

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

- Антонов С. Ю., Антонова А. В.** К теореме Ченга 247
- Волосивец С. С., Лихачева Т. В.** Некоторые вопросы приближения полиномами по мультипликативным системам в весовых пространствах L^p 251
- Галаев С. В.** Почти контактные метрические пространства с N -связностью 258
- Герус А. А., Гриценко С. А.** Усреднение математической модели акустики 264
- Дудов С. И., Осипцев М. А.** Об устойчивости по функционалу решения задачи о наилучшем приближении выпуклого тела шаром фиксированного радиуса 273
- Крусс Ю. С.** О точности оценки числа шагов алгоритма построения масштабирующей функции на локальных полях 279
- Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.** Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке 288
- Тюленева А. А.** Приближение функций ограниченной p -вариации средними Эйлера 300
- Хромов А. А., Хромова Г. В.** Решение задачи об определении плотности тепловых источников 309

Механика

- Антоненко Н. Н.** Задача о продольной трещине с наполнителем в полосе 315
- Басинский К. Ю.** Нелинейные волны на поверхности слоя вязкой жидкости 322

Информатика

- Осипов Д. Ю.** Т-неприводимые расширения для сверхстройных деревьев 330
- Савин А. Н., Тимофеева Н. Е., Гераськин А. С., Мавлютова Ю. А.** Разработка компонентов программного комплекса для потоковой фильтрации аудиоконтента на основе использования скрытых марковских моделей 340

Приложение

Personalia

- Август Петрович Хромов (к 80-летию со дня рождения) 351

Хроника научной жизни

- Голубов Б. И., Кашин Б. С., Коссович Л. Ю., Сидоров С. П., Хромов А. П.** 17-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», посвященная 150-летию со дня рождения В. А. Стеклова 357

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций, свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года. Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017, раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки». Журнал выходит 4 раза в год

Заведующий редакцией
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Степанова Наталья Ивановна

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Ковалева Наталья Владимировна

Корректор
Юдина Инна Геннадиевна

Адрес редакции:
410012, Саратов, Астраханская, 83
Тел.: (845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 11.09.15.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 13,71 (14,75).
Тираж 500 экз. Заказ 136-Т.

Отпечатано в типографии Саратовского университета.
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский государственный университет, 2015



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 11 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: <http://mmi.sgu.ru>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилизованным файлом по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

- Antonov S. Yu., Antonova A. V.** To Change Theorem 247
- Volosivets S. S., Likhacheva T. V.** Several Questions of Approximation by Polynomials with Respect to Multiplicative Systems in Weighted L^p Spaces 251
- Galaev S. V.** Almost Contact Metric Spaces with N -connection 258
- Gerus A. A., Gritsenko S. A.** Homogenization of the Acoustics Mathematical Model 264
- Dudov S. I., Osiptsev M. A.** On Functional Stability of the Solution for the Problem of Convex Body Best Approximating by a Ball with Fixed Radius 273
- Kruss Iu. S.** On Accuracy of Estimation of the Number of Steps for the Algorithm for Construction of Scaling Function on Local Fields 279
- Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A.** Gluing rule for Bernstein Polynomials on the Symmetric Interval 288
- Tyuleneva A. A.** Approximation of Functions of Bounded p -variation by Euler Means 300
- Khromov A. A., Khromova G. V.** The Solution of the Problem of Determining the Density of Heat Sources in a Rod 309

Mechanics

- Antonenko N. N.** The Problem of a Longitudinal Crack with a Filler in a Strip 315
- Basinsky K. Yu.** Nonlinear Wave on the Surface Layer of a Viscous Liquid 322

Computer Sciences

- Osipov D. Yu.** T-irreducible Extensions for Starlike Trees 330
- Savin A. N., Timofeeva N. E., Geraskin A. S., Mavlutova Yu. A.** The Development of Software Components for Streaming Audio Content Filtering Through the Use of Hidden Markov Models 340

Appendices

- Avgust Petrovich Khromov (on his 80th birthday) 351

Scientific Life

- Golubov B. I., Kashin B. S., Kossovich L. Yu., Sidorov S. P., Khromov A. P.** XVII International Saratov Winter School «Contemporary Problems of the Function Theory and its Applications» Dedicated to the 150th Anniversary of V. A. Steklov 357



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»

Главный редактор

Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Стальмахов Андрей Всеволодович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)

Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)

Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шамионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL «IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»

Editor-in-Chief – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Stalmakhov A. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Balash O. S. (Saratov, Russia)

Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)

Danilov V. N. (Saratov, Russia)

Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)

Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Makarov V. Z. (Saratov, Russia)

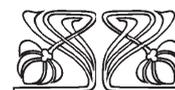
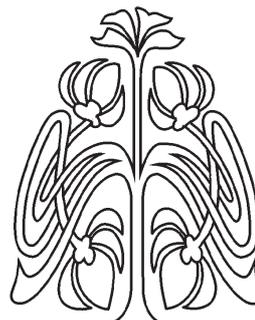
Prozorov V. V. (Saratov, Russia)

Usanov D. A. (Saratov, Russia)

Ustiantsev V. B. (Saratov, Russia)

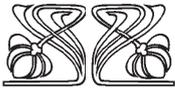
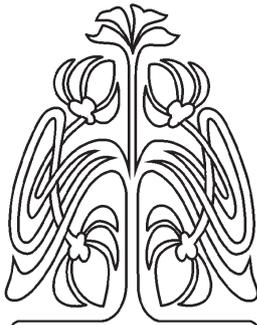
Shamionov R. M. (Saratov, Russia)

Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)

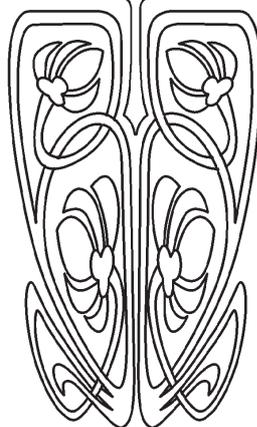


РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ





**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор

(Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Екатеринбург, Россия)

Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)

Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)

Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)

Indeitsev D. A. (St.-Petersburg, Russia)

Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)

Kovalev V. A. (Moscow, Russia)

Lomakin E. V. (Moscow, Russia)

Manzhirov A. V. (Moscow, Russia)

Matveenko V. P. (Perm, Russia)

Morozov N. F. (St.-Petersburg, Russia)

Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)

Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)

Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)

Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)

Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)

Speranskii D. V. (Moscow, Russia)

Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)

Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)

Khromov A. P. (Saratov, Russia)

Shalyto A. A. (St.-Petersburg, Russia)

Shashkin A. I. (Voronezh, Russia)

Yurko V. A. (Saratov, Russia)



МАТЕМАТИКА

УДК 512

К ТЕОРЕМЕ ЧЕНГА

С. Ю. Антонов¹, А. В. Антонова²

¹Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, antonovstvm@rambler.ru

²Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, antonovakazan@rambler.ru

В данной работе введены в рассмотрение полилинейные многочлены $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ и $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$, сумма которых является многочленом Ченга $\mathcal{F}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$. Методом математической индукции доказано, что каждый из них есть следствие стандартного многочлена $S^-(\bar{x})$. В частности, показано, что двойной многочлен Капелли $C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$ также следует из многочлена $S_m^-(\bar{x})$. Здесь же найдена минимальная степень многочлена $C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, при которой он является полиномиальным тождеством матричной алгебры $M_n(F)$. Полученные результаты представляют собой перенос результатов Ченга на двойные многочлены Капелли нечетной степени.

Ключевые слова: T -идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-247-251

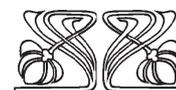
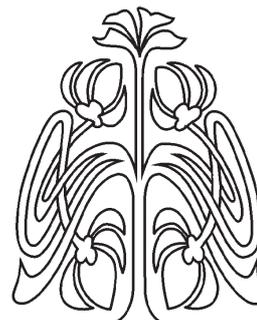
ВВЕДЕНИЕ

Пусть F — произвольное поле, $F\{Z\}$ — свободная ассоциативная алгебра над F , порожденная счетным множеством $Z = \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, которое представим в виде $Z = X \cup Y$, где $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $Y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — непересекающиеся счетные множества, S_n — симметрическая группа степени n , $S_n^-(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\mu \in S_n} \text{sgn } \mu z_{\mu(1)} \cdots z_{\mu(n)}$ — стандартный многочлен степени n ; f, g — произвольные многочлены алгебры $F\{Z\}$, $\{f\}^T$ — T -идеал алгебры $F\{Z\}$, порожденный многочленом f . Напомним, что двусторонний идеал I алгебры $F\{Z\}$ называется T -идеалом, если для любого эндоморфизма φ алгебры $F\{Z\}$ справедливо включение $\varphi(I) \subseteq I$. Далее, будем говорить, что многочлен g является следствием многочлена f (следует из f), если $g \in \{f\}^T$.

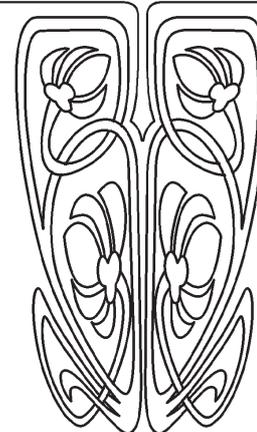
Кроме того, пусть t, u, m — любые натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $t \geq u, m \geq u, m > 1$; $\bar{a} = (a_1 \dots a_{u+1}) \in \mathbb{N}^u \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$, причем $a_1 + \dots + a_{u+1} = m$, $\bar{n} = (n_1 \dots n_{u+1}) \in \mathbb{N}^{u+1}$ и $n_1 + \dots + n_{u+1} = m, w = y_1 y_2 \cdots y_t$.

Представим слово w в виде $w = w_1 w_2 \cdots w_u$, где $w_1 = y_1 y_2 \cdots y_{i_2}, w_2 = y_{i_2+1} \cdots y_{i_3}, \dots, w_u = y_{i_u+1} \cdots y_t$ и определим многочлены

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) &= \mathcal{F}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t | w_1, \dots, w_u) = \\ &= \sum_{\bar{a}} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \text{sgn } \mu x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(a_1)} w_{\tau(1)} x_{\pi(a_1+1)} \cdots x_{\pi(a_1+a_2)} w_{\tau(2)} \times \end{aligned}$$



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**





$$\times x_{\pi(a_1+a_2+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\dots+a_u)} w_{\tau(u)} x_{\pi(a_1+\dots+a_u+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\dots+a_{u+1})},$$

$$\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \mathcal{H}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t | w_1, \dots, w_u) = \sum_{\bar{n}} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \text{sgn } \mu x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n_1)} \times$$

$$\times w_{\tau(1)} x_{\pi(n_1+1)} \cdots x_{\pi(n_1+n_2)} w_{\tau(2)} x_{\pi(n_1+n_2+1)} \cdots x_{\pi(n_1+\dots+n_u)} w_{\tau(u)} x_{\pi(n_1+\dots+n_u+1)} \cdots x_{\pi(n_1+\dots+n_{u+1})},$$

$$\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \mathcal{R}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t | w_1, \dots, w_u) =$$

$$= \sum_{(a_1 \cdots a_u \ 0)} \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_u} \text{sgn } \mu x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(a_1)} w_{\tau(1)} x_{\pi(a_1+1)} \cdots x_{\pi(a_1+a_2)} w_{\tau(2)} x_{\pi(a_1+a_2+1)} \cdots x_{\pi(a_1+\dots+a_u)} w_{\tau(u)},$$

где μ — подстановка в мономе $z_{\mu(1)} \cdots z_{\mu(m)} z_{\mu(m+1)} \cdots z_{\mu(m+t)}$, в котором $z_1 = x_1, \dots, z_m = x_m, z_{m+1} = y_1, \dots, z_{m+t} = y_t$. Очевидно, $\mathcal{F}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) + \mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$. Ченгом (Q. Chang) в [1] доказана

Теорема 1. Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен $\mathcal{F}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Цель данной работы — доказать аналогичную теорему для многочлена $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$ и получить некоторые следствия.

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ ЧЕНГА

Пусть v_1, \dots, v_n — произвольные мономы алгебры $F\{Z\}$. Положим $\bar{v} = (v_1 \dots v_n)$, $\bar{v}_i = (v_1 \dots v_{i-1} v_{i+1} \dots v_n)$. Далее, для любых многочленов $f, g \in F\{Z\}$ определим коммутатор $[f, g] = fg - gf$, симметризатор $\langle f, g \rangle = fg + gf$, длину монома v обозначим символом $|v|$.

Утверждение 1. Стандартный многочлен $S_n^-(\bar{z}) \in F\{Z\}$ обладает следующими свойствами:

- 1) $S_n^-(\bar{z}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} z_i S_{n-1}^-(\bar{z}_i) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} S_{n-1}^-(\bar{z}_i) z_i$;
- 2) если $n = 2k + 1$ и $\text{char } F \neq 2$, то $2S_n^-(\bar{z}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \langle S_{n-1}^-(\bar{z}_i), z_i \rangle$;
- 3) если $n = 2k$ и $\text{char } F \neq 2$, то $2S_n^-(\bar{z}) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [S_{n-1}^-(\bar{z}_i), z_i]$.

Доказательство. Приведено в [2]. □

Теорема 2. Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Доказательство. Проведем индукцию по парам $(t, u) \in A(\preceq) = \{(t, u) \in \mathbb{N}^2 \mid t \geq u\}$, где \preceq — лексикографический порядок. Покажем, что для $(t, u) = (1, 1)$ теорема верна. Действительно, в этом случае $w = y_1 = w_1$, и по утверждению 1 при четном и нечетном m соответственно будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\bar{x}, y_1 | w_1) &= S_{m+1}^-(\bar{z}) - \langle S_m^-(\bar{x}), y_1 \rangle, \\ \mathcal{H}(\bar{x}, y_1 | w_1) &= S_{m+1}^-(\bar{z}) - [S_m^-(\bar{x}), y_1] \end{aligned}$$

Так как $S_{m+1}^-(\bar{z}), \langle S_m^-(\bar{x}), y_1 \rangle, [S_m^-(\bar{x}), y_1] \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, то и $\mathcal{H}(\bar{x}, y_1 | w_1) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$.

Пусть (t, u) — произвольный элемент множества A , отличный от $(1, 1)$. Предположим, что для любого $(t_1, u_1) \in A$ такого, что $(t_1, u_1) \prec (t, u)$, теорема 2 верна. Покажем, что она будет верной и для пары (t, u) . Для элемента (t, u) возможны следующие случаи:

- 1) среди подслов w_1, \dots, w_u существует хотя бы одно w_s , для которого $|w_s| \geq 3$;
- 2) для любого $i = \overline{1, u}$ $|w_i| \leq 2$, при этом найдется w_r такое, что $|w_r| = 2$;
- 3) для любого $i = \overline{1, u}$ $|w_i| = 1$.

Рассмотрим каждый из них по порядку.



Пусть $w_s = b_s y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}$, тогда мы можем записать:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) &= \mathcal{H}(\bar{x}, y_1, \dots, y_{i_{s+1}-3}, (y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}), y_{i_{s+1}+1}, \dots, y_t | w_1, \dots, w_u) = \\ &= \varphi \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1, i_{s+1}}} | \bar{p}), \end{aligned}$$

где $\bar{p} = (w_1 \dots w_{s-1} b_s y_{i_{s+1}-2} w_{s+1} \dots w_u)$, φ — эндоморфизм алгебры $F\{Z\}$ такой, что $\varphi(y_{i_{s+1}-2}) = y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}$ и $\varphi(z) = z$, если $z \neq y_{i_{s+1}-2}$. Так как ассоциированная с многочленом $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1, i_{s+1}}} | \bar{p})$ пара $(t-2, u) \prec (t, u)$, то по индуктивному предположению он следует из $S_m^-(\bar{x})$, но тогда и $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Во втором случае предположим, что $w_r = y_{i_r+1} y_{i_r+2}$. Рассмотрим эндоморфизмы $\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_{i_1+1}, \dots, \psi_{i_u+1}$ алгебры $F\{Z\}$, определенные следующим образом:

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} x_i w_r, & \text{если } z = x_i; \\ z, & \text{если } z \neq x_i, \end{cases} \quad \psi_{i_j+1}(z) = \begin{cases} w_r y_{i_j+1}, & \text{если } z = y_{i_j+1}; \\ z, & \text{если } z \neq y_{i_j+1}, \end{cases}$$

где $i = \overline{1, m}$, $j \in A = \{1, \dots, u\} \setminus \{r\}$, $i_1 = 0$. Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) = \sum_{i=1}^m \varphi_i \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}}) - \sum_{j \in A} \psi_{i_j+1} \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}}) - \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}}) w_r.$$

Так как ассоциированная с многочленом $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1, i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}})$ пара $(t-2, u-1) \prec (t, u)$, то по индуктивному предположению он является следствием $S_m^-(\bar{x})$, но тогда и $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Пусть теперь для любого $i = \overline{1, u} \mid w_i = 1$, тогда $u = t$. Рассмотрим стандартный многочлен $S_{m+t}^-(\bar{x}, \bar{y})$, который представим в виде

$$S_{m+t}^-(\bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y} | \bar{w}) + D_0(\bar{x}, \bar{y}) + D_1(\bar{x}, \bar{y}) + D_2(\bar{x}, \bar{y}) + D_3(\bar{x}, \bar{y}),$$

где D_0 состоит из мономов, начинающихся с некоторого y и заканчивающихся каким-либо x , D_1 — из мономов, начинающихся с какого-нибудь x и заканчивающихся некоторым y , D_2 — из мономов, начинающихся и заканчивающихся на x , D_3 — из мономов, начинающихся и заканчивающихся на y .

Перегруппируем слагаемые в многочлене $D_0(\bar{x}, \bar{y})$ следующим образом. Пусть $v_0 = b_{v_0}(y) a_{v_0+1}(x) \times \dots \times b_{v_0 s}(y) a_{v_0 s+1}(x)$ — произвольный моном из D_0 , в котором $b_{v_0}(y), b_{v_0+1}(y), \dots, b_{v_0 s}(y), a_{v_0+1}(x), \dots, a_{v_0 s+1}(x)$ — непустые слова из соответствующих алфавитов $\{y_1, \dots, y_t\}, \{x_1, \dots, x_m\}$. Соберем все слова v вида

$$v = b_{v_0}(y) c_{v_0+1}(x) b_{v_0 \tau(1)}(y) \dots b_{v_0 \tau(s)}(y) c_{v_0 s+1}(x) \quad (\tau \in S_s)$$

в одну скобку и вынесем вместе со знаком v_0 общий множитель $b_{v_0}(y)$. С оставшимися в многочлене D_0 мономами сделаем то же самое. В результате за конечное число шагов придем к равенству

$$D_0(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{v_0} \varepsilon_{v_0} b_{v_0}(y) \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}(v_0) | b_{v_0+1}, \dots, b_{v_0 s}) + \varepsilon S_t^-(\bar{y}) S_m^-(\bar{x}),$$

где $\varepsilon, \varepsilon_{v_0} \in \{-1, 1\}$.

Аналогично для многочленов $D_1(\bar{x}, \bar{y}), D_2(\bar{x}, \bar{y}), D_3(\bar{x}, \bar{y})$ будем иметь:

$$D_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{v_1} \varepsilon_{v_1} \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}(v_1) | b_{v_1+1}, \dots, b_{v_1 s}) b_{v_1 s+1}(y) + \omega S_m^-(\bar{x}) S_t^-(\bar{y}),$$

где $\omega, \varepsilon_{v_1} \in \{-1, 1\}$;

$$D_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{v_2} \varepsilon_{v_2} \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y} | b_{v_2+1}, \dots, b_{v_2 s}),$$

где $\varepsilon_{v_2} \in \{-1, 1\}$;

$$D_3(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{v_3} \varepsilon_{v_3} b_{v_3}(y) \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}(v_3) | b_{v_3+1}, \dots, b_{v_3 s}) b_{v_3 s+1}(y) + \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{q_3} \varepsilon_{q_3} b_{q_3}(y) S_m^-(\bar{x}) b_{q_3+1}(y)$, $\varepsilon_{v_3}, \varepsilon_{q_3} \in \{-1, 1\}$.

Следовательно, мы можем записать, что

$$\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = S_{m+t}^-(\bar{x}, \bar{y}) - \sum_{v_0} - \sum_{v_1} - \sum_{v_2} - \sum_{v_3} - \varepsilon S_t^-(\bar{y}) S_m^-(\bar{x}) - \omega S_m^-(\bar{x}) S_t^-(\bar{y}) - \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}). \quad (1)$$

Теперь заметим, что у каждого из многочленов, находящегося под знаком суммы $\sum_{v_0}, \sum_{v_1}, \sum_{v_2}, \sum_{v_3}$, ассоциированная с ним пара $(r, s) \prec (t, t)$, и потому по индуктивному предположению каждый из них есть следствие $S_m^-(\bar{x})$.

Кроме того, из утверждения 1 вытекает, что $S_{m+t}^-(\bar{x}, \bar{y})$ также следует из $S_m^-(\bar{x})$. Отсюда и из равенства (1) заключаем, что $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$. \square

Следствие 1. Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Доказательство. По теореме 1 многочлен $\mathcal{F}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$, а по теореме 2 $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ есть следствие $S_m^-(\bar{x})$, но тогда $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = \mathcal{F}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) - \mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w})$ также следует из $S_m^-(\bar{x})$. \square

Следствие 2. Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен

$$C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_m} \sum_{\tau \in S_{m-1}} \operatorname{sgn}(\pi\tau) x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(m-1)} y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)}$$

является следствием стандартного многочлена $S_m^-(\bar{x})$.

Доказательство. Полагая в теореме 2 $t = m - 1 = u$, приходим к равенству

$$\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y}|\bar{w}) = (-1)^{m(m-1)/2} C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}). \quad \square$$

Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра над F со стандартным тождеством $S_m^-(\bar{x})$, $T[A]$ — ее идеал тождеств, тогда по следствию 2 $C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[A]$. В частности, если $A = M_n(F)$ — матричная алгебра, то по теореме Амицура – Левицкого [3] при $m \geq 2n$ $S_m^-(\bar{x}) \in T[M_n(F)]$, и, значит, $C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_n(F)]$. Тот факт, что $C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_n(F)]$ при $m < 2n$, следует из того, что двойной многочлен Капелли

$$C_{2(2n-1)}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_{2n-1}} \sum_{\tau \in S_{2n-1}} \operatorname{sgn}(\pi\tau) x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\pi(2n-1)} y_{\tau(2n-1)}$$

не обращается в нуль на двойной лестнице, и равенства

$$C_{2m}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i} C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}_i) y_i,$$

доказанного в [4]. Таким образом, нами доказана

Теорема 3. Пусть F — произвольное поле, $M_n(F)$ — матричная алгебра над F . Тогда наименьшее m , при котором $C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_n(F)]$, равно $2n$.

Заметим, что впервые это доказал Домокос (М. Domokos) в [5].

Библиографический список

1. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710.
2. Pierce R. Associative Algebras. N.Y. : Springer-Verlag, 1982. 542 p.
3. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463.
4. Антонов С. Ю. Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Изв. вузов. Математика. 2012. № 11. С. 3–19.
5. Domokos M. A generalization of a theorem of Chang // Commun. Algebra. 1995. Vol. 23, № 12. P. 4333–4342.



To Chang Theorem

S. Yu. Antonov¹, A. V. Antonova²

¹Antonov Stepan Yuryevich, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovst-vm@rambler.ru

²Antonova Alina Vladimirovna, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovakazan@rambler.ru

Multilinear polynomials $\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{y})$ and $\mathcal{R}(\bar{x}, \bar{y})$, the sum of which is the Chang polynomial $\mathcal{F}(\bar{x}, \bar{y})$ have been introduced in this paper. It has been proved by mathematical induction method that each of them is a consequence of the standard polynomial $S^-(\bar{x})$. In particular it has been shown that the double Capelli polynomial of add degree $C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$ is also a consequence of the polynomial $S_m^-(\bar{x}, \bar{y})$. The minimal degree of the polynomial $C_{2m-1}(\bar{x}, \bar{y})$ in which it is a polynomial identity of matrix algebra $M_n(F)$ has been also found in the paper. The results obtained are the transfer of Chang's results over to the double Capelli polynomials of add degree.

Key words: T -ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

References

1. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710.
2. Pierce R. *Associative Algebras*. New York, Springer-Verlag, 1982, 542 p.
3. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463.
4. Antonov S. Yu. The least degree of identities in the subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of the matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Russian Math. [Izvestiya VUZ. Matematika]*, 2012, iss. 56, no. 11, pp. 1–16. DOI: 10.3103/S1066369X12110011.
5. Domokos M. A generalization of a theorem of Chang. *Commun. Algebra*, 1995, vol. 23, no. 12, pp. 4333–4342.

УДК 517.518

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЛИНОМАМИ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ L^p

С. С. Волосивец¹, Т. В. Лихачева²

¹Волосивец Сергей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, VolosivetsSS@mail.ru

²Лихачева Татьяна Владимировна, старший специалист, филиал АО «Неофлекс Консалтинг» в г. Саратов, iofinat@mail.ru

В настоящей статье изучается приближение полиномами Виленкина в весовых пространствах L^p . Авторы доказывают результат типа Бутцера–Шерера об эквивалентности между порядком наилучшего приближения функции f и порядком возрастания обобщенных производных, а также аппроксимативными свойствами полинома наилучшего приближения $t_n(f)$. Даны некоторые приложения к приближению линейными средними рядов Фурье–Виленкина.

Ключевые слова: система Виленкина, наилучшее приближение, обобщенная производная, средние Зигмунда–Рисса.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-251-258

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, причем $2 \leq p_j \leq N$ для всех $j \in \mathbb{N}$. По определению $\mathbb{Z}(p_j) = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$, $m_0 = 1$ и $m_n = p_1 \dots p_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}(p_j). \quad (1)$$



Это разложение единственно, если для $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, мы берем разложение с конечным числом $x_j \neq 0$. Каждое число $k \in \mathbb{Z}_+$ может быть записано единственным образом в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \quad k_j \in \mathbb{Z}(p_j). \tag{2}$$

Если x и y представлены в виде (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}$, $z_j \in \mathbb{Z}(p_j)$, $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$. Аналогично определяется $x \ominus y$. Для данного $x \in [0, 1)$ с разложением (1) and $k \in \mathbb{Z}_+$ с разложением (2) полагаем $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)\right)$. Система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$, называемая мультипликативной, или системой Виленкина, является ортонормированной и полной в $L^1[0, 1]$ (см. [1, § 1.5]), причем при $k < m_n$ функции $\chi_k(x)$ постоянны на $I_j^n := [(j-1)/m_n, j/m_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq j \leq m_n$. Множество всех I_j^n обозначим через Ω . Введем коэффициенты Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ формулой $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t) \overline{\chi_k(t)} dt$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и частичные суммы Фурье равенством $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $1 < p < \infty$. Положительная измеримая на $[0, 1)$ (т. е. весовая) функция $w(x)$ принадлежит классу Макенхаупта A_p , если

$$\left(|I|^{-1} \int_I w(x) dx\right) \left(|I|^{-1} \int_I w^{-1/(p-1)}(x) dx\right)^{p-1} \leq C < \infty \tag{3}$$

для всех $I \in \Omega$ ($|I|$ означает меру Лебега множества I).

Через $L_w^p[0, 1)$, где $1 \leq p < \infty$ и $w(x)$ — весовая функция, обозначим банахово пространство измеримых на $[0, 1)$ функций с конечной нормой $\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p w(x) dx\right)^{1/p}$. Как обычно, $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0, 1) : \hat{f}(k) = 0, k \geq n\}$, $E_n(f)_{p,w} = \inf\{\|f - t_n\|_{p,w} : t_n \in \mathcal{P}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. При $w(x) \equiv 1$ получаем классическое пространство $L^p[0, 1)$ с нормой $\|\cdot\|_p$. С помощью неравенства Гельдера легко показывается, что $L_w^p[0, 1) \subset L^1[0, 1)$ при $1 < p < \infty$ и $w \in A_p$. Будем говорить, что существует \mathbf{P} -производная $f^{[r]}$ функции $f \in L_w^p[0, 1)$ порядка $r > 0$ (в $L_w^p[0, 1)$), если ряд $\sum_{j=0}^{\infty} j^r \hat{f}(j) \chi_j$ является рядом Фурье функции $f^{[r]} \in L_w^p[0, 1)$. Это условие равносильно тому, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} j^r \hat{f}(j) \chi_j$ сходится в $L_w^p[0, 1)$ к $f^{[r]}$ (см. [3]).

В работе [4] был установлен ряд теорем о приближениях по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $L_w^p[0, 1)$, являющихся аналогами результатов о приближении тригонометрическими полиномами в весовых пространствах (см. [5–7]).

Теорема А. 1. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ и для $f \in L_w^p[0, 1)$ существует $f^{[r]} \in L_w^p[0, 1)$. Тогда $E_n(f)_{p,w} \leq C n^{-r} \|f^{[r]}\|_{p,w}$.

2. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ и $t_n \in \mathcal{P}_n$. Тогда $\|t_n^{[r]}\|_{p,w} \leq C(p, w) \|t_n\|_{p,w}$.

Теорема В. Пусть $1 < p < \infty$, $\gamma = \min(2, p)$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ и $f \in L_w^p[0, 1)$. Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{r\gamma-1} E_k^\gamma(f)_{p,w}$, то существует $f^{[r]} \in L_w^p[0, 1)$ и при этом

$$E_n(f^{[r]})_{p,w} \leq C \left(n^r E_n(f)_{p,w} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{r\gamma-1} E_k^\gamma(f)_{p,w} \right)^{1/\gamma} \right).$$

Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ и $W^r L_w^p[0, 1)$ состоит из функций $g \in L_w^p[0, 1)$, для которых существует $g^{[r]} \in L_w^p[0, 1)$, с полунормой $\|g^{[r]}\|_{p,w}$. Рассмотрим K -функционал

$$K_r(f, t) = K_r(f, t, L_w^p[0, 1), W^r L_w^p[0, 1)) = \inf\{\|f - g\|_{p,w} + t \|g^{[r]}\|_{p,w} : g \in W^r L_w^p[0, 1)\}.$$



Обычный модуль непрерывности в $L^p[0, 1) = L^p_1[0, 1)$ вида $\omega^*(f, \delta) = \sup_{0 \leq h < \delta} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_{p,1}$ в весовом пространстве не является адекватной характеристикой функции из-за отсутствия инвариантности нормы $\|\cdot\|_{p,w}$ относительно обобщенного сдвига. Но с помощью величины $K_r(f, t, L^p_w[0, 1), W^r L^p_w[0, 1))$ можно записать аналоги классических теорем Д. Джексона и С. Н. Бернштейна (см. [8, § 5.1 и § 6.1]).

Теорема С (см. [4]). Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ и $\gamma = \min(p, 2)$. Тогда для всех $f \in L^p_w[0, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$E_n(f)_{p,w} \leq CK_r(f, n^{-r})$$

и

$$K_r(f, n^{-r}) \leq Cn^{-r} \left(\sum_{k=1}^n [k^r E_k(f)_{p,w}]^\gamma k^{-1} \right)^{1/\gamma}.$$

Далее, пусть $\omega(t)$ возрастает и непрерывна на $[0, 1]$ и $\omega(0) = 0$ (обозначение $\omega \in \Phi$). Если $f \in L^p_w[0, 1)$ и $K_r(f, n^{-r}) = O(\omega(n^{-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, то будем писать $f \in H^{\omega,r}_{p,w}$, при $r = 1$ будем писать $f \in H^{\omega}_{p,w}$.

Целью нашей работы является получение условий, эквивалентных соотношению $E_n(f)_{p,w} = O(n^{-r-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$, в терминах обобщенных производных, полиномов наилучшего приближения и K -функционала $K_r(f, t)$. Тригонометрический аналог этого результата см. в [9, теорема 2.2]. В невесовом случае для системы Уолша (частный случай системы $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ при $p_i \equiv 2$) см. [10, теорема 4.4]. Кроме того, даны приложения теорем А–С к приближениям линейными средними рядов Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ в пространстве $L^p_w[0, 1)$.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < r$, $f \in L^p_w[0, 1)$ и полином $t_n(f) \in \mathcal{P}_n$ таков, что $\|f - t_n(f)\|_{p,w} = E_n(f)_{p,w}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $E_n(f)_{p,w} = O(n^{-r-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$;
- 2) существует $f^{[r]} \in L^p_w[0, 1)$ и $K_r(f^{[r]}, n^{-r}) = O(n^{-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$;
- 3) для всех $s \in [0, r] \cap \mathbb{Z}$ существует $f^{[s]} \in L^p_w[0, 1)$ и справедливо соотношение

$$\|f^{[s]} - t_n^{[s]}(f)\|_{p,w} = O(n^{s-r-\alpha}), \quad n \in \mathbb{N};$$

- 4) $\|t_n^{[s]}(f)\|_{p,w} = O(n^{s-r-\alpha})$, $n \in \mathbb{N}$, где $s \in \mathbb{N}$, $s > r + \alpha$.

Если вместо $0 < \alpha < r$ потребовать $\alpha > 0$, то утверждения 1), 3) и 4) эквивалентны.

Доказательство. Установим 1) \Rightarrow 4). Пусть $m_k \leq n < m_{k+1}$ и $s > r + \alpha$. В силу части 2) теоремы А и условия 1) имеем:

$$\begin{aligned} \|t_n^{[s]}(f)\|_{p,w} &\leq \|t_n^{[s]}(f) - t_{m_k}^{[s]}(f)\|_{p,w} + \sum_{i=1}^k \|t_{m_i}^{[s]}(f) - t_{m_{i-1}}^{[s]}(f)\|_{p,w} \leq \\ &\leq C_1 \left(n^s \|t_n(f) - t_{m_k}(f)\|_{p,w} + \sum_{i=1}^k m_i^s \|t_{m_i}(f) - t_{m_{i-1}}(f)\|_{p,w} \right) \leq \\ &\leq 2C_1 \left(n^s E_{m_k}(f)_{p,w} + \sum_{i=1}^k m_i^s E_{m_{i-1}}(f)_{p,w} \right) \leq C_2 \left(n^s m_k^{-r-\alpha} + \sum_{i=1}^k m_i^s m_{i-1}^{-r-\alpha} \right) \leq C_3 n^{s-r-\alpha}. \end{aligned}$$

Здесь использовано неравенство вида

$$\|t_{m_i}(f) - t_{m_{i-1}}(f)\|_{p,w} \leq \|t_{m_i}(f) - f\|_{p,w} + \|f - t_{m_{i-1}}(f)\|_{p,w} \leq 2E_{m_{i-1}}(f)_{p,w}, \quad (4)$$

ограниченность отношений n/m_k и m_i/m_{i-1} , а также хорошо известное соотношение $\sum_{i=1}^k m_i^\beta \leq C_4 m_k^\beta$, $\beta > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Докажем, что 4) влечет 1). Пусть снова $m_k \leq n < m_{k+1}$. В силу полуаддитивности наилучшего приближения по функции находим, что

$$E_n(f)_{p,w} \leq E_{m_k}(f)_{p,w} \leq E_{m_k}(f - t_{m_{k+1}}(f))_{p,w} + E_{m_k}(t_{m_{k+1}})_{p,w} = E_{m_{k+1}}(f)_{p,w} + E_{m_k}(t_{m_{k+1}})_{p,w}.$$

Записывая аналогичные неравенства

$$E_{m_{k+i-1}}(f)_{p,w} - E_{m_{k+i}}(f)_{p,w} \leq E_{m_{k+i-1}}(t_{m_{k+i}}(f))_{p,w}$$

и складывая их по $i \geq 1$ с учетом того, что $\lim_{k \rightarrow \infty} E_{m_k}(f)_{p,w} = 0$, получаем:

$$E_{m_k}(f)_{p,w} \leq \sum_{i=1}^{\infty} E_{m_{k+i-1}}(t_{m_{k+i}}(f))_{p,w}. \tag{5}$$

Согласно части 1) теоремы А и условию 4) для некоторого $s > r + \alpha$

$$E_{m_{k+i-1}}(t_{m_{k+i}}(f))_{p,w} \leq C_5 m_{k+i-1}^{-s} \|t_{m_{k+i}}^{[s]}(f)\|_{p,w} \leq C_6 m_{k+i}^{-r-\alpha}.$$

Подставляя последнее неравенство в (5) и используя известное неравенство $\sum_{j=k}^{\infty} m_j^{-\beta} \leq C_7 m_k^{-\beta}$, $\beta > 0$, $k \in \mathbb{N}$, находим, что

$$E_n(f)_{p,w} \leq E_{m_k}(f)_{p,w} \leq C_8 m_k^{-r-\alpha} \leq C_9 n^{-r-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства импликации 3) \Rightarrow 1) сначала подставим в неравенство части 1) теоремы А функцию $f - t_n^*(f)$, где $t_n^*(f) \in \mathcal{P}_n$, $(t_n^*)^{[r]} = \varphi_n$ и $\varphi_n \in \mathcal{P}_n$ удовлетворяет равенству $\|f^{[r]} - \varphi_n\|_{p,w} = E_n(f^{[r]})_{p,w}$, и получим

$$E_n(f)_{p,w} = E_n(f - t_n^*(f))_{p,w} \leq C_{10} n^{-r} \|f^{[r]} - \varphi_n\|_{p,w} = C_{10} n^{-r} E_n(f^{[r]})_{p,w}. \tag{6}$$

Из условия 3) при $s = r$ следует, что $E_n(f^{[r]})_{p,w} \leq C_{11} n^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому условие 1) вытекает из (6).

Установим, что 1) влечет 3). Пусть $s \in [1, r] \cap \mathbb{N}$. В силу неравенства (4) и части 2) теоремы А имеем при $l > k$:

$$\begin{aligned} \|t_{m_l}^{[s]}(f) - t_{m_k}^{[s]}(f)\|_{p,w} &\leq \sum_{i=k+1}^l \|t_{m_i}^{[s]}(f) - t_{m_{i-1}}^{[s]}(f)\|_{p,w} \leq \\ &\leq C_{12} \sum_{i=k+1}^l m_i^s E_{m_{i-1}}(f)_{p,w} \leq C_{13} \sum_{i=k+1}^l m_{i-1}^{s-r-\alpha} \leq C_{14} m_k^{s-r-\alpha}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства вытекает фундаментальность последовательности $\{t_{m_k}^{[s]}(f)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_w^p[0, 1)$ и сходимость этой последовательности к некоторой функции φ в $L_w^p[0, 1)$. Так как $t_{m_k}(f) \rightarrow f$ в $L_w^p[0, 1)$ и тем более в $L^1[0, 1)$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{t_{m_k}(f)}(n) = \widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и аналогично $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{t_{m_k}^{[s]}(f)}(n) = \widehat{\varphi}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Но $\widehat{t_{m_k}^{[s]}(f)}(n) = n^s \widehat{t_{m_k}(f)}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и поэтому $\widehat{\varphi}(n) = n^s \widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, т.е. существует $f^{[s]} = \varphi \in L_w^p[0, 1)$. Далее, если $m_k \leq n < m_{k+1}$, то

$$\|t_n^{[s]}(f) - t_{m_{k+1}}^{[s]}(f)\|_{p,w} \leq C_{15} n^s E_n(f)_{p,w} \leq C_{16} n^{s-r-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n^{[s]}(f) - f^{[s]}\|_{p,w} = 0$. Теперь, используя снова (4) и часть 2) теоремы А, имеем:

$$\|t_n^{[s]}(f) - f^{[s]}\|_{p,w} \leq \|t_n^{[s]}(f) - t_{m_{k+1}}^{[s]}(f)\|_{p,w} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \|t_{m_i}^{[s]}(f) - t_{m_{i-1}}^{[s]}(f)\|_{p,w} \leq$$



$$\leq C_{17} \left(n^s n^{-r-\alpha} + \sum_{i=k+1}^{\infty} m_{i+1}^s m_i^{-r-\alpha} \right) \leq C_{18} n^{s-r-\alpha}.$$

При $s = 0$ условие 3) сразу следует из условия 1).

Докажем, что 1) \Rightarrow 2). Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{r\gamma-1} k^{-(r+\alpha)\gamma}$ сходится при $\alpha > 0$, по теореме В выводим существование $f^{[r]}$, причем

$$E_n(f^{[r]})_{p,w} \leq C_{19} \left(n^{r-r-\alpha} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\alpha\gamma-1} \right)^{1/\gamma} \right) \leq C_{20} n^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теперь по теореме С находим, что

$$K_r(f^{[r]}, n^{-r}) \leq C_{21} n^{-r} \left(\sum_{k=1}^n (k^r k^{-\alpha})^{\gamma} k^{-1} \right)^{1/\gamma} \leq C_{22} n^{-r} n^{r-\alpha} = C_{22} n^{-\alpha}.$$

В последнем неравенстве необходимо, чтобы $(r - \alpha)\gamma - 1 > -1$, т. е. $r > \alpha$. Предыдущие утверждения верны и без этого ограничения. Обратное утверждение, 2) \Rightarrow 1), вытекает из (6) и первого неравенства теоремы С. Теорема доказана.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $f \in L_w^p[0, 1)$, $r \in \mathbb{N}$ и $Z_n^r(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - k^r/n^r) \hat{f}(k) \chi_k(x)$. Тогда $\|f - Z_n^r(f)\|_{p,w} \leq CK_r(f, n^{-r})$.

Доказательство. Известно, что при выполнении условий теоремы справедливо неравенство $\|S_n(f)\|_{p,w} \leq C_1 \|f\|_{p,w}$ (см. [3]), откуда стандартным образом выводится неравенство

$$\|f - S_n(f)\|_{p,w} \leq (C_1 + 1) E_n(f)_{p,w}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \|f - Z_n^r(f)\|_{p,w} &\leq \|f - S_n(f)\|_{p,w} + \|S_n(f) - Z_n^r(f)\|_{p,w} \leq \\ &\leq (C_1 + 1) E_n(f)_{p,w} + n^{-r} \|S_n^{[r]}(f)\|_{p,w} =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Из теоремы С вытекает оценка $I_1 \leq C_2 K_r(f, n^{-r})$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $g \in W^r L_w^p[0, 1)$ такова, что

$$K_r(f, n^{-r}) \geq \|f - g\|_{p,w} + n^{-r} \|g^{[r]}\|_{p,w} - \varepsilon.$$

Тогда в силу части 2) теоремы А и упомянутого выше результата из [3] выводим оценку

$$\begin{aligned} I_2 &= n^{-r} \|S_n^{[r]}(f)\|_{p,w} \leq n^{-r} \|S_n^{[r]}(f - g)\|_{p,w} + n^{-r} \|S_n^{[r]}(g)\|_{p,w} \leq \\ &\leq C_3 n^{-r} n^r \|f - g\|_{p,w} + n^{-r} \|S_n(g^{[r]})\|_{p,w} \leq C_4 (\|f - g\|_{p,w} + n^{-r} \|g^{[r]}\|_{p,w}) \leq C_4 (K_r(f, n^{-r}) + \varepsilon). \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $I_2 \leq C_4 K_r(f, n^{-r})$. Объединяя оценки I_1 и I_2 , доказываем неравенство теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $f \in L_w^p[0, 1)$ и $\sigma_n(f) = \sum_{k=1}^n S_k(f)/n$. Тогда

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{p,w} \leq CK_1(f, n^{-1}).$$

Следующие две теоремы являются весовыми аналогами результатов из [11]. Будем писать $\omega \in B_1$, если $\omega \in \Phi$ и справедливо неравенство $k\omega(k^{-1}) \leq C l\omega(l^{-1})$ при $k, l \in \mathbb{N}$, $k \leq l$.

Теорема 3. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $\omega \in B_1$ и $f \in H_{p,w}^\omega$ (т. е. $K_1(f, n^{-1}) = O(\omega(n^{-1}))$), $n \in \mathbb{N}$. Пусть двойная последовательность $\{a_{nk}\}_{n,k=1}^\infty$ удовлетворяет условиям

$$a_{nk} \geq 0, \quad a_{nk} = 0 \quad \text{при} \quad k > n, \quad \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1, \quad (7)$$

и

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \leq K a_{nn}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Тогда для линейных средних $T_n(f) = \sum_{k=1}^n a_{nk} S_k(f)$ верно неравенство

$$\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C n a_{nn} \omega(n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. В силу условия (7) имеем:

$$T_n(f) - f = \sum_{k=1}^n a_{nk} S_k(f) - \sum_{k=1}^n a_{nk} f = \sum_{k=1}^n a_{nk} (S_k(f) - f).$$

Применяя преобразование Абеля и следствие 1, находим, что

$$\begin{aligned} \|f - T_n(f)\|_{p,w} &= \left\| \sum_{k=1}^{n-1} (a_{nk} - a_{n,k+1}) k (\sigma_k(f) - f) + n a_{nn} (\sigma_n(f) - f) \right\|_{p,w} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| k \|\sigma_k(f) - f\|_{p,w} + n a_{nn} \|\sigma_n(f) - f\|_{p,w} \leq \\ &\leq C_1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| k \omega(k^{-1}) + n a_{nn} \omega(n^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Используя условие $\omega \in B_1$ и неравенство (8), получаем $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C_2 n a_{nn} \omega(n^{-1})$. Теорема доказана.

Следствие 2. Если выполнены все условия теоремы 3, кроме (8), и последовательность $\{a_{nk}\}_{k=1}^n$ возрастает по k при фиксированном $n \in \mathbb{N}$, то

$$\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C n a_{nn} \omega(n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следствие 3. Если выполнены все условия теоремы 3 и, кроме того, последовательность $\{n a_{nn}\}_{n=1}^\infty$ ограничена, то

$$\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C \omega(n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 3, кроме (8), которое заменено на

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \leq K a_{n,1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Тогда $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C n a_{n,1} \omega(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3 в силу неравенства (9) и условия $\omega \in B_1$ имеем:

$$\begin{aligned} \|f - T_n(f)\|_{p,w} &\leq C_1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| k \omega(k^{-1}) + n a_{nn} \omega(n^{-1}) \right) \leq \\ &\leq C_2 (n a_{n,1} \omega(n^{-1}) + n a_{n,1} \omega(n^{-1})). \end{aligned} \quad (10)$$

Но благодаря (9) справедливо также неравенство $\sum_{k=1}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) \leq K a_{n,1}$, откуда $a_{nn} \leq (K+1) a_{n,1}$. Из последнего неравенства и (10) следует неравенство теоремы. Теорема доказана.



Следствие 4. Пусть выполнены все условия теоремы 4, кроме (9), и последовательность $\{a_{nk}\}_{k=1}^n$ убывает по k для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C n a_{n1} \omega(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Следствие 5. Пусть выполнены все условия теоремы 4 и $na_{n1} = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leq C \omega(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

Библиографический список

1. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.
2. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 165. P. 207–226.
3. Young W. S. Weighted norm inequalities for Vilenkin – Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 340, № 1. P. 273–291.
4. Волосивец С. С. Приближение полиномами по мультипликативным системам в весовых пространствах L^p // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 82–93.
5. Ky N. X. On approximation by trigonometric polynomials in L^p_u -spaces // Studia Sci. Math. Hungar. 1993. Vol. 28. P. 183–188.
6. Ky N. X. Moduli of mean smoothness and approximation with A_p weights // Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1997. Vol. 40. P. 37–48.
7. Kokilashvili V., Yildirim Y. E. On the approximation in weighted Lebesgue spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2007. Vol. 143. P. 103–113.
8. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 624 с.
9. Butzer P. L., Scherer K. On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamsky and S. B. Stečkin // Aequationes Math. 1969. Vol. 3. P. 170–185.
10. Butzer P. L., Wagner H. J. On dyadic analysis based on the pointwise dyadic derivative // Analysis Math. 1975. Vol. 1, № 3. P. 171–196.
11. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Hölder and L^p norm // East J. Approximations. 2009. Vol. 15, № 3. P. 143–158.

Several Questions of Approximation by Polynomials with Respect to Multiplicative Systems in Weighted L^p Spaces

S. S. Volosivets¹, T. V. Likhacheva²

¹Volosivets Sergey Sergeevich, Saratov State University, 83, Astrahanskaya st., 410012, Saratov, Russia, VolosivetsSS@mail.ru

²Likhacheva Tatiana Vladimirovna, Neoflex Consulting Company Branch in Saratov, 66, Atkarskaya st., 410078, Saratov, Russia, iofinat@mail.ru

In this paper we study approximation by Vilenkin polynomials in weighted L^p spaces. We prove the Butzer – Scherer type result on equivalence between the rate of best approximation of a function f and the growth of generalized derivatives and approximating properties of the best approximation polynomial $t_n(f)$. Some applications to the approximation by linear means of the Fourier – Vilenkin series are given.

Key words: Vilenkin system, best approximation, generalized derivative, Zygmund – Riesz means.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00238).

References

1. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh series and transforms. Theory and applications.* Dordrecht, Kluwer, 1991.
2. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 165, pp. 207–226.
3. Young W. S. Weighted norm inequalities for Vilenkin – Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1993, vol. 340, no. 1, pp. 273–291.
4. Volosivets S. S. Approximation by polynomials with respect to multiplicative systems in weighted L^p spaces. *Siberian Math. J.*, 2015, vol. 56, no. 1, pp. 82–93.
5. Ky N. X. On approximation by trigonometric



- polynomials in L^p_u -spaces. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1993, vol. 28, pp. 183–188.
6. Ky N. X. Moduli of mean smoothness and approximation with A_p weights. *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, 1997, vol. 40, pp. 37–48.
 7. Kokilashvili V., Yildirim Y. E. On the approximation in weighted Lebesgue spaces. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 2007, vol. 143, pp. 103–113.
 8. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of a real variable*. New York, MacMillan, 1963.
 9. Butzer P. L., Scherer K. On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zemanosky and S. B. Stečkin. *Aequationes Math.*, 1969, vol. 3, pp. 170–185.
 10. Butzer P. L., Wagner H. J. On dyadic analysis based on the pointwise dyadic derivative. *Analysis Math.*, 1975, vol. 1, no. 3, pp. 171–196.
 11. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Hölder and L^p norm. *East J. Approximations*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 143–158.

