (c_{a_1}, c_d)$  и из условия  $R(a, b, az)$  в силу уже доказанного свойства 1) следует, что точки  $a_2, b_2, d$  коллинеарны в плоскости  $\Pi_2$ . В силу произвольности выбора элемента  $d \in X_2$  из аксиомы  $(A_3)$  следует, что точки  $a_2, b_2$  не могут быть различными, т.е. выполняется равенство  $a_2 = b_2$ . В то же время, если элементы  $a, b \in Z_S$  удовлетворяют условию  $a_2 = b_2$ , то для любого  $d \in X_2$  по аксиоме  $(A_1)$  точки  $a_2, b_2, d$  коллинеарны в плоскости  $\Pi_2$  и любое отображение  $\psi$  множества  $X_1$  в множество  $\{a_2, b_2, d\}$  является гомоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_2$ . Тогда для любого элемента  $z = (\Delta_{X_1}, \psi)$  с компонентой  $\psi \in \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$  выполняется условие  $\Psi(a, b, az)$ , так как  $az = (c_{a_1}, c_{\psi(a_1)})$ , точки  $a_1, b_1$  коллинеарны в плоскости  $\Pi_1$  и точки  $a_2, b_2, \psi(a_1)$  коллинеарны в плоскости  $\Pi_2$ . Это означает, что выполняется условие  $E_2(a, b)$  и справедливо утверждение 2) леммы.

Если элементы  $a, b, d$  полугруппы  $S$  удовлетворяют условию  $\Psi_1(a, b, d)$ , то  $RZ(a)$ ,  $RZ(b)$ ,  $RZ(d)$  и в силу леммы 4  $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$ ,  $b = (c_{b_1}, c_{b_2})$ ,  $d = (c_{d_1}, c_{d_2})$  для некоторых элементов  $a_1, b_1, d_1 \in X_1$  и  $a_2, b_2, d_2 \in X_2$ . Кроме того, для любых элементов  $x, y, z$  полугруппы  $S$ , удовлетворяющих условиям  $RZ(x)$ ,  $RZ(y)$ ,  $RZ(z)$ ,  $\neg E_1(x, y)$ ,  $\neg E_1(x, z)$  и  $\neg E_1(y, z)$ , найдется такой элемент  $s \in S$ , что  $E_1(xs, a)$ ,  $E_1(ys, b)$  и  $E_1(zs, d)$ . Тогда в силу леммы 4  $x = (c_{x_1}, c_{x_2})$ ,  $y = (c_{y_1}, c_{y_2})$ ,  $z = (c_{z_1}, c_{z_2})$  для некоторых различных элементов  $x_1, y_1, z_1 \in X_1$  и некоторых элементов  $x_2, y_2, z_2 \in X_2$ . Кроме того, по определению  $s = (\varphi_1, \varphi_2)$  для некоторых  $(\varphi_1, \varphi_2) \in \text{End}(\Pi_1) \times \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ . Значит  $xs = (c_{x_1}, c_{x_2}) \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = (c_{x_1}\varphi_1, c_{x_1}\varphi_2) = (c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)})$  и условие  $E_1(xs, a)$  по лемме 4 равносильно тому, что для элементов  $xs = (c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)})$  и  $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$  выполняется равенство  $\varphi_1(x_1) = a_1$ . Аналогично, условия  $E_1(ys, b)$  и  $E_1(zs, d)$  равносильны тому, что выполняются равенства  $\varphi_1(y_1) = b_1$  и  $\varphi_1(z_1) = d_1$ . В силу произвольности элементов  $x, y, z \in S$  их можно выбрать так, что  $x_1, y_1, z_1$  — три коллинеарные точки плоскости  $\Pi_1$ , которые существуют по аксиоме  $(A_2)$ , и  $x_2, y_2, z_2$  — произвольные точки плоскости  $\Pi_2$ . Такие элементы  $x, y, z$  удовлетворяют условиям  $RZ(x)$ ,  $RZ(y)$ ,  $RZ(z)$ ,  $\neg E_1(x, y)$ ,  $\neg E_1(x, z)$ ,  $\neg E_1(y, z)$ , и, значит, найдется такой элемент  $s = (\varphi_1, \varphi_2) \in \text{End}(\Pi_1) \times \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$ , что  $\varphi_1(x_1) = a_1$ ,  $\varphi_1(y_1) = b_1$ ,  $\varphi_1(z_1) = d_1$ . Следовательно, по определению гомоморфизма плоскостей точки  $a_1, b_1, d_1$  коллинеарны в плоскости  $\Pi_1$ . С другой стороны, если для элементов  $a, b, d \in Z_S$  точки  $a_1, b_1, d_1$  коллинеарны в плоскости  $\Pi_1$ , то все отображения  $\varphi_1 : X_1 \rightarrow \{a_1, b_1, d_1\}$  являются эндоморфизмами плоскости  $\Pi_1$ . Тогда для любых элементов  $x, y, z$  полугруппы  $S$ , удовлетворяющих условиям  $RZ(x)$ ,  $RZ(y)$ ,  $RZ(z)$ ,  $\neg E_1(x, y)$ ,  $\neg E_1(x, z)$  и  $\neg E_1(y, z)$  определим отображение  $\varphi_1 : X_1 \rightarrow X_1$  по формуле:  $\varphi_1(x_1) = a_1$ ,  $\varphi_1(y_1) = b_1$  и  $\varphi_1(u) = d_1$  для остальных значений  $u \in X_1$ . Кроме того, для любого  $v \in X_2$  отображение  $\varphi_2 : X_1 \rightarrow \{v\}$  является гомоморфизмом плоскости  $\Pi_1$  в плоскость  $\Pi_2$ . Значит, элемент  $s = (\varphi_1, \varphi_2)$  принадлежит полугруппе  $S$  и выполняются равенства:  $xs = (c_{\varphi_1(x_1)}, c_{\varphi_2(x_1)}) = (c_{a_1}, c_v)$ ,  $ys = (c_{\varphi_1(y_1)}, c_{\varphi_2(y_1)}) = (c_{b_1}, c_v)$ ,  $zs = (c_{\varphi_1(z_1)}, c_{\varphi_2(z_1)}) = (c_{d_1}, c_v)$ . Отсюда в силу леммы 4 следует, что  $E_1(xs, a)$ ,  $E_1(ys, b)$ ,  $E_1(zs, d)$ , т.е. выполняется условие  $\Psi_1(a, b, d)$  и справедлива первая часть утверждения 3) леммы. Аналогично доказывается вторая часть этого утверждения.  $\square$

