

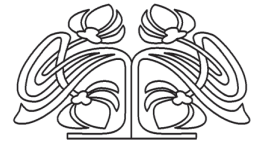


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1



Научный журнал
2016 Том 16

ISSN 1814-733X

ISSN 1816-9791

Издается с 2001 года

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Арутюнян Р. В. Исследование интегродифференциальных уравнений фильтрации 5

Гуревич А. П., Курдюмов В. П., Хромов А. П. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью 13

Салимов Р. Б. О новом подходе к решению краевой задачи Римана с условием на луче в случае бесконечного индекса 29

Султанахмедов М. С. Специальные вейвлеты на основе полиномов Чебышева второго рода 34

Шишкин А. Б. Факторизация целых симметричных функций экспоненциального типа 42

Юрко В. А. Об обратной периодической задаче для центрально-симметричных потенциалов 68

Юрченко И. С. О существовании континуального замкнутого U -множества 76

Механика

Челноков Ю. Н., Переляев С. Е., Челнокова Л. А. Исследование алгоритмов определения инерциальной ориентации движущегося объекта 80

Информатика

Слеповичев И. И. Алгебраические свойства абстрактных нейронных сетей 96

Соловьев В. М. Квантовые компьютеры и квантовые алгоритмы. Часть 2. Квантовые алгоритмы 104

Сперанский Д. В. Об одном подходе к нечеткому логическому моделированию цифровых устройств 112

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (журнал входит в зарубежную базу данных zbMATH)

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций, свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года. Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017, раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки». Журнал выходит 4 раза в год

Заведующий редакцией
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Степанова Наталия Ивановна

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Ковалева Наталья Владимировна

Корректор
Юдина Инна Геннадиевна

Адрес учредителя и редакции:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: (845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 14.03.16.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 13,95(15,0).
Тираж 500 экз. Заказ 32-Т.

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2016



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: <http://mmi.sgu.ru>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

- Arutyunyan R. V.** Stochastic Simulation of Diffusion Filtering 5
- Gurevich A. P., Kurdyumov V. P., Khromov A. P.** Justification of Fourier Method in a Mixed Problem for Wave Equation with Non-zero Velocity 13
- Salimov R. B.** About New Approach to Solution of Riemann's Boundary Value Problem with Condition on the Half-line in Case of Infinite Index 29
- Sultanakhmedov M. S.** Special Wavelets Based on Chebyshev Polynomials of the Second Kind and their Approximative Properties 34
- Shishkin A. B.** Factorization of Entire Symmetrical Functions of Exponential Type 42
- Yurko V. A.** On Inverse Periodic Problem for Differential Operators for Central Symmetric Potentials 68
- Yurchenko I. S.** On the Existence of Continual Closed U -set 76

Mechanics

- Chelnokov Yu. N., Perelyaev S. E., Chelnokova L. A.** An Investigation of Algorithms for Estimating the Inertial Orientation of a Moving Object 80

Computer Sciences

- Slepovichev I. I.** Algebraic Properties of Abstract Neural Network 96
- Solovyev V. M.** Quantum Computers and Quantum Algorithms. Part 2. Quantum Algorithms 104
- Speranskiy D. V.** An Approach to Fuzzy Modeling of Digital Devices 112



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА «ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»

Главный редактор

Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Короновский Алексей Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)

Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)

Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шамионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL «IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»

Editor-in-Chief – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Koronovskii A. A. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Balash O. S. (Saratov, Russia)

Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)

Danilov V. N. (Saratov, Russia)

Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)

Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Makarov V. Z. (Saratov, Russia)

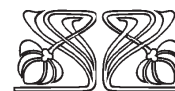
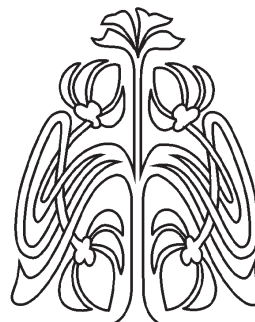
Prozorov V. V. (Saratov, Russia)

Usanov D. A. (Saratov, Russia)

Ustiantsev V. B. (Saratov, Russia)

Shamionov R. M. (Saratov, Russia)

Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)



РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ





**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор

(Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Екатеринбург, Россия)

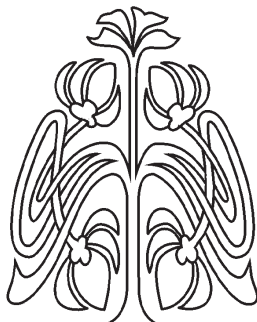
Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

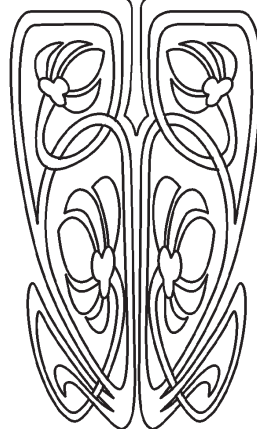
Deputy Editor-in-Chief – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)
Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)
Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)
Indeitsev D. A. (St.-Petersburg, Russia)
Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)
Kovalev V. A. (Moscow, Russia)
Lomakin E. V. (Moscow, Russia)
Manzhirov A. V. (Moscow, Russia)
Matveenko V. P. (Perm, Russia)
Morozov N. F. (St.-Petersburg, Russia)
Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)

Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)
Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)
Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)
Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)
Speranskii D. V. (Moscow, Russia)
Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)
Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)
Khromov A. P. (Saratov, Russia)
Shalyto A. A. (St.-Petersburg, Russia)
Shashkin A. I. (Voronezh, Russia)
Yurko V. A. (Saratov, Russia)



МАТЕМАТИКА

УДК 510: 53.072: 621.1.016.4(03)

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Р. В. Арутюнян

Арутюнян Роберт Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Московский технический университет связи и информатики, rob57@mail.ru

В предлагаемой статье для исследования процесса зарастания отверстий в решетчатой структуре, играющей роль фильтра, использован стохастический подход. Сформулирована и исследована система кинетических уравнений, моделирующих процесс диффузной фильтрации на основе указанного подхода. Доказана теорема существования и единственности решения применительно к случаю непрерывной плотности. Получены представления решения в виде равномерно сходящегося и асимптотического рядов, а также изучен характер его поведения на бесконечности. Рассмотрены конкретные частные случаи плотности типа дельта-функции и равномерного распределения. Построена и обоснована конечно-разностная схема для решения соответствующей задачи Коши на конечных интервалах времени. Приведены результаты моделирования на ЭВМ.

Ключевые слова: фильтрация, диффузия, кинетика, стохастическое уравнение, существование, единственность, численный метод.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-5-12

1. ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

В статье для исследования процесса зарастания отверстий в решетчатой структуре, играющей роль фильтра, в отличие от [1–4], использован стохастический подход. Рассмотрим одномерную периодическую структуру типа «решета» (рис. 1).

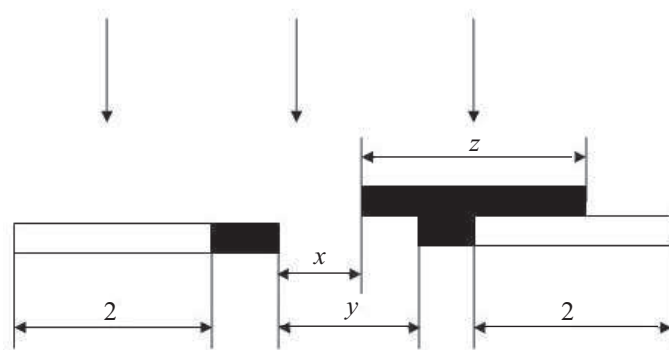
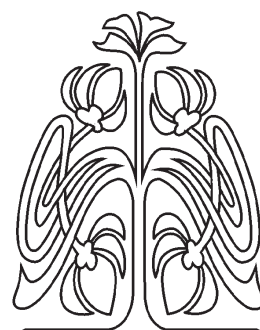
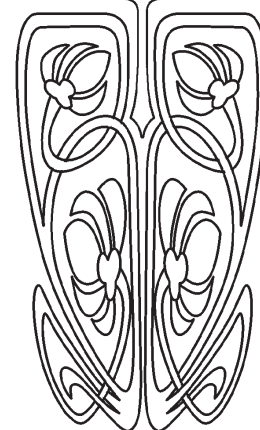


Рис. 1. Схема процесса фильтрации в одномерной решетчатой структуре

Длина непроходимой части равна двум, а проходимой (отверстия) — единице. Сквозь это решето просеивается поток одномерных частиц (палок) случайных размеров. Длина произвольной палки z ,



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





распределена по некоторому закону с плотностью $p(z)$, не зависящей от времени t , на полуинтервале $(0, 2]$. Примем следующие допущения:

1. Поток частиц однороден во времени, на период «решета» в единицу времени падает одна частица.
2. Падение частиц равновероятно в любую точку на периоде.
3. Частица проходит через отверстие, если ее центр тяжести попадает в створ отверстия. В противном случае прилипает к решетке.

Со временем размер проникаемой части «решета» уменьшается из-за налипания палок. Искомые — плотности распределения вероятностей размеров отверстий и палок на выходе из «решета» $C(x, t)$ и $\varphi(z, t)$. Исходное уравнение баланса, описывающее процесс зарастания отверстий, имеет следующий вид:

$$C(x, t + \Delta t)\Delta x - C(x, t)\Delta x = (I_{in}(x, t)\Delta x - I_{out}(x, t)\Delta x) \frac{\Delta t}{\tau} + o(1), \quad (1)$$

$$\Delta t \rightarrow 0, \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad \forall x \in [0, 1], \quad t > 0,$$

где левая часть описывает с точностью до бесконечно малых приращение за интервал $(t, t + \Delta t)$ вероятности существования отверстий с размерами от x до $x + \Delta x$; $I_{in}(x, t)$ — плотность вероятности образования, а $I_{out}(x, t)$ — соответственно исчезновение отверстий шириной x в момент t в результате падения палки. Очевидно, $I_{in}(1, t) = 0$, для всех $t > 0$ $I_{out}(0, t) = 0$, $C(x, 0) = \delta(x - 1)$ — дельта-функция; τ — частота падения палок на период решета. Без ограничения общности примем $\tau = 1$. Для ненулевых отверстий ($x > 0$):

$$I_{in}(x, t)\Delta x = \frac{2\Delta x}{3} \int_x^1 C(y, t)P(y - x)dy, \quad \forall x \in (0, 1), \quad t > 0,$$

где $P(y - x) = \int_{2(y-x)}^2 p(z)dz$ — вероятность существования палок с длинами, способными образовать из отверстия шириной y отверстие размером x (см. рис. 1). Множитель $\frac{\Delta x}{3}$ есть вероятность попадания центра тяжести палки на интервал длиной Δx . Коэффициент 2 учитывает налипание палок с обеих сторон отверстий. Для вычисления уходящего члена $I_{out}(x, t)$ рассмотрим три случая соотношений между длиной падающей палки z и шириной отверстия x .

1. $0 < z < x$, чтобы изменить размер отверстия, центр тяжести палки должен попасть внутрь интервала на периоде решетки длиной z .

2. $0 \leq z < 2x$. Суммарная длина интервалов на периоде, попадание на которые приводит к уменьшению размера отверстия, составляет $2z - x$, из которых z идет на создание ненулевого отверстия, а $(z - x)/2$ — на нуль-отверстия.

3. $2x \leq z < 2$. В этом случае длина соответствующего интервала равна $z + x$, где $2x$ идет на создание ненулевого отверстия, а $z - x$ — на нуль-отверстие.

Таким образом,

$$I_{out}(x, t)\Delta x = C(x, t) \left[\int_0^x \frac{z}{3} P(z) dz + \int_x^{2x} \frac{2z - x}{3} P(z) dz + \int_{2x}^2 \frac{z + x}{3} P(z) dz \right] \Delta x,$$

нуль-отверстие может образовываться из всех ненулевых отверстий ($0 < x \leq 1$) при попадании центра тяжести палок с размерами $z \leq x$ на интервал длиной $z - x$ в пределах периода «решетки», поэтому

$$I_{in}(0, t)\Delta x = \int_x^1 C(y, t) \int_y^2 \frac{z - y}{3} p(z) dz dy.$$

Устремляя Δx и Δt к нулю, получаем из (1) с учетом выражений для $I_{in}(x, t)$ и $I_{out}(x, t)$, а также начальных условий:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, t) = -q(x)C(x, t) + \int_x^1 P(y - x)C(y, t) dy, \quad \forall x \in (0, 1], \quad t > 0, \quad (2)$$



$$\frac{\partial C_0}{\partial t}(t) = \int_0^1 C(y, t) \int_y^2 \frac{z-y}{3} p(z) dz dy, \quad \forall t > 0, \quad (3)$$

$$C(x, 0) = \delta(x - 1 + 0), \quad \forall x \in (0, 1], \quad C_0(0) = 0, \quad (4)$$

$$P(w) = \frac{2}{3} \int_{2w}^2 p(z) dz, \quad 0 \leq w \leq 1,$$

$$q(x) = \frac{2}{3} \left[\int_0^x \frac{z}{2} P(z) dz + \int_x^{2x} \frac{2z-x}{2} P(z) dz + \int_{2x}^2 \frac{z+x}{2} P(z) dz \right], \quad \forall x \in (0, 1),$$

$C_0(t)$ — вероятность существования на периоде решета нуль-отверстия. Представим $C(x, t)$ в виде

$$C(x, t) = C_1(x, t) + \delta(x - 1 + 0)e^{-q(1)t}, \quad (5)$$

где $C_1(x, t)$ — ограниченная составляющая $C(x, t)$. После подстановки (5) в (2) и преобразований получаем задачу относительно $C_1(x, t)$ для любых $x \in (0, 1]$, $t > 0$:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t}(x, t) = -q(x)C_1(x, t) + \int_x^1 P(y-x)C_1(y, t) dy + P(1-x)e^{-q(1)t} \quad (6)$$

с начальным условием

$$C_1(x, 0) = 0, \quad \forall x \in (0, 1]. \quad (7)$$

Выражение для плотности условного распределения вероятностей длин палок на выходе из отверстий $\varphi(z, t)$ получается аналогично соотношениям для $I_{in}(x, t)$ и $I_{out}(x, t)$ и имеет вид

$$\varphi(z, t) = p(z) \int_{z/2}^1 R(y, z)C(y, t) dy, \quad \forall z \in [0, 2), \quad t > 0, \quad (8)$$

где $R(y, z)$ есть вероятность преодолеть отверстие шириной y палке длиной z :

$$R(y, z) = \begin{cases} (2y - z)/3, & z/2 \leq y \leq \min(z, 1), \\ y/3, & \min(z, 1) < y \leq 1. \end{cases}$$

Подстановка $C_1(x, t) = A(x, t)e^{-q(1)t}$ преобразует (6)–(7) для любых $x \in (0, 1]$ и $t > 0$ к виду

$$\frac{\partial A}{\partial t}(x, t) = -Q(x)A(x, t) + \int_x^1 P(y-x)A(y, t) dy + P(1-x), \quad (9)$$

$$A(x, 0) = 0, \quad \forall x \in (0, 1], \quad (10)$$

где $Q(x) = q(1) - q(x)$. Функция $A(x, t)$ для любых $x \in (0, 1]$ и $t \geq 0$ может быть разложена в степенной ряд:

$$A(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j(x)t^j, \quad (11)$$

коэффициенты которого определяются из соотношений для $j = 1, 2, \dots$,

$$(j+1)D_{j+1}(x) = Q(x)D_j(x) + \int_x^1 P(y-x)D_j(y) dy, \quad D_1(x) = P(1-x), \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (12)$$

Свойство 1. Если плотность распределения $p(z)$ непрерывна на отрезке $[0, 2]$, то решение задачи Коши (3)–(4), (6)–(7) существует, единственно, причем

$$C_0(t) \in C^\infty(0, \infty), \quad \frac{\partial^k C}{\partial t^k}(x, t) \in C^1(0, 1), \quad \forall t > 0, \quad k = 0, 1, \dots$$



Доказательство. Поскольку $p(z)$ непрерывна на отрезке $[0, 2]$, то $q(x) \in C^2(0, 1)$, $P(x) \in C^1(0, 1)$, $D_j(x) \in C^1(0, 1)$, $j = 1, 2, \dots$.

Промажорируем коэффициенты ряда (11):

$$0 < q(x) < \frac{2}{3} \max \left(\frac{x}{2}, \frac{3}{2x}, 1 + \frac{x}{2} \right) < 1, \quad \left| \frac{dq}{dx} \right| \leq \frac{1}{3}, \quad |Q(x)| \leq \frac{1}{3}(1-x),$$

$$0 \leq P(x) \leq \frac{2}{3}, \quad \forall x \in [0, 1],$$

с учетом которых из (2) получаем мажоранты

$$\|D_j\|_{C(0,1)} = \frac{j+1}{3^j(j-1)!}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Посредством дифференцирования (12) по x получаем рекуррентные соотношения для производных коэффициентов $D_j(x)$:

$$(j+1) \frac{dD_{j+1}}{dx}(x) = -\frac{dq}{dx}(x)D_j(x) + Q(x) \frac{dD_j}{dx}(x) - P(x)D_j(x) - \int_x^1 \frac{dP}{dy}(y-x)D_j(y) dy,$$

$$\forall x \in [0, 1], \quad j = 1, 2, \dots,$$

откуда следуют оценки

$$(j+1) \left\| \frac{dD_{j+1}}{dx} \right\|_{C(0,1)} \leq \frac{5}{3} \|D_j\|_{C(0,1)} + \frac{1}{3} \left\| \frac{dD_j}{dx} \right\|_{C(0,1)}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

на основании которых с учетом (13) и начальных условий имеем:

$$\|D_1\|_{C^1(0,1)} = \frac{4\|p\|_{C(0,2)} + 2}{3}, \quad (14)$$

$$\|D_j\|_{C^1(0,1)} = \frac{\|p\|_{C(0,2)} + 4j}{3^{j-1}(j-2)!}, \quad j = 2, 3, \dots \quad (15)$$

Из (13)–(15) следует, что ряд (11) и ему соответствующие, полученные почленным дифференцированием (11) по x и t , сходятся равномерно, причем при всех $t \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$

$$\left\| \frac{\partial^k C_1}{\partial t^k} \right\|_{C^1(0,1)} < \left(\frac{4}{3} \right)^k (R+2)^3 (t + \|p\|_{C(0,2)} + 8)^3 e^{(1/3-q(1))t}.$$

Так как

$$\frac{d^{k+1}C_0}{dt^{k+1}}(t) \leq \frac{2}{3} \left\| \frac{d^k C_1}{dt^k} \right\|_{C(0,1)} + \frac{1}{3} q^k(t) e^{-q(1)t}, \quad \forall t \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

то утверждение доказано. □

Свойство 2. *Имеют место оценки снизу*

$$C_1(x, t) \geq P(1-x) \frac{e^{-q(x)t} - e^{-q(1)t}}{q(1) - q(x)} \geq P(1-x) \frac{e^{-q(1)t} - e^{-q_{\max}t}}{q_{\max} - q(1)},$$

$$\forall x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad q_{\max} = \|q\|_{C(0,1)}.$$

Доказательство. Так как $P(x) \geq 0 \forall x \in (0, 1)$, то из (9)–(10): $A(x, t) \geq 0$, $A(x, t) \geq P(x-1) \frac{e^{Q(x)t} - 1}{Q(x)}$. С учетом монотонности $\frac{e^{-x} - e^{-y}}{(y-x)}$ по обоим аргументам, следует доказательство. □

Заметим, что $C_1(1, t) = \frac{2}{3t} e^{-q(1)t}$.



Свойство 3. *Справедливы оценки*

$$C_1(x, t) \leq \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3t}{2(1-x)}} I_1 \left(2\sqrt{\frac{2}{3}(1-x)t} \right) e^{-q_{\min}t} \leq \frac{(3/2)^{3/4}}{3\sqrt{\pi}} \frac{t^{1/4}}{(1-x)^{3/2}} e^{-q_{\min}t + 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-x)t}},$$

$$\forall x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad q_{\min} = \min_{[0,1]} q(x).$$

Доказательство. Поскольку $q(x) - q_{\min} \geq 0$, $0 \leq P(x) \leq 2/3$, $\forall x \in [0, 1]$, то $C_1(x, t) \leq A_+(x, t)e^{-q_{\min}t}$, где $\frac{\partial A_+}{\partial t}(x, t) = \frac{2}{3} \int_x^1 A(y, t) dy + \frac{2}{3}$, $\forall x \in (0, 1]$, $t \geq 0$, при начальном условии $A_+(x, 0) = 0$, $\forall x \in (0, 1]$. Аналитическое решение данной задачи Коши имеет вид

$$A_+(x, t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3t}{2(1-x)}} I_1 \left(2\sqrt{\frac{2}{3}(1-x)t} \right), \quad \forall x \in (0, 1), \quad A_+(1, t) = \frac{2}{3t}, \quad \forall t > 0,$$

что вследствие свойств функций Бесселя [5] доказывает данное свойство. □

Свойство 4. *Имеет место условие нормировки:*

$$C_0(t) + \int_0^1 C_1(x, t) dx = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Для доказательства достаточно доказать

$$\frac{\partial C_0}{\partial t}(t) + \int_0^1 \frac{\partial C_1}{\partial t}(x, t) dx \equiv 0, \quad \forall t \geq 0,$$

что достигается подстановкой вместо производных соответствующих выражений правых частей системы (2)–(4). □

2. ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ (6)–(7)

Исследуем важный случай, когда $q(x) < 0$, $\forall x \in (0, 1)$, вследствие чего на полуинтервале $[0, 1)$ существует не более одной точки с абсциссой x_* , для которой выполняется равенство $q(x_*) = q(1)$, если же $q(x_*) \geq q(1)$, $\forall x \in [0, 1)$, то положим $x_* = 1$. Будем искать коэффициенты асимптотического разложения $A(x, t)$ на $(x_*, 1]$ в ряд Лорана (предполагаем, что $x_* < 1$):

$$A(x, t) = \sum_{j=-r}^{\infty} a_j(x)t^{-j}, \quad r > 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (9), находим соотношения его коэффициентов:

$$(1-j)a_{j-1}(x) = Q(x)a_j(x) + \int_x^1 P(y-x)a_j(y) dy, \quad j = -r, \dots, -1, 1, \dots;$$

$$a_j(x) \equiv 0, \quad (-j) = r, r+1, \dots;$$

$$a_{-1}(x) = Q(x)a_0(x) + \int_x^1 P(y-x)a_0(y) dy + P(1-x), \quad Q(x) > 0, \quad \forall x \in (x_*, 1].$$

Для определения степени r главного члена асимптотики (16) сделаем оценку снизу и сверху для функции $C_1(x, t)$. Поскольку $P(x) \leq 2/3$, то $C_1(x, t) \leq A_0(x, t)$, где $A_0(x, t)$ есть решение задачи Коши для каждого $x \in (x_*, 1]$ и $t > 0$:

$$\frac{\partial A_0}{\partial t}(x, t) + q(x)A_0(x, t) = \frac{2}{3} \int_x^1 A_0(y, t) dy + P(1-x)e^{-q(1)t}, \quad (17)$$



$$A_0(x, 0) = 0, \quad \forall x \in (x_*, 1]. \quad (18)$$

Рассмотрим $w_0(x, t) = \int_x^1 A_0(y, t) dy$ при произвольных $x \in (x_*, 1]$ и $t > 0$. Точное решение (17), (18):

$$\hat{w}_0(x, s) = \int_x^1 \frac{P(1-y)}{(s+q(1))(s+q(y))} e^{\frac{2}{3} \int_x^y \frac{dz}{s+q(z)}} dy, \quad \forall x \in (x_*, 1], \quad (19)$$

где $\hat{w}_0(x, s)$ — образ функции $w_0(x, t)$, s — параметр преобразования Лапласа.

Из (19) получаем, что $\hat{w}_0(x, s - q(1)) = G(x)s^{-n(1)-1}(1 + o(1))$ для любого $x \in (x_*, 1]$, $s \rightarrow \infty$, где

$$G(x) = [q(x) - q(1)]^{n(1)} e^{n(1) \int_x^1 \frac{q'(z) - q'(1)}{q(z) - q(1)} dz}, \quad n(x) = -\frac{2}{3q'(x)}, \quad q'(x) = \frac{dq}{dx}, \quad \forall x \in (x_*, 1],$$

откуда

$$w_0(x, t) = t^{n(1)} e^{-q(1)t} \frac{G(x)}{\Gamma(n(1) + 1)} (1 + o(1)), \quad \forall x \in (x_*, 1), \quad t \rightarrow \infty$$

и с учетом

$$A_0(x, t) = q'(1)t^{n(1)} e^{-q(1)t} \frac{G(x)}{\Gamma(n(1)Q(x))} (1 + o(1)), \quad \forall x \in (x_*, 1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Из непрерывности $p(z)$ и условия $q''(x) < 0$ при любом $x \in (0, 1)$ следует, что $q'(x) < 0$, поэтому $n(1)$ конечно и $x_* \leq 1$. В силу справедливости неравенства $P(x-y) > P(1-x)$ для всех $y \in (x, 1)$, $x \in (0, 1)$ $A_1(x, t)$, являющаяся решением задачи Коши:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}(x, t) + q(x)A_1(x, t) = P(1-x) \int_x^1 A_1(y, t) dy + P(1-x)e^{-q(1)t}, \quad \forall x \in (x_*, 1], \quad t > 0, \\ A_1(x, 0) = 0, \quad \forall x \in (x_*, 1],$$

есть оценка снизу для $C_1(x, t)$. Асимптотика для функции $A_1(x, t)$ находится также при помощи преобразования Лапласа и имеет вид

$$A_1(x, t) = -q(1) \frac{P(1-x)}{P(0)} \frac{[q(x) - q(1)]^{n(1)-1}}{\Gamma(n(1))} e^{x \int \left(\frac{P(0)q'(z)}{q'(1)} - P(1-z) \right) \frac{dz}{q(z) - q(1)}} (1 + o(1)), \quad (21) \\ \forall x \in (x_*, 1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Из (20) и (21) следует, что максимальный порядок степеней t в слагаемых асимптотического разложения (16) $r = n(1)$, а также выводится краевое условие для коэффициента $a_{n(1)}(x)$ главного члена асимптотики

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{a_{n(1)}(x)}{(1-x)^{n(1)-1}} = \frac{[-q(1)]^{n(1)}}{\Gamma(n(1))}, \quad (22)$$

являющееся условием однозначности для соответствующего уравнения системы соотношений для коэффициентов $a_j(x)$, $j = -n(1), -n(1) + 1, \dots$

3. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (6)–(7)

На конечных интервалах $(0, T)$, где $T > 0$ — величина порядка постоянной времени процесса, одним из эффективных способов решения (6)–(7) является применение МКР. Рассмотрим схему первого порядка:

$$\frac{B_i^{j+1} - B_i^j}{\tau} = -a_i B_i^j + \sum_{k=1}^i P_{i-k} B_k^j h + R_i^j, \quad i = \overline{1, M}, \quad (23) \\ B_0^j = P_0 t_j e^{-q_0 t_j}, \quad a_i = q(1 - z_i), \quad P_i = P(z_i), \quad z_i = ih, \quad R_i^j = P_i e^{-q_0 t_j},$$



$$C_1(z_i, t_j) = B_{m-i}^j(1 + o(1)), \quad \tau, h \rightarrow 0, \quad i = \overline{0, M}, \quad h = \frac{1}{M},$$

$$t_j = j\tau, \quad j = \overline{0, J}, \quad J = [T/\tau],$$

где квадратные скобки означают вычисление целой части. Для невязок (23), получающихся после подстановки сеточной функции $B_h = \{B_i^j\}_{i=0, M}^{j=0, J}$ точного решения задачи (6)–(7), имеют место неравенства

$$\varepsilon_i^j \leq f_1\tau + f_2h, \tag{24}$$

где $\tau \geq 0, h \geq 0, i = \overline{1, M}, j = \overline{1, J}$; коэффициенты $f_1 = f_3 \sup_{t \geq 0} \left\| \frac{\partial^2 C_1}{\partial t^2} \right\|_{C(0,1)}$; $f_2 = f_3 \sup_{t \geq 0} \|C_1\|_{C^1(0,1)}$; $f_3 = \frac{2}{3}(1 + 2\|p\|_{C(0,2)})$ в силу ранее доказанных в пп. 1 и 2 свойств $C_1(x, t)$ являются конечными. Методом мажорант можно показать выполнение условия устойчивости схемы

$$\|B_h^{(1)} - B_h^{(2)}\|_h \leq \gamma \|R_h^{(1)} - R_h^{(2)}\|_h, \quad \gamma = \frac{e^{\omega T} - 1}{\omega}, \quad \omega = \|P\|_{C(0,1)} - q_{\min}, \tag{25}$$

сеточная норма равна: $\|B_h\|_h = \max_{\Omega} |B_i^j|$, $\Omega = \{(i, j) : i = \overline{0, M}, j = \overline{0, J}\}$.

Таким образом [6], схема (23) является корректной, а приближенное решение B_h сходится к точному, причем из (24)–(25) следуют оценки:

$$|C_1(z_i, t_j) - B_{m-i}^j| \leq f_4\tau + f_5h, \quad \forall (i, j) \in \Omega,$$

где $f_4 = \text{const } f_1, f_5 = \text{const } f_2$. Аналогичная схема первого порядка точности для задачи (6)–(7) получается из (23) при $q_i = Q(1 - z_i), R_i^j = P_i$, тогда $A(z_i, t_j) = B_{m-i}^j(1 + o(\tau + h)), \tau, h \rightarrow 0, i = \overline{0, M}, j = \overline{0, J}$. Значения коэффициентов в мажоранте (24) для этой схемы становятся зависящими степенным образом от T . Из упомянутых схем предпочтительнее вторая, так как в ней свободный член не зависит от времени. Результаты моделирования даны на рис. 2 (задача с коэффициентами $q(x) = 1 + (1 - x)/6, P(x) = 2/3$, и квазиполиномиальным решением, параметры $h = 0.025, \tau = 0.5$) и рис. 3 (данные п. 2.2, параметры $h = 0.025, \tau = 0.3$)).

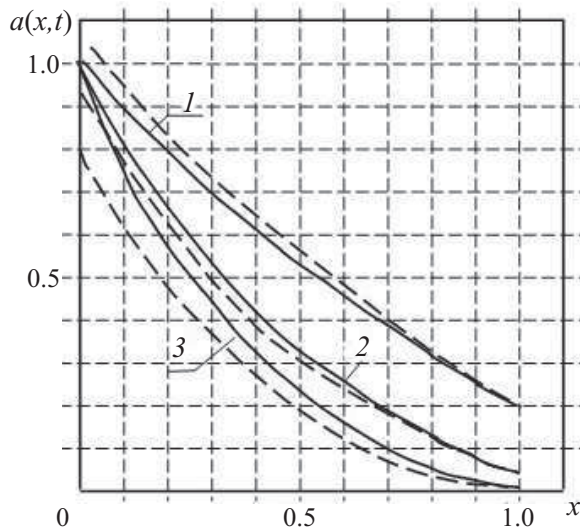


Рис. 2. Результаты решения МКР модельной задачи: 1 – $t = 10$; 2 – $t = 30$; 3 – $t = 60$; основная линия – МКР, пунктирная – точное решение

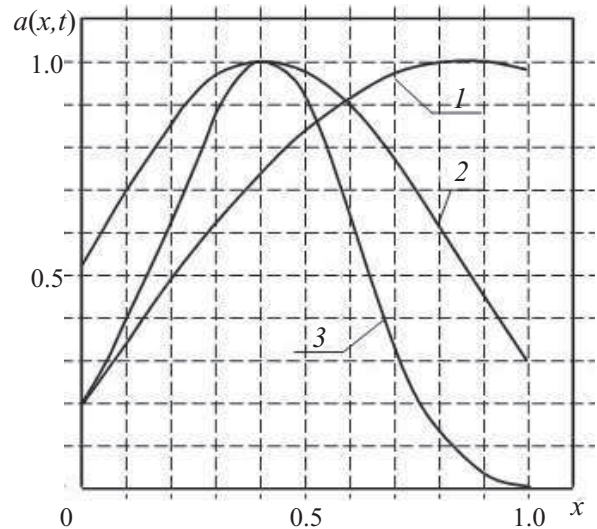


Рис. 3. Графики численного решения МКР при равномерном распределении размеров частиц: 1 – $t = 3(3)$; 2 – $t = 13(3)$; 3 – $t = 60$

По оси ординат откладывались: на рис. 2 – $a_1(x, t) = \frac{A_h(x, t)}{\|A_h\|_h}$ (приближенное решение), $a_2(x, t) = \frac{A(x, t)}{\|A_h\|}$ (точное решение); на рис. 3 – $a_3(x, t) = \frac{A_h(x, t)}{\|A_h\|_h}$, $A_h(x, t)$ – линейный сплайн, соответствующий вектору A_h .



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованная в статье модель, несмотря на ряд упрощающих предположений, дает общее представление о процессе фильтрации в решетчатых структурах. Полученные результаты могут быть развиты, прежде всего, в отношении рассматриваемых функциональных классов плотности распределения размеров фильтрующихся частиц и метода асимптотических оценок на отрезке $[0, x_*]$.

Библиографический список

1. Резников Г. Д., Жихарь А. С. Численно-аналитический подход к моделированию переноса частиц в фильтрующем слое // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 6. С. 118–125.
2. Гавич И. К., Зекцер И. С., Ковалевский В. С., Язвин Л. С., Пиннекер Е. В., Бондаренко С. С., Боровский Л. В., Дзюба А. А. Основы гидрогеологии. Гидрогеодинамика. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1983. 241 с.
3. Гуревич А. Е. Практическое руководство по изучению движения подземных вод при поисках полезных ископаемых. Л. : Недра, 1980. 216 с.
4. Колесников А. В. Математическое моделирование фильтрации жидкости в неоднородных и периодических пористых телах методом однородно-анизотропного эквивалентирования : автореф. дис. ... канд. техн. наук / Северо-Кавказский федеральный университет. Ставрополь, 2014.
5. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М. : Наука, 1979. 832 с.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1980. 496 с.

Stochastic Simulation of Diffusion Filtering

R. V. Arutyunyan

Arutyunyan Robert Vladimirovich, Moscow Technical University of Communications and Informatics, 8a, Aviamotornaya st., Moscow, Russia, 111024, rob57@mail.ru

Formulated and investigated is the system of kinetic equations describing the process of diffusion filtering based on a stochastic approach. The theorem of existence and uniqueness of the solution for the case of a continuous density is prove. We obtain the representation of solution in the form of a uniformly convergent and asymptotic series, and explore the nature of its behavior at infinity. The concrete particular cases such as the density of the delta function and a uniform distribution are considered. The finite-difference scheme for the solution of the corresponding Cauchy problem on finite intervals of time is constructed and justified. The results of computer simulation are given.

Key words: filtration, diffusion, kinetics, stochastic equation, existence, uniqueness, numerical method.

References

1. Reznikov G. D., Zhikhar' A. S. Chislenno-analitičeskii podkhod k modelirovaniu perenosa chastits v fil'truishchem sloe [Numerical and analytical approach to the modeling of the transport of particles in the filter bed]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 1995, vol. 7, no. 6, pp. 118–125 (in Russian).
2. Gavich I. K., Zektser I. S., Kovalevskii V. S., Iazvin L. S., Pinneker E. V., Bondarenko S. S., Borevskii L. V., Dziuba A. A. *Osnovy gidrogeologii. Hidrogeodinamika* [Fundamentals of hydrogeology. Hidrogeodinamika]. Novosibirsk, Nauka, 1983, 241 p. (in Russian).
3. Gurevich A. E. *Prakticheskoe rukovodstvo po izucheniiu dvizhenia podzemnykh vod pri poiskakh poleznykh iskopaemykh* [A Practical Guide to the study of groundwater movement in the search for minerals]. Leningrad, Nedra, 1980, 216 p. (in Russian).
4. Kolesnikov A. V. *Matematicheskoe modelirovanie fil'tratsii zhidkosti v neodnorodnykh i periodicheskikh poristyykh telakh metodom odnorodno-anzotropnogo ekvivalentirovaniia* [Mathematical modeling of fluid flow in heterogeneous and periodic porous bodies by homogeneous anisotropic equivalenting] : avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk / Severo-Kavkazskii federal'nyi universitet. Stavropol', 2014 (in Russian).
5. *Spravochnik po spetsial'nykh funktsiiam* [Handbook of special functions] / eds. M. Abramovitsa, I. Stigan. Moscow, Nauka, 1979, 832 p. (in Russian).
6. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Function analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 496 p. (in Russian).



УДК 517.95;517.984

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕНУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

А. П. Гуревич¹, В. П. Курдюмов², А. П. Хромов³

¹Гуревич Александр Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, GurevichAP@mail.ru

²Курдюмов Виталий Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Kurdyumov47@yandex.ru

³Хромов Август Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

В статье методом контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей, соответствующей смешанной задаче для волнового уравнения с комплексным потенциалом, дается обоснование метода Фурье двух смешанных задач с нулевой начальной функцией и ненулевой начальной скоростью. Краевые условия таковы, что эти две задачи вместе со смешанной задачей с закрепленными концами исчерпывают весь класс смешанных задач с указанными начальными условиями, для которых оператор соответствующей спектральной задачи в методе Фурье имеет регулярные краевые условия. В отличие от работы В. А. Черныгина, предложенный метод не использует уточненной асимптотики собственных значений и никакой информации о собственных функциях. На начальные данные рассматриваемых задач накладываются минимальные требования. Существенно используется прием А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье.

Ключевые слова: метод Фурье, формальное решение, спектральная задача, резольвента.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-13-29

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно обоснование метода Фурье в задачах математической физики опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз. Впервые строгое обоснование метода Фурье, основанное на такой точке зрения, было дано В. А. Стекловым [1, с. 224] и в последующем именно так проводилось обоснование метода Фурье для большинства задач математической физики. Законность указанных операций дифференцирования приводит к завышению требований на исходные данные задачи, не вызванные самой ее постановкой. Выход из этого положения намечен А. Н. Крыловым [2] в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных. Суть его приема состоит в том, что вопрос о дифференцировании ряда Фурье решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (и тем самым в этом случае не надо прибегать к почленному дифференцированию), а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать. В. А. Черныгин [3] приемом А. Н. Крылова с применением уточненной асимптотики собственных значений и собственных функций исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, и в ряде случаев эти условия гладкости стали минимально возможными. Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А. Н. Крылова и В. А. Черныгина, есть качественно новый шаг, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать краевые задачи методом Фурье и ставящий много вопросов и в теории функций.

В [4] А. П. Хромов предложил новый способ использования приема А. Н. Крылова, опирающийся на метод Коши – Пуанкаре интегрирования по спектральному параметру резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей по методу Фурье, который получил свое дальнейшее развитие в [5, 6].



В настоящей работе, в отличие от [4–6], где начальные условия смешанных задач для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t)$$

имеют вид

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (1)$$

мы рассмотрим такие начальные условия:

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (2)$$

В результате, используя резольвентный подход в методе Фурье, мы получим классические решения двух смешанных задач с начальными условиями (2) при минимальных условиях на $\psi(x)$ и краевыми условиями

$$u'_x(0, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = u'_x(1, t) + \alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(1, t) = 0 \quad (3)$$

для одной из них и

$$u'_x(0, t) + \beta u_x(1, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = \alpha u(0, t) + u(1, t) = 0 \quad (4)$$

для другой, притом, что в условиях (4) $1 + \alpha\beta \neq 0$. Эти две задачи вместе со смешанной задачей с условиями (2) и закрепленными концами ($u(0, t) = u(1, t) = 0$) исчерпывают весь класс смешанных задач для волнового уравнения с начальными условиями (2), для которых оператор соответствующей спектральной задачи в методе Фурье имеет регулярные краевые условия. В случае краевых условий $u(0, t) = u(1, t) = 0$, начальных условий (2) и вещественной $q(x)$ классическое решение смешанной задачи при минимальных требованиях на $\psi(x)$ получено в [3]. Для комплекснозначной $q(x)$ оно может быть получено резольвентным методом, приведенном в настоящей статье. Классические решения смешанных задач для волнового уравнения с начальными условиями (1) с краевыми условиями (3), (4) или $u(0, t) = u(1, t) = 0$ при минимальных требованиях на $\varphi(x)$ и комплекснозначной $q(x)$ получены в [4–6].

Исследование смешанных задач с начальными условиями (2) наталкивается на дополнительные, по сравнению с [4–6], трудности, некоторые из которых преодолеваются представлением $\psi(x)$ в виде суммы двух функций, одна из которых обращается в ноль вместе со своей производной в точках 0 и 1, а другая принадлежит области определения оператора, определяющего спектральную задачу в методе Фурье.

1. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ (3)

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad (5)$$

$$u'_x(0, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = u'_x(1, t) + \alpha_2 u(0, t) + \beta_2 u(1, t) = 0, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (7)$$

где $q(x) \in C[0, 1]$ — комплекснозначная функция, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — комплексные числа. Естественные минимальные требования для классического решения здесь такие: $\psi(x) \in C^1[0, 1]$ комплекснозначная, причем

$$\psi'(0) + \alpha_1 \psi(0) + \beta_1 \psi(1) = 0, \quad \psi'(1) + \alpha_2 \psi(0) + \beta_2 \psi(1) = 0. \quad (8)$$

Задача (5)–(6) с условиями (1) рассмотрена в [5].

Для формирования эталонной смешанной задачи (см. [7]) мы привлекаем оператор L_0 : $L_0 u = -u''(x)$, $y'(0) = y'(1) = 0$. Отметим, что оператор L_0 самосопряженный, его собственными значениями являются (см. [8, с. 365]) числа $\lambda_n^0 = n^2 \pi^2$, $n = 0, 1, \dots$, а соответствующими ортонормированными собственными функциями: $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos n\pi x$ ($n = 1, 2, \dots$).



1.1. Преобразование формального решения

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора L :

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x),$$

$$U_1(y) = y'(0) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \quad U_2(y) = y'(1) + \alpha_2 y(0) + \beta_2 y(1) = 0.$$

Теорема 1. Собственные значения $\lambda_n = \rho_n^2$ ($\lambda = \rho^2$, $\text{Re } \rho \geq 0$) оператора L при достаточно больших n простые и имеют асимптотику $\rho_n = n\pi + \varepsilon_n$, где $n = n_0, n_0 + 1, \dots$, $\varepsilon_n = O(1/n)$.

(Это известный факт, см., например, [9, с. 74].)

Обозначим через $\tilde{\gamma}_n$ окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ достаточно мало, и через γ_n — образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ -плоскости. Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор, λ — спектральный параметр, есть резольвента оператора L . Формальное решение задачи (5)–(7) по методу Фурье представим в виде (см. [10, 11])

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad (9)$$

где $\gamma_r = \{\lambda \mid |\lambda| = r\}$, $r > 0$ фиксировано и таково, что внутри γ_r находятся все собственные значения оператора L , не попавшие внутрь γ_n при $n \geq n_0$, контуры γ_r и γ_{n_0} не пересекаются. Отметим, что теперь в формальном решении не фигурируют явно ни собственные значения, ни собственные функции.

Выполним теперь преобразования ряда (9) с использованием эталонной задачи.

Лемма 1. Имеет место представление

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x), \quad (10)$$

где $\psi_1(x) \in C^1[0, 1]$, $\psi_1(0) = \psi_1(1) = \psi_1'(0) = \psi_1'(1) = 0$, $\psi_2(x) \in C^2[0, 1]$, $\psi_2(x) \in D_L$ (область определения оператора L).

Доказательство. Имеем $\psi(x) = (\psi(x) - \psi_2(x)) + \psi_2(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$, где $\psi_2(x) \in C^2[0, 1]$ и удовлетворяет условиям $\psi_2^j(0) = \psi_2^j(1) = \psi_2^{j'}(0) = \psi_2^{j'}(1) = 0$ ($j = 0, 1$) (в качестве $\psi_2(x)$ можно взять, например, многочлен третьего порядка, удовлетворяющий этим условиям). Поскольку $\psi(x)$ удовлетворяет условиям (8), то этим условиям удовлетворяет и $\psi_1(x)$ и, следовательно, $\psi_1(x) \in D_L$. \square

Лемма 2. Пусть μ_0 — фиксированное число, не являющееся собственным значением оператора L и γ — один из контуров γ_r , γ_n при $n \geq n_0$ (μ_0 вне γ). Тогда

$$\int_{\gamma} (R_\lambda \psi_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda = \int_{\gamma} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

где $g = (L - \mu_0 E)\psi_2$.

Доказательство аналогично приведенному в [5, лемма 1].

Теорема 2. Формальное решение задачи (5)–(7) представимо в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad (11)$$

где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad (12)$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$



$$u_2(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_{\lambda} g) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$R_{\lambda}^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора L_0 .

Доказательство. По лемме 1 имеем:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_{\lambda} \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_{\lambda} \psi_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda. \quad (13)$$

Отсюда, применяя лемму 2 ко второму слагаемому и выполняя очевидные преобразования с первым, получаем (13). \square

Замечание. Функция $u_0(x, t)$ есть формальное решение эталонной задачи:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad u'_x(0, t) = u'_x(1, t) = 0. \quad (14)$$

1.2. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $z_1(x, \rho)$ и $z_2(x, \rho)$ решения уравнения $y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$ с начальными условиями $z_1(0, \rho) = 1, z'_1(0, \rho) = 0, z_2(0, \rho) = 0, z'_2(0, \rho) = 1$. Тогда $z_j(x, \rho)$ являются целыми функциями по ρ и даже по λ , где $\lambda = \rho^2$.

Теорема 3. Для R_{λ} и R_{λ}^0 имеют место формулы

$$\begin{aligned} R_{\lambda} f &= v_1(x, \rho)(f, z_1) + v_2(x, \rho)(f, z_2) + M_{\rho} f, \\ R_{\lambda}^0 f &= v_1^0(x, \rho)(f, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(f, z_2^0) + M_{\rho}^0 f, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} v_j(x, \rho) &= \frac{(-1)^j}{\Delta(\rho)} \{ [-\beta_1 z_{3-j}(1, \rho) U_2(z_2) + (z'_{3-j}(1, \rho) + \beta_2 z_{3-j}(1, \rho)) U_1(z_2)] z_1(x, \rho) + \\ &+ [\beta_1 z_{3-j}(1, \rho) U_2(z_1) - (z'_{3-j}(1, \rho) + \beta_2 z_{3-j}(1, \rho)) U_1(z_1)] z_2(x, \rho) \} \quad (j = 1, 2), \end{aligned}$$

$$\Delta(\rho) = U_1(z_1) U_2(z_2) - U_1(z_2) U_2(z_1), \quad (f, z) = \int_0^1 f(\zeta) z(\zeta) d\zeta,$$

$$v_1^0(x, \rho) = -\frac{\cos \rho \cos \rho x}{\rho \sin \rho}, \quad v_2^0(x, \rho) = -\cos \rho x,$$

$$M_{\rho} f = \int_0^x \begin{vmatrix} z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \\ z_1(\zeta, \rho) & z_2(\zeta, \rho) \end{vmatrix} f(\zeta) d\zeta,$$

$$M_{\rho}^0 f = \int_0^x \begin{vmatrix} z_1^0(x, \rho) & z_2^0(x, \rho) \\ z_1^0(\zeta, \rho) & z_2^0(\zeta, \rho) \end{vmatrix} f(\zeta) d\zeta, \quad z_1^0(x, \rho) = \cos \rho x, \quad z_2^0(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho}.$$

Этот результат, как и следующая лемма, доказаны в [5, теоремы 3, 4, лемма 2].

Лемма 3. При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место асимптотические формулы:

$$v_1^{(j)}(x, \rho) = v_1^{0(j)}(x, \rho) + O(\rho^{j-2}), \quad v_2^{(j)}(x, \rho) = v_2^{0(j)}(x, \rho) + O(\rho^{j-1}), \quad j = 0, 1, 2,$$

где $v^{(j)}(x, \rho) = \frac{d^j}{dx^j} v(x, \rho)$ и оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0, 1]$.

Теорема 4. Для $z_j(x, \rho), j = 1, 2$, имеют место формулы

$$z_1(x, \rho) = \cos \rho x + \int_0^x K_1(x, \zeta) \cos \rho \zeta d\zeta, \quad (16)$$



$$z_2(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x K_2(x, \zeta) \frac{\sin \rho \zeta}{\rho} d\zeta, \quad (17)$$

где $K_j(x, \zeta)$ непрерывно дифференцируемы по x и ζ , причем $K_2(x, 0) \equiv 0$.

Замечание. Формулы (16), (17) хорошо известны как формулы операторов преобразования (см. [12, с. 17, 23]).