УДК 514.76

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С N -СВЯЗНОСТЬЮ

С. В. Галаев

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sgalaev@mail.ru

На многообразии с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ и эндоморфизмом $N : D \rightarrow D$ вводится понятие N -связности ∇^N . Находятся условия, при которых N -связность совместима с почти контактной метрической структурой: $\nabla^N \eta = \nabla^N g = \nabla^N \vec{\xi} = 0$. Исследуются отношения между связностью Леви – Чивиты, связностью Схоутена – ван Кампена и N -связностью. С помощью N -связности находятся условия, при которых почти контактная метрическая структура является почти контактной элеровой структурой.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, N -связность, связность Схоутена – ван Кампена, тензор кривизны N -связности, почти контактные элеровы пространства.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264

ВВЕДЕНИЕ

Начало теории метрически аффинных пространств — (псевдо) римановых многообразий, наделенных линейной связностью с ненулевым кручением — было положено Э. Картаном (E. Cartan) в 1922 г. [1]. Наибольшим интересом среди метрических связностей с кручением пользуется полусимметрическая связность, систематическое исследование которой проведено К. Яно (K. Yano) в работе [2]. Четвертьсимметрическая связность определена в 1975 г. С. Голабом (S. Golab) [3]. В работе [4] определяется связность, специально приспособленная к решению задач неголономной геометрии и названная позже связностью Схоутена – ван Кампена. В. В. Вагнер [5] использует связность Схоутена – ван Кампена для построения теории кривизны неголономного многообразия коразмерности 1. Определяемая при этом связность Вагнера, как показано в настоящей работе, является связностью в векторном расслоении, естественным образом возникающем на неголономном многообразии. Мы вводим новый тип линейной связности с кручением, которая определяется на многообразии с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ и эндоморфизмом $N : D \rightarrow D$. При надлежащем выборе эндоморфизма N построенная нами связность (названная в работе N -связностью) совпадает со связностью Вагнера.

Работа построена следующим образом. В параграфе 1 содержатся основные сведения о почти контактных метрических пространствах. В параграфе 2 дается определение N -связности. Находятся условия метричности N -связности. Исследуются отношения между связностью Леви – Чивиты, связностью Схоутена – ван Кампена и N -связностью. В частности, показывается, что N -связность является более общей связностью, чем связность Схоутена – ван Кампена. Более подробные сведения о связности Схоутена – ван Кампена содержатся в работе [4]. В параграфе 3 находится выражение для тензора кривизны N -связности. В параграфе 4 N -связность рассматривается на многообразиях с почти контактной элеровой структурой и на многообразиях Кенмоцу.



1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $ГТХ$ — $C^\infty(X)$ -модуль гладких векторных полей на X . Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Почти контактной метрической структурой на X называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X , где φ — тензор типа $(1, 1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые структурным вектором и контактной формой соответственно, g — (псевдо) риманова метрика. При этом

$$\eta(\vec{\xi}) = 1, \quad \varphi(\vec{\xi}) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \\ \varphi^2 \vec{x} = -\vec{x} + \eta(\vec{x})\vec{\xi}, \quad g(\varphi \vec{x}, \varphi \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y}), \quad d\eta(\vec{\xi}, \vec{x}) = 0, \quad \vec{x}, \vec{y} \in ГТХ.$$

Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi \vec{y})$ называется фундаментальной формой структуры. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием. В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой. Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где N_φ — кручение Нейенхайса, образованное тензором φ . Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Многообразие с заданной на нем сасакиевой структурой называется сасакиевым многообразием. Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η , $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$ — его оснащение. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker \omega = \text{Span}(\vec{\xi})$, и называется вектором Рибба.

Будем называть почти контактную метрическую структуру *почти нормальной*, если выполняется условие

$$N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0. \quad (1)$$

Почти нормальное почти контактное метрическое пространство в дальнейшем назовем *почти контактным кэлеровым пространством*, если его фундаментальная форма замкнута. Почти контактное метрическое пространство назовем *почти K -контактным метрическим пространством*, если $L_{\vec{\xi}}g = 0$. В случае, когда форма имеет максимальный ранг, соответствующее пространство называют K -контактным.

Как следует из (1), почти нормальная контактная метрическая структура очевидным образом является сасакиевой структурой. Сасакиевы пространства пользуются большой популярностью у исследователей почти контактных метрических пространств по двум основным причинам. С одной стороны, существует большое количество интересных и содержательных примеров сасакиевых структур, с другой стороны — многообразия Сасаки обладают очень важными и естественными свойствами. В то же время почти контактные кэлеровы пространства наследуют ряд важных свойств сасакиевых пространств, что оказывается очень существенным в тех случаях, когда почти контактное метрическое пространство в принципе не может быть сасакиевым пространством [6]. Почти контактное метрическое пространство называется пространством Кенмоцу, если выполняются условия $d\eta = 0$, $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$. Почти контактное метрическое пространство является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда выполняется условие [7]

$$(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = -\eta(\vec{y})\varphi\vec{x} - g(\vec{x}, \varphi\vec{y})\vec{\xi}. \quad (2)$$

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c, e = 1, \dots, n-1$) многообразия X будем называть адаптированной к распределению D , если $D^\perp = \text{Span}\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ [8]. Пусть $P : TX \rightarrow D$ — вектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D : $D = \text{Span}(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^\alpha, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = M_{ab}^n \partial_n$, где компоненты M_{ab}^n образуют так называемый



тензор неголономности [5]. Если потребовать, чтобы во всех используемых адаптированных картах выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то, в частности, окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$, где $\omega = d\eta$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда при условии, что $\vec{\xi} = \partial_n$, получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{\alpha'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'})$.

Тензорное поле t типа (p, q) , заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем *допустимым* (к распределению D), если t — полилинейное отображение $t: \Gamma(D)^p \times \Gamma(D^*)^q \rightarrow F(X)$, где $F(X)$ — алгебра гладких функций на X . Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид: $t = t_b^a \vec{e}_a \otimes dx^b$. Здесь и далее мы для удобства, по возможности, ограничиваемся тензором типа $(1, 1)$.

Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа $(1, 1)$. Поле аффинора φ , учитывая его свойства, мы называем допустимой почти комплексной структурой. Форму $\omega = d\eta$, также являющуюся допустимой формой, уместно в таком случае назвать допустимой симплектической формой.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t_b^a = A_a^a A_b^{b'} t_{b'}^{a'}$$

где $A_a^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}$.

Замечание 1. Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t_b^a$ являются вновь компонентами допустимого тензорного поля. Кроме того, обращение в нуль производных $\partial_n t_b^a$ не зависит от выбора адаптированных координат. Последнее обстоятельство подкрепляется тем фактом, что $(L_{\vec{\xi}} t)_b^a = \partial_n t_b^a$.

Замечание 2. Допустимую тензорную структуру, для которой выполняется равенство $\partial_n t_b^a = 0$, будем называть проектируемой (в литературе можно встретить и другие термины структур с подобным свойством: «базисные», «полубазисные» и т. д.). Как будет следовать из дальнейшего, допустимые проектируемые структуры естественным образом могут рассматриваться как структуры, заданные на многообразии меньшей размерности.

Введем в рассмотрение допустимые тензорные поля $h\vec{x}$, $C(\vec{x}, \vec{y})$, $C\vec{x}$, $\psi\vec{x}$, $L\vec{x}$, полагая, что $h\vec{x} = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}\varphi)(\vec{x})$, $C(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}g)(\vec{x}, \vec{y})$, $g(C\vec{x}, \vec{y}) = C(\vec{x}, \vec{y})$, $g(\vec{x}, \psi\vec{y}) = \omega(\vec{x}, \vec{y})$, $L\vec{x} = C\vec{x} - \psi\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma TX$. В случае контактного метрического пространства эндоморфизм ψ совпадает с эндоморфизмом φ .

В адаптированных координатах получаем: $h_b^a = \frac{1}{2}\partial_n \varphi_b^a$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C_b^a = g^{da} C_{db}$, $\psi_a^c = g^{bc} \omega_{ab}$. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивиты тензора g : $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. Коэффициенты связности Леви-Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}, \quad \tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b - \psi_a^b = L_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{nn}^\alpha = 0,$$

где $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Пусть X — многообразие с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ и $N: D \rightarrow D$ — эндоморфизм распределения почти контактной структуры. Бежанку (А. Вежансу) [9] определяет связность ∇^B на многообразии Сасаки с помощью формулы

$$\nabla_{\vec{x}}^B \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} - \eta(\vec{x}) \tilde{\nabla}_{\vec{y}} \vec{\xi} - \eta(\vec{y}) \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\xi}.$$



В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma^{B\alpha}_{\beta\gamma}$ связности ∇^B являются $\Gamma^{B^a}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. Построенная Бежанку связность является метрической в случае, когда почти контактная метрическая структура является K -контактной. Действительно, так как $\nabla_n^B g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна обращению в нуль производной $\partial_n g_{ab}$. Определим на многообразии с почти контактной метрической структурой связность ∇^N с помощью равенства $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} = \nabla_{\vec{x}}^B \vec{y} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$. Назовем введенную связность N -связностью. Отличными от нуля компонентами N -связности — самое большее — будут $\Gamma^{N^a}_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\Gamma^{N^a}_{nc} = N^a_c$. Кручение N -связности определяется равенством $S^N(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$. Имеет место

Теорема 2. Пусть N — симметрический оператор. N -связность является метрической связностью тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$g(N\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}(\vec{x}, \vec{y}). \quad (3)$$

Равенство $\nabla^N g = 0$ в координатах переписывается в виде

$$\nabla_c^N g_{ab} = \check{\nabla}_c^N g_{ab} = \vec{e}_c g_{ab} - \Gamma_{ca}^d g_{db} - \Gamma_{cb}^d g_{ad} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla_n^N g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N^c_a g_{cb} - N^c_b g_{ac} = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Равенство (4) выполняется всегда в силу метричности связности $\check{\nabla}$, а равенство (5) (при условии, что N -симметрический оператор) эквивалентно равенству (3). \square

Связность Схоутена – ван Кампена ∇^S определяется с помощью следующего равенства [6]:

$$\nabla_{\vec{x}}^S \vec{y} = (\check{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y}^h)^h + (\check{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y}^v)^v,$$

где $\vec{y}^h = P\vec{y}$, $\vec{y}^v = Q\vec{y}$, P, Q — проекторы на распределения D и D^\perp соответственно.

Вычисляя компоненты связности Схоутена – ван Кампена, непосредственно убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. N -связность совпадает со связностью Схоутена – ван Кампена тогда и только тогда, когда $N = C - \psi = L$.

В качестве следствия теорем 3 получаем следующую теорему.

Теорема 4. N -связность является адаптированной связностью к почти контактной метрической структуре: $\nabla^N \eta = \nabla^N g = \nabla^N \vec{\xi} = 0$ тогда и только тогда, когда N — симметрический оператор такой, что $g(N\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g(\vec{X}, \vec{Y})$.

3. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ N -СВЯЗНОСТИ

Внутренняя связность [5, 8] определяет параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. Тензор кривизны внутренней связности, названный Вагнером [5] тензором Схоутена, является допустимым тензором и определяется равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}], \quad \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma D.$$

Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|}\Gamma^e_{b]c}$. В случае, когда распределение D не содержит интегрируемого распределения размерности $n - 2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [5]. Назовем тензор Схоутена *тензором кривизны распределения D* , а распределение D , в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — *распределением нулевой кривизны*. Внутренняя линейная связность может быть определена [10] заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает распределение D . Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \rightarrow X$ — естественная проекция, разбивается в прямую сумму



вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D . Задание эндоморфизма $N : D \rightarrow D$ позволяет определить N -продолженную связность — связность в векторном расслоении с тотальным пространством D , осуществляющую параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых многообразия X .

В подходящем образом выбранной системе координат [10] векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$ определяют на D неголономное поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b + N_b^a x^{n+b} dx^n)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \vec{u} + x^{n+d} (2\omega_{ba} N_d^c + R_{bad}^c) \partial_{n+c}, \tag{6}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d} (\partial_n \Gamma_{ad}^c - \nabla_a N_d^c) \partial_{n+c}, \tag{7}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}. \tag{8}$$

Из (6)–(8) получаем выражение для тензора кривизны N -продолженной связности:

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} + 2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z}, \tag{9}$$

$$K(\vec{\xi}, \vec{x})\vec{y} = P(\vec{x}, \vec{y}) - (\nabla_{\vec{x}} N)\vec{y}, \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma D. \tag{10}$$

Здесь $P_{bc}^a = \partial_n \Gamma_{bc}^a$ — компоненты допустимого тензора типа $(2, 1)$.

Замечание 3. Для (почти) K -контактных пространств тензор кривизны Схоутена наделен теми же свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае это не так.

Теорема 5. Значения тензора кривизны $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma TX$ N -связности однозначно определяются равенствами (9), (10).

Доказательство теоремы 5 сводится к непосредственному вычислению компонент тензора кривизны N -связности.

4. N -СВЯЗНОСТЬ НА МНОГООБРАЗИИ С ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ КЭЛЕРОВОЙ СТРУКТУРОЙ И СТРУКТУРОЙ КЕНМОЦУ

Пусть X — многообразии с почти контактной кэлеровой структурой [9]. Имеет место (см. [6]):

Теорема 6. Почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда выполняются равенства $L_{\vec{\xi}}g = 0, \nabla^1\varphi = 0$, где ∇^1 — N -продолженная связность с нулевым эндоморфизмом.

Следующая теорема является следствием теоремы 6.

Теорема 7. Почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда $L_{\vec{\xi}}g = 0$ и эндоморфизм N коммутирует с эндоморфизмом φ .

Доказательство. Имеет место равенство:

$$\nabla_n^N \varphi_b^a = \nabla_n^1 \varphi_b^a + N_c^a \varphi_b^c - N_b^c \varphi_c^a.$$

Таким образом, как следует из теоремы 6, почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда $N_c^a \varphi_b^c - N_b^c \varphi_c^a = 0$, что и доказывает теорему. \square

Пусть теперь X — многообразие Кенмоцу. Равенство (2) влечет следующее равенство [7]:

$$L_{\vec{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta).$$

Отсюда следует, что $L_{\vec{\xi}}g(\vec{x}, \vec{y}) = 2g(\vec{x}, \vec{y}), \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma D$. Сравнивая последнее равенство с равенством (3), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.



Теорема 8. Если ∇_n^N — метрическая N -связность многообразия Кенмотсу, то $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(N\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma D$.

Другими словами, для метрической N -связности многообразия Кенмотсу эндоморфизм N совпадает с тождественным оператором.

Библиографический список

1. Cartan E. Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relative generalines. Pt. I // *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 1923. Vol. 40. P. 325–412.
2. Yano K. On semi-symmetric metric connections // *Revue Roumaine de Math. Pures et Appliques.* 1970. Vol. 15. P. 1579–1586.
3. Golab S. On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // *Tensor, N. S.* 1975. Vol. 29. P. 249–254.
4. Schouten J., van Kampen E. Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // *Math. Ann.* 1930. Vol. 103. P. 752–783.
5. Вагнер В. В. Геометрия $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.
6. Галаев С. В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // *Изв. вузов. Матем.* 2014. № 8. С. 42–52.
7. Pitis G. *Geometry of Kenmotsu manifolds.* Brasov : Publishing House of Transilvania University of Brasov, 2007. iv+160 p.
8. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
9. Bejancu A. Kahler contact distributions // *J. Geom. Phys.* 2010. Vol. 60, № 12. P. 1958–1967.
10. Букушева А. В., Галаев С. В. Связности над рас-пределением и геодезические пульверизации // *Изв. вузов. Матем.* 2013. № 4. С. 1–9.

Almost Contact Metric Spaces with N -connection

S. V. Galaev

Galaev Sergei Vasil'evich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, sgalaev@mail.ru

On a manifold with an almost contact metric structure $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ and an endomorphism $N : D \rightarrow D$, a notion of the N -connection is introduced. The conditions under which an N -connection is compatible with an almost contact metric structure $\nabla^N \eta = \nabla^N g = \nabla^N \vec{\xi} = 0$ are found. The relations between the Levi – Civita connection, the Schouten – van-Kampen connection and the N -connection are investigated. Using the N -connection the conditions under which an almost contact metric structure is an almost contact Kahlerian structure are investigated.

Key words: almost contact metric structure, N -connection, Schouten – van-Kampen connection, curvature tensor of N -connection, almost contact Kahlerian spaces.

References

1. Cartan E. Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relative generalines. Pt. I. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 1923, vol. 40, pp. 325–412.
2. Yano K. On semi-symmetric metric connections. *Revue Roumaine de Math. Pures et Appliques*, 1970, vol. 15, pp. 1579–1586.
3. Golab S. On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections. *Tensor, N. S.*, 1975, vol. 29, pp. 249–254.
4. Schouten J., van Kampen E. Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. *Math. Ann.*, 1930, vol. 103, pp. 752–783.
5. Vagner V. V. The geometry of an $(n - 1)$ -dimensional nonholonomic manifold in an n -dimensional space. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza*, Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 173–255 (in Russian).
6. Galaev S. V. Almost contact Kähler manifolds of constant holomorphic sectional curvature. *Russian Math.*, 2014, vol. 58, iss. 8, pp 35–42. DOI: 10.3103/S1066369X14080040.
7. Pitis G. *Geometry of Kenmotsu manifolds.* Brasov, Publishing House of Transilvania University of Brasov, 2007, iv+160 p.
8. Galaev S. V. The intrinsic geometry of almost contact metric manifolds. *Izv. Saratov Univ.*



- (N. S.), *Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 16–22 (in Russian).
9. Bejancu A. Kahler contact distributions. *J. Geom. Phys.*, 2010, vol. 60, no. 12, pp. 1958–1967.
10. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Connections over a distribution and geodesic sprays. *Russian Math.*, 2013, vol. 57, no. 4, pp. 7–13. DOI: 10.3103/S1066369X13040026.

УДК 517.958

УСРЕДНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АКУСТИКИ

А. А. Герус¹, С. А. Гриценко²

¹Герус Артур Андреевич, аспирант кафедры математики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, artur-gerus@bsu.edu.ru

²Гриценко Светлана Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и математической физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, sgritsenko@bsu.edu.ru

В работе исследуется математическая модель акустики в гетерогенной среде с двумя компонентами, разделенными общей границей. Одна из компонент является ограниченной жидкой областью, другая — упругим телом. Упругое тело пронизано системой пор, заполненных жидкостью. Дифференциальные уравнения модели, описывающие движение жидкости и совместное движение твердого скелета и жидкости в порах, базируются на классических законах механики сплошной среды и содержат быстро осциллирующие коэффициенты, зависящие от малого параметра, равного отношению среднего размера пор к размеру рассматриваемой области. Быстро осциллирующие коэффициенты делают невозможным применение модели для численных расчетов. В работе доказывается существование обобщенного решения начально-краевой задачи. На основе метода двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсена выводятся усредненные уравнения (т. е. уравнения, не содержащие быстро осциллирующих коэффициентов) для различных случаев. Полученные приближенные модели могут быть полезны для численных расчетов.

Ключевые слова: композитные среды, периодическая структура, уравнения Стокса, уравнения Ламе, уравнения акустики, пороупругость, усреднение периодических структур, двухмасштабная сходимость.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-264-272

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваемая ограниченная область $Q \in R^3$ представляет собой единичный куб: $Q = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$, в котором пороупругая среда занимает область $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, a)$, $0 < a < 1$, а область $\Omega^{(f)}$, занятая жидкостью, есть открытое дополнение области Ω :

$$Q = \Omega \cup \Omega^{(f)} \cup S^{(0)}, \quad S^{(0)} = \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(f)}.$$

Движение жидкости в пороупругой области Ω описывается системой уравнений:

$$\left(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1 - \chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2} \right) p + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (1)$$

$$(\rho_f \chi^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) \rho_s) \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \rho^\varepsilon \mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I}, \quad (3)$$

где $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$ — характеристическая функция порового пространства $\Omega_f^\varepsilon \in \Omega$, \bar{c}_s и \bar{c}_f — скорость звука в твердой и жидкой части соответственно, ρ — плотность среды, \mathbf{F} — заданный вектор распределенных массовых сил, l — средний размер пор, L — характерный размер рассматриваемой области, малый параметр $\varepsilon = l/L$. Здесь и далее в работе используются обозначения

$$B : C = \text{tr}(BC^T),$$



где B, C — тензоры второго ранга, $\mathbb{D}(x, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*)$ — симметрическая часть $\nabla \mathbf{u}$, \mathbb{I} — единичный тензор.

Движение жидкости в области $\Omega^{(f)}$ при $t > 0$ описывается системой уравнений Стокса:

$$\frac{1}{\bar{c}_f^2} p + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \tag{4}$$

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}^{(f)} + \varrho_f \mathbf{F}, \tag{5}$$

$$\mathbb{P}^{(f)} = \bar{\alpha}_\mu \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) - p \mathbb{I}. \tag{6}$$

На общей границе $S^{(0)}$ выполняются условия непрерывности для перемещений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^{(s)}}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \tag{7}$$

и для нормальных компонент моментов

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^{(f)}}} \mathbb{P}^{(f)}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbb{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0). \tag{8}$$

Завершают задачу однородные граничные условия:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in S_T = S \times (0, T), \tag{9}$$

на границе $S = \partial Q$, и однородные начальные условия:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q. \tag{10}$$

Пусть

$$\int_{Q_T} \left(|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 \right) dx dt = F^2 < \infty$$

и выполнены предположения о периодичности порового пространства и твердого скелета, а также о существовании пределов при $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициентов $\alpha_\mu, \alpha_\lambda, \dots$, описанные в работе [1].

При выполнении упомянутых предположений о периодичности

$$\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x}) \chi \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right),$$

где $\zeta(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω .

Обозначим

$$\varrho_{(f)}^\varepsilon = (1 - \zeta) \varrho_f + \zeta (\varrho_f \chi^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) \varrho_s).$$

Определение. Пара функций $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ таких, что

$$\mathbf{w}^\varepsilon \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,1}(Q_T), p^\varepsilon \in L_2(Q_T),$$

называется *обобщенным решением* задачи (1)–(10), если эти функции удовлетворяют уравнению неразрывности:

$$\left((1 - \zeta) \frac{1}{\bar{c}_f^2} + \zeta \left(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1 - \chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2} \right) \right) p^\varepsilon + \nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0 \tag{11}$$

почти всюду в Q_T , и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \varrho_{(f)}^\varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{F} \cdot \varphi \right) dx dt = \int_{Q_T} \left(\zeta \mathbb{P} + (1 - \zeta) \mathbb{P}^{(f)} \right) : \mathbb{D}(x, \varphi) dx dt \tag{12}$$

для всех функций φ таких, что $\varphi \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}(Q_T)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$ и $\varphi(\mathbf{x}, T) = 0$ для $\mathbf{x} \in Q$.

Теорема 1. Для всех $\varepsilon > 0$ на произвольном интервале времени $[0, T]$ существует единственное обобщенное решение $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ задачи (1)–(10) и для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \max_{0 < t < T} \int_{\Omega} \left(|p^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon)|^2 \right) dx + \\ & + \max_{0 < t < T} \int_{\Omega(f)} \left(|p^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 \right) dx + \int_0^T \int_{\Omega(f)} \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 dx dt + \\ & + \max_{0 < t < T} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 \right) dx + \\ & + \max_{0 < t < T} \int_{\Omega(f)} \left(\left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right|^2 \right) dx + \int_0^T \int_{\Omega(f)} \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \right|^2 dx dt + \\ & + \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \left(\left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 + \left| \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \right|^2 \right) dx dt \leq C_0 F^2, \end{aligned} \tag{13}$$

где постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε и коэффициентов $\bar{\alpha}_\lambda, \bar{\alpha}_\lambda^{(0)}, \bar{\alpha}_\mu$.

Доказательство. Априорная оценка теоремы следует из энергетических тождеств:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho^\varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) + \frac{1}{\bar{\alpha}_p^\varepsilon} |p^\varepsilon|^2 \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(s)} \left(\varrho_s \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda^{(0)} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) + \frac{1}{(\bar{c}_s^{(0)})^2} |p^\varepsilon|^2 \right) dx + \\ & + \int_{\Omega} \chi^\varepsilon \left(\bar{\alpha}_\mu \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) : \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) dx = \int_Q \tilde{\varrho}^\varepsilon \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} dx, \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\varrho^\varepsilon \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) : \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) + \frac{1}{\bar{\alpha}_p^\varepsilon} \left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(s)} \left(\varrho_s \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right|^2 + (1 - \chi^\varepsilon) \bar{\alpha}_\lambda^{(0)} \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) : \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) + \frac{1}{(\bar{c}_s^{(0)})^2} \left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \right) dx + \\ & + \int_{\Omega} \chi^\varepsilon \left(\bar{\alpha}_\mu \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right) : \mathbb{D} \left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \right) dx = \int_Q \tilde{\varrho}^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} dx. \end{aligned}$$

Эти тождества получаются подстановкой в уравнение (2) явного выражения для тензора \mathbb{P} из уравнения состояния (3), умножением (2) на $\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$ и интегрированием по частям по области Q . Далее существование и единственность обобщенного решения доказывается методом Галеркина. \square

2. УСРЕДНЕННЫЕ МОДЕЛИ

При выводе усредненных уравнений используются результаты А. М. Мейрманова [2–4] и применяется метод двухмасштабной сходимости Г. Нгуэсенга (G. Nguetseng) [5]. Главная проблема в доказательстве усредненных уравнений состоит в условиях непрерывности на общей границе $S^{(0)}$ между областями $\Omega^{(f)}$ и Ω . Эти условия следуют из предельного интегрального тождества:

$$- \int_{Q_T} p(\nabla \cdot \varphi) dx dt = \int_{Q_T} \int_Y \varrho_{(f)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \right) \cdot \varphi(\mathbf{x}, t) dy dx dt \tag{14}$$

для любой гладкой функции $\varphi \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ и интегрального тождества:

$$\int_{Q_T} \left(\left((1 - \zeta) \frac{1}{\bar{c}_f^2} + \zeta \left(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{1 - m}{\bar{c}_s^2} \right) \right) \frac{\partial p}{\partial t} \psi - \nabla \psi \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) dx dt = 0 \tag{15}$$



для любой гладкой функции $\psi \in W_2^{1,0}(Q_T)$. Здесь $\overline{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ — двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, Y — ячейка периодичности (см. [5]) и

$$\varrho_{(f)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1 - \zeta(\mathbf{x})) \varrho_f + \zeta(\mathbf{x}) (\varrho_f \chi(\mathbf{y}) + (1 - \chi(\mathbf{y})) \varrho_s).$$

Для всех случаев (14) и (15) влекут систему уравнений акустики (17) и (18) в области $\Omega_T^{(f)}$, условия непрерывности (23) и (24) на общей границе $S^{(0)}$, и уравнение неразрывности

$$\left(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-m}{\bar{c}_s^2} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

в области Ω_T .

Все различия сконцентрированы в уравнении динамики в области Ω_T и в представлении скорости смеси $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$.

Теорема 2. Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ — обобщенное решение задачи (1)–(10) и

$$\mu_1 = \lambda_1 = \infty.$$

Тогда пределы $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ (скорость жидкости) и p (давление) последовательностей $\left\{ \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ удовлетворяют системе уравнений акустики:

$$\varrho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \varrho_f \mathbf{F}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\bar{c}_f^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (18)$$

в области $\Omega^{(f)}$ при $t > 0$, и системе уравнений акустики в области Ω при $t > 0$:

$$\hat{\varrho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \hat{\varrho} \mathbf{F}, \quad (19)$$

$$\left(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-m}{\bar{c}_s^2} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (20)$$

где

$$m = \int_Y \chi(y) dy.$$

Соотношения (17)–(20) замыкаются однородным граничным условием:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad (21)$$

на границе S_T , однородными начальными условиями:

$$p(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q, \quad (22)$$

и условиями непрерывности:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^{(f)}}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^0), \quad (23)$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega^{(f)}}} p(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \Omega}} p(\mathbf{x}, t) \quad (24)$$

на общей границе $S_T^{(0)}$. Здесь $\hat{\varrho} = m \varrho_f + (1 - m) \varrho_s$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ есть нормальный вектор к S в точке $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ — нормальный вектор к $S^{(0)}$ в точке $\mathbf{x}^0 \in S^{(0)}$.

Доказательство. Для этого случая $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ и интегральное тождество (14) влечет уравнение динамики:

$$\hat{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = -\nabla p + \hat{\rho} \mathbf{F} \quad (25)$$

в области Ω_T . □

Теорема 3. Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ — обобщенное решение задачи (1)–(10) и

$$0 \leq \mu_1, \quad \lambda_1 < \infty.$$

Тогда пределы $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ (скорость жидкости) и p (давление) последовательностей $\left\{ \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right\}$ и $\{p^\varepsilon\}$ удовлетворяют в области $\Omega_T^{(f)}$ системе уравнений акустики (17), (18) и системе уравнений акустики в области Ω_T , состоящей из уравнения баланса моментов в форме

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t - \tau) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (26)$$

и уравнения неразрывности (20).

Дифференциальные уравнения замыкаются граничным и начальным условиями (21), (22) и условиями непрерывности (23), (24).

Матрица $\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t)$ и функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ задаются формулами (33), (34).

Доказательство. Уравнение неразрывности в этом случае имеет вид

$$\left(\frac{1}{\bar{c}_f^2} + \frac{1}{\bar{c}_s^2} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0.$$

Используя вложение $\nabla p \in \mathbf{L}_2(\Omega_T \times Y)$, т.е. $\nabla p \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$, $\nabla \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$, выводим микроскопическое уравнение баланса моментов:

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\mu_1 \chi(\mathbf{y}) \mathbb{D} \left(\mathbf{y}, \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \right) + \lambda_1 (1 - \chi(\mathbf{y})) \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{W}) - \Pi \Pi \right) - \\ - \nabla p + \varrho(\mathbf{y}) \mathbf{F}, \quad \mathbf{y} \in Y, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\varrho(\mathbf{y}) = \varrho_f \chi(\mathbf{y}) + \varrho_s (1 - \chi(\mathbf{y})),$$

и микроскопическое уравнение неразрывности:

$$\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{W} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y. \quad (28)$$

Эти уравнения замыкаются однородными начальными условиями:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y.$$

Мы рассматриваем периодическое решение задачи как сумму

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{y}, t - \tau) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \mathbf{W}_F^{(i)}(\mathbf{y}, t - \tau) F_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \\ \Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \Pi^{(i)}(\mathbf{y}, t - \tau) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \Pi_F^{(i)}(\mathbf{y}, t - \tau) F_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = (F_1(\mathbf{x}, t), F_2(\mathbf{x}, t), F_3(\mathbf{x}, t))$.



В свою очередь, пары $\{\mathbf{W}^{(i)}, \Pi^{(i)}\}$, и $\{\mathbf{W}_F^{(i)}, \Pi_F^{(i)}\}$ для $i = 1, 2, 3$ есть решения периодических начально-краевых задач в области Y для $t > 0$:

$$\varrho(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t^2} = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\mu_1 \chi(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t} \right) + \lambda_1 (1 - \chi(\mathbf{y})) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{W}^{(i)} - \Pi^{(i)} \mathbb{I} \right), \quad \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{W}^{(i)} = 0, \quad (29)$$

$$\mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{y}, 0) = 0, \quad \varrho(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y}, 0) = -\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y, \quad (30)$$

и

$$\varrho(\mathbf{y}) \frac{\partial^2 \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t^2} = \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \left(\mu_1 \chi(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t} \right) + \lambda_1 (1 - \chi(\mathbf{y})) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{W}_F^{(i)} - \Pi_F^{(i)} \mathbb{I} \right), \quad \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{W}_F^{(i)} = 0, \quad (31)$$

$$\mathbf{W}_F^{(i)}(\mathbf{y}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y \quad (32)$$

соответственно.

Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t - \tau) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t - \tau) F_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} &= \sum_{i=1}^3 \int_0^t \left\langle \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t} \right\rangle_Y (t - \tau) \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \left\langle \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t} \right\rangle_Y (\mathbf{y}, t - \tau) F_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t - \tau) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

где

$$\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t) = \sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t} \right\rangle_Y (t) \otimes \mathbf{e}_i, \quad (33)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \left\langle \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t} \right\rangle_Y (\mathbf{y}, t - \tau) F_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (34)$$

Полученные соотношения дают следующее представление для скорости смеси:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t - \tau) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad \square \quad (35)$$

Обозначение: матрица $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ определяется как

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

для любых векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , и \mathbf{c}

Теорема 4. Пусть $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ — обобщенное решение задачи (1)–(10),

$$\mu_1 = \infty, \quad 0 \leq \lambda_1 < \infty,$$

и $\mathbf{w}_f^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon)$ — продолжение из Ω_f^ε в Ω .

Тогда пределы $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ (скорость жидкости) и p (давление) последовательностей $\left\{ \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right\}$ и $\{p^\varepsilon\}$, где

$$\mathbf{v} = (1 - \zeta)\mathbf{v} + \zeta m \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + \zeta \frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t} = (1 - \zeta)\mathbf{v} + \zeta m \mathbf{v}_f + \zeta \mathbf{v}^{(s)}, \quad (36)$$

и $\mathbf{w}^{(s)}$ и \mathbf{w}_f — пределы последовательностей $\{(1 - \chi^\varepsilon)\mathbf{w}^\varepsilon\}$ и $\{\mathbf{w}_f^\varepsilon\}$, удовлетворяют в области $\Omega_T^{(f)}$ системе уравнений акустики (17), (18) и системе уравнений акустики в области Ω_T , состоящей из уравнения баланса моментов:

$$m \varrho_f \mathbf{v}_f + \varrho_s \mathbf{v}^{(s)} + \int_0^t (-\hat{\rho} \mathbf{F} + \nabla p)(\mathbf{x}, \tau) d\tau = 0 \quad (37)$$

для жидкой компоненты, уравнения баланса моментов

$$\mathbf{v}^{(s)} - (1 - m)\mathbf{v}_f = - \int_0^t \mathbb{B}^{(s)}(\infty, \lambda_1; t - \tau) \cdot \left(\nabla p + \varrho_s \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial \tau} - \mathbf{F} \right) \right) (\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (38)$$

для твердой компоненты, и уравнения неразрывности

$$\left(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{(1 - m)}{\bar{c}_s^2} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (m \mathbf{v}_f + \mathbf{v}^{(s)}) = 0. \quad (39)$$

Задача замыкается граничным и начальными условиями (21), (22) и условиями непрерывности (23), (24).

В уравнениях (37), (38) $\hat{\rho} = m \varrho_f + (1 - m) \varrho_s$ и матрица $\mathbb{B}^{(s)}(\infty, \lambda_1; t)$ задается формулой (48).

В теореме используется обозначение

$$\mathbf{w}_f^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon),$$

где $\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon} : \mathbf{W}_2^1(\Omega_f^\varepsilon) \rightarrow \mathbf{W}_2^1(\Omega)$ — оператор продолжения из Ω_f^ε в Ω , такой, что $\mathbf{w}_f^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon$ в $\Omega_f^\varepsilon \times (0, T)$, и

$$\int_{\Omega} |\mathbf{w}_f^\varepsilon|^2 dx \leq C_0 \int_{\Omega_f^\varepsilon} |\mathbf{w}^\varepsilon|^2 dx, \quad \int_{\Omega} |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}_f^\varepsilon)|^2 dx \leq C_0 \int_{Q_f^\varepsilon} |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon)|^2 dx.$$

Корректность такого продолжения обоснована в работе С. Сонса [6].

Доказательство. Для этого случая скорость смеси задана формулой

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) &= \chi(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (1 - \chi(\mathbf{y})) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} &= m \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}, \quad \mathbf{w}^{(s)}(\mathbf{x}, t) = \int_Y (1 - \chi(\mathbf{y})) \mathbf{W}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Интегральное тождество (14) влечет уравнение динамики (37) для жидкой компоненты.

Получим представление (38).

Если $\mathbf{W}^{(s)} = (1 - \chi(\mathbf{y})) \mathbf{W}$, то пара $\{\mathbf{W}^{(s)}, \Pi^{(s)}\}$ удовлетворяет микроскопическому уравнению динамики для твердой компоненты:

$$\varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t^2} = \frac{\lambda_1}{2} \Delta_y \mathbf{W}^{(s)} - \nabla_y \Pi^{(s)} - \nabla p, \quad (40)$$

микроскопическому уравнению неразрывности:

$$\nabla \cdot \mathbf{W}^{(s)} = 0$$

в области Y_s , и начальным условиям

$$\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{x}, 0, \mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_s. \quad (41)$$

В силу теоремы Нгуетсенга $\mathbf{W}^{(s)}, \partial^2 \mathbf{W}^{(s)} / \partial t^2, \nabla_y \mathbf{W}^{(s)} \in L_2(Q_T \times Y_s)$. Эти условия вместе с формулой (30) обеспечивают граничное условие:

$$\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \mathbf{w}_f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{y}, t) \in S^{(0)} \times (0, T). \quad (42)$$



Решения $\{\mathbf{W}^{(s)}, \Pi^{(s)}\}$ периодических начально-краевых задач (40)–(42) имеют вид

$$\mathbf{W}^{(s)} = \mathbf{w}_f(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^3 \int_0^t \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y}, t - \tau) \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}(\mathbf{x}, \tau) \right) d\tau,$$

$$\Pi^{(s)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3 \int_0^t \Pi_i^{(s)}(\mathbf{y}, t - \tau) \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}(\mathbf{x}, \tau) \right) d\tau,$$

где $\{\mathbf{W}_i^{(s)}, \Pi_i^{(s)}\}$, $i = 1, 2, 3$, в свою очередь, являются решениями периодических начально-краевых задач:

$$\varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t^2} = \frac{\lambda_1}{2} \Delta_y \mathbf{W}_i^{(s)} - \nabla_y \Pi_i^{(s)}, \quad (\mathbf{y}, t) \in Y_s \times (0, T), \quad (43)$$

$$\nabla_y \cdot \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y}, t) = 0, \quad (\mathbf{y}, t) \in Y_s \times (0, T), \quad (44)$$

$$\mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y}, 0) = 0, \quad \varrho_s \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y_s, \quad (45)$$

$$\mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y}, t) = 0, \quad (\mathbf{y}, t) \in S^{(0)} \times (0, T). \quad (46)$$

Однозначная разрешимость задач (43)–(46) следует из энергетического тождества:

$$\int_{Y_s} \left(\varrho_s \left| \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) \right|^2 + \frac{\lambda_1}{2} |\nabla \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y}, t)|^2 \right) dy = \frac{(1-m)}{\varrho_s}.$$

Задача (43)–(46) для соленоидальных функций $\mathbf{W}_i^{(s)}$, равных нулю на $S^{(0)}$ и при $t = 0$, понимается как интегральное тождество:

$$\int_0^T \int_{Y_s} \left(\varrho_s \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda_1 \nabla \mathbf{W}_i^{(s)} : \nabla \varphi \right) dy dt = \int_{Y_s} \mathbf{e}_i \cdot \varphi(\mathbf{y}, 0) dy$$

для любой соленоидальной 1-периодической гладкой функции φ , равной нулю на $S^{(0)}$ и при $t = T$. По определению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) &= \int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dy = \\ &= (1-m) \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - \int_0^t \left(\sum_{i=1}^3 \left(\int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t - \tau) dy \right) \otimes \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\nabla p(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau) \right) d\tau = \\ &= (1-m) \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - \int_0^t \mathbb{B}^{(s)}(\infty, \lambda_1; t - \tau) \cdot \left(\nabla p(\mathbf{x}, \tau) + \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\mathbb{B}^{(s)}(\infty, \lambda_1; t) = \sum_{i=1}^3 \left(\int_{Y_s} \frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t) dy \right) \otimes \mathbf{e}_i. \quad \square \quad (48)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-17-00556 «Математическое моделирование флюидопотоков в нефтяных резервуарах с учетом разномасштабных свойств пласта-коллектора»).



Библиографический список

1. Герус А. А., Грищенко С. А. Модель акустики в конфигурации упругое тело – пороупругая среда // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2014. № 25 (196), вып. 37. С. 68–75.
2. Мейрманов А. М. Метод двухмасштабной сходимости Нгуэтсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 645–667.
3. Мейрманов А. М. Уравнения акустики в упругих пористых средах // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. Т. XIII, № 2. С. 98–110.
4. Мейрманов А. М. Вывод уравнений неизотермической акустики в упругих пористых средах // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 156–174.
5. Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P. Two-scale convergence // Intern. J. Pure and Appl. Math. 2002. Vol. 2, № 1. P. 35–86.
6. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // Math. Pures et Appl. 1985. Vol. 64. P. 31–75.

Homogenization of the Acoustics Mathematical Model

A. A. Gerus, S. A. Gritsenko

¹Gerus Artur Andreevich, Belgorod State National Research University, 85, Pobedy st., 308015, Belgorod, Russia, artur-gerus@bsu.edu.ru

²Gritsenko Svetlana Aleksandrovna, Belgorod State National Research University, 85, Pobedy st., 308015, Belgorod, Russia, sgritsenko@bsu.edu.ru

We consider a mathematical model of acoustics in heterogeneous medium with two different components with the common boundary. One of these is a bounded liquid domain and the other is a poroelastic medium. Poroelastic medium is perforated by pores. A pore space is filled with a viscous liquid. The motion of the liquid and the joint motion of the poroelastic media with porous space are governed by the differential equations based on the continuum mechanics laws. These equations contain rapidly oscillating terms, depending on the small parameter. The small parameter is the ratio of the average pores size to the size of domain under consideration. Rapidly oscillating terms prevent from the numerical simulations. The unique existence of the generalized solution of the boundary-value problem is proved. Homogenized equations (i.e. free from rapidly oscillating terms) are based upon the Nguetseng method of the two-scale convergence. We derived approximate models useful to the numerical calculations.

Key words: composite medium, periodic structure, Stokes equations, Lamé's equations, acoustics equations, poroelastic, homogenization of periodic structures, two-scale convergence.

This work was supported by the Russian Scientific Fond (projects no. 14-17-00556).

References

1. Gerus A. A., Gritsenko S. A. Acoustics Model in the Configuration Elastic Body — elastic porous medium. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics and Physics*, 2014, no. 25 (196), iss. 37, pp. 68–75.
2. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media. *Siberian Mathematical Journal*, 2007, vol. 48, pp. 519–538. DOI: 10.1007/s11202-007-0054-9.
3. Meirmanov A. Acoustics Equations in Elastic Porous Media. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2010, vol. XIII, iss. 2, pp. 98–110 (in Russian).
4. Meirmanov A. Derivation of the equations of nonisothermal acoustics in elastic porous media. *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, iss. 1, pp. 128–143. DOI: 10.1007/s11202-010-0014-7.
5. Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P. Two-scale convergence. *Intern. J. Pure and Appl. Math.*, 2002, vol. 2, no. 1, pp. 35–86.
6. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics. *Math. Pures et Appl.*, 1985, vol. 64, pp. 31–75.



УДК 519.853

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ФУНКЦИОНАЛУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ШАРОМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

С. И. Дудов¹, М. А. Осипцев²

¹Дудов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, DudovSI@info.sgu.ru

²Осипцев Михаил Анатольевич, старший преподаватель кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Osipcevm@gmail.com

Рассматривается конечномерная задача о равномерной оценке (наилучшем приближении) в метрике Хаусдорфа выпуклого тела шаром произвольной нормы с фиксированным радиусом. Известно, что в случае, когда оцениваемое тело и шар используемой нормы являются многогранниками, данная задача может быть сведена к задаче линейного программирования. Это позволяет предложить метод получения приближенного решения задачи на основе предварительной аппроксимации тела и единичного шара нормы многогранниками. В связи с этим в статье получена оценка устойчивости (чувствительности) оптимального значения целевой функции задачи к погрешности аппроксимации оцениваемого выпуклого тела и единичного шара используемой нормы.

Ключевые слова: выпуклое тело, метрика Хаусдорфа, устойчивость, функция расстояния.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-273-279

1. Рассматривается задача

$$\phi(x, r) \equiv h(D, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \quad (1)$$

где D — оцениваемое (приближаемое) выпуклое тело из конечномерного пространства \mathbb{R}^p , $Bn(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) \leq r\}$ — шар нормы $n(\cdot)$ фиксированного радиуса r с центром в точке x ,

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} n(a - b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} n(a - b) \right\} \quad (2)$$

— расстояние Хаусдорфа между множествами A и B , индуцированное нормой $n(\cdot)$.

Таким образом, (1) — задача о равномерной оценке (наилучшем приближении) в метрике Хаусдорфа заданного выпуклого тела шаром фиксированного радиуса.

Отметим, что впервые задача о наилучшем приближении выпуклого компакта шаром в метрике Хаусдорфа, т.е. когда требуется минимизировать функцию $\phi(x, r)$ не только по x , но и по $r \geq 0$, рассматривалась в [1] для случая евклидовой нормы. Для случая произвольной нормы она исследовалась в [2, 3]. Как показано в [3], задача (1) своими решениями для значений r из определённых диапазонов выражает решения ряда известных задач по шаровым оценкам выпуклых тел.

В работе [4] предложен подход к приближенному решению задачи (1) через предварительную аппроксимацию выпуклого тела D и единичного шара используемой нормы $n(\cdot)$ многогранниками. Это позволило редуцировать «приближенную» задачу к задаче линейного программирования. При этом естественно возникает вопрос об устойчивости решения задачи относительно погрешности аппроксимации указанных объектов многогранниками.

Заметим, при дальнейшем изложении будет установлено, что функция $\phi(x, r)$ является выпуклой по x на \mathbb{R}^p и задача (1), таким образом, является задачей выпуклого программирования. Известно, что исследование устойчивости таких задач может опираться на сильную выпуклость целевой функции [5, 6]. Однако можно показать, что функция $\phi(x, r)$ не является сильно выпуклой для любого выпуклого тела D .

Пусть далее D_ε — некоторое выпуклое тело, а Bn^δ — симметричное относительно 0_p выпуклое тело такие, что

$$h(D, D_\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{1+\delta}Bn(0_p, 1) \subset Bn^\delta \subset \frac{1}{1-\delta}Bn(0_p, 1), \quad \delta \in (0, 1). \quad (4)$$

То есть D_ε и Bn^δ — некоторые аппроксимации тела D и единичного шара используемой нормы. Обозначим через

$$n_\delta(x) = \inf \left\{ \alpha : \frac{x}{\alpha} \in Bn^\delta \right\} \quad (5)$$

функцию Минковского множества Bn^δ , а

$$Bn^\delta(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n_\delta(x - y) \leq r\}.$$

Наряду с «точной» задачей (1) далее рассматриваем и «приближенную» задачу:

$$\phi_{\varepsilon, \delta}(x, r) \equiv h_\delta(D_\varepsilon, Bn^\delta(x, r)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \quad (6)$$

где $h_\delta(\cdot, \cdot)$ — метрика Хаусдорфа, индуцированная нормой $n_\delta(\cdot)$. Обозначим через

$$f(r) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x, r), \quad f_{\varepsilon, \delta}(r) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi_{\varepsilon, \delta}(x, r),$$

$$C(r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \phi(x, r) = f(r)\}, \quad C_{\varepsilon, \delta}(r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \phi_{\varepsilon, \delta}(x, r) = f_{\varepsilon, \delta}(r)\}$$

оптимальные значения целевых функций и множества решений в «точной» (1) и «приближенной» задаче (6). Цель работы — доказать, что $f_{\varepsilon, \delta}(r) \rightarrow f(r)$ при $\varepsilon \downarrow 0, \delta \downarrow 0$ и, кроме того, получить оценку $|f_{\varepsilon, \delta}(r) - f(r)|$ через ε и δ , т. е. устойчивости (чувствительности [7]) по функционалу задачи (1) к погрешности задания D и $Bn(0_p, 1)$.

2. Важное значение для нас будет иметь полученная в [3] формула, выражающая расстояние Хаусдорфа (2) между выпуклым телом D и шаром $Bn(x, r)$.

$$\phi(x, r) = h(D, Bn(x, r)) = \max\{R(x, D) - r, P(x, D) + r\}. \quad (7)$$

Здесь $R(x, D)$ выражает расстояние в норме $n(\cdot)$ от точки x до самой удаленной точки множества D

$$R(x, D) = \max_{y \in D} n(x - y),$$

а функция $P(x, D)$ определена формулой

$$P(x, D) = \rho(x, D) - \rho(x, \Omega),$$

где $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$ и

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} n(x - y)$$

— расстояние от точки x до множества A в норме $n(\cdot)$.

Далее будем полагать, что нам известны решения задачи о внешней оценке тела D шаром нормы $n(\cdot)$

$$R(x, D) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p} \quad (8)$$

и задачи о внутренней оценке

$$\rho(x, D) \rightarrow \max_{x \in D}. \quad (9)$$

Отметим, что задача (8) эквивалентна задаче

$$P(x, D) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}.$$

Введем для решений этих задач обозначения

$$R^* = \min_{x \in \mathbb{R}^p} R(x, D), \quad C_R = \{y \in \mathbb{R}^p : R(y, D) = R^*\},$$

$$\rho^* = \max_{x \in D} \rho(x, \Omega), \quad C_\rho = \{y \in D : \rho(y, \Omega) = \rho^*\}.$$



Используя эти данные, можно считать также известными величины

$$R^\pm = \max_{x \in C_\rho}(\min)R(x, D), \quad P^\pm = \max_{x \in C_R}(\min)P(x, D), \quad (10)$$

$$r_R^\pm = (R^* - P^\mp)/2, \quad r_P^\pm = (R^\pm + \rho^*)/2. \quad (11)$$

Поскольку $R(x, D) \geq P(x, D)$ при любом $x \in \mathbb{R}^p$, то из (10), (11) следует

$$0 \leq r_R^- \leq r_R^+ \leq r_P^- \leq r_P^+ < \infty. \quad (12)$$

В работе [3] доказаны следующие факты

Теорема 1. 1. *Имеет место формула*

$$C(r) = \begin{cases} C_R, & \text{если } r \in [0, r_R^-], \\ C_R \cap \{x \in \mathbb{R}^p : R^* - 2r \geq P(x, D)\}, & \text{если } r \in [r_R^-, r_R^+], \\ C_\rho \cap \{x \in \mathbb{R}^p : R(x, D) \leq 2r - \rho^*\}, & \text{если } r \in [r_P^-, r_P^+], \\ C_\rho, & \text{если } r \geq r_P^+. \end{cases}$$

2. Если $C_R \cap C_\rho \neq \emptyset$, то $r_R^+ = r_P^- = (R^* + \rho^*)/2$ и $C((R^* + \rho^*)/2) = C_R \cap C_\rho$.

3. Если $C_R \cap C_\rho = \emptyset$, то $C(r) \cap \{C_R \cup C_\rho\} = \emptyset, \forall r \in (r_R^+, r_P^-)$.