**Теорема 3.** Полугруппа  $S$  в том и только том случае будет изоморфна полугруппе входных сигналов некоторого универсального планарного автомата, если она удовлетворяет следующим условиям:

- ( $\tilde{\theta}_0$ )  $(\forall x, y, z) \left( (RZ(x) \Rightarrow E_2(x, x)) \wedge (E_2(x, y) \wedge E_2(y, z) \Rightarrow E_2(y, x) \wedge E_2(x, z)) \wedge \right.$   
 $\left. \wedge \left( E_1(x, y) \Rightarrow (\forall s) \left( \bigwedge_{i=1}^2 E_i(xs, ys) \right) \right) \right)$ ;
- ( $\tilde{\theta}_1$ )  $(\forall x, y, z) (E_i(x, y) \wedge RZ(z) \Rightarrow \Psi_i(x, y, z))$  (здесь и далее  $i = 1, 2$ );
- ( $\tilde{\theta}_2$ )  $(\forall x_1, x_2, x_3) \left( \Psi_i(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \bigwedge_{t \in T} \Psi_i(x_{t(1)}, x_{t(2)}, x_{t(3)}) \right)$ , где  $T$  — множество всех преобразований множества  $\{1, 2, 3\}$ ;



$$(\tilde{\theta}_3) \quad (\forall x_1, x_2, x, y)(\neg E_i(x_1, x_2) \wedge \Psi_i(x, x_1, x_2) \wedge \Psi_i(x_2, x_1, y) \Rightarrow \Psi_i(x, x_1, y));$$

$$(\tilde{\theta}_4) \quad (\forall x_1, x_2) \left( \bigwedge_{j=1}^2 RZ(x_j) \Rightarrow (\exists x) \left( \bigwedge_{j=1}^2 \neg E_i(x, x_j) \wedge \Psi_i(x_1, x_2, x) \right) \right);$$

$$(\tilde{\theta}_5) \quad (\exists x_1, x_2, x_3) \left( \bigwedge_{j=1}^3 RZ(x_j) \wedge \neg \Psi_i(x_1, x_2, x_3) \right);$$