Лемма 4. *Имеют место формулы*

$$z_1(x, \rho) = \cos \rho x + \frac{1}{\rho} \int_0^x \sin \rho(x - \zeta) \cos \rho \zeta q(\zeta) d\zeta + \frac{1}{\rho^2} \int_0^x \sin \rho(x - \zeta) F_1(\zeta, \rho) d\zeta, \quad (18)$$

$$z_2(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \int_0^x \sin \rho(x - \zeta) \sin \rho \zeta q(\zeta) d\zeta + \frac{1}{\rho^3} \int_0^x \sin \rho(x - \zeta) F_2(\zeta, \rho) d\zeta, \quad (19)$$

где

$$F_1(\zeta, \rho) = q(\zeta) \left[\sin \rho \zeta K_1(\zeta, \zeta) + \int_0^\zeta \sin \rho \tau K'_{1\tau}(\zeta, \tau) d\tau \right],$$

$$F_2(\zeta, \rho) = q(\zeta) \left[-\cos \rho \zeta K_2(\zeta, \zeta) + \int_0^\zeta \cos \rho \tau K'_{2\tau}(\zeta, \tau) d\tau \right].$$

Доказательство. Докажем формулу (18). Используя метод вариаций произвольных постоянных и формулу (16), получим:

$$z_1(x, \rho) = \cos \rho x + \frac{1}{\rho} \int_0^x \sin \rho(x - \zeta) q(\zeta) z_1(\zeta, \rho) d\zeta = \cos \rho x + \frac{1}{\rho} \int_0^x \sin \rho(x - \zeta) q(\zeta) [\cos \rho \zeta +$$

$$+ \int_0^\zeta K_1(\zeta, \tau) \cos \rho \tau d\tau] d\zeta.$$

Отсюда следует (18). Формула (19) получается аналогично, но с использованием формулы (17). \square

Лемма 5. *Имеют место формулы*

$$\left(\psi_1(x), \int_0^x \sin \rho(x - \zeta) \cos \rho \zeta q(\zeta) d\zeta \right) = \frac{1}{\rho} (p_1(x), \cos \rho x), \quad (20)$$

$$\left(\psi_1(x), \int_0^x \sin \rho(x - \zeta) \sin \rho \zeta q(\zeta) d\zeta \right) = \frac{1}{\rho} (p_2(x), \sin \rho x), \quad (21)$$

где

$$p_j = p_{j1}(x) + p_{j2}(x) + p_{j3}(x), \quad j = 1, 2, \quad p_{11}(x) = -q(x) \int_x^1 \psi'_1(\zeta) d\zeta,$$

$$p_{12}(x) = \frac{1}{2} \psi'_1(x) \int_0^x q(\zeta) d\zeta, \quad p_{13}(x) = \frac{1}{4} \int_x^1 \psi'_1(\zeta) \left[q\left(\frac{\zeta - x}{2}\right) + q\left(\frac{\zeta + x}{2}\right) \right] d\zeta,$$

$$p_{21}(x) = p_{11}(x), \quad p_{22}(x) = p_{12}(x), \quad p_{23}(x) = \frac{1}{4} \int_x^1 \psi'_1(\zeta) \left[q\left(\frac{\zeta + x}{2}\right) - q\left(\frac{\zeta - x}{2}\right) \right] d\zeta.$$



Доказательство. Докажем формулу (20) (формула (21) доказывается аналогично). Так как $\sin \rho(x - \zeta) \cos \rho\zeta = \frac{1}{2}[\sin \rho(x - 2\zeta) + \sin \rho x]$ и $\sin \rho(x - 2\zeta) = \sin \rho x \cos 2\rho\zeta - \cos \rho x \sin 2\rho\zeta$, то

$$\left(\psi_1(x), \int_0^x \sin \rho(x - \zeta) \cos \rho\zeta q(\zeta) d\zeta \right) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 \psi_1(x) \sin \rho x \left(\int_0^x \cos 2\rho\zeta q(\zeta) d\zeta \right) dx - \int_0^1 \psi_1(x) \cos \rho x \left(\int_0^x \sin 2\rho\zeta q(\zeta) d\zeta \right) dx + \int_0^1 \psi_1(x) \sin \rho x \left(\int_0^x q(\zeta) d\zeta \right) dx \right\}. \quad (22)$$

В каждом из слагаемых в правой части (22) проведем интегрирование по частям и учтем, что $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$. Тогда правая часть (22) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho} \int_0^1 \psi_1'(x) dx \int_0^x q(\zeta) \cos \rho(x - 2\zeta) d\zeta - \frac{1}{\rho} \int_0^1 \psi_1'(x) dx \int_0^x q(\zeta) \cos \rho\zeta d\zeta + \\ + \frac{1}{2\rho} \int_0^1 \psi_1'(x) \cos \rho x dx \int_0^x q(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^x q(\zeta) \cos \rho(x - 2\zeta) d\zeta &= \frac{1}{2} \int_{-x}^x q\left(\frac{x - \tau}{2}\right) \cos \rho\tau d\tau = \frac{1}{2} \left[\int_0^x q\left(\frac{x - \tau}{2}\right) \cos \rho\tau d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{-x}^0 q\left(\frac{x - \zeta}{2}\right) \cos \rho\zeta d\zeta \right] = \frac{1}{2} \left[\int_0^x q\left(\frac{x - \tau}{2}\right) \cos \rho\tau d\tau + \int_{-x}^0 q\left(\frac{x - \zeta}{2}\right) \cos \rho\zeta d\zeta \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \left[q\left(\frac{x - \tau}{2}\right) + q\left(\frac{x + \tau}{2}\right) \right] \cos \rho\tau d\tau, \end{aligned}$$

то для первого слагаемого в (23) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho} \int_0^1 \psi_1'(x) dx \int_0^x q(\zeta) \cos \rho(x - 2\zeta) d\zeta &= \frac{1}{4\rho} \int_0^1 \psi_1'(x) dx \int_0^x \left[q\left(\frac{x - \tau}{2}\right) + \right. \\ &+ \left. q\left(\frac{x + \tau}{2}\right) \right] \cos \rho\tau d\tau = \frac{1}{4\rho} \int_0^1 \cos \rho x dx \int_x^1 \left[q\left(\frac{\zeta - x}{2}\right) + q\left(\frac{\zeta + x}{2}\right) \right] d\zeta = \frac{1}{\rho} (p_{13}(x), \cos \rho x). \end{aligned}$$

отсюда и из (23) следует (20). □

Лемма 6. При $\rho \in \tilde{\gamma}_n$ имеют место оценки

$$\left(\psi_1(x), \int_0^x \sin \rho(x - \zeta) F_j(\zeta, \rho) d\zeta \right) = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad j = 1, 2,$$

где $F_j(\zeta, \rho)$ из леммы 4.

Для доказательства следует изменить порядок интегрирования левой части, провести интегрирование по частям во внутреннем интеграле и учесть, что $F_j(\zeta, \rho) = O(1)$ равномерно по $\zeta \in [0, 1]$. □

Из лемм 4–6 получаем следующий результат.

Лемма 7. Если $\rho = n\pi + \mu$ и $\mu \in \tilde{\gamma}_0$, то

$$(\psi_1, z_1 - z_1^0) = \frac{1}{(n\pi + \mu)^2} [(p_1(\zeta) \cos \mu\zeta, \cos n\pi\zeta) - (p_1(\zeta) \sin \mu\zeta, \sin n\pi\zeta)] + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$



$$(\psi_1, z_2 - z_2^0) = \frac{1}{(n\pi + \mu)^3} [(p_2(\zeta) \cos \mu\zeta, \sin n\pi\zeta) + (p_2(\zeta) \sin \mu\zeta, \cos n\pi\zeta)] + O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

где оценки $O(\cdot)$ равномерны по $\mu \in \tilde{\gamma}_0$.

Лемма 8. Если $\rho = n\pi + \mu$ и $\mu \in \tilde{\gamma}_0$, то

$$(\psi_1, z_1) = \frac{1}{n\pi + \mu} [(p_3(\zeta) \cos \mu\zeta, \sin n\pi\zeta) - (p_3(\zeta) \sin \mu\zeta, \cos n\pi\zeta)], \quad (24)$$

$$(\psi_1, z_2) = \frac{1}{(n\pi + \mu)^2} [(p_4(\zeta) \cos \mu\zeta, \cos n\pi\zeta) - (p_4(\zeta) \sin \mu\zeta, \sin n\pi\zeta)], \quad (25)$$

где

$$p_3(\zeta) = -\psi_1'(\zeta) + \psi_1(\zeta)K_1(\zeta, \zeta) - \int_{\zeta}^1 \psi_1(\tau)K_{1\zeta}'(\tau, \zeta) d\tau,$$

$$p_4(\zeta) = \psi_1'(\zeta) - \psi_1(\zeta)K_2(\zeta, \zeta) + \int_{\zeta}^1 \psi_1(\tau)K_{2\zeta}'(\tau, \zeta) d\tau.$$

Доказательство. На основании формулы (16) имеем:

$$(\psi_1, z_1) = (\psi_1(\zeta), \cos \rho\zeta) + \left(\psi_1(\zeta), \int_0^{\zeta} K_1(\zeta, \tau) \cos \rho\tau d\tau \right).$$

Проводя интегрирование по частям в первом слагаемом и во втором множителе второго слагаемого, учитывая $\psi_1(0) = \psi_1(1) = 0$, получим:

$$(\psi_1, z_1) = \frac{1}{\rho} (p_3(\zeta), \sin \rho\zeta).$$

Отсюда следует (24). Формула (25) получается аналогично с использованием формулы (17) и условия $K_2(x, 0) \equiv 0$. \square

Аналогично леммам 3–5 из [5] доказываются две следующие леммы.

Лемма 9. Если $g \in C[0, 1]$ и $\rho = n\pi + \mu$, то

$$(g, z_1) = (p_5(\zeta) \cos \mu\zeta, \cos n\pi\zeta) - (p_5(\zeta) \sin \mu\zeta, \sin n\pi\zeta),$$

$$(g, z_2) = \frac{1}{n\pi + \mu} [(p_6(\zeta) \cos \mu\zeta, \sin n\pi\zeta) + (p_6(\zeta) \sin \mu\zeta, \cos n\pi\zeta)],$$

где $p_5(\zeta) = g(\zeta) + \int_{\zeta}^1 g(\tau)K_1(\tau, \zeta) d\tau$, $p_6(\zeta) = g(\zeta) + \int_{\zeta}^1 g(\tau)K_2(\tau, \zeta) d\tau$.

Лемма 10. Обозначим через $\theta(x)$ функцию $\cos x$ или $\sin x$. Пусть $f(x) \in L_2[0, 1]$ и $f(x, \mu) = f(x)\theta(\mu x)$, где $\mu \in \tilde{\gamma}_0$ и $\beta_n(\mu) = (f(x, \mu), \theta(n\pi x))$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n} |\beta_n(\mu)| \leq C \sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}},$$

где постоянная C не зависит от n_1 , n_2 и $\mu \in \tilde{\gamma}_0$.

1.3. Исследование $u_0(x, t)$

Теорема 5. Функция $u_0(x, t)$ из (12) есть классическое решение эталонной задачи (14).



Доказательство. Из (12) и (15) по теореме вычетов получаем:

$$u_0(x, t) = (\psi_1, 1)t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\psi_1(\zeta), \cos n\pi\zeta) \cos n\pi x \sin n\pi t,$$

откуда по формуле $2 \cos n\pi x \sin n\pi t = \sin n\pi(x+t) - \sin n\pi(x-t) = n\pi \int_{x-t}^{x+t} \cos n\pi\tau d\tau$, следует, что

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\Psi}(\tau) d\tau,$$

где

$$\tilde{\Psi}(x) = (\psi_1, 1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_1(\zeta), \cos n\pi\zeta) \cos n\pi x. \tag{26}$$

Так как скалярные произведения в (26) имеют оценку α_n/n , где $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$, то в силу неравенства Коши – Буняковского ряд в (26) сходится абсолютно и равномерно на всей оси и, следовательно, $\tilde{\Psi}(x) \in C(-\infty, \infty)$. Покажем, что $\tilde{\Psi}(x) \in C^1(-\infty, \infty)$. Сначала отметим, что в силу полноты в $L_2[0, 1]$ ортонормированной системы $1, \sqrt{2} \cos n\pi x, n = 1, 2, \dots$, ряд (26) сходится к $\psi_1(x)$, поэтому $\tilde{\Psi}(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0, 1]$. Так как $\tilde{\Psi}(x)$ является четной и 2-периодической, то остается убедиться, что $\tilde{\Psi}'(x)$ непрерывна в точках 0 и 1, но этот факт следует из условия $\psi_1'(0) = \psi_1'(1) = 0$. Следовательно, $u_0(x, t)$ – решение задачи (14). \square

1.4. Исследование $u_1(x, t)$

По теореме 3, учитывая, что $M_\rho f$ и $M_\rho^0 f$ являются целыми функциями по λ , имеем:

$$- \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda = \sum_{n \geq n_0} a_n(x, t),$$

где

$$a_n(x, t) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} 2 \sin \rho t [v_1(x, \rho)(\psi_1, z_1) + v_2(x, \rho)(\psi_1, z_2) - v_1^0(x, \rho)(\psi_1, z_1^0) - v_2^0(x, \rho)(\psi_1, z_2^0)] d\rho. \tag{27}$$

Лемма 11. Ряды $\sum a_{n,x}^{(j)}(x, t)$ и $\sum a_{n,t}^{(j)}(x, t)$ ($j = 0, 1, 2$) сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$ при любом $T > 0$.

Доказательство. Имеем:

$$J(x, \rho) = J_1(x, \rho) + J_2(x, \rho), \tag{28}$$

где $J(x, \rho)$ – выражение в квадратных скобках в (27),

$$J_1(x, \rho) = (v_1(x, \rho) - v_1^0(x, \rho))(\psi_1, z_1) - (v_2(x, \rho) - v_2^0(x, \rho))(\psi_1, z_2),$$

$$J_2(x, \rho) = v_1^0(x, \rho)(\psi_1, z_1 - z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(\psi_1, z_2 - z_2^0).$$

Обозначим через $\beta_n(\mu)$ любой из функционалов

$$\pm(p_j(\zeta) \cos \mu\zeta, \cos n\pi\zeta), \quad \pm(p_j(\zeta) \cos \mu\zeta, \sin n\pi\zeta),$$

$$\pm(p_j(\zeta) \sin \mu\zeta, \cos n\pi\zeta), \quad \pm(p_j(\zeta) \sin \mu\zeta, \sin n\pi\zeta), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда по лемме 7 и 8 имеем:

$$(\psi_1, z_1) = \frac{1}{n\pi + \mu} (\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)), \quad (\psi_1, z_2) = \frac{1}{(n\pi + \mu)^2} (\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)),$$



$$\begin{aligned}(\psi_1, z_1 - z_1^0) &= \frac{1}{(n\pi + \mu)^2} (\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \\(\psi_1, z_2 - z_2^0) &= \frac{1}{(n\pi + \mu)^3} (\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)) + O\left(\frac{1}{n^4}\right).\end{aligned}$$

Теперь, используя лемму 3 и очевидные оценки

$$v_{1,xj}^{0(j)}(x, \rho) = O(\rho^{j-1}), \quad v_{2,xj}^{0(j)}(x, \rho) = O(\rho^j), \quad j = 0, 1, 2,$$

из представления (28) получаем:

$$\begin{aligned}|J(x, \rho)| &= O(n^{j-2}) \frac{1}{|n\pi + \mu|} (|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|) + O(n^{j-1}) \frac{1}{|n\pi + \mu|^2} (|\beta_n(\mu)| + \\&+ |\beta_n(\mu)|) + O(n^{j-1}) \left[\frac{1}{|n\pi + \mu|^2} (|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|) + O(n^{-3}) \right] + \\&+ O(n^j) \left[\frac{1}{|n\pi + \mu|^3} (|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|) + O(n^{-4}) \right] = O(n^{j-3} \tilde{\beta}_n(\mu)) + O(n^{j-4}),\end{aligned}\tag{29}$$

где $\tilde{\beta}_n(\mu) = \sum_{n=1}^{32} |\beta_n(\mu)|$ и оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0, 1]$ и $\mu \in \tilde{\gamma}_0$. Отсюда

$$|a_{n,xj}^{(j)}(x, t)| = \int_{\tilde{\gamma}_0} O(n^{j-3}) \tilde{\beta}_n(\mu) |d\mu| + \int_{\tilde{\gamma}_0} O(n^{j-4}) |d\mu|, \quad j = 0, 1, 2.$$

Если $j = 0, 1$, то отсюда $|a_{n,xj}^{(j)}(x, t)| = O(n^{-2})$ и тем самым $\sum |a_{n,xj}^{(j)}(x, t)|$ сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$.

Далее, из (29) следует оценка

$$|a_{n,x2}^{(2)}(x, t)| = \int_{\tilde{\gamma}_0} O(n^{-1}) \tilde{\beta}_n(\mu) |d\mu|,$$

и тогда по лемме 10

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |a_{n,x2}^{(2)}(x, t)| = \int_{\tilde{\gamma}_0} \sum_{n=n_1}^{n_2} O(n^{-1}) \tilde{\beta}_n(\mu) |d\mu| = \int_{\tilde{\gamma}_0} O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}}\right) |d\mu| = O\left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}}\right),$$

где оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$. Тем самым утверждение леммы получено для рядов $\sum a_{n,xj}^{(j)}(x, t)$. Аналогично (даже проще) исследуются ряды $\sum a_{n,tj}^{(j)}(x, t)$ ($j = 0, 1, 2$). \square

Так как

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} (R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda + \sum_{n \geq n_0} a_n(x, t),$$

то из леммы 11 следует

Лемма 12. Ряд $u_1(x, t)$ допускает почленное дифференцирование дважды по x и t при $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$.

1.5. Исследование $u_2(x, t)$

По теореме 3, учитывая, что $M_\rho f$ есть целая по λ , имеем:

$$-\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda = \sum_{n \geq n_0} b_n(x, t),$$

где

$$b_n(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{2 \sin \rho t}{\rho^2 - \mu_0^2} [v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2)] d\rho.\tag{30}$$



Лемма 13. Ряды $\sum b_{n,x^j}^{(j)}(x, t)$ и $\sum b_{n,t^j}^{(j)}(x, t)$, $j = 0, 1, 2$, сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$ при любом $T > 0$.

Доказательство. Обозначим через $\beta_n(\mu)$ еще и такие функционалы

$$\pm(p_j(\zeta) \cos \mu\zeta, \cos n\pi\zeta), \quad \pm(p_j(\zeta) \sin \mu\zeta, \sin n\pi\zeta), \quad j = 5, 6.$$

Тогда по лемме 9

$$(g, z_1) = \beta_n(\mu) + \beta_n(\mu), \quad (g, z_2) = \frac{1}{n\pi + \mu}(\beta_n(\mu) + \beta_n(\mu)).$$

В силу оценок

$$v_1^{(j)}(x, \rho) = O(\rho^{j-1}), \quad v_2^{(j)}(x, \rho) = O(\rho^j), \quad j = 0, 1, 2, \quad (31)$$

легко следующих из леммы 3, для квадратной скобки $\tilde{J}(x, \rho)$ в (30) получаем:

$$\left| \tilde{J}_{x^j}^{(j)}(x, \rho) \right| = O(n^{j-1}) [|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|] + O(n^j) \frac{1}{|n\pi + \mu|} [|\beta_n(\mu)| + |\beta_n(\mu)|] = O\left(n^{j-1} \tilde{\beta}_n(\mu)\right),$$

где $\tilde{\beta}_n(\mu) = \sum_1^{40} |\beta_n(\mu)|$ и оценки $O(\cdot)$ равномерны по $x \in [0, 1]$ и $\mu \in \tilde{\gamma}_0$. Отсюда следует оценка

$$\left| b_{n,x^j}^{(j)}(x, t) \right| = \int_{\gamma_n} O\left(n^{j-3} \tilde{\beta}_n(\mu)\right) |d\mu|, \quad j = 0, 1, 2.$$

Теперь завершение доказательства проводится так же, как и в лемме 11. □

Таким образом, имеет место

Лемма 14. Ряд $u_2(x, t)$ допускает почленное дифференцирование дважды по x и t при $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$.

1.6. Классическое решение задачи (5)–(7)

Теорема 6. Формальное решение $u(x, t)$ задачи (5)–(7) является классическим решением при $\psi(x) \in C^1[0, 1]$ и выполнении условий (8).

Доказательство. Для формального решения (9) по леммам 1 и 2 в силу аналитичности $M_\rho f$ по λ имеем:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} [v_1(x, \rho)(\psi_1, z_1) + v_2(x, \rho)(\psi_1, z_2)] \times \\ & \times \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2)] \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda. \end{aligned} \quad (32)$$

На основании оценок (31) по леммам 8–10 получаем, что ряды в (32) и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием один раз по x или по t , сходятся абсолютно и равномерно (для второго слагаемого см. также доказательство леммы 11). Таким образом, процедура ускорения сходимости рядов не требуется. Поэтому $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям и условию $u(x, 0) = 0$. Покажем, что выполняется и условие $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Почленно дифференцируя в точке $t = 0$ ряд (9), получим:

$$u'_t(x, 0) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi) d\lambda. \quad (33)$$

Так как ряд (33) сходится равномерно и является разложением функции $\psi(x)$ в ряд Фурье по системе собственных и присоединенных функций (с. п. ф.) оператора L , биортогональная к которой, в силу регулярности краевых условий оператора L^* , полна в $L_2[0, 1]$, то $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Докажем теперь, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (5). По леммам 12 и 14 формальное решение на основании теоремы 2



и теоремы 5 дважды непрерывно дифференцируемо. Обозначим через M оператор $M = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Тогда

$$Mu_0(x, t) = 0. \quad (34)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} Mu_1(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) M \left((R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} \right) d\lambda = \\ &= \frac{q(x)}{2\pi i} \int_{\gamma_r} (R_\lambda \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} M \left((R_\lambda \psi_1 - R_\lambda^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} \right) d\lambda = \\ &= \frac{q(x)}{2\pi i} \int_{\gamma_r} (R_\lambda \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} M \left(J(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} \right) d\lambda, \end{aligned}$$

где $J(x, \rho)$ определено в (28). Но

$$\begin{aligned} M \left(v_j(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} \right) &= -q(x)v_j(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho}, \\ M \left(v_j^0(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Значит,

$$Mu_1(x, t) = \frac{q(x)}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda. \quad (36)$$

Теперь в силу формулы (35) и леммы 2 имеем:

$$\begin{aligned} Mu_2(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} M \left((R_\lambda g) \frac{\sin \rho t}{\rho} \right) d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} M \left([v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2)] \frac{\sin \rho t}{\rho} \right) d\lambda = \\ &= \frac{q(x)}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} [v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2)] \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda = \\ &= \frac{q(x)}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \frac{1}{\lambda - \mu_0} (R_\lambda g) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda = \frac{q(x)}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда и из (34) и (36) следует $Mu(x, t) = -q(x)u(x, t)$. □

2. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ (4)

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (37)$$

$$u'_x(0, t) + \beta u'_x(1, t) + \alpha_1 u(0, t) + \beta_1 u(1, t) = 0, \quad (38)$$

$$\alpha u(0, t) + u(1, t) = 0, \quad (39)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad (40)$$

где $q(x) \in C[0, 1]$ — комплекснозначная функция. Естественные минимальные требования для классического решения следующие:

$$\psi(x) \in C^1[0, 1], \quad \psi'(0) + \beta\psi'(1) + \alpha_1\psi(0) + \beta_1\psi(1) = \alpha\psi(0) + \psi(1) = 0. \quad (41)$$

Задача (37)–(39) с начальными условиями (1) рассмотрена в [6].



При применении метода Фурье здесь, по сравнению с задачей (5)–(7), возникают новые трудности из-за возможной кратности собственных значений, которые преодолеваются резольвентным методом.

2.1. Вспомогательные утверждения

По методу Фурье с задачей (37)–(40) связывается спектральная задача для оператора L :

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \tag{42}$$

$$U_1(y) = y'(0) + \beta y'(1) + \alpha_1 y(0) + \beta_1 y(1) = 0, \quad U_2(y) = \alpha y(0) + y(1) = 0. \tag{43}$$

Будем изучать задачу (37)–(40) при дополнительном условии: $1 + \alpha\beta \neq 0$. Это условие необходимо и достаточно для регулярности краевых условий оператора L (см. [9, с. 73]).

Теорема 7. *Собственные значения оператора L образуют две последовательности: $\lambda_n = \rho_n^2$ и $\lambda'_n = \rho_n'^2$ ($\lambda = \rho^2$, $\text{Re } \rho \geq 0$) и имеют асимптотику: $\rho_n = 2n\pi + \zeta_1 + \varepsilon_n$, $\rho'_n = 2n\pi + \zeta_2 + \varepsilon'_n$ ($n = n_0, n_0 + 1, \dots$), где $\zeta_{1,2} = -i \ln(d \pm \sqrt{d^2 - 1})$,*

$$d = -\frac{(\alpha + \beta)}{1 + \alpha\beta}, \quad \varepsilon_n = O(1), \quad \varepsilon'_n = O(1).$$

(Это известный факт, см., например, [9, с. 74].)

Мы привлекаем еще спектральную задачу для оператора L_0 :

$$L_0 = -y''(x), \tag{44}$$

$$U_1^0(y) = y'(0) + \beta y'(1) = 0, \quad U_2^0(y) = \alpha y(0) + y(1), \tag{45}$$

который участвует в формировании эталонной смешанной задачи.

Теорема 8. *Для резольвенты R_λ оператора L , определенного в (42), (43), и резольвенты R_λ^0 оператора L_0 , определенного в (44), (45), имеют место формулы*

$$R_\lambda f = v_1(x, \rho)(f, z_1) + v_2(x, \rho)(f, z_2) + (M_\rho f)(x), \tag{46}$$

$$R_\lambda^0 f = v_1^0(x, \rho)(f, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(f, z_2^0) + (M_\rho^0 f)(x),$$

где

$$\begin{aligned} v_1(x, \rho) &= \frac{1}{\Delta(\rho)} \{ [U_2(z_2) (\beta z_2'(1, \rho) + \beta_1 z_2(1, \rho)) - U_1(z_2) z_2(1, \rho)] z_1(x, \rho) + \\ &+ [U_1(z_1) z_2(1, \rho) - U_2(z_1) (\beta z_2'(1, \rho) + \beta_1 z_1(1, \rho))] z_2(x, \rho) \}, \\ v_2(x, \rho) &= \frac{1}{\Delta(\rho)} \{ [-U_2(z_2) (\beta z_1'(1, \rho) + \beta_1 z_1(1, \rho)) + U_1(z_2) z_1(1, \rho)] z_1(x, \rho) + \\ &+ [-U_1(z_1) z_1(1, \rho) + U_2(z_1) (\beta z_1'(1, \rho) + \beta_1 z_1(1, \rho))] z_2(x, \rho) \}, \end{aligned}$$

$\Delta(\rho) = U_1(z_1)U_2(z_2) - U_1(z_2)U_2(z_1)$, $\Delta(\rho) \neq 0$, v_1^0, v_2^0 — те же, что и v_1, v_2 , но взяты для оператора L_0 ; $z_1, z_2, M_\rho, z_1^0, z_2^0, M_\rho^0$ — те же, что и в п. 1; для $\Delta_0(\rho)$ из определения $v_j^0(x, \rho)$ справедлива формула $\Delta_0(\rho) = U_1^0(z_1^0)U_2^0(z_2^0) - U_1^0(z_2^0)U_2^0(z_1^0) = -[\alpha + \beta + (1 + \alpha\beta) \cos \rho]$, $\Delta_0(\rho) \neq 0$, $\lambda = \rho^2$, $\text{Re } \rho \geq 0$. Этот результат приведен в теоремах 3, 4 из [6].

Обозначим теперь через $\tilde{\gamma}_n$ объединение двух непересекающихся окружностей $\{\rho \mid |\rho - (2n\pi + \zeta_j)| = \delta\}$ ($j = 1, 2$), если $\zeta_1 \neq \zeta_2$, или один такой контур, если $\zeta_1 = \zeta_2$, $\delta > 0$ достаточно мало, через γ_n обозначим образ $\tilde{\gamma}_n$ в λ — плоскости, число n_0 (см. теорему 7) и $r > 0$ таковы, что контуры γ_r и γ_n ($n \geq n_0$) удовлетворяют аналогичным условиям из п. 1 с той лишь разницей, что теперь при $n \geq n_0$ внутри γ_n находятся λ_n и λ'_n (которые могут совпадать).

Нам потребуются некоторые результаты, аналогичные доказанным в п. 1. Лемма 1 имеет место и для $\psi(x)$, удовлетворяющей условиям (41), и в ее формулировке $\psi_2(x) \in D_L$, где теперь L — оператор, определенный в (42), (43); дословно, уже для резольвенты оператора L из (42), (43) доказывается и лемма 2. Сохраняется также и лемма 3 — этот результат доказан в [6, лемма 2]. Леммы 7–9 имеют место и для случая, когда $\rho = 2n\pi + \mu$ ($\mu \in \tilde{\gamma}_0$ — объединение двух окружностей). В этом



случае все равенства в формулировках сохраняются, а доказательства дословно повторяются, если в них параметр n заменить на $2n$. Именно так в этом пункте мы понимаем формулировки этих лемм. Лемма 10 имеет место и для функционалов $\eta_n(\mu) = (f(x, \mu), \theta(2n\pi x))$, где $\mu \in \tilde{\gamma}_0$. Этот результат доказан в [6, лемма 5]. Леммы 11, 13 также сохраняются, а их доказательства дословно повторяются с использованием лемм 7–10 (в новой редакции), если теперь в леммах 11, 13 под $\tilde{\gamma}_n$, $v_j(x, \rho)$, $v_j^0(x, \rho)$ понимать величины, определенные в этом пункте (функционалы $\beta_n(\mu)$ в доказательствах этих лемм определяются аналогично с той лишь разницей, что в них параметр n из $\sin n\pi\zeta$, $\cos n\pi\zeta$ заменяется на $2n$). Для формального решения сохраняется формула (9) и представление (11), т. е. $u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t)$; $u_0(x, t)$ есть формальное решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad (47)$$

$$u'_x(0, t) + \beta u'_x(1, t) = \alpha u(0, t) + u(1, t) = 0; \quad (48)$$

для $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ в силу лемм 11 и 13 имеют место леммы 12 и 14.

Лемма 15. Если $\rho = 2n\pi + \mu$, то

$$\begin{aligned} (\psi_1, z_1^0) &= -\frac{1}{2n\pi + \mu} [(\psi'_1(\zeta) \cos \mu\zeta, \sin 2n\pi\zeta) + (\psi'_1(\zeta) \sin \mu\zeta, \cos 2n\pi\zeta)], \\ (\psi_1, z_2^0) &= \frac{1}{(2n\pi + \mu)^2} [(\psi'_1(\zeta) \cos \mu\zeta, \cos 2n\pi\zeta) - (\psi'_1(\zeta) \sin \mu\zeta, \sin 2n\pi\zeta)]. \end{aligned}$$

Для доказательства следует провести интегрирование по частям в (ψ_1, z_j^0) . □

2.2. Исследование $u_0(x, t)$

Положим $\Omega_\rho(\psi_1)(x) = v_1^0(x, \rho)(\psi_1, z_1^0) + v_2^0(x, \rho)(\psi_1, z_2^0)$.

Лемма 16. Имеют место формулы

$$\int_\gamma (R_\lambda^0 \psi_1)(x) d\lambda = \int_\gamma \Omega_\rho(\psi_1)(x) d\lambda, \quad (49)$$

$$\int_\gamma (R_\lambda^0 \psi_1)(x) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda = \int_\gamma \Omega_\rho(\psi_1)(x) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda, \quad (50)$$

где γ есть либо γ_r , либо γ_n при $n \geq n_0$.

Эта лемма очевидна, поскольку $(M_\rho^0 \psi_1)(x)$ — целая по λ . □

Обозначим

$$\omega_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \Omega_\rho(\psi_1)(x) d\lambda, \quad \omega(x) = \sum_{n \geq n_0} \omega_n(x).$$

Лемма 17. Ряд $\sum_{n \geq n_0} \omega_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке из $(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Обозначим через $\eta_n(\mu)$ любой из функционалов:

$$\begin{aligned} \pm(\psi'_1(\zeta) \cos \mu\zeta, \sin 2n\pi\zeta), & \quad \pm(\psi'_1(\zeta) \sin \mu\zeta, \cos 2n\pi\zeta), \\ \pm(\psi'_1(\zeta) \cos \mu\zeta, \cos 2n\pi\zeta), & \quad \pm(\psi'_1(\zeta) \sin \mu\zeta, \sin 2n\pi\zeta). \end{aligned}$$

Тогда при $\rho = 2n\pi + \mu$ по лемме 15 для $\mu \in \tilde{\gamma}_0$ имеем:

$$(\psi_1, z_1^0) = \frac{1}{2n\pi + \mu} (\eta_n(\mu) + \eta_n(\mu)), \quad (\psi_1, z_2^0) = \frac{1}{(2n\pi + \mu)^2} (\eta_n(\mu) + \eta_n(\mu)).$$

Поэтому на основании очевидных оценок: $v_1^0(x, \rho) = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$, $v_2^0(x, \rho) = O(1)$ получаем

$$\left| \int_{\gamma_n} \Omega_\rho(\psi_1)(x) d\lambda \right| = \int_{\tilde{\gamma}_0} O\left(\frac{1}{n} \tilde{\eta}_n(\mu)\right) |d\mu|,$$



где $\tilde{\eta}_n(\mu) = \sum_1^8 |\eta_n(\mu)|$. Значит, по лемме 10 (в которой функционалы обозначены через $\eta_n(\mu)$), т. е. $\eta_n(\mu) = (f(x, \mu), \theta(2n\pi x))$,

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \left| \int_{\gamma_n} \Omega_\rho(\psi_1)(x) d\lambda \right| = O \left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n}} \right) \int_{\tilde{\gamma}_0} |d\mu| = O \left(\sqrt{\sum_{n=n_1}^{n_2} \frac{1}{n^2}} \right).$$

Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \Omega_\rho(\psi_1)(x) d\lambda$. □

Обозначим

$$\tilde{\Psi}_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \Omega_\rho(\psi_1)(x) d\lambda + \omega(x).$$

Лемма 18. Функция $\tilde{\Psi}_1(x) \in C(-\infty, \infty)$ и $\tilde{\Psi}_1(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0, 1]$.

Доказательство. По лемме 17 $\tilde{\Psi}_1(x) \in (-\infty, \infty)$. Пусть $x \in [0, 1]$. На основании формулы (49) получаем:

$$\tilde{\Psi}_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda^0 \psi_1)(x) d\lambda.$$

Так как этот ряд сходится равномерно (см. доказательство леммы 17), то в силу полноты в $L_2[0, 1]$ системы с.п.ф. оператора L_0^* (оператор L_0 определен в (44), (45)) $\tilde{\Psi}_1(x) = \psi_1(x)$. □

Лемма 19. Имеет место формула

$$\Omega_\rho(\psi_1)(x) \frac{\sin \rho t}{\rho} = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Omega_\rho(\psi_1)(\zeta) d\zeta. \tag{51}$$

Доказательство. Имеем:

$$\cos \rho x \frac{\sin \rho t}{\rho} = \frac{1}{2\rho} [\sin \rho(x+t) - \sin \rho(x-t)], \quad \frac{\sin \rho x \sin \rho t}{\rho} = \frac{1}{2\rho^2} [\cos \rho(x-t) - \cos \rho(x+t)].$$

Обозначим через $v_1(\rho)$ первую квадратную скобку из определения $v_1(x, \rho)$ и через $v_2(\rho)$ — вторую. И пусть $F(\zeta, \rho) = \frac{1}{2\Delta_0(\rho)} \left(v_1(\rho) \frac{\sin \rho \zeta}{\rho} - v_2(\rho) \frac{\cos \rho \zeta}{\rho^2} \right)$.

Легко получаем

$$\begin{aligned} v_1^0(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} &= F(x+t, \rho) - F(x-t, \rho) = \int_{x-t}^{x+t} F'_\zeta(\zeta, \rho) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\Delta_0(\rho)} \int_{x-t}^{x+t} \left(v_1(\rho) \cos \rho \zeta + v_2(\rho) \frac{\sin \rho \zeta}{\rho} \right) d\zeta = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_1^0(\zeta, \rho) d\zeta. \end{aligned} \tag{52}$$

Аналогично получается $v_2^0(x, \rho) \frac{\sin \rho t}{\rho} = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_2^0(\zeta, \rho) d\zeta$.

Отсюда и из (52) следует (51). □

Аналогично лемме 10 из [6] докажем следующий результат.

Лемма 20. Имеют место формулы

$$\tilde{\Psi}_1(-x) = \frac{1}{1 + \alpha\beta} \left[(1 - \alpha\beta) \tilde{\Psi}_1(x) - 2\beta \tilde{\Psi}_1(1-x) \right], \tag{53}$$

$$\tilde{\Psi}_1(1+x) = \frac{1}{1 + \alpha\beta} \left[-2\alpha \tilde{\Psi}_1(x) + (\alpha\beta - 1) \tilde{\Psi}_1(1-x) \right]. \tag{54}$$



Доказательство. По формуле (50) и лемме 19 получаем:

$$\int_{\gamma} (R_{\lambda}^0 \psi_1) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda = \int_{\gamma} \Omega_{\rho}(\psi_1)(x) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \int_{x-t}^{x+t} \Omega_{\rho}(\psi_1)(\zeta) d\zeta d\lambda,$$

где γ есть либо γ_r , либо γ_n ($n \geq n_0$). Тогда

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \int_{x-t}^{x+t} \Omega_{\rho}(\psi_1)(\zeta) d\zeta d\lambda. \quad (55)$$

На основании леммы 17 ряд в (55) и ряд, полученный из него почленным дифференцированием один раз, сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$ для любого $T > 0$, и, кроме того,

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \left(\int_{\gamma_r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) \Omega_{\rho}(\psi_1)(\zeta) d\lambda d\zeta = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\Psi}_1(\zeta) d\zeta. \quad (56)$$

Отсюда в силу (48) получим:

$$\tilde{\Psi}_1(t) - \tilde{\Psi}_1(-t) + \beta \left(\tilde{\Psi}_1(1+t) - \tilde{\Psi}_1(1-t) \right) = 0, \quad (57)$$

$$\alpha \int_{-t}^t \tilde{\Psi}_1(\zeta) d\zeta + \int_{1-t}^{1+t} \tilde{\Psi}_1(\zeta) d\zeta = 0. \quad (58)$$

Дифференцируя (58), найдем $\alpha \left(\tilde{\Psi}_1(t) + \tilde{\Psi}_1(-t) \right) + \tilde{\Psi}_1(1+t) + \tilde{\Psi}_1(1-t) = 0$. Отсюда и из (57) получаем (53) и (54). \square

Лемма 21. Функция $\tilde{\Psi}_1(x) \in C^1(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Формулы (53) и (54) дают однозначное продолжение $\tilde{\Psi}_1(x)$ на всю ось x ее значений на $[0, 1]$. По лемме 18 $\tilde{\Psi}_1(x) \in C^1[0, 1]$. Тогда по лемме 20 $\tilde{\Psi}_1(x)$ непрерывно дифференцируема всюду, кроме, быть может, точек $x = n$, где n — целое. Для доказательства непрерывности $\tilde{\Psi}_1(x)$ в целых точках продифференцируем (53) и (54):

$$-\tilde{\Psi}'_1(-x) = \frac{1}{1+\alpha\beta} \left[(1-\alpha\beta)\tilde{\Psi}'_1(x) + 2\beta\tilde{\Psi}'_1(1-x) \right], \quad (59)$$

$$\tilde{\Psi}'_1(1+x) = \frac{1}{1+\alpha\beta} \left[-2\alpha\tilde{\Psi}'_1(x) + (1-\alpha\beta)\tilde{\Psi}'_1(1-x) \right]. \quad (60)$$

Так как по лемме 18 $\tilde{\Psi}_1(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0, 1]$ и $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$, то из (59), (60) следует, что $\tilde{\Psi}'_1(x)$ непрерывна в точках 0 и 1. Теперь, предполагая, что этот факт имеет место и для всех $x = -n, -n+1, \dots, n+1$, по индукции из равенства (59), записанного для $x = (n+1) \pm 0$, получаем непрерывность $\tilde{\Psi}'_1(x)$ при $x = -(n+1)$, а из (60), записанного в этих точках, — непрерывность $\tilde{\Psi}'_1(x)$ при $x = n+2$. \square

Теорема 9. Функция $u_0(x, t)$ есть классическое решение эталонной задачи, определенной условиями (47), (48).

Доказательство. Из (56) по лемме 21 следует, что $u_0(x, t)$ удовлетворяет уравнению струны. Далее из (56) следует, что $u_0(x, 0) = 0$, $u'_{0x}(x, 0) = \psi_1(x)$ при $x \in [0, 1]$. Наконец, из (58) следует, что $\alpha u_0(0, t) + u_0(1, t) = 0$ и из (57) следует, что $u'_{0x}(0, t) + \beta u'_{0x}(1, t) = 0$. \square

2.3. Классическое решение задачи (37)–(40)

Теорема 10. Формальное решение $u(x, t)$ задачи (37)–(40) является классическим решением при $\psi(x) \in C^1[0, 1]$ и выполнении условий (41).



Доказательство. Для формального решения в силу формул (13) и (46) имеем представление (32), т. е.

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} [v_1(x, \rho)(\psi_1, z_1) + v_2(x, \rho)(\psi_1, z_2)] \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [v_1(x, \rho)(g, z_1) + v_2(x, \rho)(g, z_2)] \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda. \quad (61)$$

В силу оценок $v_{1,x^j}^{(j)}(x, \rho) = O(\rho^{j-1})$, $v_{2,x^j}^{(j)}(x, t) = O(\rho^j)$ ($j = 0, 1$), следующих из леммы 3, по леммам 8–10 получаем, что ряды в (61) и ряды, получающиеся из них почленным дифференцированием один раз по x и t , сходятся абсолютно и равномерно. Поэтому $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям и условию $u(x, 0) = 0$. Проверка условия $u'_t(x, 0) = \psi(x)$ проводится так же, как и в доказательстве теоремы 6, учитывая при этом полноту системы с.п.ф. оператора L^* . Так же, как и в теореме 6, доказывается для $u(x, t)$ справедливость уравнения (37). \square

Результаты В. П. Курдюмова получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014К), результаты А. П. Хромова получены при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

Библиографический список

1. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М. : Наука, 1983. 432 с.
2. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
3. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. 112 с.
4. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 51–63. DOI: 10.7868/S0044466915020052.
5. Корнев В. В., Хромов А. П. Резольвентный подход к методу Фурье в одной смешанной задаче для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 4. С. 621–630. DOI: 10.7868/S0044466915040079.
6. Корнев В. В., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье для волнового уравнения в несамосопряженном случае // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 7. С. 1156–1167.
7. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 2. С. 151–154.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1971. 538 с.
9. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.
10. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. М. : Наука, 1964. 462 с.
11. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та, 1994. 160 с.
12. Марченко В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 392 с.

Justification of Fourier Method in a Mixed Problem for Wave Equation with Non-zero Velocity

A. P. Gurevich¹, V. P. Kurdyumov², A. P. Khromov³

¹Gurevich Alexandr Petrovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, GurevichAP@mail.ru

²Kurdyumov Vitalii Pavlovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, Kurdyumov47@yandex.ru

³Khromov Avgust Petrovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, KhromovAP@info.sgu.ru

In the paper, using contour integration of the resolvent of the corresponding spectral problem operator, justification of Fourier method in two mixed problems for wave equation with trivial initial function and non-zero velocity is given. The boundary conditions of these problems, together with fixed endpoint conditions, embrace all cases of mixed problems with the same initial conditions for which the corresponding spectral operators in Fourier method have regular boundary conditions. The problems are considered under minimal requirements on initial data. A. N. Krylov's idea of accelerating Fourier series convergence is essentially employed.

Key words: Fourier method, formal solution, spectral problem, resolvent.

The results by V. P. Kurdyumov have been obtained in the framework of the national task of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.1520.2014K), the results by A. P. Khromov have been supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00238).



References

1. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [The main tasks of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1983, 432 p. (in Russian).
2. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoi fiziki, imeiushchikh prilozheniia v tekhnicheskikh voprosakh* [On some differential equations of mathematical physics with applications in technical matters]. Leningrad, GITTL, 1950, 368 p. (in Russian).
3. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991, 112 p. (in Russian).
4. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. The resolvent approach for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 2, pp. 227–239. DOI: 10.1134/S0965542515020050.
5. Kornev V. V., Khromov A. P. Resolvent approach to the Fourier method in a mixed problem for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 4, pp. 618–627. DOI: 10.1134/S0965542515040077.
6. Kornev V. V., Khromov A. P. A resolvent approach in the Fourier method for the wave equation: The non-selfadjoint case. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 7, pp. 1138–1149. DOI: 10.1134/S0965542515070088.
7. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial-boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 783–786.
8. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nykh uravneniyam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1971, 538 p. (in Russian).
9. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. New York, Ungar, 1967; Moscow, Nauka, 1969, 828 p.
10. Rasulov M. L. *Metod konturnogo integrala* [The method of the contour integral]. Moscow, Nauka, 1964, 462 p. (in Russian).
11. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, Rostov Univ. Press, 1994, 106 p. (in Russian).
12. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville Operators and Applications*. Kiev, Naukova Dumka, 1977, 332 p. (in Russian).

УДК 517.54

О НОВОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С УСЛОВИЕМ НА ЛУЧЕ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО ИНДЕКСА

Р. Б. Салимов

Салимов Расих Бахтигареевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, salimov.rsb@gmail.com

Для решения однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом и условием на луче предлагается новый подход, основанный на приведении рассматриваемой задачи к соответствующей задаче с условием на действительной оси и конечным индексом. Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в комплексной плоскости z , разрезанной по положительной действительной полуоси L^+ , если выполняется краевое условие $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$, $t \in L^+$, где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ – предельные значения функции $\Phi(z)$, при $z \rightarrow t$ соответственно слева и справа, коэффициент $G(t)$ – заданная функция, для аргумента которой справедливо представление $\arg G(t) = \nu^- t^\rho + \nu(t)$, $t \in L^+$, здесь ν^- , ρ – заданные числа, $\nu^- > 0$, $1/2 < \rho < 1$, причём $\ln |G(t)|$, $\nu(t)$ – функции, удовлетворяющие условию Гёльдера. Принимается, что $G(t) = 1$ при $t \in (-\infty, 0)$. Для устранения бесконечного разрыва $\arg G(t)$ используются функции $E^+(z) = e^{(\alpha+i\beta)z^\rho}$, $0 \leq \arg z \leq \pi$, $E^-(z) = e^{(\alpha-i\beta)z^\rho}$, $-\pi \leq \arg z \leq 0$, путём соответствующего подбора действительных чисел α, β .

Ключевые слова: краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-29-33

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D – область в плоскости комплексного переменного, границей которой служит L^+ – положительная часть действительной оси. Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и



ограниченную в области D , если её граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L^+, \quad (1)$$

где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ — предельные значения функции $\Phi(z)$ при $z \rightarrow t$ слева и справа, когда $\text{Im}(z) > 0$ и $\text{Im}(z) < 0$ соответственно, коэффициент $G(t)$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям

- 1) $\ln |G(t)|$ удовлетворяет условию Гёльдера на L^+ — условию H_{L^+} ($\ln |G(t)| \in H_{L^+}$);
- 2) для $\arg G(t)$ справедливо представление

$$\arg G(t) = \nu^- t^\rho + \nu(t), \quad t \in L^+, \quad (2)$$

где ν^- , ρ — заданные числа, $\nu^- > 0$, $1/2 < \rho < 1$, $\nu(t)$ — заданная функция, $\nu(t) \in H_{L^+}$.

Рассматриваемая задача является задачей с бесконечным индексом, так как $\arg G(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Аналогичная задача рассмотрена в статье [1], в которой краевое условие задавалось на всей действительной оси $L = L^- \cup L^+$, где L^- — отрицательная часть действительной оси L .

Значения искомой функции $\Phi(z)$ будем обозначать $\Phi^+(z) = \Phi(z)$ при $\text{Im}(z) > 0$, $\Phi^-(z) = \Phi(z)$ при $\text{Im}(z) < 0$.

Тогда для предельных значений этих функций при $z \rightarrow t < 0$ будем иметь

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t),$$

следовательно, как и в [2, с. 440], приходим к заключению, что искомые функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, удовлетворяют краевому условию:

$$\Phi^+(t) = G_0(t)\Phi^-(t), \quad t \in L, \quad (3)$$

где

$$\begin{cases} G_0(t) = G(t), & t \in L^+, \\ G_0(t) = 1, & t \in L^-. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, решение задачи (1) приводится к решению задачи (3), рассмотренной в статье [1].

В настоящей работе используются сведения, приведённые в последней статье [1], и её результаты. Там же указаны основные этапы развития изучаемого научного направления.

Будем считать, что

$$\arg G_0(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in L^-. \quad (5)$$

Для простоты предположим, что слагаемое $\nu(t)$ формулы (2) удовлетворяет условиям

$$\nu(0) = \nu(0+0) = 0, \quad \nu(+\infty) = 0, \quad (6)$$

кроме того,

$$G(0) = |G(0+0)| = 1, \quad |G(+\infty)| = 1. \quad (7)$$

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Считая α , β действительными числами, введем в рассмотрение функции

$$\begin{cases} E^+(z) = e^{(\alpha+i\beta)z^\rho}, & 0 \leq \arg z \leq \pi, \\ E^-(z) = e^{(\alpha-i\beta)z^\rho}, & -\pi \leq \arg z \leq 0, \end{cases} \quad (8)$$

аналитические и однозначные в полуплоскостях соответственно D^+ , D^- , понимая под $\arg z$ ветвь, непрерывную в соответствующей полуплоскости. Для точки $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, области D^+ (когда $z = re^{-i\theta} \in D^-$) имеем:

$$\begin{aligned} |E^+(re^{i\theta})| &= |E^-(re^{-i\theta})| = e^{(\alpha \cos \rho\theta - \beta \sin \rho\theta)r^\rho}, \\ \arg E^+(re^{i\theta}) &= -\arg E^-(re^{-i\theta}) = (\alpha \sin \rho\theta + \beta \cos \rho\theta)r^\rho. \end{aligned} \quad (9)$$



Отсюда при $\theta = 0$, когда $z = t > 0$, получим:

$$\frac{E^+(t)}{E^-(t)} = e^{2i\beta t^\rho}, \quad t > 0, \quad (10)$$

при $\theta = \pi$, когда $z = t < 0$, будем иметь:

$$\frac{E^+(t)}{E^-(t)} = e^{2i(\alpha \sin \rho\pi + \beta \cos \rho\pi)|t|^\rho}, \quad t < 0. \quad (11)$$

Краевое условие (3) запишем так:

$$\Phi^+(t)E^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t)E^-(t), \quad t \in L, \quad (12)$$

где

$$G_1(t) = |G_0(t)|e^{i \arg G_0(t)} \frac{E^+(t)}{E^-(t)}. \quad (13)$$

Принимая во внимание (2), (4), (5), (10), (11), постоянные α, β формул (8) выберем так, чтобы

$$2\beta = -\nu^-, \quad 2(\alpha \sin \rho\pi + \beta \cos \rho\pi) = 0. \quad (14)$$

Тогда будем иметь

$$\beta = -\frac{\nu^-}{2}, \quad \alpha = \frac{\nu^- \cos \rho\pi}{2 \sin \rho\pi}. \quad (15)$$

При этом формула (13) примет вид

$$G_1(t) = \begin{cases} |G(t)|e^{i\nu(t)}, & t > 0, \\ 1, & t < 0. \end{cases}$$

В силу условий (6) и (7) функция $G_1(t)$ непрерывна в точках $t = 0, t = +\infty$ и удовлетворяет условию H_L . Далее находим аналитическую в области D функцию [2, с. 119]:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln G_1(\tau) \frac{d\tau}{\tau - z}$$

(здесь $\ln G_1(\tau) = 0$ на L^-) и определяем аналитическую в области D функцию $\chi(z) = e^{\Gamma(z)}$, отличную от нуля всюду в области D , включая L^+ . Обозначая $\Gamma^+(z) = \Gamma(z)$ при $z \in D^+$, $\Gamma^-(z) = \Gamma(z)$ при $z \in D^-$, здесь имеем $\chi^\pm(z) = e^{\Gamma^\pm(z)}$.