Теорема 2. *Функция $f(r)$ является конечной и выпуклой на \mathbb{R}_+ , причем*

$$f(r) = \begin{cases} R^* - r, & \text{если } r \in [0, r_R^+], \\ r - \rho^*, & \text{если } r \geq r_P^-. \end{cases} \quad (13)$$

Следствие 1. *Для любого $y \in C(r)$ при $r \in (r_R^+, r_P^-)$ имеет место равенство*

$$R(y, D) - r = P(y, D) + r. \quad (14)$$

Доказательство. Известно [3, 8], что функции $R(x, D)$ и $P(x, D)$ являются выпуклыми на \mathbb{R}^p . Поэтому функция $\phi(x, r)$ в силу (7) также является выпуклой по x всюду на \mathbb{R}^p . Следовательно, в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа:

$$y \in C(r) \Leftrightarrow 0_p \in \partial_x \phi(y, r), \quad (15)$$

где $\partial_x \phi(y, r)$ — субдифференциал функции $\phi(x, r)$ по x в точке y . Из формулы (7), следуя субдифференциальному исчислению [8, 9], вытекает

$$\partial_x \phi(x, r) = \begin{cases} \partial R(x, D), & \text{если } R(x, D) - r > P(x, D) + r, \\ \partial P(x, D), & \text{если } R(x, D) - r < P(x, D) + r, \\ \text{co}\{\partial R(x, D), \partial P(x, D)\}, & \text{если } R(x, D) - r = P(x, D) + r. \end{cases} \quad (16)$$

где $\partial R(x, D)$ и $\partial P(x, D)$ — субдифференциалы выпуклых функций $R(x, D)$ и $P(x, D)$.

Теперь поскольку

$$y \in C_R \Leftrightarrow 0_p \in \partial R(x, D), \quad y \in C_\rho \Leftrightarrow 0_p \in \partial P(x, D),$$

то, используя теорему 1 (п. 1 и 3), соотношения (15)–(16) для $y \in C(r)$ при $r \in (r_R^+, r_P^-)$, получаем (14). Следствие доказано.

3. Непосредственно из (4), (5) вытекает

$$|n(x) - n_\delta(x)| \leq \delta n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^p. \quad (17)$$

Получим соответствующие сравнительные оценки для функций

$$\begin{aligned} R_\delta(x, D_\varepsilon) &= \max_{y \in D_\varepsilon} n_\delta(x - y), & \rho_\delta(x, D_\varepsilon) &= \min_{y \in D_\varepsilon} n_\delta(x - y), \\ \rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon) &= \min_{y \in \Omega_\varepsilon} n_\delta(x - y), & P_\delta(x, D_\varepsilon) &= \rho_\delta(x, D_\varepsilon) - \rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\Omega_\varepsilon = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D_\varepsilon}$.

Лемма 1. Для любых $x \in \mathbb{R}^p$, $\varepsilon \geq 0$, $\delta \in [0, 1)$, справедливы неравенства

$$|R_\delta(x, D_\varepsilon) - R(x, D)| \leq (1 + \delta)\varepsilon + \delta R(x, D), \quad (18)$$

$$|\rho_\delta(x, D_\varepsilon) - \rho(x, D)| \leq (1 + \delta)\varepsilon + \delta \rho(x, D), \quad (19)$$

$$|\rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon) - \rho(x, \Omega)| \leq (1 + \delta)\varepsilon + \delta \rho(x, \Omega), \quad (20)$$

$$|P_\delta(x, D_\varepsilon) - P(x, D)| \leq (1 + \delta)\varepsilon + \delta |P(x, D)|. \quad (21)$$

Доказательство. Ограничимся доказательствами неравенств (18) и (21). Доказательства для (19) и (20) аналогичны доказательству для (18).

1. Обозначим через

$$Q^R(x, D) = \{z \in D : n(x - z) = R(x, D)\}.$$

Из (3) следует, что для $z \in Q^R(x, D)$ найдётся точка $z_\varepsilon \in D_\varepsilon$ такая, что

$$n(z - z_\varepsilon) \leq \varepsilon. \quad (22)$$

Используя (17), (22) и неравенство треугольника, получаем:

$$\begin{aligned} R_\delta(x, D_\varepsilon) &\geq (1 - \delta) \max_{y \in D_\varepsilon} n(x - y) \geq (1 - \delta)n(x - z_\varepsilon) \geq \\ &\geq (1 - \delta)(n(x - z) - n(z - z_\varepsilon)) \geq (1 - \delta)(R(x, D) - \varepsilon). \end{aligned} \quad (23)$$

С другой стороны, ввиду (3) выполняется

$$D_\varepsilon \subset D + Bn(0_p, \varepsilon) \quad (24)$$

и тогда, используя (17), имеем:

$$\begin{aligned} R_\delta(x, D_\varepsilon) &\leq (1 + \delta) \max_{y \in D + Bn(0_p, \varepsilon)} n(x - y) \leq \\ &\leq (1 + \delta) \max_{\substack{y \in D \\ z \in Bn(0_p, \varepsilon)}} (n(x - y) + n(z)) \leq (1 + \delta)(R(x, D) + \varepsilon). \end{aligned} \quad (25)$$

Из (23) и (25) следует (18).

2. Теперь получим неравенство (21). Возможны следующие варианты:

$$P_\delta(x, D_\varepsilon) - P(x, D) = \begin{cases} \rho_\delta(x, D_\varepsilon) - \rho(x, D), & \text{если } x \notin D_\varepsilon \cup D, \\ \rho(x, \Omega) - \rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon), & \text{если } x \in D_\varepsilon \cap D, \\ \rho_\delta(x, D_\varepsilon) + \rho(x, \Omega), & \text{если } x \notin D_\varepsilon, x \in D, \\ -\rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon) - \rho(x, D), & \text{если } x \in D_\varepsilon, x \notin D. \end{cases} \quad (26)$$

В первых двух случаях неравенство (21) следует из (19) и (20) соответственно. Из оставшихся вариантов рассмотрим последний. Нетрудно видеть, учитывая $x \in D_\varepsilon$ и $x \notin D$, что максимальное по модулю значение правой части достигает при $D_\varepsilon = D + Bn(0_p, \varepsilon)$. Тогда легко видеть, $\rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon) + \rho(x, D) \leq \varepsilon$. Таким образом, в любом случае неравенство (21) справедливо. Лемма доказана.

Докажем ещё два вспомогательных факта.

Лемма 2. Пусть $x(r) \in C(r)$, $x_{\varepsilon, \delta}(r) \in C_{\varepsilon, \delta}(r)$. Для любых $r \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$, $\delta \in [0, 1)$, справедливы оценки

$$R(x(r), D) \leq d, \quad R(x_{\varepsilon, \delta}(r), D) \leq \frac{1 + \delta}{1 - \delta}(d + 2\varepsilon) + \varepsilon, \quad (27)$$

где $d = \max_{x, y \in D} n(x - y)$ — диаметр множества D в норме $n(\cdot)$.



Доказательство. Функция $f(r) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \phi(x, r)$ является по теореме 2 выпуклой конечной функцией. Поэтому (см. [9, гл.1]) существует

$$f'_+(r) = \lim_{\Delta r \downarrow 0} \frac{f(r + \Delta r) - f(r)}{\Delta r}$$

и при этом, учитывая (13),

$$|f'_+(r)| \leq 1, \quad \forall r \geq 0. \quad (28)$$

В силу следствия 1 из (7) для любого $x(r) \in C(r)$ получаем:

$$R(x(r), D) = f(r) + r, \quad r \in (r_R^+, r_P^-). \quad (29)$$

По теореме 1 имеем: $R(x(r), D) \equiv R^*$ для $r \in [0, r_R^+]$. Далее, на отрезке $[r_R^+, r_P^-]$, как следует из (28), (29), значение $R(x(r), D)$ не возрастает. Таким образом,

$$\sup_{r \geq 0} R(x(r), D) = \sup_{r \geq r_P^-} R(x(r), D). \quad (30)$$

Из теоремы 1 также следует

$$x(r) \in C_\rho, \quad \forall r \geq r_P^-. \quad (31)$$

А поскольку $C_\rho \in \text{int } D$, из (30), (31) вытекает

$$\sup_{r \geq 0} R(x(r), D) \leq \max_{x \in D} R(x, D) = \max_{x, y \in D} n(x - y) = d,$$

т. е. первая оценка в (27) получена.

Аналогичные рассуждения для «приближенной» задачи (6) с использованием (17) и включения $D_\varepsilon \subset D + Bn(0_p, \varepsilon)$ дают

$$\sup_{r \geq 0} R_\delta(x_{\varepsilon, \delta}(r), D_\varepsilon) \leq \max_{x \in D_\varepsilon} R_\delta(x, D_\varepsilon) \leq (1 + \delta) \max_{x, y \in D + Bn(0_p, \varepsilon)} n(x - y) = (1 + \delta)(d + 2\varepsilon). \quad (32)$$

Теперь, используя включение $D \subset D_\varepsilon + Bn(0_p, \varepsilon)$, (17) и (32), получаем:

$$\begin{aligned} R(x_{\varepsilon, \delta}(r), D) &\leq R(x_{\varepsilon, \delta}(r), D_\varepsilon + Bn(0_p, \varepsilon)) = R(x_{\varepsilon, \delta}(r), D_\varepsilon) + \varepsilon \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - \delta} \max_{y \in D_\varepsilon} n_\delta(x_{\varepsilon, \delta}(r) - y) + \varepsilon = \frac{1}{1 - \delta} R_\delta(x_{\varepsilon, \delta}(r), D_\varepsilon) + \varepsilon \leq \frac{1 + \delta}{1 - \delta} (d + 2\varepsilon) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Для любых $x \in \mathbb{R}^p$, $\varepsilon \geq 0$, $\delta \in [0, 1)$, справедливо неравенство

$$|\phi_{\varepsilon, \delta}(x, r) - \phi(x, r)| \leq (1 + \delta)\varepsilon + \delta R(x, D). \quad (33)$$

Доказательство. Используя формулу (7), ее соответствующий аналог для случая нормы $n_\delta(\cdot)$ и выпуклого тела D_ε :

$$\phi_{\varepsilon, \delta}(x, r) = \max\{R_\delta(x, D_\varepsilon) - r, P_\delta(x, D_\varepsilon) + r\},$$

а также лемму 1 и, учитывая, что $R(x, D) \geq P(x, D)$, получаем:

$$|\phi_{\varepsilon, \delta}(x, r) - \phi(x, r)| \leq \max\{|R_\delta(x, D_\varepsilon) - R(x, D)|, |P_\delta(x, D_\varepsilon) - P(x, D)|\} \leq (1 + \delta)\varepsilon + \delta R(x, D).$$

Лемма доказана.

Теперь докажем основную теорему об оценке устойчивости оптимального значения целевой функции задачи (1) к погрешности ε и δ .

Теорема 3. Для любого $r \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$, $\delta \in [0, 1)$, справедливо неравенство

$$|f_{\varepsilon, \delta}(r) - f(r)| \leq (1 + 2\delta)\varepsilon + \frac{\delta(1 + \delta)}{1 - \delta}(d + 2\varepsilon), \quad (34)$$

где d — диаметр тела D в норме $n(\cdot)$.



Доказательство. Пусть $x(r) \in C(r)$, $x_{\varepsilon,\delta}(r) \in C_{\varepsilon,\delta}(r)$. Используя лемму 3, получаем неравенства

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,\delta}(r) - f(r) &= f_{\varepsilon,\delta}(r) - \phi_{\varepsilon,\delta}(x(r), r) + \phi_{\varepsilon,\delta}(x(r), r) - \phi(x(r), r) \leq \\ &\leq \phi_{\varepsilon,\delta}(x(r), r) - \phi(x(r), r) \leq (1 + \delta)\varepsilon + \delta R(x(r), D), \\ f(r) - f_{\varepsilon,\delta}(r) &= f(r) - \phi(x_{\varepsilon,\delta}(r), r) + \phi(x_{\varepsilon,\delta}(r), r) - \phi_{\varepsilon,\delta}(x_{\varepsilon,\delta}(r), r) \leq \\ &\leq \phi(x_{\varepsilon,\delta}(r), r) - \phi_{\varepsilon,\delta}(x_{\varepsilon,\delta}(r), r) \leq (1 + \delta)\varepsilon + \delta R(x_{\varepsilon,\delta}(r), D), \end{aligned}$$

из которых вытекает

$$|f_{\varepsilon,\delta}(r) - f(r)| \leq (1 + \delta)\varepsilon + \delta \max\{R(x(r), D), R(x_{\varepsilon,\delta}(r), D)\}.$$

Остается применить лемму 2. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00238, № 13-01-00175).

Библиографический список

1. Никольский М. С., Силин Д. Б. О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддидала // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 338–354.
2. Дудов С. И., Златорунская И. В. Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13–38. DOI: 10.4213/sm513.
3. Дудов С. И. Взаимосвязь некоторых задач по оценке выпуклого компакта шаром // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 1. С. 43–58. DOI: 10.4213/sm1479.
4. Дудов С. И., Осипцев М. А. О подходе к приближенному решению задачи наилучшего приближения выпуклого тела шаром фиксированного радиуса // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 267–272.
5. Карманов В. Г. Математическое программирование. М. : Наука, 2000.
6. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М. : МЦНМО, 2011.
7. Измайлов А. Ф. Чувствительность в оптимизации. М. : Физматлит, 2006.
8. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980.
9. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Нелинейная оптимизация. М. : Наука, 1981.

On Functional Stability of the Solution for the Problem of Convex Body Best Approximating by a Ball with Fixed Radius

S. I. Dudov¹, M. A. Osiptsev²

¹Dudov Sergey Ivanovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, Dudov@info.sgu.ru

²Osiptsev Mikhail Anatolievich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, Osipcev@gmail.com

A finite-dimensional problem of finding a uniform estimate (approximation in the Hausdorff metric) of a convex body by a fixed-radius ball in an arbitrary norm is considered. It is known that this problem can be reduced to a linear programming problem in the case, when the convex body and the norm ball are polytopes. Therefore, we prove the functional stability of the optimal value of the objective function with respect to accuracy of the given convex body and accuracy of the unit ball for the norm used. The stability rating is derived.

Key words: convex body, Hausdorff metric, stability, distance function.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-00238, no. 13-01-00175).

References

1. Nikol'skii M. S., Silin D. B. On the best approximation of a convex compact set by elements of addial. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, vol. 211, pp. 306–321.
2. Dudov S. I., Zlatorunskaya I. V. Uniform estimate of a compact convex set by a ball in an arbitrary norm. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 10, pp. 1433–1458. DOI: 10.1070/sm2000v191n10ABEH000513.
3. Dudov S. I. Relations between several problems of estimating convex compacta by balls. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 1, pp. 39–53. DOI: 10.1070/SM2007v198n01ABEH003828.



4. Dudov S. I., Osipcev M. A. On an Approach to Approximate Solving of the Problem for the Best Approximation for Compact Body by a Ball of Fixed Radius. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 267–272.
5. Karmanov V. G. *Matematicheskoe programmirovaniye* [Mathematical programming]. Moscow, Nauka, 2000 (in Russian).
6. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* [Methods of Optimization]. Moscow, MCSMO, 2011 (in Russian).
7. Izmailov A. F. *Chuvstvitel'nost' v optimizatsii* [Sensitivity optimization]. Moscow, Fizmatlit, 2006 (in Russian).
8. Pschenichnyi B. N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex Analysis and Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1980 (in Russian)
9. Dem'yanov V. F., Vasil'ev L. V. *Nondifferentiable optimization*, Optimization software, Inc., Publications Division, New York, 1985.

УДК 517.5

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ШАГОВ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

Ю. С. Красс

Красс Юлия Сергеевна, аспирант кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KrussUS@gmail.com

В данной работе исследуется вопрос точности оценки числа шагов алгоритма построения ортогональной масштабирующей функции, порождающей кратномасштабный анализ на локальных полях положительной характеристики. Полученная в результате такого построения масштабирующая функция является ступенчатой и имеет ограниченный носитель. Число шагов в алгоритме связано непосредственно с носителем преобразования Фурье масштабирующей функции и поэтому представляет собой не только вычислительный интерес. Для числа шагов алгоритма известна верхняя оценка. В настоящей работе установлено точное число шагов алгоритма, которое оказалось равным верхней оценке.

Ключевые слова: локальные поля положительной характеристики, масштабирующая функция, кратномасштабный анализ.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-279-287

ВВЕДЕНИЕ

Понятие кратномасштабного анализа (КМА) на локальных полях было введено китайскими математиками Н. Jiang, D. Li и N. Jin в работе [1]. Для локальных полей $F^{(s)}$ положительной характеристики p они доказали некоторые свойства и получили алгоритм построения вейвлетов по заданной масштабирующей функции. Используя полученные результаты, они построили КМА хааровского типа и соответствующие хааровские вейвлеты.

Вопросы построения ортогонального КМА на поле $F^{(1)}$ подробно изучены в работах [2–7]. В работе [8] даны необходимые и достаточные условия для вейвлет-фреймов на локальных полях. В. Veĭnaga и Q. Jahan [9] построили вейвлет-пакеты на локальных полях положительной характеристики. В работе [10] получены необходимые и достаточные условия того, чтобы функция $\varphi \in L^2(F^{(s)})$ порождала КМА. Эти условия имеют вид

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |\hat{\varphi}(\xi + u(k))|^2 = 1 \quad (1)$$

для п.в. ξ в единичном шаре \mathcal{D} ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(\mathfrak{p}^j \xi)| = 1 \text{ для п.в. } \xi \in F^{(s)}, \quad (2)$$

и существует интегрально-периодическая функция $m_0 \in L^2(\mathcal{D})$ такая, что

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\mathfrak{p}\xi) \hat{\varphi}(\mathfrak{p}\xi) \text{ для п.в. } \xi \in F^{(s)}, \quad (3)$$

где $\{u(k)\}$ — множество сдвигов, \mathfrak{p} — prime element.



В работе [11] В. Вебера и Q. Жахан доказали, что если сдвиги масштабирующих функций двух КМА биортогональны, то соответствующие семейства вейвлетов также будут биортогональными. Таким образом, для построения КМА на локальном поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p нам необходимо построить интегрально-периодическую маску m_0 , удовлетворяющую условиям (1)–(3). Для решения этой задачи в работах [1, 8–11] был использован метод, разработанный в [12] и включающий в себя понятие «prime element». Следует отметить, что в этих работах были получены только хааровские вейвлеты.

В работе [13] разработан другой метод построения интегрально-периодической маски и соответствующей масштабирующей функции, порождающей нехааровский ортогональный КМА. Однако в [13] рассмотрен простейший случай, когда маска m_0 является элементарной, т. е. она постоянна на смежных классах по подгруппе $(F_{-1}^{(s)+})^\perp$ и $|m_0(\xi)|$ принимает только два значения 0 и 1.

Избавиться от указанных ограничений на значения маски удалось в работе [14], где изложен алгоритм построения ортогональной масштабирующей функции φ , порождающей кратномасштабный анализ на локальных полях $F^{(s)}$ положительной характеристики p , с единственным условием φ — ступенчатая функция с ограниченным носителем. Данный алгоритм использует методы теории графов и сводится к построению последовательности N -мерных массивов $A^{(n)}$. При этом условие ортогональности функции φ сводится к условию $A^{(M)} = J$, где J — N -мерный массив единиц, а M — некоторое натуральное число (номер массива), для которого получена верхняя оценка. Иначе говоря, в работе [14] получена верхняя оценка для числа шагов алгоритма, т. е. установлено, что при определенном значении M массив $A^{(M)}$ обязательно будет равняться J . Однако остался открытым вопрос: может ли массив единиц получиться на более раннем шаге? В данной работе устанавливается точное значение M . Следует отметить, что M отвечает не только за число шагов в алгоритме, но и непосредственно связано с носителем преобразования Фурье масштабирующей функции, а именно $\text{supp}(\hat{\varphi}) \subset F_M^{(s)\perp}$.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Поле представляет собой алгебраическую структуру, для элементов которой определены операции сложения и умножения, удовлетворяющие аксиомам поля. Поле K называется конечным, если состоит из конечного числа элементов. Известно [15], что число элементов в конечном поле K равно p^s , при некотором простом p и $s \in \mathbb{N}$. В случае $s = 1$ конечное поле представляет собой поле классов вычетов по модулю p : $GF(p) = \{0, 1, \dots, p - 1\}$. Операция сложения в $GF(p)$ определяется равенством $a \dot{+} b = (a + b) \bmod p$, т. е. остаток от деления $a + b$ на p , операция умножения — равенством $ab = \underbrace{a \dot{+} a \dot{+} \dots \dot{+} a}_{b \text{ раз}}$.

При $s > 1$ существует неприводимый над полем $GF(p)$ многочлен $p_s(x)$ степени s . Конечное поле $GF(p^s)$ состоит из векторов длины s : $\{\mathbf{a} = (a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(s-1)}), a^{(j)} \in GF(p)\}$. Операция сложения в поле $GF(p^s)$ определяется как покоординатное сложение по модулю p , т. е. $\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b} = (a^{(j)} \dot{+} b^{(j)})_{j=0}^{s-1} = ((a^{(j)} + b^{(j)}) \bmod p)_{j=0}^{s-1}$. Для определения операции умножения представим элементы поля $GF(p^s)$ в виде формальных многочленов, т. е. $\mathbf{a} = a^{(0)} + a^{(1)}x + a^{(2)}x^2 + \dots + a^{(s-1)}x^{s-1}$ и $\mathbf{b} = b^{(0)} + b^{(1)}x + b^{(2)}x^2 + \dots + b^{(s-1)}x^{s-1}$. Чтобы получить \mathbf{ab} необходимо умножить элементы \mathbf{a} и \mathbf{b} как многочлены над полем $GF(p)$. В результате получится многочлен

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{s-1} a_j b_k x^{j+k} = \sum_{l=0}^{2s-2} x^l \sum_{k,j: k+j=l} a_j b_k,$$

в котором коэффициенты $c_l = \sum_{k,j: k+j=l} a_j b_k$ вычисляются по операциям в поле $GF(p)$. После этого многочлен $Q(x)$ делим с остатком на неприводимый многочлен $p_s(x)$. Коэффициенты полученного остатка $H(x)$ и есть результат произведения \mathbf{ab} .

Локальным полем K называется локально компактное, вполне несвязное, недискретное, полное топологическое пространство, в котором определены непрерывные операции « $\dot{+}$ », « $\dot{\times}$ » — сложения и умножения и при этом выполнены аксиомы поля. Известно, что локальное поле $F^{(s)}$ положительной



характеристики p изоморфно множеству формальных степенных рядов [16, гл. 2, §1; 17]:

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{a}_i t^i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{a}_i \in GF(p^s).$$

Операции сложения и умножения определяются как сумма и произведение таких рядов, т. е. если

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{a}_i t^i, \quad b = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{b}_i t^i,$$

то

$$\begin{aligned} a \dot{+} b &= \sum_{i=k}^{\infty} (\mathbf{a}_i \dot{+} \mathbf{b}_i) t^i, \\ ab &= \sum_{l=2k}^{\infty} t^l \sum_{i,j:i+j=l} (\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{a}_i \dot{+} \mathbf{b}_i$ и $\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j$ вычисляются по операциям в поле $GF(p^s)$.

Также мы можем рассматривать элементы локального поля $F^{(s)}$ положительной характеристики p как бесконечные в обе стороны последовательности, где лишь конечное число членов с отрицательными номерами имеет ненулевое значение: $a = (\dots, \mathbf{0}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots)$, $\mathbf{a}_i \in GF(p^s)$. Топология в $F^{(s)}$ задается базой окрестностей нуля:

$$F_n^{(s)} = \{a = (\dots, \mathbf{0}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots) : \mathbf{a}_j \in GF(p^s)\}.$$

Определим норму равенством:

$$\|a\| = \|(\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots)\| = \left(\frac{1}{p^s}\right)^n, \quad \text{если } \mathbf{a}_n \neq \mathbf{0},$$

тогда

$$F_n^{(s)} = \left\{a \in F^{(s)} : \|a\| \leq \left(\frac{1}{p^s}\right)^n\right\}.$$

Рассмотрим аддитивную группу $F^{(s)+}$ поля $F^{(s)}$. Окрестности $F_n^{(s)}$ являются компактными подгруппами группы $F^{(s)+}$, обозначим их через $F_n^{(s)+}$. Они обладают следующими свойствами:

- 1) $\dots \subset F_1^{(s)+} \subset F_0^{(s)+} \subset F_{-1}^{(s)+} \dots$
- 2) $F_n^{(s)+} / F_{n+1}^{(s)+} \cong GF(p^s)^+$ и $\#(F_n^{(s)+} / F_{n+1}^{(s)+}) = p^s$.

Отсюда сразу следует, что при $s = 1$ $F^{(1)+}$ есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$. Верно и обратное: во всякой группе Виленкина $(\mathfrak{G}, \dot{+})$ с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$ можно ввести операцию умножения равенством (4). С такой операцией умножения $(\mathfrak{G}, \dot{+}, \cdot)$ становится полем, изоморфным $F^{(1)}$, единичный элемент имеет вид $e = (\dots, 0, 0_{-1}, 1_0, 0_1, \dots)$.

В [17] отмечено, что поле $F^{(s)}$ можно рассматривать как линейное пространство над конечным полем $GF(p^s)$. При этом произведение элемента $a \in F^{(s)}$ на элемент $\bar{\lambda} \in GF(p^s)$ определяется по координатно, т. е. $\bar{\lambda}a = (\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \bar{\lambda}\mathbf{a}_n, \bar{\lambda}\mathbf{a}_{n+1}, \dots)$, а модуль элемента $\bar{\lambda} \in GF(p^s)$ — равенством:

$$|\bar{\lambda}| = \begin{cases} 1, & \bar{\lambda} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \bar{\lambda} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Там же доказано, что система элементов $g_k \in F_k^{(s)} \setminus F_{k+1}^{(s)}$ есть базис в $F^{(s)}$, т. е. любой элемент $a \in F^{(s)}$ можно представить в виде

$$a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\lambda}_k g_k, \quad \bar{\lambda}_k \in GF(p^s).$$



В дальнейшем будем считать, что $g_k = (\dots, \mathbf{0}_{k-1}, (1^{(0)}, 0^{(1)}, \dots, 0^{(s-1)})_k, \mathbf{0}_{k+1}, \dots)$. В этом случае $\overline{\lambda}_k = \mathbf{a}_k$.

Определим множества

$$H_0^{(s)} = \{h \in F^{(s)} : h = \mathbf{a}_{-1}g_{-1} + \mathbf{a}_{-2}g_{-2} + \dots + \mathbf{a}_{-s}g_{-s}\}, \quad s \in \mathbb{N},$$

$$H_0 = \{h \in F^{(s)} : h = \mathbf{a}_{-1}g_{-1} + \mathbf{a}_{-2}g_{-2} + \dots + \mathbf{a}_{-s}g_{-s}, \quad s \in \mathbb{N}\}.$$

Множество H_0 есть множество сдвигов в $F^{(s)}$, H_0 — аналог множества целых неотрицательных чисел.

Обозначим через X совокупность всех характеров $F^{(s)+}$. Множество X образует коммутативную группу с операцией произведения характеров: $(\chi * \phi)(a) = \chi(a) \cdot \phi(a)$. Обратный элемент определяется как $\chi^{-1}(a) = \overline{\chi(a)}$, а единичным элементом является характер $e(a) \equiv 1$.

Следуя [17], определим характеры r_n группы $F^{(s)+}$ следующим образом. Пусть $x = (\dots, \mathbf{0}_{k-1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \dots)$, $\mathbf{x}_j = (x_j^{(0)}, x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(s-1)}) \in GF(p^s)$. Элемент \mathbf{x}_j можно записать в виде $\mathbf{x}_j = (x_{js+0}, x_{js+1}, \dots, x_{js+(s-1)})$. В этом случае

$$x = (\dots, 0, \dots, 0, x_{ks+0}, x_{ks+1}, \dots, x_{ks+s-1}, x_{(k+1)s+0}, x_{(k+1)s+1}, \dots, x_{(k+1)s+s-1}, \dots),$$

и совокупность всех таких последовательностей x есть группа Виленкина. Поэтому равенство $r_n(x) = r_{ks+l}(x) = e^{\frac{2\pi i}{p}(x_{ks+l})}$ определяет функции Радемахера в $F^{(s)+}$ и каждый характер $\chi \in X$ представим в виде

$$\chi = \prod_{n \in \mathbb{Z}} r_n^{a_n}, \quad a_n = \overline{0, p-1}. \tag{5}$$

Равенство (5) перепишем в виде

$$\chi = \prod_{k \in \mathbb{Z}} r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \dots r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}} \tag{6}$$

и обозначим

$$r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \dots r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k},$$

где $\mathbf{a}_k = (a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(s-1)}) \in GF(p^s)$. Тогда (6) примет вид

$$\chi = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}.$$

Функции $\mathbf{r}_k^{(1,0,\dots,0)} = \mathbf{r}_k$ будем называть функциями Радемахера. По определению положим

$$(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k})^{\mathbf{b}_k} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k}, \quad \chi^{\mathbf{b}} = \left(\prod \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k} \right)^{\mathbf{b}} = \prod \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k \mathbf{b}}, \quad \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k, \mathbf{b} \in GF(p^s).$$

Из определения функций Радемахера следует, что при $\mathbf{x} = ((x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(s-1)}))_{k \in \mathbb{Z}}$ и $\mathbf{u} = (u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(s-1)}) \in GF(p^s)$

$$(\mathbf{r}_k^{\mathbf{u}}, \mathbf{x}) = \prod_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{p} u^{(l)} x_k^{(l)}}.$$

В [17] установлены следующие свойства характеров:

- 1) $\mathbf{r}_k^{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{u}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{v}}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in GF(p^s)$;
- 2) $(\mathbf{r}_k^{\mathbf{y}}, \mathbf{u}g_j) = 1, \forall k \neq j, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in GF(p^s)$;
- 3) множество характеров поля $F^{(s)}$ есть линейное пространство $(X, *, \cdot, GF(p^s))$ над конечным полем $GF(p^s)$ с произведением в качестве внутренней операции и возведением в степень $\mathbf{u} \in GF(p^s)$ в качестве внешней операции;
- 4) последовательность функций Радемахера (\mathbf{r}_k) образует базис пространства $(X, *, \cdot, GF(p^s))$.

Оператор растяжения \mathcal{A} в локальном поле $F^{(s)}$ определяется равенством $\mathcal{A}x := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}_n g_{n-1}$, где

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}_n g_n \in F^{(s)}, \text{ в группе характеров — равенством } (\chi \mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x).$$



2. МАСШТАБИРУЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И КМА

Если функция φ порождает КМА на локальном поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p , то она является решением масштабирующего уравнения [1, 9, 10]:

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h), \quad \sum_{h \in H_0} |\beta_h|^2 < \infty. \quad (7)$$

Обозначим через $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ ($M, N \in \mathbb{N}$) множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе $F_M^{(s)}$, с носителем $\text{supp}(\varphi) \subset F_{-N}^{(s)}$. Аналогично, $\mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$ есть множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе $F_{-N}^{(s)\perp}$ с носителем $\text{supp}(\varphi) \subset F_M^{(s)\perp}$, где $F_{-N}^{(s)\perp}$, $F_M^{(s)\perp}$ – аннуляторы подгрупп $F_{-N}^{(s)+}$, $F_M^{(s)+}$ соответственно. В [13] установлено, что если функция $\varphi \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ порождает ортогональный КМА, то в уравнении (7) содержится лишь конечное число слагаемых, т. е. φ является решением уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h),$$

которое можно записать в частотном виде:

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathcal{A}^{-1}), \quad (8)$$

где

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{\chi \mathcal{A}^{-1}, h}$$

маска уравнения (8).

Также в [13] $\forall N, M \in \mathbb{N}$ установлено, что $\varphi \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ тогда и только тогда, когда $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$. Для функций $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$ условие (3) и критерий ортогональности (1) записаны в терминах функций Радемахера и имеют следующей вид [17]:

1) если $\hat{\varphi}(\chi)$ есть решение масштабирующего уравнения (8) и система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ есть ортонормированная система, то φ порождает ортогональный КМА;

2) система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ будет ортонормированной системой тогда и только тогда, когда для любых $\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \dots, \mathbf{a}_{-1} \in GF(p^s)$

$$\sum_{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{M-1} \in GF(p^s)} |\hat{\varphi}(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \dots \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0} \dots \mathbf{r}_{M-1}^{\mathbf{a}_{M-1}})|^2 = 1. \quad (9)$$

Таким образом, для построения ортогонального КМА нужно построить функцию $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$, которая является решением масштабирующего уравнения (8) и для которой выполнены условия (9).

3. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Определение (см. [14]). Пусть $F^{(s)}$ – локальное поле положительной характеристики p , N – натуральное число. Под N -валидным деревом мы будем понимать дерево, ориентированное от листа к корню и удовлетворяющее следующим условиям:

1) каждая вершина представляет собой элемент конечного поля $GF(p^s)$, т. е. имеет вид: $\mathbf{a}_i = (a_i^{(0)}, a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(s-1)})$, $a_i^{(j)} \in \overline{0, p-1}$;

2) корень и все вершины вплоть до $(N-1)$ -го уровня имеют значение, равное нулевому элементу поля $GF(p^s)$: $\mathbf{0} = (0^{(0)}, 0^{(1)}, \dots, 0^{(s-1)})$;

3) любой путь $(\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{a}_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{a}_{k+N-1})$ длины $N-1$ присутствует в дереве ровно один раз.

В [14] изложен алгоритм построения ортогональной масштабирующей функции по N -валидному дереву T и включает в себя следующие шаги.



1. Строим N -валидное дерево T . По дереву T строим новое дерево \tilde{T} следующим образом: если в дереве T с вершины \mathbf{a}_N начинался путь из N элементов в направлении к корню $\mathbf{a}_N \rightarrow \mathbf{a}_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{a}_1$, то в новом дереве \tilde{T} образуем вершину, которая имеет значение, равное N -мерному вектору $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$. Таким образом, получим дерево \tilde{T} , удовлетворяющее следующим условиям:

а) каждая вершина представляет собой N -мерный вектор элементов поля $GF(p^s)$: $\mathbf{A}_N = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ и встречается в дереве только один раз (следует из третьего свойства N -валидного дерева);

б) корнем дерева является вектор $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$;

в) смежные друг с другом вершины имеют вид: $(\mathbf{a}_{i_N}, \mathbf{a}_{i_{N-1}}, \dots, \mathbf{a}_{i_1}) \rightarrow (\mathbf{a}_{i_{N-1}}, \dots, \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_0})$. Следует отметить, что не любые вершины, имеющие такой вид, будут смежными. Наличие или отсутствие дуги между такими вершинами определяется по первоначальному дереву T .

2. Теперь преобразуем дерево \tilde{T} в граф Γ , добавив некоторое количество дуг между вершинами по следующему правилу: каждую вершину $\mathbf{A}_N = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ соединим с некоторыми вершинами более низкого уровня, имеющими вид $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$, т.е. с теми вершинами, первые $(N-1)$ координат которых совпадают с последними $(N-1)$ координатами вершины \mathbf{A}_N . Обозначим через $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$ множество вершин, смежных с вершиной \mathbf{A}_N . Таким образом, $\mathbf{a}_0 \in \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}$ тогда и только тогда, когда вершина \mathbf{A}_N соединена дугой с вершиной $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$ в графе Γ .

3. Обозначим

$$\lambda_{\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \dots, \mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0} = |m_0(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}} \dots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0})|^2.$$

Значения маски определим таким образом, чтобы

$$\sum_{\tilde{\mathbf{a}}_0} \lambda_{\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \dots, \mathbf{a}_{-1}, \tilde{\mathbf{a}}_0} = 1 \tag{10}$$

в тех случаях, когда вершина $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ в графе Γ соединена дугами с вершинами $(\mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{a}_{N-2}, \dots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$. И

$$\lambda_{\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \dots, \mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0} = 0 \tag{11}$$

для всех $\mathbf{a}_0 \notin \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}$.

Определим $m_0(F_{-N}^{(s)\perp}) = 1$, тогда в силу наших обозначений $\lambda_{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}} = 1$.

Используя введенные обозначения, запишем условие (9) ортонормированности системы сдвигов $(\varphi(x-h))_{h \in H_0}$ функции $\varphi(x)$ в виде: для любых $\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \dots, \mathbf{a}_{-1} \in GF(p^s)$

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{M-1} \in GF(p^s)} |\hat{\varphi}(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \dots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0} \dots \mathbf{r}_{M-1}^{\mathbf{a}_{M-1}})|^2 = \\ &= \sum_{\mathbf{a}_0 \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \dots, \mathbf{a}_0} \sum_{\mathbf{a}_1 \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{a}_{-N+1}, \mathbf{a}_{-N+2}, \dots, \mathbf{a}_1} \dots \\ &\dots \sum_{\mathbf{a}_{M-2} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{a}_{M-N-2}, \mathbf{a}_{M-N-1}, \dots, \mathbf{a}_{M-2}} \sum_{\mathbf{a}_{M-1} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{a}_{M-N-1}, \mathbf{a}_{M-N}, \dots, \mathbf{a}_{M-1}} \times \\ &\times \lambda_{\mathbf{a}_{M-N}, \mathbf{a}_{M-N+1}, \dots, \mathbf{a}_{M-1}, \mathbf{0}} \dots \lambda_{\mathbf{a}_{M-1}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}. \end{aligned} \tag{12}$$

4. Построим последовательность N -мерных массивов $A^{(n)} = (a_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N}^{(n)})_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N \in GF(p^s)}$. Элементы $A^{(n)}$ задаются следующими рекурсивными соотношениями:

$$a_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N}^{(0)} = \lambda_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}} \lambda_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}, \mathbf{0}} \dots \lambda_{\mathbf{i}_N, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}, \tag{13}$$

$$a_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N}^{(n)} = \sum_{\mathbf{j} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}} a_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}}^{(n-1)}. \tag{14}$$

Будем говорить, что элемент массива $a_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N}^{(j)}$ соответствует вершине $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N)$.

Благодаря введенным N -мерным массивам мы можем переформулировать условие ортонормированности (12) в следующем виде: система сдвигов функции $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ будет ортонормированной тогда и только тогда, когда для любых $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N$: $a_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N}^{(M)} = 1$, иными словами, когда массив $A^{(M)}$ состоит только из единиц.



Лемма 1 (см. [14]). В массиве $A^{(0)}$ на местах, соответствующих вершинам уровня $l \leq N$ в дереве \tilde{T} , стоят единицы.

Лемма 2 (см. [14]). Пусть по N -валидному дереву T построены дерево \tilde{T} , граф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах (10), (11). Пусть $(A^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ — последовательность массивов, определяемая равенствами (13) и (14). Тогда в массиве $A^{(n)}$ элементы, соответствующие вершинам уровня $l \leq N + n$ в дереве \tilde{T} , равны единице.

Теорема 1 (см. [14]). Пусть по N -валидному дереву T построены дерево \tilde{T} , граф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах (10), (11). Пусть $\tilde{H} = \text{height}(\tilde{T})$. Тогда равенство

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, причем M не превышает $\tilde{H} - N$.

4. ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ШАГОВ АЛГОРИТМА

Теорема 2. В теореме 1 $M = \tilde{H} - N$.

Доказательство. В теореме 1 установлено, что M не превышает $\tilde{H} - N$. Покажем, что случай $M < \tilde{H} - N$ невозможен. Иными словами, требуется доказать, что в массивах $A^{(n)}$ единицы стоят только на местах, соответствующих вершинам уровня $l \leq N + n$ в дереве \tilde{T} , и нигде больше.

Докажем по индукции.

1. *База индукции.* Рассмотрим массив $A^{(0)}$. В лемме 1 доказано, что в данном массиве на местах, соответствующих вершинам уровня $l \leq N$ в дереве \tilde{T} , стоят единицы. Докажем, что других единиц в $A^{(0)}$ нет. Для этого рассмотрим элемент массива $A^{(0)}$, соответствующий вершине $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N)$, уровня $l > N$. Согласно (13) такой элемент имеет вид: $a_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N}^{(0)} = \lambda_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}} \lambda_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}, \mathbf{0}} \dots \lambda_{\mathbf{i}_N, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}$. Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что $a_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N}^{(0)} = 1$, следовательно, так как все $\lambda_{j_1, j_2, \dots, j_N, j_{N+1}} \in [0, 1]$, единице равняется каждый из сомножителей. Так как $\lambda_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}} = 1$, это означает, что наша вершина соединена дугой с вершиной $(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0})$. Так как $\lambda_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}, \mathbf{0}} = 1$, следовательно, вершина $(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0})$ соединена дугой с вершиной $(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Продолжая наши рассуждения, получим путь $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N) \rightarrow (\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \rightarrow \dots \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, где $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ — корень дерева, а количество вершин в пути не более чем $N + 1$. Таким образом, вершина $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N)$ является вершиной уровня $l \leq N$, что противоречит условию $l > N$.

2. *Предположение индукции.* Предположим, что в массиве $A^{(n-1)}$ единицы стоят только на местах, соответствующих вершинам уровня $l \leq N + n - 1$, и нигде больше.

3. *Шаг индукции.* Докажем, что в массиве $A^{(n)}$ единицы стоят только на местах, соответствующих вершинам уровня $l \leq N + n$, и нигде больше. Согласно (14) элементы $A^{(n)}$ имеют вид

$$a_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N}^{(n)} = \sum_{\mathbf{j} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}} a_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}}^{(n-1)}$$

Рассмотрим элемент $A^{(n)}$, соответствующий вершине $\mathbf{A} = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N)$ уровня $l > N + n$. Предположим, что он равняется единице, т. е. $\sum_{\mathbf{j} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}} a_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}}^{(n-1)} = 1$. Среди $a_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}}^{(n-1)}$ могут быть единицы, а могут быть числа из $[0, 1)$. Разобьем сумму на две части:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{j} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}} a_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}}^{(n-1)} &= \sum_{\mathbf{j}: a_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}}^{(n-1)} = 1} \lambda_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}} + \\ &+ \sum_{\mathbf{j}: a_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}}^{(n-1)} \neq 1} \lambda_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}} a_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}}^{(n-1)} = 1, \end{aligned} \quad (15)$$



где $\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j}$, ($j : a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)} = 1$) — это связи вершины \mathbf{A} с вершинами уровня $l \leq N + n - 1$. Следует отметить, что изначально вершина \mathbf{A} не была связана с вершинами этих уровней. Дополнительная связь могла появиться только при построении графа Γ . Поэтому возможно, что все такие $\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j} = 0$. Значения $\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j}$ ($j : a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)} \neq 1$) — это связи вершины \mathbf{A} с вершинами более низкого уровня, кроме уже рассмотренных вершин уровня $l \leq N + n - 1$. Следует отметить, что хотя бы одно из $\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j}$ отлично от нуля, так как иначе окажется, что \mathbf{A} — изолированная вершина.

В силу условий (10), (11) справедливо равенство

$$\sum_{j: a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)} = 1} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j} = 1 - \sum_{j: a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)} \neq 1} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j}.$$

Поэтому равенство (15) можно преобразовать к следующему виду:

$$1 - \sum_{j: a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)} \neq 1} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j} + \sum_{j: a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)} \neq 1} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j} a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(-1)} = 1,$$

$$\sum_{j: a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)} \neq 1} \lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j} (1 - a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)}) = 0.$$

Сумма неотрицательных слагаемых равна нулю, когда каждое из слагаемых равно нулю. Поскольку $a_{i_2, i_3, \dots, i_N, j}^{(n-1)} \neq 1$, следовательно, $\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_N, j} = 0$, что невозможно, так как хотя бы одно из них должно быть отлично от нуля. Получили противоречие. \square

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К).

Библиографический список

1. Jiang H., Li D., Jin N. Multiresolution analysis on local fields // J. Math. Anal. Appl. 2004. Vol. 294. P. 523–532.
2. Протасов В. Ю., Фарков Ю. А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. 2006. Т. 197, вып. 10. С. 129–160. DOI: 10.4213/sm1126.
3. Протасов В. Ю. Аппроксимация диадическими всплесками // Матем. сб. 2007. Т. 198, вып. 11. С. 135–152. DOI: 10.4213/sm1981.
4. Farkov Yu. A. Multiresolution Analysis and Wavelets on Vilenkin Groups // Facta universitatis, Ser. Elec. Energ. 2008. Vol. 21, № 3. P. 309–325.
5. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, вып. 3. С. 193–220. DOI: 10.4213/im644.
6. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82, вып. 6. С. 934–952. DOI: 10.4213/mzm4181.
7. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, № 1. P. 42–65.
8. Li D., Jiang H. The necessary condition and sufficient conditions for wavelet frame on local fields // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 345. P. 500–510.
9. Behera B., Jahan Q. Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 395. P. 1–14. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.02.066.
10. Behera B., Jahan Q. Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions // Adv. Pure. Appl. Math. 2012. Vol. 3. P. 181–202. DOI: 10.1515/apam-2011-0016.
11. Behera B., Jahan Q. Biorthogonal Wavelets on Local Fields of Positive Characteristic // Comm. in Math. Anal. 2013. Vol. 15, № 2. P. 52–75.
12. Taibleson M. H. Fourier Analysis on Local Fields. Princeton : Princeton Univ. Press, 1975.
13. Lukomskii S. F., Vodolazov A. M. Non-Haar MRA on local Fields of positive characteristic. Preprint. 2014. URL: <http://arxiv.org/abs/1407.4069> (Accessed 15.07.2014).
14. Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S. On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic. Preprint. 2015. URL: <http://arxiv.org/abs/1503.08600> (Accessed 30.03.2015).
15. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля : в 2 т. М. : Мир, 1988.
16. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И. Теория представлений и автоморфные функции. М. : Наука, 1966. 512 с.
17. Водолазов А. М., Лукомский С. Ф. КМА на локальных полях положительной характеристики // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 511–518.



On Accuracy of Estimation of the Number of Steps for the Algorithm for Construction of Scaling Function on Local Fields

Iu. S. Kruss

Kruss Iuliia Sergeevna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KrussUS@gmail.com

In this paper we discuss a problem of accuracy of estimation of the number of steps for the algorithm for construction of orthogonal scaling function which generates multiresolution analysis on local fields of positive characteristic. The resulting function is a step function with a compact support. The number of steps in the algorithm is closely related to the support of the Fourier transformation of the scaling function. Thus the estimate for number of steps is not only of computational interest. The upper estimate for this number was already known. In this work the accurate number of steps is found. It appears to be equal to the previously known upper estimate.

Key words: local fields of positive characteristic, scaling function, multiresolution analysis.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (projects no. 1.1520.2014/K).

References

1. Jiang H., Li D., Jin N. Multiresolution analysis on local fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, vol. 294, pp. 523–532.
2. Protasov V. Yu., Farkov Y. A. Dyadic wavelets and refinable functions on a halfline. *Mat. Sb.*, 2006, vol. 197, iss. 10, pp. 1529–1558. DOI: 10.4213/sm1126.
3. Protasov V. Yu. Approximation by dyadic wavelets. *Mat. Sb.*, 2007, vol. 198, iss. 11, pp. 1665–1681. DOI: 10.4213/sm1981.
4. Farkov Yu. A. Multiresolution Analysis and Wavelets on Vilenkin Groups. *Facta universitatis, Ser. Elec. Energ.*, 2008, vol. 21, no. 3, pp. 309–325.
5. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets with compact support on locally compact abelian groups. *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 2005, vol. 69, iss. 3, pp. 623–650. DOI: 10.4213/im644.
6. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups. *Mat. Zametki.*, 2007, vol. 82, iss. 6, pp. 843–859. DOI: 10.4213/mzm4181.
7. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 42–65.
8. Li D., Jiang H. The necessary condition and sufficient conditions for wavelet frame on local fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 345, pp. 500–510.
9. Behera B., Jahan Q. Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 395, pp. 1–14. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.02.066.
10. Behera B., Jahan Q. Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions. *Adv. Pure. Appl. Math.*, 2012, vol. 3, pp. 181–202. DOI: 10.1515/apam-2011-0016.
11. Behera B., Jahan Q. Biorthogonal Wavelets on Local Fields of Positive Characteristic. *Comm. in Math. Anal.*, 2013, vol. 15, no. 2, pp. 52–75.
12. Taibleson M. H. *Fourier Analysis on Local Fields*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1975.
13. Lukomskii S. F., Vodolazov A. M. *Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic*. Preprint. 2014. Available at: <http://arxiv.org/abs/1407.4069>. (Accessed 15, July, 2014).
14. Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S. *On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic*. Preprint. 2015. Available at: <http://arxiv.org/abs/1503.08600>. (Accessed 30, March, 2015).
15. Lidl R., Niederreiter H. *Finite Fields*. Encyclopedia Math. Appl., vol. 20, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1983, 755 p.
16. Gelfand I. M., Graev M. I., Piatetski-Shapiro I. I. *Theory of automorphic functions*. W.B.Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1969, 426 p. (Rus. ed. : Gelfand I. M., Graev M. I., Piatetski-Shapiro I. I. Teorija predstavlenij i avtomorfnye funkcii. Moscow, Nauka, 1966, 512 p.)
17. Vodolazov A. M., Lukomskii S. F. MRA on Local Fields of Positive Characteristic. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 2, pp. 511–518 (in Russian).



УДК 517.518.82

ПРАВИЛО СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

И. В. Тихонов¹, В. Б. Шерстюков², М. А. Петросова³

¹Тихонов Иван Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики факультета ВМК, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, ivtikh@mail.ru

²Шерстюков Владимир Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», shervb73@gmail.com

³Петросова Маргарита Арсеновна, аспирантка кафедры математического анализа, Московский педагогический государственный университет, petrosova05@mail.ru

Изучаются специальные закономерности, возникающие в последовательности полиномов Бернштейна на симметричном отрезке $[-1, 1]$. Установлено явное правило регулярного попарного совпадения (правило склеивания), действующее для полиномов Бернштейна в случае кусочно-линейной порождающей функции с рациональными абсциссами точек излома. Показана точность этого правила для выпуклых кусочно-линейных порождающих функций. Отмечена возможность «случайных» склеиваний полиномов Бернштейна в невыпуклом случае. Рассмотрены примеры и иллюстрации.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, симметричный отрезок, кусочно-линейные функции, правило склеивания.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300

Полиномы Бернштейна, помимо фундаментальных аппроксимирующих свойств, подчинены многочисленным комбинаторным и алгебраическим закономерностям, запись которых может изменяться при переносе конструкции на другой отрезок. В настоящем сообщении будет проведено исследование тех принципов, что действуют на симметричном отрезке $[-1, 1]$. Установленные правила представляют интерес при практическом использовании полиномов Бернштейна.

1. ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА

Для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, полиномы Бернштейна вводят формулой

$$B_n(f, x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{(b-a)k}{n} + a\right) C_n^k (x-a)^k (b-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь x — вещественная переменная, а C_n^k — биномиальные коэффициенты:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad C_0^0 = 1.$$

Ясно, что $B_n(f, x)$ — алгебраический полином переменной x , причем

$$\deg B_n(f, x) \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В случае простейшего отрезка $[0, 1]$ получаем стандартные полиномы Бернштейна:

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обычно изучают именно их (см. [1–5]).

Сейчас нас интересует случай симметричного отрезка $[-1, 1]$, имеющий свою специфику. Согласно общему определению полиномы Бернштейна для функции $f \in C[-1, 1]$ вводят формулой

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Случай симметричного отрезка важен для практики. Структура многих функций более естественно проявляется на $[-1, 1]$, чем при переносе этих функций на $[0, 1]$.