( $\tilde{\theta}_6$ ) для любых отображений  $f_1, f_2: S \rightarrow S$  выполняется

$$\begin{aligned} & (\forall x, x_1, x_2, x_3)(E_1(x, x_1) \wedge \Psi_1(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \bigwedge_{j=1}^2 (E_j(f_j(x), f_j(x_1)) \wedge \\ & \wedge \Psi_j(f_j(x_1), f_j(x_2), f_j(x_3)))) \Rightarrow (\exists! z)(\forall x) \left( RZ(x) \Rightarrow \bigwedge_{j=1}^2 E_j(xz, f_j(x)) \right). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Покажем, что для любых плоскостей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  полугруппа входных сигналов  $S$  универсального планарного автомата  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  удовлетворяет условиям  $(\tilde{\theta}_0) - (\tilde{\theta}_6)$ . Из лемм 4, 5 следует, что полугруппа  $S$  удовлетворяет условию  $(\tilde{\theta}_0)$ . В силу леммы 5 элементы  $a, b, d \in S$  в том и только том случае удовлетворяют условию  $\Psi_1(a, b, d)$  (соответственно условию  $\Psi_2(a, b, d)$ ), если найдутся такие точки  $a_i, b_i, d_i \in X_i$ , что  $a = (c_{a_1}, c_{a_2})$ ,  $b = (c_{b_1}, c_{b_2})$ ,  $d = (c_{d_1}, c_{d_2})$  и  $(a_1, b_1, d_1) \in C(\Pi_1)$  (соответственно  $(a_2, b_2, d_2) \in C(\Pi_2)$ ). Тогда из лемм 4, 5 и свойств  $(T_1) - (T_5)$  отношений коллинеарности плоскостей следует, что полугруппа  $S$  удовлетворяет условиям  $(\tilde{\theta}_1) - (\tilde{\theta}_5)$ . Для доказательства  $(\tilde{\theta}_6)$  рассмотрим отображения  $f_1, f_2: S \rightarrow S$ , для которых при любых значениях  $x, x_1, x_2, x_3 \in S$  выполняется условие

$$\left( E_1(x, x_1) \wedge \Psi_1(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \bigwedge_{j=1}^2 (E_j(f_j(x), f_j(x_1)) \wedge \Psi_j(f_j(x_1), f_j(x_2), f_j(x_3))) \right).$$

В силу свойства  $(\tilde{\theta}_1)$  отсюда следует, что для любого  $s \in S$ , удовлетворяющего условию  $RZ(s)$ , при каждом  $i = 1, 2$  выполняется  $RZ(f_i(s))$  и можно корректно определить отображения  $\varphi_i: X_1 \rightarrow X_i$  по правилу: для элемента  $x \in X_1$  значение  $\varphi_i(x) = x_i$ , если для некоторого  $z \in X_2$  выполняется равенство  $f_i(c_x, c_z) = (c_{x_1}, c_{x_2})$ . Кроме того, из леммы 5 следует, что эти отображения  $\varphi_1, \varphi_2$  коллинеарные тройки точек плоскости  $\Pi_1$  отображают в коллинеарные тройки точек соответственно плоскостей  $\Pi_1, \Pi_2$ . Значит, по лемме 2  $\varphi_1 \in \text{End}(\Pi_1)$ ,  $\varphi_2 \in \text{Hom}(\Pi_1, \Pi_2)$  и  $s = (\varphi_1, \varphi_2)$  – входной сигнал универсального планарного автомата  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ , который при любом  $a = (c_{a_1}, c_{a_2}) \in Z_S$  удовлетворяет условию:

$$as = (c_{a_1}, c_{a_2}) \cdot (\varphi_1, \varphi_2) = (c_{\varphi_1(a_1)}, c_{\varphi_2(a_1)}).$$