Найденные функции $\chi^+(z), \chi^-(z)$ удовлетворяют краевому условию $\chi^+ = G_1(t)\chi^-(t), t \in L$. Поэтому краевое условие (12) можно представить в виде

$$\frac{\Phi^+(t)E^+(t)}{\chi^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)E^-(t)}{\chi^-(t)}, \quad t \in L.$$

Отсюда видно, что функции $\frac{\Phi^+(z)E^+(z)}{\chi^+(z)}, \frac{\Phi^-(z)E^-(z)}{\chi^-(z)}$ образуют целую функцию $F(z)$, причём

$$\frac{\Phi^+(z)E^+(z)}{\chi^+(z)} = F(z), \quad \frac{\Phi^-(z)E^-(z)}{\chi^-(z)} = F(z), \quad (16)$$

где соответственно $\text{Im } z \geq 0, \text{Im } z \leq 0$.

Поступая, как и в статье [1], покажем, что порядок ρ_F вышеуказанной целой функции $F(z)$ не превышает ρ : $\rho_F \leq \rho$. С учётом (15) соотношение (9) запишем так

$$|E^+(re^{i\theta})| = |E^-(re^{-i\theta})| = e^{r^\rho \nu^- \cos \rho(\pi-\theta)/(2 \sin \rho\pi)}, \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (17)$$

Из последней формулы при $\theta = 0$, когда $r = t > 0$, будем иметь $|E^+(t)| = |E^-(t)| = e^{t^\rho \nu^- \cos \rho\pi/(2 \sin \rho\pi)}, t > 0$, при $\theta = \pi$, когда $re^{i\pi} = -|t| = t < 0$, получим

$$|E^+(t)| = |E^-(t)| = e^{|t|^\rho \nu^-/(2 \sin \rho\pi)}, \quad t < 0.$$



Учитывая эти два соотношения на основании формул (16), в которых $\Phi^\pm(z)$, $1/\chi^\pm(z)$ — функции, ограниченные в области D^\pm , включая её границу L^\pm , приходим к неравенствам

$$|F(t)| < C e^{t^\rho \nu^- \cos \rho\pi / (2 \sin \rho\pi)}, \quad t > 0, \quad (18)$$

$$|F(t)| < C e^{|t|^\rho \nu^- / (2 \sin \rho\pi)}, \quad t < 0, \quad (19)$$

где $C = \text{const} > 0$, которым должна удовлетворять целая функция $F(z)$ формул (16).

Так как $1/2 < \rho < 1$ и в интервале $0 < \theta < \pi$ функция $\cos \rho(\pi - \theta)$ возрастает от $\cos \rho\pi < 0$ до 1, то найдётся значение $\theta = \theta_\rho$, для которого $\cos \rho(\pi - \theta_\rho) = 0$ и $\theta_\rho = \pi - \frac{\pi}{2\rho}$; при этом согласно формуле (17) имеем

$$|E^+(re^{i\theta_\rho})| = |E^-(re^{-i\theta_\rho})| = 1.$$

Следовательно, на основании (16) получим неравенства

$$|F(re^{i\theta_\rho})| < C, \quad |F(re^{-i\theta_\rho})| < C, \quad r > 0, \quad (20)$$

где C — вышеуказанная постоянная, которым также должна удовлетворять функция $F(z)$.

В силу второго соотношения (14) и формулы (11) имеем:

$$E^+(t) = E^-(t) \quad \text{при} \quad t < 0,$$

в то время как при $t > 0$ функции $E^+(t)$, $E^-(t)$ связаны соотношением (10), в котором $\beta = -\nu^-/2$. Это означает, что функции $E^+(z)$, $E^-(z)$ формулы (8), в которой постоянные α , β определены соотношениями (15), образуют функцию $E(z)$, аналитическую в области D .

Учитывая это и принимая во внимание равенства (16), придём к заключению, что искомая функция $\Phi(z)$ определяется формулой

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{E(z)} F(z), \quad (21)$$

в которой $F(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_F \leq \rho$, удовлетворяющая условиям (18)–(20).

Если $\rho_F < \rho$, то содержащий отрицательную часть действительной оси угол между лучами $\theta = \theta_\rho$, $\theta = -\theta_\rho$, равный π/ρ , будет меньше π/ρ_F : $\pi/\rho < \pi/\rho_F$.

Так как на сторонах этого угла имеют места неравенства (20), то согласно теореме Фрагмена–Линделёфа [3, с. 255] модуль $|F(z)|$ ограничен той же постоянной C и внутри угла:

$$|F(z)| < C, \quad z \in D_\rho,$$

где D_ρ — вышеуказанный угол.

Ясно, что аналогичное неравенство будет справедливо для содержащего положительную часть действительной оси угла между вышеуказанными лучами, разворот которого меньше $\pi < \pi/\rho$.

Таким образом, во всей плоскости z выполняется неравенство $|F(z)| < C$, поэтому $F(z) = \text{const}$. Но согласно (18) $|F(z)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, $F(z) = 0$ всюду на плоскости z , когда $\rho_F < \rho$, и формула (21) даёт не нулевое решение рассматриваемой задачи, когда в ней $F(z)$ означает произвольную целую функцию порядка ρ .

Нетрудно убедиться в том, что такие ненулевые решения существуют. Для этого достаточно показать, что существуют целые функции порядка ρ ($1/2 < \rho < 1$), удовлетворяющие неравенствам (18)–(20).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Если краевая задача (1) имеет ограниченное решение $\Phi(z)$, то оно представляется формулой (21), в которой $F(z)$ есть произвольная целая функция порядка ρ , удовлетворяющая условиям (18)–(20).*

Имеет место и обратное утверждение.



Теорема 2. Если $F(z)$ — любая целая функция порядка ρ , удовлетворяющая условиям (18)–(20), то ограниченное решение краевой задачи (1) определяется формулой (21).

Последняя теорема доказывается аналогично тому, как это сделано для соответствующей теоремы работы [1].

Замечание. Условия (6), (7) не ограничивают общности решения задачи. При их невыполнении решение задачи (1) с помощью методов, аналогичных указанным в книге [2, с. 428–436], можно привести к рассмотренному в данной статье случаю с новой искомой функцией, для которой точка $z = 0$ может оказаться особой и в ней функция может обращаться в бесконечность степенного порядка при «неудачном» задании $v(t)$ в окрестности точки $t = 0$ [4, с. 114, условие $-1 < \varphi(t_0) \leq 0$].

В случае, когда для точки $t = 0$ условия (6), (7) не выполняются, решение (21) остаётся в силе, его поведение вблизи точки $z = 0$ легко установить непосредственно, учитывая, что функция $\chi(z) = e^{\Gamma(z)}$ выражается через интеграл типа Коши, плотность которого $\ln G_1(t)$ в точке $t = 0$ имеет разрыв первого рода, и для указанного интеграла справедливо известное представление вблизи точки $z = 0$ [2, с. 68].

Библиографический список

1. Салимов Р. Б., Карабашева Э. Н. Новый подход к решению краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 155–164.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций : в 2 т. Т. 2 М. : Наука, 1968. 624 с.
4. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986. 239 с.

About New Approach to Solution of Riemann's Boundary Value Problem with Condition on the Half-line in Case of Infinite Index

R. B. Salimov

Salimov Rasikh Bakhtigareevich, Kazan State University of Architecture and Engineering, 1, Zelenaya st., Kazan, Russia, 420043, salimov.rsb@gmail.com

To solve a homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index and condition on the half-line we propose a new approach based on the reduction of the considered problem to the corresponding task with the condition on the real axis and finite index. It is required to define a function $\Phi(z)$, analytic and bounded in the complex plane z , cut down on positive real semi-axis L^+ , if the edge condition $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$, $t \in L^+$ is fulfilled, where $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ are limit values of the function $\Phi(z)$, as $z \rightarrow t$ correspondingly on the left and on the right, $G(t)$ is a given function, for which argument $\arg G(t) = \nu^- t^\rho + \nu(t)$, $t \in L^+$ holds, here ν^- , ρ are given numbers, $\nu^- > 0$, $\frac{1}{2} < \rho < 1$, and $\ln |G(t)|$, $\nu(t)$ are functions which satisfy the Holder condition. It is admitted that $G(t) = 1$ at $t \in (-\infty, 0)$. The functions $E^+(z) = e^{(\alpha+i\beta)z^\rho}$, $0 \leq \arg z \leq \pi$, $E^-(z) = e^{(\alpha-i\beta)z^\rho}$, $-\pi \leq \arg z \leq 0$ are used to avoid infinite gap of the $\arg G(t)$, by the selection of real numbers α, β .

Key words: Riemann boundary value problem, analytic functions, infinite index.

References

1. Salimov R. B., Karabasheva E. N. The new approach to solving the Riemann boundary value problem with infinite index. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 155–165 (in Russian).
2. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka, 1977, 640 p. (in Russian).
3. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions*, in 2 vol. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1968, 624 p. (in Russian).
4. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka, 1986, 239 p. (in Russian).



УДК 517.51

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

М. С. Султанахмедов

Султанахмедов Мурад Салихович, научный сотрудник, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, sultanakhmedov@gmail.com

В работе рассмотрена ортогональная система вейвлетов и скалярных функций, основанных на полиномах Чебышева второго рода и их нулях. На их базе построена полная ортонормированная система функций. Показан недостаток в аппроксимативных свойствах частичных сумм соответствующего вейвлет-ряда, связанный со свойствами самих полиномов Чебышева и заключающийся в существенном ухудшении скорости их сходимости к исходной функции на концах отрезка ортогональности. В качестве альтернативы предлагается модифицировать вейвлет-ряд Чебышева второго рода по аналогии со специальными рядами по ортогональным полиномам со свойством «прилипания» на концах отрезка ортогональности. В случае лакунарных частичных сумм доказано, что такой новый специальный вейвлет-ряд лишен указанного недостатка, а следовательно, обладает более привлекательными аппроксимативными свойствами.

Ключевые слова: полиномиальные вейвлеты, специальный вейвлет-ряд, полиномы Чебышева второго рода, аппроксимация функций.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-34-41

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день вейвлеты зарекомендовали себя как достаточно эффективный инструмент в задачах приближения функций, обработки и сжатия цифровых сигналов (временных рядов, звука, изображений и т. д.) (см., например, [1–3]). В последние годы многими авторами активно проводятся исследования теории полиномиальных вейвлетов. Так, С. К. Chui и Н. Н. Mhaskar в работе [4] впервые рассмотрели вейвлеты на основе тригонометрических полиномов. Позднее Т. Kilgore и J. Prestin в [5] заменили тригонометрические полиномы алгебраическими и доказали ортогональность полученной системы функций в смысле чебышевского веса первого рода. Далее, В. Fischer и J. Prestin [6] разработали обобщенную теорию конструирования полиномиальных вейвлетов. В дальнейшем техника разложения функций в ряды по полиномиальным вейвлетам получила развитие в ряде работ (см., например, [7–9] и др.).

Ф. Mohd и I. Mohd в [10] представили новый, отличный от описанных ранее, способ построения вейвлетов и масштабирующих функций на основе полиномов Чебышева первого рода и их нулей. Используя аналогичную технику, в [11] автором построена ортогональная система вейвлетов на основе полиномов Чебышева второго рода и исследованы аппроксимативные свойства лакунарных частичных сумм $\mathcal{V}_n(f, x)$ соответствующего вейвлет-ряда в случае $n = 2^m$. В настоящей статье показан недостаток в свойствах сходимости частичных сумм $\mathcal{V}_n(f, x)$ к исходной функции $f(x)$, связанный со свойствами самих полиномов Чебышева второго рода. Предлагается модифицировать вейвлет-ряд по аналогии со специальными рядами по ортогональным полиномам со свойством «прилипания», введенным в недавних работах И. И. Шарапудинова [12, 13]. Доказано, что такой специальный вейвлет-ряд обладает значительно более привлекательными аппроксимативными свойствами на концах отрезка $[-1, 1]$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $w(x) = \sqrt{1-x^2}$. Обозначим тогда через $L_{2,w}([-1; 1])$ евклидово пространство интегрируемых функций $f(x)$ таких, что $\int_{-1}^1 f^2(x)w(x)dx < \infty$. Определим скалярное произведение в нем с помощью равенства

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x)dx. \quad (1)$$



Хорошо известно, что полиномы Чебышева второго рода

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

образуют ортогональный базис в $L_{2,w}([-1; 1])$, а именно

$$\langle U_n, U_m \rangle = \frac{\pi}{2} \delta_{nm} = \begin{cases} \pi/2, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \quad (2)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Нули n -го полинома $U_n(x)$, очевидно, могут быть определены равенством

$$\xi_k^{(n)} = \cos \theta_k^{(n)} = \cos \frac{\pi(k+1)}{n+1}, \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

2. ВЕЙВЛЕТЫ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

Определение 1. Масштабирующей функцией Чебышева второго рода назовем полином вида

$$\phi_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^n U_j(x) U_j(\xi_k^{(n+1)}),$$

где $n = 1, 2, \dots$ и $k = 0, 1, \dots, n$.

Определение 2. Назовем вейвлет-функцией Чебышева второго рода полином

$$\psi_{n,k}(x) = \sum_{j=n+1}^{2n} U_j(x) U_j(\xi_k^{(n)}),$$

для любых $n = 1, 2, \dots$ и $k = 0, 1, \dots, n-1$.

В работе [11] нами доказано, что системы масштабирующих функций $\{\phi_{n,k}(x)\}_{k=0}^n$ и вейвлет-функций $\{\psi_{n,k}(x)\}_{k=0}^{n-1}$ являются ортогональными в $L_{2,w}([-1; 1])$, а именно

$$\langle \phi_{n,k}, \phi_{n,l} \rangle = \frac{\pi(n+2)}{4 \sin^2 \frac{\pi(k+1)}{n+2}} \delta_{kl}, \quad \langle \psi_{n,k}, \psi_{n,l} \rangle = \frac{\pi(n+1)}{4 \sin^2 \frac{\pi(k+1)}{n+1}} \delta_{kl}.$$

Положим тогда

$$\hat{\phi}_{m,k}(x) = \frac{\phi_{2^m,k}(x)}{\sqrt{\langle \phi_{2^m,k}, \phi_{2^m,k} \rangle}} = \phi_{2^m,k}(x) \frac{2 \left| \sin \frac{\pi(k+1)}{2^{m+2}} \right|}{\sqrt{\pi(2^m+2)}},$$

$$\hat{\psi}_{m,k}(x) = \frac{\psi_{2^m,k}(x)}{\sqrt{\langle \psi_{2^m,k}, \psi_{2^m,k} \rangle}} = \psi_{2^m,k}(x) \frac{2 \left| \sin \frac{\pi(k+1)}{2^{m+1}} \right|}{\sqrt{\pi(2^m+1)}}$$

и введем обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \{ \hat{\phi}_{0,0}(x), \hat{\phi}_{0,1}(x) \}, & \Psi_1 &= \{ \hat{\psi}_{0,0}(x) \}, & \Psi_2 &= \{ \hat{\psi}_{1,0}(x), \hat{\psi}_{1,1}(x) \}, & \dots, \\ \Psi_m &= \{ \hat{\psi}_{m-1,0}(x), \hat{\psi}_{m-1,1}(x), \dots, \hat{\psi}_{m-1,2^{m-1}-1}(x) \}, & \dots, \\ \mathcal{P}_m &= \{ \Phi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m \} = \\ &= \{ \hat{\phi}_{0,0}(x), \hat{\phi}_{0,1}(x), \hat{\psi}_{0,0}(x), \hat{\psi}_{1,0}(x), \hat{\psi}_{1,1}(x), \dots, \hat{\psi}_{m-1,0}(x), \hat{\psi}_{m-1,1}(x), \dots, \hat{\psi}_{m-1,2^{m-1}-1}(x) \}. \end{aligned}$$

Далее, пусть $H_{2^m,w}([-1; 1])$ — подпространство в $L_{2,w}([-1; 1])$, состоящее из алгебраических полиномов степени не выше 2^m . В [11] доказано, что система функций \mathcal{P}_m образует ортонормированный



базис в $H_{2^m, w}([-1; 1])$, т. е. любой полином $P_n(x) \in H_{2^m, w}([-1; 1])$ степени $n \leq 2^m$ представим в виде линейной комбинации:

$$P_n(x) = a_0 \hat{\phi}_{0,0}(x) + a_1 \hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \hat{\psi}_{j,k}(x). \quad (3)$$

Кроме того, если рассмотреть теперь бесконечную систему функций

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{\Phi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m, \dots\} = \\ &= \{\hat{\phi}_{0,0}(x), \hat{\phi}_{0,1}(x), \hat{\psi}_{0,0}(x), \hat{\psi}_{1,0}(x), \hat{\psi}_{1,1}(x), \dots, \hat{\psi}_{m-1,0}(x), \hat{\psi}_{m-1,1}(x), \dots, \hat{\psi}_{m-1,2^{m-1}-1}(x), \dots\}, \end{aligned}$$

то она образует ортонормированный базис в $L_{2,w}([-1; 1])$.

Из последнего утверждения вытекает, что произвольная функция $f(x) \in L_{2,w}([-1; 1])$ может быть представлена в виде сходящегося в $L_{2,w}([-1; 1])$ ряда

$$f(x) = \hat{a}_0 \hat{\phi}_{0,0}(x) + \hat{a}_1 \hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \hat{b}_{j,k} \hat{\psi}_{j,k}(x), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \int_{-1}^1 f(t) \hat{\phi}_{0,0}(t) w(t) dt, & \hat{a}_1 &= \int_{-1}^1 f(t) \hat{\phi}_{0,1}(t) w(t) dt, \\ \hat{b}_{j,k} &= \int_{-1}^1 f(t) \hat{\psi}_{j,k}(t) w(t) dt, & j &= 0, 1, \dots, m; \quad k = 0, 1, \dots, 2^j - 1. \end{aligned}$$

Через $\mathcal{V}_{2^m}(f, x)$ обозначим частичную сумму ряда (4) следующего вида:

$$\mathcal{V}_{2^m}(f, x) = \hat{a}_0 \hat{\phi}_{0,0}(x) + \hat{a}_1 \hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \hat{b}_{j,k} \hat{\psi}_{j,k}(x). \quad (5)$$

Замечание 1. В силу равенства (3) $\mathcal{V}_{2^m}(f, x)$ представляет собой линейный оператор, проектирующий пространство $L_{2,w}([-1; 1])$ на $H_{2^m, w}([-1; 1])$.

3. АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНЫХ СУММ $\mathcal{V}_{2^m}(f, x)$

В работе [11] нами было показано, что частичные суммы (5) ряда (4) обладают теми же аппроксимативными свойствами, что и частичные суммы $S_{2^m}(f, x) = \sum_{k=0}^n \hat{f}_k U_k(x)$ ряда Фурье по полиномам Чебышева второго рода:

$$f(x) - \mathcal{V}_{2^m}(f, x) = f(x) - S_{2^m}(f, x). \quad (6)$$

Опираясь на этот факт и используя оценки из [14, 15], для каждой внутренней точки x отрезка $[-1, 1]$ получаем

$$|f(x) - \mathcal{V}_{2^m}(f, x)| \leq E_{2^m}(f) \left(\frac{4 \ln 2}{\pi^2} m + O(1) \right), \quad f \in C[-1, 1], \quad (7)$$

где $E_{2^m}(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ алгебраическими полиномами $p_n \in H_{2^m, w}([-1; 1])$. Кроме того, при $m \rightarrow \infty$ равномерно относительно $x \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < 1$) имеет место равенство

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{f \in \text{Lip } \alpha, \\ 0 < \alpha \leq 1}} |f(x) - \mathcal{V}_{2^m}(f, x)| = \\ &= \frac{m}{2^{\alpha m}} (1 - x^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{2^{\alpha+1} \ln 2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t dt + O \left(\frac{\sin 2^m \arccos x}{2^{\alpha m} \sqrt{1 - x^2}} + 2^{-\alpha m} \right). \end{aligned} \quad (8)$$



Замечание 2. В случае $\alpha = 1$ последнее равенство выполняется равномерно на всем отрезке $[-1, 1]$.

В то же время можно привести простой пример аналитической функции $f(x)$, для которой имеет место неравенство

$$\frac{|f(\pm 1) - \mathcal{V}_{2^m}(f, \pm 1)|}{E_{2^m}(f)} \geq c_1 2^m. \quad (9)$$

Для этого обратимся к обобщению полиномов Чебышева второго рода — ультрасферическим полиномам $P_n^{\alpha, \alpha}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots; \alpha > -1$), образующим ортогональную систему в пространстве $L_{2, \rho}([-1, 1])$, где $\rho(x) = (1 - x^2)^\alpha$. Рассмотрим известное разложение (см. [16, с. 94]) производящей функции для них

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \frac{\Gamma(n + 2\alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha)} P_n^{\alpha, \alpha}(x) z^n = (1 - 2xz + z^2)^{-\alpha - \frac{1}{2}}. \quad (10)$$

При $0 < z < 1$ функция

$$f(x) = f_z(x) = (1 - 2xz + z^2)^{-\alpha - \frac{1}{2}} = (2z)^{-\alpha - \frac{1}{2}} \left(\frac{1 + z^2}{2z} - x \right)^{-\alpha - \frac{1}{2}} \quad (11)$$

аналитична на всей плоскости, разрезанной вдоль положительной полуоси с началом в точке $x = \frac{1 + z^2}{2z} = a > 1$. Известно (см. [17, с. 476]), что

$$E_n[(a - x)^{-\alpha - \frac{1}{2}}] \asymp \frac{n^{\alpha + \frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) (\sqrt{a^2 - 1})^{\alpha + \frac{3}{2}} (a + \sqrt{a^2 - 1})^n} \asymp n^{\alpha + \frac{1}{2}} z^n. \quad (12)$$

Отсюда находим

$$E_n(f) \asymp n^{\alpha + \frac{1}{2}} z^n. \quad (13)$$

С другой стороны, как показано в работе [18], имеет место

$$|f(\pm 1) - S_n^{\alpha, \alpha}(f, \pm 1)| \asymp n^{2\alpha + 1} z^n. \quad (14)$$

Сопоставляя (13) и (14), получаем:

$$\frac{|f(1) - S_n^{\alpha, \alpha}(f, 1)|}{E_n(f)} \geq c(\alpha) n^{\alpha + \frac{1}{2}}, \quad \alpha > -1/2.$$

В интересующем нас частном случае при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $n = 2^m$ это неравенство принимает вид

$$\frac{|f(\pm 1) - S_{2^m}(f, \pm 1)|}{E_{2^m}(f)} \geq c_1 2^m. \quad (15)$$

Из (6) и (15) приходим к справедливости (9).

Приведенный пример показывает, что частичные суммы $\mathcal{V}_{2^m}(f, x)$ на концах отрезка $[-1, 1]$ плохо приближают не только непрерывные функции $f \in C[-1, 1]$, но также аналитические функции (за исключением алгебраических полиномов). Может случиться, что $\mathcal{V}_{2^m}(f, x)$ приближает $f(x)$ по порядку в 2^m раз хуже, чем полином наилучшего приближения $P_{2^m}^*(f, x)$. Этот отрицательный факт является следствием того, что функция Лебега для сумм Фурье – Чебышева второго рода

$$L_n(x) = \int_{-1}^1 \left| \sum_{k=0}^n \hat{U}_k(x) \hat{U}_k(t) \right| w(t) dt$$

в точках $x = \pm 1$ имеет порядок роста равный n ($n \rightarrow \infty$) (см., например, [14]).



4. СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЕЙВЛЕТ-РЯД СО СВОЙСТВОМ «ПРИЛИПАНИЯ»

Для того чтобы устранить указанный негативный эффект, предлагается модифицировать вейвлет-ряд (4) по схеме, схожей с построением введенных в недавних работах [12, 13] предельных и специальных рядов по ультрасферическим полиномам, обладающих свойством «прилипания» на концах отрезка ортогональности. Следуя [13], введем в рассмотрение функцию

$$F(x) = \frac{f(x) - c(f, x)}{1 - x^2} = \frac{g(f, x)}{1 - x^2}, \tag{16}$$

где $c(f, x) = \frac{f(-1) + f(1)}{2} - \frac{f(-1) - f(1)}{2}x$.

Если $f(x) \in L_{2,w}([-1; 1])$ то, очевидно, также и $F(x) \in L_{2,w}([-1; 1])$. Тогда она может быть представлена в виде ряда

$$F(x) = \tilde{a}_0 \hat{\phi}_{0,0}(x) + \tilde{a}_1 \hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \tilde{b}_{j,k} \hat{\psi}_{j,k}(x), \tag{17}$$

где $\tilde{a}_0 = \int_{-1}^1 F(t) \hat{\phi}_{0,0}(t) w(t) dt$, $\tilde{a}_1 = \int_{-1}^1 F(t) \hat{\phi}_{0,1}(t) w(t) dt$, $\tilde{b}_{j,k} = \int_{-1}^1 F(t) \hat{\psi}_{j,k}(t) w(t) dt$, $j = 0, 1, \dots, m$, $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$.

Выразим теперь из (16) и (17) исходную функцию:

$$f(x) = c(f, x) + (1 - x^2) \left[\tilde{a}_0 \hat{\phi}_{0,0}(x) + \tilde{a}_1 \hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \tilde{b}_{j,k} \hat{\psi}_{j,k}(x) \right].$$

Будем называть такой модифицированный ряд *специальным вейвлет-рядом Чебышева второго рода*. Обозначим его лакунарную частичную сумму:

$$\tilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f, x) = c(f, x) + (1 - x^2) \left[\tilde{a}_0 \hat{\phi}_{0,0}(x) + \tilde{a}_1 \hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \tilde{b}_{j,k} \hat{\psi}_{j,k}(x) \right]. \tag{18}$$

Рассмотрим некоторые свойства $\tilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f, x)$. Из явного вида (18) легко следует

Теорема 1. *Частичная сумма $\tilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f, x)$ на концах отрезка $[-1, 1]$ совпадает с исходной функцией $f(x)$, т.е. $\tilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f, \pm 1) = f(\pm 1)$.*

Как отмечено в [13], это свойство имеет важное значение в задачах, связанных с обработкой временных рядов и изображений.

Теорема 2. *Частичная сумма $\tilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f, x)$ представляет собой линейный оператор, проектирующий пространство $L_{2,w}([-1; 1])$ на $H_{2^m+2,w}([-1; 1])$, т.е. для любого полинома $P_n(x)$ степени не выше $n \leq 2^m + 2$ справедливо равенство $\tilde{\mathcal{V}}_{2^m}(P_n, x) \equiv P_n(x)$.*

Доказательство. Для произвольного полинома $P_n(x)$ ($n \leq 2^m + 2$) рассмотрим выражение вида (16):

$$\frac{P_n(x) - c(P_n, x)}{1 - x^2} = \frac{g(P_n, x)}{1 - x^2}. \tag{19}$$

Очевидно, $g(P_n, x)$ представляет собой полином степени n , причем $g(P_n, \pm 1) = 0$. Вследствие теоремы Безу, он представим в виде $g(P_n, x) = (1 - x^2)M_{n-2}(x)$, где $M_{n-2}(x)$ — полином степени $n - 2 \leq 2^m$. Таким образом, из (19) имеем:

$$\frac{P_n(x) - c(P_n, x)}{1 - x^2} = M_{n-2}(x).$$

Воспользуемся теперь замечанием 1, тогда $\mathcal{V}_{2^m}(M_{n-2}, x) = M_{n-2}(x)$, откуда

$$\mathcal{V}_{2^m}(M_{n-2}, x) = M_{n-2}(x) = \frac{P_n(x) - c(P_n, x)}{1 - x^2}.$$



Выражая отсюда $P_n(x)$, получаем окончательно

$$P_n(x) = c(P_n, x) + (1 - x^2)\mathcal{V}_{2m}(M_{n-2}, x) = \tilde{\mathcal{V}}_{2m}(P_n, x). \quad \square$$

Теорема 3. Для любой функции $f \in C[-1, 1]$ и любого $x \in (-1, 1)$ имеет место оценка

$$|f(x) - \tilde{\mathcal{V}}_m(f, x)| \leq cE_{2m+2}(f)(1 + \ln(1 + (2^m + 2)\sqrt{1 - x^2})),$$

где $c > 0$ — константа.

Доказательство. Как отмечалось выше, в работе [13] сконструированы специальные ряды по ультрасферическим полиномам, обладающие свойством «прилипания» в точках $x = \pm 1$. Частичные суммы такого ряда в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ могут быть записаны в виде

$$\sigma_n(f, x) = \sigma_n^{\frac{1}{2}}(f, x) = c(f, x) + (1 - x^2)S_{n-2}(F, x).$$

Рассмотрим отклонение этих частичных сумм от аппроксимируемой функции

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_n(f, x)| &= |f(x) - c(f, x) - (1 - x^2)S_{n-2}(F, x)| = \\ &= |g(f, x) - (1 - x^2)S_{n-2}(F, x)| = (1 - x^2)|F(x) - S_{n-2}(F, x)|. \end{aligned} \quad (20)$$

С другой стороны, преобразовав аналогичным образом погрешность приближения функции $f(x)$ частичной суммой $\tilde{\mathcal{V}}_m(f, x)$ специального вейвлет-ряда, получим:

$$|f(x) - \tilde{\mathcal{V}}_m(f, x)| = (1 - x^2)|F(x) - \mathcal{V}_m(F, x)|.$$

Отсюда и из (6) имеем:

$$|f(x) - \tilde{\mathcal{V}}_m(f, x)| = (1 - x^2)|F(x) - S_{2m}(F, x)|. \quad (21)$$

Сопоставляя теперь (20) с (21), получаем:

$$|f(x) - \tilde{\mathcal{V}}_m(f, x)| = |f(x) - \sigma_{2m+2}(f, x)|. \quad (22)$$

В [13] доказана следующая оценка:

$$|f(x) - \sigma_n(f, x)| \leq cE_n(f)(1 + \ln(1 + n\sqrt{1 - x^2})). \quad (23)$$

Из (22)–(23) следует справедливость утверждения теоремы. \square

Рассмотрим теперь верхнюю грань отклонения частичных сумм $\tilde{\mathcal{V}}_{2m}(f, x)$ от функций из класса Липшица $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$).

Теорема 4. Справедливо асимптотическое равенство:

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{f \in \text{Lip } \alpha, \\ 0 < \alpha \leq 1}} |f(x) - \tilde{\mathcal{V}}_{2m}(f, x)| = \\ &= \frac{m}{2^{\alpha m}} (1 - x^2)^{\frac{\alpha}{2} + 1} \frac{2^{\alpha+1} \ln 2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t \, dt + O\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{2^{\alpha m}} \left(\sin 2^m \arccos x + \sqrt{1 - x^2}\right)\right), \end{aligned}$$

которое выполняется равномерно относительно $x \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < 1$).

Доказательство. Из (18) имеем:

$$\tilde{\mathcal{V}}_{2m}(f, x) = c(f, x) + (1 - x^2)\mathcal{V}_{2m}(F, x). \quad (24)$$

Отклонение частичных сумм специального вейвлет-ряда тогда может быть записано в следующем виде:

$$|f(x) - \tilde{\mathcal{V}}_{2m}(f, x)| = |f(x) - c(f, x) - (1 - x^2)\mathcal{V}_{2m}(F, x)| =$$



$$= |g(f, x) - (1 - x^2)\mathcal{V}_{2^m}(F, x)| = (1 - x^2) |F(x) - \mathcal{V}_{2^m}(F, x)|. \quad (25)$$

Воспользовавшись (8), имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in \text{Lip } \alpha, \\ 0 < \alpha \leq 1}} |f(x) - \tilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f, x)| = (1 - x^2) \sup_{\substack{f \in \text{Lip } \alpha, \\ 0 < \alpha \leq 1}} |F(x) - \mathcal{V}_{2^m}(F, x)| = \\ &= \frac{m}{2^{\alpha m}} (1 - x^2)^{\frac{\alpha}{2} + 1} \frac{2^{\alpha+1} \ln 2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t \, dt + (1 - x^2) O\left(\frac{\sin 2^m \arccos x}{2^{\alpha m} \sqrt{1 - x^2}} + 2^{-\alpha m}\right) = \\ &= \frac{m}{2^{\alpha m}} (1 - x^2)^{\frac{\alpha}{2} + 1} \frac{2^{\alpha+1} \ln 2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t \, dt + O\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{2^{\alpha m}} (\sin 2^m \arccos x + \sqrt{1 - x^2})\right). \quad \square \end{aligned}$$

Теоремы 1– 4 показывают, что частичные суммы $\tilde{\mathcal{V}}_{2^m}(f, x)$ как аппарат приближения обладают весьма привлекательными аппроксимативными свойствами.

Автор благодарит доктора физико-математических наук И. И. Шарапудинова за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

Библиографический список

1. Meyer Y. Ondelettes et Operateurs. Paris : Hermann, 1990. Vol. I–III.
2. Daubechies L. Ten Lectures on Wavelets // CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics Proceedings. Vol. 61. Philadelphia, PA : SIAM, 1992. 357 p. DOI: 10.1137/1.9781611970104.
3. Chui C. K. An Introduction to Wavelets. Boston : Academic Press, 1992. 271 p.
4. Chui C. K., Mhaskar H. N. On Trigonometric Wavelets // Constructive Approximation. 1993. Vol. 9, iss. 2–3. P. 167–190. DOI: 10.1007/BF01198002.
5. Kilgore T., Prestin J. Polynomial wavelets on an interval // Constructive Approximation. 1996. Vol. 12, iss. 1. P. 95–110. DOI: 10.1007/BF02432856.
6. Fischer B., Prestin J. Wavelet based on orthogonal polynomials // Mathematics of computation. 1997. Vol. 66, № 220. P. 1593–1618. DOI: 10.1090/S0025-5718-97-00876-4.
7. Fischer B., Themistoclakis W. Orthogonal polynomial wavelets // Numerical Algorithms. 2002. Vol. 30, iss. 1. P. 37–58. DOI: 10.1023/A:1015689418605.
8. Capobiancho M. R., Themistoclakis W. Interpolating polynomial wavelet on $[-1, 1]$ // Advanced in Computational Mathematics. 2005. Vol. 23, iss. 4. P. 353–374. DOI: 10.1007/s10444-004-1828-2.
9. Dao-Qing Dai, Wei Lin Orthonormal polynomial wavelets on the interval // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 134, iss. 5. P. 1383–1390. DOI: 10.1090/S0002-9939-05-08088-3.
10. Mohd F., Mohd I. Orthogonal Functions Based on Chebyshev Polynomials // Matematika. 2011. Vol. 27, № 1. P. 97–107.
11. Султанамедов М. С. Аппроксимативные свойства вейвлетов, построенных на основе полиномов Чебышева второго рода // Владикавказ. матем. журн. 2015. Т. 17, вып. 3. С. 56–64.
12. Шарапудинов И. И. Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства // Матем. заметки. 2013. Т. 94, вып. 2. С. 295–309. DOI: 10.4213/mzm10292.
13. Шарапудинов И. И. Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, вып. 5. С. 201–224. DOI: 10.4213/im8117.
14. Яхнин Б. М. О функциях Лебега разложений в ряды по полиномам Якоби для случаев $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ // УМН. 1958. Т. 13, вып. 6(84). С. 207–211.
15. Яхнин Б. М. Приближение функций класса Lip_α частными суммами ряда Фурье по многочленам Чебышева второго рода // Изв. вузов. Матем. 1963. Вып. 1. С. 172–178.
16. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М. : Физматлит, 1962. 500 с.
17. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 626 с.
18. Шарапудинов И. И. О наилучшем приближении и суммах Фурье–Якоби // Матем. заметки. 1983. Т. 34, вып. 5. С. 651–661. DOI: 10.1007/BF01157445.



Special Wavelets Based on Chebyshev Polynomials of the Second Kind and their Approximative Properties

M. S. Sultanakhmedov

Sultanakhmedov Murad Salikhovich, Daghestan Scientific Center of RAS, 45, Gadzhiev st., Makhachkala, Daghestan, Russia, 367000, sultanakhmedov@gmail.com

The system of wavelets and scalar functions based on Chebyshev polynomials of the second kind and their zeros is considered. With the help of them we construct a complete orthonormal system of functions. A certain disadvantage is shown in approximation properties of partial sums of the corresponding wavelet series, related to the properties of Chebyshev polynomials themselves and meaning a significant decrease of the rate of their convergence to the original function at the endpoints of orthogonality segment. As an alternative, we propose a modification of Chebyshev wavelet series of the second kind by analogy to the special polynomial series with the property of adhesion. These new special wavelet series is proved to be deprived of the mentioned disadvantage and to have better approximative properties.

Key words: polynomial wavelets, special wavelet series, Chebyshev polynomials of the second kind, function approximation.

References

1. Meyer Y. *Ondelettes et Operateurs*, vol. I–III, Paris, Hermann, 1990.
2. Daubechies L. Ten Lectures on Wavelets. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics Proceedings*, vol. 61, Philadelphia, PA, SIAM, 1992, 357 p. DOI: 10.1137/1.9781611970104.
3. Chui C. K. *An Introduction to Wavelets. Wavelet Analysis and its Applications*, vol. 1, Boston, Academic Press, 1992, 264 p.
4. Chui C. K., Mhaskar H. N. On Trigonometric Wavelets. *Constructive Approximation*, 1993, vol. 9, iss. 2–3, pp. 167–190. DOI: 10.1007/BF01198002.
5. Kilgore T., Prestin J. Polynomial wavelets on an interval. *Constructive Approximation*, 1996. Vol. 12, iss. 1, pp. 95–110. DOI: 10.1007/BF02432856.
6. Fischer B., Prestin J. Wavelet based on orthogonal polynomials. *Mathematics of computation*, 1997, vol. 66, no. 220, pp. 1593–1618. DOI: 10.1090/S0025-5718-97-00876-4.
7. Fischer B., Themistoclakis W. Orthogonal polynomial wavelets. *Numerical Algorithms*, 2002, vol. 30, iss. 1, pp. 37–58. DOI: 10.1023/A:1015689418605.
8. Capobiancho M. R., Themistoclakis W. Interpolating polynomial wavelet on $[-1, 1]$. *Advanced in Computational Mathematics*, 2005, vol. 23, iss. 4, pp. 353–374. DOI: 10.1007/s10444-004-1828-2.
9. Dao-Qing Dai, Wei Lin. Orthonormal polynomial wavelets on the interval. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2005, vol. 134, iss. 5, pp. 1383–1390. DOI: 10.1090/S0002-9939-05-08088-3.
10. Mohd F., Mohd I. Orthogonal Functions Based on Chebyshev Polynomials. *Matematika*, 2011, vol. 27, no. 1, pp. 97–107.
11. Sultanakhmedov M. S. Approximative properties of the Chebyshev wavelet series of the second kind. *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal*, 2015, vol. 17, iss. 3, pp. 56–64 (in Russian).
12. Sharapudinov I. I. Limit ultraspherical series and their approximative properties. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, iss. 2, pp. 281–293. DOI: 10.1134/S0001434613070274.
13. Sharapudinov I. I. Some special series in ultraspherical polynomials and their approximative properties. *Izv. Math.*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 1036–1059. DOI: 10.1070/IM2014v078n05ABEH002718.
14. Yakhnin B. M. Lebesgue functions for expansions in series of Jacobi polynomials for the cases $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1958, vol. 13, iss. 6(84), pp. 207–211 (in Russian).
15. Yakhnin B. M. Approximation of functions of class $Lip \alpha$ by partial sums of a Fourier series in Chebyshev polynomials of second kind. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1963, no. 1, pp. 172–178 (in Russian).
16. Szegö G. Orthogonal Polynomials. *Colloquium Publications (Amer. Math. Soc.)*, 1939, vol. 23, 432 p.
17. Timan A. F. *Teoriya priblizheniya funkciy dejstvitel'nogo peremennogo* [Theory of approximation of functions of a real variable]. Moscow, Fizmatgiz, 1960, 626 p. (in Russian).
18. Sharapudinov I. I. Best approximation and the Fourier–Jacobi sums. *Math. Notes*, 1983, vol. 34, iss. 5, pp. 816–821. DOI: 10.1007/BF01157445.



УДК 517.5

ФАКТОРИЗАЦИЯ ЦЕЛЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

А. Б. Шишкин

Шишкин Андрей Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, информатики и МП, Филиал Кубанского государственного университета, Славянск-на-Кубани, Shishkin-home@mail.ru

Пусть π — целая функция минимального типа при порядке 1. Целая функция F называется π -симметричной, если она представляется в виде композиции $f \circ \pi$, где f — целая функция. В статье рассматривается следующий вопрос: можно ли всякую целую π -симметричную функцию экспоненциального типа представить в виде произведения двух близких по росту функций, каждая из которых сама является целой π -симметричной функцией? На этот вопрос получен утвердительный ответ, но при условии подчинения функции π некоторым ограничениям. Этим ограничениям подчинена, например, целая функция вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho(r) \approx \rho \in (0; 1)$ с постоянным положительным индикатором. Другие примеры связаны с обратимостью целой функции в кругах постоянного радиуса, центры которых лежат вне некоторого исключительного множества.

Ключевые слова: факторизация целых функций, нулевой порядок, уточненный вес, логарифмический вес, целые симметричные функции.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-42-68

ВВЕДЕНИЕ

Пусть даны некоторый класс P целых функций конечного порядка и некоторое отношение R близости роста элементов из класса P . Если две функции $f, g \in P$ удовлетворяют этому отношению, то говорим, что функции f и g эквивалентны. Проблема факторизации состоит в следующем. Возможно ли произвольную функцию из класса P представить в виде произведения двух эквивалентных функций из этого класса? Если ответ на этот вопрос положителен, то класс P называем *факторизуемым по данному отношению*. Факторизация целых функций подобна операции извлечения квадратного корня и находит применение в различных областях комплексного анализа. Приведем лишь два примера.

В качестве первого примера уместно рассмотреть известную *проблему Шевалле – Эренпрайса* о факторизации по свертке финитных гладких функций [1]. Двойственная к ней задача совпадает с проблемой факторизации некоторого класса целых функций экспоненциального типа. Первые исследования этой задачи провел Д. Г. Диксон (D. G. Dickson). В работе [2] он, например, рассмотрел класс всех целых функций f экспоненциального типа, удовлетворяющих условиям:

1) для любого натурального N имеет место оценка

$$\ln |f(x)| \leq -N \ln |x| + C_N, \quad x \in \mathbf{R};$$

2) нули функции f лежат в некоторой полосе, параллельной вещественной оси;

3) если $n(r)$ — считающая функция нулей функции f , а Δ — плотность нулей функции f , то

$$n(r) = \Delta r + O(1), \quad r \rightarrow \infty;$$

и показал, что этот класс факторизуем по отношению: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда функции f и g имеют одинаковые плотности нулей. Окончательное решение проблемы Шевалле – Эренпрайса получено Р. С. Юлмухаметовым. В статье [3] он показал, что класс всех целых функций f экспоненциального типа, удовлетворяющих условию 1) и условию

$$\ln |f(\lambda)| \leq \sigma_f |\operatorname{Im} \lambda| + M_f, \quad \lambda \in \mathbf{C},$$

факторизуем по отношению: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда функции f и g имеют одинаковый тип.



Другой пример связан с задачей спектрального синтеза для линейного дифференциального оператора:

$$f \rightarrow \pi(D)f := \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k f, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Для нас этот пример является основным и поэтому рассмотрим его подробнее. Пусть Ω — выпуклая область в \mathbb{C} ; $H(\Omega)$ — пространство аналитических в области Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Считаем, что сужение оператора $\pi(D)$ на пространство $H(\Omega)$ является непрерывным эндоморфизмом этого пространства. Для этого достаточно, а если область Ω ограничена, то и необходимо, предположить, что функция

$$\pi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

является целой функцией минимального типа при порядке 1. *Задача спектрального синтеза* (в комплексной области) состоит в нахождении условий, при которых замкнутые $\pi(D)$ -инвариантные подпространства $W \subseteq H(\Omega)$ восстанавливаются по запасам содержащихся в них корневых элементов оператора $\pi(D)$ с помощью замыкания их линейной оболочки. Традиционный путь решения этой задачи связан с переходом к двойственной задаче. Полное исследование по этому вопросу проведено в [4]. В этой работе исследование замкнутого $\pi(D)$ -инвариантного подпространства $W \subseteq H(\Omega)$ на допустимость спектрального синтеза сведено к вопросу *обильности* его аннуляторного подмодуля $I := L_{\Omega}(W^0) \subseteq P(\Omega)$. Здесь $P(\Omega)$ — интерпретация сильного сопряженного $H^*(\Omega)$ к пространству $H(\Omega)$ в терминах преобразования Лапласа L_{Ω} , наделенная структурой топологического модуля над кольцом многочленов $\mathbb{C}[\pi(z)]$ от $\pi(z)$. В работе [5] свойство обильности замкнутого подмодуля $I \subseteq P(\Omega)$ расщепляется на три отдельных свойства: *интенсивность, устойчивость, насыщенность*. Общее исследование этих свойств проведено в работе [6]. Целая функция называется *целой π -симметричной*, если она представляется в виде композиции $f \circ \pi$, где f — целая функция. Пусть $P_{\pi}[1; +\infty)$ — класс всех целых π -симметричных функций экспоненциального типа, $S \in H^*(\Omega)$, $\varphi := L_{\Omega}(S) \in P(\Omega)$. Замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство

$$W_S := \{f \in H(\Omega) : \langle S, \pi(D)^k f \rangle = 0, \quad k = 0, 1, \dots\} \subset H(\Omega)$$

называется *полиномиальным ядром* (точнее, $\mathbb{C}[\pi(D)]$ -ядром) функционала S . Иногда полиномиальные ядра линейных непрерывных функционалов называют *главными $\pi(D)$ -инвариантными подпространствами* в $H(\Omega)$. Полиномиальное ядро W_S функционала S допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда выполняется следующая импликация: если $\psi \in P(\Omega)$ и $\frac{\psi}{\varphi} \in P_{\pi}[1; +\infty)$, то существует такая последовательность многочленов p_k , что последовательность $(p_k \circ \pi)\varphi$ сходится к ψ в топологии пространства $P(\Omega)$. В работе [7] И. Ф. Красичков-Терновский доказал выполнимость этой импликации для любого функционала $S \in H^*(\Omega)$ в случае $\pi(z) \equiv z$. Отсюда вытекает следующая аппроксимационная теорема: в случае $\pi(z) \equiv z$ полиномиальные ядра линейных непрерывных функционалов допускают спектральный синтез. Доказательству этой теоремы предшествовало доказательство факторизуемости класса $P[1; +\infty)$ всех целых функций экспоненциального типа по *естественному отношению эквивалентности* $R(|z|)$: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда

$$|\ln |f(z)| - \ln |g(z)|| = o(|z|), \quad z \rightarrow \infty, \quad z \notin E_{f,g},$$

где $E_{f,g}$ — некоторое множество «нулевой плотности» в окрестности бесконечности. В работе [8] В. С. Азарин обобщил этот факт и показал, что класс всех целых функций конечного порядка $\rho \in (0; +\infty)$ факторизуем по отношению $R(|z|^{\rho})$. Отсюда следует, что класс $P[\rho; +\infty)$ всех целых функций конечного порядка и конечного типа тоже факторизуем по отношению $R(|z|^{\rho})$. Опираясь на этот результат, И. Ф. Красичков-Терновский в работе [9] показал, что класс целых π -симметричных функций $P_{\pi}[1; +\infty)$ факторизуем по отношению $R(|z|)$ в случае $\pi(z)$ — многочлен. Это позволило ему доказать такую аппроксимационную теорему: в случае $\pi(z)$ — многочлен, полиномиальные ядра



линейных непрерывных функционалов допускают спектральный синтез. Замечательным является то, что позднее в диссертации [10] Б. Н. Хабибуллин существенно уточнил факторизационную теорему В. С. Азарина. Оказалось, например, что класс $P[\rho; +\infty)$ факторизуем по отношению $R(|z|^{\frac{\rho}{2}+\varepsilon})$ для любого положительного ε . Отметим, что результаты В. С. Азарина и Б. Н. Хабибуллина по факторизации целых функций получены ими в связи с общими исследованиями по проблеме влияния близости распределений масс субгармонических функций на сходство их асимптотического поведения.