Непосредственное вычисление полиномов Бернштейна часто выявляет любопытные закономерности. Некоторые из них допускают простое объяснение, другие требуют специального анализа. Приведем пример, сочетающий сразу несколько особенностей.



2. ХАРАКТЕРНЫЙ ПРИМЕР

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -1 \leq x \leq -1/2, \\ 0, & -1/2 \leq x \leq 1/2, \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Функция (2) является нечетной, кусочно-линейной на $[-1, 1]$ с изломами в точках

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

График функции представлен на рисунке.

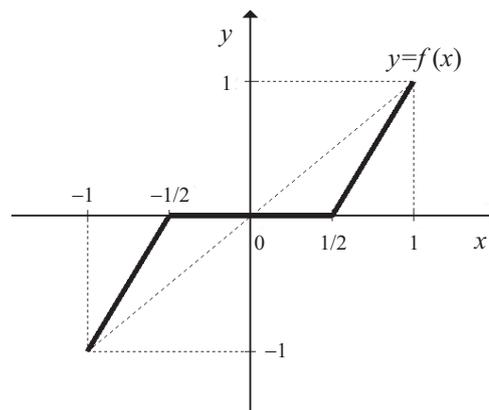


График функции (2)

Прямые вычисления по формуле (1) дают несколько первых полиномов Бернштейна:

$$\begin{aligned} B_1(f, x) &= x, & B_2(f, x) &= x, & B_3(f, x) &= \frac{1}{4}(3x + x^3), \\ B_4(f, x) &= \frac{1}{2}(x + x^3), & B_5(f, x) &= \frac{1}{2}(x + x^3), \\ B_6(f, x) &= \frac{1}{16}(7x + 10x^3 - x^5), & B_7(f, x) &= \frac{1}{32}(11x + 25x^3 - 3x^5 - x^7), \\ B_8(f, x) &= \frac{1}{8}(2x + 7x^3 - x^7), & B_9(f, x) &= \frac{1}{8}(2x + 7x^3 - x^7). \end{aligned}$$

Обратим внимание на такие особенности. Большинство полиномов представленного списка *вырождаются*, т.е. имеют степень меньше собственного номера. Отчасти это связано с соображениями нечетности, но, впрочем, не только. Также влияют совпадения

$$B_2(f, x) = B_1(f, x), \quad B_5(f, x) = B_4(f, x), \quad B_9(f, x) = B_8(f, x).$$

Первое из них вызвано особыми причинами — тем, что точки графика с абсциссами $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ попадают на одну прямую $y = x$ (ср. рисунок и лемму 5). Последующие совпадения вида

$$B_{4m+1}(f, x) = B_{4m}(f, x), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

будут регулярными и продолжатся до бесконечности. Причина заключена в точках излома (3). Отнюдь не очевидно, но правило (4) «учитывает» то, что в записи несократимых дробей (3) содержится четное число (см. теорему 1).

Отмеченные обстоятельства требуют осмысления. Начнем с элементарных наблюдений, связанных с четностью или нечетностью порождающей функции.

3. СООБРАЖЕНИЯ ЧЕТНОСТИ И НЕЧЕТНОСТИ

Симметричный отрезок $[-1, 1]$ естественно приспособлен для изучения четных и нечетных функций. Логично предположить, что полиномы (1) наследуют свойства четности или нечетности порождающей функции $f(x)$. Это действительно так.

Лемма 1. Пусть $f \in C[-1, 1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f, x)$, определенными по формуле (1). Тогда справедливы утверждения:

1) если $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in [-1, 1]$, то

$$B_n(f, -x) = B_n(f, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (5)$$

2) если $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in [-1, 1]$, то

$$B_n(f, -x) = -B_n(f, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Доказательство. При всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $n \in \mathbb{N}$ по формуле (1) получаем:

$$\begin{aligned} B_n(f, -x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k (1-x)^k (1+x)^{n-k} = \{k = n - m\} = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n f\left(\frac{2(n-m)}{n} - 1\right) C_n^{n-m} (1-x)^{n-m} (1+x)^m = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n f\left(1 - \frac{2m}{n}\right) C_n^m (1+x)^m (1-x)^{n-m}. \end{aligned}$$

Обозначим индекс суммирования снова через k . В результате имеем:

$$B_n(f, -x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Если $f(x)$ является четной, то

$$f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) = f\left(\frac{2k}{n} - 1\right).$$

Сравнивая (1) и (7), видим, что тогда $B_n(f, -x) = B_n(f, x)$, т.е. выполнено соотношение (5).

Если $f(x)$ является нечетной, то

$$f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) = -f\left(\frac{2k}{n} - 1\right).$$

Но тогда $B_n(f, -x) = -B_n(f, x)$, т.е. выполнено соотношение (6). Тем самым, оба утверждения леммы доказаны. \square

Итак, полиномы Бернштейна (1), построенные по четной функции $f(x)$, содержат в алгебраической записи только четные степени x . Аналогично, полиномы, построенные по нечетной функции $f(x)$, содержат в алгебраической записи только нечетные степени x . Это обстоятельство влечет за собой следующее *свойство вырожденности*, действующее для полиномов Бернштейна четных или нечетных функций.

Лемма 2. Пусть $f \in C[-1, 1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f, x)$, определенными по формуле (1). Тогда справедливы такие утверждения:

1) если $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in [-1, 1]$, то

$$\deg B_{2m+1}(f, x) \leq 2m, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \cup \{0\};$$

2) если $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in [-1, 1]$, то

$$\deg B_{2m}(f, x) \leq 2m - 1, \quad m \in \mathbb{N}.$$



Доказательство. Отмеченные соотношения суть прямые следствия того, что полиномы Бернштейна сохраняют четность или нечетность порождающей функции $f(x)$. \square

Перечисленные соображения полезны на практике, но элементарны и приведены для полноты изложения. Более тонким является другой вопрос — о появлении в последовательности полиномов Бернштейна регулярно совпадающих (склеивающихся) пар. Точный закон такого совпадения будем называть *правилом склеивания*. Основные результаты на сей счет представлены в следующем пункте.

4. ПРАВИЛО СКЛЕИВАНИЯ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Возможность попарных совпадений в последовательности полиномов Бернштейна впервые подмечена в [6] для кусочно-линейных выпуклых функций $f(x)$ на $[0, 1]$. Некоторые аспекты такого явления изучались затем в [7–10]. Формулировка, восходящая к [6], кажется нам не вполне удачной: соотношение $B_{n+1}(f, x) = B_n(f, x)$ с фиксированным $n \in \mathbb{N}$ гарантируется для стандартных полиномов Бернштейна на $[0, 1]$ при условии, что функция $f(x)$ линейна на отрезках вида

$$\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right], \quad j = 1, \dots, n.$$

Подобный подход, исходящий из номера совпадения, а не из особенностей выбранной функции, не слишком удобен на практике. Поставим, например, вопрос о возможных совпадениях стандартных полиномов Бернштейна для кусочно-линейной функции $f(x)$, заданной на $[0, 1]$, с изломами в точках

$$x_1 = \frac{1}{7}, \quad x_2 = \frac{1}{6}, \quad x_3 = \frac{1}{5}, \quad x_4 = \frac{1}{4}, \quad x_5 = \frac{1}{3}, \quad x_6 = \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Пользуясь указанной формулировкой, трудно угадать правильный ответ, который состоит в том, что $B_{420m+1}(f, x) = B_{420m}(f, x)$ при любом $m \in \mathbb{N}$.

Более практичная формулировка предложена в [11]: на $[0, 1]$ действует универсальное правило $B_{qm+1}(f, x) = B_{qm}(f, x)$, где $m \in \mathbb{N}$, а q — наименьший общий знаменатель дробей, выражающих абсциссы точек излома. От функции $f(x)$ требуется только кусочная линейность, от точек излома — только рациональность абсцисс. Прочие соображения оказываются не важны; разбор примера (8) становится элементарным. Отметим также, что наш интерес к проблематике вызван предыдущим исследованием [12], посвященным полиномам Бернштейна для функции

$$f(x) = |2x - 1|, \quad x \in [0, 1].$$

В этом принципиальном примере правило склеивания $B_{2m+1}(f, x) = B_{2m}(f, x)$ играло центральную роль. Дополнительные подробности по свойству склеивания на $[0, 1]$ представлены в обзоре [5].

Обратимся теперь к симметричному отрезку $[-1, 1]$. Простая идея — взять кусочно-линейную функцию на $[-1, 1]$, перенести ее на $[0, 1]$ и воспользоваться прежними результатами — вполне пригодна в каждом конкретном случае. Но такой подход не позволяет выявить подлинной закономерности. Дело в том, что несократимые дроби на $[-1, 1]$ переходят в некие дроби на $[0, 1]$, чей наименьший общий знаменатель сложно зависит от характера первоначальных дробей на $[-1, 1]$. Желательно дать универсальное правило в терминах исходной функции. Окончательный результат выглядит так.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно-линейна на $[-1, 1]$ с конечным числом точек излома, причем абсциссы всех точек излома рациональны и записаны в виде несократимых дробей

$$x_j = \frac{p_j}{q_j}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (9)$$

где

$$p_j \in \mathbb{Z}, \quad q_j \in \mathbb{N}, \quad |p_j| < q_j, \quad j = 1, \dots, r. \quad (10)$$

Пусть q — наименьшее общее кратное знаменателей q_1, \dots, q_r . Тогда если все числа $p_j, q_j, j = 1, \dots, r$, являются нечетными, то полиномы Бернштейна (1) функции $f(x)$ подчинены правилу попарного склеивания:

$$B_{qm+1}(f, x) = B_{qm}(f, x), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (11)$$



Если же среди чисел $p_j, q_j, j = 1, \dots, r$, есть хотя бы одно четное число, то правило склеивания приобретает вид

$$B_{2qm+1}(f, x) = B_{2qm}(f, x), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Представленные правила (11) и (12) описывают регулярные цепочки склеиваний, неизбежно возникающие в последовательностях полиномов Бернштейна для кусочно-линейных функций на $[-1, 1]$. Полезно иметь в виду, что при дополнительном требовании *выпуклости*, наложенном на порождающую функцию $f(x)$, какие-либо иные попарные совпадения, кроме отмеченных в теореме 1, будут уже невозможны. Другими словами, справедлив такой результат, показывающий точность теоремы 1 для выпуклых кусочно-линейных функций.

Теорема 2. Пусть непрерывная кусочно-линейная функция $f(x)$ удовлетворяет предположениям теоремы 1 и, кроме того, является выпуклой вверх или выпуклой вниз на $[-1, 1]$. Тогда для полиномов Бернштейна (1) функции $f(x)$ действует соотношение

$$B_{n+1}(f, x) \neq B_n(f, x) \quad (13)$$

при всех номерах $n \in \mathbb{N}$, кроме указанных в теореме 1.

Точнее, если несократимые дроби (9), выражающие абсциссы точек излома функции $f(x)$, содержат только нечетные значения $p_j, q_j, j = 1, \dots, r$, то соотношение (13) действует при всех $n \in \mathbb{N}$, кроме случаев, отмеченных в правиле (11). Значение q в правиле (11) есть наименьшее общее кратное для знаменателей дробей (9).

Если же несократимые дроби (9) содержат в своей записи хотя бы одно четное число среди значений $p_j, q_j, j = 1, \dots, r$, то соотношение (13) действует при всех $n \in \mathbb{N}$, кроме случаев, отмеченных в правиле (12), где q — по-прежнему наименьшее общее кратное для знаменателей дробей (9).

Теоремы 1 и 2 являются основными результатами статьи. Для замкнутости изложения обоснуем их независимо, не апеллируя к отрезку $[0, 1]$. Ключевую роль в рассуждениях играет специальная формула, выражающая разность двух последовательных полиномов Бернштейна.

5. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФОРМУЛА ТЕМПЛА

Нужная формула впервые появилась в работе Темпла [13] для стандартных полиномов Бернштейна на $[0, 1]$. Позже и независимо это же соотношение переоткрывалось в работах [6, 14] (см. также [3, с. 115] и [4, с. 309–310]). Модификация на $[-1, 1]$ выглядит более громоздко, но будет полезной при систематическом изучении полиномов Бернштейна на симметричном отрезке. Приведем соответствующий результат вместе с полным выводом.

Лемма 3. Пусть $f \in C[-1, 1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f, x)$, определенными по формуле (1). Тогда

$$B_{n+1}(f, x) - B_n(f, x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n Q_{n,k}(f) (1+x)^k (1-x)^{n-k+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

где

$$Q_{n,k}(f) = C_{n+1}^k f\left(\frac{2k}{n+1} - 1\right) - C_n^k f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) - C_n^{k-1} f\left(\frac{2(k-1)}{n} - 1\right). \quad (15)$$

Доказательство. Основываясь на (1), имеем:

$$\begin{aligned} B_n(f, x) &= B_n(f, x) \cdot \frac{(1-x) + (1+x)}{2} = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \left[(1+x)^k (1-x)^{n-k+1} + (1+x)^{k+1} (1-x)^{n-k} \right]. \end{aligned}$$



Разобьем на две суммы и во второй перейдем к нумерации по k от 1 до $n + 1$. Получим:

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n f \left(\frac{2k}{n} - 1 \right) C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} f \left(\frac{2(k-1)}{n} - 1 \right) C_n^{k-1} (1+x)^k (1-x)^{n-k+1}.$$

Из первой суммы выделим слагаемое с $k = 0$, из второй — с $k = n + 1$. В итоге

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^{n+1}} \left(f(-1)(1-x)^{n+1} + f(1)(1+x)^{n+1} \right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n \left[C_n^k f \left(\frac{2k}{n} - 1 \right) + C_n^{k-1} f \left(\frac{2(k-1)}{n} - 1 \right) \right] (1+x)^k (1-x)^{n-k+1}.$$

Для полинома $B_{n+1}(f, x)$ имеем соответственно

$$B_{n+1}(f, x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} f \left(\frac{2k}{n+1} - 1 \right) C_{n+1}^k (1+x)^k (1-x)^{n-k+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(f(-1)(1-x)^{n+1} + f(1)(1+x)^{n+1} \right) + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k f \left(\frac{2k}{n+1} - 1 \right) (1+x)^k (1-x)^{n-k+1}.$$

Взяв разность $B_{n+1}(f, x) - B_n(f, x)$, приходим к заявленной формуле (14) с коэффициентами вида (15). \square

Тот же Темпл, первым подметил в [13], что коэффициенты подобных формул допускают геометрическое истолкование (см. также [4, с. 309–310] и [6, 14]). В нашем случае эта идея воплощается так.

Рассмотрим коэффициенты $Q_{n,k}(f)$ в записи (15). Применим тождество

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$$

и получим

$$Q_{n,k}(f) = C_n^{k-1} \left(f \left(\frac{2k}{n+1} - 1 \right) - f \left(\frac{2(k-1)}{n} - 1 \right) \right) - C_n^k \left(f \left(\frac{2k}{n} - 1 \right) - f \left(\frac{2k}{n+1} - 1 \right) \right).$$

Теперь, воспользовавшись обозначением для разделенных разностей

$$[f; x_1, x_0] \equiv \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

нетрудно проверить, что

$$Q_{n,k}(f) = -\frac{2}{n+1} C_{n-1}^{k-1} \left(\left[f; \frac{2k}{n} - 1, \frac{2k}{n+1} - 1 \right] - \left[f; \frac{2k}{n+1} - 1, \frac{2(k-1)}{n} - 1 \right] \right). \quad (16)$$

Переходя к разделенным разностям второго порядка

$$[f; x_2, x_1, x_0] \equiv \frac{[f; x_2, x_1] - [f; x_1, x_0]}{x_2 - x_0},$$

имеем запись

$$Q_{n,k}(f) = -\frac{4}{n(n+1)} C_{n-1}^{k-1} \left[f; \frac{2k}{n} - 1, \frac{2k}{n+1} - 1, \frac{2(k-1)}{n} - 1 \right]. \quad (17)$$

При работе с формулами (16), (17) полезно учитывать расположение точек

$$-1 \leq \frac{2(k-1)}{n} - 1 < \frac{2k}{n+1} - 1 < \frac{2k}{n} - 1 \leq 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

верное при любом $n \in \mathbb{N}$.

6. НУЖНЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ФОРМУЛЫ ТЕМПЛА

Выясним теперь, при каких условиях возможно совпадение двух последовательных полиномов Бернштейна. Ясно, что вся необходимая информация заложена в формулу Темпла (14). Наиболее удобно работать с коэффициентами в записи (17), поскольку разделенные разности второго порядка имеют прозрачный геометрический смысл.

Справедлив очевидный принцип: разделенная разность $[f; x_2, x_1, x_0]$ равна нулю тогда и только тогда, когда тройка точек

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$$

расположена на одной прямой. Отсюда извлекаем следующий результат.

Лемма 4. Пусть $f \in C[-1, 1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f, x)$, определенными по формуле (1). Для выполнения соотношения

$$B_{\nu+1}(f, x) = B_{\nu}(f, x) \tag{18}$$

с некоторым фиксированным значением $\nu \in \mathbb{N}$ необходимо и достаточно, чтобы при каждом $k \in \{1, \dots, \nu\}$ точка

$$\left(\frac{2k}{\nu+1} - 1, f\left(\frac{2k}{\nu+1} - 1\right) \right) \tag{19}$$

находилась на прямой, соединяющей точки

$$\left(\frac{2(k-1)}{\nu} - 1, f\left(\frac{2(k-1)}{\nu} - 1\right) \right), \quad \left(\frac{2k}{\nu} - 1, f\left(\frac{2k}{\nu} - 1\right) \right). \tag{20}$$

Доказательство. Согласно формуле (14), примененной к фиксированному значению $n = \nu$, для выполнения соотношения (18) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $Q_{\nu,k}(f)$ обращались в нуль при $k = 1, \dots, \nu$. Достаточность понятна. Для доказательства необходимости надо заметить, что система функций

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2^{\nu+1}} (1+x)^k (1-x)^{\nu-k+1}, \quad k = 1, \dots, \nu,$$

линейно независима на $[-1, 1]$, поскольку после подстановки $x = \gamma(t) \equiv (t-1)/(t+1)$ с переменной $t \geq 0$ получим систему

$$\psi_k(t) \equiv \varphi_k(\gamma(t)) = \frac{t^k}{(t+1)^{\nu+1}}, \quad k = 1, \dots, \nu,$$

очевидно линейно независимую на $[0, \infty)$. Основываясь затем на записи (17), замечаем, что каждый коэффициент $Q_{\nu,k}(f)$ равен нулю тогда и только тогда, когда соответствующая точка (19) попадает на прямую, соединяющую точки (20). Лемма доказана. \square

Особо отметим следующий частный случай леммы 4. Он, кстати, был реализован ранее в примере для функции (2).

Лемма 5. Пусть $f \in C[-1, 1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f, x)$, определенными по формуле (1). Для выполнения соотношения

$$B_2(f, x) = B_1(f, x) \tag{21}$$

необходимо и достаточно, чтобы серединная точка $(0, f(0))$ графика функции $f(x)$ находилась на прямой, соединяющей концевые точки $(-1, f(-1)), (1, f(1))$. В частности, для выпуклой на $[-1, 1]$ функции $f(x)$ (неважно, выпуклой вверх или выпуклой вниз) соотношение (21) возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ линейна на $[-1, 1]$.

Доказательство. Утверждение леммы 5 непосредственно следует из леммы 4, взятой со значением $\nu = 1$. Понятно, что в выпуклом случае промежуточная точка $(0, f(0))$ может находиться на прямой,



соединяющей концевые точки $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$, тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ линейна на $[-1, 1]$. \square

Совпадение (21) возникает обычно изолировано — оно не вписывается в общие правила (11), (12), отмеченные в теореме 1. Приведем теперь другой результат, также основанный на лемме 4, но имеющий прямое отношение к регулярным цепочкам склеиваний.

Лемма 6. Пусть $f \in C[-1, 1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f, x)$, определенными по формуле (1). Предположим, что функция $f(x)$ кусочно-линейна на $[-1, 1]$ с конечным числом точек излома, абсциссы которых рациональны и записаны в виде несократимых дробей (9) при ограничениях (10). Допустим, что дроби (9) представимы в виде

$$\frac{p_j}{q_j} = \frac{2k_j}{\nu} - 1, \quad k_j \in \mathbb{N}, \quad k_j < \nu, \quad j = 1, \dots, r, \quad (22)$$

с общим фиксированным значением $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$. Тогда для такого ν имеет место совпадение (18).

Доказательство. Действительно, пусть дроби (9), выражающие абсциссы точек излома, представимы в виде (22) с общим фиксированным значением $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$. Тогда все отрезки

$$\Delta_k = \left[\frac{2(k-1)}{\nu} - 1, \frac{2k}{\nu} - 1 \right], \quad k = 1, 2, \dots, \nu, \quad (23)$$

попадают на промежутки линейности функции $f(x)$, и при каждом $k \in \{1, 2, \dots, \nu\}$ точка (19) находится на прямой, соединяющей точки (20). Применяя лемму 4, получаем требуемое соотношение (18). \square

Для выпуклых функций утверждение леммы 6 допускает такое обращение (ср. с [3, с. 115] и [6, с. 253], где аналогичное свойство с несколько иной точки зрения обсуждается на стандартном отрезке $[0, 1]$).

Лемма 7. Пусть $f \in C[-1, 1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f, x)$, определенными по формуле (1). Предположим, что функция $f(x)$ выпукла вверх или выпукла вниз на $[-1, 1]$ и отлична от линейной функции. Допустим, что при некотором $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$, имеет место совпадение (18). Тогда функция $f(x)$ является кусочно-линейной на $[-1, 1]$ с конечным числом точек излома, количество которых $r \in \mathbb{N}$ подчинено ограничению $r < \nu$. Абсциссы точек излома рациональны, и дроби, их выражающие, представимы в виде (22) с тем же значением ν , что и в (18).

Доказательство. Действительно, пусть выполнено соотношение (18) с некоторым фиксированным значением $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$. По лемме 4 каждая промежуточная точка (19) должна попадать на прямую, соединяющую соответствующие точки (20). Для выпуклой функции это возможно, если $f(x)$ линейна на каждом отрезке (23). Следовательно, функция $f(x)$ непременно будет кусочно-линейной; ее точки излома находятся среди концевых точек отрезков (23) и допускают представление вида (22). Количество таких точек может быть любым числом $r \in \mathbb{N}$, подчиненным ограничению $r < \nu$. Лемма доказана. \square

После проделанной подготовительной работы можно приступить к доказательству основных теорем 1 и 2.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно-линейна на $[-1, 1]$ с конечным числом точек излома. Считаем, что абсциссы всех точек излома рациональны и записаны в виде несократимых дробей (9) с естественными ограничениями (10).

По лемме 6 если дроби (9) представимы в виде (22) с фиксированным $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$, то гарантировано совпадение (18) с тем же значением $\nu \in \mathbb{N}$. Другими словами, представления (22) достаточны для совпадения (18). Более того, по лемме 7 если $f(x)$ является выпуклой на $[-1, 1]$ (неважно, выпуклой вверх или выпуклой вниз), то представления (22) не только достаточны, но и необходимы для совпадения (18). Проанализируем представления (22) и установим, при каких ν они возможны.



Выражая из (22) значения k_j , получим:

$$k_j = \frac{(p_j + q_j)\nu}{2q_j}, \quad j = 1, \dots, r. \quad (24)$$

С учетом предположений (10) ясно, что $0 < k_j < \nu$. Но числа k_j обязаны быть также натуральными. Выявим точное ограничение на ν , обусловленное данным требованием. Именно оно необходимо и достаточно для справедливости представлений (22).

Поскольку дроби p_j/q_j считаем несократимыми, то дроби $(p_j + q_j)/q_j$ тоже несократимы. Поэтому число ν в (24) должно делиться нацело на наименьшее общее кратное q чисел q_1, \dots, q_r . Наличие двойки в знаменателях дробей (24) влечет необходимость различать два случая.

Допустим сначала, что все числа $p_j, q_j, j = 1, \dots, r$, являются нечетными. В таком случае все суммы $p_j + q_j$ окажутся четными, и для принадлежности чисел (24) множеству \mathbb{N} необходимо и достаточно, чтобы $\nu = qm$ с некоторым значением $m \in \mathbb{N}$. Итак, для справедливости представлений (22) необходимо и достаточно, чтобы $\nu = qm$ с некоторым значением $m \in \mathbb{N}$. Но тогда действует правило склеивания (11), как и утверждает теорема 1. Более того, если $f(x)$ является выпуклой на $[-1, 1]$, то никакие иные последовательные совпадения, кроме (11), становятся невозможны, как утверждает теорема 2.

Пусть теперь среди чисел $p_j, q_j, j = 1, \dots, r$, есть какие-то четные, например, в парах

$$p_{j_s}, q_{j_s}, \quad s = 1, \dots, t.$$

Так как дроби (9) предполагаем несократимыми, то в каждой такой паре может быть только один четный элемент, и, значит, все суммы $p_{j_s} + q_{j_s}, s = 1, \dots, t$, заведомо окажутся нечетными. Следовательно, для принадлежности чисел (24) множеству \mathbb{N} необходимо и достаточно, чтобы ν делилось нацело на

$$2q_{j_1}, \dots, 2q_{j_t}, \quad (25)$$

а также на все остальные числа

$$q_j, \quad j \notin \{j_1, \dots, j_t\}, \quad (26)$$

если они есть. Среди чисел (26) четные точно отсутствуют. Поэтому наименьшим общим кратным всех чисел (25), (26) будет $2q$, и значение ν обязано делиться на $2q$. Точнее, для принадлежности чисел (24) множеству \mathbb{N} необходимо и достаточно, чтобы $\nu = 2qm$ с некоторым $m \in \mathbb{N}$. Тем самым, для справедливости представлений (22) необходимо и достаточно, чтобы $\nu = 2qm$ с некоторым значением $m \in \mathbb{N}$. Но тогда действует правило склеивания (12). Более того, если $f(x)$ является выпуклой на $[-1, 1]$, то никакие иные последовательные совпадения, кроме (12), становятся невозможны.

Теоремы 1 и 2 полностью доказаны.

8. ПРИМЕРЫ И КОММЕНТАРИИ

Установленные правила позволяют быстро выявлять регулярные цепочки склеиваний в последовательностях полиномов Бернштейна для кусочно-линейных функций на $[-1, 1]$. Требуется только следить, какой из случаев — (11) или (12) — соответствует имеющимся точкам излома. Для наглядности приведем несколько примеров. Как и прежде, обозначаем через q наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей q_1, \dots, q_r несократимых дробей (9), выражающих абсциссы точек излома. Другими словами, значение q есть наименьший общий знаменатель указанных дробей.

1. Пусть $f(x) = |3x - 1|$ на $[-1, 1]$. Функция имеет точку излома с абсциссой $x_1 = 1/3$. Здесь $p_1 = 1, q_1 = 3$ и $q = 3$. Числа p_1, q_1 являются нечетными, и по формуле (11) полиномы Бернштейна склеиваются цепочкой $B_{3m+1}(f, x) = B_{3m}(f, x)$ при $m \in \mathbb{N}$.

2. Пусть $f(x) = |2x - 1|$ на $[-1, 1]$. Функция имеет точку излома с абсциссой $x_1 = 1/2$. Здесь $p_1 = 1, q_1 = 2$ и $q = 2$, причем число q_1 является четным. По формуле (12) полиномы Бернштейна склеиваются цепочкой $B_{4m+1}(f, x) = B_{4m}(f, x)$ при $m \in \mathbb{N}$.

3. Пусть $f(x) = |5x + 3| + |3x - 1|$ на $[-1, 1]$. Функция имеет точки излома с абсциссами $x_1 = -3/5, x_2 = 1/3$. Числа $p_1 = -3, q_1 = 5, p_2 = 1, q_2 = 3$ являются нечетными, причем $q = \text{НОК}(5, 3) = 15$. По формуле (11) полиномы Бернштейна склеиваются цепочкой $B_{15m+1}(f, x) = B_{15m}(f, x)$ при $m \in \mathbb{N}$.



4. Пусть $f(x) = |5x+3| + |3x-2|$ на $[-1, 1]$. Функция имеет точки излома с абсциссами $x_1 = -3/5$, $x_2 = 2/3$. Здесь $p_1 = -3$, $q_1 = 5$, $p_2 = 2$, $q_2 = 3$. Снова $q = \text{НОК}(5, 3) = 15$, но число $p_2 = 2$ является четным. По формуле (12) полиномы Бернштейна склеиваются цепочкой $B_{30m+1}(f, x) = B_{30m}(f, x)$ при $m \in \mathbb{N}$, что в два раза реже, чем в предыдущем примере.

5. Пусть $f(x) = |7x-1| + |6x-1| + |5x-1| + |4x-1| + |3x-1| + |2x-1|$ на $[-1, 1]$. Функция имеет те же точки излома, что и в примере (8), обсуждавшемся на $[0, 1]$ ранее. Поскольку в записи дробей (8) встречаются четные числа, то по формуле (12) полиномы Бернштейна на $[-1, 1]$ склеиваются цепочкой $B_{840m+1}(f, x) = B_{840m}(f, x)$ при $m \in \mathbb{N}$, что в два раза реже, чем для того же выражения $f(x)$, но взятого на $[0, 1]$.

6. Пусть $f(x) = |x|$ на $[-1, 1]$. Единственная точка излома $x_1 = 0$ дает значения $p_1 = 0$, $q_1 = 1$ и $q = 1$. Так как число p_1 является четным, то по формуле (12) полиномы Бернштейна склеиваются цепочкой

$$B_{2m+1}(f, x) = B_{2m}(f, x), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

Регулярная цепочка (27) — наиболее «частая» из возможных. Ее также порождает любая другая кусочно-линейная функция на $[-1, 1]$ с единственной точкой излома в нуле. Отметим, кстати, что свойство склеивания обладает сильной неустойчивостью, и при малейших возмущениях точки излома регулярная цепочка склеиваний «переформатируется», выдавая результат, сколь угодно далекий от исходного.

7. Пусть $f(x) = |x|$, $f_1(x) = |x - x_1|$, $f_2(x) = |x - x_2|$ на $[-1, 1]$ со значениями

$$x_1 \equiv \frac{1}{1001}, \quad x_2 \equiv \frac{1}{1002}.$$

Структура функций однотипна, значения близки, но правило склеивания действует совершенно по-разному: для функции $f(x)$ выполнено прежнее соотношение (27), в то время как для возмущенных функций имеем цепочки

$$B_{1001m+1}(f_1, x) = B_{1001m}(f_1, x), \quad B_{2004m+1}(f_2, x) = B_{2004m}(f_2, x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\text{НОК}(2, 1001, 2004) = 1001 \cdot 2004 = 2006004$, то первое совместное совпадение произойдет лишь на номере $\nu = 2006004$, когда

$$B_{2006005}(f, x) \equiv B_{2006004}(f, x), \quad B_{2006005}(f_k, x) \equiv B_{2006004}(f_k, x), \quad k = 1, 2,$$

сразу для трех указанных функций.

В представленных примерах все функции являются выпуклыми вниз на $[-1, 1]$. По теореме 2 отсюда следует, что среди их полиномов Бернштейна нет никаких других последовательных совпадений, кроме указанных выше по правилам теоремы 1. Иначе говоря, в примерах 1–7 указанными цепочками склеиваний всё и исчерпывается.

Более того, для полиномов Бернштейна от непрерывной выпуклой функции никакие случайные склеивания вообще невозможны, и ситуация полностью покрывается леммами 5, 7 и теоремами 1, 2. Действительно, пусть, например, функция $f(x)$ непрерывна и выпукла вниз (или вверх) на $[-1, 1]$ и отлична от линейной функции. По лемме 7 хоть одно разовое совпадение двух последовательных полиномов Бернштейна непременно влечет соответствующую кусочно-линейную природу функции $f(x)$. Но тогда к полиномам Бернштейна для $f(x)$ будет применима теорема 1, гарантирующая наличие регулярной цепочки склеиваний, причем по теореме 2 исходное разовое совпадение полиномов Бернштейна должно встроиться в эту цепочку.

Без требования выпуклости картина сложнее. Исправляя неточность, допущенную в [5, с. 144], специально подчеркнем, что в невыпуклом случае, помимо регулярных цепочек склеиваний, возможны и случайные совпадения отдельных полиномов, возникающие из-за специфики той или иной порождающей функции. Соответствующий пример уже фигурировал в п. 2 для функции $f(x)$ из формулы (2). Напомним, что там $B_2(f, x) = B_1(f, x) = x$ вне всякой связи с регулярным законом (4). Отмеченное совпадение полностью объясняется частной леммой 5. Множество других примеров случайных склеиваний без труда строится с учетом основной леммы 4. Обсудим это обстоятельство отдельно.



9. СЛУЧАЙНОЕ СКЛЕИВАНИЕ В НЕВЫПУКЛОМ СЛУЧАЕ

Каждое разовое совпадение $B_{\nu+1}(f, x) = B_{\nu}(f, x)$ двух последовательных полиномов Бернштейна должно быть согласовано с леммой 4. Однако точки (19) могут «случайно» оказаться на прямых, соединяющих соответствующие точки (20), без непосредственной связи с расположением точек излома. Именно так и происходит со значением $\nu = 1$ для функции (2), когда точка графика $(0, f(0))$ попадает на прямую, проходящую через точки $(-1, f(-1))$ и $(1, f(1))$ (см. рисунок).

Развивая идею, легко указать конструкцию кусочно-линейной функции $f(x)$ с выполненным соотношением $B_{\nu+1}(f, x) = B_{\nu}(f, x)$ для любого заранее предписанного значения $\nu \geq 2$, не обусловленного теоремой 1.

Проще всего поступить следующим образом. Зафиксируем значение $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 2$, и рассмотрим точки

$$x_{\nu,k} \equiv \frac{2k}{\nu} - 1, \quad k = 0, 1, \dots, \nu; \quad x_{\nu+1,k} \equiv \frac{2k}{\nu+1} - 1, \quad k = 1, \dots, \nu,$$

расположив их в одну возрастающую последовательность:

$$-1 = x_{\nu,0} < x_{\nu+1,1} < x_{\nu,1} < x_{\nu+1,2} < x_{\nu,2} < \dots < x_{\nu,\nu-1} < x_{\nu+1,\nu} < x_{\nu,\nu} = 1. \quad (28)$$

Проведем теперь ломаную так, чтобы ее последовательные изломы располагались между точками (28), а в самих точках (28) ломаная пересекала бы ось абсцисс. отождествим эту ломаную с графиком кусочно-линейной функции $f(x)$. Поскольку $f(x)$ обращается в нуль во всех точках (28), то $B_{\nu+1}(f, x) = B_{\nu}(f, x) = 0$ просто по определению (1). Ясно, что данное совпадение полностью согласовано с леммой 4, но никак не связано с правилами (11) или (12) из теоремы 1, ибо абсциссы точек излома могут произвольно варьироваться между точками последовательности (28).

Подобная конструкция позволяет построить функцию $f(x) \not\equiv 0$ (кусочно-линейную или даже просто непрерывную, но непременно не выпуклую) с совпадением любой наперед заданной конечной выборки полиномов Бернштейна:

$$B_{n_1}(f, x) = B_{n_2}(f, x) = \dots = B_{n_j}(f, x)$$

вне всякой связи с теоремой 1.

Но можно ли хоть для какой-то непрерывной функции $f(x)$ добиться появления бесконечной цепочки регулярных склеиваний, не подпадающих под действие теоремы 1, нам пока неясно. Эта так называемая «проблема Пассоу» [8] до сих пор не решена и требует специального исследования. Разумеется, принципиальный ответ достаточно получить для стандартного отрезка $[0, 1]$. Некоторые подготовительные соображения и обсуждение задачи см. в [9, 10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00281).

Библиографический список

1. Lorentz G. G. Bernstein Polynomials. N.Y. : Chelsea Publ. Comp., 1986. xi+134 p.
2. Виденский В. С. Многочлены Бернштейна : учеб. пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.
3. Davis P. J. Interpolation and Approximation. N. Y. : Dover, 1975. xvi+394 p.
4. DeVore R. A., Lorentz G. G. Constructive Approximation. Berlin ; Heidelberg ; N.Y. : Springer-Verlag, 1993. x+450 p.
5. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна : старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ : ЮМИ ВЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.
6. Schoenberg I. J. On Variation Diminishing Approximation Methods // On Numerical Approximation. Proceedings of a Symposium conducted by the Math. Research Center US Army, University of Wisconsin, Madison, April 21–23, 1958 / ed. by R. E. Langer. Madison : University of Wisconsin Press, 1959. P. 249–274.
7. Freedman D., Passow E. Degenerate Bernstein polynomials // J. Approx. Theory. 1983. Vol. 39, № 1. P. 89–92.
8. Passow E. Some unusual Bernstein polynomials // Approximation Theory IV. Proc. Intern. Symposium on Approximation Theory Held at Texas A&M University, College Station, Texas, on January 10–14, 1983 / eds. C. K. Chui, L. L. Schumaker,



- J. D. Ward. N. Y. ; London : Academic Press, 1983. P. 649–652.
9. Passow E. Deficient Bernstein polynomials // J. Approx. Theory. 1989. Vol. 59, № 3. P. 282–285.
 10. Kocić Lj. M., Della Veccia B. Degeneracy of positive linear operators // Facta Universitatis (Niš). Ser. Mathematics and Informatics. 1998. Vol. 13. P. 59–72.
 11. Петухова Н. Ю., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Свойство склеивания полиномов Бернштейна для кусочно-линейных непрерывных функций // Математика, информатика, физика в науке и образовании : сб. науч. трудов к 140-летию МПГУ. М. : Прометей, 2012. С. 81–82.
 12. Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.
 13. Temple W. B. Stieltjes integral representation of convex functions // Duke Mathematical Journal. 1954. Vol. 21, № 3. P. 527–531.
 14. Aramă O. Roprietați privind monotonia șirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor // Studii și cercetări de Matematică (Cluj). 1957. Vol. 8, № 3–4. P. 195–210.

Gluing Rule for Bernstein Polynomials on the Symmetric Interval

I. V. Tikhonov¹, V. B. Sherstyukov², M. A. Petrosova³

¹Tikhonov Ivan Vladimirovich, Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, 119991, Moscow, Russia, ivtikh@mail.ru

²Sherstyukov Vladimir Borisovich, National Research Nuclear University MEPhI, 31, Kashirskoe shosse, 115409, Moscow, Russia, shervb73@gmail.com

³Petrosova Margarita Arsenovna, Moscow Pedagogical State University, 1, M. Pirogovskaya st., 199296, Moscow, Russia, petrosova05@mail.ru

We study special laws that arise in a sequence of the Bernstein polynomials on a symmetric interval. In particular, we set the exact rule of regular pairwise coincidence (gluing rule) which is acting for the Bernstein polynomials of a piecewise linear generating function with rational abscissas of break points. The accuracy of this rule for convex piecewise linear generating functions is shown. The possibility of “random” gluing for the Bernstein polynomials in a non-convex case is noted. We give also some examples and illustrations.

Key words: Bernstein polynomials, symmetric interval, piecewise linear functions, gluing rule.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00281).

References

1. Lorentz G. G. *Bernstein Polynomials*. New York, Chelsea Publ. Comp., 1986, xi+134 p.
2. Videnskii V. S. *Mnogochleny Bernshteina* [Bernstein Polynomials]. Posobie k spetskursu. Leninograd, LGPI, 1990, 64 p. (in Russian).
3. Davis P. J. *Interpolation and Approximation*. New York, Dover, 1975, xvi+394 p.
4. DeVore R. A., Lorentz G. G. *Constructive Approximation*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1993, x+450 p.
5. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. Polynomy Bernshteina: staroe i novoe [Bernstein Polynomials: the old and the new]. *Matematicheskii forum. Issledovaniia po matematicheskoi analizu*, Vladikavkaz, Publ. VNTs RAN, 2014, vol. 8, pt. 1, pp. 126–175 (in Russian).
6. Schoenberg I. J. On Variation Diminishing Approximation Methods. *On Numerical Approximation. Proceedings of a Symposium conducted by the Math. Research Center US Army*, University of Wisconsin, Madison, April 21–23, 1958 / ed. by R. E. Langer. Madison, University of Wisconsin Press, 1959, pp. 249–274.
7. Freedman D., Passow E. Degenerate Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 1983, vol. 39, no. 1, pp. 89–92. DOI: 10.1016/0021-9045(83)90071-0.
8. Passow E. Some unusual Bernstein polynomials. *Approximation Theory IV. Proceedings of the International Symposium on Approximation Theory Held at Texas A&M University*, College Station, Texas, on January 10–14, 1983 / eds. C. K. Chui, L. L. Schumaker, J. D. Ward. New York, London, Academic Press, 1983, pp. 649–652.
9. Passow E. Deficient Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 1989, vol. 59, no. 3, pp. 282–285. DOI: 10.1016/0021-9045(89)90092-0.



10. Kocić Lj. M., Della Veccia B. Degeneracy of positive linear operators. *Facta Universitatis (Niš). Ser. Mathematics and Informatics*, 1998, vol. 13, pp. 59–72.
11. Petukhova N. Yu., Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Svoistvo skleivaniia polinomov Bernsheina dlia kusochno-lineinykh nepreryvnykh funktsii [Gluing property of Bernstein polynomials for piecewise linear continuous functions]. *Matematika, informatika, fizika v nauke i obrazovanii. Sbornik nauchnykh trudov k 140-letiyu MPGU*. Moscow, Prometei, 2012, pp. 81–82 (in Russian).
12. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Priblizhenie modulua polinomami Bernsheina [The module function approximation by Bernstein polynomials]. *Vestnik ChelGU. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 15, no. 26, pp. 6–40 (in Russian).
13. Temple W. B. Stieltjes integral representation of convex functions. *Duke Mathematical Journal*, 1954, vol. 21, no. 3, pp. 527–531. DOI: 10.1215/S0012-7094-54-02152-3.
14. Aramă O. Roprietați privind monotonia șirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor. *Studii și cercetări de Matematică (Cluj)*, 1957, vol. 8, no. 3–4, pp. 195–210.

УДК 517.518

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ p -ВАРИАЦИИ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА

А. А. Тюленева

Тюленева Анна Анатольевна, аспирантка кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, anantuleneva@mail.ru

В настоящей статье мы изучаем средние Эйлера:

$$e_n^q(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} (1+q)^{-n} S_k(f)(x), \quad q \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $S_k(f)$ есть k -я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье. Для p -абсолютно непрерывных функций ($f \in C_p$, $1 < p < \infty$) мы рассматриваем их приближения средними Эйлера в равномерной и C_p -метрике в терминах модулей непрерывности $\omega_k(f)_{C_p}$, $k \in \mathbb{N}$, и наилучших приближений тригонометрическими полиномами $E_n(f)_{C_p}$. Можно отметить следующее неравенство разных метрик из теоремы 2:

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leq C_1 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

которое является точным. Доказано также следующее обобщение результата Ч. Чуи и А. Холланда.

Если ω является модулем непрерывности на $[0, \pi]$, таким что $\delta \int_{\delta}^{\pi} t^{-2} \omega(t) dt = O(\omega(\delta))$, $1 < p < \infty$ и $f \in C_p$ удовлетворяет двум свойствам: 1) $\omega_2(f, t)_{C_p} \leq C\omega(t)$; 2) $\int_{2\pi/(n+1)}^{\pi} t^{-1} \|\varphi_x(t) - \varphi_x(t+2\pi/(n+1))\|_{C_p} dt = O(\omega(1/n))$, где $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, то $\|e_n^1(f) - f\|_{C_p} \leq C\omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Даны также некоторые приложения к приближениям в метриках типа Гельдера.

Ключевые слова: функции ограниченной p -вариации, p -абсолютно непрерывные функции, средние Эйлера, наилучшее приближение, модуль непрерывности.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-300-309

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — измеримая ограниченная 2π -периодическая функция и $\xi = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода. Введем p -вариационную сумму:

$$\mathcal{W}_{\xi}^p(f) = \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p}$$



по разбиению ξ от функции f и p -вариационные модули непрерывности (см. [1]):

$$\omega_{1-1/p}(f, \delta) = \sup_{|\xi| \leq \delta} \mathcal{W}_\xi^p(f), \quad |\xi| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}), \quad \delta \in [0, 2\pi],$$

$$\omega_{k-1/p}(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1} f(x), h), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2, \quad \delta \in [0, 2\pi].$$

Здесь $\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih)$, $k \in \mathbb{N}$. Пространство C_p функций f , удовлетворяющих равенству $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_{1-1/p}(f, \delta) = 0$, является банаховым с нормой $\|f\|_{C_p} = \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-1/p}(f, 2\pi))$, где $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Можно рассматривать также обычный модуль непрерывности целого порядка $k \in \mathbb{N}$: $\omega_k(f, \delta)_{C_p} = \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k f\|_{C_p}$ и $\omega_k(f, \delta)_\infty = \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k f\|_\infty$. Известно, что $\omega_k(f, \delta)_{C_p} \leq 2\omega_{k-1/p}(f, \delta)$ (см. [1]).

Пусть $T_n = \{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix), \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $E_n(f)_{C_p} := \inf_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{C_p}$. Пространство интегрируемых на $[0, 2\pi]$ в p -й степени, по Лебегу, 2π -периодических функций $L_{2\pi}^p$ снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$. Далее будет также использоваться пространство $C_{2\pi}$ непрерывных 2π -периодических функций с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Сверткой двух функций $f, g \in L_{2\pi}^1$ называется функция $f * g(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt \in L_{2\pi}^1$. Известно, что $S_n(f)(x) = \pi^{-1} f * D_n(x)$, где $D_n(x) = \sin(n+1/2)x / (2 \sin x/2)$. Для убывающей к нулю последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty$ определим $E_{C_p}(\varepsilon) = \{f \in C_p : E_n(f)_{C_p} \leq \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Пусть $\omega(\delta)$ возрастает, непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $\omega(0) = 0$ ($\omega \in \Omega$). Тогда будем писать $\omega \in N^\alpha$, $\alpha > 0$, если для $0 < \delta < \eta \leq 2\pi$ имеем $\omega(\eta) \leq C(\eta/\delta)^\alpha \omega(\delta)$, соответственно $\omega \in B$, если $\sum_{i=n}^\infty i^{-1} \omega(i^{-1}) = O(\omega(n^{-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, и $\omega \in S^\alpha$, $\alpha > 0$, если $\sum_{i=1}^n i^{\alpha-1} \omega(i^{-1}) = O(n^\alpha \omega(n^{-1}))$, $n \in \mathbb{N}$. По поводу этих определений см. [2].

Пусть $S_k(f)(x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L_{2\pi}^1$ порядка $k \in \mathbb{Z}_+$. Будем рассматривать средние Эйлера:

$$e_n^q(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} (1+q)^{-n} S_k(f)(x), \quad q \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Подробнее об этих методах суммирования см. [3]. Далее будем использовать обозначения ($q \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$)

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x), \quad e(n, q, t) = (1+q)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \frac{\sin(k+1/2)t}{2 \sin t/2}.$$

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. Пусть $f \in C_p$, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы прямая и обратная теоремы приближения

$$E_n(f)_{C_p} \leq C \omega_k(f, 1/(n+1))_{C_p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

$$\omega_k(f, 1/n)_{C_p} \leq C n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} E_{i-1}(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Лемма 1 доказывается аналогично доказательству прямой и обратной теорем приближения в пространствах $L_{2\pi}^p$ и $C_{2\pi}$, в которых верны неравенства (1) и (2) с заменой C_p на $L_{2\pi}^p$ или $C_{2\pi}$ (см. [4, гл. 5] и [6]).

Лемма 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in C_p$, $g \in L_{2\pi}^1$. Тогда $f * g \in C_p$ и

$$\omega_{1-1/p}(f * g, \delta) \leq \omega_{1-1/p}(f, \delta) \|g\|_1, \quad \delta \in [0, 2\pi],$$

Как следствие, $\|f * g\|_{C_p} \leq \|f\|_{C_p} \|g\|_1$.

Первое утверждение леммы 2 доказано Б. И. Голубовым [5] для $\delta = 2\pi$. Его доказательство переносится на случай $\delta \in [0, 2\pi]$. Второе утверждение леммы вытекает из первого и определения нормы в C_p .

Следствие. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p$. Тогда

$$\|f - S_n(f)\|_{C_p} \leq C \ln(n+2) E_n(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Пусть $t_n \in T_n$ таков, что $\|f - t_n\|_{C_p} = E_n(f)_{C_p}$. Используя соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\|_1 / \ln n = 4/\pi$ (см. [6, гл. 2, формула (12.1)]) и лемму 2, получаем:

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_{C_p} &\leq \|f - t_n\|_{C_p} + \|t_n - S_n(t_n)\|_{C_p} + \|D_n * (t_n - f)\|_{C_p} \leq \\ &\leq (1 + \|D_n\|_1) \|f - t_n\|_{C_p} \leq C_1 \ln(n+2) E_n(f)_{C_p}. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\omega_k(f, \delta)_{C_p} \in N^k$, $\omega_{k-1/p}(f, \delta) \in N^{k-1/p}$ и класс N^α , $\alpha > 0$, содержится в любом классе S^β при $\beta > \alpha$.

Первое утверждение леммы 3 хорошо известно (см. [4, гл. 3]), второе утверждение приведено с доказательством в [7] и третье утверждение легко следует из леммы 3 известной статьи Н. К. Бари и С. Б. Стечкина [2] (см. также лемму 8).

Лемма 4. Пусть $(a_n)_{n=1}^\infty$ убывает к нулю и удовлетворяет условию Бари $\sum_{k=n}^\infty a_k/k = O(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и функция $f(x)$ задается равенством $f(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx/n$. Тогда $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, и $E_n(f)_{C_p} \leq C a_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналогичное утверждение верно в $C_{2\pi}$.

Результат леммы 4 выводится из двух утверждений Б. И. Голубова [5] (подробнее см. в [8]).

Лемма 5. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p$. Тогда $\|f - S_n(f)\|_\infty \leq C E_n(f)_{C_p}$ и $\|S_n(f)\|_\infty \leq C \|f\|_{C_p}$, где C не зависит от $n \in \mathbb{Z}_+$ и f .

Лемма 5 установлена в [1].

Лемма 6. Для ядра $e(n, q, t)$ справедливы следующие соотношения:

- 1) $|e(n, q, t)| \leq Cn$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 2\pi/n]$;
- 2) $e(n, q, t) = \left(\frac{q^2 + 2q \cos t + 1}{q^2 + 2q + 1} \right)^{n/2} \frac{\sin(n\Theta_t + t/2)}{2 \sin t/2}$, $0 < |t| < \pi$, где $\Theta_t \in (-\pi, \pi)$ однозначно определяется из условий $\sin \Theta_t = q \sin(t - \Theta_t)$, $\text{sgn}(\Theta_t) = \text{sgn}(t)$, $|\Theta_t| < |t| \leq \pi$;
- 3) $|e(n, q, t)| \leq Ct^{-1} \exp\left(\frac{-2nqt^2}{(1+q)^2\pi^2}\right)$, $0 < |t| < \pi$;
- 4) $|e(n, q, t)| \leq Cn^{1/2}t^{-2}$, $0 < |t| < \pi$.