Так как по построению для любого  $i = 1, 2$  выполняется  $\varphi_i(a_1) = (f_i(a))_i$ , то в силу леммы 5  $E_i(as, f_i(a))$ . Следовательно, полугруппа входных сигналов  $S$  универсального планарного автомата  $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  удовлетворяет условию  $(\tilde{\theta}_6)$ . Обратное, пусть полугруппа  $S$  удовлетворяет условиям  $(\tilde{\theta}_0) - (\tilde{\theta}_6)$ . Тогда из условия  $(\tilde{\theta}_5)$  следует, что эта полугруппа имеет непустое множество правых нулей  $Z_S$ . Для каждого  $i = 1, 2$  формула  $E_i$  определяет на множестве  $Z_S$  бинарное отношение  $\varepsilon_i$  по правилу:  $\varepsilon_i = \{(x, y) \in Z_S^2 | E_i(x, y)\}$ . Легко видеть, что отношение  $\varepsilon_1$  является эквивалентностью на множестве  $Z_S$ . Из условия  $(\tilde{\theta}_0)$  следует, что отношение  $\varepsilon_2$  рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. также является эквивалентностью на множестве  $Z_S$ . Более того, из условия  $(\tilde{\theta}_0)$  следует, что эти отношения удовлетворяют условию

$$(x, y) \in \varepsilon_1 \Rightarrow (\forall s \in S) \left( \bigwedge_{i=1}^2 (xs, ys) \in \varepsilon_i \right). \quad (2)$$

Для каждого  $i = 1, 2$  обозначим фактор-множество  $X_i = Z_S / \varepsilon_i$  и рассмотрим автомат  $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$  с множеством состояний  $X_1$ , множеством выходных сигналов  $X_2$ , полугруппой входных сигналов  $S$ , функцией переходов  $\delta: X_1 \times S \rightarrow X_1$  и выходной функцией  $\lambda: X_1 \times S \rightarrow X_2$ , которые для значений  $x \in Z_S, s \in S$  определяются по формулам

$$\delta(\varepsilon_1(x), s) = \varepsilon_1(xs), \quad \lambda(\varepsilon_1(x), s) = \varepsilon_2(xs).$$



Заметим, что корректность такого определения следует из свойства (2) и равенств

$$\begin{aligned}\delta(\varepsilon_1(x), st) &= \varepsilon_1(x(st)) = \varepsilon_1((xs)t) = \delta(\varepsilon_1(xs), t) = \delta(\delta(\varepsilon_1(x), s), t), \\ \lambda(\varepsilon_1(x), st) &= \varepsilon_2(x(st)) = \varepsilon_2((xs)t) = \lambda(\varepsilon_1(xs), t) = \lambda(\delta(\varepsilon_1(x), s), t),\end{aligned}$$

которые выполняются для любых  $x \in Z_S$  и  $s, t \in S$ . Из свойств  $(\tilde{\theta}_1)$ – $(\tilde{\theta}_6)$  следует, что автомат **A** удовлетворяет условиям  $(\theta_1)$ – $(\theta_6)$  и по теореме 2 этот автомат изоморфен универсальному планарному автомату  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$  для некоторых плоскостей  $\Pi_1, \Pi_2$ . Значит, полугруппа  $S$  входных сигналов автомата **A** будет изоморфна полугруппе  $S(\Pi_1, \Pi_2)$  входных сигналов универсального планарного автомата  $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ .  $\square$

### Библиографический список

1. Картези Ф. Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980. 320 с.
2. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высш. шк., 1994. 192 с.
3. Улам С. Нерешенные математические задачи. М. : Наука, 1964. 168 с.
4. Jonson B. Topics in Universal Algebras. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 250. Berlin ; N. Y. : Springer-Verlag, 1972. 220 p.
5. Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. Vol. 82. P. 1–9.
6. Молчанов В. А. Конкретная характеристика универсальных планарных автоматов // Фундамент. и прикл. матем. 2013. Т. 18, вып. 3. С. 139–148.
7. Birkhoff G., Lipson J. D. Heterogeneous Algebras // J. Combinatorial Theory. 1970. Vol. 8. P. 115–133.
8. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. 356 с.
9. Молчанов В. А. Представление универсальных планарных автоматов входными сигналами // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 31–37.