Расщепление целой π -симметричной функции $f \circ \pi \in P_\pi[1; +\infty)$ на эквивалентные π -симметричные множители связано с расщеплением целой функции f на эквивалентные множители. Если функция π отлична от многочлена, то функция f имеет нулевой порядок. Это означает, что продолжение исследований по спектральному синтезу предполагает решение задач факторизации целых функций нулевого порядка. Заметим, что все отмеченные выше факторизационные задачи к таковым не относятся, так как в каждой из них предполагается, что $\rho \in (0; +\infty)$. Приходится возвращаться к истокам.

Доказательство факторизационной теоремы из [7] существенно опиралось на результаты работы [11]. Статья [11] посвящена сравнению роста целых функций конечного порядка по параметрам близости их нулей. Оказалось, что техника сравнения целых функций, основанная на классических теоремах Бореля и Адамара и отточенная в работах [7] и [11], допускает экстраполяцию в область нулевого порядка и логарифмических весов (см. п. 1.1, определение 2). Первые результаты по факторизации целых функций нулевого порядка получены в работах [12] и [13]. Пусть $\mu(r) \sim \ln^\rho r$ — логарифмический вес порядка $\rho \in (1; +\infty)$. В статье [13] показано, что класс $P[\mu(r); +\infty)$ всех целых функций f , для которых выполняется условие

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\mu(r)} < +\infty,$$

факторизуем по отношению эквивалентности $R(\mu(|z|))$. Однако прямое применение этого результата к расщеплению целых π -симметричных функций наталкивается на трудности, которые связаны с проверкой совпадения на классе $P_\pi[1; +\infty)$ всех целых π -симметричных функций экспоненциального типа естественного отношения эквивалентности $R(|z|)$ с отношением: $f \circ \pi \sim g \circ \pi$ тогда и только тогда, когда $f \sim g$ по отношению $R(\mu(|z|))$.

В настоящей работе показано, что при наложении на целую функцию π сильного ограничения (см. п. 2.1, определение 5) класс $P_\pi[1; +\infty)$ факторизуем по отношению $R(|z|)$. Этому ограничению подчинена, например, всякая целая функция вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho_\pi(r) \approx \rho_\pi \in (0; 1)$ с постоянным положительным индикатором. Другие примеры приведены в конце статьи. Этот результат можно трансформировать в результаты по спектральному синтезу по схеме из [14], но это требует отдельного разговора.

1. СРАВНЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРИ СЛАБОМ ОГРАНИЧЕНИИ

1.1. Первичные определения и их следствия

Определение 1. Неотрицательную функцию $m(r)$, определенную в окрестности $+\infty$, называем уточненным весом порядка $\rho \in [0, +\infty)$, если она возрастает, дифференцируема и

$$\frac{m(r)}{\ln r} \rightarrow \infty, \quad \frac{m'(r)r}{m(r)} \rightarrow \rho, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Если $m(r)$ — уточненный вес порядка ρ , то функция $\rho(r) := \frac{\ln m(r)}{\ln r}$ является уточненным порядком, т. е. $\rho(r) \rightarrow \rho$ и $r\rho'(r) \ln r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$. Легко проверить, что при $\rho > 0$ будет верно и обратное утверждение: для всякого уточненного порядка $\rho(r) \rightarrow \rho$ функция $m(r) := r^{\rho(r)}$ является уточненным весом порядка ρ .

При $\rho > 0$ обратная функция $n(t)$ к функции $m(r)$ является уточненным весом порядка $1/\rho$. Действительно, $t := m(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$. По известному правилу

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln n(t)}{\ln t} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln r}{\ln m(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(r)}{m'(r)r} = \frac{1}{\rho} \in (0, +\infty).$$



Значит, $r = n(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$ и

$$\frac{n(t)}{\ln t} = \frac{\ln r}{\ln m(r)} \frac{r}{\ln r} \rightarrow \infty, \quad \frac{n'(t)t}{n(t)} = \frac{m(r)}{m'(r)r} \rightarrow \frac{1}{\rho}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

По свойствам уточненного порядка для всякого уточненного веса $m(r)$ функция $m(r)r^{-\rho} = r^{\rho(r)-\rho}$ является медленно растущей, значит, равномерно по q из любого отрезка $[a; b] \subset (0; +\infty)$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(qr)(qr)^{-\rho}}{m(r)r^{-\rho}} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(qr)}{m(r)} = q^\rho. \quad (1)$$

Определение 2. Уточненный вес $m(r)$ нулевого порядка будем называть логарифмическим весом порядка ρ , если выполняется условие

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m'(r)r \ln r}{m(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln m(r)}{\ln \ln r} = \rho \in (1; +\infty). \quad (2)$$

Условие (2) означает, что функция $m(e^r)$ является уточненным весом порядка ρ . Значит, равномерно по q из любого отрезка $[a; b] \subset (0; +\infty)$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(e^{qr})}{m(e^r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(r^q)}{m(r)} = q^\rho.$$

Кроме того, из условия (2) вытекает, что $m(r) \sim \ln^\rho r$ по отношению $R(\ln \ln r)$, т. е.

$$\ln m(r) - \ln \ln^\rho r = o(\ln \ln r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Добавим еще, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших r выполняются неравенства $\ln^{\rho-\varepsilon} r \leq m(r) \leq \ln^{\rho+\varepsilon} r$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(r)}{\ln^{\rho-\varepsilon} r} = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(r)}{\ln^{\rho+\varepsilon} r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(r)}{r^\varepsilon} = 0.$$

Определение 3. Говорим, что радиальная плотность множества комплексных чисел E меньше $\varepsilon \in (0; +\infty)$, если это множество можно покрыть совокупностью колец

$$\Sigma := \{ \{z : |z| - t_n \leq r_n\} : n \in \mathbf{N} \},$$

где последовательность неотрицательных чисел $\{t_n\}$ имеет единственную предельную точку в бесконечности и

$$m_\Sigma := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} m_\Sigma(r) = \varepsilon' < \varepsilon, \quad \text{где } m_\Sigma(r) := \frac{1}{r} \sum_{t_n < r} r_n.$$

Если радиальная плотность множества E меньше любого положительного числа, то говорим, что множество E имеет нулевую радиальную плотность.

Если линейная плотность множества кружков меньше ε (равна нулю), то и радиальная плотность этого множества меньше ε (равна нулю). Обратное не выполняется. Это означает, что радиальная плотность множества E — более грубая оценка его плотности, чем линейная плотность множества кружков, покрывающего E , и, значит, ограничение на радиальную плотность множества является более слабым. Следует добавить еще, что оценка радиальной плотности множеств оказывается незаменимой при оценке плотности прообразов исключительных множеств.

Заметим, что для всякого множества E , радиальная плотность которого меньше $\varepsilon \in (0; 1/2)$, существуют окружности $|z| = R_k$, которые не пересекаются с E и для которых имеют место соотношения

$$R_k < R_{k+1} < \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{-2} R_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3)$$



Действительно, пусть множество E покрывается множеством колец Σ и $m_\Sigma =: \varepsilon' < \varepsilon$. Тогда

$$\frac{r_n}{t_n} < \varepsilon, \quad \frac{r_n}{t_n - r_n} < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

при $n > n_0$. Если кольцо $\{|z| - t_n\} \leq r_n$ пересекается с кругом $|z| \leq r$ и $n > n_0$, то $t_n - r_n \leq r$, значит, $r_n < \varepsilon t_n < \varepsilon(r + r_n)$ или $r_n < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} r$. Отсюда следует, что при $r \geq \max\{t_1 + r_1, \dots, t_{n_0} + r_{n_0}\}$ кольца $\{|z| - t_n\} \leq r_n$, пересекающиеся с кругом $|z| \leq r$, лежат в круге $|z| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} r$. Пусть $T_1 > 0$, $T_{k+1} := q_k T_k$, где

$$q_k := \frac{1}{1 - qm(T_k)} > 1, \\ q := \frac{1}{2\varepsilon} \in \left(1; \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\right), \quad m(r) := \max_{t \geq r} \frac{1}{1 - \varepsilon} m_\Sigma \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} t\right).$$

Толщина кольца $T_k \leq |z| \leq T_{k+1}$ равна

$$(q_k - 1) T_k = qm(T_k) T_{k+1} \geq qm(T_{k+1}) T_{k+1}.$$

При этом совокупная толщина колец $\{|z| - t_n\} \leq r_n$, пересекающихся с кругом $|z| \leq T_{k+1}$, меньше

$$\frac{q}{1 - \varepsilon} T_{k+1} m_\Sigma \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} T_{k+1}\right) \leq q T_{k+1} m(T_{k+1}).$$

Поэтому существует окружность $|z| = R_k$, $T_k \leq R_k \leq T_{k+1}$, которая не пересекается с множеством E , и при достаточно большом k имеем $m(T_k) \leq 2(1 - \varepsilon)\varepsilon'$, значит,

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} \leq \frac{T_{k+1}}{T_k} = q_k q_{k+1} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{-2}.$$

1.2. Слабое ограничение

Пусть $\pi(z)$ — целая функция. Для любого множества $E \subseteq \mathbf{C}$ символом \hat{E} обозначаем множество $\{\zeta : \pi^{-1}(\zeta) \setminus E \neq \emptyset\}$.

Определение 4. Говорим, что целая функция π и логарифмический вес $\mu(r)$ порядка ρ , подчинены слабому ограничению, если для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ существует множество E_ε , радиальная плотность которого меньше ε , и такая константа $\kappa_\varepsilon \geq 1$, что для любого $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$ и любого $z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\varepsilon$ выполняются оценки

$$\kappa_\varepsilon^{-1} \leq \frac{\mu(|\zeta|)}{|z|} \leq \kappa_\varepsilon. \tag{4}$$

Из (4) следует, что для фиксированного $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ при $z \rightarrow \infty$, $z \notin E_\varepsilon$,

$$\frac{\ln |\pi(z)|}{|z|} = \frac{\ln |\pi(z)|}{\mu(|\pi(z)|)} \frac{\mu(|\pi(z)|)}{|z|} \leq \frac{\ln |\pi(z)|}{\mu(|\pi(z)|)} \kappa_\varepsilon \rightarrow 0.$$

Значит, существуют окружности $|z| = R_k$, удовлетворяющие условию (3), на которых выполняется оценка $\ln |\pi(z)| \leq \sigma_k |z|$, где $\sigma_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Если z принадлежит кольцу $R_k \leq |z| \leq R_{k+1}$, то

$$\ln |\pi(z)| \leq \ln M_\pi(R_{k+1}) \leq \sigma_k R_{k+1} \leq \sigma_k \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{-2} |z|.$$

Следовательно, целая функция $\pi(z)$ имеет минимальный тип при порядке 1. Полный образ целой функции минимального типа совпадает со всей комплексной плоскостью. Значит, из (4) следует, что для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ справедливы соотношения

$$\hat{E}_\varepsilon \subseteq \pi(\mathbf{C} \setminus E_\varepsilon) \subseteq \pi(E_\varepsilon) = \pi(\mathbf{C}) = \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \setminus E_\varepsilon \subseteq \pi^{-1}(\hat{E}_\varepsilon).$$



Убедимся, что условия слабого ограничения на выбор функции $\pi(z)$ выполнены, если, например, $\pi(z)$ — целая функция вполне регулярного роста при некотором уточненном порядке $\rho_\pi(r) \rightarrow \rho_\pi \in (0; 1)$ с положительным индикатором $h_\pi(\theta)$. Действительно, функция $\mu_\pi(r) := r^{\rho_\pi(r)}$ является уточненным весом порядка ρ_π . Обратная к ней функция $\nu_\pi(t)$ является уточненным весом порядка ρ_π^{-1} . Положим $\mu(r) := \nu_\pi(\ln r)$. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(r)}{\ln r} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\mu_\pi(t)} = \infty, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu'(r)r}{\mu(r)} &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\nu'_\pi(\ln r) \ln r}{\nu_\pi(\ln r)} \frac{1}{\ln r} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu'(r)r \ln r}{\mu(r)} = \frac{1}{\rho_\pi}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений вытекает, что функция $\mu(r)$ является логарифмическим весом порядка ρ_π^{-1} . С другой стороны, в силу непрерывности индикатора $h_\pi(\theta)$ найдется такая константа $\kappa_\pi \geq 1$, что для всех θ выполняются неравенства $\kappa_\pi^{-\rho_\pi} < h_\pi(\theta) < \kappa_\pi^{\rho_\pi}$. Значит, вне некоторого множества E_π нулевой радиальной плотности имеет место асимптотическое равенство $\ln |\pi(z)| \approx h_\pi(\theta) \mu_\pi(|z|)$ и асимптотическое равенство $\mu(|\pi(z)|) \approx h(\theta) |z|$, где $\theta := \arg z$, $h(\theta) := h_\pi^{\frac{1}{\rho_\pi}}(\theta)$. Осталось для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ положить $\kappa_\varepsilon := \kappa_\pi$, в качестве множества E_ε выбрать множество E_π , дополненное кругом достаточно большого радиуса, и заключить, что вне этого множества выполняются оценки (4).

1.3. Сравнение симметричных произведений

Выберем положительное число $d < 1/2$ и две произвольные последовательности $\Lambda := \{\lambda_i\}$ и $\Lambda' := \{\lambda'_i\}$ комплексных чисел с единственной предельной точкой в бесконечности. Считаем, что

$$\min_{i \in \mathbf{N}} \min \{|\lambda_i|, |\lambda'_i|\} \geq 1 \tag{5}$$

и последовательность Λ' является d -близкой к последовательности Λ , т. е. для любого натурального i выполняется неравенство $|\lambda'_i - \lambda_i| \leq d|\lambda_i|$. Предположим еще, что последовательность Λ удовлетворяет условию: при некотором $c \in (0; +\infty)$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu(r)} \int_0^r \frac{n(t; \Lambda)}{t} dt < c, \tag{6}$$

где $n(t; \Lambda)$ — число элементов последовательности Λ в круге $\{\zeta' : |\zeta' - \zeta| \leq t\}$. Из неравенства (6) следует, что для всех достаточно больших r выполняется неравенство

$$n(r; \Lambda) < c\mu(r). \tag{7}$$

Легко проверить, что последовательность Λ является $\frac{d}{1-d}$ -близкой к последовательности Λ' . Отсюда вытекает, что для всех $r > 0$ выполняется неравенство $n(r; \Lambda') \leq n\left(\frac{r}{1-d}; \Lambda\right)$. Используя это неравенство и соотношение (1), нетрудно показать, что для последовательности Λ' выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu(r)} \int_0^r \frac{n(t; \Lambda')}{t} dt < c, \tag{8}$$

значит, для всех достаточно больших r выполняется неравенство

$$n(r; \Lambda') < c\mu(r). \tag{9}$$

Для любого положительного σ символами $\Delta_\sigma(\zeta)$ и $\Delta(\zeta, \sigma)$ обозначаем замкнутый круг $\{\zeta' : |\zeta' - \zeta| \leq \sigma|\zeta|\}$ и открытый круг $\{\zeta' : |\zeta' - \zeta| < \sigma\}$ соответственно. Символом $O(x)$ обозначаем произведение абсолютной положительной константы на $x > 0$. Составим по последовательностям Λ и Λ' произведения:

$$\begin{aligned} G(\zeta; \Lambda) &:= \prod \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right), & G_\sigma(\zeta; \Lambda) &:= \prod_{\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)} \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right), \\ G(\zeta; \Lambda') &:= \prod \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda'_i}\right), & G_\sigma(\zeta; \Lambda'|\Lambda) &:= \prod_{\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)} \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda'_i}\right). \end{aligned}$$



Предложение 1. Составленные произведения сходятся на всей комплексной плоскости и существует такое $l' > 0$, что вне круга $|\zeta| \leq l'$ выполняются оценки:

$$\begin{aligned} \ln |G(\zeta; \Lambda)| &\leq O(c) \mu(|\zeta|), & \ln |G_\sigma(\zeta; \Lambda)| &\leq O(c) \mu(|\zeta|), \\ \ln |G(\zeta; \Lambda')| &\leq O(c) \mu(|\zeta|), & \ln |G_\sigma(\zeta; \Lambda')| &\leq O(c) \mu(|\zeta|). \end{aligned}$$

Доказательство. Функция $\mu(r)$ является уточненным весом нулевого порядка, значит, $\frac{\ln \mu(t)}{\ln t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Из (7) вытекает, что $\frac{\ln n(t; \Lambda)}{\ln t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, показатель сходимости последовательности Λ равен нулю. Это означает, что произведение $G(\zeta; \Lambda)$ сходится на всей комплексной плоскости и представляет там целую функцию нулевого порядка. Убедимся в справедливости указанной для произведения $G(\zeta; \Lambda)$ оценки.

Для любого комплексного ζ справедливо неравенство

$$\ln |G(\zeta; \Lambda)| \leq \sum \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{|\lambda_i|} \right) = \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t} \right) dn(t; \Lambda).$$

Представим последний интеграл в виде суммы двух интегралов $I(0; |\zeta|) + I(|\zeta|; +\infty)$ и оценим каждый из них. Во-первых,

$$I(0; |\zeta|) := \int_0^{|\zeta|} \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t} \right) dn(t; \Lambda) = n(t; \Lambda) \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t} \right) \Big|_0^{|\zeta|} + \int_1^{|\zeta|} \frac{|\zeta| n(t; \Lambda)}{(t + |\zeta|)t} dt.$$

Из неравенств (6) и (7) вытекает, что при достаточно больших $|\zeta|$ выполняются неравенства

$$I(0; |\zeta|) \leq c \mu(|\zeta|) \ln 2 + \int_1^{|\zeta|} \frac{n(t; \Lambda)}{t} dt \leq c(1 + \ln 2) \mu(|\zeta|). \tag{10}$$

Во-вторых, оценим интеграл

$$I(|\zeta|; +\infty) := \int_{|\zeta|}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t} \right) dn(t; \Lambda) = n(t; \Lambda) \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t} \right) \Big|_{|\zeta|}^{+\infty} + \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{|\zeta| n(t; \Lambda)}{(t + |\zeta|)t} dt.$$

Для этого оценим сначала интеграл

$$J(|\zeta|; +\infty) := \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{|\zeta| \mu(t)}{(t + |\zeta|)t} dt = \mu(t) \ln \frac{t}{t + |\zeta|} \Big|_{|\zeta|}^{+\infty} + \int_{|\zeta|}^{+\infty} \mu'(t) \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t} \right) dt.$$

Замечаем, что при $t \geq |\zeta|$ выполняются неравенства

$$\frac{t + |\zeta|}{|\zeta|} \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t} \right) \leq \frac{t + |\zeta|}{|\zeta|} \frac{|\zeta|}{t} = 1 + \frac{|\zeta|}{t} \leq 2,$$

значит,

$$\begin{aligned} &\int_{|\zeta|}^{+\infty} \mu'(t) \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t} \right) dt = \\ &= \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{\mu'(t) t t + |\zeta|}{\mu(t) |\zeta|} \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t} \right) \frac{|\zeta| \mu(t)}{(t + |\zeta|)t} dt = o(1) J(|\zeta|; +\infty), \quad \zeta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\left| \mu(t) \ln \frac{t}{t + |\zeta|} \right| = \mu(t) \ln \left(1 + \frac{|\zeta|}{t} \right) \leq |\zeta| \frac{\mu(t)}{t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$



получаем:

$$J(|\zeta|; +\infty) = \mu(|\zeta|) \ln 2 + o(1)J(|\zeta|; +\infty), \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

Значит,

$$J(|\zeta|; +\infty) = \frac{\ln 2}{1 - o(1)} \mu(|\zeta|), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Наконец, в силу (7) для всех достаточно больших $|\zeta|$ выполняется неравенство

$$I(|\zeta|; +\infty) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{|\zeta|n(t; \Lambda)}{(t + |\zeta|)t} dt \leq cJ(|\zeta|; +\infty).$$

Используя (11), получаем

$$I(|\zeta|; +\infty) \leq cJ(|\zeta|; +\infty) \leq \frac{c \ln 2}{1 - o(1)} \mu(|\zeta|), \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что для достаточно больших $|\zeta|$ выполняется неравенство

$$I(|\zeta|; +\infty) \leq 2c\mu(|\zeta|) \ln 2. \quad (12)$$

Из (10) и (12) вытекает, что при достаточно больших $|\zeta|$ выполняются неравенства

$$\ln |G(\zeta; \Lambda)| \leq I(0; |\zeta|) + I(|\zeta|; +\infty) \leq O(c)\mu(|\zeta|).$$

Аналогично доказывается справедливость трёх других соотношений. При доказательстве двух последних соотношений ссылки на неравенства (6) и (7) заменяем ссылками на неравенства (8) и (9). Предложение доказано. \square

Из неравенств (7), (9) и определения логарифмического веса вытекает, что существует положительное число l'' , удовлетворяющее условию: для любого $r > l''$ выполняются неравенства

$$\max \{n(3r; \Lambda), n(3r; \Lambda')\} < c\mu(3r) < 2c\mu(r), \quad \mu'(r)r < \frac{1}{2}\mu(r).$$

Из оценок (4), в свою очередь, вытекает, что для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ существует положительное число l_ε , удовлетворяющее условию: если $|z| > l_\varepsilon$ и $z \notin E_\varepsilon$, то $|\pi(z)| > \max \{l', l''\}$. Далее будем считать, что для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ множество E_ε включает круг $\{z : |z| \leq l_\varepsilon\}$.

Предложение 2. Если $d' := \frac{d}{1-d} < \sigma \leq 1$, то для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ при $z \notin E_\varepsilon$ выполняются оценки:

$$|\ln |G_\sigma(\pi(z); \Lambda')| - \ln |G_\sigma(\pi(z); \Lambda)|| \leq O\left(\frac{c\kappa_\varepsilon d}{\sigma - d'}\right) |z|, \quad (13)$$

$$|\ln |G_1(\pi(z); \Lambda)|| \leq O(c\kappa_\varepsilon) |z|. \quad (14)$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$. Для любого комплексного ζ выполняется неравенство

$$|\ln |G_\sigma(\zeta; \Lambda')| - \ln |G_\sigma(\zeta; \Lambda)|| \leq O\left(\frac{\sigma d}{\sigma - d'}\right) J(\zeta), \quad (15)$$

где

$$J(\zeta) = \sum_{\substack{|\lambda_i| \leq 2|\zeta|, \\ \lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)}} \frac{\left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|}{\left|1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right|} + \sum_{\substack{|\lambda_i| > 2|\zeta|, \\ \lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)}} \frac{\left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|}{\left|1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right|} =: \Sigma_1(\zeta) + \Sigma_2(\zeta)$$



[11, теорема 1]. Пусть $\zeta := \pi(z)$. Оценим суммы $\Sigma_1(\zeta)$ и $\Sigma_2(\zeta)$. Так как $\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)$, то $\left|1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right| > \left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right| \sigma$. Поэтому при $z \notin E_\varepsilon$,

$$\Sigma_1(\zeta) \leq \frac{1}{\sigma} n(2|\zeta|; \Lambda) \leq \frac{2c}{\sigma} \mu(|\zeta|) \leq \frac{2c\kappa_\varepsilon}{\sigma} |z|. \tag{16}$$

В то же время для членов ряда $\Sigma_2(\zeta)$, справедлива оценка

$$\frac{\left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|}{\left|1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right|} \leq \frac{\left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|}{1 - \frac{|\zeta|}{|\lambda_i|}} < 2 \left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|,$$

откуда следует, что

$$\Sigma_2(\zeta) \leq 2|\zeta| \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{dn(t; \Lambda)}{t} = 2|\zeta| \left(\left. \frac{n(t; \Lambda)}{t} \right|_{2|\zeta|}^{+\infty} + \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{n(t; \Lambda)}{t^2} dt \right).$$

При этом

$$\frac{n(t; \Lambda)}{t} \leq c \frac{\mu(t)}{t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Значит, при $z \notin E_\varepsilon$ справедлива оценка

$$\Sigma_2(\zeta) \leq 2|\zeta| \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{n(t; \Lambda)}{t^2} dt \leq 4|\zeta|c \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{\mu(t)}{t^2} dt =: 4|\zeta|cJ(\zeta),$$

где

$$J(\zeta) := \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{\mu(t)}{t^2} dt = -\left. \frac{\mu(t)}{t} \right|_{2|\zeta|}^{+\infty} + \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{\mu'(t)t \mu(t)}{\mu(t) t^2} dt \leq \frac{\mu(2|\zeta|)}{2|\zeta|} + \frac{1}{2} \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{\mu(t)}{t^2} dt = \frac{\mu(2|\zeta|)}{2|\zeta|} + \frac{1}{2} J(\zeta).$$

Следовательно, при $z \notin E_\varepsilon$ справедливы оценки

$$\Sigma_2(\zeta) \leq 4|\zeta|c \frac{\mu(2|\zeta|)}{|\zeta|} \leq 8c\mu(|\zeta|) \leq 8c\kappa_\varepsilon |z|. \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) следует, что оценка (13) справедлива.

Осталось доказать справедливость оценки (14). Легко заметить, что для любого комплексного ζ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} -\ln |G_\sigma(\zeta; \Lambda)| &= -\sum_{\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)} \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{\lambda_i} \right| = \sum_{\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)} \ln \frac{1}{\left| 1 - \frac{\zeta}{\lambda_i} \right|} \leq \\ &\leq \sum_{\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)} \ln \left(1 + \frac{\left| \frac{\zeta}{\lambda_i} \right|}{\left| 1 - \frac{\zeta}{\lambda_i} \right|} \right) \leq J(\zeta) =: \Sigma_1(\zeta) + \Sigma_2(\zeta). \end{aligned}$$

Положим $\sigma = 1$. Из оценок (16) и (17) следует, что при $z \notin E_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$-\ln |G_1(\pi(z); \Lambda)| \leq (2c\kappa_\varepsilon + 8c\kappa_\varepsilon) |z|.$$

С другой стороны, в силу предложения 1 при $z \notin E_\varepsilon$ справедливы оценки

$$\ln |G_1(\pi(z); \Lambda)| \leq O(c)\mu(|\pi(z)|) \leq O(c\kappa_\varepsilon) |z|.$$

Это означает, что при $z \notin E_\varepsilon$ выполняется оценка (14). Предложение доказано. \square



2. СРАВНЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРИ СИЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИИ

2.1. Сильное ограничение

Определение 5. Говорим, что целая функция π и логарифмический вес $\mu(r)$ порядка ρ подчинены сильному ограничению, если для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ существует множество E_ε , радиальная плотность которого меньше ε , и такие константы $\kappa_\varepsilon \in [1; +\infty)$ и $h_\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$, что для любого $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$ выполняются условия: для любого $z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\varepsilon$ выполняются оценки (4); для любого $\zeta' \in \Delta(\zeta; h_\varepsilon) \cap \hat{E}_\varepsilon$ найдется $z' \in \pi^{-1}(\zeta') \setminus E_\varepsilon$, для которого выполняются оценки

$$\kappa_\varepsilon^{-1} \leq \kappa_\zeta^- \leq \frac{\mu(|\zeta'|)}{|z'|} \leq \kappa_\zeta^+ \leq \kappa_\varepsilon, \quad (18)$$

где $\kappa_\zeta^+ - \kappa_\zeta^- \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$, $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$.

Фиксируя конкретную точку z' в слое $z' \in \pi^{-1}(\zeta') \setminus E_\varepsilon$, для которой выполняются оценки (18), мы определяем некоторое взаимно однозначное отображение $\Delta(\zeta; h_\varepsilon) \cap \hat{E}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{C} \setminus E_\varepsilon$. Понятно, что это отображение является однозначной ветвью многозначного отображения $\pi^{-1}(\zeta')$. Обозначим ее символом $\pi_\zeta^{-1}(\zeta')$.

Условия сильного ограничения выполнены, если, например, $\pi(z)$ — целая функция вполне регулярного роста при некотором уточненном порядке $\rho_\pi(r) \rightarrow \rho_\pi \in (0; 1)$ с постоянным положительным индикатором h_π , а функция $\mu(r)$ совпадает с произведением $h_\pi^{-\frac{1}{\rho_\pi}} \nu_\pi(\ln r)$, где $\nu_\pi(t)$ — обратная к функции $\mu_\pi(r) := r^{\rho_\pi(r)}$. Действительно, функция $\mu(r)$ является логарифмическим весом порядка $1/\rho_\pi$. При этом вне некоторого открытого множества E_π нулевой радиальной плотности имеет место асимптотическое равенство $\ln |\pi(z)| \approx h_\pi \mu_\pi(|z|)$ и асимптотическое равенство $\mu(|\pi(z)|) \approx |z|$. Значит, $\frac{\mu(|\zeta|)}{|z|} \rightarrow 1$ при $\zeta \rightarrow \infty$, $\zeta \in \hat{E}_\pi$ и $z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\pi$. С другой стороны, для любого $\zeta \in \hat{E}_\pi$ множество $\pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\pi$ конечно. Пусть $\zeta \in \hat{E}_\pi$ и

$$\kappa_\pi^-(\zeta) := \min_{z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\pi} \frac{\mu(|\zeta|)}{|z|}, \quad \kappa_\pi^+(\zeta) := \max_{z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\pi} \frac{\mu(|\zeta|)}{|z|}.$$

Тогда при достаточно большом $|\zeta|$ и любом $z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\pi$ выполняются оценки

$$2^{-1} \leq \kappa_\pi^-(\zeta) \leq \frac{\mu(|\zeta|)}{|z|} \leq \kappa_\pi^+(\zeta) \leq 2.$$

При этом $\kappa_\pi^-(\zeta) \rightarrow 1$ и $\kappa_\pi^+(\zeta) \rightarrow 1$ при $\zeta \rightarrow \infty$, $\zeta \in \hat{E}_\pi$. Осталось для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$ в качестве множества E_ε выбрать множество E_π , дополненное кругом достаточно большого радиуса с центром в начале, и положить $\kappa_\varepsilon := 2$, $h_\varepsilon := \varepsilon$,

$$\kappa_\zeta^- := \inf_{\zeta' \in \Delta(\zeta; \varepsilon) \cap \hat{E}_\varepsilon} \kappa_\pi^-(\zeta'), \quad \kappa_{\zeta, z}^+ := \sup_{\zeta' \in \Delta(\zeta; \varepsilon) \cap \hat{E}_\varepsilon} \kappa_\pi^+(\zeta').$$

2.2. Подготовительные леммы

По-прежнему считаем, что последовательности Λ и Λ' удовлетворяют условиям (5), (6) и последовательность Λ' является d -близкой к последовательности Λ , $d \in (0; 1/2]$. В этом пункте докажем две леммы, касающиеся построения исключительных множеств малой радиальной плотности.

Лемма 1. Для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$, любого $\sigma \in (0; \frac{3-4h_\varepsilon}{11-4h_\varepsilon}) \subseteq (0; \frac{3}{11})$ и любого положительного N существует такое множество $E_{\varepsilon, \sigma, N}$ нулевой радиальной плотности, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E_{\varepsilon, \sigma, N}$ выполняется неравенство

$$n_\sigma(\pi(z)) := \max \{n_\sigma(\pi(z), \Lambda), n_\sigma(\pi(z), \Lambda')\} < \kappa_\varepsilon N |z|,$$

где $n_\sigma(\zeta, \Gamma)$ — число точек последовательности Γ в круге $\Delta_\sigma(\zeta)$.



Доказательство. Пусть

$$\Lambda^{(0)} := \Lambda, \quad E^{(0)} := \left\{ \zeta : n_\sigma(\zeta, \Lambda^{(0)}) \geq N\mu(|\zeta|) \right\},$$

ζ_0 — произвольный элемент $K^{(0)}$ с наименьшим модулем,

$$\Lambda^{(1)} := \left\{ \lambda_i \in \Lambda^{(0)} : \lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta_0) \right\}, \quad E^{(1)} := \left\{ \zeta : n_\sigma(\zeta, \Lambda^{(1)}) \geq N\mu(|\zeta|) \right\},$$

ζ_1 — произвольный элемент $E^{(1)}$ с наименьшим модулем,

$$\Lambda^{(2)} := \left\{ \lambda_i \in \Lambda^{(1)} : \lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta_1) \right\}, \quad E^{(2)} := \left\{ \zeta : n_\sigma(\zeta, \Lambda^{(2)}) \geq N\mu(|\zeta|) \right\}$$

и т. д. Если $E^{(k)} = \emptyset$, то полагаем $\Lambda^{(k+1)} = \Lambda^{(k+2)} = \dots = \Lambda^{(k)}$. В результате этой процедуры построим конечную или бесконечную последовательность точек $\{\zeta_k : k \in K\}$ и бесконечную цепочку последовательностей $\{\Lambda^{(k)}\}$, которые обладают следующими свойствами:

- 1) $|\zeta_0| \leq |\zeta_1| \leq \dots$, $\Lambda^{(0)} \supseteq \Lambda^{(1)} \supseteq \dots$;
- 2) число точек ζ_k с ограниченным модулем конечно;
- 3) если круг $\Delta_\sigma(\zeta)$ не пересекается ни с каким кругом $\Delta_\sigma(\zeta_k)$, то $n_\sigma(\zeta, \Lambda) < N\mu(|\zeta|)$ [11, лемма 3].

Выберем произвольные $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ и $\sigma \in (0; \frac{3-4h_\varepsilon}{11-4h_\varepsilon})$. Пусть $\delta := \frac{2\sigma}{1-\sigma} \in (0; \frac{3}{4} - h_\varepsilon)$. Если $\zeta \notin \Delta_\delta(\zeta_k)$, то $\Delta_\sigma(\zeta) \cap \Delta_\sigma(\zeta_k) = \emptyset$. Отсюда следует, что для любой точки ζ , лежащей вне системы кругов $\Delta_\delta(\zeta_k)$ выполняется неравенство

$$n_\sigma(\zeta, \Lambda) < N\mu(|\zeta|).$$

Для произвольных $k, k' \in K$ множество $\Delta(\zeta_k; \delta\zeta_{k'}) \cap \hat{E}_\varepsilon$ покрывается конечной совокупностью кружков

$$\Delta_{k,k',i} := \Delta(\zeta_{k,k',i}; h_\varepsilon), \quad i \in \{1, \dots, s_{k,k'}\},$$

где $\zeta_{k,k',i} \in \Delta(\zeta_k; \delta\zeta_{k'}) \cap \hat{E}_\varepsilon$ и для любых $\zeta' \in \Delta_{k,k',i} \cap \hat{E}_\varepsilon$ выполняются оценки

$$\kappa_\varepsilon^{-1} \leq \kappa_{k,k',i}^- \leq \frac{\mu(|\zeta'|)}{|\zeta'|} \leq \kappa_{k,k',i}^+ \leq \kappa_\varepsilon, \quad (19)$$

в которых $z' := \pi_{k,k',i}^{-1}(\zeta') \in \pi^{-1}(\zeta') \setminus E_\varepsilon$ и $\kappa_{k,k',i}^+ - \kappa_{k,k',i}^- \rightarrow 0$ при $\zeta_k \rightarrow \infty$, $\zeta_k \in \hat{E}_\varepsilon$. Нам потребуется верхняя оценка числа $s_{k,k'}$. Получим ее. Множество $\Delta(\zeta_k; \delta\zeta_{k'}) \cap \hat{E}_\varepsilon$ содержится в квадрате со стороной $\delta|\zeta_{k'}|$. Этот квадрат покрывается совокупностью квадратиков со стороной $\frac{h_\varepsilon}{\sqrt{2}}$, состоящей из $\frac{2\delta^2|\zeta_{k'}|^2}{h_\varepsilon^2}$ элементов. Выберем из этой совокупности лишь те квадратик, которые пересекаются с множеством $\Delta(\zeta_k; \delta\zeta_{k'}) \cap \hat{E}_\varepsilon$. Каждый из этих квадратиков помещается в круг радиуса h_ε , центр которого лежит в множестве $\Delta(\zeta_k; \delta\zeta_{k'}) \cap \hat{E}_\varepsilon$. Значит,

$$s_{k,k'} \leq \frac{2\delta^2|\zeta_{k'}|^2}{h_\varepsilon^2} \leq \frac{2|\zeta_{k'}|^2}{h_\varepsilon^2}.$$

Положим

$$E_{\varepsilon,\sigma,N}^{(k')} := \bigcup_{k \in K} \bigcup_{i=1}^{s_{k,k'}} \pi_{k,k',i}^{-1} \left(\Delta_{k,k',i} \cap \hat{E}_\varepsilon \right), \quad E'_{\varepsilon,\sigma,N} := \bigcup_{k \in K} E_{\varepsilon,\sigma,N}^{(k')}.$$

Если $z \notin E_\varepsilon \cup E'_{\varepsilon,\sigma,N}$, то $z \notin E_\varepsilon \cup E_{\varepsilon,\sigma,N}^{(k')}$ при любом $k \in K$. Значит, $\zeta := \pi(z) \in \hat{E}_\varepsilon$ и $\zeta \notin \pi \left(E_{\varepsilon,\sigma,N}^{(k')} \right)$. Отсюда вытекает, что точка ζ не лежит в множестве $\Delta_\delta(\zeta_k) \cap \hat{E}_\varepsilon$ при любом k . Следовательно, точка ζ лежит вне системы кругов $\Delta_\delta(h_k)$. Из вышеизложенного следует, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_{\varepsilon,\sigma,N}$ выполняются неравенства

$$n_\sigma(\pi(z), \Lambda) < N\mu(|\pi(z)|) \leq \kappa_\varepsilon N|z|.$$



Оценим радиальную плотность множества $E'_{\varepsilon, \sigma, N}$. Для этого оценим радиальную плотность множества $E_{\varepsilon, \sigma, N}^{(k')}$. Если $z', z'' \in \pi_{k, k', i}^{-1}(\Delta_{k, k', i} \cap \hat{E}_\varepsilon)$, то образы $\zeta' := \pi(z')$ и $\zeta'' := \pi(z'')$ лежат в множестве $\Delta_{k, k', i} \cap \hat{E}_\varepsilon$. В силу оценок (19)

$$|z'| - |z''| \leq \frac{\mu(|\zeta'|)}{\kappa_{k, k', i}^-} - \frac{\mu(|\zeta''|)}{\kappa_{k, k', i}^+} \leq \frac{\mu(|\zeta_k| (1 + \delta + h_\varepsilon))}{\kappa_{k, k', i}^-} - \frac{\mu(|\zeta_k| (1 - \delta - h_\varepsilon))}{\kappa_{k, k', i}^+} =: \delta_{k, k', i} r_{k, k', i},$$

где

$$r_{k, k', i} := \frac{\mu(|\zeta_k| (1 - \delta - h_\varepsilon))}{\kappa_{k, k', i}^+}, \quad \delta_{k, k', i} := \frac{\kappa_{k, k', i}^+ \mu(|\zeta_k| (1 + \delta + h_\varepsilon))}{\kappa_{k, k', i}^- \mu(|\zeta_k| (1 - \delta - h_\varepsilon))} - 1.$$

При этом

$$1 + \delta + h_\varepsilon \in \left(1; \frac{7}{4}\right), \quad 1 - \delta - h_\varepsilon \in \left(\frac{1}{4}; 1\right).$$

В силу (1)

$$\delta_{k, k', i} \rightarrow 0, \quad |\zeta_k| \rightarrow \infty.$$

Множество $\pi_{k, k', i}^{-1}(\Delta_{k, k', i} \cap \hat{E}_\varepsilon)$ лежит в кольце

$$\{z : r_{k, k', i} \leq |z| \leq (1 + \delta_{k, k', i}) r_{k, k', i}\},$$

значит, множество $E_{\varepsilon, \sigma, N}^{(k')}$ покрывается системой колец

$$\Sigma(k') := \{z : ||z| - r_{k, k', i}| \leq \delta_{k, k', i} r_{k, k', i}\} : \quad k \in K, \quad i \in \{1, \dots, s_{k, k'}\}.$$

Пусть

$$t := \frac{1}{1 - \delta - h_\varepsilon} \nu(\kappa_\varepsilon r).$$

Тогда $r = \kappa_\varepsilon^{-1} \mu(t(1 - \delta - h_\varepsilon))$. Если $r_{k, k', i} \leq r$, то

$$|\zeta_k| \leq \frac{1}{1 - \delta - h_\varepsilon} \nu(\kappa_{k, k', i}^+ r) \leq t.$$

При этом для достаточно больших r выполняются неравенства

$$\mu(t(1 - \delta - h_\varepsilon)) \geq \mu\left(\frac{1}{4}t\right) \geq \frac{1}{2}\mu(t).$$

Поэтому для любого $\varepsilon' > 0$ при достаточно больших r получаем:

$$\begin{aligned} m_{\Sigma(k')}(r) &= \frac{1}{r} \sum_{|r_{k, k', i}| \leq r} \delta_{k, k', i} r_{k, k', i} \leq \\ &\leq \frac{\kappa_\varepsilon}{\mu(t(1 - \delta - h_\varepsilon))} \sum_{|\zeta_k| \leq t} \mu(|\zeta_k| (1 - \delta - h_\varepsilon)) \sum_{i=1}^{s_{k, k'}} \frac{\delta_{k, k', i}}{\kappa_{k, k', i}^+} < \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{4c\mu(t)} \sum_{t' < |\zeta_k| \leq t} N\mu(|\zeta_k|), \end{aligned}$$

где t' выбрано из условия

$$\delta_{k, k', i} < \frac{\varepsilon' \kappa_{k, k', i}^+ h_\varepsilon^2}{16c\kappa_\varepsilon |\zeta_{k'}|^2} N, \quad i \in \{1, \dots, s_{k, k'}\}, \quad |\zeta_k| > t'.$$

Задача свелась к оценке суммы

$$\sum_{t' < |\zeta_k| \leq t} N\mu(|\zeta_k|) \leq \sum_{|\zeta_k| \leq t} N\mu(|\zeta_k|).$$



Учитывая, что в каждом круге $\Delta_\sigma(\zeta_k)$ содержится не менее $N\mu(|\zeta_k|)$ точек из $\Lambda^{(k)}$ и при этом разные круги содержат только разные точки, делаем вывод, что для $t > l''$ выполняются неравенства

$$\sum_{|\zeta_k| \leq t} N\mu(|\zeta_k|) \leq \sum_{|\zeta_k| \leq t} n_\sigma(\zeta_k, \Lambda^{(k)}) \leq n(t(1 + \sigma), \Lambda) \leq n(2t, \Lambda) \leq 2c\mu(t).$$

Значит, для достаточно больших r выполняется неравенство $m_{\Sigma(k')}(r) < \varepsilon'$. Из произвольности выбора $\varepsilon' > 0$ вытекает, что множество $E_{\varepsilon, \sigma, N}^{(k')}$ имеет нулевую радиальную плотность. Отсюда следует, что множество $E'_{\varepsilon, \sigma, N}$ тоже имеет нулевую радиальную плотность.

Далее повторим рассуждения, но уже по отношению к последовательности Λ' . В результате будет построено множество $E''_{\varepsilon, \sigma, N}$ нулевой радиальной плотности такое, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E''_{\varepsilon, \sigma, N}$ выполняется неравенство

$$n_\sigma(\pi(z), \Lambda') < \kappa_\varepsilon N |z|.$$

Осталось положить $E_{\varepsilon, \sigma, N} = E'_{\varepsilon, \sigma, N} \cup E''_{\varepsilon, \sigma, N}$. Лемма доказана. \square

Лемма 2. Для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$ существует такое множество E'_ε , радиальная плотность которого равна нулю, что при любом $t \in (0; 1]$ и $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ выполняется оценка

$$n_t(\pi(z)) := \max \{n_t(\pi(z); \Lambda), n_t(\pi(z); \Lambda')\} \leq O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{t} |z|.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0; 1/2)$. Из включения $h_\varepsilon \in (0; 1/2)$ вытекает, что $\frac{3-4h_\varepsilon}{11-4h_\varepsilon} \in (\frac{1}{9}; \frac{3}{11})$. Выберем произвольное $\sigma_0 \in (\frac{1}{9}; \frac{3-4h_\varepsilon}{11-4h_\varepsilon})$ и для любого натурального k положим $\sigma_k := 2^{-2k}\sigma_0$, $N_k := c2^{-k}$. По лемме 1 существует такое множество $E_{\varepsilon, k}$, радиальная плотность которого равна нулю, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E_{\varepsilon, k}$ выполняется неравенство $n_{\sigma_{k-1}}(\pi(z)) < \kappa_\varepsilon N_k |z|$. Если $t \in [\sigma_k; \sigma_{k-1})$, то $n_t(\pi(z)) \leq n_{\sigma_{k-1}}(\pi(z))$. Значит, для всех $t \in [\sigma_k; \sigma_{k-1})$ и $z \notin E_\varepsilon \cup E_{\varepsilon, k}$ имеет место оценка

$$n_t(\pi(z)) < \kappa_\varepsilon N_k |z|.$$

Положим

$$E'_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{\varepsilon, k}.$$

Радиальная плотность множества E'_ε равна нулю. Выберем произвольное $t \in (0; \sigma_0)$ и определим k из условия

$$\frac{1}{9} 2^{-2k} \leq \sigma_k \leq t < \sigma_{k-1}.$$

Если $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$, то

$$n_t(\pi(z)) \leq \kappa_\varepsilon N_k |z| = c\kappa_\varepsilon 2^{-k} |z| \leq 3c\kappa_\varepsilon \sqrt{t} |z| = O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{t} |z|.$$

Если же $t \in [\sigma_0; 1]$ и $z \notin E_\varepsilon$, то

$$\begin{aligned} n_t(\pi(z)) &\leq \max \{n(2|\pi(z)|, \Lambda), n(2|\pi(z)|, \Lambda')\} \leq \\ &\leq 2c\mu(|\pi(z)|) \leq 6\sqrt{\sigma_0} c\kappa_\varepsilon |z| \leq 6c\kappa_\varepsilon \sqrt{t} |z| = O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{t} |z|. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

2.3. Сравнение симметричных произведений

Для любых $\alpha, \beta \in [0; 1]$ обозначим

$$I_\alpha^{(1)}(\zeta) := \alpha \int_0^1 \frac{n_t(\zeta; \Lambda)}{t(t+\alpha)} dt, \quad I_\alpha^{(2)}(\zeta) := \alpha \int_0^1 \frac{n_t(\zeta; \Lambda')}{t(t+\alpha)} dt,$$



$$I_{\alpha,\beta}^{(1)}(\zeta) := \alpha \int_{\beta}^1 \frac{n_t(\zeta; \Lambda)}{(t+1)(t+\alpha)} dt, \quad I_{\alpha,\beta}^{(2)}(\zeta) := \alpha \int_{\beta}^1 \frac{n_t(\zeta; \Lambda')}{(t+1)(t+\alpha)} dt.$$

Пусть

$$I(\zeta) := I_1^{(2)}(\zeta) - I_1^{(1)}(\zeta) = \int_0^1 \frac{n_t(\zeta; \Lambda') - n_t(\zeta; \Lambda)}{t(t+1)} dt.$$

Тогда для любого комплексного ζ выполняются неравенства [11, лемма 5]

$$-I_{\alpha_1}^{(1)}(\zeta) - \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} I_{\alpha_1, \beta_1}^{(1)}(\zeta) \leq I(\zeta) \leq I_{\alpha_2}^{(2)}(\zeta) + \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2} I_{\alpha_2, \beta_2}^{(2)}(\zeta), \quad (20)$$

где

$$\alpha_1 := \frac{d}{1+d}, \quad \alpha_2 := d, \quad \beta_1 := \frac{1-d}{1+d}, \quad \beta_2 := 1-2d, \quad d \in (0; 1/2].$$

Лемма 3. Для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$ и любого $d \in (0; 1/2]$ при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ выполняются оценки:

$$|I(\pi(z))| \leq O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{d} |z|, \quad |I_1^{(1)}(\pi(z))| \leq O(c\kappa_\varepsilon) |z|.$$

Доказательство. Пусть $\zeta := \pi(z)$. При $z \notin E_\varepsilon$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} I_{\alpha_i, \beta_i}^{(i)}(\zeta) &\leq 2c(1-\alpha_i) \mu(|\zeta|) \int_{\beta_i}^1 \frac{dt}{(t+1)(t+\alpha_i)} \leq \\ &\leq 4cd\mu(|\zeta|) \leq 2\sqrt{2}c\sqrt{d}\mu(|\zeta|) \leq O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{d} |z|, \quad i \in \{1; 2\}. \end{aligned}$$

Для оценки интеграла $I_{\alpha_i}^{(i)}(\zeta)$ воспользуемся леммой 2. Согласно этой лемме $n_t(\zeta) \leq O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{t} |z|$ при $t \in (0; 1]$ и $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$. Значит, при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ получаем:

$$\begin{aligned} I_{\alpha_i}^{(i)}(\zeta) &\leq \alpha_i \int_0^1 \frac{n_t(\zeta)}{t(t+\alpha_i)} dt \leq \alpha_i O(c\kappa_\varepsilon) |z| \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+\alpha_i)} \leq \\ &\leq \sqrt{\alpha_i} O(c\kappa_\varepsilon) |z| \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)} \leq O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{d} |z|, \quad i \in \{1; 2\}. \end{aligned}$$

Из неравенств (20) вытекает первая из требуемых оценок. Вторая оценка практически очевидна. При $z \notin E_\varepsilon$ имеем:

$$0 \leq I_1^{(1)}(\zeta) = \int_0^1 \frac{n_t(\zeta; \Lambda)}{t(t+1)} dt \leq O(c\kappa_\varepsilon) |z| \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} dt \leq O(c\kappa_\varepsilon) |z|.$$

Лемма доказана. □

Составим суммы:

$$\begin{aligned} A_\sigma(\zeta; \Lambda) &= \sum_{\lambda_i \in \Delta_\sigma(\zeta)} \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{\lambda_i} \right|, & A_\sigma(\zeta; \Lambda'|\Lambda) &= \sum_{\lambda_i \in \Delta_\sigma(\zeta)} \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{\lambda'_i} \right|, \\ L_\sigma(\zeta; \Lambda) &= \sum_{\lambda_i \in \Delta_\sigma(z)} \ln \frac{|\zeta| + |\lambda_i - \zeta|}{|\lambda_i|}, & L_\sigma(\zeta; \Lambda'|\Lambda) &= \sum_{\lambda_i \in \Delta_\sigma(\zeta)} \ln \frac{|\zeta| + |\lambda'_i - \zeta|}{|\lambda'_i|} \end{aligned}$$

и обозначим $n_{t,\sigma}(\zeta; \Lambda'|\Lambda)$ число точек λ'_i , принадлежащих кругу $\Delta_t(\zeta)$, с номерами i , удовлетворяющими условию $\lambda_i \in \Delta_\sigma(\zeta)$. Справедливы соотношения:

$$A_\sigma(\zeta; \Lambda) - L_\sigma(\zeta; \Lambda) = n_\sigma(\zeta; \Lambda) \ln \frac{\sigma}{1+\sigma} - \int_0^\sigma \frac{n_t(\zeta; \Lambda)}{t(1+t)} dt; \quad (21)$$



$$A_\sigma(\zeta; \Lambda'|\Lambda) - L_\sigma(\zeta; \Lambda'|\Lambda) = n_{s,\sigma}(\zeta; \Lambda'|\Lambda) \ln \frac{s}{1+s} - \int_0^s \frac{n_{t,\sigma}(\zeta; \Lambda'|\Lambda)}{t(1+t)} dt, \quad s = d + \sigma + \sigma d; \quad (22)$$

$$|L_\sigma(\zeta; \Lambda'|\Lambda) - L_\sigma(\zeta; \Lambda)| \leq n(2|\zeta|; \Lambda) 2d; \quad (23)$$

$$L_\sigma(\zeta; \Lambda) \leq \int_0^{2|\zeta|} \frac{n(t; \Lambda)}{t} dt, \quad L_\sigma(\zeta; \Lambda') \leq \int_0^{2|\zeta|} \frac{n(t; \Lambda')}{t} dt. \quad (24)$$

Равенства (21) и (22) выполняются для любых комплексных ζ , любых $\sigma > 0$ и $d \in (0; 1/2]$ [11, лемма 6]. Неравенства (23) и (24) справедливы для любых комплексных ζ , любых $\sigma \in (0; 1]$ и $d \in (0; 1/2]$ [11, лемма 7].