Доказательство. 1. Для $t \in [0, 2\pi/n] \subset [0, \pi/2]$ и $0 \leq k \leq n$ имеем:

$$\sin t/2 \geq t/\pi \quad \text{и} \quad |\sin(k+1/2)t| \leq (k+1/2)t \leq (n+1/2)t \leq \frac{3}{2}nt.$$

Поэтому

$$|e(n, q, t)| \leq (1+q)^{-n} \frac{3\pi}{4t} nt \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \leq \frac{3\pi}{4} n.$$

Для $n \leq 3$ неравенство очевидно.

2. Равенство установлено в работе [9].

3. Как и в части 1, имеем неравенство $|1/(2 \sin t/2) \geq \pi/(2|t|)|$, кроме того, используем очевидную оценку $|\sin(n\Theta_t + t/2)| \leq 1$. С другой стороны,

$$\left(\frac{q^2 + 2q \cos t + 1}{q^2 + 2q + 1} \right)^{n/2} = \left(1 - \frac{4q \sin^2 t/2}{(q+1)^2} \right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln \left(1 - \frac{4q \sin^2 t/2}{(q+1)^2} \right) \right).$$



При $0 < |t| < \pi$ справедливо неравенство $0 < 4q \sin^2 t/2/(q+1)^2 < 1$, кроме того, при $y \in [0, 1)$ имеем $\ln(1-y) \leq -y$. Используя неравенства выше вместе с неравенством $\sin^2 t/2 \geq (t/\pi)^2$, $0 < |t| < \pi$, мы находим, что

$$\left(\frac{q^2 + 2q \cos t + 1}{q^2 + 2q + 1}\right)^{n/2} \leq \exp\left(\frac{-2nqt^2}{(q+1)^2\pi^2}\right).$$

Объединяя полученные оценки, находим, что справедливо утверждение 3).

4. Так как при $y \geq 0$ имеем $e^y \geq 1 + y \geq 2y^{1/2}$, то в силу 3) верно

$$|e(n, q, t)| \leq \frac{\pi (q+1)\pi}{2t (2nq)^{1/2}t} = \frac{C_1}{n^{1/2}t^2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $q > 0$. Тогда существует постоянная C , зависящая от l и q , но не от n , для которой выполнено неравенство

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \frac{1}{(k+1)^l} \leq \frac{C(q+1)^n}{(n+1)^l}.$$

Доказательство. Так как $(k+m)/(k+1) \leq m$ при $k \geq 0$ и $m \in \mathbb{N}$, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \frac{1}{(k+1)^l} &\leq l! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} = \\ &= l! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{l-1}} u^k du dt_1 \dots dt_{l-1} = \\ &= l! \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{l-1}} (q+u)^n du dt_1 \dots dt_{l-1} < \frac{l!(q+1)^{n+l}}{(n+1)\dots(n+l)} \leq \frac{C_1(q+1)^n}{(n+1)^l}, \end{aligned}$$

где $C_1 = l!(q+1)^l$. Лемма доказана.

Функция $g(t)$ почти убывает на промежутке P , если из $t_1, t_2 \in P$, $t_1 < t_2$, следует, что $f(t_2) \leq Cf(t_1)$, где C не зависит от t_1, t_2 .

Лемма 8 (см. [2]). Условие $\omega \in S^\alpha$, $\alpha > 0$, равносильно условию почти убывания функции $\varphi(t)/t^{\alpha-\beta}$ на $(0, \pi]$ для некоторого $\beta \in (0, \alpha)$.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|f - e_n^q(f)\|_{C_p} &\leq C \ln(n+2) \omega_k(f, 1/n)_{C_p}, \\ \|f - e_n^q(f)\|_{C_p} &\leq C \ln(n+2) n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} E_{i-1}(f)_{C_p}. \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем по определению, следствию и лемме 1

$$\begin{aligned} \|f - e_n^q(f)\|_{C_p} &= \left\| (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} (f - S_j(f)) \right\|_{C_p} \leq \\ &\leq C_1 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \ln(j+2) E_j(f)_{C_p} \leq \frac{C_1 \ln(n+2)}{(1+q)^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \omega_k\left(f, \frac{1}{j+1}\right)_{C_p}. \end{aligned}$$

Из первого утверждения леммы 3 стандартным образом вытекает неравенство

$$\omega_k(f, \lambda\delta)_{C_p} \leq (\lambda+1)^k \omega_k(f, \delta)_{C_p}.$$

Поэтому в силу леммы 7 получаем:

$$\begin{aligned} \|f - e_n^q(f)\|_{C_p} &\leq \frac{C_1 \ln(n+2)}{(1+q)^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \left(\frac{n+1}{j+1} + 1\right)^k \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p} \leq \\ &\leq \frac{2^{k+1} C_1 \ln(n+2)}{(1+q)^n} \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p} (n+1)^k \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \frac{1}{(j+1)^k} \leq C_2 \ln(n+2) \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{C_p}. \end{aligned}$$

Применяя второе неравенство леммы 1, получаем второе неравенство теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы неравенства

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leq C_1 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leq C_2 \omega_k(f, 1/n)_{C_p} \leq 2C_2 \omega_{k-1/p}(f, 1/n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Доказательство. По лемме 5 получаем:

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leq (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \|f - S_j(f)\|_{\infty} \leq C_3 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p},$$

что доказывает (3). Здесь C_3 — константа из первого неравенства леммы 5. Применяя (3), леммы 1 и 7, аналогично доказательству теоремы 1 имеем:

$$\begin{aligned} \|f - e_n^q(f)\|_{\infty} &\leq C_4 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \omega_k\left(f, \frac{1}{j+1}\right)_{C_p} \leq \\ &\leq C_5 (1+q)^{-n} (n+1)^k \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \frac{1}{(j+1)^k} \leq C_6 \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство в (4) вытекает из только что доказанного и [1, п. 2.2]. Теорема доказана.

Докажем неулучшаемость неравенства (3).

Теорема 3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ убывает к нулю, $\varepsilon_k \leq C\varepsilon_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и $\sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k / (k+1) \asymp \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\sup_{f \in E_{C_p}(\varepsilon)} \|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \asymp (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \varepsilon_j, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Доказательство. Оценка сверху в (5) вытекает из (3). Для доказательства оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \cos kx/k$. По лемме 4 имеем $E_j(f_0)_{C_p} \leq C_1 \varepsilon_{j+1} \leq C_1 \varepsilon_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, т. е. $f_0/C_1 \in E_{C_p}(\varepsilon)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|f_0 - e_n^q(f_0)\|_{\infty} &\leq (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \|f_0 - S_j(f_0)\|_{\infty} \leq \\ &\leq (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k} := (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} A_{j+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Но

$$f_0(0) - e_n^q(f_0)(0) = (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} (f_0(0) - S_j(f_0)(0)) = (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

В силу (6) и последнего равенства получаем:

$$\|f_0 - e_n^q(f_0)\|_{\infty} = f_0(0) - e_n^q(f_0)(0) = (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k} +$$



$$+(1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \sum_{k=j+1}^n \frac{\varepsilon_k}{k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k} + (1+q)^{-n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} q^{n-j} \right) \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

Пусть $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k/k$ (см. (6)), $n \in \mathbb{N}$, и $B_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} q^{n-j}$, $1 \leq k \leq n+1$, $B_0 = 0$. Тогда в силу условия находим, что

$$\begin{aligned} (1+q)^n \|f_0 - e_n^q(f_0)\|_{\infty} &= (1+q)^n A_{n+1} + \sum_{k=1}^n B_k (A_k - A_{k+1}) = \\ &= A_{n+1} B_{n+1} + \sum_{k=1}^n A_k (B_k - B_{k-1}) - B_n A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} A_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} q^{n-k+1} A_k \geq \\ &\geq C_2 \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} q^{n-k+1} \varepsilon_k = C_2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \varepsilon_{j+1} \geq C_3 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \varepsilon_j. \end{aligned} \quad (7)$$

Для f_0/C_1 также верно (7) с константой C_3/C_1 . Теорема доказана.

Для случая $q = 1$ сформулируем и докажем теорему, обобщающую результат К. Чуи (С. К. Chui) и А. Холланда (А. S. B. Holland) [9].

Теорема 4. Пусть $\omega \in S^1$, $1 < p < \infty$ и $f \in C_p$ такова, что $\omega_2(f, t)_{C_p} \leq C\omega(t)$ и, кроме того,

$$\int_{2\pi/(n+1)}^{\pi} \frac{\|\varphi_x(t) - \varphi_x(t + 2\pi/(n+1))\|_{C_p}}{t} dt = O(\omega(1/n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\|e_n^1(f) - f\|_{C_p} \leq C\omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. При $q = 1$ справедливо равенство $\sin \Theta_t = \sin(t - \Theta_t)$ (см. лемму 6)) и при $0 \leq \Theta_t \leq t$ мы имеем $\Theta_t = t/2$, поэтому $e(n, 1, t) = \cos^n(t/2) \sin[(n+1)t/2]/(2 \sin t/2)$. Пусть $a_n = 2\pi/(n+1)$, $b_n = 2\pi/(n+1)^\beta$, где $1/2 > \beta > \alpha/(\alpha+1)$ и $\alpha \in (0, 1)$ — число такое, что функция $\varphi(t)/t^\alpha$ почти убывает на $(0, \pi)$ (такое α существует по лемме 8). Тогда верно равенство $\sin(n+1)(t+a_n)/2 = -\sin(n+1)t/2$, что будет использовано далее. Пусть n достаточно велико так, что $b_n \leq \pi/2$. Запишем:

$$e_n^1(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) e(n, 1, t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{a_n} + \frac{1}{\pi} \int_{a_n}^{b_n} + \frac{1}{\pi} \int_{b_n}^{\pi} = I_1 + I_2 + I_3.$$

В силу утверждения 1) леммы 6, леммы 3 и обобщенного неравенства Минковского в C_p (см. [5])

$$\|I_1\|_{C_p} \leq C_1 \int_0^{a_n} \omega_2(f, t)_{C_p} n dt \leq C_2 \omega_2(f, 1/n)_{C_p} \leq C_3 \omega(1/n), \quad (8)$$

а благодаря утверждению 3) леммы 6 находим, что

$$\begin{aligned} \|I_3\|_{C_p} &\leq C_4 \int_{b_n}^{\pi} b_n^{-1} \omega_2(f, t)_{C_p} \exp\left(-\frac{nt^2}{2\pi^2}\right) dt \leq \\ &\leq C_4 \int_{b_n}^{\pi} n^\beta \omega_2(f, t)_{C_p} \exp(-C_5 n^{1-2\beta}) dt \leq C_6 n^{\beta+2} \omega_2(f, 1/n) \exp(-C_5 n^{1-2\beta}) \leq C_7 \omega(1/n), \end{aligned} \quad (9)$$

так как $1 - 2\beta > 0$ и любая степень растет медленнее экспоненты. В (8) и (9) также использовалось неравенство $\omega_2(f, \lambda\delta)_{C_p} \leq (2\lambda)^2 \omega_2(f, \delta)_{C_p}$, $\lambda \geq 1$, по сути содержащееся в первом утверждении леммы 3. Для I_2 запишем:

$$\begin{aligned} 4\pi I_2 &= 2 \int_{a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t)}{\sin t/2} \cos^n \frac{t}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt = \int_{a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t)}{\sin t/2} \cos^n \frac{t}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt - \\ &- \int_0^{b_n - a_n} \frac{\varphi_x(t+a_n)}{\sin(t+a_n)/2} \cos^n \frac{t+a_n}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t) - \varphi_x(t + a_n)}{\sin t/2} \cos^n \frac{t}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt + \\
 &+ \int_{a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t + a_n)}{\sin t/2} \left[\cos^n \frac{t}{2} - \cos^n \frac{t + a_n}{2} \right] \sin \frac{n+1}{2} t dt + \\
 &+ \int_{a_n}^{b_n} \varphi_x(t + a_n) \cos^n \frac{t + a_n}{2} \left[\frac{1}{\sin t/2} - \frac{1}{\sin(t + a_n)/2} \right] \sin \frac{n+1}{2} t dt - \\
 &- \int_0^{a_n} \frac{\varphi_x(t + a_n)}{\sin(t + a_n)/2} \cos^n \frac{t + a_n}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt + \\
 &+ \int_{b_n - a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t + a_n)}{\sin(t + a_n)/2} \cos^n \frac{t + a_n}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt = I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24} + I_{25}.
 \end{aligned}$$

В силу условия теоремы

$$\|I_{21}\|_{C_p} \leq \int_{a_n}^{b_n} \frac{\|\varphi_x(t) - \varphi_x(t + a_n)\|_{C_p}}{\sin t/2} dt \leq \pi \int_{a_n}^{b_n} \frac{\|\varphi_x(t) - \varphi_x(t + a_n)\|_{C_p}}{t} dt \leq C_8 \omega(1/n). \quad (10)$$

По теореме Лагранжа

$$|\cos^n t/2 - \cos^n(t + a_n)/2| = |n \cos^{n-1} z_n(t) \sin z_n(t) a_n/2| \leq \pi n t \frac{1}{n+1} \leq \pi t,$$

где $t/2 < z_n(t) < (t + a_n)/2 \leq t$ для $t \in [a_n, b_n]$. Поэтому в силу определения b_n

$$\begin{aligned}
 \|I_{22}\|_{C_p} &\leq \pi^2 \int_{a_n}^{b_n} \frac{\|\varphi_x(t + a_n)\|_{C_p}}{t} t dt \leq \pi^2 \int_0^{b_n} \omega_2(f, 2b_n)_{C_p} dt \leq \\
 &\leq C_9 n^{-\beta} \omega(n^{-\beta}) \leq C_{10} \omega(n^{-1}).
 \end{aligned} \quad (11)$$

В самом деле, по выбору $\beta > \alpha/(\alpha + 1)$ (см. начало доказательства) получаем:

$$n^{-\beta} \omega(n^{-\beta}) \leq n^{-\beta} C_{11} (n^{-\beta}/n^{-1})^\alpha \omega(n^{-1}) = C_{11} n^{\alpha - (\alpha+1)\beta} \omega(n^{-1}) \leq C_{11} \omega(n^{-1}).$$

Далее, так как $a_n \leq t \leq b_n \leq \pi/2$, то по лемме 8 выполняются неравенства

$$|\sin^{-1}(t/2) - \sin^{-1}((t + a_n)/2)| \leq \frac{a_n \pi^2}{2t(t + a_n)} \quad \text{и} \quad \omega(a_n + t) \leq C_{11} ((a_n + t)/a_n)^\alpha \omega(a_n),$$

поэтому с помощью замены $t = a_n y$ имеем:

$$\begin{aligned}
 \|I_{23}\|_{C_p} &\leq C_{12} a_n \int_{a_n}^{b_n} \frac{\omega_2(f, t + a_n)}{t(t + a_n)} dt \leq C_{13} a_n^{(1-\alpha)} \omega(a_n) \int_{a_n}^{\infty} \frac{dt}{t(t + a_n)^{1-\alpha}} = \\
 &= C_{13} \frac{a_n^{1-\alpha} \omega(a_n)}{a_n^{1-\alpha}} \int_1^{\infty} \frac{dy}{y(1+y)^{1-\alpha}} = C_{14} \omega(a_n) \leq C_{15} \omega(1/n).
 \end{aligned} \quad (12)$$

Для оценки I_{24} используем неравенства $|\sin t| \leq |t|$ и $\sin(t + a_n)/2 \geq \sin a_n/2 \geq a_n/\pi$. В результате находим, что

$$\|I_{24}\|_{C_p} \leq \pi \int_{a_n}^{2a_n} \frac{\omega_2(f, t)_{C_p}}{a_n} \frac{n+1}{2} a_n dt \leq C_{16} a_n n \omega_2(f, 2a_n)_{C_p} \leq C_{17} \omega(1/n). \quad (13)$$

Наконец, снова по лемме 8 в силу неравенства $\alpha - 1 < 0$ получаем:

$$\begin{aligned}
 \|I_{25}\|_{C_p} &\leq \int_{b_n - a_n}^{b_n} \frac{\pi \omega_2(f, t + a_n)_{C_p}}{t + a_n} dt \leq C_{18} \omega(a_n) \int_{b_n - a_n}^{b_n} \frac{(t + a_n)^{\alpha-1}}{a_n^\alpha} dt \leq \\
 &\leq C_{18} \omega(a_n) a_n^{1-\alpha} (b_n + a_n)^{\alpha-1} \leq C_{18} \omega(a_n),
 \end{aligned} \quad (14)$$

так как $(a_n/(b_n + a_n))^{1-\alpha} \leq 1$. Объединяя оценки (8)–(14), завершаем доказательство теоремы.



Замечание. Если $\omega \in S^1$, то условия $\omega_1(f, \delta)_{C_p} = O(\omega(\delta))$, $\delta \in [0, \pi]$, и $\omega_2(f, \delta)_{C_p} = O(\omega(\delta))$, $\delta \in [0, \pi]$, равносильны, т.е. использование модуля непрерывности второго порядка не дает в теореме 4 никакого преимущества.

С помощью теорем 1 и 2 получим оценку приближения средними Эйлера в гёльдеровых метриках. Пусть $\omega \in \Omega$, $f \in C_{2\pi}$ и $\|f\|_{\omega, k, \infty} := \|f\|_{\infty} + \sup_{0 < \delta \leq 2\pi} \omega_k(f, \delta)_{\infty} / \omega(\delta) < \infty$. Множество всех таких функций обозначим через $H_{k, \infty}^{\omega}$. Это пространство является банаховым с нормой $\|\cdot\|_{\omega, k, \infty}$. Аналогично определяется пространство H_{k, C_p}^{ω} с нормой $\|\cdot\|_{\omega, k, C_p}$.

Теорема 5. Пусть ω, φ положительны на $(0, 2\pi]$ и $\omega, \varphi \in \Omega$, причем функция $\eta(t) = \omega(t)/\varphi(t)$ возрастает на $(0, 2\pi]$. Если $\omega \in S^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $f \in H_{k, C_p}^{\omega}$, то

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\varphi, k, \infty} \leq C\eta(1/n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

и если последовательность $\{\eta(1/n) \ln(n+2)\}_{n=1}^{\infty}$ убывает к нулю, то

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\varphi, k, C_p} \leq C\eta(1/n) \ln(n+2), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Доказательство. По теореме 2 имеем неравенство

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leq C_1\omega(1/n) \leq C_1\varphi(2\pi)\eta(1/n). \quad (17)$$

Пусть $\delta \geq 1/n$. Тогда

$$\frac{\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{\infty}}{\varphi(\delta)} \leq \frac{2^k \|f - e_n^q(f)\|_{\infty}}{\varphi(1/n)} \leq \frac{2^k C_1 \omega(1/n)}{\varphi(1/n)} = 2^k C_1 \eta(1/n), \quad (18)$$

Так как $e_n^q(f)$ является тригонометрическим полиномом порядка не выше n , то

$$E_n(f)_{\infty} = E_n(f - e_n^q(f))_{\infty} \leq \|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leq C_1\omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что при $k \geq n$ верно

$$E_k(f - e_n^q(f))_{\infty} = E_k(f)_{\infty} \leq C_1\omega(1/k),$$

а при $k < n$ справедливо неравенство

$$E_k(f - e_n^q(f))_{\infty} \leq \|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leq C_1\omega(1/n) \leq C_1\omega(1/k).$$

Так как $\omega \in S^k$, по лемме 4 из [2] $\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{\infty} \leq C_2\omega(\delta)$, $0 \leq \delta \leq 1$ (см. также (2)). Поэтому

$$\frac{\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{\infty}}{\varphi(\delta)} \leq \frac{C_2\omega(\delta)}{\varphi(\delta)} \leq C_2\eta(\delta) \leq C_2\eta(1/n), \quad 0 < \delta \leq 1/n. \quad (19)$$

Из оценок (17)–(19) вытекает неравенство (15). Неравенство (16) доказывается аналогично. Вместо (17) по теореме 1 имеем $\|f - e_n^q(f)\|_{C_p} \leq C_3\omega_k(f, 1/n)_{C_p} \ln(n+2) \leq C_4\eta(1/n) \ln(n+2)$, а вместо (18) при $\delta \geq 1/n$ находим, что

$$\frac{\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{C_p}}{\varphi(\delta)} \leq \frac{2^k \|f - e_n^q(f)\|_{C_p}}{\varphi(1/n)} \leq 2^k C_4 \eta(1/n) \ln(n+2).$$

Пусть теперь $0 < \delta \leq 1/n$. Если $\omega \in S^k$ и $\{\omega(1/n) \ln(n+2)\}_{n=1}^{\infty}$ убывает к нулю (что в данном случае вытекает из условия), то

$$n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} \omega(1/i) \ln(i+2) \leq \ln(n+2) n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} \omega(1/i) \leq C_5 \ln(n+2) \omega(1/n),$$

т.е. $\omega(t) \ln(2+1/t) \in S^k$ (за исключением возрастания данной функции). Аналогично доказательству (15) мы выводим соотношение $\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{C_p} \leq C_6\omega(\delta) \ln(2+1/\delta)$, $\delta \in (0, 1]$. В силу условия



убывания последовательности $\{\eta(1/n) \ln(n+2)\}_{n=1}^{\infty}$ мы получаем, что функция $\eta(t) \ln(2+1/t)$ почти возрастает на $(0, 1)$. В самом деле, пусть $0 < 1/(p+1) < t \leq 1/p \leq 1/m \leq u < 1/(m-1) \leq 1$, где $m, p \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Тогда $\eta(t) \ln(2+1/t) \leq \eta(1/p) \ln(p+3)$. Так как $\omega \in S^k$, то по лемме 8 для некоторого $\alpha \in (0, k)$ функция $\omega(t)/t^\alpha$ почти убывает на $(0, \pi)$. В частности, $\omega(2\delta) \leq 2^\alpha K \omega(\delta)$ и аналогичное неравенство верно для $\eta(\delta)$. Поэтому

$$\eta(1/p) \ln(p+3) \leq C_7 \eta(1/(p+1)) \ln(p+3) \leq C_7 \eta(1/m) \ln(m+2) \leq C_8 \eta(u) \ln(m+1) \leq C_9 \eta(u) \ln(2+1/u),$$

так как функция $g(x) = \ln(x+2)/\ln(x+1)$ убывает при $x > 0$ и $m \geq 2$. В результате имеем:

$$\frac{\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{C_p}}{\varphi(\delta)} \leq \frac{C_6 \omega(\delta) \ln(2+1/\delta)}{\varphi(\delta)} \leq C_7 \eta(1/n) \ln(n+2), \quad 0 \leq \delta \leq 1/n.$$

Из полученных оценок выводим неравенство (16). Теорема доказана.

Библиографический список

1. Терехин А. П. Приближение функций ограниченной p -вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.
2. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
3. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
4. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
5. Голубов Б. И. О наилучшем приближении p -абсолютно непрерывных функций // Некоторые вопросы теории функций и функционального анализа. Т. 4. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1988. С. 85–99.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: в 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.
7. Volosivets S. S. Convergence of series of Fourier coefficients of p -absolutely continuous functions // Analysis Math. 2000. Vol. 26, № 1. P. 63–80.
8. Тюленева А. А. Приближение периодических функций ограниченной p -вариации обобщенными средними Абеля – Пуассона и логарифмическими средними // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 25–32.
9. Chui C. K., Holland A. S. B. On the order of approximation by Euler and Borel means // J. Approxim. Theory. 1983. Vol. 39, № 1. P. 24–38.
10. Rempulska I., Tomczak K. On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spaces // Proc. of A. Razmadze Math. Institute. 2006. Vol. 140. P. 141–153.

Approximation of Functions of Bounded p -variation by Euler Means

A. A. Tyuleneva

Tyuleneva Anna Anatol'evna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, anantuleneva@mail.ru

In this paper we study the Euler means

$$e_n^q(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} (1+q)^{-n} S_k(f)(x), \quad q \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

where $S_k(f)$ is the k -th partial trigonometric Fourier sum. For p -absolutely continuous functions ($f \in C_p$, $1 < p < \infty$) we consider their approximation by the Euler means in uniform and C_p -metric in terms of moduli of continuity $\omega_k(f)_{C_p}$, $k \in \mathbb{N}$, and the best approximations by trigonometric polynomials $E_n(f)_{C_p}$. One can note the following inequality for different metrics from Theorem 2

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \leq C_1 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

which is sharp. Also the following generalization of a result due to C. K. Chui and A. S. Holland is proved.



If ω is a modulus of continuity on $[0, \pi]$ such that $\delta \int_{\delta}^{\pi} t^{-2} \omega(t) dt = O(\omega(\delta))$, $1 < p < \infty$ and $f \in C_p$ satisfies two properties 1) $\omega_2(f, t)_{C_p} \leq C\omega(t)$; 2) $\int_{2\pi/(n+1)}^{\pi} t^{-1} \|\varphi_x(t) - \varphi_x(t + 2\pi/(n+1))\|_{C_p} dt = O(\omega(1/n))$, where $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, then $\|e_n^1(f) - f\|_{C_p} \leq C\omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Some applications to the approximation in Hölder type metrics are given.

Key words: functions of bounded p -variation, p -absolutely continuous functions, Euler means, best approximation, modulus of continuity.

References

1. Terekhin A. P. The approximation of functions of bounded p -variation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1965, no. 2, pp. 171–187 (in Russian).
2. Bari N. K., Stechkin S. B. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1956, vol. 5, pp. 483–522 (in Russian).
3. Hardy G. H. *Divergent series*. Oxford, Oxford Univ. Press, 1949.
4. Timan A. F. *Theory of approximation of functions of a real variable*, New York, MacMillan, 1963.
5. Golubov B. I. On the best approximation of p -absolutely continuous functions. *Some Questions of Function Theory and Functional Analysis*, vol. 4, Tbilisi, Izd. Tbilisi Univ., 1988, pp. 85–99 (in Russian).
6. Zygmund A. *Trigonometric series*. Vol. 1. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1959.
7. Volosivets S. S. Convergence of series of Fourier coefficients of p -absolutely continuous functions. *Analysis Math.*, 2000, vol. 26, no. 1, pp. 63–80.
8. Tyuleneva A.A. Approximation of bounded p -variation periodic functions by generalized Abel-Poisson means and logarithmic means. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 4, pt. 1, pp. 25–32 (in Russian).
9. Chui C. K., Holland A. S. B. On the order of approximation by Euler and Borel means. *J. Approxim. Theory*, 1983, vol. 39, no. 1, pp. 24–38.
10. Rempulska I., Tomczak K. On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spaces *Proc. of A. Razmadze Math. Institute*, 2006, vol. 140, pp. 141–153.

УДК 519.642.8

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

А. А. Хромов¹, Г. В. Хромова²

¹Хромов Александр Августович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

²Хромова Галина Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Дано решение задачи об определении плотности тепловых источников в стержне, в котором установилась стационарная температура, если эта температура задана приближенно. В математической постановке это задача нахождения равномерных приближений к правой части обыкновенного дифференциального уравнения в случае, когда заданы равномерное приближение к решению и величина погрешности. На базе так называемого разрывного оператора Стеклова сначала строятся семейства операторов, дающих устойчивые равномерные приближения к функции и ее производным 1 и 2 порядков, а затем на их основе — метод решения поставленной задачи. На некотором классе решений приводится оценка погрешностей приближенного решения.

Ключевые слова: обратная задача, оператор Стеклова, регуляризация.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314

Рассматривается задача об определении плотности тепловых источников в тонком стержне длины l , в котором установилась стационарная температура с нулевыми значениями на концах, по известной температуре.

Обозначим: $u(x) \in C^2[0, l]$ — температура в сечении с абсциссой x , $f(x)$ — плотность тепловых источников, $k(x)$ — коэффициент теплопроводности, $q(x)$ — коэффициент теплообмена. Считаем, что $k(x) \in C^1[0, l]$, $q(x) \in C[0, l]$ — известные функции.

Требуется найти равномерные приближения к $f(x)$ в случае, когда $u(x)$ задана нам приближенно, т. е. вместо $u(x)$ известна $u_\delta(x)$ такая, что $\|u_\delta - u\|_{C[0, l]} \leq \delta$.

В математической постановке эта задача сводится к определению правой части уравнения

$$k(x)u''(x) + k'(x)u'(x) - q(x)u(x) = f(x),$$

где $u(0) = u(l) = 0$, по известной $u(x)$.

Если $u(x)$ — точная температура, то $f(x)$ находится тривиально. Если же $u(x)$ задана приближенно, то в силу неустойчивости операции дифференцирования для нахождения приближений к $f(x)$ требуется привлечение методов регуляризации [1].

В [2] применялась регуляризация с помощью разностных формул численного дифференцирования. При этом приближенное решение получалось на внутренних из $[0, l]$ отрезках, границы которых должны быть увязаны с шагом разностных формул.

В данной работе этот недостаток устраняется: получены равномерные приближения к $f(x)$ на всем отрезке с помощью семейств интегральных операторов с разрывными ядрами.

1. Рассмотрим сначала семейство операторов:

$$T_\alpha u = \begin{cases} T_{\alpha 2} u, & x \in [0, l/2], \\ T_{\alpha 1} u, & x \in [l/2, l], \end{cases}$$

где

$$T_{\alpha 1} u = \frac{1}{\alpha^2} \left[- \int_{x-2\alpha}^{x-\alpha} u(t) dt + \int_{x-\alpha}^x u(t) dt \right], \quad T_{\alpha 2} u = \frac{1}{\alpha^2} \left[- \int_x^{x+\alpha} u(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} u(t) dt \right]. \quad (1)$$

Согласно [3] $T_{\alpha 1} u \equiv DS_{\alpha 1}^2 u$, $T_{\alpha 2} u = DS_{\alpha 2}^2 u$, где $S_{\alpha 1} u = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x u(t) dt$, $S_{\alpha 2} u = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} u(t) dt$, D — оператор дифференцирования.

В [3] показано, что

$$\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty[0, l]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (2)$$

для любой $u(x) \in C^1[0, l]$ (в [3] $l = 1$). Здесь

$$\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\{\|\cdot\|_{C[0, l/2]}, \|\cdot\|_{C[l/2, l]}\}. \quad (3)$$

Теперь на базе операторов T_α построим семейство операторов:

$$T_\alpha^{(2)} u = \begin{cases} T_{\alpha 2}^{(2)} u, & x \in [0, l/2], \\ T_{\alpha 1}^{(2)} u, & x \in [l/2, l]. \end{cases}$$

Лемма 1. Для любой $u(x) \in C^2[0, l]$ выполняется сходимость:

$$\|T_\alpha^{(2)} u - u''\|_{L_\infty[0, l]} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$T_\alpha^{(2)} = S_\alpha^{(4)}, \quad (4)$$

где

$$S_\alpha^{(4)} = \begin{cases} S_{\alpha 2}^4, & x \in [0, l/2], \\ S_{\alpha 1}^4, & x \in [l/2, l]. \end{cases}$$



Действительно, из очевидного равенства $DS_{\alpha j}u = S_{\alpha j}Du$, $j = 1, 2$, вытекает:

$$DS_{\alpha j}^2u = DS_{\alpha j}(S_{\alpha j}u) = S_{\alpha j}DS_{\alpha j}u = S_{\alpha j}^2Du,$$

т. е. $T_{\alpha j}u = S_{\alpha j}^2Du$, а отсюда следует:

$$T_{\alpha j}^2u = T_{\alpha j}(T_{\alpha j}u) = S_{\alpha j}^2DT_{\alpha j}u = S_{\alpha j}^2DS_{\alpha j}^2Du = S_{\alpha j}^4D^2u,$$

т. е. $T_{\alpha j}^2u = S_{\alpha j}^4u''$.

Но $S_{\alpha j}^4\varphi \rightarrow \varphi$ при $\alpha \rightarrow 0$ для любой непрерывной $\varphi(x)$ (сходимость в равномерной метрике). Отсюда и из (3) следует утверждение леммы.

Лемма 2. Для операторов $T_{\alpha j}^2$, $j = 1, 2$, справедливы представления:

$$T_{\alpha 2}^2u = \alpha^{-4} \left[\int_x^{x+\alpha} (t-x)u(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (4\alpha - 3(t-x))u(t) dt + \int_{x+2\alpha}^{x+3\alpha} (-8\alpha + 3(t-x))u(t) dt + \int_{x+3\alpha}^{x+4\alpha} (4\alpha - (t-x))u(t) dt \right], \quad (5)$$

$$T_{\alpha 1}^2u = \alpha^{-4} \left[\int_{x-4\alpha}^{x-3\alpha} (4\alpha - (x-t))u(t) dt + \int_{x-3\alpha}^{x-2\alpha} (3(x-t) - 8\alpha)u(t) dt + \int_{x-2\alpha}^{x-\alpha} (4\alpha - 3(x-t))u(t) dt + \int_{x-\alpha}^x (x-t)u(t) dt \right]. \quad (6)$$

Доказательство. Имеем:

$$T_{\alpha 2}^2u = \alpha^{-4} \left\{ - \int_x^{x+\alpha} \left[- \int_t^{t+\alpha} u(\tau) d\tau + \int_{t+\alpha}^{t+2\alpha} u(\tau) d\tau \right] dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} \left[- \int_t^{t+\alpha} u(\tau) d\tau + \int_{t+\alpha}^{t+2\alpha} u(\tau) d\tau \right] dt \right\}$$

или

$$T_{\alpha 2}^2u = \alpha^{-4}[I_1 + I_2 + I_3 + I_4], \quad (7)$$

где

$$I_1 = \int_x^{x+\alpha} \int_t^{t+\alpha} u(\tau) d\tau dt, \quad I_2 = - \int_x^{x+\alpha} \int_t^{t+2\alpha} u(\tau) d\tau dt,$$

$$I_3 = - \int_{x+2\alpha}^{x+3\alpha} \int_t^{t+2\alpha} u(\tau) d\tau dt, \quad I_4 = -I_2|_{x \rightarrow x_1 = x+\alpha}.$$

Далее,

$$I_1 = \int_x^{x+\alpha} (t-x)u(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (2\alpha - (t-x))u(t) dt$$

(см. [3, лемма 1]).

Сделав соответствующие замены в остальных интегралах, приходим к выражениям:

$$I_2 = - \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} ((t-x) - \alpha)u(t) dt - \int_{x+2\alpha}^{x+3\alpha} (3\alpha - (t-x))u(t) dt, \quad I_3 = I_2.$$

Подставим полученные выражения в формулу (7), соберем слагаемые, содержащие интегралы с одинаковыми пределами интегрирования, получим представление (5).

Представление (6) получается из (5) при замене x на $x - 4\alpha$.

Подсчитаем нормы $\|T_\alpha\|_{C[0,l] \rightarrow L_\infty[0,l]}$ и $\|T_\alpha^{(2)}\|_{C[0,l] \rightarrow L_\infty[0,l]}$. Справедлива

Лемма 3. *Имеют место формулы:*

$$\|T_\alpha\|_{C[0,l] \rightarrow L_\infty[0,l]} = 2\alpha^{-1}, \quad \|T_\alpha^{(2)}\|_{C[0,l] \rightarrow L_\infty[0,l]} = \frac{8}{3}\alpha^{-2}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\|T_\alpha\|_{C[0,l] \rightarrow L_\infty[0,l]} = \max\{\|T_{\alpha 2}\|_{C[0,l] \rightarrow C[0,l/2]}, \|T_{\alpha 1}\|_{C[0,l] \rightarrow C[l/2,l]}\}.$$

Далее,

$$\|T_{\alpha 2}\|_{C[0,l] \rightarrow C[0,l/2]} = \max_{0 \leq x \leq l/2} \int_0^l |T_{\alpha 2}(x, t)| dt,$$

где $T_{\alpha 2}(x, t)$ — ядро интегрального оператора $T_{\alpha 2}$, и аналогичная формула справедлива для $\|T_{\alpha 1}\|_{C[0,l] \rightarrow C[l/2,l]}$. Так же вычисляются нормы $\|T_{\alpha 2}^2\|_{C[0,l] \rightarrow C[0,l/2]}$ и $\|T_{\alpha 1}^2\|_{C[0,l] \rightarrow C[l/2,l]}$. Учитываем, что вычисление норм для $T_{\alpha 1}$ и $T_{\alpha 1}^2$ сводится к вычислению соответствующих норм операторов с индексом 2. Тогда из (1) получаем первое утверждение леммы 3, а из леммы 2 — второе. \square

Введем в рассмотрение величины:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta, T_\alpha, u') &= \sup\{\|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_\infty} : \|u_\delta - u\|_c \leq \delta\}, \\ \Delta(\delta, T_\alpha^{(2)}, u'') &= \sup\{\|T_\alpha^{(2)} u_\delta - u''\|_{L_\infty} : \|u_\delta - u\|_c \leq \delta\}. \end{aligned}$$

По аналогии с теоремой 3 в [3] из (2) и лемм 1, 3 следует

Теорема 1. *Для сходимости $\Delta(\delta, T_\alpha, u') \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям: 1) $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и 2) $\delta(\alpha(\delta))^{-1} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Для сходимости $\Delta(\delta, T_\alpha^{(2)}, u'') \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условию 1) и условию 3) $\delta(\alpha(\delta))^{-2} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.*

2. Теперь построим приближенное решение нашей задачи с помощью операторов T_α и $T_\alpha^{(2)}$. Рассмотрим функции $f_\delta^\alpha(x) = k(x)T_\alpha^{(2)}u_\delta(x) + k'(x)T_\alpha u_\delta(x) - q(x)u_\delta(x)$.

Теорема 2. *При согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющем условиям 1) и 3), указанным в теореме 1, имеет место сходимость*

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - f(x)\|_{L_\infty[0,l]} \rightarrow 0, \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Доказательство. Очевидна оценка

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leq K\|T_\alpha^{(2)}u_\delta - u''\|_{L_\infty} + K_1\|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_\infty} + Q\delta, \quad (8)$$

где $K = \|k(x)\|_{C[0,l]}$, $K_1 = \|k_1(x)\|_{C[0,l]}$, $Q = \|q(x)\|_{C[0,l]}$.

Поскольку

$$\|T_\alpha^{(2)}u_\delta - u''\|_{L_\infty} \leq \Delta(\delta, T_\alpha^{(2)}, u'') \quad \text{и} \quad \|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_\infty} \leq \Delta(\delta, T_\alpha, u'),$$

а согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия 3) теоремы 1 обеспечивает и согласование из условия 2), то отсюда вытекает утверждение теоремы. \square

Таким образом, приближенное решение поставленной задачи строится по следующей схеме:

- 1) вычисляются функции $v_\delta^\alpha(x) = T_\alpha u_\delta$ и $w_\delta^\alpha(x) = T_\alpha v_\delta^\alpha$;
- 2) выбирается согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ по теореме 2;
- 3) составляется функция $f_\delta \equiv f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) = k(x)w_\delta^{\alpha(\delta)}(x) + k'(x)v_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - q(x)u_\delta(x)$.



3. При наличии дополнительных условий на функцию $u(x)$ укажем конкретную формулу для выбора $\alpha = \alpha(\delta)$ и получим оценку погрешности приближенного решения.

Обозначим

$$M = \max_{0 \leq x \leq l} |u''(x)|$$

и будем считать, что эта константа нам известна и что, кроме того, $u''(x) \in Lip_{M_1} 1$. Тогда справедлива

Лемма 4. При каждом фиксированном α выполняются оценки:

$$\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty} \leq 2M\alpha, \quad \|T_\alpha^{(2)} u - u''\|_{L_\infty} \leq 4M_1\alpha.$$

Доказательство первой оценки вытекает из леммы 5 в [3], второй – из равенства (4).

Запишем оценку (8) в виде

$$\begin{aligned} \|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leq & K[\|T_\alpha^{(2)} u - u''\|_{L_\infty} + \delta\|T_\alpha^{(2)}\|_{C \rightarrow L_\infty}] + \\ & + K_1[\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty} + \delta\|T_\alpha\|_{C \rightarrow L_\infty}] + Q\delta. \end{aligned} \quad (9)$$

Из этой оценки и лемм 3 и 4 вытекает

Теорема 3. Если $M = \|u''(x)\|_{C[0,l]}$ и $u''(x) \in Lip_{M_1} 1$, то справедлива оценка:

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)} - f\|_{L_\infty} \leq C_1\delta^{1/3} + C_2\delta^{2/3} + Q\delta, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(\delta) &= C\delta^{1/3}, \\ C &= \left(\frac{4}{3}K\right)^{1/3} (2KM_1 + K_1M)^{-1/3}, \\ C_1 &= 4(2KM_1 + K_1M)^{2/3} \left(\frac{4}{3}K\right)^{1/3}, \quad C_2 = K_1(6K)^{1/3}(2KM_1 + K_1M)^{1/3}. \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство. Подставим в оценку (9) равенства для норм из леммы 3 и оценки из леммы 4. Получим:

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leq 2(2KM_1 + K_1M)\alpha + \frac{8}{3}K\delta\alpha^{-2} + 2K_1\delta\alpha^{-1} + Q\delta, \quad (12)$$

Теперь сделаем конкретный выбор $\alpha = \alpha(\delta)$ из разумных соображений, а именно из равенства

$$2(2KM_1 + K_1M)\alpha = \frac{8}{3}K\delta\alpha^{-2}.$$

Отсюда получим формулу (11).

Подставив (11) в (12), получим оценку (10). \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

Библиографический список

1. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
2. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1994. 206 с.
3. Хромов А. А. Приближение функции и её производных с помощью модифицированных операторов Стеклова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 593–597.



The Solution of the Problem of Determining the Density of Heat Sources in a Rod

A. A. Khromov¹, G. V. Khromova²

¹Khromov Aleksandr Avgustovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

²Khromova Galina Vladimirovna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

We give a solution of a problem of determining the density of heat sources in the bay, which is set to a fixed temperature, if the temperature is given approximately. Mathematically it is the problem of finding uniform approximations to the right-hand side of the ordinary differential equation when uniform approximations to the solution and values of error are known. First using the so-called discontinuous Steklov operator we construct families of operators which give stable uniform approximations to a function and its first and second derivatives, and then with their help we propose the method of solving the formulated problem. For a certain class of solutions error estimations are given.

Key words: inverse problem, Steklov operator, regularization.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00238).

References

1. Ivanov V. K., Vasimn V. V., Tanana V. P. *Teoriia lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniia* [The theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow, Nauka, 1978, 206 p. (in Russian).
2. Denisov A. M. *Vvedenie v teoriuu obratnykh zadach* [Introduction to the theory of inverse problems]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1994, 206 p. (in Russian).
3. Khromov A. A. Approximation of Function and Its Derivative by the Modified Steklov Operator. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 2, pp. 593–597 (in Russian).



МЕХАНИКА

УДК 539.3

ЗАДАЧА О ПРОДОЛЬНОЙ ТРЕЩИНЕ С НАПОЛНИТЕЛЕМ В ПОЛОСЕ

Н. Н. Антоненко

Антоненко Нина Николаевна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей математики, Запорожский национальный технический университет, Украина, antonenkonina@i.ua

Предложен способ решения задачи о центральной продольной трещине с наполнителем в полосе. Предполагается, что скачки компонент вектора перемещений на берегах трещины пропорциональны соответствующим напряжениям в точках ее верхнего берега. Для решения задачи использовано интегральное преобразование Фурье. Задача сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений относительно производных от скачков перемещений на берегах трещины. На основании численных результатов сделаны такие выводы: увеличение полуширины полосы и коэффициента, который характеризует наполнитель трещины, приводит к уменьшению КИНов; увеличение модуля сдвига и коэффициента Пуассона полосы приводят к увеличению КИНов; для трещины, берега которой свободны от напряжений, упругие характеристики полосы практически не влияют на КИНЫ.

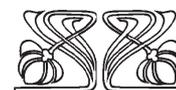
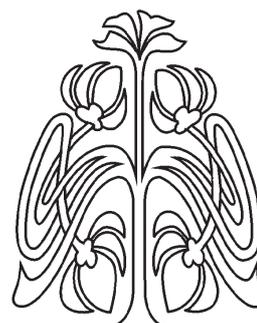
Ключевые слова: полоса, трещина, наполнитель, коэффициенты интенсивности напряжений, интегральное преобразование Фурье, интегро-дифференциальное уравнение.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-315-322

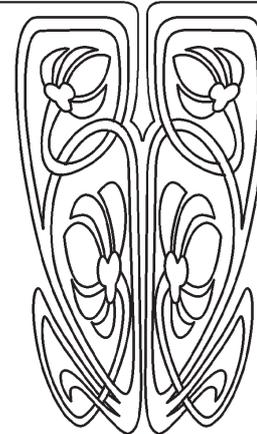
ВВЕДЕНИЕ

Во время изготовления и эксплуатации инженерных объектов в их элементах возникают дефекты различного типа (трещины, каверны, полости, включения), что может привести к преждевременному разрушению конструкций. Поэтому расчет напряженно-деформированного состояния конструкций с трещинами вызывает значительный практический и теоретический интерес. Одним из элементов инженерных сооружений могут выступать балки. В случае плоской деформации балку можно моделировать упругой полосой.

Задачи о прямолинейной трещине в полосе сводятся к решению интегральных уравнений или их систем. В работе [1] серия задач о центральной трещине в полосе с различными типами граничных условий на гранях полосы и берегах трещины сведена к парным интегральным уравнениям, решения которых найдены методом ортогональных полиномов. Методы большого и малого параметров использовались в [2–7]. В [8] приведены аналитические и графические результаты, которые иллюстрируют зависимость КИНов от безразмерного параметра, связанного с толщиной полосы и полушириной



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ

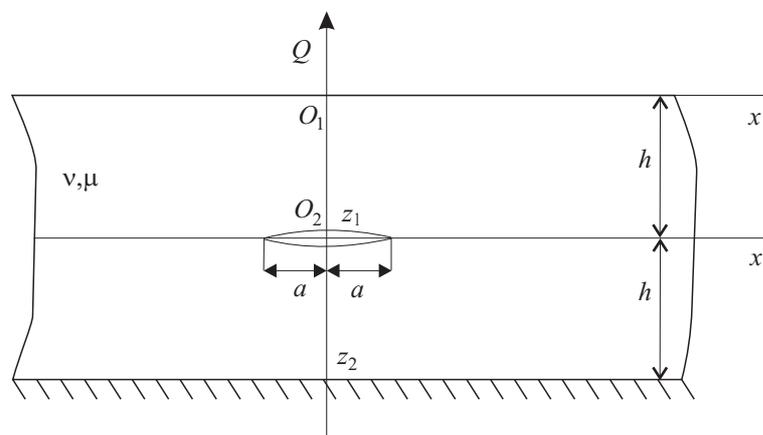


трещины для прямолинейных трещин в полосе с различными условиями на гранях полосы и берегах трещины, с указанием методов, при помощи которых они получены. Во всех указанных работах трещина моделируется физическим разрезом. На практике трещины могут быть наполнены неким клейким веществом.

В данной статье предлагается способ решения задачи о прямолинейной трещине с наполнителем, которая симметрично расположена относительно граней полосы. Наполнитель моделируется следующим образом [9]: скачки компонент вектора перемещений пропорциональны соответствующим напряжениям в точках верхнего берега трещины.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим упругую полосу толщины $2h$. Полосу будем характеризовать двумя упругими параметрами: модулем сдвига μ и коэффициентом Пуассона ν . Нижняя граница полосы жестко заделана, а к верхней границе приложена нормальная сосредоточенная нагрузка. Введем две локальные декартовые системы координат $O_i x z_i$ ($i = 1, 2$) так, как показано на рисунке.



Полоса с трещиной

На срединной плоскости полосы при $z_1 = h$, есть продольная трещина с наполнителем, занимающая область $x \in (-a, a)$. Напряжения и перемещения, которые относятся к верхней части полосы ($x \in (-\infty, +\infty), z_1 \in [0; h]$) будем обозначать нижним индексом 1, а к нижней части полосы ($x \in (-\infty, +\infty), z_2 \in [0; h]$) – нижним индексом 2.

Граничные условия:

$$\sigma_{z1}(x, 0) = Q\delta(x), \quad \tau_{xz1}(x, 0) = 0, \quad u_2(x, h) = 0, \quad w_2(x, h) = 0. \quad (1)$$

В рамках модели трещины с наполнителем полагаем, что при $z_1 = h$ выполняются следующие условия [9]:

$$\sigma_{z2}(x, 0) = \sigma_{z1}(x, h), \quad \tau_{xz2}(x, 0) = \tau_{xz1}(x, h), \quad (2)$$

$$w_2(x, 0) - w_1(x, h) = \begin{cases} A(x), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad u_2(x, 0) - u_1(x, h) = \begin{cases} B(x), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (3)$$

$$A(x) = \sqrt{a^2 - x^2}f(x), \quad B(x) = \sqrt{a^2 - x^2}g(x), \quad (4)$$

$$\sigma_{z1}(x, h) = cf(x), \quad |x| < a, \quad \tau_{xz1}(x, h) = cg(x), \quad |x| < a, \quad (5)$$

где c – заданная константа, которая характеризует наполнитель, $f(x), g(x)$ – неизвестные функции, $f(x), g(x) \in C^2[-a, a], f(\pm a) = 0, g(\pm a) = 0$.

Требуется определить скачки перемещений на берегах трещины и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).



Введем безразмерные величины $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{z}_k = z_k/a$, $\tilde{u}_k = u_k/a$, $\tilde{w}_k = w_k/a$, $\tilde{\sigma}_{zk} = \sigma_{zk}/\mu$, $\tilde{\tau}_{xzk} = \tau_{xzk}/\mu$, $\tilde{h} = h/a$, $\tilde{c} = c/\mu$, где a , μ — полудлина трещины и модуль сдвига полосы соответственно. В дальнейшем тильды над функциями и переменными будем опускать, считая, что все преобразования выполняются над безразмерными величинами.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения задачи воспользуемся интегральным преобразованием Фурье:

$$\bar{s}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x)e^{i\xi x} dx, \quad s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{s}(\xi)e^{-i\xi x} d\xi.$$

В пространстве трансформант компоненты напряженно-деформированного состояния могут быть представлены в виде линейных комбинаций вспомогательных функций $\alpha = \alpha(\xi)$, $\beta = \beta(\xi)$, $\gamma = \gamma(\xi)$, $\delta = \delta(\xi)$, которые связаны с напряжениями и перемещениями точек верхней границы полосы такими формулами [10]:

$$\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi, 0), \quad \beta = \mu W(\xi, 0), \quad \gamma = \mu S(\xi, 0), \quad \delta = \frac{-i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, 0), \quad (6)$$

где $W(\xi, z) = p\bar{w}(\xi, z)$, $S(\xi, z) = -i\xi\bar{u}(\xi, z)$, $p = |\xi|$.