## Abstract Characterization of Semigroups of Input Signals of Universal Planar Automata

V. A. Molchanov

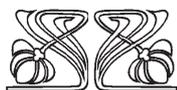
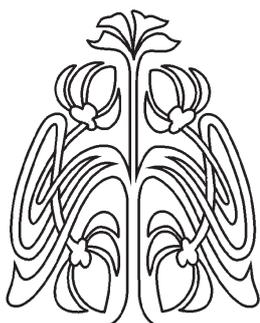
Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, v.molchanov@inbox.ru

Universal planar automata are universally attracted objects in the category of automata, for which sets of states and output signals are endowed with structures of planes. The main results of the paper give us necessary and sufficient conditions under which an arbitrary automaton is isomorphic to a universal planar automaton and an arbitrary semigroup is isomorphic to the semigroup of input signals of a universal planar automata.

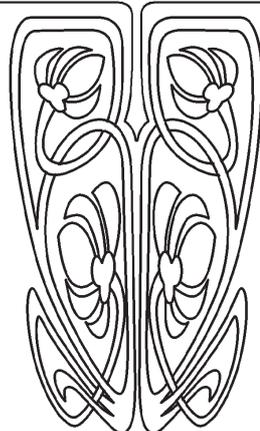
*Key words:* automaton, semigroup, plane.

### References

1. Karteszi F. *Introduction to finite geometries*. Amsterdam, North-Holland, 1976. 266 p. (Rus. ed. : Karteszi F. Vvedenie v konechnye geometrii. Moscow, Nauka, 1980, 320 p.)
2. Plotkin B. I., Grenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Algebraic structures in automata and databases theory*. Singapore ; River Edge ; NJ, World Scientific, 1992. (Rus. ed. : Plotkin B. I., Grenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. Elementy algebraicheskoj teorii avtomatov. Moscow, Vysshaya Shkola, 1994, 192 p.)
3. Ulam S. M. *A Collection of Mathematical Problems*. New York, Interscience Publishers, 1960. 150 p. (Rus. ed. : Ulam S. Nereshennye matematicheskie zadachi. Moscow, Nauka, 1964, 168 p.)
4. Jonson B. *Topics in Universal Algebras*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 250, Berlin, New York, Springer-Verlag, 1972, 220 p.
5. Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols. *Semigroup Forum*, 2011, vol. 82, pp. 1–9.
6. Molchanov V. A. Concrete characterization of universal planar automata. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, 2013, vol. 18, iss. 3, pp. 139–148 (in Russian).
7. Birkhoff G., Lipson J. D. Heterogeneous Algebras. *J. Combinatorial Theory*, 1970, vol. 8, pp. 115–133.
8. Ershov Yu. L., Palyutin E. A. *Mathematical Logic*. Moscow, Mir Publishers, 1984, 303 p. (Rus. ed. : Ershov Yu. L., Palyutin E. A. Matematicheskaya logika. Moscow, FIZMATLIT, 2011, 356 p.)
9. Molchanov V. A. Representation of Universal Planar Automata by Autonomous Input Signals. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 2, pp. 31–37 (in Russian).



**ПОДПИСКА**



**Подписка на II полугодие 2015 года**

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017,  
раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки».  
Журнал выходит 4 раза в год.

**Подписка оформляется** по заявочным письмам  
непосредственно в редакции журнала.

Заявки направлять по адресу:

410012, Саратов, Астраханская, 83.

Редакция журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия».

Тел. (845-2) 52-26-85, 52-50-04; факс (845-2) 27-85-29;

e-mail: [mmi@sgu.ru](mailto:mmi@sgu.ru)

Каталожная цена одного выпуска 350 руб.