Предложение 3. Для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ и любого $d \in (0; \frac{1}{2}]$ при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ выполняются оценки:

$$|\ln |G(\pi(z); \Lambda')| - \ln |G(\pi(z); \Lambda)|| \leq O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{d} |z|, \quad (25)$$

$$|\ln |G(\pi(z); \Lambda)|| \leq O(c\kappa_\varepsilon) |z|. \quad (26)$$

Доказательство. Пусть $\zeta := \pi(z)$. Имеют место следующие представления:

$$\ln |G(\zeta; \Lambda)| = A_\sigma(\zeta; \Lambda) + \ln |G_\sigma(\zeta; \Lambda)| = (A_\sigma(\zeta; \Lambda) - L_\sigma(\zeta; \Lambda)) + L_\sigma(\zeta; \Lambda) + \ln |G_\sigma(\zeta; \Lambda)|, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \ln |G(\zeta; \Lambda')| &= A_\sigma(\zeta; \Lambda') + \ln |G_\sigma(\zeta; \Lambda')| = \\ &= (A_\sigma(\zeta; \Lambda') - L_\sigma(\zeta; \Lambda')) + L_\sigma(\zeta; \Lambda') + \ln |G_\sigma(\zeta; \Lambda')|. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя (27) и (28), получим:

$$\begin{aligned} |\ln |G(\zeta; \Lambda')| - \ln |G(\zeta; \Lambda)|| &\leq |(A_\sigma(\zeta; \Lambda') - L_\sigma(\zeta; \Lambda')) - (A_\sigma(\zeta; \Lambda) - L_\sigma(\zeta; \Lambda))| + \\ &+ |L_\sigma(\zeta; \Lambda') - L_\sigma(\zeta; \Lambda)| + |\ln |G_\sigma(\zeta; \Lambda')| - \ln |G_\sigma(\zeta; \Lambda)||. \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть $d \in (0; 1/4)$. Положим в (29) $\sigma = 1$ и применим к соответствующим компонентам полученного неравенства соотношения (21), (22) и (23). Замечая, что $n_{1+2d,1}(\zeta; \Lambda'|\Lambda) = n_1(\zeta; \Lambda)$, получим:

$$\begin{aligned} |\ln |G(\zeta; \Lambda')| - \ln |G(\zeta; \Lambda)|| &\leq |I(\zeta)| + \left| \int_0^1 \frac{n_t(\zeta; \Lambda')}{t(1+t)} dt - \int_0^{1+2d} \frac{n_{t,1}(\zeta; \Lambda'|\Lambda)}{t(1+t)} dt \right| + n_1(\zeta; \Lambda) \ln \frac{1+2d}{1+d} + \\ &+ n(2|\zeta|; \Lambda) 2d + |\ln |G_1(\zeta; \Lambda')| - \ln |G_1(\zeta; \Lambda)||. \end{aligned}$$

Если $t \in (0, 1 - 2d)$, то в силу $\frac{d}{1-d}$ -близости последовательности Λ к последовательности Λ' , из включения $\lambda'_i \in \Delta_t(\zeta)$ следует включение $\lambda_i \in \Delta_1(\zeta)$. Поэтому при таких значениях t выполняется равенство $n_{t,1}(\zeta; \Lambda'|\Lambda) = n_t(\zeta; \Lambda')$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{n_t(\zeta; \Lambda')}{t(1+t)} dt - \int_0^{1+2d} \frac{n_{t,1}(\zeta; \Lambda'|\Lambda)}{t(1+t)} dt \right| &\leq \int_{1-2d}^1 \frac{n_t(\zeta; \Lambda')}{t(1+t)} dt + \int_{1-2d}^{1+2d} \frac{n_t(\zeta; \Lambda'|\Lambda)}{t(1+t)} dt \leq \\ &\leq 2n(3|\zeta|; \Lambda') \int_{1-2d}^{1+2d} \frac{dt}{t(1+t)} \leq 2n(3|\zeta|; \Lambda') \ln \frac{(1+2d)(1-d)}{(1-2d)(1+d)} \leq O(D)n(3|\zeta|; \Lambda'). \end{aligned}$$

В силу предложения 2 и леммы 3 при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$

$$|\ln |G(\zeta; \Lambda')| - \ln |G(\zeta; \Lambda)|| \leq |I(\zeta)| + |\ln |G_1(\zeta; \Lambda')| - \ln |G_1(\zeta; \Lambda)|| + O(D)n(3|\zeta|) \leq O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{d} |z|.$$

Таким образом, оценка (25) доказана в случае $d \in (0; 1/4)$.

Пусть $d \in [1/4; 1/2]$. Положим в (27) $\sigma = 1$ и применим к первому слагаемому в сумме справа соотношение (21). Получим равенство

$$\ln |G(\zeta; \Lambda)| = -n_1(\zeta; \Lambda) \ln 2 - I_1^{(1)}(\zeta) + L_1(\zeta; \Lambda) + \ln |G_1(\zeta; \Lambda)|.$$



Аналогичное равенство справедливо и для последовательности Λ' :

$$\ln |G(\zeta; \Lambda')| = -n_\sigma(\zeta; \Lambda') \ln 2 - I_1^{(2)}(\zeta) + L_1(\zeta; \Lambda') + \ln |G_1(\zeta; \Lambda')|.$$

Из этих равенств вытекает оценка

$$\begin{aligned} |\ln |G(\zeta; \Lambda')| - \ln |G(\zeta; \Lambda)|| &\leq |I(\zeta)| + n(2|\zeta|)2 \ln 2 + \\ &+ L_1(\zeta; \Lambda) + |\ln |G_1(\zeta; \Lambda)|| + L_1(\zeta; \Lambda') + |\ln |G_1(\zeta; \Lambda')||. \end{aligned}$$

Из этой оценки, неравенств (24), предложения 2 и леммы 3 вытекает, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ выполняется неравенство (25).

Для доказательства оценки (26) воспользуемся соотношением (27), в котором опять положим $\sigma = 1$. Получаем

$$|\ln |G(\zeta; \Lambda)|| \leq n_1(\zeta; \Lambda) \ln 2 + I_1^{(1)}(\zeta) + L_1(\zeta; \Lambda) + |\ln |G_1(\zeta; \Lambda)||.$$

Из этой оценки, неравенств (24), предложения 2 и леммы 3 вытекает, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ выполняется неравенство (26). Предложение доказано. \square

3. СРАВНЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ СИЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИИ

3.1. Собственное исчерпание плоскости

Сначала докажем одно предложение, которое имеет самостоятельное значение.

Определение 6. Говорим, что *комплексная плоскость допускает собственное π -исчерпание*, если существуют открытые множества G_n , удовлетворяющие условиям: сужение функции $\pi(z)$ на каждое множество G_n является собственным отображением на некоторую односвязную область и

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbf{C}. \quad (30)$$

Сужение функции $\pi(z)$ на открытое множество G_n является собственным отображением на $\pi(G_n)$ тогда и только тогда, когда справедлива следующая импликация: если последовательность $z_k \in G_n$ не имеет в G_n предельных точек, то последовательность $\pi(z_k)$ не имеет предельных точек в $\pi(G_n)$. Воспользуемся этим описанием собственных отображений и покажем, что при выполнении слабого ограничения на выбор целой функции $\pi(z)$ (см. п. 1.2) комплексная плоскость допускает собственное π -исчерпание.

Предположим, что существуют положительные числа κ, q и последовательность r_n , удовлетворяющая условию

$$0 < r_1 \leq r_n < r_{n+1} \leq qr_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

такая, что при всех действительных θ выполняется оценка

$$\kappa^{-1} r_n \leq \mu(|\pi(r_n e^{i\theta})|). \quad (31)$$

Пусть

$$G_n := \pi^{-1}(\Delta(0; t_n)) \cap \Delta(0; r_n),$$

где $t_n := \nu((2\kappa)^{-1} r_n)$, ν — обратная к функции μ .

Предложение 4. При достаточно большом n сужение функции $\pi(z)$ на множество G_n является собственным отображением на круг $\Delta(0; t_n)$ и при этом выполняются соотношения (30).

Доказательство. Во-первых, убедимся, что для любого натурального n выполняется соотношение $\pi(G_n) = \Delta(0; t_n)$. Вложение $\pi(G_n) \subseteq \Delta(0; t_n)$ является очевидным. Проверим выполнимость



обратного вложения $\Delta(0; t_n) \subseteq \pi(G_n)$. Пусть $\zeta \in \Delta(0; t_n)$. Если $|z| = r_n$, то в силу (1) и (31) при достаточно больших n

$$\begin{aligned} \kappa^{-1} r_n \leq \mu(|\pi(z)|) &\leq \frac{\mu(|\pi(z)|)}{\mu\left(|\pi(z)| \left(1 - \left|\frac{\pi(0)}{\pi(z)}\right|\right)\right)} \mu(|\pi(z) - \pi(0)|) \leq \\ &\leq \frac{\mu(|\pi(z)|)}{\mu\left(|\pi(z)| \left(1 - \frac{|\pi(0)|}{\nu(\kappa^{-1} r_n)}\right)\right)} \mu(|\pi(z) - \pi(0)|) \leq 2\mu(|\pi(z) - \pi(0)|). \end{aligned}$$

Значит,

$$|-\zeta + \pi(0)| = |\zeta - \pi(0)| < t_n := \nu((2\kappa)^{-1} r_n) \leq |\pi(z) - \pi(0)|.$$

По теореме Руше функции $\pi - \pi(0)$ и $\pi - \zeta$ имеют в круге $\Delta(0; r_n)$ одинаковое число корней. Так как ноль является корнем функции $\pi - \pi(0)$, то найдется такое $z \in \Delta(0; r_n)$, что $\zeta = \pi(z)$. Это означает, что

$$z \in \pi^{-1}(\zeta) \cap \Delta(0; r_n) \subseteq G_n$$

или $\zeta \in \pi(G_n)$ и, следовательно, $\Delta(0; t_n) \subseteq \pi(G_n)$.

Во-вторых, убедимся, что при достаточно большом n сужение функции π на G_n является собственным отображением на круг $\Delta(0; t_n)$. Допустим, что последовательность $z_k \in G_n$ не имеет в G_n предельных точек и предположим, что $\zeta_0 \in \Delta(0; t_n)$ — предельная точка последовательности $\pi(z_k)$. Тогда существует подпоследовательность z_{k_m} такая, что

$$z_{k_m} \rightarrow z_0, \quad \pi(z_{k_m}) \rightarrow \zeta_0, \quad \pi(z_0) = \zeta_0, \quad |z_0| \leq r_n.$$

Так как $\zeta_0 \in \Delta(0; t_n)$, то $|\zeta_0 - \pi(0)| < t_n$, и в силу строгой монотонности функции μ имеем:

$$2\kappa\mu(|\zeta_0 - \pi(0)|) < 2\kappa\mu(t_n) = r_n.$$

В силу (31) для достаточно большого n и любого действительного θ получаем:

$$2\kappa\mu(|\zeta_0 - \pi(0)|) < r_n \leq 2\kappa\mu(|\pi(r_n e^{i\theta}) - \pi(0)|).$$

Следовательно, в силу строгой монотонности функции μ для любого действительного θ будет выполняться неравенство

$$|\pi(z_0) - \pi(0)| = |\zeta_0 - \pi(0)| < |\pi(r_n e^{i\theta}) - \pi(0)|.$$

Так как $|z_0| \leq r_n$, то $|z_0| < r_n$, и, значит,

$$z_0 \in \pi^{-1}(\Delta(0; t_n)) \cap \Delta(0; r_n) =: G_n.$$

Это противоречит предположению, что последовательность z_k не имеет предельных точек в G_n .

В-третьих, докажем выполнимость соотношений (30). Так как последовательности t_n и r_n возрастают, то

$$\Delta(0; t_1) \subseteq \Delta(0; t_2) \subseteq \dots, \quad \Delta(0; r_1) \subseteq \Delta(0; r_2) \subseteq \dots$$

Отсюда следует, что $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$. Так как $t_n \rightarrow \infty$ и $r_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(0; t_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(0; r_n) = \mathbf{C}.$$

Это означает, что для всякого комплексного z найдется такое натуральное n , что $\pi(z) \in \Delta(0; t_n)$ и $z \in \Delta(0; r_n)$. Из этих включений вытекает, что

$$z \in \pi^{-1}(\Delta(0; t_n)) \cap \Delta(0; r_n) =: G_n.$$



Следовательно,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{C}.$$

Предложение доказано. □

Предложения такого типа используются при переходах от задач спектрального синтеза к эквивалентным задачам локального описания [4]. Нас же сейчас интересует лишь одно следствие предложения 4. Отметим предварительно, что при доказательстве этого предложения условие $r_{n+1} \leq qr_n$ не использовалось, но оно будет использовано ниже при доказательстве следствия.

Следствие. Если для целой π -симметричной функции $f(\pi(z))$ при некоторых $a, b > 0$ выполняется равномерная по z оценка

$$\ln |f(\pi(z))| \leq a |z| + b,$$

то вне круга $\Delta(0; t)$ при достаточно большом t выполняется оценка

$$\ln |f(\zeta)| \leq 4aq\kappa\mu(|\zeta|) + b.$$

Доказательство. Пусть $t_n \leq |\zeta - \pi(0)| \leq t_{n+1}$. По предложению 4 при достаточно большом n существует $z \in G_{n+1} \subseteq \Delta(0; r_{n+1})$, для которого $\zeta = \pi(z)$. Значит, вне круга $\Delta(0; t)$ при достаточно большом t выполняются оценки

$$\begin{aligned} \ln |f(\zeta)| &= \ln |f(\pi(z))| \leq \ln M_{f \circ \pi}(r_{n+1}) \leq \ln M_{f \circ \pi}(qr_n) \leq aqr_n + b = \\ &= 2aq\kappa\mu(t_n) + b \leq 2aq\kappa\mu(|\zeta - \pi(0)|) + b = 2aq\kappa \frac{\mu(|\zeta - \pi(0)|)}{\mu(|\zeta|)} \mu(|\zeta|) + b \leq 4aq\kappa\mu(|\zeta|) + b. \end{aligned}$$

Следствие доказано. □

3.2. Сравнение симметричных функций

Теперь все готово для доказательства основной теоремы сравнения, которая предполагает наложение сильного ограничения на выбор целой функции $\pi(z)$. Пусть $f(\pi(z))$ и $g(\pi(z))$ — две целые π -симметричные функции экспоненциального типа; Λ и Λ' — последовательности корней целых функций $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ соответственно, лежащих вне единичного круга $\Delta(0; 1)$; $d \in (0; 1/2]$. В силу следствия из предложения 4

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\mu(r)} < +\infty, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_g(r)}{\mu(r)} < +\infty.$$

Теорема 1. Если

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\mu(r)} < c \in (0; +\infty) \tag{32}$$

и последовательность Λ' является d -близкой к последовательности Λ , то для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$ существует такое множество $\mathcal{E}_\varepsilon \supseteq E_\varepsilon$, радиальная плотность которого меньше ε , что при $z \notin \mathcal{E}_\varepsilon$ выполняется оценка

$$|\ln |f(\pi(z))| - \ln |g(\pi(z))|| \leq O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{d} |z| + |m - n| \kappa_\varepsilon |z|^{\frac{2}{1+\rho}}, \tag{33}$$

где m и n — число корней (с учетом кратности) функций $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ соответственно в единичном круге $\Delta(0; 1)$.

Доказательство. Всякий логарифмический вес является уточненным весом нулевого порядка, значит,

$$\frac{\ln \mu(r)}{\ln r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$



В силу следствия из предложения 4 функции $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ являются целыми функциями нулевого порядка. По теореме Адамара для любых ζ имеем:

$$f(\zeta) = p(\zeta)G(\zeta; \Lambda), \quad g(\zeta) = q(\zeta)G(\zeta; \Lambda'),$$

где $p(\zeta)$ и $q(\zeta)$ — некоторые многочлены с корнями в единичном круге $\Delta(0; 1)$. Значит, имеют место представления

$$f(\pi(z)) = p(\pi(z))G(\pi(z); \Lambda), \quad g(\pi(z)) = q(\pi(z))G(\pi(z); \Lambda').$$

Пусть m и n — степени многочленов $p(\zeta)$ и $q(\zeta)$ соответственно. Допустим, что функция $f(\zeta)$ имеет в нуле корень кратности $m_0 \in [0; m]$. По формуле Йенсена из неравенства (32) вытекает, что при достаточно больших r и некотором $\varepsilon_0 > 0$ выполняются неравенства

$$m_0 \ln r + \int_0^r \frac{n(t; \Lambda) + m - m_0}{t} dt < (c - \varepsilon_0) \mu(r) - \ln \frac{|f^{(m_0)}(0)|}{m_0!}.$$

Значит,

$$\frac{1}{\mu(r)} \int_0^r \frac{n(t; \Lambda)}{t} dt + \varepsilon_0 < c - \frac{m \ln r}{\mu(r)} - \frac{1}{\mu(r)} \ln \frac{|f^{(m_0)}(0)|}{m_0!}.$$

Отсюда следует, что последовательность Λ удовлетворяет условию (6). По предложению 3 для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ существует такое множество $\mathcal{E}_\varepsilon \supseteq E_\varepsilon$, радиальная плотность которого меньше ε , что при $z \notin \mathcal{E}_\varepsilon$ выполняется оценка

$$|\ln |G(\pi(z); \Lambda)| - \ln |G(\pi(z); \Lambda')|| \leq O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{d} |z|.$$

Значит, при $z \notin \mathcal{E}_\varepsilon$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} |\ln |f(\pi(z))| - \ln |g(\pi(z))|| &\leq |\ln |G(\pi(z); \Lambda)| - \ln |G(\pi(z); \Lambda')|| + |\ln |p(\pi(z))| - \ln |q(\pi(z))|| \leq \\ &\leq O(c\kappa_\varepsilon) \sqrt{d} |z| + \left| \ln \left| \frac{p(\pi(z))}{\pi(z)^m} \right| - \ln \left| \frac{q(\pi(z))}{\pi(z)^n} \right| \right| + |m - n| |\ln |(\pi(z))||. \end{aligned}$$

В силу определения логарифмического веса порядка ρ и условий на выбор функции $\pi(z)$ имеем:

$$\frac{\ln \mu(|\pi(z)|)}{\ln \ln |\pi(z)|} \rightarrow \rho \in (1; +\infty), \quad z \rightarrow \infty, \quad z \notin E_\varepsilon.$$

Следовательно, при $z \notin \mathcal{E}_\varepsilon$ вне круга $\Delta(0; r_\varepsilon)$ достаточно большого радиуса r_ε выполняются оценки

$$\begin{aligned} |\ln |\pi(z)|| &< \mu^{\frac{2}{1+\rho}}(|\pi(z)|) \leq \kappa_\varepsilon^{\frac{2}{1+\rho}} |z|^{\frac{2}{1+\rho}} \leq \kappa_\varepsilon |z|^{\frac{2}{1+\rho}}, \\ \left| \ln \left| \frac{p(\pi(z))}{\pi(z)^m} \right| - \ln \left| \frac{q(\pi(z))}{\pi(z)^n} \right| \right| &+ |m - n| |\ln |(\pi(z))|| \leq |m - n| \kappa_\varepsilon |z|^{\frac{2}{1+\rho}}. \end{aligned}$$

Осталось дополнить множество \mathcal{E}_ε кругом $\Delta(0; r_\varepsilon)$ и заключить, что вне этого множества выполняется оценка (33). Теорема доказана. \square

4. ФАКТОРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

4.1. Эквивалентность симметричных произведений

Определение 7. Две функции f_1, f_2 комплексной переменной называются *эквивалентными* (в обозначениях $f_1 \sim f_2$), если существует множество E нулевой радиальной плотности такое, что

$$|\ln |f_1(z)| - \ln |f_2(z)|| = o(|z|), \quad z \rightarrow \infty, \quad z \notin E.$$

Введенное отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично, транзитивно; оно сохраняется при умножении на эквивалентные функции: если $f_1 \sim f_2$ и $g_1 \sim g_2$, то $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}$ и $\Lambda' = \{\lambda'_i\}$ — последовательности комплексных чисел, лежащих вне единичного круга $\Delta(0; 1)$ и имеющих единственную предельную точку в бесконечности.



Определение 8. Последовательность $\Lambda' = \{\lambda'_i\}$ называется эквивалентной последовательности $\Lambda = \{\lambda_i\}$ (в обозначениях $\Lambda' \sim \Lambda$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $i(\varepsilon)$ такой, что $|\lambda'_i - \lambda_i| \leq \varepsilon |\lambda_i|$ при $i > i(\varepsilon)$.

Это отношение является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Если $\Lambda'_1 \sim \Lambda_1$ и $\Lambda'_2 \sim \Lambda_2$, то при соответствующем упорядочении объединенных последовательностей $\Lambda' = \Lambda'_1 \cup \Lambda'_2$ и $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ будем иметь $\Lambda' \sim \Lambda$. Таким образом, отношение эквивалентности сохраняется при объединении эквивалентных последовательностей.

Если целая функция $\pi(z)$ подчинена сильным ограничениям (см. п. 1.1), то справедливы следующие предложения.

Предложение 5. Если последовательность Λ удовлетворяет условию (6) и последовательность Λ' эквивалентна последовательности Λ , то

$$G(\pi(z); \Lambda') \sim G(\pi(z); \Lambda).$$

Доказательство. Для любого натурального n выберем положительные ε_n и d_n так, что $\varepsilon_n \in (0; 2^{-n}) \subseteq (0; 1/2)$ и $\kappa_{\varepsilon_n} \sqrt{d_n} \in (0; 2^{-\frac{n}{2}})$. Так как $\kappa_{\varepsilon_n} \geq 1$, то $d_n \in (0; 2^{-n}) \subseteq (0; 1/2]$. Для любого номера n найдется номер k_n такой, что последовательность $\Lambda'_{k_n} = \{\gamma_i : i \geq k_n\}$ является d_n -близкой к последовательности $\Lambda_{k_n} = \{\lambda_i : i \geq k_n\}$. Таким образом, согласно предложению 3, существует множество $\mathcal{E}^{(n)}$, радиальная плотность которого меньше ε_n , такое, что при $z \notin \mathcal{E}^{(n)}$ выполняется неравенство

$$|\ln |G(\pi(z); \Lambda'_{k_n})| - \ln |G(\pi(z); \Lambda_{k_n})|| \leq \delta_n |z|, \tag{34}$$

где $\delta_n := O(c)2^{-\frac{n}{2}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если r_n достаточно велико, то при $|z| \geq r_n$ выполняются неравенства

$$|\ln |G(\pi(z); \Lambda')| - \ln |G(\pi(z); \Lambda'_{k_n})|| \leq \delta_n |z|, \tag{35}$$

$$|\ln |G(\pi(z); \Lambda_{k_n})| - \ln |G(\pi(z); \Lambda)|| \leq \delta_n |z|. \tag{36}$$

Пусть $\mathcal{E}_n := \mathcal{E}^{(n)} \cup \{z : |z| \leq r_n\}$. Радиальная плотность множества \mathcal{E}_n по-прежнему меньше ε_n . Из неравенств (34), (35) и (36) следует, что при $z \notin \mathcal{E}_n$ выполняется неравенство

$$|\ln |G(\pi(z); \Lambda')| - \ln |G(\pi(z); \Lambda)|| \leq 3\delta_n |z|. \tag{37}$$

Теперь из множеств \mathcal{E}_n получим новое множество \mathcal{E} нулевой радиальной плотности такое, что при $z \notin \mathcal{E}$

$$|\ln |G(\pi(z); \Lambda')| - \ln |G(\pi(z); \Lambda)|| \leq o(|z|), \quad z \rightarrow \infty. \tag{38}$$

Для этой цели воспользуемся следующей процедурой. Для каждого n символом Σ_n обозначим множество колец, покрывающее множество \mathcal{E}_n и удовлетворяющее условию

$$m_{\Sigma_n} =: \varepsilon'_n < \varepsilon_n \in (0; 1/2).$$

Пусть R_1 столь велико, что

$$m_{\Sigma_1}(r) + m_{\Sigma_2}(r) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

при $r \geq R_1$, и окружность $|z| = R_1$ не пересекается с кольцами из Σ_1 и Σ_2 . Обозначим через Σ'_1 множество колец из Σ_1 , лежащих в круге $|z| \leq R_1$. Далее выбираем R_2 так, что при $r \geq R_2$ выполняется неравенство

$$m_{\Sigma'_1}(r) + m_{\Sigma_2}(r) + m_{\Sigma_3}(r) < \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

и окружность $|z| = R_2$ не пересекается с кольцами из Σ_2 и Σ_3 . Пусть Σ'_2 — множество колец из Σ_2 , лежащих в кольце $R_1 \leq |z| \leq R_2$, и т.д. Рассмотрим объединения

$$\Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma'_n, \quad \mathcal{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}'_n,$$



где \mathcal{E}'_n — пересечение \mathcal{E}_n с объединением колец, входящих в совокупность Σ'_n . Радиальная плотность множества \mathcal{E} равна нулю. Действительно, это множество покрывается совокупностью колец Σ и при $R_n \leq r \leq R_{n+1}$ выполняются неравенства

$$m_\Sigma(r) \leq m_{\Sigma'_1}(r) + \dots + m_{\Sigma'_{n+1}}(r) \leq m_{\Sigma'_1}(r) + \dots + m_{\Sigma'_{n-1}}(r) + m_{\Sigma_n}(r) + m_{\Sigma_{n+1}}(r) \leq \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}.$$

Значит, $m_\Sigma(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$. Проверим оценку (38). Пусть $z \notin \mathcal{E}$ и $R_{n-1} \leq |z| \leq R_n$. Тогда $z \notin \mathcal{E}'_n$ и, значит, $z \notin \mathcal{E}_n$. Отсюда следует, что при таких z имеет место оценка (37). Так как это верно при всех n , то отсюда и следует оценка (38). Предложение доказано. \square

Предложение 6. Если последовательность Λ удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r; \Lambda)}{\mu(r)} = 0,$$

то

$$G(\pi(z); \Lambda) \sim 1.$$

Доказательство. Для любого натурального n выберем положительные ε_n и c_n так, что $\varepsilon_n \in (0; 2^{-n}) \subseteq (0; 1/2)$ и $c_n \kappa_{\varepsilon_n} \in (0; 2^{-n})$. Так как $\kappa_{\varepsilon_n} \geq 1$, то $c_n \in (0; 2^{-n})$. Согласно предложению 3 существует множество $\mathcal{E}^{(n)}$, радиальная плотность которого меньше ε_n , такое, что при $z \notin \mathcal{E}^{(n)}$ выполняется неравенство

$$|\ln |G(\pi(z); \Lambda)|| \leq \delta_n |z|,$$

где $\delta_n := O(2^{-n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь из множеств $\mathcal{E}^{(n)}$ с помощью процедуры, использованной при доказательстве предложения 5, получаем новое множество \mathcal{E} нулевой радиальной плотности такое, что при $z \notin \mathcal{E}$

$$|\ln |G(\pi(z); \Lambda)|| \leq o(|z|), \quad z \rightarrow \infty.$$

Предложение доказано. \square

4.2. Факторизация симметричных функций

Если целая функция $\pi(z)$ подчинена сильным ограничениям (см. п. 1.1), то справедлива следующая факторизационная теорема.

Теорема 2. Для любой целой π -симметричной функции $f(\pi(z))$ экспоненциального типа справедливо представление $f(\pi(z)) = f_1(\pi(z)) f_2(\pi(z))$, где $f_1(\pi(z))$, $f_2(\pi(z))$ — целые π -симметричные функции и $f_1 \circ \pi \sim f_2 \circ \pi$.

Доказательство. Последовательность корней $\{\lambda_i\}$ целой функции $f(\zeta)$, лежащих вне единичного круга $|\zeta| < 1$, обозначим Λ . При доказательстве теоремы 1 показано, что последовательность Λ удовлетворяет условию (6). Пусть $\varepsilon \in (1; \rho)$;

$$r_n := t e^{n \frac{1}{\varepsilon}}, \quad n \in \mathbf{N},$$

где параметр $t \in (0; e^{-1})$ выбирается так, чтобы окружности $|z| = r_n$ лежали в области определения функции $\mu(|z|)$ и не проходили через точки из последовательности Λ ;

$$\theta_{m,n} := \frac{2\pi}{1 + [\ln n]} + s_n, \quad m \in \{0, \dots, [\ln n]\},$$

где $[\ln n]$ — целая часть числа $\ln n$, и параметр s_n выбирается так, чтобы лучи $z = r e^{i\theta_{m,n}}$ не проходили через точки из множества $\Lambda \cap \{z : r_n \leq |z| \leq r_{n+1}\}$;

$$\Delta_{m,n} := \{r e^{i\theta} : r_n \leq r \leq r_{n+1}, \theta_{m,n} \leq \theta \leq \theta_{m+1,n}\}.$$



Так как $r_1 := te < 1$, то совокупность кольцевых секторов

$$\Delta_{m,n}, \quad m \in \{0, \dots, [\ln n]\}, \quad n \in \mathbf{N}$$

покрывает последовательность Λ . При этом для диаметра кольцевого сектора $\Delta_{m,n}$ справедливо соотношение

$$d_{m,n} := \sup_{z, z' \in \Delta_{m,n}} |z - z'| = o(1) r_n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Действительно, толщина кольцевого сектора $\Delta_{m,n}$ равна

$$r_{n+1} - r_n = r_n \left(e^{(n+1)\frac{1}{\varepsilon}} - n^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 \right) \leq r_n \left(e^{\frac{1}{\varepsilon} \frac{(n+1)}{n}} - 1 \right) = o(1) r_n, \quad n \rightarrow \infty,$$

а большая дуга кольцевого сектора $\Delta_{m,n}$ равна

$$\frac{2\pi}{1 + [\ln n]} r_{n+1} \leq \frac{2\pi}{1 + [\ln n]} (1 + o(1)) r_n = o(1) r_n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Разбиваем последовательность $\Lambda := \{\lambda_i\}$ на три последовательности

$$\Lambda' := \{\lambda'_i\}, \quad \Lambda'' := \{\lambda''_i\}, \quad \Lambda''' := \{\lambda'''_i\}.$$

При этом соблюдаем условие: в любом кольцевом секторе $\Delta_{m,n}$ последовательности Λ' и Λ'' содержат одинаковое число точек, а последовательность Λ''' содержит не более одной точки. Последовательности Λ' и Λ'' упорядочиваем так, чтобы для любого i точки λ'_i и λ''_i принадлежали одному сектору $\Delta_{m(i),n(i)}$. Тогда $n(i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$ и из (39) следует, что

$$|\lambda'_i - \lambda''_i| \leq d_{m(i),n(i)} \leq o(1) |\lambda''_i|, \quad i \rightarrow \infty.$$

Отсюда вытекает, что последовательности Λ' и Λ'' эквивалентны. Поэтому по предложению 5

$$G(\pi(z); \Lambda') \sim G(\pi(z); \Lambda'').$$

Рассмотрим теперь произведение $G(\pi(z); \Lambda''')$. Каждый кольцевой сектор $\Delta_{m,n}$ содержит не более одной точки $\lambda_{m,n}$ из Λ''' . В кольце $\{z : r_n \leq z \leq r_{n+1}\}$ содержится $1 + [\ln n]$ кольцевых секторов $\Delta_{m,n}$. Значит, для $\rho' \in (\varepsilon; \rho)$ и для всех $n \geq n_0$ при достаточно большом n_0 выполняются неравенства

$$\sum_{m,n} \frac{1}{\mu(|\lambda_{m,n}|)} \leq \sum_n \frac{1 + \ln n}{\mu(r_n)} \leq \sum_{n < n_0} \frac{1 + \ln n}{\mu(r_n)} + \sum_{n \geq n_0} \frac{1 + \ln n}{(\ln t + n^{\frac{1}{\varepsilon}})^{\rho'}} < +\infty.$$

Интегрированием по частям получаем:

$$\sum_{|\lambda_{m,n}| \leq r} \frac{1}{\mu(|\lambda_{m,n}|)} = \int_0^r \frac{dn(t; \Lambda''')}{\mu(t)} = \frac{n(r; \Lambda''')}{\mu(r)} + \int_0^r \frac{n(t; \Lambda''') \mu'(t)}{\mu(t)^2} dt.$$

Из этого равенства вытекает, что последний интеграл сходится при $r \rightarrow +\infty$. Следовательно,

$$\frac{n(r; \Lambda''')}{\mu(r)} = n(r; \Lambda''') \int_r^\infty \frac{\mu'(t) dt}{\mu(t)^2} \leq \int_r^\infty \frac{n(t; \Lambda''') \mu'(t)}{\mu(t)^2} dt \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow +\infty$. По предложению 6 $G(\pi(z); \Lambda''') \sim 1$.

Наконец, если последовательности Λ' и Λ''' объединить в одну последовательность A , а в последовательность Λ'' включить нули функции $f(\zeta)$, лежащие в круге $\Delta(0; 1)$, и обозначить вновь полученную последовательность B , то при некотором $C \neq 0$ будем иметь

$$f_1(\pi(z)) := G(\pi(z); A) \sim CG(\pi(z); B) =: f_2(\pi(z)), \\ f_1(\pi(z)) f_2(\pi(z)) = f(\pi(z)).$$

Теорема доказана. □



5. ПРИМЕР

В п. 2 показано, что сильное ограничение на выбор функции $\pi(z)$ выполнено, если $\pi(z)$ — целая функция вполне регулярного роста при некотором уточненном порядке $\rho_\pi(r) \rightarrow \rho_\pi \in (0; 1)$ с постоянным положительным индикатором h_π . Ниже приводится пример целой функции вполне регулярного роста, удовлетворяющей сильному ограничению, но индикатор которой не является постоянным.

Выберем произвольный квазиполином:

$$f(z) := \sum_{j=1}^s a_j e^{i\gamma_j z}, \quad a_j \neq 0.$$

Будем считать, что все точки γ_j лежат в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ и не лежат на одной прямой с началом (значит, $s \geq 2$). Положим

$$\pi(z) := p(z) + zq(z),$$

где

$$p(z) := \frac{1}{2} (f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})) = \sum_{j=1}^s a_j \cos \gamma_j \sqrt{z},$$

$$q(z) := \frac{1}{2\sqrt{z}} (f(\sqrt{z}) - f(-\sqrt{z})) = i \sum_{j=1}^s a_j \frac{\sin \gamma_j \sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

\sqrt{z} — значение в точке z произвольной ветви функции $\xi^{\frac{1}{2}}$, голоморфной в окрестности точки z .

Предложение 7. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные константы c_ε и ρ_ε , что вне некоторого множества кружков, линейная плотность которого меньше ε , выполняются оценки

$$[\pi'(z)] \geq c_\varepsilon, \tag{40}$$

$$\left| \frac{\pi(\xi) - \pi(z)}{\xi - z} - \pi'(z) \right| \leq \frac{1}{3} |\pi'(z)| \tag{41}$$

равномерно по ξ из круга $\{\xi' : |\xi' - z| \leq \rho_\varepsilon\}$.

Доказательство. Непосредственным вычислением получаем:

$$\begin{aligned} \pi'(z) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s a_j (i - \gamma_j) \frac{\sin \gamma_j \sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^s a_j \gamma_j \cos \gamma_j \sqrt{z} = \\ &= \frac{i}{4} \sum_{j=1}^s a_j \left(\left(\gamma_j - \frac{i - \gamma_j}{\sqrt{z}} \right) e^{i\gamma_j \sqrt{z}} + \left(\gamma_j + \frac{i - \gamma_j}{\sqrt{z}} \right) e^{-i\gamma_j \sqrt{z}} \right). \end{aligned}$$

При этом

$$\pi'(z^2) = \frac{i}{4} \sum_{j=1}^s a_j \left(\left(\gamma_j - \frac{i - \gamma_j}{z} \right) e^{i\gamma_j z} + \left(\gamma_j + \frac{i - \gamma_j}{z} \right) e^{-i\gamma_j z} \right).$$

Из асимптотических равенств

$$\left(\gamma_j - \frac{i - \gamma_j}{z} \right) e^{i\gamma_j z} \approx \gamma_j e^{i\gamma_j z}, \quad \left(\gamma_j + \frac{i - \gamma_j}{z} \right) e^{-i\gamma_j z} \approx \gamma_j e^{-i\gamma_j z}$$

и свойств квазиполиномов вытекает, что функция $\pi'(z^2)$ имеет вполне регулярный рост при порядке 1 и ее индикатриса всюду положительна, значит, функция $\pi'(z)$ имеет вполне регулярный рост при порядке 1/2 и ее индикатриса тоже всюду положительна [15, гл. I, §2, п. 8]. Отсюда вытекает, что при некотором $c_\varepsilon > 0$ вне некоторого множества кружков нулевой линейной плотности выполняется неравенство (40).



Перейдем к доказательству оценки (41). Пусть $\gamma_j \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$, $\gamma_j \neq 0$ и

$$p_j(z) := \cos \gamma_j \sqrt{z}, \quad q_j(z) := \sqrt{z} \sin \gamma_j \sqrt{z}.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{p_j(\xi) - p_j(z)}{(\xi - z)p_j'(z)} - 1 &= \frac{\left(\frac{a_j - b_j}{a_j b_j} \operatorname{tg} b_j - 1\right) \operatorname{tg} a_j + \operatorname{tg} b_j}{\operatorname{tg} a_j - \operatorname{tg} b_j}, \\ \frac{q_j(\xi) - q_j(z)}{(\xi - z)q_j'(z)} - 1 &= \frac{\left(\left(\frac{b_j}{a_j} - 1\right) \operatorname{tg} b_j - \frac{b_j}{a_j^2}\right) \operatorname{tg} a_j + \frac{1}{b_j} \operatorname{tg} b_j - 1 + \frac{b_j}{a_j}}{\left(\frac{1}{a_j} + \left(1 - \frac{b_j}{a_j}\right) \operatorname{tg} b_j\right) \operatorname{tg} a_j - \frac{1}{a_j} \operatorname{tg} b_j + 1 - \frac{b_j}{a_j}}, \end{aligned}$$

где

$$a_j := \gamma_j \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{z}}{2}, \quad b_j := \gamma_j \frac{\sqrt{\xi} - \sqrt{z}}{2}.$$

Функция $|\operatorname{tg} z|$ вне кружков любого достаточно малого радиуса с центрами в точках $z = \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$, ограничена и снизу, и сверху положительными константами. При этом если $|z| \geq r \geq 1$, $|\xi| \geq r$ и $|\xi - z| \leq \rho_\varepsilon < 1$, то

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{z} + \frac{\pi}{2}k \right| &\leq \sqrt{|z|} + \frac{\pi}{2}|k| \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{4}k^2 + \left|z - \frac{\pi^2}{4}k^2\right|} + \frac{\pi}{2}|k|, \\ \left| \sqrt{\xi} \right| &\geq \sqrt{||z| - |z - \xi||} \geq \sqrt{1 - \rho_\varepsilon}, \quad \left| \sqrt{z} \right| \geq \sqrt{||\xi| - |\xi - z||} \geq \sqrt{1 - \rho_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Если предположить дополнительно, что

$$\left| z - \frac{\pi^2}{4}k^2 \right| \geq \frac{\pi}{2}|k|\varepsilon',$$

где $\varepsilon' := \varepsilon/s$, $\varepsilon > 0$, то при достаточно малом $h_\varepsilon > 0$ и всех $k \neq 0$ получим:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{z}}{2} - \frac{\pi}{2}k \right| \geq \left(\left| \sqrt{z} - \frac{\pi}{2}k \right| - \left| \frac{\sqrt{\xi} - \sqrt{z}}{2} \right| \right) = \\ &= \frac{\left| z - \frac{\pi^2}{4}k^2 \right|}{\left| \sqrt{z} + \frac{\pi}{2}k \right|} - \left| \frac{\xi - z}{2(\sqrt{\xi} + \sqrt{z})} \right| \geq \frac{\left| z - \frac{\pi^2}{4}k^2 \right|}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}k^2 + \left| z - \frac{\pi^2}{4}k^2 \right|} + \frac{\pi}{2}|k|} - \frac{\rho_\varepsilon}{4\sqrt{1 - \rho_\varepsilon}} \geq \\ &\geq \frac{\varepsilon'}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{2}{\pi|k|}} + 1}} - \frac{\rho_\varepsilon}{4\sqrt{1 - \rho_\varepsilon}} \geq \frac{\varepsilon'}{3} - \frac{\rho_\varepsilon}{4\sqrt{1 - \rho_\varepsilon}} \geq \frac{\varepsilon'}{4}, \end{aligned}$$

значит,

$$\left| a_j - \frac{\pi}{2}\gamma_j k \right| = |\gamma_j| \left| \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{z}}{2} - \frac{\pi}{2}k \right| \geq |\gamma_j| \frac{\varepsilon'}{4}.$$

Следовательно, для всех z , лежащих вне некоторого круга с центром в начале и вне кружков,

$$\left| z - \frac{\pi^2}{4}k^2 \right| < \frac{\pi}{2}|k|\varepsilon', \quad k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \quad (42)$$

функция

$$|\operatorname{tg} a_j| = \left| \operatorname{tg} \left(\gamma_j \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{z}}{2} \right) \right|$$



ограничена и снизу, и сверху положительными константами равномерно по ξ из круга $\Delta(z, \rho_\varepsilon)$. Отсюда следует, что при достаточно малом ρ_ε вне некоторого круга с центром в начале и вне множества кружков (42) равномерно по ξ из круга $\Delta(z, \rho_\varepsilon)$ будут выполняться неравенства

$$\left| \frac{p_j(\xi) - p_j(z)}{(\xi - z)p'_j(z)} - 1 \right| \leq \frac{1}{3}, \quad \left| \frac{q_j(\xi) - q_j(z)}{(\xi - z)q'_j(z)} - 1 \right| \leq \frac{1}{3}.$$

Из очевидных оценок

$$\frac{1}{r} \sum_{\frac{\pi^2 k^2}{4} \leq r} \frac{\pi}{2} |k| \varepsilon' \leq \frac{\pi}{2r} \varepsilon' \sum_{|k| \leq \frac{2}{\pi} \sqrt{r}} |k| \leq \varepsilon' \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{r}} \right)$$

вытекает, что линейная плотность множества кружков (42) меньше ε' . Значит, при достаточно малом $\rho_\varepsilon > 0$ вне некоторого множества кружков, линейная плотность которого меньше $\varepsilon = s\varepsilon'$, равномерно по ξ из круга $\Delta(z, \rho_\varepsilon)$ будет выполняться неравенство (41). Предложение доказано. \square

Предложение 8. Пусть z_0 — фиксированная точка, лежащая вне множества кружков, линейная плотность которого меньше $\varepsilon > 0$ и вне которого выполняются оценки (40) и (41). Тогда в некоторой окрестности точки z_0 функция $\pi(z)$ является однолистной. Обратная функция $\pi_{z_0}^{-1}(\zeta)$ определена по крайней мере в круге $\Delta(\pi(z_0), h_\varepsilon)$, где $h_\varepsilon := \frac{1}{3}c_\varepsilon\rho_\varepsilon$, и ее значения в этом круге лежат в круге $\Delta(z_0, \rho_\varepsilon)$.

Доказательство. Выберем произвольное ζ из круга $\Delta(\pi(z_0), h_\varepsilon)$. Легко увидеть, что на окружности $|z - z_0| = \rho_\varepsilon$ выполняется неравенство $|F(z)| > |f(z)|$, где

$$\begin{aligned} F(z) &:= (z - z_0)\pi'(z_0), \quad f(z) := \pi(z) - \zeta - (z - z_0)\pi'(z_0) = \\ &= (z - z_0) \left(\frac{\pi(z) - \pi(z_0)}{z - z_0} - \pi'(z_0) \right) - (\zeta - \pi(z_0)). \end{aligned}$$

По теореме Руше функция $\pi(z) - \zeta = f(z) + F(z)$ имеет в круге $\Delta(\pi(z_0), h_\varepsilon)$ лишь один нуль. Предложение доказано. \square

Функция $\pi(z)$ является первообразной для функции $\pi'(z)$, значит, функция $\pi(z)$ является целой функцией вполне регулярного роста при порядке $\frac{1}{2}$ с положительным индикатором $h_\pi(\theta)$ [16]. Положим $\mu(r) := \ln^2 r$. Вне некоторого множества кружков E_π нулевой линейной плотности имеет место асимптотическое равенство $\ln |\pi(z)| \approx h_\pi(\theta)\sqrt{|z|}$, $\theta := \arg z$. По предложениям 7 и 8 для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество кружков $E_\varepsilon \supseteq E_\pi$, линейная плотность которого меньше ε , что для любого $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$ и всякого $z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\varepsilon$ функция $\pi_{\zeta, z}^{-1}(\zeta')$ отображает однолистно круг $\Delta(\zeta, h_\varepsilon)$ в круг $\Delta(z, \rho_\varepsilon)$. При этом число $\arg z', z' \in \Delta(z, \rho_\varepsilon)$, является функцией от $\zeta' \in \Delta(\zeta, h_\varepsilon)$. Эту функцию обозначим $\theta_{\zeta, z}(\zeta')$. Для любых $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$ и $\zeta' \in \Delta(\zeta, h_\varepsilon)$ положим

$$\kappa_{\zeta, z}^- := \inf_{\zeta' \in \Delta(\zeta, h_\varepsilon) \cap \hat{E}_\varepsilon} h_\pi^2(\theta_{\zeta, z}(\zeta')), \quad \kappa_{\zeta, z}^+ := \sup_{\zeta' \in \Delta(\zeta, h_\varepsilon) \cap \hat{E}_\varepsilon} h_\pi^2(\theta_{\zeta, z}(\zeta')).$$

Тогда для любых $\zeta \in \hat{E}_\pi$, $z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\pi$ и $\zeta' \in \Delta(\zeta; h_{\zeta, z}) \cap \hat{E}_\pi$ при достаточно больших $|\zeta|$ выполняются оценки (18), в которых z выбрано произвольно из $\pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\varepsilon$, z' — произвольный элемент слоя $\pi^{-1}(\zeta)$, лежащий в множестве $\Delta(z; \rho_\varepsilon) \setminus E_\varepsilon$,

$$\kappa_{\zeta}^- := \min_{z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\varepsilon} \kappa_{\zeta, z}^-, \quad \kappa_{\zeta}^+ := \max_{z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\varepsilon} \kappa_{\zeta, z}^+$$

и $\kappa_\varepsilon \geq 1$ выбраны из условия: $\kappa_\varepsilon^{-1} < h(\theta) < \kappa_\varepsilon$ для любого θ . При этом в силу непрерывности индикатора $h_\pi(\theta)$

$$\kappa_{\zeta}^+ - \kappa_{\zeta}^- \leq \max_{z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\varepsilon} \left(\sup_{z' \in \Delta(z; \rho_\varepsilon)} h_\pi^2(\theta') - \inf_{z' \in \Delta(z; \rho_\varepsilon)} h_\pi^2(\theta') \right) \rightarrow 0$$

при $\zeta \rightarrow \infty, \zeta \in \hat{E}_\varepsilon$. Здесь $\theta' := \arg z'$. Таким образом, выбранная функция $\pi(z)$ удовлетворяет всем условиям сильного ограничения.