Трансформанты напряжений и перемещений в точках полосы имеют вид [10]:

$$2\mu W(\xi, z) = ((2 - \omega) \operatorname{sh} pz - \omega pz \operatorname{ch} pz) \alpha + 2(-\omega pz \operatorname{sh} pz + \operatorname{ch} pz) \beta + \\ + 2((1 - \omega) \operatorname{sh} pz - \omega pz \operatorname{ch} pz) \gamma - \omega pz \operatorname{sh} pz \delta, \quad (7)$$

$$2\mu S(\xi, z) = \omega pz \operatorname{sh} pz \alpha + 2((1 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \beta + \\ + 2(\omega pz \operatorname{sh} pz + \operatorname{ch} pz) \gamma + ((2 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \delta, \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_z(\xi, z) = (\operatorname{ch} pz - \omega pz \operatorname{sh} pz) \alpha + 2\omega (\operatorname{sh} pz - pz \operatorname{ch} pz) \beta - \\ - 2\omega pz \operatorname{sh} pz \gamma - ((1 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \delta, \quad (9)$$

$$-\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi, z) = (-(1 - \omega) \operatorname{sh} pz + \omega pz \operatorname{ch} pz) \alpha + 2\omega pz \operatorname{sh} pz \beta + \\ + 2\omega (\operatorname{sh} pz + pz \operatorname{ch} pz) \gamma + (\omega pz \operatorname{sh} pz + \operatorname{ch} pz) \delta, \quad (10)$$

где $\omega = \frac{1}{2(1 - \nu)}$, $p = |\xi|$.

Запишем условия (1)–(3) с учетом формул (6) в пространстве трансформант Фурье:

$$\alpha_1 = Q, \quad \delta_1 = 0, \quad \beta_2 - \mu W_1(\xi, h) = \mu p M(\xi), \quad \gamma_2 - \mu S_1(\xi, h) = \mu(-i\xi)N(\xi), \\ S_2(\xi, h) = 0, \quad W_2(\xi, h) = 0,$$

где $M(\xi) = \int_{-a}^a A(t)e^{i\xi t} dt$, $N(\xi) = \int_{-a}^a B(t)e^{i\xi t} dt$.

Используя формулы (7)–(10), из последних соотношений найдем β_1 , γ_1 , α_2 , β_2 , γ_2 , δ_2 . Трансформанты нормальных и касательных напряжений при $z_1 = h$ примут такой вид:

$$\bar{\sigma}_{z1}(\xi, h) = \frac{pA_1(p)M(\xi) + i\xi A_2(p)N(\xi) - QA_3(p)}{D(p)}, \quad (11)$$

$$\bar{\tau}_{xz1}(\xi, h) = i \operatorname{sgn}(\xi) \frac{-pA_2(p)M(\xi) + i\xi A_4(p)N(\xi) + QA_5(p)}{D(p)}, \quad (12)$$

где $A_1(p) = -\mu\omega (a_1 + a_2e^{-2\tilde{p}} + a_3e^{-4\tilde{p}} + a_4e^{-6\tilde{p}} - a_1e^{-8\tilde{p}})$, $A_2(p) = 2\mu\omega (b_1 + b_2e^{-2\tilde{p}} + b_1e^{-4\tilde{p}})e^{-2\tilde{p}}$, $A_3(p) = c_1e^{-\tilde{p}} + c_2e^{-3\tilde{p}} + c_3e^{-5\tilde{p}} + c_4e^{-7\tilde{p}}$, $A_4(p) = \mu\omega (a_1 + d_1e^{-2\tilde{p}} - a_3e^{-4\tilde{p}} + d_2e^{-6\tilde{p}} - a_1e^{-8\tilde{p}})$,

$$A_5(p) = a_1\tilde{p}e^{-\tilde{p}} + f_1e^{-3\tilde{p}} + f_2e^{-5\tilde{p}} + a_1\tilde{p}e^{-7\tilde{p}}, \quad D(p) = a_1 + ke^{-4\tilde{p}} + a_1e^{-8\tilde{p}}, \quad a_1 = \omega^2 - 2\omega, \\ a_2 = 2\tilde{\omega}(-\tilde{\omega} + 2\omega\tilde{p} + 2\omega\tilde{p}^2), \quad a_3 = 8\tilde{p}(\tilde{\omega} + \omega^2 + 2\omega^2\tilde{p}^2), \quad a_4 = 2\tilde{\omega}(\tilde{\omega} + 2\omega\tilde{p} - 2\omega\tilde{p}^2), \quad b_1 = \tilde{\omega} + 2\omega\tilde{p}^2, \\ b_2 = -2\tilde{\omega}, \quad c_1 = -a_1(1 + \tilde{p}), \quad c_2 = 2\tilde{\omega} + \omega^2 + 3\omega^2\tilde{p} + 4\omega^2\tilde{p}^2, \quad c_3 = 2\tilde{\omega} + \omega^2 - 3\omega^2\tilde{p} + 4\omega^2\tilde{p}^2, \quad c_4 = -a_1(1 - \tilde{p}), \\ d_1 = -2\tilde{\omega}(\tilde{\omega} + 2\omega\tilde{p} - 2\omega\tilde{p}^2), \quad d_2 = 2\tilde{\omega}(\tilde{\omega} - 2\omega\tilde{p} - 2\omega\tilde{p}^2), \quad k = -2(2 + a_1 + 8\omega^2\tilde{p}^2), \quad f_1 = 2\tilde{\omega} - \omega^2\tilde{p} + 4\omega^2\tilde{p}^2, \\ f_2 = -2\tilde{\omega} - \omega^2\tilde{p} - 4\omega^2\tilde{p}^2, \quad \tilde{p} = ph, \quad \tilde{\omega} = 1 - \omega.$$

Используя граничные условия (5) и связь между оригиналами и трансформантами напряжений, получим систему интегральных уравнений задачи:

$$\begin{cases} \pi cf(x) = \int_{-1}^1 A(t)K_1(t-x) dt - \int_{-1}^1 B(t)K_2(t-x) dt - QF_1(x), \\ \pi cg(x) = \int_{-1}^1 A(t)K_2(t-x) dt - \int_{-1}^1 B(t)K_3(t-x) dt - QF_2(x), \end{cases} \quad (13)$$

где

$$K_1(z) = \int_0^{+\infty} \frac{pA_1(p)}{D(p)} \cos(pz) dp, \quad K_2(z) = \int_0^{+\infty} \frac{pA_2(p)}{D(p)} \sin(pz) dp, \quad K_3(z) = \int_0^{+\infty} \frac{pA_4(p)}{D(p)} \cos(pz) dp, \\ F_1(z) = \int_0^{+\infty} \frac{A_3(p)}{D(p)} \cos(pz) dp, \quad F_2(z) = \int_0^{+\infty} \frac{A_5(p)}{D(p)} \sin(pz) dp.$$

Проинтегрировав по частям первые два слагаемых в каждом из уравнений системы (13), получим:

$$\begin{cases} \pi cf(x) = - \int_{-1}^1 A'(t)R_1(t-x) dt - \int_{-1}^1 B'(t)R_2(t-x) dt - QF_1(x), \\ \pi cg(x) = \int_{-1}^1 A'(t)R_2(t-x) dt + \int_{-1}^1 B'(t)R_3(t-x) dt - QF_2(x), \end{cases} \quad (14)$$

где

$$R_1(z) = \int_0^{+\infty} \frac{A_1(p)}{D(p)} \sin(pz) dp, \quad R_2(z) = \int_0^{+\infty} \frac{A_2(p)}{D(p)} \cos(pz) dp, \quad R_3(z) = \int_0^{+\infty} \frac{A_4(p)}{D(p)} \sin(pz) dp.$$

Выделим в ядрах уравнений системы (14) сингулярные и регулярные части:

$$\begin{cases} \pi cf(x) = - \int_{-1}^1 A'(t)L_1(t-x) dt - \int_{-1}^1 B'(t)R_2(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 A'(t)L_3(t-x) dt - QF_1(x), \\ \pi cg(x) = \int_{-1}^1 A'(t)R_2(t-x) dt + \int_{-1}^1 B'(t)L_2(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 B'(t)L_3(t-x) dt - QF_2(x), \end{cases} \quad (15)$$

где

$$L_1(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{A_1(p)}{D(p)} + \mu\omega \right) \sin(pz) dp, \quad L_2(z) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{A_4(p)}{D(p)} - \mu\omega \right) \sin(pz) dp, \\ L_3(z) = \int_0^{+\infty} \sin(pz) dp.$$



Воспользуемся равенством (в смысле теории обобщенных функций) [11]:

$$\int_0^{+\infty} \sin(pz) dp = \frac{1}{z}. \quad (16)$$

С учетом (16) система (15) принимает вид

$$\begin{cases} \pi c f(x) = - \int_{-1}^1 A'(t) L_1(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 \frac{A'(t)}{t-x} dt - \int_{-1}^1 B'(t) R_2(t-x) dt - Q F_1(x), \\ \pi c g(x) = \int_{-1}^1 A'(t) R_2(t-x) dt + \int_{-1}^1 B'(t) L_2(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 \frac{B'(t)}{t-x} dt - Q F_2(x), \end{cases}$$

Введем новые переменные $\varphi(t) = A'(t)$, $\psi(t) = B'(t)$ и перепишем последнюю систему в виде

$$\begin{cases} \pi c f(x) = - \int_{-1}^1 \varphi(t) L_1(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt - \int_{-1}^1 \psi(t) R_2(t-x) dt - Q F_1(x), \\ \pi c g(x) = \int_{-1}^1 \varphi(t) R_2(t-x) dt + \int_{-1}^1 \psi(t) L_2(t-x) dt + \mu\omega \int_{-1}^1 \frac{\psi(t)}{t-x} dt - Q F_2(x). \end{cases} \quad (17)$$

Из того, что $A(\pm 1) = 0$ и $B(\pm 1) = 0$, получаем условия

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt = 0, \quad \int_{-1}^1 \psi(t) dt = 0. \quad (18)$$

Неизвестные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ будем искать в виде

$$\varphi(x) = \frac{\hat{f}(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \psi(x) = \frac{\hat{g}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (19)$$

Построим интерполяционные многочлены Лагранжа для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^N S_m(x) \frac{f_m}{\sqrt{1-t_m^2}}, \quad \psi(x) = \sum_{m=1}^N S_m(x) \frac{g_m}{\sqrt{1-t_m^2}}, \quad (20)$$

где $S_m(x) = \prod_{r \neq m} (x - t_r) (t_r - t_m)^{-1}$, $f_m = \hat{f}(t_m)$, $g_m = \hat{g}(t_m)$.

Используя связь между $A'(x)$ и $f(x)$, $B'(x)$ и $g(x)$, левые части системы (17) представим в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^x \frac{S_m(z) f_m}{\sqrt{1-z^2}} dz, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^x \frac{S_m(z) g_m}{\sqrt{1-z^2}} dz. \quad (21)$$

Согласно методу механических квадратур [4] систему (17) и условия (18) с учетом формул (20) и (21) сводим к системе N линейных уравнений относительно N неизвестных:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ \left[-\frac{cN}{\sqrt{1-x_r^2}} \int_{-1}^{x_r} \frac{S_m(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz - L_{1rm} + \frac{\mu\omega}{t_m - x_r} \right] f_m - R_{2rm} g_m \right\} - Q F_{1r} = 0, \\ \frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ R_{2rm} f_m + \left[-\frac{cN}{\sqrt{1-x_r^2}} \int_{-1}^{x_r} \frac{S_m(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz + L_{2rm} + \frac{\mu\omega}{t_m - x_r} \right] g_m \right\} - Q F_{2r} = 0, \\ \sum_{m=1}^N f_m = 0, \quad \sum_{m=1}^N g_m = 0, \end{cases} \quad (22)$$



где $L_{irm} = L_i(t_m - x_r)$, $R_{2rm} = R_2(t_m - x_r)$, $F_{ir} = F_i(x_r)$, $t_m = \cos \frac{2m-1}{2N}\pi$, $x_r = \cos \frac{\pi r}{N}$, $i = 1, 2$, $r = \overline{1, N-1}$, $m = \overline{1, N}$.

Из системы (22) находим f_m , g_m и строим интерполяционные многочлены для функций $\hat{f}(x)$ и $\hat{g}(x)$. Искомые скачки перемещений находим по формулам:

$$A(x) = \int_{-1}^x \frac{\hat{f}(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz, B(x) = \int_{-1}^x \frac{\hat{g}(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz.$$

Формулы для расчета КИНов, полученные на основании асимптотического поведения нормальных и касательных напряжений на берегах трещины, принимают вид [4]:

$$K_I = -\mu\omega\sqrt{\pi a}\hat{f}(\pm 1), K_{II} = -\mu\omega\sqrt{\pi a}\hat{g}(\pm 1),$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}(1) &= -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-1)^k f_k \operatorname{ctg} \left(\frac{2k-1}{4n} \pi \right), & \hat{f}(-1) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+N} f_k \operatorname{tg} \left(\frac{2k-1}{4n} \pi \right), \\ \hat{g}(1) &= -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-1)^k g_k \operatorname{ctg} \left(\frac{2k-1}{4n} \pi \right), & \hat{g}(-1) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-1)^{k+N} g_k \operatorname{tg} \left(\frac{2k-1}{4n} \pi \right). \end{aligned}$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчеты проведены для трещины длины $2a = 2$. К верхней границе полосы приложена нормальная сосредоточенная сила $Q = 1$ так, как показано на рисунке. В табл. 1–4 приведены результаты, которые иллюстрируют зависимость КИНов от упругих характеристик полосы, ее полуширины и наполнителя трещины.

Таблица 1

Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от толщины
полосы h ($\mu = 1, \nu = 0.3$)

h	2	3	4	5	10
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 1$	0.11182	0.08411	0.06609	0.05407	0.0590
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 0$	0.30904	0.21556	0.16470	0.13297	0.06733
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 1$	0.02450	0.01459	0.00914	0.00616	0.00261
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 0$	0.03290	0.02276	0.01485	0.01017	0.00279

Таблица 2

Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от модуля сдвига
полосы μ ($\nu = 0.3, h = 10$)

μ	1	2	3	4	5	10
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 1$	0.02788	0.03945	0.04577	0.04976	0.05250	0.0590
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 0$	0.06733	0.06733	0.06733	0.06733	0.06733	0.06733
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 1$	0.00165	0.00207	0.00227	0.00238	0.00245	0.00261
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}, c = 0$	0.00279	0.00279	0.00279	0.00279	0.00279	0.00279



Таблица 3

Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от коэффициента Пуассона полосы ν ($\mu = 1$, $h = 10$)

ν	0.1	0.2	0.3
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}$, $c = 1$	0.02375	0.02563	0.02788
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}$, $c = 0$	0.06697	0.06709	0.06733
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}$, $c = 1$	0.00149	0.00157	0.00165
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}$, $c = 0$	0.00280	0.00280	0.00279

Таблица 4

Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от коэффициента, который характеризует наполнитель c ($\nu = 0.3$, $\mu = 1$, $h = 10$)

c	1	2	3	4	5	10
$\frac{K_I}{Q\sqrt{\pi a}}$	0.02788	0.01757	0.01282	0.01009	0.00832	0.00443
$\frac{K_{II}}{Q\sqrt{\pi a}}$	0.00165	0.00117	0.00091	0.00074	0.00062	0.00035

Анализ результатов, приведенных в табл. 1–4, позволяет сделать такие выводы:

- 1) увеличение полуширины полосы и коэффициента c приводит к уменьшению КИНов;
- 2) для трещины с наполнителем к увеличению КИНов приводит увеличение модуля сдвига и коэффициента Пуассона полосы;
- 3) для случая трещины, берега которой свободны от напряжений ($c = 0$), упругие характеристики полосы практически не влияют на КИНы.

Библиографический список

1. Fichter W. B. Stresses at the tip of a longitudinal crack in a plate strip. Washington : National Aeronautics and Space Administration, 1967. 55 p.
2. Александров В. М., Сметанин Б. И. Равновесная трещина в слое малой толщины // ПММ. 1965. Т. 29, вып. 4. С. 782–785.
3. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое // МТТ. 1968. № 2. С. 115–122.
4. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев : Наук. думка, 1981. 324 с.
5. Александров В. М., Сметанин Б. И. Продольная трещина в преднапряженном тонком упругом слое со свободными границами // ПММ. 2005. Т. 69, вып. 1. С. 150–159.
6. Александров В. М. Продольная трещина в ортотропной упругой полосе со свободными гранями // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 115–124.
7. Пожарский Д. А., Молчанов А. А. Асимптотические решения смешанных задач для упругой полосы и клина // Вестн. ДГТУ. 2010. Т. 10. С. 447–454.
8. Murakami Y. Stress intensity factors handbook. Pergamon Press, 1987. Vol. 1. 1566 p.
9. Антоненко Н. М., Величко І. Г. Моделирование межфазной трещины с наполнителем на границе упругой полосы и упругой полуплоскости // Вісник Донецького національного університету. Сер. А : Природничі науки. 2013. № 1. С. 23–27.
10. Ткаченко І. Г. Двовірна мішана задача термопружності для багаточарової основи // Прикладні проблеми механіки і математики. 2005. Вип. 3. С. 70–78.
11. Александров В. М., Пожарский Д. А. К задаче о трещине на границе раздела упругой полосы и полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 86–93.



The Problem of a Longitudinal Crack with a Filler in a Strip

N. N. Antonenko

Antonenko Nina Nikolayevna, Zaporozhye National Technical University, 64, Zhukovsky st., 69063, Zaporizhzhya, Ukraine, antonenkonina@i.ua

The method of the solution the problem of the central longitudinal crack with a filler in a strip is proposed. It is assumed that the jumps of the components of displacement vector is proportional to the corresponding stresses at its upper edge. Fourier's method of integral transformation is used. The problem is reduced to a system of integro-differential equations. The effects of influence of thickness, mechanical properties of a strip and a filler of the crack on Mode I and Mode II stresses intensity factors (SIFs) are examined. The following conclusions are made: increase the width of a strip and the coefficient that characterizes a filler leads to reduction of SIFs; increase of shear modulus and Poisson's ratio of a strip leads to the increase of SIF.

Key words: strip, crack, filler, stress intensity factors, method of Fourier integral transformation, integro-differential equation.

References

1. Fichter W. B. *Stresses at the tip of a longitudinal crack in a plate strip*. Washington, National Aeronautics and Space Administration, 1967, 55 p.
2. Aleksandrov V. M., Smetanin B. I. Equilibrium crack in a thin layer. *J. Appl. Math. Mech.* [Prikl. Mat. Mekh.], vol. 29, iss. 4, 1965, pp. 926–929.
3. Smetanin B. I. *Nekotorye zadachi o shhel'jah v uprugom kline i sloe* [Some of the problem of cracks in an elastic wedge and layer]. *Inzh. zh. MTT*, 1968, iss. 2, pp. 115–122 (in Russian).
4. Savruk M. P. *Dvumernye zadachi uprugosti dlia tel s treshchinami* [Solution of two-dimensional problems of the theory of elasticity for bodies with cracks]. Kiev, Nauk. dumka, 1981, 324 p. (in Russian).
5. Aleksandrov V. M., Smetanin B. I. A longitudinal crack in a prestressed thin elastic layer with free boundaries. *J. Appl. Math. Mech.* [Prikl. Mat. Mekh.], 2005, vol. 69, iss. 1, pp. 141–150.
6. Alexandrov V. M. Longitudinal crack in an orthotropic elastic strip with free faces. *Mech. Solids* [Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela], 2006, vol. 41, iss. 1, pp. 88–94.
7. Pozharskiy D. A., Molchanov A. A. Asymptotic solutions of mixed problems for elastic strip and wedge. *Vestnik of DSTU* [Vestnik of DSTU]. 2010, vol. 10, pp. 447–454 (in Russian).
8. Murakami Y. *Stress intensity factors handbook*. Pergamon Press, 1987, vol. 1, 1566 p.
9. Antonenko N.N. Modelirovanie mezhfaznoi treshchiny s napolnitelem na granitse uprugoi polosy i uprugoi poluploskosti [Modeling of a crack with a filler on the elastic strip-half-plane interface] *Visnik Donets'kogo natsional'nogo universitetu. Ser. A : Prirodnichi nauki*. 2013, no. 1, pp. 23–27 (in Russian).
10. Tkachenko I. G. Dvumirna mishana zadacha termopruzhnosti dlia bagatosharovoi osnovi [A two-dimensional mixed thermoelasticity problem for a multilayer foundation] *Prikladni problemi mehaniki i matematiki* [Applied problems of mechanics and mathematics]. 2005, vol. 3, pp. 70–78 (in Ukrainian).
11. Alexandrov V. M., Pozharskii D. A. To the problem of a crack on the elastic strip-half-plane interface. *Mech. Solids* [Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela], 2001, vol. 36, iss. 1, pp. 70–76.

УДК 532.591

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

К. Ю. Басинский

Басинский Константин Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, Тюменский государственный университет, kbasinsky@mail.ru

Рассмотрена нелинейная задача о распространении волн по свободной поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины в плоском случае. С помощью метода малого параметра данная нелинейная задача раскладывается на задачи в первых двух приближениях, которые последовательно разрешаются. Получены нелинейные выражения для компонент вектора скорости, динамического давления и формы свободной поверхности. Изучается движение частиц вязкой жидкости, вызванное распространением волны по свободной поверхности. Установлено, что вязкость жидкости



оказывает существенное влияние на форму траекторий жидких частиц, которое проявляется как в уменьшении амплитуды колебаний с течением времени, так и в отличии траекторий вблизи свободной поверхности и при заглублении. Исследован нелинейный эффект Стокса, который заключается в наличии приповерхностного течения.

Ключевые слова: волновые возмущения, вязкость, траектории частиц.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-322-329

ВВЕДЕНИЕ

Решение нелинейной задачи о волнах на поверхности слоя идеальной жидкости приведено в работах [1, 2]. В работе [2] также найдены нелинейные траектории жидких частиц. Для вязкой жидкости известно решение линейной задачи [3–5], а нелинейная задача решена только для приближения слабовязкой жидкости [6]. Данная работа посвящена определению нелинейных выражений для скорости, давления и формы свободной поверхности при волновом движении вязкой жидкости, а также определению траекторий жидких частиц.

1. НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается слой вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Свободная поверхность слоя граничит со средой пренебрежимо малой плотности, характеризующейся постоянным давлением P_a (в частности, атмосферным). Декартова система координат задана так, что плоскость $z^* = 0$ совпадает с невозмущённой поверхностью, а ось z^* противоположно направлена к вектору силы тяжести \mathbf{g} . Движение жидкости происходит в плоскости x^*z^* со скоростью $\mathbf{u}^* = (u^*(t^*, x^*, z^*), 0, v^*(t^*, x^*, z^*))$. Звездочкой, где это необходимо, обозначены физические (размерные) величины.

Пусть в положительном направлении оси распространяется волна длины λ . Длина волны много больше ее высоты ($\lambda \gg \xi_{\max}^*$). В области, занятой жидкостью выполняются уравнения неразрывности и движения:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^* = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \nabla) \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}^*. \quad (1)$$

Здесь $p^* = P - P_a + \rho g z^*$ — динамическое давление, ρ — плотность, P — давление, μ — коэффициент динамической вязкости.

На свободной поверхности $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$ задаются кинематическое и динамическое условия:

$$v^* = \frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*}, \quad (2)$$

$$p_{nn} = -P_a, \quad p_{n\tau} = 0.$$

При бесконечном заглублении скорость жидкости должна затухать, т. е. выполнено условие

$$\mathbf{u}^* \rightarrow 0, \quad z^* \rightarrow -\infty. \quad (3)$$

Система уравнений (1) и граничных условий (2), (3) является замкнутой и составляет нелинейную краевую задачу для определения характеристик волнового движения.

Введем следующие безразмерные переменные и величины:

$$\mathbf{u}^* = \varepsilon c_0 \mathbf{u}, \quad p^* = \varepsilon \rho c_0^2 p, \quad \xi^* = \varepsilon \xi / k, \quad \nu_0 = \mu k / \rho c_0,$$

$$t = k c t^*, \quad x = k x^*, \quad z = k z^*, \quad \alpha = c / c_0 = \omega / \omega_0, \quad c_0^2 = g / k,$$

где c_0 и ω_0 — фазовая скорость и частота волны линейной задачи для идеальной жидкости соответственно, c и ω — фазовая скорость и частота волны, $\varepsilon = k \xi_{\max}^*$ — малый волновой параметр, $k = 2\pi / \lambda$ — волновое число.

В безразмерных переменных задача (1)–(3) принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\varepsilon (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$v - \alpha \frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon u \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi,$$

$$p - \xi - 2\nu_0 \frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon\nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \left(\xi - p - 2\nu_0 \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad z = \varepsilon\xi,$$

$$\nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) = -4\nu_0 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon\xi,$$

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

В силу малости волнового параметра ε граничные условия на свободной поверхности $z = \varepsilon\xi$ разложением в ряд Маклорена входящих в них функций, сводятся к условиям на фиксированной поверхности $z = 0$.

Решение задачи находим в виде рядов по параметру ε :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_n = (u_i, 0, v_i), \quad p = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} p_i, \quad \xi = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \xi_i.$$

Подставляя эти ряды в уравнения (4) и разложенные в окрестности нуля граничные условия и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим задачи в первых двух приближениях.

В первом приближении задача имеет вид при ε^0

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \alpha \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1, \quad (5)$$

$$v_1 = \alpha \frac{\partial \xi_1}{\partial t}, \quad p_1 - \xi_1 - 2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad z = 0,$$

$$\mathbf{u}_1 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

для второго приближения: при ε^1

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0, \quad \alpha \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_2 = -\nabla p_2 - (\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{u}_1, \quad (6)$$

$$v_2 = \alpha \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_1 \xi_1), \quad p_2 - \xi_2 - 2\nu_0 \frac{\partial v_2}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} - p_1 \right), \quad z = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = 4 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right), \quad z = 0,$$

$$\mathbf{u}_2 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

Решение линейной задачи (5) имеет вид [5]

$$u_1 = A e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} [e^z \cos(x-t) + (aV_1 + bV_2) \cos(x-t) + (aV_2 - bV_1) \sin(x-t)], \quad (7)$$

$$v_1 = A e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \{e^z \sin(x-t) + V_1 \cos(x-t) + V_2 \sin(x-t)\},$$

$$p_1 = A e^{z - \frac{\beta}{\alpha} t} (\alpha \cos \chi + \beta \sin \chi), \quad \xi_1 = \frac{A}{\alpha^2 + s^2} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} (\alpha \cos \chi + s \sin \chi),$$

$$V_1(z) = e^{bz} (B_1 \cos az - B_2 \sin az), \quad V_2(z) = e^{bz} (B_2 \cos az + B_1 \sin az),$$

$$B_1 = -2\nu_0 \alpha A / (\alpha^2 + s^2), \quad B_2 = -2\nu_0 s A / (\alpha^2 + s^2).$$

Здесь β — безразмерный декремент затухания ($\beta\omega_0$ — размерный), A — амплитудный параметр, $s = 2\nu_0 - \beta$. Параметры a и b связаны соотношениями $a^2 = b^2 - 1 + \beta/\nu_0$, $2ab = \alpha/\nu_0$.

Частота волны через декремент затухания выражается следующим образом:

$$\alpha^2 = 1 + s^2 - 4\nu_0^3/s.$$

Для декремента затухания получено уравнение

$$s^6 + s^4 - 4\nu_0^4 s^2 - 4\nu_0^6 = 0,$$

аналитическое решение которого найдено, но не приведено здесь из-за своей громоздкости.



Подставив выражения (7) в задачу (6), получим систему линейных неоднородных уравнений и граничных условия для определения неизвестных функций u_2 , v_2 , p_2 и ξ_2 , решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} u_2 &= e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t} \left\{ e^{2z} D_2 + 1/2 [a_1 V_3 + b_1 V_4 + a V_5 + (b+1) V_6] \right\} \cos(2x-2t) + \\ &\quad + \left\{ -e^{2z} D_1 + 1/2 [a_1 V_4 - b_1 V_3 + a V_6 - (b+1) V_5] \right\} \sin(2x-2t), \\ v_2 &= e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t} \left[(e^{2z} D_1 + V_3 + V_5) \cos(2x-2t) + (e^{2z} D_2 + V_4 + V_6) \sin(2x-2t) \right], \\ p_2 &= e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t} \left\{ [e^{2z} (\beta D_1 + \alpha D_2) + V_7] \cos(2x-2t) + [e^{2z} (\beta D_2 - \alpha D_1) + V_8] \times \right. \\ &\quad \times \sin(2x-2t) - e^z A V_2 + A B_2 + A^2 [(2\nu_0 - \beta s)/(\alpha^2 + s^2) - e^{2z}]/2 + (B_1^2 + B_2^2) (1 - e^{2z})/2 \left. \right\}, \\ \xi_2 &= \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ [\alpha (D_2 + B_4 + K_2 - Q_2) - \beta (D_1 + B_3 + K_1 + Q_1)] \cos(2x-2t) - \right. \\ &\quad \left. - [\beta (D_2 + B_4 + K_2 - Q_2) + \alpha (D_1 + B_3 + K_1 + Q_1)] \sin(2x-2t) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_3(z) &= e^{b_1 z} (B_3 \cos a_1 z - B_4 \sin a_1 z), & V_4(z) &= e^{b_1 z} (B_4 \cos a_1 z + B_3 \sin a_1 z), \\ V_5(z) &= e^{(b+1)z} (K_1 \cos az - K_2 \sin az), & V_6(z) &= e^{(b+1)z} (K_2 \cos az + K_1 \sin az), \\ V_7(z) &= e^{(b+1)z} (G_1 \cos az - G_2 \sin az), & V_8(z) &= e^{(b+1)z} (G_2 \cos az + G_1 \sin az), \\ a_1^2 &= b_1^2 - 4 + 2\beta/\nu_0, & a_1 b_1 &= \alpha/\nu_0, \\ K_1 &= \{[(b+1)R_1 + aR_2]C_1 - [aR_1 - (b+1)R_2]C_2\}/\Delta_1, & \Delta_1 &= (C_1^2 + C_2^2)/2, \\ K_2 &= \{[aR_1 - (b+1)R_2]C_1 + [(b+1)R_1 + aR_2]C_2\}/\Delta_1, \\ G_1 &= \{[\alpha a + \beta(b-1)]K_1 - [\alpha(1-b) + \beta a]K_2 + 2R_2\}/4, \\ G_2 &= \{[\alpha(1-b) + \beta a]K_1 + [\alpha a + \beta(b-1)]K_2 + 2R_1\}/4, \\ C_1 &= [4a\nu_0^2 - \alpha(\beta + 2\nu_0)]/(2\nu_0), & C_2 &= [8b\nu_0^2 - \alpha_0^2 + \beta_0^2 - 4\nu_0 s]/(4\nu_0), \\ R_1 &= A[(2b\nu_0 - s)B_1 + (\alpha - 2a\nu_0)B_2]/(2\nu_0), \\ R_2 &= A[(\alpha - 2a\nu_0)B_1 - (2b\nu_0 - s)B_2]/(2\nu_0), \\ B_3 &= \nu_0[s_1(L_2 - 4D_1) + \alpha(L_1 - 4D_2)]/\Delta_2, & \Delta_2 &= s_1^2 + \alpha^2, \\ B_4 &= \nu_0[s_1(L_1 - 4D_2) - \alpha(L_2 - 4D_1)]/\Delta_2, & s_1 &= 4\nu_0 - \beta, \\ L_1 &= A^2 \{a[4\nu_0^2(\alpha^2 - s^2)/\Delta_3 - s - K_1] + \alpha b[1 - K_2 + 8\nu_0 s/\Delta_3] - 3\alpha + \\ &\quad + [(\beta - 6\nu_0)K_2 - \alpha K_1]/(2\nu_0)\}/\Delta_3, & \Delta_3 &= s^2 + \alpha^2, \\ L_2 &= A^2 \{b[4\nu_0^2(\alpha^2 - s^2)/\Delta_3 - s - K_1] - \alpha a[1 - K_2 + 8\nu_0 s/\Delta_3] + 3s + \\ &\quad + [(\beta - 6\nu_0)K_1 + \alpha K_2]/(2\nu_0)\}/\Delta_3, \\ D_1 &= (F_1 J_1 + F_2 J_2)/\Delta_4, & D_2 &= (F_1 J_2 - F_2 J_1)/\Delta_4, & \Delta_4 &= J_1^2 + J_2^2, \\ J_1 &= [8\nu_0^2(\alpha a_1 + s_1 b_1) - s_1/\Delta_2] - s_1, & J_2 &= [8\nu_0^2(\alpha b_1 - s_1 a_1) - \alpha/\Delta_2] + \alpha, \\ F_1 &= A^2 [2\nu_0(\alpha - s)/\Delta_3 + 1] [2\nu_0(\alpha + s)/\Delta_3 - 1]/2 + I_1 K_1 + I_2 K_2 - G_1 + H_1 L_1 + \\ &\quad + H_2 L_2 + (\beta Q_1 - \alpha Q_2)/(2\Delta_5), & \Delta_5 &= (\alpha^2 + \beta^2), \\ F_2 &= 2\alpha\nu_0 A^2 (1 - 2s\nu_0/\Delta_3)/\Delta_3 + I_2 K_1 - I_1 K_2 + G_2 - H_2 L_1 + H_1 L_2 + (\beta Q_2 + \alpha Q_1)/(2\Delta_5), \\ I_1 &= 2b\nu_0 + (4\nu_0 - \beta/\Delta_5)/2, & I_2 &= -2a\nu_0 + \alpha/(2\Delta_5), \\ H_1 &= [2\alpha\nu_0^2 b_1 - 2s_1\nu_0^2 a_1 + \alpha\nu_0^2 s/\Delta_5]/\Delta_3, \\ H_2 &= [2\alpha\nu_0^2 a_1 + 2s_1\nu_0^2 b_1 + (\beta s_1 - \alpha^2)/\Delta_5]/\Delta_3. \end{aligned}$$



2. ВОЛНОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ

Физические координаты частицы $x^*(t^*)$, $z^*(t^*)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx^*}{dt^*} = u^*, \quad \frac{dz^*}{dt^*} = v^*.$$

Физическое время необходимо обезразмерить частотой колебания жидкой частицы σ , так как для нелинейных волн даже в идеальной жидкости σ не совпадает с частотой волны [2].

Учитывая, что

$$x^* = ct^* + x/k, \quad z^* = z/k, \quad t^* = t/\sigma, \quad \mathbf{u}^* = \varepsilon c_0 \mathbf{u},$$

уравнения, описывающие движение частицы в волне можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \left(\frac{t}{\alpha} \cdot \frac{ck}{\sigma} \right)' u - \left(t \cdot \frac{ck}{\sigma} \right)', \quad \frac{dz}{dt} = \varepsilon \left(\frac{t}{\alpha} \cdot \frac{ck}{\sigma} \right)' v. \quad (8)$$

Положим

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x_i, \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i, \quad \frac{kc}{\sigma} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \gamma_i. \quad (9)$$

Подставляя ряды (8) и выражения для компонент скорости в уравнения движения (9) для определения первых трех коэффициентов, получим следующие уравнения:

$$\frac{dx_0}{dt} = -1, \quad \frac{dz_0}{dt} = 0,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{A}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \{ [e^{z_0} + aV_1(z_0) + bV_2(z_0)] \cos x_0 + [aV_2(z_0) - bV_1(z_0)] \sin x_0 \} - (t\gamma_1)',$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{A}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \{ [e^{z_0} + V_1(z_0)] \cos x_0 + V_2(z_0) \sin x_0 \},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha} t}}{\alpha} \{ \{ e^{2z_0} D_2 + 1/2 [a_1 V_3(z_0) + b_1 V_4(z_0) + aV_5(z_0) + (b+1)V_6(z_0)] \} \cos 2x_0 +$$

$$+ \{ -e^{2z_0} D_1 + 1/2 [a_1 V_4(z_0) - b_1 V_3(z_0) + aV_6(z_0) - (b+1)V_5(z_0)] \} \sin 2x_0 \} - (t\gamma_2)' +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}}{\alpha} \{ \{ Az_1 e^{z_0} + b(2az_1 - x_1)V_1(z_0) - [(a^2 - b^2)z_1 - ax_1]V_2(z_0) \} \cos x_0 +$$

$$+ \{ -Ax_1 e^{z_0} + b(2az_1 - x_1)V_2(z_0) + [(a^2 - b^2)z_1 - ax_1]V_1(z_0) \} \sin x_0 \},$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha} t}}{\alpha} [\{ e^{2z_0} D_1 + V_3(z_0) + V_5(z_0) \} \cos 2x_0 + \{ e^{2z_0} D_2 + V_4(z_0) + V_6(z_0) \} \sin 2x_0] +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}}{\alpha} \{ [Ax_1 e^{z_0} + bz_1 V_1(z_0) + (x_1 - az_1)V_2(z_0)] \cos x_0 + [Az_1 e^{z_0} + bz_1 V_2(z_0) - (x_1 - az_1)V_1(z_0)] \sin x_0 \}.$$

Разрешая последовательно данные уравнения, получим следующие выражения:

$$x_0 = x_L - t, \quad z_0 = z_L, \quad \gamma_1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}}{\Delta_5} \{ [-\beta A e^{z_L} - (\alpha b + \beta a)V_1(z_L) + (\alpha a - \beta b)V_2(z_L)] \cos(x_L - t) +$$

$$[-\alpha A e^{z_L} - (\alpha b + \beta a)V_2(z_L) - (\alpha a - \beta b)V_1(z_L)] \sin(x_L - t) \},$$

$$z_1 = \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}}{\Delta_5} [(\alpha A e^{z_L} - \beta V_1(z_L) + \alpha V_2(z_L)) \cos(x_L - t) + (-\beta A e^{z_L} - \beta V_2(z_L) - \alpha V_1(z_L)) \sin(x_L - t)],$$

$$x_2 = \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha} t}}{2\Delta_5} \{ -(\alpha D_1 + \beta D_2) e^{2z_L} - (\beta a_1 + \alpha b_1)V_3(z_L)/2 + (\alpha a_1 - \beta b_1)V_4(z_L)/2 +$$



$$\begin{aligned}
 & + Ae^{z_L} [(2\alpha\beta a + \alpha^2 b - \beta^2 b)/\Delta_5 - \beta/(2\nu_0) + (\alpha^2 - \beta^2)/\Delta_5] V_1(z_L) + \\
 & + Ae^{z_L} [(2\alpha\beta b - \alpha^2 a + \beta^2 a)/\Delta_5 + \alpha/(2\nu_0) - 2\alpha\beta/\Delta_5] V_2(z_L) - \\
 & - [\alpha(b+1) + \beta a] V_5(z_L)/2 + [\alpha a - \beta(b+1)] V_6(z_L)/2 \cos(2x_L - t) + \\
 & + \{(\beta D_1 - \alpha D_1) e^{2z_L} - (\beta a_1 + \alpha b_1) V_4(z_L) - (\alpha a_1 - \beta b_1) V_3(z_L) + \\
 & + Ae^{z_L} [(2\alpha\beta a + \alpha^2 b - \beta^2 b)/\Delta_5 - \beta/(2\nu_0) + (\alpha^2 - \beta^2)/\Delta_5] V_2(z_L) - \\
 & - Ae^{z_L} [(2\alpha\beta b - \alpha^2 a + \beta^2 a)/\Delta_5 + \alpha/(2\nu_0) - 2\alpha\beta/\Delta_5] V_1(z_L) - \\
 & - [\alpha(b+1) + \beta a] V_6(z_L)/2 - [\alpha a - \beta(b+1)] V_5(z_L)/2 \} \sin(2x_L - t), \\
 z_2 = & \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{2\Delta_5} \{[(\alpha D_2 - \beta D_1) e^{2z_L} + \alpha V_4(z_L) - \beta V_3(z_L) + \alpha V_6(z_L) - \beta V_5(z_L)] \times \\
 & \times \cos(2x_L - 2t) + [-(\alpha D_1 + \beta D_2) e^{2z_L} - \alpha V_3(z_L) - \beta V_4(z_L) - \alpha V_5(z_L) - \beta V_6(z_L)] \times \\
 & \times \sin(2x_L - 2t) + Ae^{z_L} [aV_1(z_L) + (b+1)V_2(z_L) + A^2] + be^{bz_L} (B_1^2 + B_2^2) \}, \\
 \gamma_2 = & \frac{1 - e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{4\beta\nu_0\Delta_5 t} [2\alpha\nu_0 A^2 e^{2z_L} + Ae^{z_L} (\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha a\nu_0) V_1(z_L) + 2\alpha Ae^{z_L} \times \\
 & \times (\nu_0 + b\nu_0 - \beta) V_2 + \alpha e^{2bz_L} (B_1^2 + B_2^2) (2a^2\nu_0 + 2\nu_0 - 3\beta),
 \end{aligned}$$

где x_L, z_L — лагранжевы координаты.

Величина $u_s = c - \sigma/k$ представляет собой переносную скорость вдоль горизонтальной оси. Ее приближенное выражение имеет вид

$$u_s = c \left(1 - \frac{\sigma}{ck}\right) = c \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \gamma_2}\right) \approx \varepsilon^2 c \gamma_2. \quad (10)$$

Для примера построены траектории движения жидких частиц при малом (рис. 1) и большом (рис. 2) значении коэффициента кинематической вязкости. Видно, что частицы вблизи поверхности движутся быстрее, чем частицы на глубине, что обусловлено наличием приповерхностного течения Стокса, которое характеризуется переносной скоростью (10). С увеличением вязкости амплитуда волновых возмущений и переносная скорость убывают быстрее. Кроме того, вблизи поверхности при большой вязкости траектории наклонены в верхней точке в сторону движения, что не наблюдается на заглублении. Это можно объяснить влиянием вязких касательных напряжений на свободной поверхности.

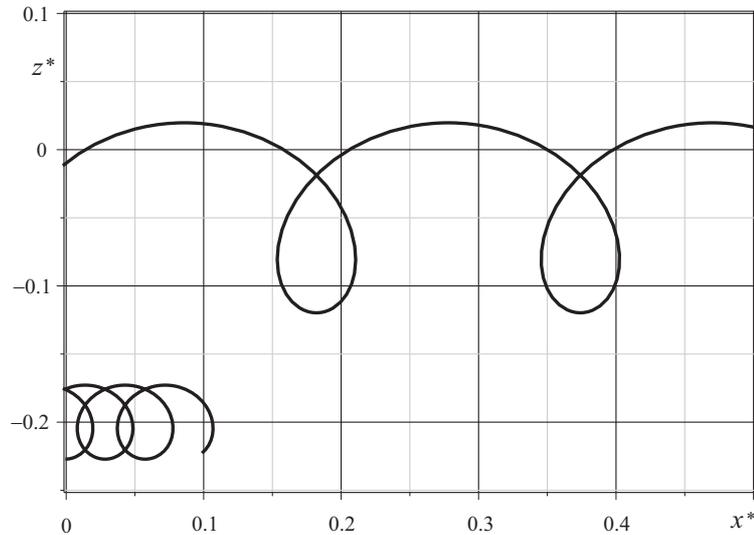


Рис. 1. Траектории частиц жидкости при $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

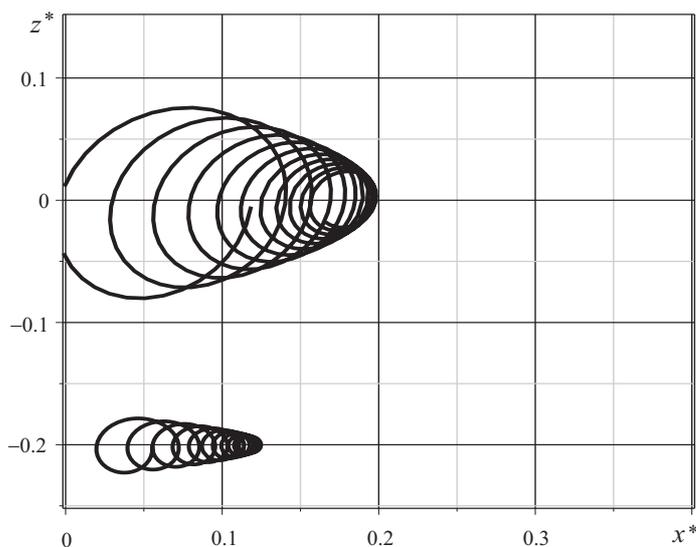


Рис. 2. Траектории частиц жидкости при $\nu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получено асимптотическое решение нелинейной задачи с точностью до членов второго порядка по малому амплитудному параметру. Получены выражения для траекторий частиц жидкости, а также для скорости приповерхностного течения Стокса.

Библиографический список

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М. : Наука, 1977. 816 с.
2. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 196 с.
3. Ламб Г. Гидродинамика. Л. : Гостехиздат, 1947. 928 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М. : Наука, 1986. 735 с.
5. Баринов В. А. Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2010. Сер. 10. Вып. 2. С. 18–31.
6. Баринов В. А., Басинский К. Ю. Решение нелинейной задачи о волнах на поверхности слабовязкой жидкости // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2011. Сер. 10. Вып. 2. С. 9–16.

Nonlinear Wave on the Surface Layer of a Viscous Liquid

K. Yu. Basinsky

Basinsky Konstantin Yurjevich, Tyumen State University, 10, Semakova st., 625003, Tyumen, Russia, kbasinsky@mail.ru

The nonlinear problem of the propagation of waves on the free surface of the layer of viscous incompressible fluid of infinite depth in the plane case. Using small parameter method, this nonlinear problem is decomposed into problems in the first two approximations that consistently allowed. Nonlinear expressions for the components of the velocity vector, the dynamic pressure and the shape of the free surface. The motion of particles of the viscous fluid caused by the spread of the wave of the free surface. It is found that the viscosity has a significant effect on the shape of the trajectories of liquid particles which is manifested as a decrease in the amplitude of oscillation over time, and in contrast to the paths near the free surface and penetration. The nonlinear effect of Stokes, which is the presence of near-surface currents.

Key words: wave disturbances, viscosity, particle trajectories.



References

1. Sretenskiy L. N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [Theory of wave motions of fluid]. Moscow, Nauka, 1977, 816 p. (in Russian).
2. Aleshkov Yu. Z. *Teoriya voln na poverkhnosti tyazheloy zhidkosti* [The theory of waves on the surface of a heavy liquid]. Leningrad, Leningrfd Univ. Press, 1981, 196 p. (in Russian).
3. Lamb G. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Leningrad, Gostekhizdat, 1947, 928 p. (in Russian).
4. Landau L. D., Lifshits E. M. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, Nauka, 1986, 735 p. (in Russian).
5. Barinov V. A. Wave propagation on the free surface of a viscous fluid *Vestn. S.-Peterb. un-ta*, 2010, vol. 10, no. 2, pp. 18–31 (in Russian).
6. Barinov V. A., Basinsky K. Yu. The solution of the problem of nonlinear waves on the surface of the low-viscosity fluid. *Vestn. S.-Peterb. un-ta*, 2011, vol. 10, no. 2, pp. 9–16 (in Russian).

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

Т-НЕПРИВОДИМЫЕ РАСШИРЕНИЯ
ДЛЯ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Д. Ю. Осипов

Осипов Дмитрий Юрьевич, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, st_hill@mail.ru

Рассматривается один из способов построения оптимального расширения графа — Т-неприводимое расширение (ТНР). До сих пор остается нерешенной следующая задача: построить одно из ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Данная задача была решена С. Г. Курносовой для подкласса сверхстройных деревьев — пальм. Для несложных сверхстройных деревьев данная задача была решена М. Б. Абросимовым. Приводится контрпример для схемы из статьи Харари и Хурума «One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees», которая описывает построение одного ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Приводится схема построения ТНР для сложных сверхстройных деревьев с числом вершин $k \geq 4$ и доказывается её корректность. Рассматриваются различные семейства сложных сверхстройных деревьев с $k = 3$ и строится ТНР для каждого из семейств.

Ключевые слова: граф, Т-неприводимое расширение, сверхстройные деревья, сложные сверхстройные деревья, несложные сверхстройные деревья.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-330-339

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

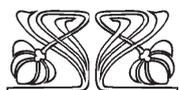
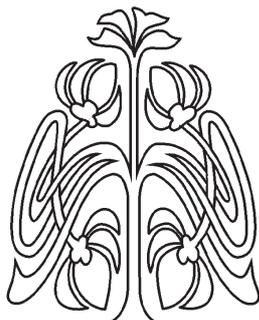
Все понятия и определения, используемые в данной статье, соответствуют понятиям и определениям в [1].

Определение 1. Расширением n -вершинного графа G называется граф H с $n+1$ вершинами такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H .

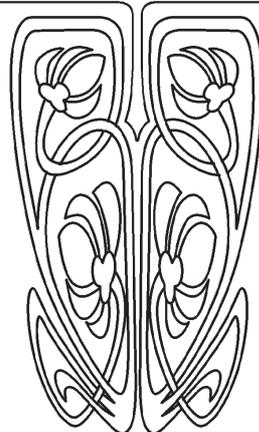
Простейшим примером расширения графа G будет его тривиальное расширение — соединение графа G с одноэлементным графом (т. е. к графу G добавляется вершина, которая соединяется ребром с каждой вершиной графа G).

Понятие расширения графа тесно связано с вопросами отказоустойчивости дискретных систем. Если граф G рассматривать как функциональную модель некоторого устройства Σ , то расширение H графа G можно воспринимать как схему отказоустойчивой реализации этого устройства: при отказе любого элемента (что истолковывается как удаление из H соответствующей вершины и всех связанных с ней ребер) в неповрежденной части обнаруживается работоспособная модель для Σ .

При таком подходе естественно возникает вопрос об оптимальности отказоустойчивой реализации для данной системы, т. е. о получении такого расширения H графа G , которое не содержало бы «лишних» ребер. Один из способов — конструкция минимального расширения графа, другой — его Т-неприводимое расширение.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Определение 2. Минимальным расширением графа G называется его расширение с минимальным количеством ребер.

В общем случае при построении минимального расширения возникает необходимость добавлять ребра в исходный граф, т. е. менять всю систему, моделируемую этим графом. Но иногда технически важно найти решение следующей задачи: построить оптимальное расширение данного графа, сохраняя его первоначальную конструкцию (т. е. не меняя связей внутри него). Для этого существует конструкция Т-неприводимого расширения.

Определение 3. Т-неприводимым расширением графа G называется расширение графа G , получаемое из тривиального расширения данного графа удалением максимально возможного набора добавленных при построении тривиального расширения ребер.