Библиографический список

1. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems division. IV // *Amer. J. Math.* 1960. Vol. 82. P. 522–588.
2. *Dicson D. G.* Factoring Fourier transforms with zeros in a strip // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1989. Vol. 106. P. 107–114.
3. *Юлмухаметов Р. С.* Решение проблемы Л. Эренпрайса о факторизации // *Матем. сб.* 1999. Т. 190, № 4. С. 123–157.
4. *Шишкин А. Б.* Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2014. Т. 14, вып. 1. С. 47–64.
5. *Волковая Т. А., Шишкин А. Б.* Локальное описание целых функций // *Исследования по математическому анализу. Итоги науки. Юг России. Мат. форум.* Т. 8, ч. 1. Владикавказ : ЮМИ ВНИЦ РАН, 2014. С. 218–230.
6. *Волковая Т. А., Шишкин А. Б.* Локальное описание целых функций. Подмодули ранга 1 // *Владикавказ. матем. журн.* 2014. Т. 16, № 2. С. 14–28.
7. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // *Матем. сб.* 1972. Т. 87(129), № 4. С. 459–489.
8. *Азарин В. С.* О разложении целой функции конечного порядка на сомножители, имеющие заданный рост // *Матем. сб.* 1973. Т. 90, № 2. С. 229–230.
9. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциально-го оператора с постоянными коэффициентами. IV. Синтез // *Матем. сб.* 1992. Т. 183, № 8. С. 23–46.
10. *Хабидуллин Б. Н.* Теоремы сравнения и однородности для субгармонических функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1985. 103 с.
11. *Красичков И. Ф.* Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней // *Матем. сб.* 1966. Т. 70(112), № 2. С. 198–230.
12. *Письменный Р. Г.* О разложении целой функции конечного порядка на эквивалентные множители // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2009. Т. 9, вып. 1. С. 19–30.
13. *Письменный Р. Г., Шишкин А. Б.* Расщепление целых функций конечного порядка на эквивалентные множители // *Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естественно-математические и технические науки.* 2010. № 2(61). С. 23–28.
14. *Волковая Т. А.* Синтез в полиномиальном ядре двух аналитических функционалов // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2014. Т. 14, вып. 3. С. 251–262.
15. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М. : Наука, 1976. 536 с.
16. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* О производных и первообразных целых функций вполне регулярного роста // *Теория функций, функц. анализ и их прил. (Харьков).* 1973. № 18. С. 70–81.

Factorization of Entire Symmetrical Functions of Exponential Type

A. B. Shishkin

Shishkin Andrey Borisovich, Kuban State University, 149, Stavropolskaya st., Krasnodar, Russia, 350040, Shishkin-home@mail.ru

Let π be an entire function of minimal type of order 1. The entire function F is called π -symmetric if it is represented in the form of a composition $f \circ \pi$, where the f is an entire function. The article deals with the following question. Can we present every π -symmetric function of exponential type as a product of two functions with a close growth, each of which is itself an entire π -symmetric function? This question is answered in the affirmative, but under certain restrictions on for the subordinate function π . For example, an entire function of completely regular growth at proximate order $\rho(r) \approx \rho \in (0; 1)$ with constant positive indicator is subject to these restrictions. Other examples relate to the reversibility of the entire function in the circles of constant radius whose centers lie outside some exceptional set.

Key words: factorization of entire functions, zero at the order, proximate weight, logarithmic weight, entire symmetric functions.

References

1. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems division. IV. *Amer. J. Math.*, 1960, vol. 82, pp. 522–588.
2. *Dicson D. G.* Factoring Fourier transforms with zeros in a strip. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1989, vol. 106, pp. 107–114.
3. *Yulmukhametov R. S.* Solution of the Ehrenpreis factorization problem. *Sb. Math.*, 1999, vol. 190, no. 4, pp. 597–629. DOI: 10.4213/sm400.
4. *Shishkin A. B.* Projective and injective descriptions in the complex domain. Duality. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 47–64 (in Russian).
5. *Volkovaya T. A., Shishkin A. B.* Lokal'noe opisanie tselykh funktsii [Local description of entire functions]. *Issledovaniia po matematicheskomu analizu. Itogi nauki. Iug Rossii. Mat. forum* [Research



- on mathematical analysis. The results of science. South of Russia. *Mat. forum*. Vladikavkaz, UMI VSC RAS, 2014, vol. 8, pt. 1, pp. 218–230 (in Russian).
6. Volkovaya T. A., Shishkin A. B. Lokal'noe opisanie tselykh funktsii. Podmoduli ranga 1 [Local description of entire functions. Submodules of rank 1]. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2014, vol. 16, no. 2, pp. 14–28 (in Russian).
 7. Krasichkov-Ternovskii I. F. Invariant subspaces of analytic functions. I. Spectral analysis on convex regions. *Math. USSR-Sb.*, 1972, vol. 16, no. 4, pp. 471–500.
 8. Azarin V. S. On the decomposition of an entire function of finite order into factors having given growth. *Math. USSR-Sb.*, 1973, vol. 19, no. 2, pp. 225–226.
 9. Krasichkov-Ternovskii I. F. Spectral synthesis in a complex domain for a differential operator with constant coefficients. IV : Synthesis. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1993, vol. 76, no. 2, pp. 407–426.
 10. Khabibullin B. N. *Teoremy sravneniia i odnorodnosti dlia subgarmonicheskikh funktsii*. Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Comparison theorems for subharmonic functions : Dr. phys. and math. sci. diss.]. Rostov-on-Don, 1985. 103 p. (in Russian).
 11. Krasichkov I. F. Sravnenie tselykh funktsii tselogo poriadka po raspredeleniiu ikh kornei [Comparison of entire functions of finite order by means of the distribution of their roots]. *Mat. Sb.*, 1966, vol. 70(112), no. 2, pp. 198–230 (in Russian).
 12. Pis'mennyi R. G. Factoring of an entire function into two equivalent functions. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 19–30 (in Russian).
 13. Pis'mennyi R. G., Shishkin A. B. Rasshcheplenie tselykh funktsii konechnogo poriadka na ekvivalentnye mnozhiteli [Splitting entire functions of finite order in the equivalent factors]. *Vest. Adyg. gos. un-ta. Ser. Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, 2010, no. 2(61), pp. 23–28 (in Russian).
 14. Volkovaya T. A. Synthesis in the Polynomial Kernel of Two Analytic Functionals. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 251–262 (in Russian).
 15. Leont'ev A. F. *Riady eksponent* [Exponential series]. Moscow, Nauka, 1976, 536 p. (in Russian).
 16. Gol'dberg A. A., Ostrovskii I. V. O proizvodnykh i pervoobraznykh tselykh funktsii vpolne reguliarnogo rosta [Derivatives and primitives of entire functions of completely regular growth]. *Teoriia funktsii, funkts. analiz i ikh pril. (Kharkiv)*, 1973, no. 18, pp. 70–81 (in Russian).

УДК 517.984

ОБ ОБРАТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В. А. Юрко

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для операторов Штурма – Лиувилля на конечном интервале с периодическими краевыми условиями в центрально-симметричном случае, когда потенциал симметричен относительно середины интервала. Обсуждается постановка обратной задачи, приводится алгоритм ее решения, а также необходимые и достаточные условия разрешимости этой нелинейной обратной задачи.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, периодические краевые условия, обратные спектральные задачи.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-68-75

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется обратная спектральная задача для оператора Штурма – Лиувилля:

$$\ell y := y'' + q(x)y, \quad x \in (0, \pi),$$

на конечном интервале $(0, \pi)$ с периодическими краевыми условиями. Обратные задачи заключаются в восстановлении коэффициентов дифференциальных операторов по их спектральным характеристикам. Такие задачи часто возникают в математике и приложениях. Обратные задачи для дифференциальных



операторов с распадающимися краевыми условиями достаточно полно изучены (см. монографии [1–5] и списки литературы). Более трудные обратные задачи для операторов Штурма – Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями изучались в [6–17] и других работах. В частности, периодическая краевая задача рассматривалась в [6, 7, 9, 14]. И. В. Станкевич [6] предложил постановку обратной задачи и доказал соответствующую теорему единственности. В. А. Марченко и И. В. Островский [7] дали характеристику спектра периодической краевой задачи в терминах специального конформного отображения. Условия, предложенные в [7], трудны для проверки. Другой метод, использованный в [9], позволил получить более удобные для проверки необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи в периодическом случае. Аналогичные результаты получены в [9] и для другого типа краевых условий, а именно

$$y'(0) - ay(0) + by(\pi) = y'(\pi) + dy(\pi) - by(0) = 0.$$

Позднее похожие результаты получены в [12, 13].

В данной статье исследуется случай, когда потенциал q симметричен относительно середины интервала, т. е. $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0, \pi)$. Симметричный случай требует нетривиальных изменений в методе и позволяет задавать меньше спектральной информации, чем в общем случае. Некоторые результаты для симметрического случая получены в [10] и [17]. В данной статье для симметрического случая мы строим решение обратной спектральной задачи и даем характеристику спектра. Для удобства читателей в п. 1 мы кратко приводим известные результаты для общего (несимметрического) случая.

1. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

где λ — спектральный параметр и $q(x) \in L_2(0, T)$ — вещественнозначная функция, которая называется потенциалом. Пусть $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ — решения уравнения (1) при начальных условиях $C(0, \lambda) = S'(0, \lambda) = -\psi'(\pi, \lambda) = 1$, $C'(0, \lambda) = S(0, \lambda) = \psi(\pi, \lambda) = 0$. При каждом x функции $C^{(\nu)}(x, \lambda)$, $S^{(\nu)}(x, \lambda)$ и $\psi^{(\nu)}(x, \lambda)$, $\nu = 0, 1$, являются целыми по λ порядка $1/2$, причем

$$\langle C(x, \lambda), S(x, \lambda) \rangle \equiv 1, \quad (2)$$

где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$ — вронскиан функций y и z . Обозначим

$$\Delta(\lambda) = (C(\pi, \lambda) + S'(\pi, \lambda))/2, \quad \delta(\lambda) = (C(\pi, \lambda) - S'(\pi, \lambda))/2, \quad p(\lambda) = 1 - \Delta(\lambda).$$

Нули $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ целой функции $p(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи $L = L(q)$ для уравнения (1) с периодическими краевыми условиями:

$$y(0) - y(\pi) = y'(0) - y'(\pi) = 0.$$

Функция $p(\lambda)$ называется характеристической функцией для L . Для удобства читателей приведем здесь кратко известные результаты, относящиеся к краевой задаче L (подробнее см. [6, 7, 9]).

1. Все собственные значения λ_n вещественны и

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots, \quad (3)$$

$$\lambda_{2n} = (2n)^2 + \alpha + \kappa_{2n}, \quad \lambda_{2n-1} = (2n)^2 + \alpha + \kappa_{2n-1}, \quad \{\kappa_n\} \in l_2, \quad (4)$$

где $\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt$. Здесь и далее один и тот же символ $\{\kappa_n\}$ обозначает различные последовательности из l_2 . Задание Λ однозначно определяет характеристическую функцию $p(\lambda)$ по формуле

$$p(\lambda) = \frac{\pi^2}{2} (\lambda - \lambda_0) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2n} - \lambda}{(2n)^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2n-1} - \lambda}{(2n)^2}. \quad (5)$$



Кроме того,

$$\max_{\lambda \in [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}]} p(\lambda) \geq 2, \quad n \geq 0. \quad (6)$$

2. Пусть $\Lambda^+ = \{\lambda_n^+\}_{n \geq 1}$ — нули целой функции $p^+(\lambda) := p(\lambda) - 2$. Тогда $\{\lambda_n^+\}_{n \geq 0}$ вещественны и

$$\lambda_0 < \lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3^+ \leq \lambda_4^+ < \lambda_3 \leq \lambda_4 \dots, \quad (7)$$

$$\lambda_{2n}^+ = (2n - 1)^2 + \alpha + \kappa_{2n}, \quad \lambda_{2n-1}^+ = (2n - 1)^2 + \alpha + \kappa_{2n-1}, \quad \{\kappa_n\} \in l_2. \quad (8)$$

Обозначим: $a_{2n} = [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $a_{2n-1} = [\lambda_{2n-1}^+, \lambda_{2n}^+]$, $n \geq 1$. Отрезки a_n называются лакунами.

3. Положим $d(\lambda) := \langle \psi(x, \lambda), S(x, \lambda) \rangle = S(\pi, \lambda) = \psi(0, \lambda)$. Нули $\gamma = \{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ целой функции $d(\lambda)$ совпадают с собственными значениями краевой задачи $L_0 = L_0(q)$ для уравнения (1) с краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$. Числа γ_n вещественны, $\gamma_n \in a_n$, и

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \dots; \quad \gamma_n = n^2 + \alpha + \kappa_n, \quad \{\kappa_n\} \in l_2. \quad (9)$$

Задание спектра γ однозначно определяет функцию $d(\lambda)$ по формуле

$$d(\lambda) = \pi \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n - \lambda}{n^2}. \quad (10)$$

Числа $\alpha_n := \int_0^\pi S^2(x, \gamma_n) dx$ называются весовыми числами, а совокупность чисел $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ называется спектральными данными для краевой задачи L_0 . Имеем

$$\alpha_n = \dot{d}(\gamma_n) S'(\pi, \gamma_n), \quad \dot{d}(\lambda) := \frac{d}{d\lambda} d(\lambda), \quad (11)$$

$$\alpha_n > 0; \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2n^2} \left(1 + \frac{\kappa_n}{n} \right), \quad \{\kappa_n\} \in l_2, \quad (12)$$

$$\dot{d}(\gamma_n) = \frac{(-1)^n \pi}{2n^2} \left(1 + \frac{\kappa_n}{n} \right), \quad \{\kappa_n\} \in l_2, \quad \text{sign } \dot{d}(\gamma_n) = (-1)^n. \quad (13)$$

Функции $S(x, \gamma_n)$ и $\psi(x, \gamma_n)$ являются собственными функциями для L_0 , причем

$$\psi(x, \gamma_n) = \beta_n S(x, \gamma_n), \quad \beta_n \neq 0. \quad (14)$$

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$\alpha_n \beta_n = -\dot{d}(\gamma_n). \quad (15)$$

Доказательство. Так как

$$-\psi''(x, \lambda) + q(x)\psi(x, \lambda) = \lambda\psi(x, \lambda), \quad -S''(x, \gamma_n) + q(x)S(x, \gamma_n) = \gamma_n S(x, \gamma_n),$$

то

$$\frac{d}{dx} \langle \psi(x, \lambda), S(x, \gamma_n) \rangle = (\lambda - \gamma_n) \psi(x, \lambda) S(x, \gamma_n),$$

следовательно,

$$(\lambda - \gamma_n) \int_0^\pi \psi(x, \lambda) S(x, \gamma_n) dx = \langle \psi(x, \lambda), S(x, \gamma_n) \rangle \Big|_0^\pi = -d(\lambda).$$

При $\lambda \rightarrow \lambda_n$ это дает

$$\int_0^\pi \psi(x, \gamma_n) S(x, \gamma_n) dx = -\dot{d}(\gamma_n).$$

Используя (14), приходим к (15). □

Обратная задача для краевой задачи L_0 формулируется следующим образом.

Обратная задача 1. *Даны спектральные данные $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$, найти потенциал q .*

Эта обратная задача относится к случаю распадающихся краевых условий. Известно, что задание спектральных данных $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ однозначно определяет потенциал q . Глобальное решение нелинейной обратной задачи 1 может быть построено методом оператора преобразования или методом спектральных отображений (подробнее см. [1–5]). В частности, эти методы позволяют описать необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 1, которые представлены в следующей теореме.



Теорема 1. Для того чтобы вещественные числа $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ были спектральными данными для некоторой краевой задачи L_0 с потенциалом $q(x) \in L_2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись (9) и (12).

Вернемся теперь к периодической краевой задаче L . Из (2) вытекает, что

$$\Delta^2(\lambda) - \delta^2(\lambda) - d(\lambda)d_1(\lambda) \equiv 1, \quad (16)$$

где $d_1(\lambda) := C'(\pi, \lambda)$. В частности, (16) дает

$$\delta^2(\gamma_n) = \Delta^2(\gamma_n) - 1. \quad (17)$$

Обозначим: $\Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$, $\omega_n = \text{sign } \delta(\gamma_n)$. Последовательность Ω называется Ω -последовательностью для q . В силу (17) имеем:

$$\delta(\gamma_n) = \omega_n(\Delta^2(\gamma_n) - 1)^{1/2}, \quad (18)$$

Так как $S'(\pi, \gamma_n) = \Delta(\gamma_n) - \delta(\gamma_n)$, то из (11) и (18) следует, что

$$\alpha_n = d'(\gamma_n)(\Delta(\gamma_n) - \omega_n(\Delta^2(\gamma_n) - 1)^{1/2}). \quad (19)$$

Обратная задача для периодического случая ставится следующим образом [6].

Обратная задача 2. Даны Λ, γ и Ω , построить потенциал q .

Эта обратная задача изучалась в [6, 7, 9, 14] и других работах. В [6] доказано, что задание Λ, γ и Ω однозначно определяет потенциал q . Для построения q надо найти функции $p(\lambda)$ и $d(\lambda)$ по формулам (5) и (10) и вычислить $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ по формуле (19), где $\Delta(\lambda) = 1 - p(\lambda)$. Тогда, используя спектральные данные $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$, можно построить потенциал q , решая обратную задачу 1.

Лемма 2. Фиксируем $n \geq 1$. Соотношение $\delta(\gamma_n) = 0$ верно тогда и только тогда, когда γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n .

В самом деле, в силу (17), $\delta(\gamma_n) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta(\gamma_n) = \pm 1$, т.е. γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n .

Обозначим через J множество последовательностей $\Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$ таких, что $\omega_n = 0$, если γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n и $\omega_n = \pm 1$ в противном случае. Ясно, что если Ω является Ω -последовательностью для L , то $\Omega \in J$. Следующая теорема из [9] устанавливает необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 2.

Теорема 2 (см. [9]). Пусть заданы вещественные числа $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, удовлетворяющие (3), (4). Для того чтобы Λ была спектром некоторой краевой задачи L с вещественным потенциалом $q(x) \in L_2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (6), где функция $p(\lambda)$ построена по формуле (5). Кроме того, если дополнительно задана последовательность $\gamma = \{\gamma_n\}_{n \geq 1}$, $\gamma_n \in a_n$, удовлетворяющая (9), где $\Lambda^+ = \{\lambda_n^+\}_{n \geq 1}$ — нули функции $p^+(\lambda) = p(\lambda) - 2$ и последовательность $\Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1} \in J$, то существует единственная вещественная функция $q(x) \in L_2(0, \pi)$ такая, что Λ и γ являются спектрами задач L и L_0 соответственно и Ω является Ω -последовательностью для L .

Следующая теорема из [9] показывает, что один из концов каждой лакуны можно выбирать произвольно, учитывая только асимптотику.

Теорема 3 (см. [9]). Пусть заданы вещественные числа θ_n вида $\theta_n = n^2 + \alpha + \kappa_n$, $\{\kappa_n\} \in l_2$, $\theta_n < \theta_{n+1}$. Тогда существует вещественная функция $q(x) \in L_2(0, \pi)$ (не единственная!) такая, что для этого потенциала число θ_n лежит на одном из концов лакуны a_n при всех $n \geq 1$.



2. ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда потенциал q симметричен относительно середины интервала, т.е. относительно замены $x \rightarrow \pi - x$. Будем говорить, что $q(x) \in L'_2(0, \pi)$, если $q(x) \in L_2(0, \pi)$ и $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0, \pi)$.

Теорема 4. $q(x) \in L'_2(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда $\beta_n = (-1)^{n-1}$, $n \geq 1$.

Доказательство. 1. Пусть $q(x) \in L'_2(0, \pi)$. Тогда $\psi(x, \lambda) \equiv S(\pi - x, \lambda)$. Используя (14), вычисляем

$$\psi(x, \gamma_n) = \beta_n S(x, \gamma_n) = \beta_n \psi(\pi - x, \gamma_n) = \beta_n^2 S(\pi - x, \gamma_n) = \beta_n^2 \psi(x, \gamma_n).$$

Следовательно, $\beta_n^2 = 1$. С другой стороны, из (14) вытекает, что $\beta_n S'(\pi, \gamma_n) = -1$. Используя теорему Штурма об осцилляции, заключаем, что $\beta_n = (-1)^{n-1}$, $n \geq 1$.

2. Пусть $\beta_n = (-1)^{n-1}$, $n \geq 1$. Положим $\tilde{q}(x) := q(\pi - x)$. Условимся, что здесь и в дальнейшем, если некоторый символ θ обозначает объект, относящийся к q , то $\tilde{\theta}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к \tilde{q} .

Очевидно, что $\tilde{\psi}(x, \lambda) \equiv S(\pi - x, \lambda)$, $\tilde{S}(x, \lambda) \equiv \psi(\pi - x, \lambda)$, и следовательно, $d(\lambda) \equiv \tilde{d}(\lambda)$ и $\gamma_n = \tilde{\gamma}_n$, $n \geq 1$. Так как $\beta_n = (-1)^{n-1}$, то из (14) вытекает, что $\psi(x, \gamma_n) = (-1)^{n-1} S(x, \gamma_n)$. Кроме того, в силу (14) $\tilde{\psi}(x, \gamma_n) = \tilde{\beta}_n \tilde{S}(x, \gamma_n)$, поэтому $S(\pi - x, \gamma_n) = \tilde{\beta}_n \psi(\pi - x, \gamma_n)$, т.е. $\tilde{\beta}_n = (\beta_n)^{-1} = (-1)^{n-1}$. Таким образом, $\beta_n = \tilde{\beta}_n$ при всех $n \geq 1$. Учитывая (15), заключаем, что $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ при всех $n \geq 1$. Так как задание спектральных данных $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ однозначно определяет потенциал, то получаем, что $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в. на $(0, \pi)$, т.е. $q(x) \in L'_2(0, \pi)$. \square

Сначала рассмотрим обратную задачу для L_0 . В случае $q(x) \in L'_2(0, \pi)$ не надо задавать весовые числа $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$; достаточно задавать только один спектр γ .

Обратная задача 3. Дан спектр $\gamma = \{\gamma_n\}_{n \geq 1}$, построить потенциал q .

Известно [1–5], что в центрально-симметричном случае задание спектра $\gamma = \{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ задачи L_0 однозначно определяет потенциал q . Для построения q надо вычислить $d(\lambda)$ по формуле (10) и весовые числа $\alpha_n = (-1)^n d(\gamma_n)$, а затем найти q , решая обратную задачу 1. Характеризация спектра задачи L_0 дается следующей теоремой.

Теорема 5. Для того чтобы вещественные числа $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ были собственными значениями краевой задачи L_0 с вещественным потенциалом $q(x) \in L'_2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (9).

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть заданы вещественные числа $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$, удовлетворяющие (9). Построим функцию $d(\lambda)$ по формуле (10) и числа $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ по $\alpha_n = (-1)^n d(\gamma_n)$. Наш план — использовать теорему 1. Для этого мы должны получить требуемую в теореме 1 асимптотику чисел α_n . Это кажется трудной задачей, так как функция $d(\lambda)$ по построению является бесконечным произведением. Но, к счастью, для вычисления α_n можно также использовать теорему 1 в качестве вспомогательного утверждения. В самом деле, в силу теоремы 1 существует потенциал $\tilde{q}(x) \in L_2(0, \pi)$ (не единственный) такой, что $\gamma = \{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ является спектром задачи $\tilde{L}_0 := L_0(\tilde{q})$ с этим потенциалом. Тогда функция $d(\lambda)$ является характеристической функцией для \tilde{L}_0 и, следовательно, верно (13), а значит, имеет место (12). По теореме 1 существует единственный потенциал $q(x) \in L_2(0, \pi)$ такой, что числа $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ являются спектральными данными задачи $L_0(q)$. Так как $\beta_n = (-1)^{n-1}$, $n \geq 1$, то по теореме 4 заключаем, что $q(x) \in L'_2(0, \pi)$. \square

Теорема 6 (см. [9]). $q(x) \in L'_2(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n при всех $n \geq 1$.

Доказательство. 1) Пусть $q(x) = q(\pi - x)$ п.в. на $(0, \pi)$. Используя лемму 4 из [8], получаем $C(\pi, \lambda) \equiv S'(\pi, \lambda)$, т.е. $\delta(\lambda) \equiv 0$. В силу леммы 2 заключаем, что γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n при всех $n \geq 1$.

2. Пусть γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n при всех $n \geq 1$. По лемме 1 имеем $\delta(\gamma_n) = 0$ при всех $n \geq 1$. Тогда функция $F(\lambda) := \delta(\lambda)/d(\lambda)$ является целой по λ и убывает на бесконечности.



Это означает, что $F(\lambda) \equiv 0$ и, следовательно, $C(\pi, \lambda) \equiv S'(\pi, \lambda)$. Используя лемму 4 из [8], получаем, что $q(x) = q(\pi - x)$ п. в. на $(0, \pi)$. \square

Будем писать $a_n \in I_0$, если длина лакуны a_n равна нулю и $a_n \in I_1$ в противном случае.

Рассмотрим теперь обратную задачу для периодической краевой задачи L . В общем случае в обратной задаче 2 мы должны задавать Λ , γ и Ω . В случае центральной симметрии не надо задавать γ . С другой стороны, последовательность $\Omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$ не несет никакой информации, потому что в случае центрально-симметричного потенциала $\omega_n = 0$ при всех $n \geq 1$. К сожалению, в отличие от случая распадающихся условий, в периодическом случае задание спектра Λ не определяет потенциал q однозначно, и нам необходима дополнительная информация. Для этого введем последовательность $E = \{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$, где $\varepsilon_n = 0$, если $a_n \in I_0$, $\varepsilon_n = 1$, если $a_n \in I_1$ и γ_n лежит на правом конце лакуны a_n , $\varepsilon_n = -1$, если $a_n \in I_1$ и γ_n лежит на левом конце лакуны a_n . Последовательность $E = \{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ называется E -последовательностью для потенциала $q(x) \in L'_2(0, \pi)$. Обратная задача для периодической краевой задачи L в случае центральной симметрии формулируется следующим образом [9].

Обратная задача 4. Даны Λ и E , построить q .

Теорема 7 (см. [9]). Пусть $q(x) \in L'_2(0, \pi)$. Тогда задание Λ и E однозначно определяет потенциал q . Решение обратной задачи 1 может быть найдено по следующему алгоритму.

Алгоритм 1. Даны Λ и E .

1. Строим $p(\lambda)$, используя (5).
2. Вычисляем функции $\Delta(\lambda) = 1 - p(\lambda)$ и $p^+(\lambda) = p(\lambda) - 2$.
3. Находим нули $\Lambda^+ = \{\lambda_n^+\}_{n \geq 1}$ функции $p^+(\lambda)$.
4. Строим $\gamma = \{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ по правилу: γ_n лежит на правом конце лакуны a_n , если $\varepsilon_n = 1$; γ_n лежит на левом конце лакуны a_n , если $\varepsilon_n = -1$, и $\gamma_n = a_n$, если $\varepsilon_n = 0$.
5. Используя $\{\gamma_n\}$, вычисляем потенциал $q(x) \in L'_2(0, \pi)$, решая обратную задачу 3.

Обозначим через J_1 множество последовательностей $E = \{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ таких, что $\varepsilon_n = 0$, если $a_n \in I_0$, и $\varepsilon_n = \pm 1$, если $a_n \in I_1$. Ясно, что если E является E -последовательностью для q , то $E \in J_1$. Следующая теорема из [9] устанавливает необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 4.

Теорема 8 (см. [9]). Пусть заданы вещественные числа $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, удовлетворяющие (3), (4). Последовательность Λ является спектром некоторой краевой задачи L с вещественным потенциалом $q(x) \in L'_2(0, \pi)$, тогда и только тогда, когда выполняется (6), где функция $p(\lambda)$ строится по формуле (5). Кроме того, если дополнительно задана последовательность $E = \{\varepsilon_n\}_{n \geq 1} \in J_1$, то существует единственная вещественная функция $q(x) \in L'_2(0, \pi)$ такая, что Λ совпадает со спектром L , а E является E -последовательностью для q .

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть заданы вещественные числа $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, удовлетворяющие (3), (4). Построим функцию $p(\lambda)$, используя (5), и вычислим функции $\Delta(\lambda) = 1 - p(\lambda)$ и $p^+(\lambda) = p(\lambda) - 2$. Пусть выполняется (6). Тогда существуют нули $\Lambda^+ = \{\lambda_n^+\}_{n \geq 1}$ функции $p^+(\lambda)$ и верно (7). Используя (5) и аналогичные рассуждения, как и при доказательстве теоремы 5 (см. также [4, с. 45]), получаем:

$$p(\lambda) = 1 - \cos \rho\pi - a \frac{\sin \rho\pi}{\rho} - \frac{\kappa(\rho)}{\rho}, \quad (20)$$

где $\kappa(\rho) \in L_2(-\infty, \infty)$ при вещественных ρ . Так как $p^+(\lambda) = p(\lambda) - 2$, то из (20) следует, что верно (8). Пусть задана последовательность $E = \{\varepsilon_n\}_{n \geq 1} \in J_1$. Введем вещественные числа $\gamma = \{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ следующим образом: γ_n лежит на правом конце лакуны a_n , если $\varepsilon_n = 1$; γ_n лежит на левом конце лакуны a_n , если $\varepsilon_n = -1$; $\gamma_n = a_n$ если $\varepsilon_n = 0$. Ясно, что верно (9). Построим функцию $d(\lambda)$, используя (10), и последовательность $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ по формуле

$$\alpha_n = d(\gamma_n)\Delta(\gamma_n), \quad n \geq 1. \quad (21)$$



Так как $\Delta(\lambda) = 1 - p(\lambda)$, то из (20) вытекает, что

$$\Delta(\lambda) = \cos \rho\pi + a \frac{\sin \rho\pi}{\rho} + \frac{\kappa(\rho)}{\rho}.$$

Вместе с (9) это дает

$$\Delta(\gamma_n) = (-1)^n \left(1 + \frac{\kappa_n}{n}\right), \quad \{\kappa_n\} \in l_2. \quad (22)$$

Кроме того, верно (13). Из (13), (21) и (22) следует, что верно (12). Нетрудно проверить, что

$$\text{sign } d(\gamma_n) = (-1)^n, \quad \text{sign } \Delta(\gamma_n) = (-1)^n. \quad (23)$$

В силу (21) и (23) заключаем, что $\alpha_n > 0$, $n \geq 1$. Тогда по теореме 1 существует единственный вещественный потенциал $q(x) \in L_2(0, \pi)$ такой, что $\{\gamma_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ являются спектральными данными для краевой задачи L_0 с этим потенциалом. Построим решения $C(x, \lambda), S(x, \lambda)$ уравнения (1) с этим потенциалом. Обозначим

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = (C(\pi, \lambda) + S'(\pi, \lambda))/2, \quad \tilde{p}(\lambda) = 1 - \tilde{\Delta}(\lambda), \quad \tilde{p}^+(\lambda) = \tilde{p}(\lambda) - 2.$$

Используя (10) и (21), получаем $\Delta(\gamma_n) = \tilde{\Delta}(\gamma_n)$, $n \geq 1$. Тогда функция $F_0(\lambda) := (\Delta(\lambda) - \tilde{\Delta}(\lambda))/d(\lambda)$ является целой по λ и убывает на бесконечности. Это означает, что $F_0(\lambda) \equiv 0$, т.е. $\Delta(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}(\lambda)$ и, следовательно, $p(\lambda) \equiv \tilde{p}(\lambda)$, $p^+(\lambda) \equiv \tilde{p}^+(\lambda)$. В частности, это означает, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ совпадает со спектром краевой задачи L для потенциала q . Так как γ_n лежит на одном из концов лакуны a_n при всех $n \geq 1$, то из теоремы 6 следует, что $q(x) \in L'_2(0, \pi)$. Теперь очевидно, что E является E -последовательностью для q . \square

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014К) и РФФИ (проект № 16-01-00015).

Библиографический список

1. Марченко В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977.
2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. : Наука, 1984.
3. Pöschel J., Trubowitz E. Inverse Spectral Theory. N. Y. : Academic Press, 1987.
4. Freiling G., Yurko V. A. Inverse Sturm – Liouville Problems and their Applications. N. Y. : NOVA Science Publ., 2001.
5. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002.
6. Станкевич И. В. Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 1. С. 34–37.
7. Марченко В. А., Островский И. В. Характеристика спектра оператора Хилла // Матем. сб. 1975. Т. 97(139), № 4(8). С. 540–606.
8. Юрко В. А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями // Матем. заметки. 1975. Т. 18, вып. 4. С. 569–576.
9. Юрко В. А. О периодической задаче // Дифференциальные уравнения и теория функций. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1981. С. 109–115.
10. Юрко В. А. О восстановлении дифференциальных операторов с нераспадающимися краевыми условиями // Исследования по математике, механике и их приложениям. Уфа : Башкирский ун-т, 1981. С. 55–57.
11. Плаксина О. А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма – Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями // Матем. сб. 1986. Т. 131(173), № 1(9). С. 3–26.
12. Гусейнов И. М., Гасымов М. Г., Набиев И. М. Обратная задача для оператора Штурма – Лиувилля с нераспадающимися самосопряженными краевыми условиями // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31, № 6. С. 46–54.
13. Гусейнов И. М., Набиев И. М. Решение одного класса обратных краевых задач Штурма – Лиувилля // Матем. сб. 1995. Т. 186, № 5. С. 35–48.
14. Kargaev P., Korotyaev E. The inverse problem for the Hill operator, a direct approach // Invent. Math. 1997. Vol. 129, № 3. С. 567–593.
15. Юрко В. А. О дифференциальных операторах с нераспадающимися краевыми условиями // Функт. анализ и его прил. 1994. Т. 28, вып. 4. С. 90–92.



16. Yurko V. A. The inverse spectral problem for differential operators with nonseparated boundary conditions // *J. Math. Analysis Appl.* 2000. Vol. 250, № 1. P. 266–289.
17. Freiling G., Yurko V. A. On the stability of constructing a potential in the central symmetry case // *Applicable Analysis.* 2011. Vol. 90, № 12. P. 1819–1828.

On Inverse Periodic Problem for Differential Operators for Central Symmetric Potentials

V. A. Yurko

Yurko Vjacheslav Anatoljevich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, YurkoVA@info.sgu.ru

An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators on a finite interval with periodic boundary conditions is studied in the central symmetric case, when the potential is symmetric with respect to the middle of the interval. We discuss the statement of the problem, provide an algorithm for its solution along with necessary and sufficient conditions for the solvability of this nonlinear inverse problem.

Key words: differential operators; non-separated boundary conditions; inverse spectral problems.

This work was supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation (projects no. 1.1436.2014K) and by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00015).

References

1. Marchenko V. A. *Sturm–Liouville operators and their applications.* Birkhäuser, 1986.
2. Levitan B. M. *Inverse Sturm–Liouville problems.* Utrecht, VNU Sci. Press, 1987.
3. Pöschel J., Trubowitz E. *Inverse Spectral Theory.* New York, Academic Press, 1987.
4. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications.* New York, NOVA Science Publ., 2001.
5. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory.* Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002.
6. Stankevich I. V. An inverse problem of spectral analysis for Hill’s equation. *Soviet Math. Dokl.*, 1970, vol. 11, pp. 582–586.
7. Marchenko V. A., Ostrovskii I. V. A characterization of the spectrum of the Hill operator. *Math. USSR-Sb.*, 1975, vol. 26, no. 4, pp. 493–554. DOI: 10.1070/SM1975v026n04ABEH002493.
8. Yurko V. A. An inverse problem for second order differential operators with regular boundary conditions. *Math. Notes*, 1975, vol. 18, no. 3–4, pp. 928–932. DOI: 10.1007/BF01153046.
9. Yurko V. A. On a periodic boundary value problem. *Differ. Equations and Theory of Functions*, Saratov, Saratov Univ. Press, 1981, pp. 109–115 (in Russian).
10. Yurko V. A. On recovering differential operators with nonseparated boundary conditions. *Study in Math. and Appl.*, Ufa, Bashkir Univ. Press, 1981, pp. 55–58 (in Russian).
11. Plaksina O. A. Inverse problems of spectral analysis for the Sturm–Liouville operators with nonseparated boundary conditions. *Math. USSR-Sb.*, 1988, vol. 59, no. 1, pp. 1–23. DOI: 10.1070/SM1988v059n01ABEH003121.
12. Guseinov I. M., Gasymov M. G., Nabiev I. M. An inverse problem for the Sturm–Liouville operator with nonseparable self-adjoint boundary conditions. *Siberian Math. J.*, 1990, vol. 31, no. 6, pp. 910–918.
13. Guseinov I. M., Nabiev I. M. Solution of a class of inverse boundary-value Sturm–Liouville problems. *Sb. Math.*, 1995, vol. 186, no. 5, pp. 661–674. DOI: 10.1070/SM1995v186n05ABEH000035.
14. Kargaev P., Korotyaev E. The inverse problem for the Hill operator, a direct approach. *Invent. Math.*, 1997, vol. 129, no. 3, pp. 567–593.
15. Yurko V. A. On differential operators with non-separated boundary conditions. *Funct. Anal. Appl.*, 1994, vol. 28, no. 4, pp. 295–297. DOI: 10.1007/BF01076118.
16. Yurko V. A. The inverse spectral problem for differential operators with nonseparated boundary conditions. *J. Math. Analysis Appl.*, 2000, vol. 250, no. 1, pp. 266–289.
17. Freiling G., Yurko V. A. On the stability of constructing a potential in the central symmetry case. *Applicable Analysis*, 2011, vol. 90, no. 12, pp. 1819–1828.



УДК 517.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ КONTИНУАЛЬНОГО ЗАМКНУТОГО U -МНОЖЕСТВА

И. С. Юрченко

Юрченко Ирина Сергеевна, ассистент кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, hamsterchik@mail.ru

В данной работе рассматривается система характеров на группе Виленкина и изучаются множества единственности (U -множества) для рядов по системе характеров группы Виленкина. Доказывается достаточное условие для U -множества на группе Виленкина и строится континуальное замкнутое множество единственности на группе Виленкина для произвольной образующей последовательности.

Ключевые слова: множества единственности, замкнутое континуальное множество, группа Виленкина.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-76-79

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1], что счетное множество является U -множеством для системы Уолша на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$. Этот результат справедлив и для системы Виленкина на группе Виленкина, причем доказательство полностью повторяет доказательство для системы Уолша. Н. А. Бокаев [2] доказал достаточное условие для того, чтобы множество было U -множеством для системы Виленкина на $[0, 1]^*$. Также Н. А. Бокаев [3] показал, что если у образующей последовательности существует ограниченная в совокупности подпоследовательность, то для системы Виленкина существует континуальное замкнутое U -множество на $[0, 1]^*$. Там же было доказано, что если $p_n = n+2$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то континуальное замкнутое множество также существует. Покажем, что данные результаты справедливы для системы характеров на группе Виленкина для любой образующей последовательности.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность простых чисел. По последовательности (p_k) построим последовательность (m_k) следующим образом: $m_0 = 1$, $m_{k+1} = p_k m_k$. Рассмотрим группу G , состоящую из бесконечных последовательностей $G = \{(x_k)_{k=0}^{\infty} : x_k = \overline{0, p_k - 1}\}$. Определим на группе G операцию \oplus следующим образом:

$$x \oplus y \stackrel{\text{df}}{=} (x_k \oplus y_k)_{k=0}^{\infty}, \quad x_k \oplus y_k = (x_k + y_k) \bmod p_k.$$

Символом \ominus будем обозначать операцию, обратную к \oplus . Группу G с такими операциями называют *группой Виленкина*. Очевидно, что $(G_n/G_{n+1})^{\#} = p_n$.

Элементы $g_n = (0, 0, \dots, 0_{n-1}, 1_n, 0_{n+1}, \dots)$ образуют базисную систему в G , т.е. любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде ряда $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n$, $a_n = \overline{0, p_n - 1}$. Смежные классы $G_n \oplus h$ вместе с пустым множеством образуют полукольцо \mathcal{H} . Равенство $\mu(G_n \oplus h) = 1/m_n$ определяет на \mathcal{H} меру, которая может быть продолжена по схеме Каратеодори. В результате получается мера, совпадающая с мерой Хаара на борелевских подмножествах G . По мере μ по схеме Лебега строится абсолютно сходящийся интеграл, инвариантный относительно сдвига.

Определение 1. Пусть $n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k}{m_{k+1}} \in \mathbb{N}_0$, $n_k = \overline{0, p_k - 1}$, $z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k g_k \in G$, $z_k = \overline{0, p_k - 1}$.

Функции $r_k(z) = e^{2\pi i z_k / p_k}$ назовем *функциями Радемахера*. Функции $V_n(z) = \prod_{k=0}^{\infty} (r_k(z))^{\varepsilon_k}$ назовем *функциями Виленкина* на группе G .

Функции Виленкина $V_n(z)$ являются характерами группы Виленкина G и образуют ортонормированную систему в $L_2(G)$.



Определение 2. Множество $E \in G$ называется U -множеством для системы характеров $\{V_n(x)\}$, если из сходимости ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n V_n(x) \quad (1)$$

к нулю всюду вне E следует, что $c_n = 0$ при всех n .

Теорема 1. Множество $E \in G$ будет U -множеством для системы характеров $\{V_n(x)\}$, если для него найдется последовательность функций $F_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, обладающая свойствами:

1. $F_k(x) = \sum_{n=0}^{s_k} \gamma_n^{(k)} V_n(x)$, причем

а) $\sum_{n=0}^{s_k} |\gamma_n^{(k)}| \leq B < \infty$;

б) $|\gamma_0^{(k)}| \geq A > 0$;

в) $\gamma_n^{(k)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $n \geq 2$.

2. $F_k(x) = 0$ на E , кроме, быть может, точек множества $\mathcal{E}_k \subset E$, про которое заранее известно, что оно является U -множеством для системы $\{V_n(x)\}$.

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится к нулю вне E . Покажем, что $c_n = 0$ при всех n .

По условию 2 $F_k(x) = 0$ на $E \subset G$, следовательно, существует смежный класс $G_{l+1} \oplus a_l g_l \subset G \setminus E$ такой, что $F_k(x) \neq 0$ при $x \in G_{l+1} \oplus a_l g_l$. На смежном классе $G_{l+1} \oplus a_l g_l$ могут быть лишь точки множества $\mathcal{E}_k \subset E$, но $\mu_{\mathcal{E}_k} = 0$, значит, ряд (1) сходится к нулю почти всюду на $G_{l+1} \oplus a_l g_l$. Рассмотрим

$$f(x) \cdot F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n V_n(x) \cdot \sum_{l=0}^{s_k} \gamma_l^{(k)} V_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{s_k} c_n \gamma_l^{(k)} V_{n \oplus l}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{l \oplus n=j} c_n \gamma_l^{(k)} \right) V_j(x).$$

Обозначим

$$a_j^{(k)} = \sum_{l \oplus n=j} c_n \gamma_l^{(k)} = \sum_{l=0}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)} = c_j \gamma_0^{(k)} + \sum_{l=1}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)}.$$

По условию $f(x)$ сходится к нулю вне E , а $F_k(x) = 0$ на $E \setminus \mathcal{E}_k$, причем $\mu_{\mathcal{E}_k} = 0$. Следовательно, $f(x) \cdot F_k(x)$ сходится к нулю вне \mathcal{E}_k , которое является U -множеством, значит, для любого j $a_j^{(k)} = 0$.

Таким образом, $c_j \gamma_0^{(k)} + \sum_{l=1}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)} = 0$, т. е.

$$c_j = -\frac{1}{\gamma_0^{(k)}} \sum_{l=1}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)}.$$

Так как $f(x)$ сходится к нулю, то для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует номер L такой, что для любого $l > L$ $|c_{j \ominus l}| < \frac{\varepsilon_1 A}{2B}$. Обозначим $C = \max_l |c_{j \ominus l}|$. Из условия 1, в) следует, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует номер K такой, что при $k > K$ $|\gamma_l^{(k)}| < \frac{\varepsilon_2 A}{2CL}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} |c_j| &= \frac{1}{|\gamma_0^{(k)}|} \left| \sum_{l=1}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)} \right| \leq \frac{1}{A} \left| \sum_{l=1}^L c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)} \right| + \frac{1}{A} \left| \sum_{l=L+1}^{s_k} c_{j \ominus l} \gamma_l^{(k)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{A} \cdot \frac{\varepsilon_2 A}{2CL} \left| \sum_{l=1}^L c_{j \ominus l} \right| + \frac{1}{A} \cdot \frac{\varepsilon_1 A}{2B} \left| \sum_{l=L+1}^{s_k} \gamma_l^{(k)} \right| = \frac{\varepsilon_2}{2CL} \cdot C \cdot L + \frac{\varepsilon_1}{2B} \cdot B = \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Следовательно, для любого фиксированного j $|c_j| < \varepsilon$ при достаточно большом k , т. е. для любого j $c_j = 0$.

Теорема доказана.



2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 2. Для системы характеров $\{V_n(x)\}$ на группе Виленкина существует континуальное замкнутое U -множество.

Доказательство. Множество E будем строить следующим образом.

На первом шаге разбиваем группу $G = G_0$ на смежные классы $G_1 \oplus a_0g_0$ ранга p_0 и удаляем все смежные классы, кроме двух крайних, для определенности. Полученное множество обозначим $E_0 = G_1 \cup (G_1 \oplus (p_0 - 1)g_0)$. Оставшиеся два смежных класса разбиваем на смежные классы $G_2 \oplus a_1g_1$ ранга p_1 и удаляем все смежные классы, кроме двух крайних. Получим множество

$$E_1 = G_2 \cup (G_2 \oplus (p_1 - 1)g_1) \cup (G_2 \oplus (p_0 - 1)g_0) \cup (G_2 \oplus (p_1 - 1)g_1 \oplus (p_0 - 1)g_0)$$

и т. д. Получившееся в результате этого процесса множество обозначим E , причем из построения следует, что

$$\mu E_0 = \frac{2}{p_0} = \frac{2}{m_1}, \quad \mu E_1 = \frac{2^2}{p_0 p_1} = \frac{2^2}{m_2}, \quad \dots, \quad \mu E_{s-1} = \frac{2^s}{p_0 p_1 \dots p_{s-1}} = \frac{2^s}{m_s}.$$

Если последовательность $\{p_n\}$ содержит бесконечно много $p_n > 2$, то $\mu E_s = \frac{2}{p_0} \frac{2}{p_1} \dots \frac{2}{p_s} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Следовательно, $\mu E = 0$. В качестве последовательности функций $\{F_s(x)\}$ рассмотрим полиномы вида $F_s(x) = (1 - V_{m_s}(x))(1 - e^{2\pi i/p_s} V_{m_s}(x))$ и проверим выполнение условий теоремы 1.

Имеем:

$$F_s(x) = 1 - (1 + e^{2\pi i/p_s})V_n(x) + e^{2\pi i/p_s} V_{m_n}^2(x),$$

тогда сумма модулей коэффициентов при $V_{m_n}(x)$ имеет следующую оценку:

$$\sum_{n=0}^{\nu_s} |\gamma_n^{(s)}| = 1 + |1 + e^{2\pi i/p_s}| + |e^{2\pi i/p_s}| \leq 4 < \infty,$$

а модуль нулевого коэффициента — $|\gamma_0^{(s)}| = 1 > 0$ для любого s . Условие 1, в) очевидно, так как $\gamma_n^{(s)} = 0$ при $s \rightarrow \infty$, $n \in N$. Функции $F_s(x) = 0$ на E , так как если x из левого промежутка, то $V_{m_s}(x) = 1$ и первый сомножитель равен 0; если из правого, то $V_{m_s}(x) = e^{2\pi(p_s-1)/p_s}$, и второй сомножитель равен нулю. В качестве множества \mathcal{E}_s можно взять \emptyset .

Если же последовательность $\{p_n\}$ содержит бесконечно много $p_n = 2$, тогда выделим ограниченную в совокупности подпоследовательность $\{p_{n_k} : p_{n_k} = 2\}$ и построим множество E следующим образом.

На первом шаге из группы G_0 убираем промежутки, образованные точками x , в разложении которых $x_{n_0} = 0$, а остальные x_j любые. Оставшееся множество обозначим как E_0 . Затем из множества $G \setminus E_0$ убираем промежутки, образованные точками x , в разложении которых $x_{n_1} = 0$, а остальные x_j — любые. Оставшееся множество обозначим как E_1 . На k -м шаге из множества $G \setminus E_{k-1}$ убираем промежутки, образованные точками x , в разложении которых $x_{n_k} = 0$, а остальные x_j — любые. Оставшееся множество обозначим как E_k и т. д. Положим $E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$, где $E_k = \{x : x_{n_0} = x_{n_1} = \dots = x_{n_k} = 1\}$. Из построения следует, что

$$\mu E_0 = \frac{1}{m_{n_0}}, \quad \mu E_1 = \frac{p_{n_0}}{m_{n_1}} = \frac{2}{m_{n_1}}, \quad \dots, \quad \mu E_k = \frac{p_{n_0} p_{n_1} \dots p_{n_{k-1}}}{m_{n_k}} = \frac{2^k}{m_{n_k}}.$$

Следовательно, $\mu E = 0$.

В качестве последовательности функций $\{F_s(x)\}$ рассмотрим полиномы вида

$$F_s(x) = \sum_{j=0}^{p_{n_s}-1} V_{j m_{n_s}}(x)$$

и проверим выполнение условий теоремы 1.



Имеем $F_s(x) = \sum_{j=0}^{p_{n_s}-1} V_{jm_{n_s}}(x)$, тогда сумма модулей коэффициентов при $V_{jm_{n_s}}(x)$ имеет следующую оценку:

$$\sum_{n=0}^{p_{n_s}-1} |\gamma_n^{(s)}| \leq \sum_{n=0}^{p_{n_s}-1} 1 = p_{n_s} = 2 < \infty,$$

а модуль нулевого коэффициента — $|\gamma_0^{(s)}| = 1 > 0$ для любого s . Условие 1, в) очевидно, так как $\gamma_n^{(s)} = 0$ при $s \rightarrow \infty$, $n \in N$. По построению функции

$$F_s(x) = \sum_{j=0}^{p_{n_s}-1} V_{jm_{n_s}}(x) = \sum_{j=0}^{p_{n_s}-1} r_{n_s}^j(x) = \sum_{j=0}^{p_{n_s}-1} e^{2\pi i \frac{x_k}{p_{n_s}} j} = \sum_{j=0}^{p_{n_s}-1} e^{2\pi i \frac{1}{p_{n_s}} j} = 0$$

на E как сумма корней из единицы. В качестве множества \mathcal{E}_s можно взять \emptyset .

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

Библиографический список

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Шнейдер А. А. О единственности разложений по системе функций Уолша // Матем. сб. 1949. Т. 24(66), № 2. С. 279–300. 2. Бокаев Н. А. О множествах единственности для | <p>некоторых ортонормированных систем. Деп. в ВИНТИ 03.08.1983, № 4282-83.</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. Бокаев Н. А. Об U-множествах для мультипликативных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 1995. № 3. С. 84–86. |
|--|--|

On the Existence of Continual Closed U -set

I. S. Yurchenko

Yurchenko Irina Sergeevna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, hamsterchik@mail.ru

In this work we consider a system of characters of the Vilmkin group G and study uniqueness sets for series for system of character of Vilenkin group (in other words, U -sets). We prove a sufficient condition for the U -set on the Vilenkin group and constructed continual closed U -set on the Vilenkin group.

Key words: U -set, continual closed set, Vilenkin group.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-00102).

References

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Shneider A. A. On the uniqueness of expansions in Walsh functions. <i>Mat. Sb. (N.S.)</i>, 1949, vol. 24(66), no. 2, pp. 279–300 (in Russian). 2. Bokaev N. A. <i>An uniqueness sets for some ortho-</i> | <p><i>normal systems.</i> Preprint in VINITI, 03.08.1983, № 4282-83 (in Russian).</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. Bokaev N. A. <i>An U-sets for multiplicative systems.</i> <i>Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 1. Matem. Mekh.</i>, 1995, no. 3, pp. 84–86 (in Russian). |
|--|--|

МЕХАНИКА

УДК 531 (075.8); 629.7.05(075)

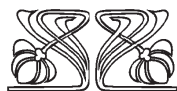
ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

Ю. Н. Челноков¹, С. Е. Переляев², Л. А. Челнокова³

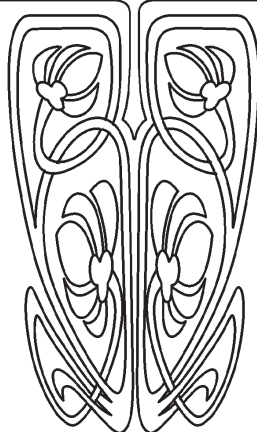
¹Челноков Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского; заведующий лабораторией механики, навигации и управления движением Института проблем точной механики и управления РАН, Саратов, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

²Переляев Сергей Егорович, доктор технических наук, главный научный сотрудник, ООО «Аэроспецпроект», Жуковский, Московская обл., Pers2030@yandex.ru

³Челнокова Людмила Александровна, младший научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением Института проблем точной механики и управления РАН, Саратов, ChelnokovaLA@mail.ru



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ



Исследуются новые и известные алгоритмы работы бесплатформенных инерциальных навигационных систем, предназначенные для высокоточного определения параметров ориентации движущегося объекта (параметров Родрига – Гамильтона (Эйлера)) в инерциальной системе координат. В основе построения новых алгоритмов лежит использование классического кватерниона поворота Гамильтона, кватерниона с нулевой скалярной частью, который ставится в соответствие классическому кватерниону поворота с помощью кватернионного аналога формулы Кэли, а также используется новое кватернионное дифференциальное уравнение инерциальной ориентации движущегося объекта. Новые алгоритмы построены с помощью метода последовательного приближения Пикара. В этих алгоритмах в качестве входной информации используется интегральная первичная информация об абсолютном угловом движении объекта. Показывается, что новые алгоритмы имеют преимущества перед известными алгоритмами аналогичного порядка в смысле точности и сложности.

Ключевые слова: движущийся объект, параметры Родрига – Гамильтона (Эйлера), инерциальная ориентация, кватернион Гамильтона, кватернионная матрица, формула Кэли, четырехмерный кососимметрический оператор.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-80-95

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе для нахождения параметров инерциальной ориентации движущегося объекта (твердого тела) с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) используется дифференциальное нелинейное кватернионное или матричное кинематическое уравнение типа Риккати [1]. Переменная в этом уравнении — кватернион с нулевой скалярной частью (ассоциированный кватернион) или четырехмерная кососимметрическая



матрица, которые ставятся в соответствие классическому кватерниону конечного поворота или кватернионной матрице поворота с помощью формул Кэли. Эта переменная отвечает четырехмерному кососимметрическому оператору, который соответствует трехмерному вектору конечного поворота $\theta = \operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ движущегося объекта (φ — эйлеров угол поворота, \mathbf{e} — единичный вектор эйлеровой оси поворота объекта).

В статье рассмотрены новые кватернионный одношаговый алгоритм третьего порядка точности и кватернионные двухшаговые алгоритмы третьего и четвертого порядков точности в четырехмерных кососимметрических операторах, предназначенные для вычисления параметров инерциальной ориентации объекта. Алгоритмы построены с помощью метода последовательного приближения Пикара, используют в качестве входной информации интегральную первичную информацию измерителей абсолютной угловой скорости объекта (приращения интегралов от проекций вектора абсолютной угловой скорости объекта на связанные с ним координатные оси (квазикоординаты)). С помощью математического моделирования показывается, что эти алгоритмы имеют преимущества перед известными алгоритмами аналогичного порядка в смысле точности и сложности. Статья является развитием работ [2–5].

1. КВАТЕРНИОННЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ТИПА РИККАТИ

Ортогональная кватернионная матрица поворота $n = n(\boldsymbol{\lambda})$ [1], сопоставляемая кватерниону поворота Гамильтона $\boldsymbol{\lambda}$, связана с четырехмерной кососимметрической матрицей k формулами Кэли [1, 6]:

$$n = (E - k)(E + k)^{-1}, \quad (1)$$

$$k = (E - n)(E + n)^{-1}, \quad (2)$$

$$n(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ k_1 & 0 & k_3 & -k_2 \\ k_2 & -k_3 & 0 & k_1 \\ k_3 & k_2 & -k_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$n = n(\boldsymbol{\lambda}) = n(\lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_v) = n(\cos(\varphi/2) + \mathbf{e}\sin(\varphi/2)), \quad \mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}_x = e_1\mathbf{i}_1 + e_2\mathbf{i}_2 + e_3\mathbf{i}_3.$$

Здесь E — четырехмерная единичная матрица, запись вида $n(\boldsymbol{\lambda})$ означает, что кватернионная матрица n сопоставляется кватерниону $\boldsymbol{\lambda}$, записанному в круглых скобках; \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_ξ — отображения единичного вектора \mathbf{e} на связанный с объектом базис X и инерциальный базис ξ соответственно, e_i — проекции вектора \mathbf{e} на оси систем координат X и ξ (одинаковые при условии, что в начальном положении одноименные оси систем координат X и ξ совпадали); $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона.

Кососимметрическая матрица k имеет вид

$$k = -\operatorname{tg}(\varphi/4) \begin{pmatrix} 0 & -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_1 & 0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Отметим, что если трехмерной кососимметрической матрице, связанной с матрицей направляющих косинусов формулой Кэли, соответствует вектор $\mathbf{k} = -\operatorname{tg}(\varphi/2)\mathbf{e}$, то четырехмерной кососимметрической матрице k , связанной этой формулой с кватернионной матрицей поворота n , соответствует, как это следует из (4), вектор $\mathbf{k} = -\operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$. При этом если трехмерная кососимметрическая матрица и соответствующий ей вектор \mathbf{k} не определены для углов $\varphi = \pm\pi$, то четырехмерная кососимметрическая матрица k и соответствующий ей вектор \mathbf{k} не определены для углов $\varphi = \pm 2\pi$.

Матричное кинематическое уравнение, использующее в качестве переменной четырехмерную кососимметрическую матрицу k , определяемую формулой (4), может быть записано в одной из двух следующих форм, имеющих вид матричных уравнений Риккати [1]:

$$4k^\bullet = -(E + k)\Omega(E - k), \quad (5)$$



$$4k^\bullet = k\Omega k + \Omega k - k\Omega - \Omega. \quad (6)$$

В этих уравнениях верхняя точка — символ дифференцирования по времени, Ω — четырехмерная кососимметрическая матрица, сопоставляемая отображению ω_x вектора ω абсолютной угловой скорости объекта на связанный базис X , имеющая вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где ω_i — проекции вектора ω на оси связанной системы координат X .

Отметим, что в задачах определения ориентации движущегося объекта используется также [7, 8] матричное кинематическое уравнение, где в качестве переменной берется трехмерная кососимметрическая матрица k , получаемая вычеркиванием первой строки и первого столбца в четырехмерной матрице k , определяемой второй из формул (3). Это уравнение формально отличается от уравнения (6) числовым коэффициентом, стоящим перед производной от используемой переменной (вместо коэффициента 4 стоит коэффициент 2):

$$2k^\bullet = k\Omega k + \Omega k - k\Omega - \Omega.$$

Матрица Ω в этом случае — трехмерная кососимметрическая матрица угловых скоростей, получаемая вычеркиванием первой строки и первого столбца в четырехмерной матрице Ω , определяемой формулой (7), а трехмерная кососимметрическая матрица k связана с матрицей c направляющих косинусов углов формулой Кэли [1]: $c = (E - k)(E + k)^{-1}$.

Кососимметрические матрицы третьего (нечетного) и четвертого (четного) порядков имеют качественно различные свойства: если кососимметрические матрицы третьего порядка являются особыми (их определители равны нулю), то кососимметрические матрицы четвертого порядка — нет (их определители всегда отличны от нуля). Кроме того, если многочлен любой степени от кососимметрической матрицы третьего порядка сводится к многочлену второй степени, то многочлен любой степени от кососимметрической матрицы четвертого порядка сводится к многочлену первой степени. Последнее обстоятельство делает использование матричного кинематического уравнения (6) в четырехмерных кососимметрических операторах при построении алгоритмов определения ориентации движущихся объектов с помощью БИНС более эффективным по сравнению с использованием кинематического уравнения в трехмерных кососимметрических операторах.

В кватернионной записи кватернионные аналоги формул Кэли, связывающие кватернион поворота λ с соответствующим трехмерным вектором \mathbf{k} (точнее, с кватернионом \mathbf{k} , имеющим нулевую скалярную часть), имеют вид

$$\lambda = (1 + \mathbf{k})^{-1} \circ (1 - \mathbf{k}) = (1 - \mathbf{k}) \circ (1 + \mathbf{k})^{-1}, \quad (8)$$

$$\mathbf{k} = (1 + \lambda)^{-1} \circ (1 - \lambda) = (1 - \lambda) \circ (1 + \lambda)^{-1}, \quad (9)$$

где

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 = \lambda_0 + \lambda_v = \cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2)(e_1 \mathbf{i}_1 + e_2 \mathbf{i}_2 + e_3 \mathbf{i}_3),$$

$$\mathbf{k} = k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3 = -\operatorname{tg}(\varphi/4)(e_1 \mathbf{i}_1 + e_2 \mathbf{i}_2 + e_3 \mathbf{i}_3),$$

центральный кружок — символ кватернионного произведения.

Из этих формул следует, что четырехмерной кососимметрической матрице k , порождаемой формулой Кэли, отвечает кватернион $\mathbf{k} = -\operatorname{tg}(\varphi/4)(e_1 \mathbf{i}_1 + e_2 \mathbf{i}_2 + e_3 \mathbf{i}_3)$ с нулевой скалярной частью.

Кватернионные кинематические уравнения типа Риккати, соответствующие матричным уравнениям (5) и (6), имеют следующий вид [1]:

$$4\mathbf{k}^\bullet = -(1 - \mathbf{k}) \circ \omega_x \circ (1 + \mathbf{k}), \quad (10)$$



$$4\mathbf{k}^* = \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{k} + \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\omega}_x - \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{k} - \boldsymbol{\omega}_x = \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \mathbf{k} - 2\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{k} - \boldsymbol{\omega}_x, \quad (11)$$

где кватернионная переменная $\mathbf{k} = k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + k_3\mathbf{i}_3$ и кватернион угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3$ — кватернионы с нулевыми скалярными частями, \times — символ векторного произведения.

Отметим, что векторы конечных поворотов $\boldsymbol{\theta} = \text{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\theta} = \text{ctg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ и соответствующие им векторные кинематические уравнения рассматривались в [9].

Кроме того, отметим аддитивное вхождение матрицы угловых скоростей Ω в матричное кинематическое уравнение (6), кватерниона угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_x$ — в кватернионное кинематическое уравнение (11), а вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ — в часто используемое векторное кинематическое уравнение для вектора $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}$ эйлера конечного поворота твердого тела. Поэтому первое приближение решений этих уравнений на шаге интегрирования, построенное методом последовательного приближения Пикара, есть приращение интеграла на шаге интегрирования от вектора абсолютной угловой скорости объекта, непосредственно измеряемое на борту движущегося объекта большинством современных датчиков угловой скорости. Это делает указанные уравнения более удобными для построения алгоритмов определения инерциальной ориентации движущегося объекта, использующих интегральную первичную информацию об угловом движении объекта, по сравнению с классическим кватернионным кинематическим уравнением:

$$2\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x,$$

используемым в качестве переменной кватернион ориентации $\boldsymbol{\lambda}$.

Известно, что компонента λ_0^* скалярной части и компоненты λ_i^* ($i = 1, 2, 3$) векторной части кватерниона приращения $\boldsymbol{\lambda}^*$ кватернионной переменной $\boldsymbol{\lambda}$, вычисляемые на шаге интегрирования, отличаются на несколько порядков: величина λ_0^* близка к единице, в то время как величины λ_i^* имеют порядок, равный 10^{-5} и меньше (в зависимости от вида углового движения объекта и шага интегрирования). Близость компоненты λ_0^* приращения $\boldsymbol{\lambda}^*$ кватернионной переменной $\boldsymbol{\lambda}$, вычисляемого на шаге интегрирования, к единице может приводить к потере точности определения ориентации при малой ограниченной разрядной сетке бортового вычислителя. Поэтому при построении алгоритмов численного интегрирования классического кватернионного кинематического уравнения целесообразно вместо переменной λ_0^* использовать новую переменную, равную $1 - \lambda_0^*$. Во многих алгоритмах, предложенных зарубежными и отечественными авторами, величины λ_j^* вычисляются через промежуточные кинематические параметры φ_i , являющиеся проекциями вектора $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\mathbf{e}$ эйлера конечного поворота объекта на связанные координатные оси. Нами предлагается вычислять величины λ_j^* через другие промежуточные кинематические параметры k_i , являющиеся проекциями вектора $\mathbf{k} = -\text{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ конечного поворота объекта на связанные координатные оси.

2. АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ

В основе решения задач автономного определения ориентации движущегося объекта лежит численное интегрирование дифференциальных уравнений инерциальной ориентации объекта на его борту. Для интегрирования этих уравнений могут быть использованы стандартные методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, такие как метод Рунге – Кутты, метод прогноза и коррекции и другие стандартные методы, использующие мгновенную информацию о проекциях ω_i вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости объекта на связанные координатные оси, а также численные методы, специально разработанные для интегрирования уравнений инерциальной ориентации и использующие либо мгновенную информацию о проекциях ω_i , либо интегральную информацию (приращения интегралов от проекций ω_i угловой скорости объекта на связанные координатные оси).

Выбор того или иного метода интегрирования зависит от того, для какого класса движущихся объектов он предназначен (зависит от законов и параметров ожидаемых вращательных движений объекта). Критериями при выборе метода служат требуемая точность вычисления параметров ориентации и объем необходимых вычислений. Ниже приводятся новые алгоритмы [2–5], построенные методом последовательного приближения Пикара с использованием формул Кэли и кватернионного кинематического уравнения типа Риккати (11). Отметим, что порядок точности алгоритма, например второй, означает, что методическая накапливающаяся погрешность алгоритма пропорциональна h^2 , где h — шаг интегрирования.



Алгоритмы инерциальной ориентации движущегося объекта (как правило, алгоритмы вычисления кватерниона λ инерциальной ориентации) строятся по общей рекуррентной схеме, имеющей в кватернионной записи следующий вид:

$$\lambda(t_n) = \lambda(t_{n-1}) \circ \lambda^*, \tag{12}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_v = \lambda_0 + \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mathbf{i}_k, \quad \lambda^* = \lambda_0^* + \lambda_v^* = \lambda_0^* + \sum_{k=1}^3 \lambda_k^* \mathbf{i}_k.$$

Здесь λ_j^* — приращения параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j на шаге интегрирования $h = t_n - t_{n-1}$; λ_v, λ_v^* — векторные части кватернионов λ и λ^* .

Приращения $\lambda_0^*, \lambda_i^* (i = 1, 2, 3)$ (или λ_0^*, λ_v^*) параметров Эйлера вычисляются на каждом шаге интегрирования по соотношениям, вид которых зависит от выбранного метода численного интегрирования. Часто, как уже отмечалось, приращения λ_j^* вычисляются через промежуточные кинематические параметры φ_i , являющиеся проекциями вектора $\varphi = \varphi \mathbf{e}$ эйлера конечного поворота объекта на связанные координатные оси, по формулам

$$\lambda_0^* = \cos(\varphi/2), \quad \lambda_k^* = \varphi^{-1} \varphi_k \sin(\varphi/2) \quad (k = 1, 2, 3), \quad \varphi = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)^{1/2}. \tag{13}$$

В свою очередь, переменные φ_i находятся по одному из выбранных алгоритмов численного интегрирования (с нулевыми начальными условиями) матричного дифференциального уравнения Стюльпнагеля [7, 8] (J. Stuelpnagel):

$$k^\bullet = \Omega - \frac{1}{2}(\Omega k - k\Omega) + \frac{1}{\varphi^2} \left(1 - \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg}(\varphi/2)\right) (k^2 \Omega + \Omega k^2 - 2k\Omega k),$$

в котором k и Ω — трехмерные кососимметрические матрицы, сопоставляемые векторам φ и ω соответственно (построены из проекций этих векторов на связанные координатные оси), или эквивалентного ему векторного дифференциального уравнения Борца [10] (J. E. Bortz):

$$\varphi^\bullet = \omega + \frac{1}{2} \varphi \times \omega + \frac{1}{\varphi^2} \left(1 - \frac{\varphi}{2} \operatorname{ctg}(\varphi/2)\right) \varphi \times (\varphi \times \omega). \tag{14}$$

Каждое из этих уравнений является существенно нелинейным и содержит особую точку $\varphi = \pm 2\pi$.

Отметим, что при построении многих предложенных алгоритмов ориентации приращение вектора φ на шаге интегрирования вычисляется с помощью интегрирования уравнения Борца (14), в котором отбрасывается или упрощается [11, 12] третье нелинейное слагаемое, содержащее двойное векторное произведение. Так, в [11] в третьем слагаемом уравнения (14) полагается $(1/\varphi^2)(1 - (\varphi/2)\operatorname{ctg}(\varphi/2)) \approx 1/12$, а затем получающееся в этом уравнении выражение $(1/2)\varphi \times \omega + (1/12)\varphi \times (\varphi \times \omega)$ упрощается. Такие упрощения допустимы лишь при построении алгоритмов, не выше третьего порядка точности. Нами приращения параметров Эйлера предлагается вычислять через другие промежуточные кинематические параметры — проекции x_i вектора конечного поворота $\mathbf{x} = -\mathbf{k} = \operatorname{tg}(\varphi/4)\mathbf{e}$ на связанные координатные оси по формулам

$$\lambda^* = (1 - x^2 + 2\mathbf{x})/(1 + x^2), \quad x^2 = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{15}$$

или по эквивалентным им формулам

$$\lambda_0^* = (1 - x^2)/(1 + x^2), \quad \lambda_v^* = 2\mathbf{x}/(1 + x^2), \quad x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{16}$$

В свою очередь, переменные x_i находятся по одному из выбранных алгоритмов численного интегрирования (с нулевыми начальными условиями) нового кватернионного кинематического уравнения типа Риккати (10) или (11), принимающего с учетом введенной новой переменной \mathbf{x} вид (17) или (18):

$$4\mathbf{x}^\bullet = \omega_x + \mathbf{x} \circ \omega_x - \omega_x \circ \mathbf{x} - \mathbf{x} \circ \omega_x \circ \mathbf{x}, \tag{17}$$

$$4\mathbf{x}^\bullet = \omega_x - 2\omega_x \times \mathbf{x} - \mathbf{x} \circ \omega_x \circ \mathbf{x}. \tag{18}$$



Соотношения (15) (или (16)), связывающие приращение λ^* кватерниона поворота λ на шаге интегрирования с вектором поворота \mathbf{x} , и дифференциальное уравнение (18) для вектора \mathbf{x} гораздо проще соотношений (13), связывающих приращение λ^* с вектором поворота φ , и дифференциального уравнения (14) для вектора φ (уравнения Борца). Поэтому нами для построения алгоритмов ориентации БИНС предлагается использовать уравнение (18) и соотношения (15) (или (16)).

Приведем исследуемые новые алгоритмы вычисления приращений λ_j^* параметров Эйлера λ_j на шаге интегрирования, построенные (с помощью метода последовательного приближения Пикара) с использованием формул Кэли и кватернионного кинематического уравнения типа Риккати [2–5].

2.1. Одношаговые алгоритмы третьего порядка точности

Алгоритм 1.

$$\begin{aligned} \lambda_0^* &= (1 - x^2)/(1 + x^2), & \lambda_v^* &= 2\mathbf{x}/(1 + x^2), & x^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \mathbf{x} &= a\gamma + b\gamma^* \times \gamma - c\gamma \circ \gamma^* \circ \gamma, \\ \gamma &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega(t) dt, & \gamma^* &= \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \omega(t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Алгоритм 2. В этом алгоритме кватернионная переменная \mathbf{x} с нулевой скалярной частью вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= a\gamma + b\gamma^* \times \gamma + d(\gamma^{*2}\gamma^* + \gamma^2\gamma), \\ \gamma^2 &= \gamma \bullet \gamma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, & \gamma^{*2} &= \gamma^* \bullet \gamma^* = \gamma_1^{*2} + \gamma_2^{*2} + \gamma_3^{*2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Остальные соотношения алгоритма 1 не изменяются.

2.2. Двухшаговый алгоритм третьего порядка точности

$$\begin{aligned} \lambda_0^* &= (1 - x^2)/(1 + x^2), & \lambda_v^* &= 2\mathbf{x}/(1 + x^2), & x^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \mathbf{x} &= a(\gamma' + \gamma'') + e\gamma' \times \gamma'' - \ell\gamma'' \circ \gamma' \circ \gamma'', \\ \gamma' &= \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+h/2} \omega(t) dt, & \gamma'' &= \int_{t_{n-1}+h/2}^{t_{n-1}+h} \omega(t) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

2.3. Двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности

Первый вариант:

$$\begin{aligned} \lambda_0^* &= (1 - x^2)/(1 + x^2), & \lambda_v^* &= 2\mathbf{x}/(1 + x^2), & x^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \mathbf{x} &= a(\gamma' + \gamma'') + e\gamma' \times \gamma'' + b(\gamma'^2\gamma' + \gamma''^2\gamma'') = (a + b\gamma'^2)\gamma' + (a + b\gamma''^2)\gamma'' + e\gamma' \times \gamma''. \end{aligned} \quad (22)$$

Второй вариант:

$$\begin{aligned} \lambda_0^* &= (1 - x^2)/(1 + x^2), & \lambda_v^* &= 2\mathbf{x}/(1 + x^2), & x^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ \mathbf{x} &= a(\gamma' + \gamma'') + e\gamma' \times \gamma'' + b(\gamma'^2\gamma' + \gamma''^2\gamma'') + b[(\gamma' \cdot \gamma'' + \gamma''^2)\gamma' - (\gamma' \cdot \gamma'' + \gamma'^2)\gamma''] = \\ &= [a + b(\gamma'^2 + \gamma' \cdot \gamma'' + \gamma''^2)]\gamma' + [a + b(\gamma''^2 - \gamma' \cdot \gamma'' - \gamma'^2)]\gamma'' + e\gamma' \times \gamma''. \end{aligned} \quad (23)$$

В этих алгоритмах a, b, c, d, e, ℓ — числовые коэффициенты.

Замечание 1. Термины «одношаговый», «двухшаговый» и «четырёхшаговый» алгоритм означают, что шаг интегрирования равен соответственно дискретности, удвоенной дискретности и учетверенной дискретности выдачи интегральной первичной информации гироскопов (измерителей абсолютной угловой скорости движущегося объекта).



3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

С применением математического моделирования работы БИНС исследованы известные (приведенные в [1]) алгоритмы определения инерциальной ориентации движущегося объекта, использующие интегральную первичную информацию о вращательном движении объекта: метод средней скорости [1, формулы (7.18)], имеющий второй порядок точности; одношаговый [1, формулы (7.20)] и двухшаговый [1, формулы (7.22)] алгоритмы третьего порядка точности; двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности [1, с. 355] и четырехшаговый алгоритм четвертого порядка точности А. П. Панова [9, с. 157, 158]:

$$\lambda_0^* = \cos(\varphi/2), \quad \lambda_k^* = \varphi^{-1} \varphi_k \sin(\varphi/2) \quad (k = 1, 2, 3), \quad \varphi = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)^{1/2}, \quad (24)$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^4 \gamma^{(i)} + \frac{22}{45} [\Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}] [\gamma^{(3)} + \gamma^{(4)}] + \frac{32}{45} [\Gamma^{(1)} \gamma^{(2)} + \Gamma^{(3)} \gamma^{(4)}], \quad (25)$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad \gamma^{(i)} = (\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}, \gamma_3^{(i)}) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \text{— векторы-столбцы,}$$

$$\Gamma^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_3^{(i)} & \gamma_2^{(i)} \\ \gamma_3^{(i)} & 0 & -\gamma_1^{(i)} \\ -\gamma_2^{(i)} & \gamma_1^{(i)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_k^{(1)} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+h/4} \omega_k(t) dt, \quad \gamma_k^{(2)} = \int_{t_{n-1}+h/4}^{t_{n-1}+h/2} \omega_k(t) dt,$$

$$\gamma_k^{(3)} = \int_{t_{n-1}+h/2}^{t_{n-1}+3h/4} \omega_k(t) dt, \quad \gamma_k^{(4)} = \int_{t_{n-1}+3h/4}^{t_{n-1}+h} \omega_k(t) dt \quad (k = 1, 2, 3), \quad (26)$$

получающийся (используются наши обозначения) из его алгоритма [9, формулы (3.3.38), (3.3.39), (3.3.45)] шестого порядка точности вычисления вектора φ (опечатка: вместо (32/55) в формулах (3.3.45) из [9] должно быть (32/45)), а также новые алгоритмы ориентации, приведенные в данной статье: одношаговые алгоритмы третьего порядка точности (19), (20) и двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности (22).

Отметим, что известный одношаговый алгоритм третьего порядка точности [1, формулы (7.20)] был приведен ранее в работах [13, 14] (он также приводится в [12]), а двухшаговый алгоритм третьего порядка точности [1, формулы (7.22)] (см. также [12]) и двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности были получены в [1, с. 355] на основе двухшагового алгоритма вычисления координат вектора ориентации $\varphi = \varphi e$ четвертого порядка точности, приведенного в [9], при учете связей координат этого вектора с параметрами Эйлера. Эти алгоритмы ориентации отличаются простотой и хорошей точностью. Метод средней скорости, приведенный и исследованный ранее в [15–17], относится к алгоритмам второго порядка точности, которые широко использовались в алгоритмах БИНС космических кораблей «Союз Т/ТМ/ТМА», «Прогресс М/М1» [12]. Аналогичные алгоритмы второго порядка точности использовались и для орбитальных станций «Мир», Международной космической станции (МКС) [12]. Четырехшаговый алгоритм четвертого порядка точности А. П. Панова реализован в алгоритмах БИНС, построенных на лазерных гироскопах.

Одной из отличительных черт проведенного исследования заключается в изучении точности (вычислительного дрейфа) алгоритмов ориентации при наличии высокочастотных (порядка 100 или 400 гц) колебаний основания с учетом частоты съема первичной интегральной информации 1000 или 2000 гц.

Исследование проведено с помощью объемного математического моделирования. При моделировании движения объекта предполагается, что он совершает по каждой из угловых переменных ψ , ϑ , γ (типа самолетных углов) отдельные гармонические колебания или совершает по каждой из угловых переменных композицию нескольких гармонических колебаний с разными амплитудами и частотами. Задание таких законов движения объекта позволяет наиболее полно выявить точностные возможности исследуемых алгоритмов (традиционно при исследовании алгоритмов ориентации движение объекта



задается в виде конического движения, т.е. моделируется колебательное движение объекта по двум, а не трем угловым переменным). Вычисления проводились с 32- или 64-разрядной сеткой (последняя использовалась при моделировании алгоритмов четвертого порядка точности). Шаг интегрирования h выбирался из интервала $[0.0005 \text{ с} \div 0.1 \text{ с}]$. Время движения объекта (интегрирования) — 600 с (10 мин).

Моделирование проводилось как для отдельных низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта (частоты колебаний $f_\psi = f_\gamma = 1$ гц, $f_\vartheta = 0.5$ гц) с малыми ($\psi_+ = 1$ град, $\vartheta_+ = 2$ град, $\gamma_+ = 3$ град) и большими ($\psi_+ = 15$ град, $\vartheta_+ = 5$ град, $\gamma_+ = 15$ град) амплитудами (а также для других вариантов отдельных низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта с большими амплитудами и частотами), так и для композиций высокочастотных и низкочастотных гармонических колебаний объекта, в частности для следующих параметров гармоник:

первая высокочастотная гармоника: частоты — $f_\psi = 380$ гц, $f_\vartheta = 400$ гц, $f_\gamma = 420$ гц; амплитуды (одинаковые) — $\psi_+ = \vartheta_+ = \gamma_+ = 2.5$ угл. с или $\psi_+ = \vartheta_+ = \gamma_+ = 25$ угл. с;

вторая высокочастотная гармоника: частоты — $f_\psi = 60$ гц, $f_\vartheta = 80$ гц, $f_\gamma = 100$ гц; амплитуды — $\psi_+ = 1$ угл. мин, $\vartheta_+ = 1.5$ угл. мин, $\gamma_+ = 2$ угл. мин или $\psi_+ = 10$ угл. мин, $\vartheta_+ = 15$ угл. мин, $\gamma_+ = 20$ угл. мин;

третья низкочастотная гармоника: частоты — $f_\psi = f_\vartheta = f_\gamma = 1$ гц (одинаковые) или $f_\psi = 1$ гц, $f_\vartheta = 2$ гц, $f_\gamma = 3$ гц; амплитуды — $\psi_+ = 6$ град, $\vartheta_+ = 8$ град, $\gamma_+ = 10$ град.

Отметим, что приведенные ниже погрешности алгоритмов численного интегрирования, использующих интегральную информацию о движении объекта, включают в себя погрешности вычисления приращений интегралов от проекций вектора абсолютной угловой скорости объекта (т.е. включают погрешности формирования входной интегральной информации алгоритмов ориентации), величины которых зависят от числа M точек разбиения интервалов вычисления приращений интегралов ($M = 11, 21, 41, \dots$) и от задаваемых угловых движений объекта (эта погрешность существенно влияет на точность определения ориентации с помощью алгоритмов третьего и выше порядков точности).

Приведем основные выводы, касающиеся точностных характеристик алгоритмов ориентации для различных угловых движений объекта (для отдельных трехчастотных гармонических колебаний объекта по углам Эйлера – Крылова и для их композиций).

3.1. Отдельные трехчастотные гармонические колебания объекта по углам Эйлера – Крылова

3.1.1. Случай, когда частоты колебаний $f_\psi = f_\gamma = 1$ гц, $f_\vartheta = 0.5$ гц, а амплитуды колебаний либо малые: $\psi_+ = 1$ град, $\vartheta_+ = 2$ град, $\gamma_+ = 3$ град, либо большие: $\psi_+ = 15$ град, $\vartheta_+ = 5$ град, $\gamma_+ = 15$ град.

1. Анализ изменения во времени методических погрешностей определения углов ориентации объекта показывает, что погрешность вычисления каждого из углов ориентации имеет две составляющие: медленно изменяющуюся составляющую, монотонно возрастающую во времени, и быстро изменяющуюся периодическую составляющую, период изменения которой определяется периодом гармонических колебаний объекта (для отдельных низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта этот период равен 2 с или 1 с).

2. Погрешность вычисления углов ориентации при совершении объектом угловых колебаний с большими амплитудами увеличивается в среднем на два порядка по сравнению с погрешностями для угловых колебаний с малыми амплитудами.

3. При увеличении шага интегрирования на порядок погрешности вычисления углов ориентации увеличиваются на $2 \div 3$ и более порядков; при совершении объектом угловых колебаний с большими амплитудами худшие результаты для шага интегрирования $h = 0.1$ с дает одношаговый алгоритм третьего порядка точности [1, формулы (7.20)], использующий информацию из предыдущего шага интегрирования, а наименьшую — новый двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности (22) и четырехшаговый алгоритм четвертого порядка точности А. П. Панова (24), (25); причем эти алгоритмы для этого большого шага интегрирования в отличие от других исследуемых алгоритмов остаются работоспособными, имея по угловым переменным ψ, ϑ, γ накопленные методические погрешности, равные $2.92 \cdot 10^{-2}$ град, $4.52 \cdot 10^{-3}$ град, $1.63 \cdot 10^{-2}$ град и $2.09 \cdot 10^{-2}$ град, $3.93 \cdot 10^{-3}$ град, $1.48 \cdot 10^{-2}$ град соответственно.



Замечание 2. Отметим, что при сравнении потенциальной точности двухшагового и четырехшагового алгоритмов четвертого порядка точности нужно сравнивать результаты интегрирования, полученные с помощью четырехшагового алгоритма для шага интегрирования, вдвое превосходящего шага интегрирования дифференциальных уравнений ориентации объекта с помощью двухшагового алгоритма, так как двухшаговый алгоритм может быть реализован с частотой, вдвое превосходящей частоту реализации четырехшагового алгоритма. Для шага интегрирования $h = 0.2$ с четырехшаговый алгоритм (24), (25) имеет по угловым переменным ψ, ϑ, γ накопленные методические погрешности, равные $3.20 \cdot 10^{-1}$ град, $1.20 \cdot 10^{-1}$ град, $4.72 \cdot 10^{-1}$ град соответственно. Эти погрешности более чем на порядок превосходят погрешности нового двухшагового алгоритма (22) для шага интегрирования $h = 0.1$ с.

4. Для моделируемых низкочастотных угловых движений объекта с малыми амплитудами метод средней скорости [1, (7.18)] имеет хорошую точность, поэтому он, как известно [12], широко используется для определения ориентации космических аппаратов. При шаге интегрирования $h = 0.001$ с его погрешности составляют величины $9.73 \cdot 10^{-7}$ град, $1.25 \cdot 10^{-7}$ град и $5.74 \cdot 10^{-7}$ град по переменным ψ, ϑ, γ соответственно, а при шаге интегрирования $h = 0.01$ с эти погрешности составляют величины $9.75 \cdot 10^{-5}$ град, $1.20 \cdot 10^{-5}$ град и $5.97 \cdot 10^{-4}$ град соответственно (при одинаковом числе $M = 11$ точек разбиения шага интегрирования, используемых при вычислении интегралов от проекций угловой скорости объекта), т. е. увеличиваются на два порядка. Новый одношаговый алгоритм третьего порядка точности (19) имеет в этих случаях погрешности, равные $3.30 \cdot 10^{-8}$ град, $1.95 \cdot 10^{-8}$ град, $9.99 \cdot 10^{-8}$ град и $4.65 \cdot 10^{-6}$ град, $2.58 \cdot 10^{-6}$ град, $1.62 \cdot 10^{-5}$ град по переменным ψ, ϑ, γ соответственно (при том же числе $M = 11$ точек разбиения шага интегрирования).

Для моделируемых низкочастотных угловых движений объекта с большими амплитудами погрешности метода средней скорости увеличиваются в среднем на 2 порядка и составляют (при шагах интегрирования, равных 0.001 с и 0.01 с) величины $1.17 \cdot 10^{-4}$ град, $4.33 \cdot 10^{-5}$ град, $1.68 \cdot 10^{-4}$ град и $1.20 \cdot 10^{-2}$ град, $4.50 \cdot 10^{-3}$ град, $1.72 \cdot 10^{-2}$ град по переменным ψ, ϑ, γ соответственно, в то время как новый одношаговый алгоритм третьего порядка точности (19) имеет при шаге интегрирования $h = 0.01$ с значительно меньшие погрешности, равные $2.49 \cdot 10^{-4}$ град, $2.67 \cdot 10^{-3}$ град, $9.12 \cdot 10^{-4}$ град по переменным ψ, ϑ, γ соответственно.

5. Для моделируемых низкочастотных угловых движений объекта с большими амплитудами из всех одношаговых алгоритмов ориентации наименьшую методическую погрешность имеет новый одношаговый алгоритм третьего порядка точности (19). При шаге интегрирования $h = 0.001$ с его погрешности составляют величины $3.53 \cdot 10^{-7}$ град, $2.73 \cdot 10^{-6}$ град и $4.12 \cdot 10^{-7}$ град по переменным ψ, ϑ, γ соответственно, а при шаге интегрирования $h = 0.002$ с эти погрешности составляют величины $9.89 \cdot 10^{-7}$ град, $2.14 \cdot 10^{-5}$ град и $6.03 \cdot 10^{-6}$ град соответственно, т. е. при увеличении шага интегрирования в 2 раза погрешность по переменной ψ увеличивается примерно в 3 раза, по переменной ϑ — в 8 раз, а по переменной γ — в 15 раз. При шаге интегрирования $h = 0.001$ с погрешности известного одношагового алгоритма третьего порядка точности [1, (7.20)] составляют величины $6.29 \cdot 10^{-7}$ град, $8.03 \cdot 10^{-6}$ град и $1.26 \cdot 10^{-6}$ град по переменным ψ, ϑ, γ соответственно, а при шаге интегрирования $h = 0.002$ с эти погрешности составляют величины $3.57 \cdot 10^{-6}$ град, $6.42 \cdot 10^{-5}$ град и $1.30 \cdot 10^{-5}$ град соответственно, т. е. при увеличении шага интегрирования в 2 раза погрешность по переменной ψ увеличивается примерно в 6 раз, по переменной ϑ — в 8 раз, а по переменной γ — в 10 раз. Число точек разбиения шага интегрирования, используемых при вычислении интегралов от проекций угловой скорости объекта, для шага интегрирования $h = 0.001$ бралось равным 21, а для шага интегрирования $h = 0.002$ бралось равным 41.

6. Из всех многошаговых алгоритмов ориентации наименьшую методическую погрешность имеет новый двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности (22) и четырехшаговый алгоритм четвертого порядка точности А. П. Панова (24), (25). При шаге интегрирования $h = 0.001$ с погрешности двухшагового алгоритма (22) составляют величины $4.13 \cdot 10^{-7}$ град, $1.47 \cdot 10^{-7}$ град и $5.40 \cdot 10^{-7}$ град по переменным ψ, ϑ, γ соответственно, а при шаге интегрирования $h = 0.002$ с эти погрешности составляют величины $1.66 \cdot 10^{-6}$ град, $5.87 \cdot 10^{-7}$ град и $2.16 \cdot 10^{-6}$ град соответственно (при одинаковом числе $M = 21$ точек разбиения шага интегрирования, используемых при вычислении интегралов от проекций угловой скорости объекта). При шаге интегрирования $h = 0.002$ с погрешности четырехша-



гового алгоритма (24), (25) составляют величины $4.16 \cdot 10^{-7}$ град, $1.47 \cdot 10^{-7}$ град и $5.42 \cdot 10^{-7}$ град по переменным ψ , ϑ , γ соответственно, а при шаге интегрирования $h = 0.004$ с эти погрешности составляют величины $1.70 \cdot 10^{-6}$ град, $5.95 \cdot 10^{-7}$ град и $2.19 \cdot 10^{-6}$ град соответственно (при одинаковом числе $M = 41$ точек разбиения шага интегрирования, используемых при вычислении интегралов от проекций угловой скорости объекта). Погрешности нового двухшагового алгоритма (22) и четырехшагового алгоритма четвертого порядка точности А. П. Панова (24), (25) для этого случая движения объекта оказались примерно равными (с незначительным преимуществом нового алгоритма, см. замечание 2).

Погрешности известного алгоритма четвертого порядка точности [1, с. 355] при шаге интегрирования $h = 0.001$ с составляют величины $6.85 \cdot 10^{-7}$ град, $2.64 \cdot 10^{-7}$ град и $8.07 \cdot 10^{-7}$ град по переменным ψ , ϑ , γ соответственно, а при шаге интегрирования $h = 0.002$ с эти погрешности составляют величины $4.83 \cdot 10^{-6}$ град, $1.63 \cdot 10^{-6}$ град и $5.31 \cdot 10^{-6}$ град соответственно (при одинаковом числе $M = 21$ точек разбиения шага интегрирования, используемых при вычислении интегралов от проекций угловой скорости объекта).

Замечание 3. При реализации четырехшагового алгоритма четвертого порядка точности А. П. Панова (24), (25) может происходить потеря точности при переходе от вектора ориентации, вычисляемого по этому алгоритму, к параметрам Родрига – Гамильтона (Эйлера). Точные формулы этого перехода содержат такие трансцендентные функции, как синус, косинус, квадратный корень. Аппроксимация этих формул отрезками рядов с удержанием лишь величин третьего порядка малости приводит в анализируемом случае к существенной потере точности определения ориентации. Погрешности алгоритма в этом случае при $h = 0.002$ с равны $1.22 \cdot 10^{-4}$ град, $6.03 \cdot 10^{-5}$ град и $2.24 \cdot 10^{-4}$ град по переменным ψ , ϑ , γ соответственно, что больше погрешностей одно- и двухшаговых алгоритмов на 3 порядка. Этот переход с использованием стандартных подпрограмм вычисления трансцендентных функций существенно повышает точность определения ориентации для моделируемых слабочастотных и высокочастотных угловых движений объекта с большими амплитудами и делает ее, как уже отмечалось, сравнимой с точностью определения ориентации с помощью нового двухшагового алгоритма четвертого порядка точности (22). Однако алгоритм (22) имеет преимущество в смысле объема необходимых вычислений в $1.5 \div 2$ раза из-за его большей простоты. Кроме того, двухшаговый алгоритм (22) позволяет выполнять определение ориентации с большей частотой (по сравнению с четырехшаговым алгоритмом (24), (25)) и, следовательно, большей точностью.

Замечание 4. Число точек разбиения шага интегрирования, используемых при вычислении интегралов от проекций угловой скорости объекта, существенно влияет на точность определения ориентации объекта. Так, при увеличении этого числа в 2 раза погрешности нового алгоритма (22) при шаге интегрирования $h = 0.002$ с и $M = 41$ составляют величины $4.22 \cdot 10^{-7}$ град, $1.50 \cdot 10^{-7}$ град и $5.46 \cdot 10^{-7}$ град соответственно, а погрешности алгоритма (24), (25) при шаге интегрирования $h = 0.004$ с и $M = 81$ составляют величины $4.85 \cdot 10^{-7}$ град, $1.6 \cdot 10^{-7}$ град и $5.89 \cdot 10^{-7}$ град соответственно. Видно (см. п. 6), что точность как первого, так и второго алгоритма существенно повысилась. Отметим, что в этом случае при увеличении шага интегрирования в 2 раза погрешности как первого, так и второго алгоритма определения ориентации увеличились незначительно, что говорит о меньшей чувствительности этих алгоритма к шагу интегрирования (об их лучшей вычислительной устойчивости).

3.1.2. Отдельные трехчастотные гармонические колебания объекта по углам Эйлера – Крылова с различными (большими) амплитудами и частотами.

В табл. 1 приведены результаты моделирования алгоритмов четвертого порядка точности (нового (22) и известного [1, с. 355] двухшаговых алгоритмов, а также четырехшагового алгоритма А. П. Панова (24), (25)) для следующих вариантов отдельных трехчастотных гармонических колебаний объекта по углам Эйлера – Крылова с большими частотами ω_ψ , ω_γ , ω_ϑ и амплитудами ψ_+ , ϑ_+ , γ_+ на интервале времени $t = [0, 600c]$:

- 1) $\omega_\psi = \omega_\gamma = 2\pi$ рад/с, $\omega_\vartheta = \pi$ рад/с; $\psi_+ = 15$ град, $\vartheta_+ = 5$ град, $\gamma_+ = 15$ град;
- 2) $\omega_\psi = \omega_\gamma = 2\pi$ рад/с, $\omega_\vartheta = \pi$ рад/с; $\psi_+ = 30$ град, $\vartheta_+ = 10$ град, $\gamma_+ = 30$ град;
- 3) $\omega_\psi = \omega_\gamma = 4\pi$ рад/с, $\omega_\vartheta = 2\pi$ рад/с; $\psi_+ = 15$ град, $\vartheta_+ = 5$ град, $\gamma_+ = 15$ град;
- 4) $\omega_\psi = \omega_\gamma = 4\pi$ рад/с, $\omega_\vartheta = 2\pi$ рад/с; $\psi_+ = 30$ град, $\vartheta_+ = 10$ град, $\gamma_+ = 30$ град;



- 5) $\omega_\psi = \omega_\gamma = 2\pi$ рад/с, $\omega_\vartheta = \pi$ рад/с; $\psi_+ = 60$ град, $\vartheta_+ = 20$ град, $\gamma_+ = 60$ град;
 6) $\omega_\psi = \omega_\gamma = 2\pi$ рад/с, $\omega_\vartheta = \pi$ рад/с; $\psi_+ = 120$ град, $\vartheta_+ = 40$ град, $\gamma_+ = 120$ град.

Таблица 1

Погрешности алгоритмов для гармонических колебаний объекта с различными амплитудами и частотами

Метод интегрирования	h, c	M	Вар.	Погрешности вычисления углов, град			
				$\Delta\psi$	$\Delta\vartheta$	$\Delta\gamma$	
Новый двухшаговый алгоритм четвертого порядка (22)	0.001	21	1	$4.135 \cdot 10^{-7}$	$1.468 \cdot 10^{-7}$	$5.401 \cdot 10^{-7}$	
			2	$3.787 \cdot 10^{-6}$	$1.387 \cdot 10^{-6}$	$2.617 \cdot 10^{-6}$	
			3	$6.446 \cdot 10^{-7}$	$1.954 \cdot 10^{-7}$	$6.673 \cdot 10^{-7}$	
			4	$1.513 \cdot 10^{-6}$	$7.630 \cdot 10^{-7}$	$1.551 \cdot 10^{-6}$	
			5	$6.886 \cdot 10^{-5}$	$3.835 \cdot 10^{-6}$	$1.231 \cdot 10^{-5}$	
			6	$1.826 \cdot 10^{-3}$	$5.421 \cdot 10^{-4}$	$7.067 \cdot 10^{-4}$	
	0.002	21	1	$1.657 \cdot 10^{-6}$	$5.873 \cdot 10^{-7}$	$2.161 \cdot 10^{-6}$	
	0.01	21	1	$4.390 \cdot 10^{-5}$	$1.494 \cdot 10^{-5}$	$5.501 \cdot 10^{-5}$	
			2	$4.156 \cdot 10^{-4}$	$1.342 \cdot 10^{-4}$	$2.521 \cdot 10^{-4}$	
			3	$6.409 \cdot 10^{-5}$	$1.898 \cdot 10^{-5}$	$6.541 \cdot 10^{-5}$	
			4	$1.498 \cdot 10^{-4}$	$8.944 \cdot 10^{-5}$	$1.432 \cdot 10^{-4}$	
	0.1	21	1	$2.922 \cdot 10^{-2}$	$4.522 \cdot 10^{-3}$	$1.635 \cdot 10^{-2}$	
	Четырехшаговый алгоритм А. П. Павнова четвертого порядка (24), (25)	0.002	41	1	$4.164 \cdot 10^{-7}$	$1.473 \cdot 10^{-7}$	$5.420 \cdot 10^{-7}$
				2	$3.814 \cdot 10^{-6}$	$1.387 \cdot 10^{-6}$	$2.617 \cdot 10^{-6}$
				3	$6.443 \cdot 10^{-7}$	$1.947 \cdot 10^{-7}$	$6.669 \cdot 10^{-7}$
				4	$1.511 \cdot 10^{-6}$	$7.717 \cdot 10^{-7}$	$1.545 \cdot 10^{-6}$
5				$6.944 \cdot 10^{-5}$	$4.544 \cdot 10^{-6}$	$1.289 \cdot 10^{-5}$	
6				$1.885 \cdot 10^{-3}$	$6.009 \cdot 10^{-4}$	$7.832 \cdot 10^{-4}$	
0.004		41	1	$1.704 \cdot 10^{-6}$	$5.953 \cdot 10^{-7}$	$2.193 \cdot 10^{-6}$	
0.02		41	1	$7.352 \cdot 10^{-5}$	$1.996 \cdot 10^{-5}$	$7.475 \cdot 10^{-5}$	
			2	$6.922 \cdot 10^{-4}$	$1.378 \cdot 10^{-4}$	$2.521 \cdot 10^{-4}$	
			3	$6.358 \cdot 10^{-5}$	$2.355 \cdot 10^{-5}$	$6.482 \cdot 10^{-5}$	
			4	$1.657 \cdot 10^{-4}$	$1.756 \cdot 10^{-4}$	$1.145 \cdot 10^{-4}$	
0.2		41	1	$3.190 \cdot 10^{-1}$	$1.193 \cdot 10^{-1}$	$4.721 \cdot 10^{-1}$	
Двухшаговый алгоритм четвертого порядка [1, с. 355]		0.001	21	1	$6.850 \cdot 10^{-7}$	$2.640 \cdot 10^{-7}$	$8.072 \cdot 10^{-7}$
				2	$1.958 \cdot 10^{-5}$	$5.941 \cdot 10^{-6}$	$1.829 \cdot 10^{-5}$
				3	$1.072 \cdot 10^{-5}$	$3.796 \cdot 10^{-6}$	$1.080 \cdot 10^{-5}$
				4	$3.558 \cdot 10^{-4}$	$1.217 \cdot 10^{-4}$	$3.560 \cdot 10^{-4}$
	5			$5.528 \cdot 10^{-4}$	$1.854 \cdot 10^{-4}$	$4.956 \cdot 10^{-4}$	
	6			$1.376 \cdot 10^{-2}$	$6.380 \cdot 10^{-3}$	$1.240 \cdot 10^{-2}$	
	0.002	21	1	$4.827 \cdot 10^{-6}$	$1.631 \cdot 10^{-6}$	$5.311 \cdot 10^{-6}$	
	0.01	21	1	$5.397 \cdot 10^{-4}$	$1.752 \cdot 10^{-4}$	$5.501 \cdot 10^{-4}$	
			2	$1.673 \cdot 10^{-2}$	$5.644 \cdot 10^{-3}$	$1.656 \cdot 10^{-2}$	
			3	$1.121 \cdot 10^{-2}$	$3.774 \cdot 10^{-3}$	$1.122 \cdot 10^{-2}$	
			4	$3.613 \cdot 10^{-1}$	$1.234 \cdot 10^{-1}$	$3.614 \cdot 10^{-1}$	

Примечание. h — шаг интегрирования, с; M — число точек вычисления приращения интеграла.