Определение 4. Деревом называется связный граф, в котором нет циклов.

Определение 5. Дерево называется сверхстройным, если в точности одна его вершина имеет степень больше 2. Эту вершину будем называть корнем сверхстройного дерева.

Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке невозрастания: (m_1, \dots, m_k) , где $m_1 \geq \dots \geq m_k$. Очевидно, что такое кодирование сверхстройных деревьев при $k > 2$ является взаимно однозначным.

Будем нумеровать цепи сверхстройного дерева от 1 до k . Цепи длины m_1 присвоим номер 1, цепи длины m_2 — номер 2 и т. д. Цепь длины m_k будет иметь номер k . Введем следующую нумерацию вершин сверхстройного дерева: корень сверхстройного дерева — v_0 , остальные вершины будут иметь вид v_{ij} , где i — номер цепи сверхстройного дерева, которой принадлежит вершина, j — расстояние данной вершины от корня (смежные с корнем вершины имеют расстояние 1).

2. ТНР ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕСЛОЖНЫХ И СЛОЖНЫХ С $k \geq 4$ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

До сих пор остается нерешенной следующая задача: построить одно из ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Данная задача была решена С. Г. Курносовой для подкласса сверхстройных деревьев — пальм (см. [2]). Попытка построить одно из ТНР для произвольного сверхстройного дерева описывается в [3].

В [3] описывается схема (далее будем называть эту схему схемой Харари – Хурума) построения одного из ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Заметим, что в [3] доказательство корректности схемы Харари – Хурума отсутствует. Эта схема использует понятие сложной вершины.

Определение 6. Вершина v_{ij} сверхстройного дерева T называется сложной, если среди длин цепей дерева T нет цепи длины $j - 1$ или $m_i - j$.

В соответствии со схемой Харари – Хурума для построения одного из ТНР для произвольного сверхстройного дерева необходимо:

- добавить новую вершину к исходному графу;
- соединить ребром добавленную вершину с корнем и со всеми листьями исходного дерева;
- если в исходном сверхстройном дереве нет сложных вершин, то полученный граф и является искомым ТНР. Если есть некоторая сложная вершина v_{ij} , то соединить ребром добавленную вершину и вершину $v_{i(j-1)}$. Так поступаем для всякой сложной вершины.

Однако схема Харари – Хурума построения одного из ТНР для произвольного сверхстройного дерева не всегда корректна. В [4] даются контрпримеры для данной схемы. Например, для сверхстройного дерева $(3, 2, 2)$ в [4] строится граф по схеме Харари – Хурума, а затем доказывается, что построенный граф не является ТНР для сверхстройного дерева $(3, 2, 2)$.

Определение 7. Сверхстройное дерево, имеющее хотя бы одну сложную вершину, назовем сложным сверхстройным деревом.



Определение 8. Сверхстройное дерево, не имеющее ни одной сложной вершины, назовем несложным сверхстройным деревом.

В [4] приводится предположение, что схема Харари – Хурума неверна только для определенного подкласса сверхстройных деревьев, а именно для сложных сверхстройных деревьев, состоящих из трех цепей.

В [5, с. 108–110] дается описание построения одного из ТНР для произвольного несложного сверхстройного дерева и доказывается корректность данного построения.

Обозначим через T_k — сверхстройное дерево (m_1, \dots, m_k) , где $m_1 \geq \dots \geq m_k$.

Определение 9. Графом T'_k назовем граф, получаемый из сверхстройного дерева T_k добавлением новой вершины и ребер, соединяющих эту вершину с корнем, со всеми листьями исходного дерева T_k и со всеми такими вершинами $v_{i(j-1)}$, что v_{ij} — сложная вершина исходного дерева T_k ($1 \leq i \leq k$, $2 \leq j \leq m_i - 1$).

Определение 10. Графом T''_k назовем граф, получаемый из сверхстройного дерева T_k добавлением новой вершины и ребер, соединяющих эту вершину со всеми листьями исходного дерева T_k и со всеми такими вершинами $v_{i(j-1)}$, что v_{ij} — сложная вершина исходного дерева T_k ($1 \leq i \leq k$, $2 \leq j \leq m_i - 1$).

Замечание 1. Пусть даны сложные сверхстройные деревья T_k вида (m_1, m_2, \dots, m_k) . Пронумеруем вершины T_k ранее описанным способом: $v_0 v_{i1} v_{i2} \dots v_{i(m_i-1)} v_{im_i}$, где $1 \leq i \leq k$, v_0 — корень T_k . Построим для T_k по определению 10 граф T''_k (вершину, добавленную при построении графа T''_k , назовем w). Рассмотрим вложение исходного графа T_k в некоторые максимальные подграфы графа T''_k .

- $T''_k - w$. Вложение очевидно, получился исходный граф T_k .
- $T''_k - v_0$. Корнем может быть только вершина w . Тогда цепи будут иметь вид: $w v_{im_i} v_{i(m_i-1)} \dots v_{i2} v_{i1}$, где $1 \leq i \leq k$. T_k вкладывается в граф $T''_k - v_0$.
- $T''_k - v_{ij}$, где v_{ij} — сложная вершина, $1 \leq i \leq k$, $2 \leq j \leq m_i - 1$. Так как v_{ij} — сложная вершина, то по определению в графе $T''_k - v_{ij}$ имеется ребро $\{w, v_{i(j-1)}\}$, тогда корень — вершина v_0 , i -я цепь будет иметь вид: $v_0 v_{i1} v_{i2} \dots v_{i(j-1)} w v_{im_i} v_{i(m_i-1)} \dots v_{i(j+1)}$ (длина цепи m_i), остальные цепи имеют вид как в исходном дереве T_k . В силу произвольности выбора сложной вершины T_k вкладывается в любой из графов $T''_k - v_{ij}$, где v_{ij} — сложная вершина.
- $T''_k - v_{ij}$, где v_{ij} — вершина, не являющаяся сложной, $1 \leq i \leq k$, $2 \leq j \leq m_i - 1$. Если v_{ij} не является сложной, то дерево T_k имеет цепь длины $j - 1$ или $m_i - j$. Пусть имеется некоторая цепь $v_0 v_{t1} v_{t2} \dots v_{tm_t}$.
 - а) $m_t = j - 1$. Тогда цепь $v_0 v_{i1} v_{i2} \dots v_{i(j-1)}$ — цепь длины m_t , цепь $v_0 v_{t1} v_{t2} \dots v_{tm_t} w v_{im_i} v_{i(m_i-1)} \dots v_{i(j+1)}$ — цепь длины m_i . Остальные цепи имеют вид как в исходном дереве T_k .
 - б) $m_t = m_i - j$. Тогда $w v_{im_i} v_{i(m_i-1)} \dots v_{i(j+1)}$ — цепь длины m_t , цепь $w v_{tm_t} \dots v_{t2} v_{t1} v_0 v_{i1} v_{i2} \dots v_{i(j-1)}$ — цепь длины m_i . Остальные цепи имеют вид $w v_{sm_s} v_{s(m_s-1)} \dots v_{s2} v_{s1}$, $s \neq i$, $s \neq t$.

В силу произвольности выбора вершины, T_k вкладывается в любой из графов $T''_k - v_{ij}$, где v_{ij} — вершина, не являющаяся сложной.

Очевидно, если данные рассуждения справедливы для графа T''_k , то они справедливы и для графа T'_k , построенного для того же самого графа T_k .

Замечание 2. Пусть даны сложные сверхстройные деревья T_k вида (m_1, m_2, \dots, m_k) . Пронумеруем вершины T_k ранее описанным способом: $v_0 v_{i1} v_{i2} \dots v_{i(m_i-1)} v_{im_i}$, где $1 \leq i \leq k$, v_0 — корень T_k . Построим тривиальное расширение для T_k и назовем полученный граф H_k (вершину, добавленную при построении тривиального расширения, назовем w). Будем удалять ребра из графа H_k и проверять, является ли расширением для T_k полученный граф.



- $H_k - \{w, v_{im_i}\}$, $1 \leq i \leq k$. Очевидно, в таком случае достаточно удалить вершину $v_{i(m_i-1)}$ из $H_k - \{w, v_{im_i}\}$. Тогда вершина v_{im_i} будет иметь степень 0, следовательно, исходный граф не вкладывается в полученный граф. В силу произвольности выбора удаляемого ребра ни один из графов $H_k - \{w, v_{im_i}\}$, $1 \leq i \leq k$, не является расширением для T_k .
- $H_k - \{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина, $1 \leq i \leq k$, $2 \leq j \leq m_i - 1$. Если v_{ij} — сложная вершина, то по определению сложной вершины в T_k нет цепей длины $j - 1$ или $m_i - j$. Удалим из графа $H_k - \{w, v_{i(j-1)}\}$ вершину v_{ij} . Тогда вершина $v_{i(j-1)}$ имеет степень 1, т.е. становится листом одной из цепи. Корнем могут быть только две вершины v_0 и w .

а) v_0 — корень. Тогда в цепь $v_0v_{i1}v_{i2} \dots v_{i(j-1)}$ вкладывается некоторая цепь исходного дерева T_k , пусть эта цепь имеет вид $v_0v_{t1}v_{t2} \dots v_{tm_t}$. Тогда в цепь $v_0v_{t1}v_{t2} \dots v_{tm_t}wv_{im_i}v_{i(m_i-1)} \dots v_{i(j+1)}$ вкладывается цепь длины m_i исходного дерева T_k . Возможно только такое вложение. Получилось, что $m_t = j - 1$. Данный факт противоречит условию, что в T_k нет цепи длины $j - 1$. Вложение невозможно.

б) w — корень. Тогда в цепь $wv_{im_i}v_{i(m_i-1)} \dots v_{i(j+1)}$ вкладывается некоторая цепь исходного дерева T_k , пусть эта цепь имеет вид $v_0v_{t1}v_{t2} \dots v_{tm_t}$. Тогда в цепь $wv_{tm_t} \dots v_{t2}v_{t1}v_0v_{i1}v_{i2} \dots v_{i(j-1)}$ вкладывается цепь длины m_i исходного дерева T_k . Возможно только такое вложение. Получилось, что $m_t = m_i - j$. Данный факт противоречит условию, что в T_k нет цепи длины $m_i - j$. Вложение невозможно.

В силу произвольности выбора удаляемого ребра, ни один из графов $H_k - \{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина, $1 \leq i \leq k$, $2 \leq j \leq m_i - 1$, не является расширением для T_k .

Теорема 1. Пусть T_k — несложное сверхстройное дерево или сложное сверхстройное дерево с $k \geq 4$. Тогда одним из ТНР для T_k будет граф T'_k .

Доказательство. 1. Доказательство случая для произвольного несложного сверхстройного дерева приводится в [5, с. 108–110].

2. Пусть дано некоторое сложное сверхстройное дерево T_k вида: (m_1, \dots, m_k) , где $m_1 \geq \dots \geq m_k$, $k \geq 4$. Пронумеруем вершины T_k ранее описанным способом: $v_0v_{i1}v_{i2} \dots v_{i(m_i-1)}v_{im_i}$, где $1 \leq i \leq k$, v_0 — корень T_k . Построим в соответствии с определением 9 граф T'_k . Добавленную при построении графа T'_k вершину назовем w .

2.1. Покажем, что граф T'_k является расширением для T_k . Покажем, что T_k вкладывается в каждый максимальный подграф графа T'_k . Будем использовать вложения исходного графа T_k в разные максимальные подграфы графа T'_k , как описано в замечании 1. Тогда останется проверить, вкладывается ли граф T_k в графы $T'_k - v_{i1}$ и $T'_k - v_{im_i}$, $1 \leq i \leq k$.

- $T'_k - v_{im_i}$, $1 \leq i \leq k$. Тогда корень — вершина w , i -я цепь будет иметь вид $wv_0v_{i1}v_{i2} \dots v_{i(m_i-1)}$ (длина цепи m_i), остальные цепи имеют вид $wv_{tm_t}v_{t(m_t-1)} \dots v_{t1}$, $t \neq i$. В силу произвольности выбора вершины T_k вкладывается в любой из графов $T'_k - v_{im_i}$, $1 \leq i \leq k$.
- $T'_k - v_{i1}$, $1 \leq i \leq k$. Тогда корень — v_0 , i -я цепь будет иметь вид $v_0wv_{im_i}v_{i(m_i-1)} \dots v_{i2}$ (длина цепи m_i), остальные цепи имеют вид как в исходном дереве T_k . В силу произвольности выбора вершины T_k вкладывается в любой из графов $T'_k - v_{i1}$, $1 \leq i \leq k$.

Таким образом, доказано, что граф T'_k является расширением для сверхстройного дерева T_k .

2.2. Покажем, что граф T'_k является ТНР для T_k . Докажем свойство неприводимости, т.е. что при удалении любого ребра из T'_k свойство расширения для полученного графа не сохраняется.

В соответствии с замечанием 2 из тривиального расширения графа T_k нельзя удалить ни одного из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leq i \leq k$, $2 \leq j \leq m_i - 1$), так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_k . Значит, из графа T'_k также нельзя удалить ни одного из этих ребер так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_k .

Остается проверить, является ли расширением для T_k граф $T'_k - \{w, v_0\}$.



Рассмотрим граф $T'_k - \{w, v_0\}$. Удалим из $T'_k - \{w, v_0\}$ вершину v_{11} . Вершина v_0 будет иметь степень $k - 1$. Корнем может быть только вершина w , но тогда цепь $wv_{1m_1}v_{1(m_1-1)}\dots v_{12}$ имеет длину только $m_1 - 1$. Граф $T'_k - \{w, v_0\}$ не является расширением T_k или граф T_k должен иметь цепь длины $m_1 - 1$. Пусть эта цепь имеет вид $v_0v_{t1}\dots v_{t(m_1-1)}$. Тогда цепь $wv_{1m_1}v_{1(m_1-1)}\dots v_{12}$ имеет длину $m_1 - 1$, а цепь $wv_{t(m_1-1)}\dots v_{t1}v_0$ имеет длину m_1 .

Повторим данные рассуждения для цепи длины $m_1 - 1$ (т.е. начнем с удаления вершины v_{t1}). Получим, что граф $T'_k - \{w, v_0\}$ не является расширением T_k или граф T_k должен иметь цепь длины $m_1 - 2$.

Продолжая дальше данные рассуждения, получим, что граф $T'_k - \{w, v_0\}$ не является расширением T_k или T_k должно иметь вид: $(m_1, \dots, m_1 - 1, \dots, m_1 - 2, \dots, 2, \dots, 1, \dots)$, но сверхстройное дерево такого вида не является сложным по определению, что противоречит условию.

Значит, граф $T'_k - \{w, v_0\}$ не является расширением T_k .

Свойство неприводимости доказано.

Таким образом, граф T'_k является ТНР для сверхстройного дерева T_k . □

3. ТНР ДЛЯ СЛОЖНЫХ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ С $k = 3$

Рассмотрим сложное сверхстройное деревья T_3 , т.е. вида (m_1, m_2, m_3) .

Теорема 2. Пусть дано сложное сверхстройное дерево T_3 вида

$$(m_1, m_1 - 1, m_2), m_1 \neq 2m_2, m_2 \neq m_1 - 2, m_2 \neq 1. \tag{1}$$

Тогда единственным ТНР для дерева T_3 будет граф T_3'' .

Доказательство. Пусть дано некоторое сложное сверхстройное дерево T_3 вида (1). Пронумеруем вершины T_3 ранее описанным способом: $v_0v_{11}v_{12}\dots v_{1m_1}$, $v_0v_{21}v_{22}\dots v_{2(m_1-1)}$, $v_0v_{31}v_{32}\dots v_{3m_2}$, v_0 — корень T_3 . Построим в соответствии с определением 10 граф T_3'' . Добавленную при построении графа T_3'' вершину назовем w .

1. Покажем, что граф T_3'' является расширением для T_3 . Покажем, что T_3 вкладывается в каждый максимальный подграф графа T_3'' . Будем использовать вложения исходного графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T_3'' , как описано в замечании 1 (с учетом $k = 3$). Тогда останется проверить, вкладывается ли граф T_3 в графы $T_3'' - v_{1m_1}$, $T_3'' - v_{2(m_1-1)}$, $T_3'' - v_{3m_2}$ и $T_3'' - v_{i1}$, $1 \leq i \leq 3$.

- $T_3'' - v_{11}$. Тогда цепь $wv_{1m_1}\dots v_{12}$ — цепь длины $m_1 - 1$, цепь $wv_{2(m_1-1)}\dots v_{21}v_0$ — цепь длины m_1 , $wv_{3m_2}\dots v_{31}$ — цепь длины m_2 . Граф T_3 вкладывается в граф $T_3'' - v_{11}$.
- $T_3'' - v_{1m_1}$. Тогда цепь $v_0v_{11}\dots v_{1(m_1-1)}$ — цепь длины $m_1 - 1$, цепь $v_0v_{21}\dots v_{2(m_1-1)}w$ — цепь длины m_1 , $v_0v_{31}\dots v_{3m_2}$ — цепь длины m_2 . Граф T_3 вкладывается в граф $T_3'' - v_{1m_1}$.
- $T_3'' - v_{31}$. Тогда цепь $v_{11}\dots v_{1m_1}$ — цепь длины $m_1 - 1$, цепь $v_{11}v_0v_{21}\dots v_{2(m_1-1)}$ — цепь длины m_1 , $v_{11}wv_{3m_2}\dots v_{32}$ — цепь длины m_2 . Отметим, что в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{11}\}$, потому что по определению вершина v_{12} — сложная (в T_3 нет цепей длины 1 или $m_1 - 2$ по условию теоремы). Граф T_3 вкладывается в граф $T_3'' - v_{31}$.
- $T_3'' - v_{3m_2}$. Тогда цепь $v_{11}\dots v_{1m_1}$ — цепь длины $m_1 - 1$, цепь $v_{11}wv_{2(m_1-1)}\dots v_{21}$ — цепь длины m_1 , $v_{11}v_0v_{31}\dots v_{3(m_2-1)}$ — цепь длины m_2 . Граф T_3 вкладывается в граф $T_3'' - v_{3m_2}$.
- $T_3'' - v_{21}$. Тогда цепь $v_{1(m_1-m_2)}wv_{2(m_1-1)}\dots v_{22}$ — цепь длины $m_1 - 1$, цепь $v_{1(m_1-m_2)}v_{1(m_1-m_2-1)}\dots v_{11}v_0v_{31}\dots v_{3m_2}$ — цепь длины m_1 , цепь $v_{1(m_1-m_2)}\dots v_{1m_1}$ — цепь длины m_2 .

В графе T_3'' должно быть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$. По построении T_3'' , если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$, вершина $v_{1(m_1-m_2+1)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 не должно быть цепи длины $m_1 - m_2$ (выполняется благодаря условиям теоремы: $m_2 \neq 1$ и $m_1 \neq 2m_2$) или цепи длины $m_2 - 1$ (выполняется по умолчанию). Условия выполнены, следовательно, вершина $v_{1(m_1-m_2+1)}$ сложная, и в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$. Граф T_3 вкладывается в граф $T_3'' - v_{21}$.



- $T_3'' - v_{2(m_1-1)}$. Тогда цепь $wv_{1m_1} \dots v_{12}$ — цепь длины $m_1 - 1$, цепь $wv_{11}v_0v_{21} \dots v_{2(m_1-2)}$ — цепь длины m_1 , цепь $wv_{3m_2} \dots v_{31}$ — цепь длины m_2 . Граф T_3 вкладывается в граф $T_3'' - v_{2(m_1-1)}$.

Таким образом, доказано, что граф T_3'' является расширением для сверхстройного дерева T_3 .

2. Покажем, что граф T_3'' является ТНР для T_3 . Докажем свойство неприводимости, т. е. при удалении любого ребра из T_3'' свойство расширения для полученного графа не сохраняется.

В соответствии с замечанием 2 (нужно учитывать, что $k = 3$) из тривиального расширения графа T_3 нельзя удалить ни одного из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq m_i - 1$), так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3 . Значит, из графа T_3'' также нельзя удалить ни одного из этих ребер так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3 .

Свойство неприводимости доказано. Таким образом, граф T_3'' является ТНР для сверхстройного дерева T_3 .

3. Покажем, что граф T_3'' является единственным ТНР для T_3 . Предположим, что существует еще одно ТНР для T_3 . Назовем этот граф H_3'' . Тогда в графе H_3'' хотя бы одно из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq m_i - 1$), должно быть заменено на некоторое другое ребро (или на некоторый набор ребер).

Однако в соответствии с замечанием 2 (нужно учитывать, что $k = 3$), из тривиального расширения графа T_3 нельзя удалить ни одного из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq m_i - 1$), так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3 . Значит, ни одно из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq m_i - 1$), нельзя заменить так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3 . Следовательно, граф H_3'' не может быть расширением для T_3 и тем более ТНР для T_3 . Получили противоречие.

Граф T_3'' является единственным ТНР для T_3 . □

Теорема 3. Пусть дано сложное сверхстройное дерево T_3 вида

$$(m_1, m_2, m_3), \quad m_1 = m_2 + m_3 + 2, \quad m_1 \neq 2m_2, \quad m_1 \neq 2m_2 + 1, \quad m_3 \neq 1 \quad (2)$$

или

$$(m_1, m_2, m_3), \quad m_1 = m_2 + m_3 + 1, \quad m_1 \neq 2m_2, \quad m_3 \neq 1. \quad (3)$$

Тогда единственным ТНР для дерева T_3 будет граф T_3'' .

Доказательство. Пусть дано некоторое сложное сверхстройное дерево T_3 вида (2) или вида (3). Пронумеруем вершины T_3 ранее описанным способом: $v_0v_{i1}v_{i2} \dots v_{i(m_i-1)}v_{im_i}$, где $1 \leq i \leq 3, v_0$ — корень T_3 . Построим в соответствии с определением 10 граф T_3'' . Добавленную при построении графа T_3'' вершину назовем w .

1. Покажем, что граф T_3'' является расширением для T_3 . Покажем, что T_3 вкладывается в каждый максимальный подграф графа T_3'' . Будем использовать вложения исходного графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T_3'' , как описано в замечании 1 (с учетом $k = 3$). Тогда останется проверить, вкладывается ли граф T_3 в графы $T_3'' - v_{i1}$ и $T_3'' - v_{im_i}$, $1 \leq i \leq 3$.

- $T_3'' - v_{31}$. Тогда цепь $v_{1(m_1-m_2)} \dots v_{11}v_0v_{21} \dots v_{2m_2}$ — цепь длины m_1 , цепь $v_{1(m_1-m_2)}wv_{3m_3} \dots v_{32}$ — цепь длины m_3 , цепь $v_{1(m_1-m_2)}v_{1(m_1-m_2+1)} \dots v_{1m_1}$ — цепь длины m_2 .

В графе T_3'' должно быть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$. Если T_3 вида (2), то должно быть ребро $\{w, v_{1(m_3+2)}\}$, если T_3 вида (3), то должно быть ребро $\{w, v_{1(m_3+1)}\}$.

По построению T_3'' , если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_3+2)}\}$, вершина $v_{1(m_3+3)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (2) не должно быть цепи длины $m_3 + 2$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 \neq 2m_2$) или цепи длины $m_1 - m_3 - 3$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2 + m_3 + 2$ и $m_1 \neq 2m_2 + 1$). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_3+3)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_3+2)}\}$.



По построению T_3'' , если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_3+1)}\}$, вершина $v_{1(m_3+2)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (3) не должно быть цепи длины $m_3 + 1$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2 + m_3 + 1$ и $m_1 \neq 2m_2$) или цепи длины $m_1 - m_3 - 2$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2 + m_3 + 1$ и $m_1 \neq 2m_2$). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_3+2)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_3+1)}\}$.

- $T_3'' - v_{3m_3}$. Тогда цепь $wv_{1(m_1-m_3)} \dots v_{11}v_0v_{31} \dots v_{3(m_3-1)}$ — цепь длины m_1 , цепь $wv_{1m_1} \dots v_{1(m_1-m_3+1)}$ — цепь длины m_3 , цепь $wv_{2m_2} \dots v_{21}$ — цепь длины m_2 .

В графе T_3'' должно быть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_3)}\}$. Если T_3 вида (2), то должно быть ребро $\{w, v_{1(m_2+2)}\}$, если T_3 вида (3), то должно быть ребро $\{w, v_{1(m_2+1)}\}$.

По построению T_3'' , если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_2+2)}\}$, вершина $v_{1(m_2+3)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (2) не должно быть цепи длины $m_2 + 2$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2 + m_3 + 2$) или цепи длины $m_1 - m_2 - 3$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2 + m_3 + 2$). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_2+3)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_2+2)}\}$.

По построению T_3'' , если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_2+1)}\}$, вершина $v_{1(m_2+2)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (3) не должно быть цепи длины $m_2 + 1$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2 + m_3 + 1$) или цепи длины $m_1 - m_2 - 2$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2 + m_3 + 1$). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_2+2)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_2+1)}\}$.

- $T_3'' - v_{21}$. Тогда цепь $v_{1(m_1-m_3)} \dots v_{11}v_0v_{31} \dots v_{3m_3}$ — цепь длины m_1 , цепь $v_{1(m_1-m_3)} v_{1(m_1-m_3+1)} \dots v_{1m_1}$ — цепь длины m_3 , цепь $v_{1(m_1-m_3)}wv_{2m_2} \dots v_{22}$ — цепь длины m_2 .
- $T_3'' - v_{2m_2}$. Тогда цепь $wv_{1(m_1-m_2)} \dots v_{11}v_0v_{21} \dots v_{2(m_2-1)}$ — цепь длины m_1 , цепь $wv_{3m_3} \dots v_{31}$ — цепь длины m_3 , цепь $wv_{1m_1} \dots v_{1(m_1-m_2+1)}$ — цепь длины m_2 .
- $T_3'' - v_{11}$. Если T_3 вида (2), тогда цепь $v_{1(m_1-m_3)}wv_{3m_3} \dots v_{31}v_0v_{21} \dots v_{2m_2}$ — цепь длины m_1 (по условию $m_1 = m_2 + m_3 + 2$), цепь $v_{1(m_1-m_3)}v_{1(m_1-m_3+1)} \dots v_{1m_1}$ — цепь длины m_3 , цепь $v_{1(m_1-m_3)}v_{1(m_1-m_3-1)} \dots v_{12}$ (по условию $m_2 = m_1 - m_3 - 2$) — цепь длины m_2 .

Если T_3 вида (3), тогда цепь $wv_{3m_3} \dots v_{31}v_0v_{21} \dots v_{2m_2}$ — цепь длины m_1 (по условию $m_1 = m_2 + m_3 + 1$), цепь $wv_{1(m_1-m_2)}v_{1(m_1-m_2-1)} \dots v_{12}$ — цепь длины m_3 , цепь $wv_{1m_1} \dots v_{1(m_1-m_2+1)}$ — цепь длины m_2 (по условию $m_2 = m_1 - m_3 - 1$).

- $T_3'' - v_{1m_1}$. Если T_3 вида (3), тогда цепь $wv_{3m_3} \dots v_{31}v_0v_{21} \dots v_{2m_2}$ — цепь длины m_1 (по условию $m_1 = m_2 + m_3 + 1$), цепь $wv_{1(m_1-m_3)}v_{1(m_1-m_3+1)} \dots v_{1(m_1-1)}$ — цепь длины m_3 , цепь $wv_{11}v_{12} \dots v_{1m_2}$ — цепь длины m_2 .

В графе T_3'' должно быть ребро $\{w, v_{11}\}$. По построению T_3'' , если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{11}\}$, вершина v_{12} должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (3) не должно быть цепи длины 1 (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_3 \neq 1$) или цепи длины $m_1 - 2$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_3 \neq 1$). Условия выполнены, вершина v_{12} — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{11}\}$.

Если T_3 вида (2), тогда цепь $wv_{3m_3} \dots v_{31}v_0v_{11} \dots v_{1(m_1-m_3-1)}$ — цепь длины m_1 , цепь $wv_{1(m_1-m_3)}v_{1(m_1-m_3+1)} \dots v_{1(m_1-1)}$ — цепь длины m_3 , цепь $wv_{2m_2}v_{2(m_2-1)} \dots v_{21}$ — цепь длины m_2 .

Таким образом, доказано, что граф T_3'' является расширением для сверхстройного дерева T_3 вида (2) и (3).

2. Докажем свойство неприводимости, т. е. при удалении любого ребра из T_3'' свойство расширения для полученного графа не сохраняется.

Доказательство аналогично доказательству, приведенному в п. 2 теоремы 2.

3. Доказательство того что граф T_3'' является единственным ТНР для T_3 вида (2) и вида (3), аналогично доказательству, приведенному в п. 3 теоремы 2. \square



Следствие 1. Если $m_2 = m_3 = m$, то (2) приобретет вид $(2m + 2, m, m)$, $m \neq 1$.

Следствие 2. Если $m_2 = m_3 = m$, то (3) приобретет вид $(2m + 1, m, m)$, $m \neq 1$.

Теорема 4. Пусть дано сложное сверхстройное дерево T_3 вида

$$(m_1, m_2, m_3),$$

$$m_1 - m_2 > 2, \quad m_1 - m_2 - m_3 > 2 \quad \text{или} \quad m_1 - m_2 - m_3 < 0, \quad (4)$$

$$m_2 - m_3 > 1, \quad m_1 \neq 2m_2, \quad m_1 \neq 2m_3, \quad m_2 \neq 2m_3, \quad m_3 \neq 1.$$

Доказательство. Пусть дано некоторое сложное сверхстройное дерево T_3 вида (4). Пронумеруем вершины T_3 ранее описанным способом: $v_0 v_{i1} v_{i2} \dots v_{i(m_i-1)} v_{im_i}$, где $1 \leq i \leq 3$, v_0 — корень T_3 . Построим в соответствии с определением 10 граф T_3'' . Добавленную при построении графа T_3'' вершину назовем w .

1. Покажем, что граф T_3'' является расширением для T_3 . Покажем, что T_3 вкладывается в каждый максимальный подграф графа T_3'' . Будем использовать вложения исходного графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T_3'' , как описано в п. 1 теоремы 3, кроме случаев вложения графа T_3 в максимальные подграфы $T_3'' - v_{11}$ и $T_3'' - v_{1m_1}$. Эти случаи рассмотрим отдельно.

Для того чтобы было возможно вложение графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T_3'' , как описано в п. 1 теоремы 3, нужно существование в графе T_3'' ребер $\{w, v_{1(m_1-m_3)}\}$, $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$.

По построению T_3'' , если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_3)}\}$, вершина $v_{1(m_1-m_3+1)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (4) не должно быть цепи длины $m_1 - m_3$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 - m_2 - m_3 > 2$ или $m_1 - m_2 - m_3 < 0$ и условию $m_1 \neq 2m_3$) или цепи длины $m_3 - 1$ (выполняется по умолчанию). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_1-m_3+1)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_3)}\}$.

По построению T_3'' , если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$, вершина $v_{1(m_1-m_2+1)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (4) не должно быть цепи длины $m_1 - m_2$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 - m_2 - m_3 > 2$ или $m_1 - m_2 - m_3 < 0$ и условию $m_1 \neq 2m_2$) или цепи длины $m_3 - 1$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_2 - m_3 > 1$). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_1-m_2+1)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$.

- $T_3'' - v_{11}$. Тогда цепь $v_{2(m_2-m_3)} w v_{1m_1} \dots v_{12}$ — цепь длины m_1 , цепь $v_{2(m_2-m_3)} v_{2(m_2-m_3+1)} \dots v_{2m_2}$ — цепь длины m_3 , $v_{2(m_2-m_3)} v_{2(m_2-m_3-1)} \dots v_{21} v_0 v_{31} \dots v_{3m_3}$ — цепь m_2 .

Вложение графа T_3 в граф $T_3'' - v_{11}$ возможно, если $m_2 \neq m_3$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_2 - m_3 > 1$).

В графе T_3'' должно быть ребро $\{w, v_{2(m_2-m_3)}\}$. По построению T_3'' , если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{2(m_2-m_3)}\}$, вершина $v_{2(m_2-m_3+1)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (4) не должно быть цепи длины $m_2 - m_3$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_2 \neq 2m_3$) или цепи длины $m_3 - 1$ (выполняется по умолчанию). Условия выполнены, вершина $v_{2(m_2-m_3+1)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{2(m_2-m_3)}\}$.

- $T_3'' - v_{1m_1}$. Тогда цепь $v_{2(m_2-m_3)} w v_{11} \dots v_{1(m_1-1)}$ — цепь длины m_1 , цепь $v_{2(m_2-m_3)} v_{2(m_2-m_3+1)} \dots v_{2m_2}$ — цепь длины m_3 , $v_{2(m_2-m_3)} v_{2(m_2-m_3-1)} \dots v_{21} v_0 v_{31} \dots v_{3m_3}$ — цепь m_2 .

В графе T_3'' должно быть ребро $\{w, v_{11}\}$. По построению T_3'' , если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{11}\}$, вершина v_{12} должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (4) не должно быть цепи длины 1 (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_3 \neq 1$) или цепи длины $m_1 - 2$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 - m_2 > 2$). Условия выполнены, вершина v_{12} — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{11}\}$.

Таким образом, доказано, что граф T_3'' является расширением для сверхстройного дерева T_3 вида (4).

2. Докажем свойство неприводимости, т. е. при удалении любого ребра из T_3'' свойство расширения для полученного графа не сохраняется.

Доказательство аналогично доказательству, приведенному в п. 2 теоремы 2.



3. Доказательство того, что граф T_3'' является единственным ТНР для T_3 вида (4), аналогично доказательству, приведенному в п. 3 теоремы 2. \square

Теорема 5. Пусть дано сложное сверхстройное дерево T_3 вида (m_1, m_2, m_3) , не удовлетворяющее условиям (1), (2), (3) и (4). Тогда одним из ТНР для дерева T_3 является граф T_3' .

Доказательство. Пусть дано некоторое сложное сверхстройное дерево T_3 вида (m_1, m_2, m_3) , не удовлетворяющее условиям (1), (2), (3) и (4). Пронумеруем вершины T_3 ранее описанным способом: $v_0 v_{i1} v_{i2} \dots v_{i(m_i-1)} v_{im_i}$, где $1 \leq i \leq 3$, v_0 — корень T_3 . Построим в соответствии с определением 9 граф T_3' . Добавленную при построении графа T_3' вершину назовем w .

1. Покажем, что граф T_3' является расширением для T_3 . Покажем, что T_3 вкладывается в каждый максимальный подграф графа T_3' . Будем использовать вложения исходного графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T_3' , как описано в п. 2.1 теоремы 1 (с учетом того, что $k = 3$).

Таким образом, доказано, что граф T_3' является расширением для сверхстройного дерева T_3 .

2. Покажем, что граф T_3' является ТНР для T_3 . Докажем свойство неприводимости, т.е. при удалении любого ребра из T_3' свойство расширения для полученного графа не сохраняется.

В соответствии с замечанием 2 из тривиального расширения графа T_3 нельзя удалить ни одного из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq m_i - 1$), так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3 . Значит, из графа T_3' также нельзя удалить ни одного из этих ребер так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3 .

Остается проверить, является ли расширением для T_3 граф $T_3' - \{w, v_0\}$.

Рассмотрим граф $T_3' - \{w, v_0\}$. Заметим, что граф $T_3' - \{w, v_0\}$ — это граф T_3'' , построенный для T_3 . Таким образом, нужно показать, что граф T_3'' не является расширением для T_3 .

Предположим, что граф T_3'' является расширением для T_3 . Тогда граф T_3 должен вкладываться в каждый максимальный подграф графа T_3'' . Будем использовать вложения исходного графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T_3'' , как описано в замечании 1 (с учетом $k = 3$). Тогда останется проверить, вкладывается ли граф T_3 в графы $T_3'' - v_{i1}$ и $T_3'' - v_{im_i}$, $1 \leq i \leq 3$.

- а) $T_3'' - v_{31}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{31}$ только при выполнении одного из следующих условий: $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq m_2 + m_3$, $m_3 \neq 1$ или T_3 имеет вид $(m_1, m - 1, m_2)$, $m_2 \neq 1$;
- б) $T_3'' - v_{3m_3}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{3m_3}$ только при выполнении одного из следующих условий: $m_1 \neq 2m_3$, $m_1 \neq m_2 + m_3$, $m_3 \neq 1$ или T_3 имеет вид $(m_1, m_1 - 1, m_2)$, $m_2 \neq 1$;
- в) $T_3'' - v_{21}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{21}$ только при выполнении следующего условия: $m_1 \neq 2m_3$, $m_1 \neq m_2 + m_3$, $m_3 \neq 1$;
- г) $T_3'' - v_{2m_2}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{2m_2}$ только при выполнении одного из следующих условий: $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq m_2 + m_3$, $m_3 \neq 1$ или T_3 имеет вид $(m_1, m - 1, m_2)$, $m_2 \neq 1$, $m_2 \neq m_1 - 2$;
- д) $T_3'' - v_{11}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{11}$ только при выполнении одного из следующих условий:
 - T_3 имеет вид $(m_1, m_1 - 1, m_2)$, $m_2 \neq 1$;
 - $m_1 = m_2 + m_3 + 1$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_3 \neq 1$;
 - $m_1 = m_2 + m_3 + 2$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq 2m_2 + 1$, $m_3 \neq 1$;
 - $m_2 \neq m_3$, $m_2 \neq 2m_3$.
- е) $T_3'' - v_{1m_1}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{1m_1}$ только при выполнении одного из следующих условий:
 - T_3 имеет вид $(m_1, m_1 - 1, m_2)$, $m_2 \neq 1$;
 - $m_1 = m_2 + m_3 + 1$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_3 \neq 1$;
 - $m_1 = m_2 + m_3 + 2$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq 2m_2 + 1$, $m_3 \neq 1$;
 - $m_2 \neq m_3$, $m_2 \neq 2m_3$, $m_2 \neq m_1 - 2$, $m_3 \neq m_1 - 2$, $m_3 \neq 1$.



Для вложения графа T_3 в графы $T_3'' - v_{i1}$ и $T_3'' - v_{im_i}$, $1 \leq i \leq 3$, нужно, чтобы выполнялся каждый из пунктов а)–е). Тогда для T_3 должно выполняться одно из следующих условий:

- 1') $(m_1, m_1 - 1, m_2)$, где $m_1 \neq 2m_2$, $m_2 \neq m_1 - 2$, $m_2 \neq 1$;
- 2') (m_1, m_2, m_3) , где $m_1 = m_2 + m_3 + 2$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq 2m_2 + 1$, $m_3 \neq 1$;
- 3') (m_1, m_2, m_3) , где $m_1 = m_2 + m_3 + 1$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_3 \neq 1$;
- 4') (m_1, m_2, m_3) , где $m_1 - m_2 > 2$, $m_1 - m_2 - m_3 > 2$ или $m_1 - m_2 - m_3 < 0$, $m_2 - m_3 > 1$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq 2m_3$, $m_2 \neq 2m_3$, $m_3 \neq 1$.

Заметим, что условие 1') совпадает с (1), 2') совпадает с (2), 3') — с (3), а 4') — с (4). Однако по условию теоремы T_3 не удовлетворяет условиям (1)–(4). Противоречие. Значит, T_3'' не является расширением для T_3 .

Свойство неприводимости доказано.

Граф T_3' является ТНР для сверхстройного дерева T_3 . □

Таким образом, с учетом теорем 1–5 задача построения одного из ТНР для произвольного сверхстройного дерева полностью решена.

Библиографический список

1. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука, 2009.
2. Курносова С. Г. T-неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 113–125.
3. Harary F., Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. Vol. 6. P. 135–143.
4. Осипов Д. Ю. Об одном контрпримере для T-неприводимых расширений сверхстройных деревьев // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3(25). С. 98–102.
5. Абросимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.

T-irreducible Extensions for Starlike Trees

D. Yu. Osipov

Osipov Dmitrii Yurievich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, st_hill@mail.ru

We deal with a sort of optimal extensions of graphs, so called T-irreducible extensions. T-irreducible extension of a graph G is an extension of G obtained by removing a maximal set of edges from the trivial extension of G . A difficult starlike tree is a starlike tree that has at least one difficult node. T-irreducible extensions for nondifficult starlike trees were constructed by M. B. Abrosimov, T-irreducible extensions for palms (one of subclasses of starlike trees) were constructed by S. G. Kurnosova. Counterexamples were found to a method of Harary and Khurum, who tried to construct possible T-irreducible extensions for starlike trees. T-irreducible extensions for difficult starlike trees are constructed.

Key words: graph, T-irreducible extension, starlike tree, difficult and nondifficult starlike trees.

References

1. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 2009 (in Russians).
2. Kurnosova S. G. T-neprivodimye rasshirenija dlja nekotorykh klassov grafov [T-irreducible extensions for some classes graphs]. *Teoreticheskie problemy informatiki i ee prilozhenij* [Theoretical Problems of Informatics and its applications]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2004, vol. 6, pp. 113–125 (in Russians).
3. Harary F., Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees. *Internet J. Comput. Math.*, 1995, vol. 6, pp. 135–143.
4. Osipov D. Yu. On a Counterexample for a T-irreducible Extensions of Starlike Trees. *Applied Discrete Mathematics*, 2014, no. 3(25), pp. 98–102 (in Russians).
5. Abrosimov M. B. *Grafovye modeli otkazoustojchivosti* [Graph models of fault tolerance]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2012, 192 p. (in Russians).



УДК 004.934

РАЗРАБОТКА КОМПОНЕНТОВ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ ПОТОКОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ АУДИОКОНТЕНТА НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ

А. Н. Савин¹, Н. Е. Тимофеева², А. С. Гераськин³, Ю. А. Мавлютова⁴

¹Савин Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, savinan@info.sgu.ru

²Тимофеева Надежда Евгеньевна, ассистент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, timofeevane@yandex.ru

³Гераськин Алексей Сергеевич, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, gerascinas@mail.ru

⁴Мавлютова Юлия Альбертовна, студентка кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, yuliyamav@yandex.ru

Приведены результаты разработки эффективных алгоритмов потокового распознавания речи с помощью стохастических моделей, основанных на использовании скрытых марковских моделях. В статье приводятся основные теоретические сведения для скрытой марковской модели дискретной системы, выделяются параметры, необходимые для ее определения, также рассмотрены три основные задачи, которые должны быть решены для успешного применения скрытой марковской модели в системах распознавания речи. Приводятся алгоритмы метода Баума – Велша, направленного на уточнение параметров модели и метода Витерби, подбора наиболее вероятной последовательности состояний системы. Эти два метода реализованы в среде графического программирования LabVIEW в виде программных модулей, реализующих построение скрытых марковских моделей отдельных слов с использованием метода Баума – Велша и распознавание этих слов на основе метода Витерби. Предполагается использование данных модулей для реализации потоковой фильтрации аудиоконтента в цифровых системах связи.

Ключевые слова: марковские цепи, распознавание речи, алгоритм метода Витерби, метод Баума – Велша.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-340-350

ВВЕДЕНИЕ

Важными задачами при разработке систем передачи информации являются математическое моделирование их узлов и процессов, происходящих при передаче информации. Одной из таких задач является моделирование сигналов, с помощью которых осуществляется передача информации [1].

Сигналы по своей природе могут быть непрерывными (например, фрагменты речи, музыка и т. п.) или дискретными (символы конечного алфавита и т. п.). Если статистические свойства сигналов не изменяются во времени, то такие сигналы являются стационарными, а в противном случае — нестационарными [2]. Сигналы в системах передачи информации, как правило, искажаются различными шумами и помехами от других источников [1]. В этом случае модель сигнала можно использовать для создания системы, оптимально удаляющей эти шумы и искажения. В случае, когда получение сигнала от реального источника затруднительно, хорошая модель сигнала позволяет имитировать источник и соответственно разрабатывать оптимальные системы приёма информации для таких источников.

Математические модели сигналов широко используются также в системах передачи информации для решения задач идентификации, предсказания, распознавания и т. д. [3].

Для описания свойств некоторого заданного сигнала можно использовать детерминированные и стохастические модели [1, 2]. При этом в детерминированных моделях используются некоторые известные специфические свойства сигнала, например, то, что он является синусоидальным. Тогда для построения модели достаточно определить значения амплитуды, частоты и начальной фазы. Стохастические модели охарактеризовывают только статистические свойства сигналов. При этом считается, что сигнал может быть хорошо описан некоторым параметрическим случайным процессом (например,



гауссовским, пуассоновским, марковским и т. п.), а параметры этого процесса могут быть достаточно точно оценены каким-либо способом.

В современных цифровых системах связи задачу качественной передачи звуковой информации (разборчивость, низкий уровень шумов) при жестких требованиях к спектральному составу передаваемого сигнала успешно решают с помощью различных методов цифровой фильтрации [1, 2]. В настоящее время уровень развития вычислительной техники, используемой в цифровых системах звуковой связи, позволяет решать задачу контроля и фильтрации передаваемого контента на основе потокового распознавания речи. При этом распознавание речи может быть осуществлено с помощью стохастических моделей, основанных на использовании скрытых марковских моделей (СММ) [3].

Данная работа посвящена разработке компонентов программного комплекса для потоковой фильтрации аудиоконтента на основе СММ, решающих задачи обучения по заданной последовательности наблюдений параметров СММ, поиска последовательности состояний СММ по заданной последовательности наблюдений и вычисления вероятности того, что заданная последовательность наблюдений построена для данной СММ [4].

Для реализации компонентов была выбрана среда графического программирования LabVIEW компании National Instruments (NI), так как она обеспечивает быстрое создание эффективных программ, а также она исходно создавалась для обработки информационных сигналов систем передачи и соответственно в ней встроены основные алгоритмы цифровой обработки информации [5].

1. СКРЫТЫЕ МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ

1.1. Определение скрытой марковской модели

Основы теории скрытых марковских моделей приведены в работах Баума в конце 1960-х годов [3]. В последнее время СММ стали очень популярны, так как математическая структура СММ очень богата и позволяет решать математические проблемы различных областей науки. При этом грамотно спроектированная модель выдаёт на практике хорошие результаты работы. Результаты применения СММ в приложениях, связанных с распознаванием речи, опубликованы Бейкером и Елинеком в 1970-х годах [3].

В обзорной работе Л. Р. Рабинера [3] излагаются основы теории СММ для дискретных систем, а также приведены рекомендации по практическому использованию её результатов для решения задач автоматического распознавания речи. Далее будут рассматриваться именно такие СММ.

Рассмотрим дискретную систему, имеющую конечное множество из N состояний — $S = \{s_1, \dots, s_N\}$, в каждом из которых она может принимать одно из M значений из набора наблюдаемых параметров $V = \{v_1, \dots, v_M\}$ — алфавита. Состояние системы в момент времени t — q_t , принимающее одно из N значений множества S , зависит только от её состояния в момент времени $t - 1$ — q_{t-1} , а значение наблюдаемого параметра в момент времени t — o_t зависит только от состояния q_t , т. е. не зависит от времени. Вероятности переходов между состояниями системы задаются матрицей A . Вероятности выпадения каждого из M значений наблюдаемого параметра системы в каждом из N состояний системы задаются набором векторов B . Вероятность появления некоторого начального состояния системы задаётся вектором π . При этом последовательность состояний, в которых пребывает система — $Q = \{q_1, \dots, q_T\}$, внешнему наблюдателю не видна, а видит он только последовательность наблюдений — $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ (здесь T — длина последовательности), т. е. система ведёт себя как «чёрный ящик». Модель такой системы получила название скрытой марковской модели.

Для полного определения СММ дискретной системы должны быть заданы следующие параметры:

- Число состояний в множестве состояний модели $S = \{s_1, \dots, s_N\}$ — N ;
- Алфавит модели — $V = \{v_1, \dots, v_M\}$ и число символов в нём — M ;
- Вероятности переходов между состояниями модели — $A = \{a_{ij}\}$, где a_{ij} — вероятность перехода

модели из состояния s_i в состояние s_j :

$$a_{ij} = p(q_{t+1} = s_j \mid q_t = s_i), \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (1)$$

Элементы A должны удовлетворять стохастическим ограничениям:

$$a_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^N a_{ij} = 1, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2)$$

- Вероятности выпадения каждого из M значений наблюдаемого параметра модели в каждом из N состояний модели — $B = \{b_j(k)\}$, где $b_j(k)$ — вероятность выпадения k -го значения наблюдаемого параметра модели в состоянии s_j :

$$b_j(k) = p(o_t = v_k \mid q_t = s_j), \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq M. \quad (3)$$

Элементы B должны удовлетворять следующим ограничениям:

$$b_j(k) \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq M \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^M b_j(k) = 1, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (4)$$

- Вероятность появления некоторого начального состояния модели — $\pi = \{\pi_i\}$, где π_i — вероятность того, что в начальный момент модель окажется в состоянии s_i :

$$\pi_i = p(q_1 = s_i), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (5)$$

Элементы π должны удовлетворять следующим ограничениям:

$$\pi_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^N \pi_i = 1, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (6)$$

В компактной записи СММ дискретной системы обозначается следующим образом:

$$\lambda = (A, B, \pi). \quad (7)$$

1.2. Три основных задачи скрытой марковской модели

Согласно описанию СММ, изложенному в предыдущем параграфе, существует три основных задачи, которые должны быть решены для успешного применения модели в какой-либо области, в том числе и при распознавании речи.

Задача 1. Дано: наблюдаемая последовательность $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ и модель $\lambda = (A, B, \pi)$. Необходимо вычислить $p(O \mid \lambda)$ — вероятность того, что данная наблюдаемая последовательность построена именно для данной модели.

Это задача оценки модели, которая заключается в вычислении вероятности того, что модель соответствует заданной наблюдаемой последовательности. К этой задаче можно подойти и с другой стороны: насколько выбранная СММ соответствует заданной наблюдаемой последовательности. Такой подход имеет большую практическую ценность. Например, если стоит вопрос выбора наилучшей модели из набора уже существующих, то решение первой задачи даёт ответ на этот вопрос.

Задача 2. Дано: наблюдаемая последовательность $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ и модель $\lambda = (A, B, \pi)$. Необходимо подобрать последовательность состояний системы $Q = \{q_1, \dots, q_T\}$, которая лучше всего соответствует наблюдаемой последовательности, т.е. «объясняет» наблюдаемую последовательность.



Задача 2 позволяет понять, что же происходит в скрытой части модели, т. е. найти «правильную» последовательность, которую проходит модель. Абсолютно точно нельзя определить эту последовательность. Говорить можно лишь о предположениях с соответственной степенью достоверности. При этом для приближенного решения этой проблемы приходится использовать различные критерии оценки для определения последовательности состояний. Данные, полученные при решении задачи 2, используются для изучения поведения построенной модели, нахождения оптимальной последовательности её состояний и т. п.

Задача 3. Подобрать параметры модели $\lambda = (A, B, \pi)$ таким образом, чтобы максимизировать $p(O | \lambda)$.

Решение задачи 3 состоит в оптимизации модели таким образом, чтобы она как можно лучше описывала реальную наблюдаемую последовательность. Наблюдаемая последовательность, по которой оптимизируется СММ, называется обучающей, поскольку с помощью её модель «обучается». Задача обучения СММ — один из важнейших при проектировании СММ, поскольку она заключается в оптимизации параметров СММ, т. е. создается модель, наилучшим образом описывающая реальные процессы.

Для построения программного комплекса потоковой фильтрации аудиоконтента необходимо разработать программные модули, решающие эти три задачи.

1.3. Алгоритм метода Баума–Велша обучения СММ системы

Исходными данными для алгоритма метода Баума–Велша являются СММ со случайными параметрами $\lambda = (A, B, \pi)$ и заданная обучающая последовательность наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$. Алгоритм позволяет уточнять параметры модели таким образом, чтобы вероятность $p(O | \lambda)$ увеличивалась. Итеративное применение алгоритма до схождения в одной точке позволяет максимизировать $p(O | \lambda)$, т. е. настроить модель на данную последовательность и соответственно решить задачу 3.

Рассмотрим алгоритм подробнее. Он состоит из нескольких шагов.

- **Прямая процедура** определяет «прямые» переменные — вероятности получения начальной части (от момента времени 1 до t) заданной последовательности наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ при условии, что движение начинается в момент времени 1 и заканчивается в момент времени t в состоянии s_i :

$$\alpha_t(i) = p(o_1, \dots, o_t, q_t = s_i | \lambda). \tag{8}$$

Эти вероятности можно вычислить рекурсивно, используя следующее выражение:

$$\alpha_{t+1}(j) = b_j(o_{t+1}) \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) a_{ij}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq t \leq T - 1, \tag{9}$$

где

$$\alpha_1(j) = \pi_j b_j(o_1), \quad 1 \leq j \leq N. \tag{10}$$

Используя рекурсию, можно найти

$$\alpha_T(i), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Теперь с учётом (8) требуемую для решения задачи 1 вероятность можно вычислить через «прямые» переменные:

$$p(O | \lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i). \tag{11}$$

- **Обратная процедура** является дополнением прямой процедуры и позволяет вычислить «обратные» переменные — вероятности получения оставшейся части (от момента времени $t + 1$

до T) заданной последовательности наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ при условии, что движение начинается в момент времени t из исходного состояния s_i и заканчивается в момент времени T :

$$\beta_t(i) = p(o_{t+1}, \dots, o_T \mid q_t = s_i, \lambda). \quad (12)$$

Эти вероятности можно вычислить рекурсивно, используя следующее выражение:

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N \beta_{t+1} a_{ij} b_j(o_{t+1}), \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq t \leq T-1, \quad (13)$$

где

$$\beta_T(i) = 1, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (14)$$

Используя рекурсию, можно найти

$$\beta_1(i), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Теперь с учётом (10) и (12) требуемую для решения задачи 1 вероятность можно вычислить через «обратные» переменные:

$$p(O \mid \lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_1(i) \beta_1(i) = \sum_{i=1}^N \pi_i b_i(o_1) \beta_1(i). \quad (15)$$

С другой стороны, из (8) и (12) следует:

$$p(O, q_t = s_i \mid \lambda) = \alpha_t(i) \beta_t(i), \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq t \leq T. \quad (16)$$

Используя (16), можно вычислить требуемую для решения задачи 1 вероятность через «прямые» и «обратные» переменные:

$$p(O \mid \lambda) = \sum_{i=1}^N p(O, q_t = s_i \mid \lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) \beta_t(i), \quad 1 \leq t \leq T. \quad (17)$$

- **Вычисление вспомогательной переменной ξ** — вероятности того, что при заданной последовательности наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ модель в моменты времени t и $t+1$ будет находиться в состояниях s_i и s_j соответственно:

$$\xi_t(i, j) = p(q_t = s_i, q_{t+1} = s_j \mid O, \lambda) = \frac{p(q_t = s_i, q_{t+1} = s_j, O \mid \lambda)}{p(O \mid \lambda)}. \quad (18)$$

Используя «прямые» (8) и «обратные» (12) переменные, можно записать (18) следующим образом:

$$\xi_t(i, j) = \frac{\alpha_t(i) a_{ij} \beta_{t+1}(j) b_j(o_{t+1})}{\sum_{i_s=1}^N \sum_{j_s=1}^N \alpha_t(i_s) a_{i_s j_s} \beta_{t+1}(j_s) b_{j_s}(o_{t+1})}, \quad 1 \leq t \leq T-1. \quad (19)$$

- **Вычисление вспомогательной переменной γ** — вероятности того, что при заданной последовательности наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ модель в момент времени t будет находиться в состоянии s_i :

$$\gamma_t(i) = p(q_t = s_i \mid O, \lambda) = \frac{p(O, q_t = s_i \mid \lambda)}{p(O \mid \lambda)}. \quad (20)$$

Используя «прямые» (8) и «обратные» (12) переменные и учитывая соотношения (16), (17), можно записать (20) следующим образом:

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i) \beta_t(i)}{\sum_{i_s=1}^N \alpha_t(i_s) \beta_t(i_s)}, \quad 1 \leq t \leq T. \quad (21)$$



Из выражений (19) и (20) видно, что вспомогательные переменные $\xi_t(i, j)$ и $\gamma_t(i)$ связаны между собой следующим образом:

$$\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^N \xi_t(i, j), \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq t \leq T-1. \quad (22)$$

- **Уточнение параметров исходной СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ с целью увеличения $p(O | \lambda)$.**

В соответствии с алгоритмом метода Баума – Велша параметры уточнённой СММ $\lambda^* = (A^*, B^*, \pi^*)$ определяются с помощью следующих соотношений:

- 1) уточнённая вероятность того, что в начальный момент модель окажется в состоянии $s_i - \pi_i^*$:

$$\pi_i^* = \gamma_1(i), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (23)$$

- 2) уточнённая вероятность перехода модели из состояния s_i в состояние $s_j - a_{ij}^*$:

$$a_{ij}^* = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i, j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (24)$$

- 3) уточнённая вероятность выпадения k -го значения наблюдаемого параметра модели в состоянии $s_j - b_j^*(k)$:

$$b_j^*(k) = \frac{\sum_{t=1: o_t=v_k}^T \gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j)}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq M, \quad (25)$$

здесь в числителе суммируются только те $\gamma_t(j)$, для которых $o_t = v_k$.

- **Вычисление для уточнённой СММ $\lambda^* = (A^*, B^*, \pi^*)$ вероятности $p^*(O | \lambda)$.**

Используя новые значения параметров СММ $\lambda^* = (A^*, B^*, \pi^*)$, по одному из соотношений (11), (15) или (17) вычисляется вероятность того, что заданная наблюдаемая последовательность $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ построена именно для данной модели — $p(O | \lambda^*)$. При этом алгоритм метода Баума – Велша обеспечивает неуменьшение этой вероятности, т. е. правдоподобность модели после уточнения выше, чем до уточнения во всех случаях, когда модель можно оптимизировать.

- **Проверка сходимости итерационного процесса обучения СММ $\lambda = (A, B, \pi)$.**

Итерационный процесс обучения СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ по заданной последовательности наблюдений — $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ — максимизация вероятности $p(O | \lambda)$ — заканчивается, когда разница между вероятностями $p(O | \lambda^*)$ и $p(O | \lambda)$ становится менее некоторой заданной точности ε , т. е. выполняется следующее условие:

$$p(O | \lambda^*) - p(O | \lambda) < \varepsilon. \quad (26)$$

1.4. Алгоритм вычисления последовательности состояний системы, описываемой СММ, по последовательности наблюдений методом Витерби

Задача 2 — подбор наиболее вероятной последовательности состояний $Q = \{q_1, \dots, q_T\}$ системы, описываемой СММ $\lambda = (A, B, \pi)$, соответствующей последовательности наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ — может быть решена с помощью метода Витерби [4].

Алгоритм метода Витерби состоит из следующих шагов:

- **Вычисление вспомогательной переменной δ — максимальной вероятности того, что при заданной последовательности наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ модель в момент времени t (при условии, что движение начинается в момент времени 1 и заканчивается в момент времени t) будет находиться в состоянии s_i :**

$$\delta_t(i) = \max_{q_1, \dots, q_{t-1}} p(q_1, \dots, q_{t-1}, q_t = s_i, o_1, \dots, o_{t-1} | \lambda). \quad (27)$$

Эти вероятности можно вычислить рекурсивно, используя следующее выражение:

$$\delta_{t+1}(j) = b_j(o_{t+1}) \cdot \max_{1 \leq i \leq N} (\delta_t(i) \cdot a_{ij}), \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq t \leq T-1, \quad (28)$$

где

$$\delta_1(j) = \pi_j b_j(o_1), \quad 1 \leq j \leq N. \quad (29)$$

При этом надо запоминать не только значения вероятностей $\delta_t(j)$, но и состояния $\psi_t(j)$, при которых $\delta_t(j)$ достигает максимума:

$$\psi_{t+1}(j) = \arg \max_{1 \leq i \leq N} (\delta_t(i) \cdot a_{ij}), \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq t \leq T-1. \quad (30)$$

Используя рекурсию, можно найти

$$\delta_T(i), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (31)$$

• **Вычисление наиболее вероятного конечного состояния системы q_t .**

После шага $T-1$ вычисляется наиболее вероятное конечное состояние системы:

$$q_T = \arg \max_{1 \leq i \leq N} (\delta_T(i)), \quad (32)$$

где $\max_{1 \leq i \leq N} (\delta_T(i))$ — наибольшая из максимальных вероятностей нахождения системы в момент времени T в состоянии s_i .

• **Вычисление наиболее вероятной последовательности состояний системы $Q = \{q_1, \dots, q_T\}$.**

Вычисление наиболее вероятной последовательности состояний $Q = \{q_1, \dots, q_T\}$ системы, соответствующей последовательности наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ — решение задачи 2, осуществляется обратным проходом по массиву состояний ψ_t , при которых вероятности $\delta_t(i)$ максимальны, начиная с наиболее вероятного конечного состояния q_T :

$$q_t = \psi_{t+1}(q_{t+1}), \quad 1 \leq t \leq T-1. \quad (33)$$

2. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА «ПРЯМОЙ ПРОЦЕДУРЫ»

Вычисление $p(O | \lambda)$ — вероятности того, что наблюдаемая последовательность $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ построена для СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ (т.е. решение задачи 1), может быть осуществлено с помощью «прямой процедуры», приведённой в 1.3 при описании алгоритма метода Баума – Велша.

Эта «прямая процедура» была реализована и отлажена в среде графического программирования LabVIEW в виде отдельного программного модуля.

Входными параметрами для модуля являются:

- СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ с числом состояний N и числом значений M , параметры которой удовлетворяют ограничениям (2), (4), (6). Алфавитом $V = \{v_1, \dots, v_M\}$ СММ являются номера значений от 1 до M .
- Последовательность наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ длиной T .

Выходными параметрами модуля являются:

- Вычисленное значение $p(O | \lambda)$ — вероятности того, что наблюдаемая последовательность $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ построена для СММ $\lambda = (A, B, \pi)$.

На рис. 1 представлены результаты вычисления с помощью программного модуля, реализующего «прямую процедуру», $p(O | \lambda)$ — вероятности того, что наблюдаемая последовательность построена для СММ $\lambda = (A, B, \pi)$.

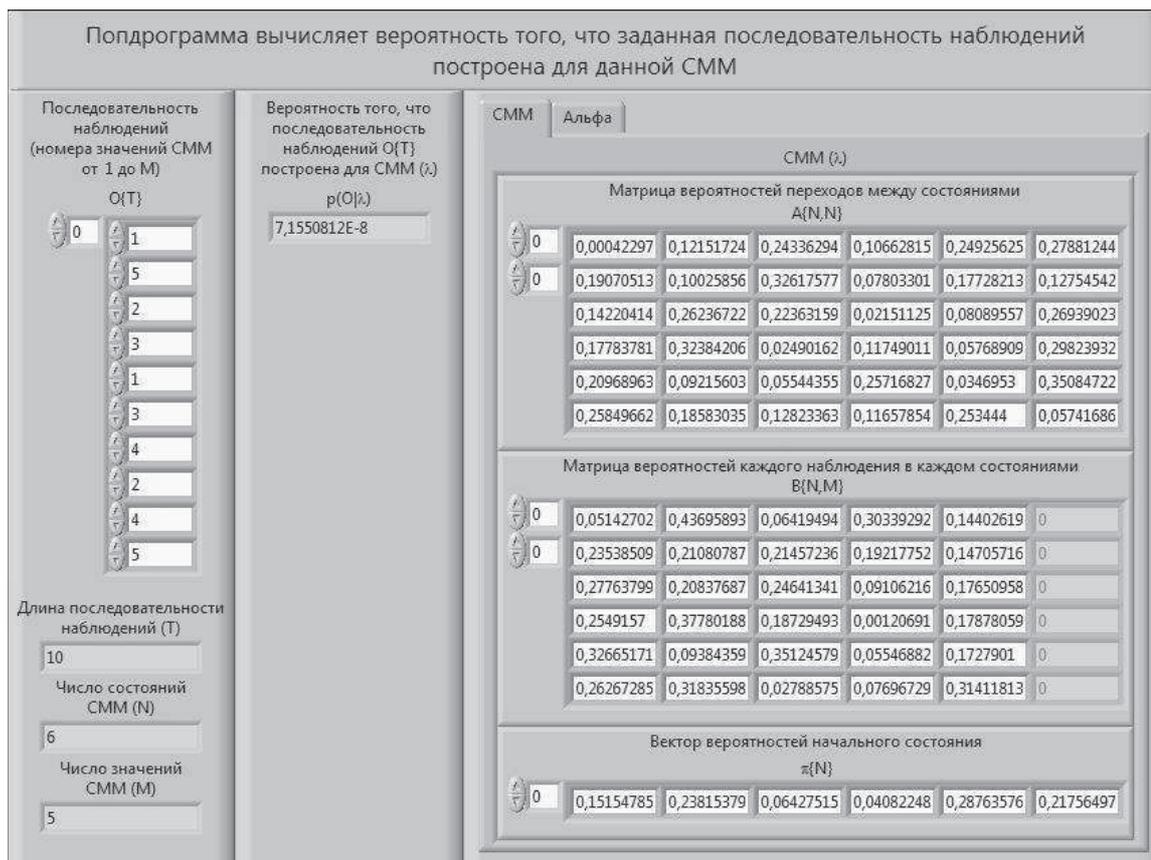


Рис. 1. Лицевая панель программного модуля, реализующего «прямую процедуру»

3. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА МЕТОДА БАУМА – ВЕЛША

На основе представленного выше в 1.3 алгоритма метода Баума – Велша в среде графического программирования LabVIEW был разработан и отлажен программный модуль, предназначенный для обучения СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ по заданной последовательности наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$.

Входными параметрами для модуля являются:

- Исходная СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ с числом состояний N и числом значений M , параметры которой выбраны случайным образом, но при этом удовлетворяют ограничениям (2), (4), (6). Алфавитом $V = \{v_1, \dots, v_M\}$ СММ являются номера значений от 1 до M ;
- Последовательность наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ длиной T ;
- Заданная точность ϵ ;
- Максимально возможное число итераций.

Выходными параметрами модуля являются:

- Обученная по последовательности наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ СММ $\lambda^* = (A^*, B^*, \pi^*)$;
- Значение вероятности $p(O | \lambda)$ исходной СММ $\lambda = (A, B, \pi)$;
- Значение вероятности $p(O | \lambda^*)$ обученной СММ $\lambda^* = (A^*, B^*, \pi^*)$;
- Число итераций, потребовавшееся для обучения.

Лицевая панель программного модуля, реализующего алгоритм метода Баума – Велша, с исходной СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ и полученной в результате обучения СММ $\lambda^* = (A^*, B^*, \pi^*)$, приведены на рис. 2 и рис. 3 соответственно.



Попрограмма обучает СММ по заданной последовательности наблюдений методом Баума-Велша

Последовательность наблюдений (номера значений СММ от 1 до M)
O{T}

Максимальное число итераций: 1000
Точность (ε): 1E-12
p(O|i) исходной СММ: 7,1550812E-8
Число итераций: 14
p(O|i*) обученной СММ: 0,015625

Исходная СММ | Альфа | Вета | Кси | Гамма | Обученная СММ

Исходная СММ (i)

Матрица вероятностей переходов между состояниями A{N,N}

$\frac{A}{T}$	0	0,00042297	0,12151724	0,24336294	0,10662815	0,24925625	0,27881244
$\frac{A}{T}$	0	0,19070513	0,10025856	0,32617577	0,07803301	0,17728213	0,12754542
		0,14220414	0,26236722	0,22363159	0,02151125	0,08089557	0,26939023
		0,17783781	0,32384206	0,02490162	0,11749011	0,05768909	0,29823932
		0,20968963	0,09215603	0,05544355	0,25716827	0,0346953	0,35084722
		0,25849662	0,18583035	0,12823363	0,11657854	0,253444	0,05741686

Матрица вероятностей каждого наблюдения в каждом состояниями B{N,M}

$\frac{A}{T}$	0	0,05142702	0,43695893	0,06419494	0,30339292	0,14402619	0
$\frac{A}{T}$	0	0,23538509	0,21080787	0,21457236	0,19217752	0,14705716	0
		0,27763799	0,20837687	0,24641341	0,09106216	0,17650958	0
		0,2549157	0,37780188	0,18729493	0,00120691	0,17878059	0
		0,32665171	0,09384359	0,35124579	0,05546882	0,1727901	0
		0,26267285	0,31835598	0,02788575	0,07696729	0,31411813	0

Вектор вероятностей начального состояния $\pi\{N\}$

$\frac{A}{T}$	0	0,15154785	0,23815379	0,06427515	0,04082248	0,28763576	0,21756497
---------------	---	------------	------------	------------	------------	------------	------------

Рис. 2. Лицевая панель программного модуля, реализующего алгоритм метода Баума – Велша с исходной СММ

Попрограмма обучает СММ по заданной последовательности наблюдений методом Баума-Велша

Последовательность наблюдений (номера значений СММ от 1 до M)
O{T}

Максимальное число итераций: 1000
Точность (ε): 1E-12
p(O|i) исходной СММ: 7,1550812E-8
Число итераций: 14
p(O|i*) обученной СММ: 0,015625

Исходная СММ | Альфа | Вета | Кси | Гамма | Обученная СММ

Обученная СММ (i*)

Матрица вероятностей переходов между состояниями A*{N,N}

$\frac{A^*}{T}$	0	0	0	0	0,16971051	0	0,83028949
$\frac{A^*}{T}$	0	0	0	1	0	0	0
		0,5	0,5	0	0	0	0
		0	1	0	0	0	0
		0	0	0	1	0	0
		1	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0

Матрица вероятностей каждого наблюдения в каждом состояниями B*{N,M}

$\frac{A^*}{T}$	0	0	0	0	1	0	0
$\frac{A^*}{T}$	0	0,5	0,5	0	0	0	0
		0	0	1	0	0	0
		0	0	0	0	1	0
		1	0	0	0	0	0
		0	0,6021996	0	0	0	0,3978004

Вектор вероятностей начального состояния $\pi^*\{N\}$

$\frac{A^*}{T}$	0	0	0	0	0	1	0
-----------------	---	---	---	---	---	---	---

Рис. 3. Лицевая панель программного модуля, реализующего алгоритм метода Баума – Велша с обученной СММ



В результате применения метода Баума – Велша (см. рис. 2, 3) значение вероятности $p(O | \lambda) = 7.1550812 \cdot 10^{-8}$ исходной СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ увеличилось до значения вероятности $p(O | \lambda^*) = 1.15625 \cdot 10^{-2}$ обученной СММ $\lambda^* = (A^*, B^*, \pi^*)$. При этом параметры обученной СММ так же как и исходной СММ удовлетворяют ограничениям (2), (4), (6), а для достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-12}$ потребовалось всего 14 итераций. Дальнейшее повышение точности (уменьшение значения ε) значение вероятности $p(O | \lambda^*)$ не изменяло, т.е. действительно был найден максимум $p(O | \lambda^*)$. Однако надо учитывать, что обучение СММ методом Баума – Велша обеспечивает поиск локального максимума [4], и при других начальных параметрах СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ результаты обучения могут быть лучше.

4. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА МЕТОДА ВИТЕРБИ

На основе представленного выше в 1.4 алгоритма метода Витерби в среде графического программирования LabVIEW был разработан и отлажен программный модуль, предназначенный для вычисления наиболее вероятной последовательности состояний $Q = \{q_1, \dots, q_T\}$ системы, описываемой СММ $\lambda = (A, B, \pi)$, соответствующей последовательности наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$.

Входными параметрами для модуля являются:

- СММ $\lambda = (A, B, \pi)$ с числом состояний N и числом значений M , параметры которой удовлетворяют ограничениям (2), (4), (6). Алфавитом $V = \{v_1, \dots, v_M\}$ СММ являются номера значений от 1 до M ;
- Последовательность наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ длиной T .

Выходными параметрами модуля являются:

- Наиболее вероятная последовательность состояний $Q = \{q_1, \dots, q_T\}$ системы, описываемой СММ $\lambda = (A, B, \pi)$, соответствующая последовательности наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$.

Лицевая панель программного модуля, реализующего алгоритм метода Витерби с заданной последовательностью наблюдений $O = \{o_1, \dots, o_T\}$ и полученной в результате вычисления наиболее вероятной последовательностью состояний $Q = \{q_1, \dots, q_T\}$ СММ $\lambda = (A, B, \pi)$, приведена на рис. 4.

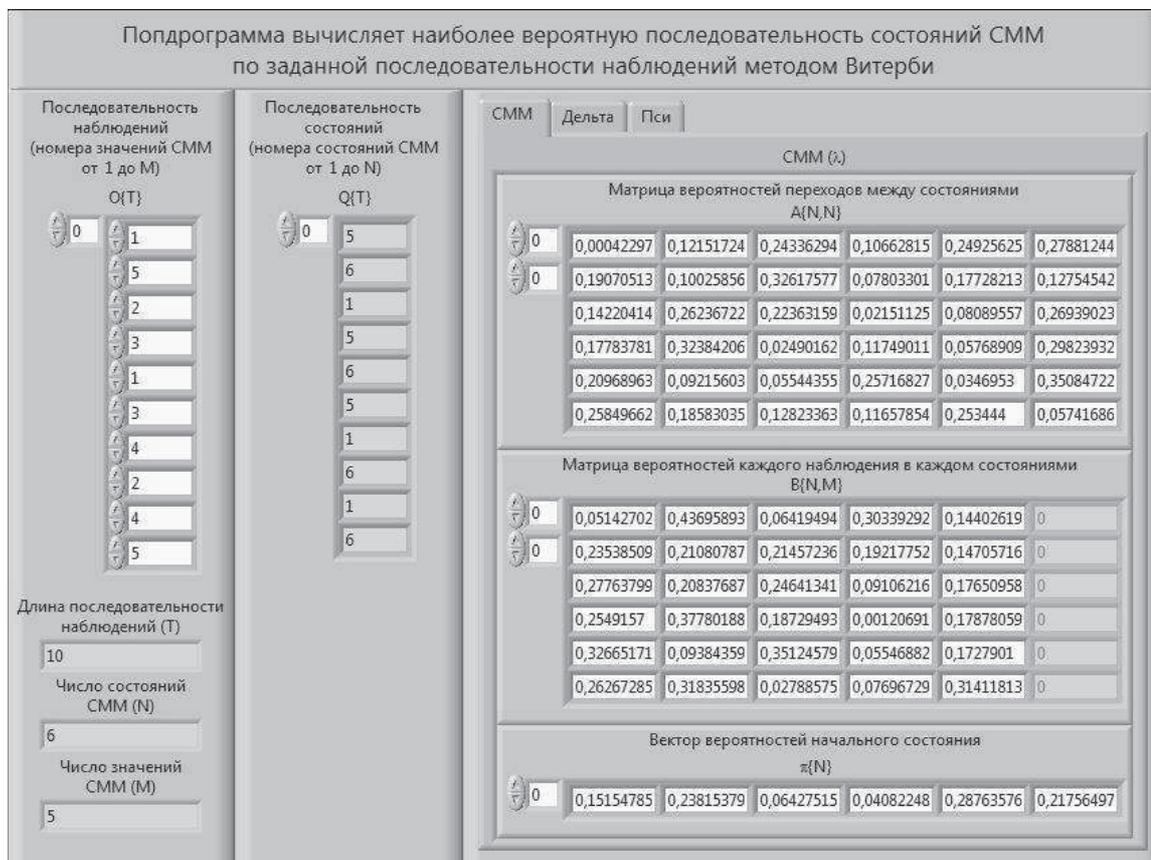


Рис. 4. Лицевая панель программного модуля, реализующего алгоритм метода Витерби



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанные программные модули, как показало тестирование, эффективно решают задачи обучения СММ по экспериментальным последовательностям наблюдений, соответствующим коротким словам и распознавание этих слов. Что позволяет использовать данные модули для реализации потоковой фильтрации аудиоконтента в цифровых системах связи.

Библиографический список

1. Гоноровский И. С., Демин М. П. Радиотехнические цепи и сигналы. М. : Дрофа, 2006. 719 с.
2. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. СПб. : Питер, 2007. 750 с.
3. Рабинер Л. Р. Скрытые Марковские модели и их применение в избранных приложениях при распознавании речи // ТИИЭР. 1989. Т. 77. С. 86–120.
4. Narada Warakagoda A Hybrid ANN-HMM ASR system with NN based adaptive preprocessing M. Sc. thesis. URL: <http://jedlik.phy.bme.hu/gerjanos/HMM/hoved.html> (Accessed: 21.12.2012).
5. Портал компании National Instruments Russia. URL: <http://www.labview.ru> (дата обращения: 25.12.2012).

The Development of Software Components for Streaming Audio Content Filtering Through the Use of Hidden Markov Models

A. N. Savin¹, N. E. Timofeeva², A. S. Geraskin³, Yu. A. Mavlutova⁴

¹Savin Alexander Nikolaevich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, savinan@info.sgu.ru

²Timofeeva Nadezhda Evgenievna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, timofeevane@yandex.ru

³Geraskin Aleksej Sergeevich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, gerascinas@mail.ru

⁴Mavlutova Yuliya Albertovna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, yuliyamav@yandex.ru

The results of the development of efficient algorithms for streaming voice recognition using stochastic models based on the use of hidden Markov models are shown in this work. The article provides basic theoretical information for the hidden Markov model of the discrete system and the necessary parameters to define it are distinguished. Also there are three main tasks considered that need to be solved for the successful application of hidden Markov models in speech recognition systems. The algorithm of the method of Baum–Welch aimed at clarifying the parameters of the model and the Viterbi algorithm of selection of the most likely sequence of states of the system are given. These two methods are implemented in the environment of graphical programming LabVIEW in the form of software modules that implement the construction of the hidden Markov models of individual words, using the method of Baum–Welch and recognition of these words on the basis of the Viterbi method. It is supposed to use these modules to implement streaming audio content filtering in digital communication systems.

Key words: hidden Markov models, recognition of these words, Viterbi method, method of Baum–Welch.

References

1. Gonorovskij I. S., Demin M. P. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* [Radio Circuits and Signals]. Moscow, Drofa, 2006, 719 p. (in Russian).
2. Sergienko A. B. *Tsifrovaia obrabotka signalov* [Digital signal processing]. Saint Petersburg, Piter, 2007, 750 p. (in Russian).
3. Rabiner L. R. Hidden Markov models and their application in selected applications in speech recognition. *PIEEE*, 1989, vol. 77, pp. 86–120.
4. Narada Warakagoda A Hybrid ANN-HMM ASR system with NN based adaptive preprocessing M. Sc. thesis. Available at: <http://jedlik.phy.bme.hu/gerjanos/HMM/hoved.html> (Accessed: 21, December, 2012).
5. Portal of company National Instruments Russia. Available at: <http://www.labview.ru> (Accessed: 25, December, 2012).



PERSONALIA

АВГУСТ ПЕТРОВИЧ ХРОМОВ (к 80-летию со дня рождения)

17 июня 2015 г. исполнилось 80 лет со дня рождения Августа Петровича Хромова, доктора физико-математических наук, заслуженного деятеля науки РФ, почетного профессора Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (СГУ).

А. П. Хромов родился в селе Оленьково Тульской области. В годы Великой Отечественной войны семья Хромовых была эвакуирована в город Петровск Саратовской области, куда был эвакуирован завод, на котором работал отец Августа Петровича. Там Август Петрович окончил среднюю школу и в 1953 г. поступил на механико-математический факультет Саратовского университета, который и окончил с отличием. С 1958 г. по 1961 г. Август Петрович является аспирантом Н. П. Купцова. И с тех пор по настоящее время (за исключением 1963–1964 гг., когда по приглашению С. Б. Стечкина он работал научным сотрудником в Свердловском отделении Математического института АН СССР) его трудовая деятельность связана с СГУ: с 1961 г. по 1963 г. — ассистент, с 1965 г. по 1976 г. — доцент кафедры вычислительной математики и с 1976 г. Август Петрович — профессор и заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики Саратовского университета.



Основные научные интересы и достижения А. П. Хромова относятся к спектральной теории операторов. Его исследования в этой области являются развитием фундаментальных работ Дж. Биркгофа, А. Д. Тамаркина, М. Стоуна, Н. Гопкинса, Д. Джексона, М. В. Келдыша. Совокупно научные исследования А. П. Хромова можно представить в семи циклах его работ.

1. Спектральная теория обыкновенных дифференциальных операторов на конечном интервале (1962–2000 гг.).
2. Вопросы сходимости рядов Дирихле (1969–1991 гг.).
3. Конечномерные возмущения интегральных вольтеровых операторов (1971–2000 гг.).
4. Сходимость спектральных разложений по собственным функциям интегральных операторов (1972–2000 гг.).
5. Исследования по теории оптимального управления (1984–1995 гг.).
6. Интегральные операторы с ядрами, имеющими особенности на диагоналях и ломаных (1995–2010 гг.).
7. Исследования по развитию метода Фурье (с 2010 г.).

Кандидатскую диссертацию на тему «Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов на конечном интервале» Август Петрович защитил в Математическом институте АН СССР в 1964 г. В ней впервые был проведен спектральный анализ



дифференциальных операторов n -го порядка в случае слабо нерегулярных краевых условий. В дальнейших исследованиях А. П. Хромова спектральная теория несамосопряженных дифференциальных и интегральных операторов получила значительное развитие, и после защиты в 1973 г. в Институте математики Сибирского отделения АН СССР докторской диссертации «Конечномерные возмущения вольтерровых операторов» это позволило ему встать в ряд ведущих специалистов в этой области.

В случае, когда для резольвенты допускается степенной рост по спектральным параметрам, А. П. Хромовым найдены точные зависимости гладкости разлагаемой по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) функции от степени роста резольвенты. Начиная с исследований Д. Джексона (1916 г.) и Н. Гопкинса (1919 г.) много работ было посвящено дифференциальным операторам с нерегулярными распадающимися условиями, резольвента которых имеет экспоненциальный рост, но эти работы касались лишь частных случаев таких операторов. А. П. Хромов в терминах операторно-аналитических функций Фаге полностью описал классы разлагаемых функций и представил окончательное решение вопроса о сходимости разложений по с.п.ф. в самом общем случае. Для нераспадающихся краевых условий, порождающих экспоненциально растущую резольвенту, им полностью решена задача о разложении по с.п.ф. оператора n -кратного интегрирования и показана большая роль впервые обнаруженных специальных дифференциально-разностных уравнений, которым должна удовлетворять разлагаемая функция.

А. П. Хромов впервые рассмотрел задачу представления аналитических функций как задачу разложения по собственным функциям оператора дифференцирования с краевыми условиями, порожденными различными линейными функционалами в аналитических пространствах. На этом пути была выяснена природа известной интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева, и данный подход позволил распространить понятие интерполирующей функции на более сложные объекты, порождаемые дифференциальными, интегродифференциальными и интегральными операторами. В этом направлении Августом Петровичем была также решена важная задача о представлении рядами экспонент произвольных функций, аналитических в какой-либо внутренней подобласти для сопряженной диаграммы характеристической функции. Большое число конкретных операторов можно представить в виде суммы вольтерровых и конечномерных операторов. В связи с этим А. П. Хромовым было впервые проведено исследование таких операторов в абстрактном банаховом пространстве, а результаты о разложении по с.п.ф. были получены за счет естественных требований на бесконечности для отдельных компонент резольвенты. В качестве конкретных операторов им подробно были изучены интегральные операторы с полувырожденными ядрами, исследование резольвенты которых можно выполнить благодаря фундаментальному результату А. П. Хромова об асимптотическом поведении резольвенты интегрального вольтеррова оператора. Эта асимптотика позволяет исследовать и вопрос о полноте с.п.ф., так как он, по сути, сводится к вопросу о порождающих функциях вольтерровых операторов. Для порождающих функций А. П. Хромовым получены глубокие результаты типа теоремы Мюнца, что и позволило дать решение трудного вопроса о полноте с.п.ф. Интегральные операторы данного вида в настоящее время представляют единственный хорошо исследованный класс интегральных операторов с экспоненциально растущей резольвентой. Итоги этих исследований были подведены в монографии «Конечномерные возмущения вольтерровых операторов» (2004 г.) .

А. П. Хромов внес значительный вклад в исследование равносходимости разложений по с.п.ф. интегродифференциальных операторов и в тригонометрические ряды Фурье. Эта тема берет свое начало в работах В. А. Стеклова и А. Хаара. Для случая дифференциальных операторов на конечном интервале ему удалось описать классы нерегулярных краевых условий, для которых равносходимость имеет место на некоторых интервалах, и указать точную зависимость этих интервалов от степени нерегулярности. Кроме того, А. П. Хромов впервые поставил вопрос о равносходимости в случае интегральных операторов, получил принципиально важный факт о каноническом виде таких операторов и дал для



них в неулучшаемых формулировках теоремы равносходимости. Одним из интересных его результатов стал новый критерий равносходимости на всем интервале разложения для двух произвольных операторов Штурма – Лиувилля. Много новых глубоких результатов получено Августом Петровичем по применению операторов дробного дифференцирования Римана – Лиувилля к получению впервые обнаруженных полных асимптотик растущих частей резольвенты вольтерровых операторов, имеющих многочисленные важные приложения в спектральном анализе несамосопряженных операторов.

С середины 1980-х годов А. П. Хромова стал заниматься задачами оптимального управления. Он нашел новый вид вариаций испытываемых на оптимальность траекторий, когда независимыми параметрами являются углы наклона траектории при выходе на границу, что облегчило получение основных соотношений принципа максимума Понтрягина. Им был сформулирован новый взгляд на задачу синтеза как на задачу построения оптимального управления в виде функции текущего состояния так, чтобы любое решение замкнутой системы давало оптимальную траекторию заданного семейства оптимальных траекторий. Для линейной управляемой системы с квадратичным критерием качества это позволило полностью описать класс синтезирующих функций, удовлетворяющих произвольным аффинным граничным условиям.

Во второй половине 1990-х годов А. П. Хромов возобновил исследования по спектральной теории операторов и открыл новые классы дифференциальных и интегральных операторов с инволюцией, обладающих примечательными спектральными свойствами. При исследовании резольвенты интегральных операторов с инволюцией важную роль играют вопросы спектральной теории для систем Дирака и им подобным. А. П. Хромовым получены глубокие результаты для систем Дирака в трудном случае негладких потенциалов. Для широких классов несамосопряженных операторов, ядра которых имеют особенности на диагоналях или ломаных линиях из основного квадрата, им были получены фундаментальные результаты по сходимости разложений по с.п.ф. К ним относятся: равносходимость с тригонометрическими рядами Фурье, абсолютная сходимость, суммируемость разложений и базисность с.п.ф. по Риссу. В основе этих результатов лежит разработанный Августом Петровичем перспективный метод исследования резольвент указанных операторов.

В последние годы А. П. Хромов обратился к истокам возникновения спектральной теории дифференциальных операторов — к методу Фурье разделения переменных в задачах математической физики. Начиная с работ В. А. Стеклова обоснование метода Фурье традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием необходимое число раз. При таком подходе исследователю приходится вводить завышенные требования гладкости на начальные данные. Используя идеи академика А. Н. Крылова по ускорению сходимости рядов Фурье и резольвентный подход, А. П. Хромову удалось сделать качественно новый шаг в методе Фурье, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать краевые задачи методом Фурье при минимальных требованиях на исходные данные и ставящий много новых вопросов и в теории функций.

Общее количество научных работ А. П. Хромова, часть из которых написаны в соавторстве с его учениками, — более 300.

Под его руководством подготовлено и защищено 29 кандидатских диссертаций. Четверо из его учеников стали докторами наук. На механико-математическом факультете А. П. Хромовым создана и активно работает научная школа по спектральной теории дифференциальных и интегральных операторов, по аппроксимации и оптимизации в задачах действительного и комплексного анализа, которая регулярно выигрывает гранты Президента РФ по поддержке ведущих научных школ и гранты РФФИ.

Замечательным представляется вклад А. П. Хромова в дело организации математической жизни в Саратове. Август Петрович является одним из основных организаторов известных Саратовских зимних школ по теории функций, на которые приезжают математики от аспирантов до академиков



со всей России и ближнего зарубежья. А. П. Хромов был избран президентом Саратовского математического общества; более 15 лет он возглавлял диссертационный совет. Ему трижды присуждалась государственная стипендия, выделяемая президентом РАН для выдающихся ученых.

А. П. Хромов награжден медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени, является академиком МАН ВШ и академиком РАЕН. Имя Августа Петровича занесено в «Энциклопедию Саратовского края».

В повседневной жизни Август Петрович — доброжелательный и отзывчивый человек с великолепным чувством юмора, лишенный какого-либо комплекса величия. Его характеризуют беззаветная преданность науке, высокая требовательность к себе, щедрость в передаче знаний ученикам. В свои 80 лет Август Петрович полон энергии и новых идей.

Сотрудники механико-математического факультета гордятся своим замечательным коллегой и желают ему крепкого здоровья и дальнейших значительных успехов в научной и педагогической деятельности.

Сотрудники механико-математического факультета

Избранные труды А. П. Хромова

Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Матем. сб. 1966. Т. 70 (112), № 3. С. 310–329.

Оператор дифференцирования и ряды типа Дирихле // Матем. заметки. 1969. Т. 6, № 6. С. 759–766.

Об одном представлении ядер резольвент вольтерровых операторов и его применениях // Матем. сб. 1972. Т. 89 (131), № 2 (10). С. 207–226.

Асимптотика резольвентного ядра вольтеррова оператора и ее применение // Матем. заметки. 1973. Т. 13, № 6. С. 857–868.

Конечномерные возмущения вольтерровых операторов. Автореферат докторской диссертации // Матем. заметки. 1974. Т. 16, № 41. С. 669–680.

Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Матем. заметки. 1976. Т. 19, № 5. С. 763–772.

О порождающих функциях вольтерровых операторов // Матем. сб. 1977. Т. 102 (144), № 3. С. 457–472.

Теоремы равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114 (156), № 3. С. 378–405.

О порождающих функциях интегральных вольтерровых операторов // Матем. заметки. 1983. Т. 33, № 3. С. 423–434 (в соавторстве с Л. Б. Мацневым).

Асимптотика резольвент интегральных вольтерровых операторов // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 419–442.

Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Матем. заметки. 1998. Т. 64, вып. 6. С. 932–949.

О равносходимости интегральных операторов с переменным пределом интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюл. 2001. Т. 2, № 1. С. 60–72 (в соавторстве с В. В. Корневым).

Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа : сб. статей. М. : АФЦ, 1999. С. 255–266.

Суммируемость по Риссу спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 6. С. 809–814 (в соавторстве с А. П. Гуревичем).

Суммируемость по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов // Изв. вузов. Математика. 2003. № 2 (489). С. 24–35 (в соавторстве с А. П. Гуревичем).

О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Докл. АН. 2003. Т. 393, № 1. С. 14–17 (в соавторстве с В. П. Курдюмовым).



О сходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов в пространствах дифференцируемых функций // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюл. 2004. Т. 4, № 1. С. 19–31 (в соавторстве с В. В. Корневым).

О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Матем. заметки. 2004. Т. 76, вып. 1. С. 97–110 (в соавторстве с В. П. Курдюмовым).

Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 10. С. 3–163.

Абсолютная сходимость разложений по собственным функциям интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, № 4. С. 59–74 (в соавторстве с В. В. Корневым).

Об абсолютной сходимости разложений по собственным функциям дифференциальных и интегральных операторов // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 3. С. 304–308 (в соавторстве с В. В. Корневым).

Интегральные операторы с разрывными ядрами // Докл. АН. 2006. Т. 406, № 3. С. 317–321.

Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Матем. сб. 2006. Т. 197, вып. 11. С. 115–142.

О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюл. 2006. Т. 6, № 1. С. 46–55.

Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 17–22.

Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 2. С. 151–154 (в соавторстве с М. Ш. Бурлуцкой).

Теорема Штейнгауза о равносходимости для функционально-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 2011. Т. 90, вып. 1. С. 22–33 (в соавторстве с М. Ш. Бурлуцкой).

Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 9. С. 1621–1632 (в соавторстве с М. Ш. Бурлуцкой, В. В. Корневым).

О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Изв. АН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 6. С. 106–121 (в соавторстве с В. П. Курдюмовым).

Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 4. С. 414–417 (в соавторстве с М. Ш. Бурлуцкой, В. П. Курдюмовым).

Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 9. С. 1621–1632 (в соавторстве с М. Ш. Бурлуцкой, В. В. Корневым).

О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Изв. АН. Сер. матем. 2012. Т. 76, № 6. С. 106–121 (в соавторстве с В. П. Курдюмовым).

Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и антипериодическими краевыми условиями // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 3. С. 28–35 (в соавторстве с В. В. Корневым).

Функционально дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями // Докл. АН. 2014. Т. 454, № 1. С. 15–17 (в соавторстве с М. Ш. Бурлуцкой).

Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 10–20 (в соавторстве с М. Ш. Бурлуцкой).

Классическое решение методом Фурье смешанных задач при минимальных требованиях на исходные данные // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 171–198 (в соавторстве с М. Ш. Бурлуцкой).

Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. АН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140 (в соавторстве с М. Ш. Бурлуцкой).

Kuznetsov N., Khromov A. The Fourier Method in Russia Before and After V. A. Steklov // Math. Intelligencer. 2014. Vol. 36, № 4. P. 66–73.

О классическом решении одной смешанной задачи для волнового уравнения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 56–66.



Смешанная задача для волнового уравнения с произвольными двухточечными краевыми условиями // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 2. С. 148–150.

О формальном решении для волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. матем. шк. «Понтрягинские чтения – XXVI». Воронеж : Издат.-полиграф. центр «Научная книга», 2015. С. 205–207.

Смешанная задача для волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского : материалы XII междунар. Казан. летней науч. шк.-конф. 27 июня–4 июля, 2015. Казань : Изд-во Казан. гос. ун-та, 2015. Т. 47. С. 464–466

Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 4. С. 621–630 (в соавторстве с В. В. Корневым).

Резольвентный подход в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 48–59 (в соавторстве с В. В. Корневым).

ХРОНИКА НАУЧНОЙ ЖИЗНИ

17-Я МЕЖДУНАРОДНАЯ САРАТОВСКАЯ ЗИМНЯЯ ШКОЛА «СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ», ПОСВЯЩЕННАЯ 150-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ В. А. СТЕКЛОВА

С 27 января по 3 февраля 2014 года в Саратове проходила 17-я Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения». Школа была организована Саратовским государственным университетом им. Н. Г. Чернышевского, Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова и Математическим институтом им. В. А. Стеклова (Москва).

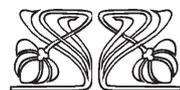
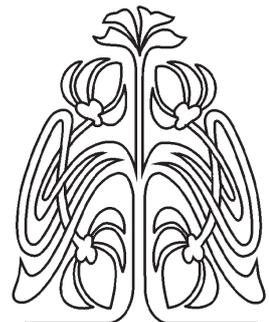
В работе школы приняли участие более 110 человек, в том числе один академик РАН, 25 докторов физико-математических наук, 45 кандидатов физико-математических наук. Среди участников школы были представители Волгограда, Вологды, Волжского (Волгоградская область), Гродно (Беларусь), Долгопрудного, Екатеринбурга, Жуковского, Казани, Краснодар, Махачкалы, Минска (Беларусь), Москвы, Набережных Челнов, Обнинска, Озерска, Петрозаводска, Ростова-на-Дону, Санкт-Петербурга, Саратова, Стамбула (Турция), Томска, Уфы, Челябинска. Самыми многочисленными были делегации от Саратова и Москвы.

К началу работы школы был издан сборник материалов конференции (Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й Саратовской зимней школы. Саратов, 2014. 324 с.).

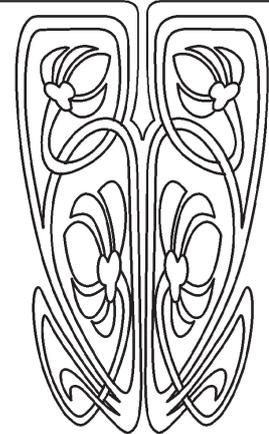
Оргкомитет школы возглавил академик РАН Б. С. Кашин; в состав оргкомитета вошли также Л. Ю. Коссович (зам. председателя), Б. И. Голубов (зам. председателя), А. П. Хромов (зам. председателя), В. И. Бердышев, С. В. Конягин, Ю. Н. Субботин, А. В. Абанин, А. Д. Баев, Е. П. Долженко, М. И. Дьяченко, С. И. Дудов, В. Г. Кротов, А. Г. Лосев, С. Р. Насыров, А. М. Олевский, Е. С. Половинкин, Д. В. Прохоров, А. М. Седлецкий, М. А. Скопина, И. А. Шевчук, С. П. Сидоров (секретарь).

17-я Саратовская зимняя школа была посвящена актуальным проблемам теории функций действительного и комплексного переменного. Лекции, доклады и сообщения были представлены по следующим направлениям:

Приложения



ПРИЛОЖЕНИЯ





- приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных;
- ортогональные системы и ряды;
- тригонометрические ряды;
- системы функций, порожденные сдвигами;
- вопросы конструктивной теории функций;
- однолистные функции, квазиконформные отображения;
- граничные свойства аналитических функций;
- спектральная теория операторов;
- базисы в различных пространствах;
- оптимизация и негладкий анализ.

Результаты, представленные участниками школы, являются большим вкладом в актуальные направления науки. Для целостного представления о современном состоянии и существующих приложениях теории функций и возможных путях ее дальнейшего развития были прочитаны следующие лекции:

1. О методе Фурье (А. П. Хромов, доктор физ.-мат. наук, Саратов);
2. Неравенство Гротендика и специальные ортогональные пространства $L_2(0,1)$ (Б. С. Кашин, академик РАН, Москва);
3. Асимптотика модулей двусвязных областей при растяжении (С. Р. Насыров, доктор физ.-мат. наук, Казань);
4. Оценки L^p -осцилляции. Средние Стеклова и их конкуренты (В. Г. Кротов, доктор физ.-мат. наук, Минск, Беларусь);
5. Стационарное уравнение Шредингера (А. Г. Лосев, доктор физ.-мат. наук, Волгоград);
6. Аффинные базисы Рисса и дуальные функции (П. А. Терехин, доктор физ.-мат. наук, Саратов);
7. Вычисление субдифференциалов и производных разности двухвыпуклых функций (Е. С. Половинкин, доктор физ.-мат. наук, Долгопрудный);
8. Систематизация задач по оценке выпуклого компакта шаром (С. И. Дудов, доктор физ.-мат. наук, Саратов);
9. КМА на локальных полях положительной характеристики (С. Ф. Лукомский, доктор физ.-мат. наук, Саратов);
10. Базисы сдвигов в пространствах тригонометрических многочленов (Т. П. Лукашенко, доктор физ.-мат. наук, Москва);
11. Теоремы единственности в пространствах целых функций (А. Ю. Попов, доктор физ.-мат. наук, Москва);
12. Теория единственности рядов по различным ортогональным системам: множества единственности и смежные вопросы (М. Г. Плотников, доктор физ.-мат. наук, Вологда);
13. Некоторые экстремальные задачи теории приближений тригонометрическими полиномами на части периода (А. Л. Лукашов, доктор физ.-мат. наук, Стамбул, Турция; Саратов, Россия);
14. О поведении прямоугольных частичных сумм кратных тригонометрических рядов Фурье (Н. Ю. Антонов, доктор физ.-мат. наук, Екатеринбург).

На школе было сделано также 15 получасовых докладов и 81 сообщение. Учитывая высокий научный уровень результатов, представленных на конференции, было принято решение опубликовать их в журнале «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика».

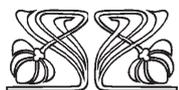
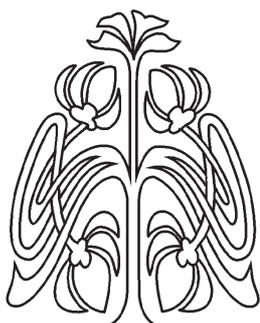


Необходимо отметить, что в школе приняли участие большое количество молодых ученых, аспирантов и студентов, в том числе иногородних. Так, в работе школы приняли участие 40 молодых ученых в возрасте до 35 лет (включая 13 кандидатов физ.-мат. наук).

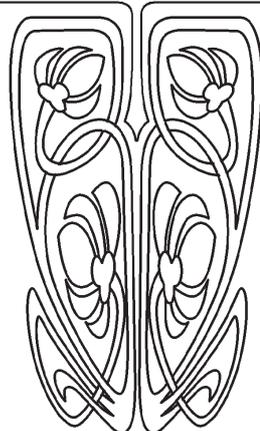
Следующая 18 Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» пройдет с 27 января по 3 февраля 2016 года в г. Саратове. Работа школы предполагается по следующим направлениям:

- действительный и комплексный анализ;
- приближение функций;
- ортогональные полиномы и ряды;
- численные методы анализа;
- спектральная теория операторов;
- оптимизация, негладкий анализ;
- гармонический и вейвлет-анализ.

*Б. И. Голубов, Б. С. Кашин, Л. Ю. Коссович,
С. П. Сидоров, А. П. Хромов*



ПОДПИСКА



Подписка на I полугодие 2016 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017,
раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки».
Журнал выходит 4 раза в год.

Подписка оформляется по заявочным письмам
непосредственно в редакции журнала.

Заявки направлять по адресу:

410012, Саратов, Астраханская, 83.

Редакция журнала «Известия Саратовского университета. Новая серия».

Тел. (845-2) 51-45-49, 52-26-89; факс (845-2) 27-85-29;

e-mail: izvestiya@sgu.ru, mmi@sgu.ru

Каталожная цена одного выпуска 350 руб.