Из анализа результатов моделирования, приведенных в табл. 1, следует, что для моделируемых угловых движений объекта наименьшие сопоставимые между собой погрешности имеют новый двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности (22) и известный четырехшаговый алгоритм четвертого порядка точности А. П. Панова (24), (25). Двухшаговый алгоритм (22) имеет небольшое преимущество по точности перед четырехшаговым алгоритмом (24), (25) (см., однако, замечания 2 и 3).

3.2. Композиции высокочастотных и низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта по каждому из углов Эйлера – Крылова

3.2.1. Первая композиция высокочастотных и низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта по каждой из угловых переменных, состоящая из первой высокочастотной гармоники (частоты — $f_\psi = 380$ гц, $f_\vartheta = 400$ гц, $f_\gamma = 420$ гц; амплитуды — $\psi_+ = \vartheta_+ = \gamma_+ = 2.5$ угл. сек (одинаковые)), второй высокочастотной гармоники (частоты — $f_\psi = 60$ гц, $f_\vartheta = 80$ гц, $f_\gamma = 100$ гц; амплитуды — $\psi_+ = 1$ угл. мин, $\vartheta_+ = 2$ угл. мин, $\gamma_+ = 2$ угл. мин) и третьей низкочастотной гармоники (частоты — $f_\psi = f_\vartheta = f_\gamma = 1$ гц (одинаковые); амплитуды — $\psi_+ = 6$ град, $\vartheta_+ = 8$ град, $\gamma_+ = 10$ град); время движения $T = 600$ с (табл. 2).

Таблица 2

Первая композиция высокочастотных и низкочастотных колебаний объекта

Метод интегрирования	h , с	M	f , гц	Погрешности вычисления углов, град		
				$\Delta\psi$	$\Delta\vartheta$	$\Delta\gamma$
Четырехшаговый алгоритм А. П. Панова четвертого порядка (24), (25)	0.002	41	2000	$8.326 \cdot 10^{-5}$	$2.799 \cdot 10^{-6}$	$3.693 \cdot 10^{-6}$
	0.004	81	1000	$1.654 \cdot 10^{-3}$	$1.416 \cdot 10^{-5}$	$5.031 \cdot 10^{-6}$
Метод средней скорости (второго порядка) (7.18) [1]	0.0005	11	2000	$2.461 \cdot 10^{-6}$	$2.98 \cdot 10^{-6}$	$4.102 \cdot 10^{-6}$
	0.001	21	1000	$7.672 \cdot 10^{-6}$	$4.798 \cdot 10^{-6}$	$5.386 \cdot 10^{-6}$
Одношаговый алгоритм третьего порядка (7.20) [1]	0.0005	11	2000	$1.478 \cdot 10^{-6}$	$2.438 \cdot 10^{-6}$	$3.807 \cdot 10^{-6}$
	0.001	21	1000	$2.784 \cdot 10^{-6}$	$3.617 \cdot 10^{-6}$	$4.109 \cdot 10^{-6}$
Двухшаговый алгоритм третьего порядка (7.22) [1]	0.001	21	2000	$1.273 \cdot 10^{-6}$	$2.236 \cdot 10^{-6}$	$3.697 \cdot 10^{-6}$
	0.002	41	1000	$1.232 \cdot 10^{-3}$	$1.139 \cdot 10^{-5}$	$4.209 \cdot 10^{-6}$
Одношаговый алгоритм третьего порядка (19)	0.0005	11	2000	$1.442 \cdot 10^{-6}$	$2.332 \cdot 10^{-6}$	$3.808 \cdot 10^{-6}$
	0.001	21	1000	$2.006 \cdot 10^{-6}$	$2.75 \cdot 10^{-6}$	$4.003 \cdot 10^{-6}$
Двухшаговый алгоритм четвертого порядка (22)	0.001	21	2000	$1.315 \cdot 10^{-6}$	$2.272 \cdot 10^{-6}$	$3.755 \cdot 10^{-6}$
	0.002	41	1000	$1.232 \cdot 10^{-3}$	$1.113 \cdot 10^{-5}$	$4.793 \cdot 10^{-6}$

Примечание. h — шаг интегрирования, с; M — число точек вычисления приращения интеграла; f — частота съема интегральной первичной информации об угловом движении объекта, гц.

Из анализа результатов моделирования, приведенных в табл. 2, можно сделать следующие выводы.

1. Из одношаговых алгоритмов наименьшие методические погрешности имеет (для шагов интегрирования $h = 0.0005$ с и 0.001 с) алгоритм (19), построенный на основе кватернионного уравнения типа Риккати. Двухшаговые алгоритмы имеют практически одинаковые погрешности, причем при увеличении шага интегрирования в два раза (с 0.001 с до 0.002 с) погрешность по переменной ψ увеличивается на 3 порядка, по переменной ϑ — на 1 порядок, а по переменной γ увеличивается не значительно. Таким образом, для этих параметров угловых движений объекта имеет место вычислительная неустойчивость по переменной ψ (эта неустойчивость обусловлена неустойчивостью вычисления параметра Эйлера λ_2).



2. Наименьшие (примерно равные) методические погрешности имеют при шаге интегрирования 0.001 с двухшаговые алгоритмы, которые составляют по переменным ψ , ϑ и γ величины, равные $1.3 \cdot 10^{-6}$ град, $2.3 \cdot 10^{-6}$ град и $3.7 \cdot 10^{-6}$ град соответственно (отметим, что методические погрешности одношаговых алгоритмов при шаге интегрирования 0.0005 с имеют несколько большие величины).

3. Четырехшаговый алгоритм имеет (по сравнению с одно- и двухшаговыми алгоритмами) большие методические погрешности (см. замечание 2). Для шага интегрирования 0.002 с, реализуемом при частоте съема информации 2000 гц, погрешность этого алгоритма по переменной ψ больше почти на 1.5 порядка.

4. Методические погрешности метода средней скорости сопоставимы с погрешностями одно- и двухшаговых алгоритмов (имеют одинаковый порядок, равный 10^{-6}).

3.2.2. Вторая композиция высокочастотных и низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта по каждой из угловых переменных (частоты высокочастотных гармоник те же, что и для первой композиции, однако их амплитуды больше на порядок; частоты низкочастотной гармоники больше частот для первой композиции: $f_\psi = 1$ гц, $f_\vartheta = 2$ гц, $f_\gamma = 3$ гц, амплитуды те же самые); время движения $T = 600$ с (табл. 3).

Таблица 3

Вторая композиция высокочастотных и низкочастотных колебаний объекта

Метод интегрирования	h , с	M	f , гц	Погрешности вычисления углов, град		
				$\Delta\psi$	$\Delta\vartheta$	$\Delta\gamma$
Четырехшаговый алгоритм А. П. Панова четвертого порядка (24), (25)	0.002	41	2000	$8.220 \cdot 10^{-3}$	$5.870 \cdot 10^{-5}$	$4.087 \cdot 10^{-5}$
	0.004	41	1000	$1.647 \cdot 10^{-1}$	$5.087 \cdot 10^{-4}$	$2.151 \cdot 10^{-4}$
Метод средней скорости (второго порядка) (7.18) [1]	0.0005	11	2000	$1.235 \cdot 10^{-4}$	$3.605 \cdot 10^{-4}$	$6.899 \cdot 10^{-5}$
	0.001	21	1000	$5.038 \cdot 10^{-4}$	$1.369 \cdot 10^{-3}$	$1.652 \cdot 10^{-4}$
	0.002	41	1000	$3.692 \cdot 10^{-1}$	$5.326 \cdot 10^{-3}$	$9.006 \cdot 10^{-4}$
Одношаговый алгоритм третьего порядка (7.20) [1]	0.0005	11	2000	$1.867 \cdot 10^{-5}$	$2.666 \cdot 10^{-5}$	$3.803 \cdot 10^{-5}$
	0.001	21	2000	$5.715 \cdot 10^{-5}$	$4.378 \cdot 10^{-5}$	$4.869 \cdot 10^{-5}$
	0.002	41	1000	$5.099 \cdot 10^{-1}$	$2.345 \cdot 10^{-4}$	$1.983 \cdot 10^{-4}$
Двухшаговый алгоритм третьего порядка (7.22) [1]	0.001	21	2000	$2.04 \cdot 10^{-5}$	$3.429 \cdot 10^{-5}$	$4.976 \cdot 10^{-5}$
	0.002	41	1000	$1.231 \cdot 10^{-1}$	$1.140 \cdot 10^{-4}$	$1.417 \cdot 10^{-4}$
Одношаговый алгоритм третьего порядка (19)	0.0005	11	2000	$1.866 \cdot 10^{-5}$	$2.606 \cdot 10^{-5}$	$3.828 \cdot 10^{-5}$
	0.001	21	1000	$5.715 \cdot 10^{-5}$	$4.378 \cdot 10^{-5}$	$4.869 \cdot 10^{-5}$
	0.002	41	1000	$5.099 \cdot 10^{-1}$	$2.798 \cdot 10^{-4}$	$1.223 \cdot 10^{-4}$
Одношаговый алгоритм третьего порядка (20)	0.0005	11	2000	$1.866 \cdot 10^{-5}$	$2.522 \cdot 10^{-5}$	$3.835 \cdot 10^{-5}$
	0.001	21	1000	$5.692 \cdot 10^{-5}$	$3.964 \cdot 10^{-5}$	$4.946 \cdot 10^{-5}$
Двухшаговый алгоритм четвертого порядка (22)	0.001	21	2000	$1.560 \cdot 10^{-5}$	$2.340 \cdot 10^{-5}$	$3.890 \cdot 10^{-5}$
	0.002	21	1000	$1.229 \cdot 10^{-1}$	$1.193 \cdot 10^{-4}$	$1.658 \cdot 10^{-4}$

Примечание. h — шаг интегрирования, с; M — число точек вычисления приращения интеграла; f — частота съема интегральной первичной информации об угловом движении объекта, гц.

Из анализа результатов моделирования, приведенных в табл. 3, можно сделать следующие выводы.

1. Методические погрешности одношаговых алгоритмов (при $h = 0.0005$ с и $h = 0.001$ с), а также двухшаговых алгоритмов (при $h = 0.001$ с) увеличились на порядок по сравнению с погрешностями



ми для первой композиции. При $h = 0.002$ с методические погрешности двухшаговых алгоритмов увеличились по переменной γ в 30 раз, по переменной ϑ – на порядок, а по переменной ψ – на 2 порядка.

2. Наименьшие методические погрешности имеет новый двухшаговый алгоритм (22). При шаге интегрирования 0.001 с его погрешности составляют по переменным ψ , ϑ и γ величины, равные $1.56 \cdot 10^{-5}$ град, $2.34 \cdot 10^{-5}$ град и $3.89 \cdot 10^{-5}$ град соответственно (отметим, что методические погрешности одношаговых алгоритмов при шаге интегрирования 0.0005 с имеют несколько большие величины).

3. Четырехшаговый алгоритм (24), (25) имеет (для шага интегрирования 0.002 с, реализуемом при частоте съема информации 2000 гц) по сравнению с новым двухшаговым алгоритмом (22) (для шага интегрирования 0.001 с, реализуемом при той же частоте съема информации 2000 гц) бóльшие методические погрешности (по переменной ψ , бóльшие на 2 порядка) (см. замечание 2).

4. Для рассматриваемых параметров угловых движений объекта при $h = 0.004$ с для четырехшагового алгоритма и при $h = 0.002$ с для всех других алгоритмов имеет место вычислительная неустойчивость по переменной ψ (при увеличении шага интегрирования с 0.002 с до 0.004 с для четырехшагового алгоритма и с 0.001 с до 0.002 с для всех других алгоритмов погрешность по этой переменной увеличивается на 3–4 порядка).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам проведенного математического моделирования можно сделать следующие основные выводы.

1. Из всех рассмотренных алгоритмов наименьшие методические погрешности имеет новый двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности (22), построенный на основе нового кватернионного дифференциального кинематического уравнения типа Риккати. Этот алгоритм обладает лучшей вычислительной устойчивостью и имеет простую структуру. При шаге интегрирования $h = 0.01$ с его погрешности для моделируемых низкочастотных угловых движений объекта с большими амплитудами составляют $1.29 \cdot 10^{-5}$ град, $3.93 \cdot 10^{-6}$ град и $1.45 \cdot 10^{-5}$ град по переменным ψ , ϑ и γ соответственно, что на 1 ÷ 2 порядков меньше (для этого же шага интегрирования), чем погрешности всех других рассмотренных одно- и двухшаговых алгоритмов (см. п. 3.1.1). При шаге интегрирования $h = 0.001$ с погрешности двухшагового алгоритма (22) для этих угловых движений объекта составляют величины $4.13 \cdot 10^{-7}$ град, $1.47 \cdot 10^{-7}$ град и $5.40 \cdot 10^{-7}$ град по переменным ψ , ϑ и γ соответственно, а при шаге интегрирования $h = 0.002$ с эти погрешности составляют величины $1.66 \cdot 10^{-6}$ град, $5.87 \cdot 10^{-7}$ град и $2.16 \cdot 10^{-6}$ град соответственно.

2. Из всех рассмотренных одношаговых алгоритмов ориентации наименьшую методическую погрешность имеет новый одношаговый алгоритм третьего порядка точности (19), построенный на основе кватернионного уравнения типа Риккати. Известные одно- и двухшаговые алгоритмы третьего порядка точности [1, формулы (7.20), (7.22)], а также новый двухшаговый алгоритм третьего порядка точности (21), имеют хорошие (сопоставимые между собой) точностные характеристики. Эти алгоритмы для большинства рассмотренных угловых движений объекта не намного уступают по точности алгоритму четвертого порядка точности (22) и, следовательно, с успехом могут быть использованы для решения ряда задач определения ориентации движущихся объектов.

3. Известный четырехшаговый алгоритм четвертого порядка точности А. П. Панова (24), (25) имеет точность, сопоставимую с точностью нового двухшагового алгоритма четвертого порядка точности (22), если фигурирующие в этом алгоритме трансцендентные функции (синус, косинус, квадратный корень) вычисляются по высокоточным алгоритмам (реализуемым, например, в стандартных подпрограммах вычисления этих функций). Однако новый двухшаговый алгоритм четвертого порядка точности имеет преимущество в смысле объема необходимых вычислений в 1.5 ÷ 2 раза в силу его большей простоты. Кроме того, новый двухшаговый алгоритм позволяет выполнять определение ориентации с большей частотой (по сравнению с четырехшаговым алгоритмом) и, следовательно, с большей точностью.



4. Вычислительные дрейфы всех алгоритмов для высокочастотных колебаний объекта с малыми амплитудами (наиболее интересный для практики случай) имеют порядок 10^{-6} град.

5. Наличие высокочастотных составляющих в угловых колебаниях объекта может приводить к потере вычислительной устойчивости алгоритмов ориентации при неверном выборе шага интегрирования. Так, для второй из рассмотренных композиций высокочастотных и низкочастотных угловых гармонических колебаний объекта потеря вычислительной устойчивости алгоритмов ориентации наблюдалась уже при шаге интегрирования, равном 0.002 с.

Отметим, что выбор того или иного алгоритма определения ориентации движущегося объекта в конечном счете определяется классом движущихся объектов (параметрами углового движения объекта, временем его движения), требуемой точностью решения задачи определения ориентации и характеристиками используемого вычислителя.

Библиографический список

1. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : Физматлит, 2006. 511 с.
2. Челноков Ю. Н., Переляев С. Е., Челнокова Л. А. Новые уравнения и алгоритмы ориентации БИНС в четырехмерных кососимметрических операторах // Системный анализ, управление и навигация : сб. тез. докл. 14-й междунар. науч. конф. М. : Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. С. 35–36.
3. Челноков Ю. Н., Переляев С. Е., Челнокова Л. А. Дифференциальные кинематические уравнения вращательного движения твердого тела в четырехмерных кососимметрических операторах и новые алгоритмы ориентации БИНС // Проблемы критических ситуаций в точной механике и управлении : материалы Всерос. науч. конф. с междунар. участием. Саратов : ООО Издат. центр «Наука», 2013. С. 315–320.
4. Челноков Ю. Н., Переляев С. Е. Новые уравнения и алгоритмы ориентации и навигации БИНС в четырехмерных кососимметрических операторах // Сб. материалов XXI Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб. : ОАО «Концерн "ЦНИИ "Электрон», 2014. С. 308–312.
5. Переляев С. Е., Челноков Ю. Н. Новые алгоритмы определения инерциальной ориентации объекта // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 6. С. 778–789.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Наука, 1967. 576 с.
7. Stuelpnagel J. On the parametrization of the three-dimensional rotation group // SIAM Review. 1964. Vol. 6, № 4. P. 422–429.
8. Переляев С. Е. О соответствии трехмерных и четырехмерных параметров группы трехмерных вращений // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 30–44.
9. Панов А. П. Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев : Наук. думка, 1995. 279 с.
10. Bortz J. E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems. 1971. AES-7. № 1. P. 61–66.
11. Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Pt. 1 : Attitude algorithms // J. Guidance, Control and Dynamics. Vol. 21, № 1. 1998. P. 19–28.
12. Бранец В. Н. Лекции по теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем управления. М. : МФТИ, 2009. 304 с.
13. Эдвардс А. Бесплатформенные инерциальные навигационные системы // Вопросы ракетной техники. 1973. № 5. С. 50–57.
14. Бесараб П. Н. Определение параметров пространственной ориентации движущегося объекта // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14, № 1. С. 240–246.
15. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
16. Челноков Ю. Н. Об определении ориентации объекта в параметрах Родрига – Гамильтона по его угловой скорости // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 11–20.
17. Плотников П. К., Челноков Ю. Н. Сравнительный анализ точности алгоритмов определения ориентации объекта в параметрах Родрига – Гамильтона и направляющих косинусах // Космические исследования. 1979. Т. 17, вып. 3. С. 371–377.



An Investigation of Algorithms for Estimating the Inertial Orientation of a Moving Object

Yu. N. Chelnokov¹, S. E. Perelyaev², L. A. Chelnokova³

¹Chelnokov Yurii Nikolaevich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012; RAS Institute of Precision Mechanics and Control, 24, Rabochaya st., Saratov, Russia, 410028, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

²Perelyaev Sergei Egororovich, "AeroSpetsProekt" Ltd., 35A, Gagarina st., Zhukovskii, Moscow Oblast, Russia, 140180, Pers2030@yandex.ru

³Chelnokova Lyudmila Aleksandrovna, RAS Institute of Precision Mechanics and Control, 24, Rabochaya st., Saratov, Russia, 410028, ChelnokovaLA@mail.ru

The new and known strapdown INS algorithms for high-precision estimation of the orientation parameters of a moving object (Rodrigues–Hamilton (Euler) parameters) in the inertial frame are investigated. The new algorithms are based upon using the classical Hamilton rotation quaternion, quaternion with zero scalar part, which is correlated to the classical rotation quaternion via the quaternion equivalent of Cayley formula, and also the new quaternion differential equation for the inertial orientation of a moving object. The new algorithms are developed using the Picard successive approximation method. These algorithms use the integral raw information about absolute angular motion of an object as input data. It is demonstrated that the new algorithms are superior to the known algorithms of the same order regarding accuracy and complexity.

Key words: moving object, Rodrigues–Hamilton (Euler) parameters, inertial orientation, Hamilton quaternion, quaternion matrix, Cayley formula, four-dimensional skew-symmetric operator.

References

1. Chelnokov Yu. N. *Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of Solid Bodies and its Applications. Geometry and Kinematics of Motion*. Moscow, Fizmatlit, 2006. 511 p. (in Russian).
2. Chelnokov Yu. N., Perelyaev S. E., Chelnokova L. A. New SDINS Equations and Algorithms for Orientation with Four-Dimensional Skew-Symmetric Operators. *Book of abstracts, 14-th Intern. Scientific Conf. "System Analysis, Control and Navigation"*. Moscow, MAI-PRINT, 2009, pp. 35–36 (in Russian).
3. Chelnokov Yu. N., Perelyaev S. E., Chelnokova L. A. Differential Kinematic Equations of the Angular Motion of a Solid in Four-dimensional Skew-symmetric Operators and the new Strapdown INS algorithms for orientation. *Proc. of the Conf. "Problems of Critical Situations in Precision Mechanics and Control"*. Saratov, OJSC "Nauka" Publ. Center, 2013, pp. 315–320 (in Russian).
4. Chelnokov Yu. N., Perelyaev S. E. New Equations and Algorithms of Orientation and Navigations for Strapdown INS with Four-dimensional Skew-symmetric Operators. *Proc. of the XXI Saint-Petersburg Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems*. Saint-Petersburg, State Research Center of the Russian Federation, Concern CSRI Elektropribor, 2014, pp. 308–312 (in Russian).
5. Perelyaev S. E., Chelnokov Yu. N. New Algorithms for Estimating the Orientation of an Object. *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, iss. 6, pp. 778–789.
6. Gantmakher F. R. *Theory of Matrices*. Moscow, Nauka, 1967, 576 p. (in Russian).
7. Stuelpnagel J. On the parametrization of the three-dimensional rotation group. *SIAM Review*, 1964, vol. 6, no. 4, pp. 422–430.
8. Perelyaev S. E. On the correspondence between the three- and four-dimensional parameters of the three-dimensional rotation group. *Mech. Solids*, 2009, vol. 44, iss. 2, pp. 204–213.
9. Panov A. P. *Mathematical Background of Inertial Orientation Theory*. Kiev, Naukova Dumka, 1995, 279 p. (in Russian).
10. Bortz J. E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation. *IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems*, 1971, vol. AES-7, no. 1, pp. 61–66.
11. Savage P. O. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Pt. 1: Attitude algorithms. *J. Guidance, Control and Dynamics*, 1998, vol. 21, no. 1, pp. 19–28.
12. Branetz V. N. *Lectures on the Theory of Inertial Navigation Control Systems*. Moscow, MFTI, 2009, 304 p. (in Russian).
13. Edwards A. Strapdown Inertial Navigation Systems. *Rocket Technology*, 1973, no. 5, pp. 50–57.
14. Besarab P. N. Estimation of the Orientation Parameters of a Moving Object. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1974, vol. 14, no 1, p. 242–248. DOI: 10.1016/0041-5553(74)90156-6.
15. Branetz V. N., Shmyglevsky I. P. *Application of Quaternions in Problems of Orientation of a Rigid Body*. Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).
16. Chelnokov Yu. N. On Estimating the Orientation of an Object in Rodrigues–Hamilton Parameters Using its Angular Velocity. *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1977, no. 3, pp. 11–20 (in Russian).
17. Plotnikov P. K., Chelnokov Yu. N. Comparative Analysis of Accuracy of Algorithms for Estimating the Orientation of an Object in Rodrigues–Hamilton Parameters and Direction Cosines. *Cosmic Research*, 1979, vol. 17, iss. 3, pp. 371–377.

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.68:007.5; 512.5

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АБСТРАКТНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

И. И. Слеповичев

Слеповичев Иван Иванович, старший преподаватель кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, gurgutan@yandex.ru

Современный уровень развития нейроинформатики позволяет использовать искусственные нейронные сети для решения различных прикладных задач. Однако многие применяемые на практике нейросетевые методы не имеют строгого формального математического обоснования, являясь эвристическими алгоритмами. Это накладывает определенные ограничения на развитие нейросетевых методов решения задач. В то же время существует широкий класс математических моделей, хорошо изученных в рамках таких дисциплин, как теория абстрактных алгебр, теория графов, теория конечных автоматов. Возможность использовать результаты, полученные в рамках этих дисциплин, применительно к нейросетевым моделям может быть хорошим подспорьем в изучении искусственных нейронных сетей, их свойств и возможностей. В данной работе даны формулировки и определения нейросетевых моделей с точки зрения универсальной алгебры и теории графов. Приведены основные теоремы универсальной алгебры в нейросетевой трактовке. В статье также предлагается способ формального описания нейросети граф-схемой, которая позволяет использовать результаты теории графов для анализа нейросетевых структур.

Ключевые слова: нейронные сети, гомоморфизм, конгруэнция, граф-схема нейросети, вычисления на графе.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-96-103

НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСТРАКТНОЙ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

В [1–5] приведены различные определения искусственной нейронной сети, в которых нейронная сеть рассматривается как некая вычислительная система, получающая на вход значения и преобразующая их в процессе своего функционирования в выходные значения. Такой подход эффективен при рассмотрении прикладных нейросетевых задач, однако он неудобен для изучения математических свойств нейронных сетей, так как не универсален и часто не основан на строгих формализованных понятиях математики. Эти недостатки можно преодолеть, определив дополнительно понятие *абстрактной нейронной сети* как алгебраической системы, которая при уточнении определения становится неотличимой от искусственной нейронной сети, определённой традиционным способом.

Абстрактной нейронной сетью (абстрактной нейросетью) будем называть алгебраическую систему (A, F) , в которой носитель алгебры

$$A = S \times X \times Y, \quad (1)$$

— непустое множество, определяемое декартовым произведением



множества векторов состояний, входных векторов и выходных векторов, F — набор операций на этом множестве, который включает операцию g , вычисляющую выходное значение, и операцию h , вычисляющую новое состояние:

$$g : S \times X \rightarrow Y, \quad h : S \times X \times Y \rightarrow S. \quad (2)$$

Можно говорить, что абстрактная нейронная сеть является трёхосновной алгеброй [6, с. 212]

$$N = (S, X, Y, g, h), \quad (3)$$

где множества S, X, Y — основные множества, а g, h — операции из F , которые мы в дальнейшем будем называть функциями. Множество F может содержать и другие операции. Например, нам может понадобиться функция, осуществляющая некую «оценку» результата работы нейросети: $o_g(y)$, $y \in Y$, или функция, осуществляющая «оценку» текущего состояния нейросети: $o_h(s)$, $s \in S$, или нам могут понадобиться нульарные операции, фиксирующие некоторое входное значение x^0 и начальное значение состояния s^0 . Такие операции могут быть определены при необходимости для уточнения понятия абстрактной нейросети.

Определение абстрактной нейросети как трёхосновной алгебры позволяет ввести аналоги конструкций универсальной алгебры. Например, непосредственным переносом мы можем определить для абстрактной нейросети понятие *устойчивости системы подмножеств, подсети, пересечения подсетей*.

Пусть $N = (S, X, Y, g, h)$ — абстрактная нейросеть с непустыми множествами допустимых состояний, входных и выходных векторов нейросети. Система подмножеств $S^* \subseteq S$, $X^* \subseteq X$, $Y^* \subseteq Y$ называется *устойчивой в нейросети*, если для функций g и h и $\forall s^* \in S^*$, $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$ элементы $g(s^*, x^*) \in Y^*$, $h(s^*, x^*, y^*) \in S^*$. Ограничивая функции g, h для нейросети N на подмножествах S^*, X^*, Y^* получаем *подсеть* $N^* = (S^*, X^*, Y^*, g, h)$.

Пересечением подсетей $N_1 = (S_1, X_1, Y_1, g, h)$, $N_2 = (S_2, X_2, Y_2, g, h)$ абстрактной нейросети $N = (S, X, Y, g, h)$ будем называть абстрактную нейросеть $N_1 \cap N_2 = (S_1 \cap S_2, X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2, g, h)$, функциями которой являются функции из N , ограниченные на соответствующих множествах.

Легко доказывается, что пересечение любого семейства подсетей снова будет абстрактной нейросетью, и, следовательно, совокупность $Sub(N)$ всех подсетей нейросети N будет полной решёткой¹, при условии, что её наименьшим элементом будет нейросеть с пустыми множествами и пустыми операциями. Действительно, если $N_i = (S_i, X_i, Y_i, g, h)$ — подсеть $N = (S, X, Y, g, h)$, то

$$g(s, x) \in Y_i \& h(s, x, y) \in S_i \Rightarrow g(s, x) \in \cap Y_i \& h(s, x, y) \in \cap S_i. \quad (4)$$

Замыканием множеств $S^* \in S$, $X^* \in X$, $Y^* \in Y$ относительно функций g, h называется множество всех элементов (включая элементы из S^*, X^*, Y^*), которые можно получить из этих множеств, применяя функции g, h .

Пусть $N_1 = (S_1, X_1, Y_1, g_1, h_1)$, $N_2 = (S_2, X_2, Y_2, g_2, h_2)$ — две нейросети. Семейство отображений

$$\Gamma = (\Gamma_S, \Gamma_X, \Gamma_Y), \quad \Gamma_S : S_1 \rightarrow S_2, \quad \Gamma_X : X_1 \rightarrow X_2, \quad \Gamma_Y : Y_1 \rightarrow Y_2 \quad (5)$$

будем называть *гомоморфизмом* абстрактной нейросети N_1 в абстрактную нейросеть N_2 , если оно согласовано с операциями g_i и h_i , $i = 1, 2$, в том смысле, что

$$\Gamma_S(h_1(s, x, y)) = h_2(\Gamma_S(s), \Gamma_X(x), \Gamma_Y(y)), \quad (6)$$

$$\Gamma_Y(g_1(s, x)) = g_2(\Gamma_S(s), \Gamma_X(x)), \quad \forall s \in S_1, \quad \forall x \in X_1, \quad \forall y \in Y_1. \quad (7)$$

Нейросеть N_2 , являющаяся гомоморфным образом абстрактной нейросети N_1 , можно представить как некоторую огрублённую модель абстрактной нейросети N_1 . Сохраняя принципы функционирования своего прообраза, нейросеть N_2 теряет часть информации о входных векторах, векторах состояний и выходных векторах.

¹Полная решётка — частично упорядоченное множество, в котором всякое непустое подмножество имеет точную верхнюю и точную нижнюю грань [6, с. 157]



Так как g отображает $S \times X$ исключительно в Y , а h отображает $S \times X \times Y$ в S , то пару отображений (g, h) мы можем рассматривать как отображение $F : S \times X \times Y \rightarrow S \times Y$:

$$F(s, x, y) = (h(s, x, y), g(s, x)), \quad \forall s \in S, \quad x \in X, \quad y \in Y. \quad (8)$$

Такие обозначения позволяют нам использовать более короткую запись определения гомоморфизма нейросети N_1 в N_2 :

$$\Gamma(F_1(s, x, y)) = F_2(\Gamma(s, x, y)), \quad \forall (s, x, y) \in S \times X \times Y, \quad (9)$$

или в префиксной операторной форме записи $(\Gamma \circ F_1)(s, x, y) = (F_2 \circ \Gamma)(s, x, y)$. Из такой записи видно, что для поиска гомоморфизмов нейросети N_1 в N_2 нужно решить операторное уравнение $\Gamma \circ F_1 = F_2 \circ \Gamma$ относительно параметров отображения Γ .

Гомоморфизм Γ называют инъективным, сюръективным, биективным, если соответствующим свойством обладает каждая его компонента $\Gamma_S, \Gamma_X, \Gamma_Y$. Биективный гомоморфизм абстрактной нейросети будем называть изоморфизмом. Выходные значения и значения состояний, вычисленные изоморфными нейросетями, совпадают при одинаковых входных значениях и начальных состояниях. При этом внутренняя структура и способ вычисления значений этими нейросетями могут различаться.

Если $\Gamma : N_1 \rightarrow N_2$ и $E : N_2 \rightarrow N_3$ — гомоморфизмы нейросетей, то можно определить композицию (произведение) этих гомоморфизмов, полагая

$$\Gamma \circ E := (\Gamma_1 \circ E_1, \Gamma_2 \circ E_2, \Gamma_3 \circ E_3). \quad (10)$$

Без труда можно перенести все алгебраические свойства гомоморфизмов многоосновных алгебр, связанные с произведением, на случай абстрактных нейросетей. Докажем теорему о связи между подсетями и гомоморфизмами.

Теорема 1. Пусть $\Gamma : N_1 \rightarrow N_2$ — гомоморфизм нейросети N_1 в нейросеть N_2 . Если $N'_1 = (S'_1, X'_1, Y'_1, g_1, h_1)$ — подсеть в N_1 , то $\Gamma(N'_1) := (\Gamma_S(S'_1), \Gamma_X(X'_1), \Gamma_Y(Y'_1), g_2, h_2)$ — подсеть в N_2 . Если $N'_2 = (S'_2, X'_2, Y'_2, g_2, h_2)$ — подсеть в N_2 , то подсетью в N_1 будет $\Gamma^{-1}(N'_2) := (\Gamma_S^{-1}(S'_2), \Gamma_X^{-1}(X'_2), \Gamma_Y^{-1}(Y'_2), g_1, h_1)$.

Доказательство. Пусть N'_1 — подсеть N_1 и $s_2 \in \Gamma_S(S'_1), x_2 \in \Gamma_X(X'_1), y_2 \in \Gamma_Y(Y'_1)$ — произвольные элементы. Тогда найдутся $s_1 \in S'_1$ и $x_1 \in X'_1$ такие, что $s_2 = \Gamma_S(s_1), x_2 = \Gamma_X(x_1)$. Так как $g_1(s_1, x_1) \in Y'_1$ и $h_1(s_1, x_1, y_1) \in S'_1$, то поскольку Γ — гомоморфизм, имеем: $g_2(s_2, x_2) = g_2(\Gamma_S(s_1), \Gamma_X(x_1)) = \Gamma_Y(g_1(s_1, x_1)) \in \Gamma_Y(Y'_1)$, $h_2(s_2, x_2, y_2) = h_2(\Gamma_S(s_1), \Gamma_X(x_1), \Gamma_Y(y_1)) = \Gamma_S(h_1(s_1, x_1, y_1)) \in \Gamma_S(S'_1)$, и, значит, $\Gamma(N'_1)$ — подсеть N_2 .

Пусть теперь N'_2 — подсеть N_2 . Если хотя бы одно из множеств $\Gamma_S^{-1}(S'_2), \Gamma_X^{-1}(X'_2), \Gamma_Y^{-1}(Y'_2)$ пусто, то $\Gamma^{-1}(N'_2)$ — подсеть N_1 . Допустим, что $\Gamma_S^{-1}(S'_2) \neq \emptyset, \Gamma_X^{-1}(X'_2) \neq \emptyset, \Gamma_Y^{-1}(Y'_2) \neq \emptyset$. Используя то, что N'_2 подсеть N_2 , а Γ — гомоморфизм из N_1 в N_2 , получаем:

$$\begin{aligned} \Gamma_Y(g_1(s_1, x_1)) &= g_2(\Gamma_S(s_1), \Gamma_X(x_1)) \in Y'_2, \\ \Gamma_S(h_1(s_1, x_1, y_1)) &= h_2(\Gamma_S(s_1), \Gamma_X(x_1), \Gamma_Y(y_1)) \in S'_2, \end{aligned}$$

откуда $g_1(s_1, x_1) \in \Gamma_Y^{-1}(Y'_2)$ и $h_1(s_1, x_1, y_1) \in \Gamma_S^{-1}(S'_2)$ и, значит, $\Gamma^{-1}(N'_2)$ — подсеть N_1 . \square

Конгруэнцией абстрактной нейросети $N = (S, X, Y, g, h)$ будем называть семейство $\Theta = \Theta_S \subseteq S \times S, \Theta_X \subseteq X \times X, \Theta_Y \subseteq Y \times Y$ эквивалентностей на множествах S, X, Y , обладающее свойством устойчивости относительно операций g и h :

$$\begin{aligned} h : S \times X \times Y \rightarrow S : (s_1, s_2) \in \Theta_S \&(x_1, x_2) \in \Theta_X \&(y_1, y_2) \in \Theta_Y \Rightarrow (h(s_1, x_1, y_1), h(s_2, x_2, y_2)) \in \Theta_S, \\ g : S \times X \rightarrow Y : (s_1, s_2) \in \Theta_S \&(x_1, x_2) \in \Theta_X \Rightarrow (g(s_1, x_1), g(s_2, x_2)) \in \Theta_Y. \end{aligned} \quad (11)$$

Факторсеть N/Θ мы определим как абстрактную нейросеть $(S/\Theta_S, X/\Theta_X, Y/\Theta_Y, g, h)$, операции которой выражаются через одноимённые операции нейросети N по формуле

$$h(\Theta_S(s), \Theta_X(x), \Theta_Y(y)) := \Theta_S(h(s, x, y)), \quad g(\Theta_S(s), \Theta_X(x)) := \Theta_Y(g(s, x)).$$

Непосредственным переносом из теории многоосновных алгебр мы можем получить следующие важные теоремы.



Теорема 2. Пусть $\Gamma = (\Gamma_S, \Gamma_X, \Gamma_Y)$, $\Gamma_S : S_1 \rightarrow S_2$, $\Gamma_X : X_1 \rightarrow X_2$, $\Gamma_Y : Y_1 \rightarrow Y_2$ — гомоморфизм нейросети $N_1 = (S_1, X_1, Y_1, g, h)$ в $N_2 = (S_2, X_2, Y_2, g, h)$. Тогда его ядро² $\text{Ker } \Gamma := \{\text{Ker } \Gamma_S, \text{Ker } \Gamma_X, \text{Ker } \Gamma_Y\}$ является конгруэнцией нейросети N_1 . С другой стороны, если $\Theta = \{\Theta_S, \Theta_X, \Theta_Y\}$ — конгруэнция на N_1 , то семейство отображений $\{\text{nat } \Theta_S, \text{nat } \Theta_X, \text{nat } \Theta_Y\}$ будет гомоморфизмом нейросети N_1 на факторсет N_1/Θ .

Теорема 3 (теорема о гомоморфизмах нейросети). Если $\Gamma : N_1 \rightarrow N_2$ — сюръективный гомоморфизм нейросети, то факторсет $N_1/\text{Ker } \Gamma$ изоморфна нейросети N_2 .

Доказательства этих теорем получаются непосредственным переносом соответствующих рассуждений из [6, § 2.1].

Пусть $N_1 = (S_1, X_1, Y_1, g_1, h_1)$, $N_2 = (S_2, X_2, Y_2, g_2, h_2)$ — две абстрактные нейросети. Их прямым произведением называется абстрактная нейросеть $N_1 \times N_2 := (S_1 \times S_2, X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2, g, h)$, где

$$\begin{aligned} g((s^1, s^2), (x^1, x^2)) &:= (g_1(s^1, x^1), g_2(s^2, x^2)), \\ h((s^1, s^2), (x^1, x^2), (y^1, y^2)) &:= (h_1(s^1, x^1, y^1), h_2(s^2, x^2, y^2)), \end{aligned}$$

для любых $(s^1, x^1, y^1) \in S_1 \times X_1 \times Y_1$, $(s^2, x^2, y^2) \in S_2 \times X_2 \times Y_2$.

2. ОПИСАНИЕ НЕЙРОСЕТИ С ПОМОЩЬЮ ГРАФ-СХЕМ

Определение абстрактной нейросети, приведённое выше, даёт нам наиболее общий класс математических моделей нейросетей. Это позволяет без существенных усилий перенести аналогичные алгебраические понятия в теорию нейросетей. Однако для решения прикладных задач нейросеть используется как устройство, вычисляющее выходное значение по входным значениям и текущему состоянию. При таком подходе понятие нейросети необходимо уточнить, определив свойства множеств S, X, Y и способ задания функций g, h из (2).

Основные множества нейросети могут быть дискретными или непрерывными. Если множества S, X, Y — конечные непустые множества состояний, входных и выходных символов соответственно, а h и g задают функции переходов и выходов, то нейросеть $N = (S, X, Y, g, h)$, по сути, является автоматом Мили, свойства которого хорошо изучены и могут быть применены к такой нейронной сети. В случае непрерывности множеств S, X, Y , некоторые вопросы требуют особого рассмотрения с переосмыслением ряда важных свойств нейросети.

Для решения прикладных задач наиболее востребованы нейросети с множествами $S \subseteq R^n$, $X \subseteq R^m$, $Y \subseteq R^p$, где R^n, R^m, R^p — линейные векторные пространства размерности n, m и p соответственно над полем действительных чисел. Одна из таких задач — распознавание образов. В этой задаче необходимо по набору внешних признаков некоторого объекта определить, к какому классу он относится. В более общем смысле задача распознавания образов заключается в поиске системы правил, которая позволила бы в полностью автоматическом режиме (т. е. без участия эксперта) распознавать входные образы. Нейросетевое решение этой задачи предполагает построение нейросети, которая по входному вектору признаков объекта вычисляет вектор значений, идентифицирующий распознаваемый объект, или определяет его принадлежность некоторому классу. Для такой нейросети S — это множество допустимых внутренних параметров, X — множество допустимых векторов признаков распознаваемых объектов, а Y — множество возможных ответов (классов). Функция g из определения выступает в роли решающего правила, а функция h используется для настройки параметров нейросети под конкретные условия задачи. В силу непрерывности к множествам S, X, Y неприменимы многие из методов дискретной математики (например, булевозначные матрицы для описания переходов между состояниями).

Ещё один класс нейросетей — нейросети, моделирующие нечёткий вывод [3]. Основная задача таких нейросетей — вычисления нечёткого вывода для некоторых фиксированных значениях нечётких переменных. В таких нейросетях множества носителя обычно следующие: $S \subseteq R^n$, $X \subseteq R^m$, $Y \subseteq [0, 1]^p$, где $[0, 1]^p$ — векторы с действительными значениями на единичном кубе размерности p .

²Ядро отображения $f : A \rightarrow B$ — это отношение $\text{Ker } f := \{(a_1, a_2) \in A \times A | f(a_1) = f(a_2)\}$ [6, с. 60].



Есть много других задач, где используется модель нейросети как основной метод построения вычислений. Общим для большинства таких задач является применение методов условной или безусловной оптимизации, а также численных методов решения уравнений для поиска оптимальных параметров нейросети. Это накладывает на множества S, X, Y условие непрерывности, а на функцию $g(s, x)$ — условие непрерывности и дифференцируемости по всем аргументам.

Рассмотрим теперь способы представления функций нейросети. Функция g задаёт выход нейросети и может быть задана различными способами. Наиболее популярно определение g в виде формулы векторно-матричных операторов или граф-схемы функциональных элементов. Первый вариант удобен при моделировании работы нейросети на компьютере при заранее известной функции g . Второй способ удобен на стадии решения задачи синтеза нейросети из заданных «простых элементов».

Граф-схему функциональных элементов для функции выхода определим в два этапа: на первом этапе приведём структурную часть этого понятия, на втором этапе — функциональную. Для начала определим понятие набора базовых операций — элементарных «блоков», из которых будет строиться вычислительная модель нейросети.

Предположим, что у нас имеется набор операций $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q\}$. Это могут быть операции, вычисляющие сумму, произведение, возведение в квадрат значений или любые другие операции от любого числа переменных, не превосходящего $r := n + m + p^3$. Обычно набор операций определяется рядом конкретных требований, однако он должен быть достаточным для реализации любой из возможных функций нейросети. Например, в данном наборе должны быть нульарные операция присвоения значения переменным. Для обозначения операции присвоения мы можем использовать символ переменной, которой присваивается значение. Кроме того, полезной может оказаться тождественная функция скалярного аргумента: $\beta(x) := x$. Базовая операция может быть вектор-функцией, т. е. функцией, значениями которой являются векторы размерности более 1. Например, это может быть унарная операция, которая формирует вектор, используя некоторое скалярное входное значение (рис. 1): $\beta(x) := \underbrace{(x, x, \dots, x)}_{n \text{ раз}}$.

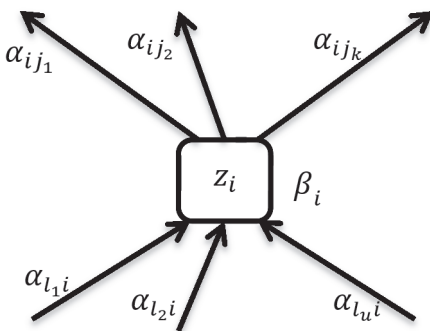


Рис. 1. Вершина графа v_i , помеченная символом операции $\beta_i(\alpha_{l_1i}, \alpha_{l_2i}, \dots, \alpha_{l_{ui}})$ и символом переменной z_i

Доказана теорема [7], согласно которой для реализации любой непрерывной действительной функции многих переменных достаточно бинарной операции умножения, сложения, определённых стандартным образом над полем действительных чисел, а также некоторой нелинейной унарной операции. В общем случае подбор минимального набора базовых операций является сложной задачей и выходит за рамки данной статьи. Перейдём к определению структуры нейросети.

Доказана теорема [7], согласно которой для реализации любой непрерывной действительной функции многих переменных достаточно бинарной операции умножения, сложения, определённых стандартным образом над полем действительных чисел, а также некоторой нелинейной унарной операции. В общем случае подбор минимального набора базовых операций является сложной задачей и выходит за рамки данной статьи. Перейдём к определению структуры нейросети.

I этап. Определение граф-схемы из функциональных элементов с точки зрения её структуры. Структуру граф-схемы можно задать, используя понятие ориентированного графа [6, с. 227].

Граф-схемой функции выхода нейросети (схемой функционирования нейросети)⁴ над базисом $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q\}$ будем называть ориентированный граф⁵ $\Sigma_g = (V_g, E_g)$, между вершинами которого и множеством переменных $\{s_1, s_2, \dots, s_n, x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_p\}$ существует взаимно однозначное соответствие. При этом вершины и дуги графа помечаются следующим образом:

1. Каждая вершина помечена символом операции $\beta_i \in B$. Количество и порядок дуг, входящих в вершину v_i , должен соответствовать количеству и порядку аргументов функции β_i , $i = 1, 2, \dots, n + m + p$. При этом источники графа не могут быть помечены символами операций присвоения выходных переменных y_k .

2. Каждая дуга $(v_i, v_j) \in E_g$ помечена символом переменной α_{ij} .

³ $r := n + m + p$ — это размерность множества $S \times X \times Y$.

⁴В литературе, посвящённой нейросетям, часто используют другой термин — «структура» или «архитектура» нейросети. Термин «схема» порождён аналогиями нейроинформатики с дисциплинами, изучающими схемы функциональных элементов [8, 9], а термин «структура» обычно используется в системном анализе [10].

⁵В общем случае граф-схема нейросети может содержать циклы, но в данной статье такие нейросети с обратными связями рассматриваться не будут, поэтому далее будем рассматривать только ациклические графы



Кортеж всех переменных граф-схемы будем обозначать

$$z = (s_1, s_2, \dots, s_n, x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_p) := (z_1, z_2, \dots, z_{(n+m+p)}). \quad (12)$$

Отдельная вершина графа Σ_g изображена на рис. 1 прямоугольником.

Другими словами, граф-схема $\Sigma_g = (V_g, E_g)$ — ориентированный граф, который состоит из вершин $v_i := (z_i, \beta_i) \in V_g$ и дуг $e_{ij} = (v_i, v_j, \alpha_{ij}) \in E_g$, $i, j = 1, 2, \dots, n+m+p$.

II этап. Определение вычислений на граф-схеме Σ_g . Граф-схеме Σ_g сопоставим в соответствие систему функций

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ijk} = \beta_{ik}(\alpha_{1_i}, \alpha_{2_i}, \dots, \alpha_{u_i}), \\ i = 1, 2, \dots, n+m+p, \quad k = 1, 2, \dots, d^+(v_i), \quad u = d^-(v_i) \end{array} \right\}, \quad (13)$$

где n, m, p — размерности S, X, Y соответственно, $(v_i, v_j, \alpha_{ijk}), (v_u, v_i, \alpha_{u_i}) \in E_g$, β_{ik} — значение k -й компоненты результата функции $\beta_i(\alpha_{1_i}, \alpha_{2_i}, \dots, \alpha_{u_i})$. Вычисления на этом графе определим по индукции.

Базис индукции. Сначала вычисляются значения для вершин v_i , помеченных нульвыми операциями присвоения значений переменных $\beta_i \in \{s_1, s_2, \dots, s_n, x_1, x_2, \dots, x_m\} \in B$. По определению это будут источники графа, так как количество входящих в вершину дуг равно количеству аргументов операции, приписанной этой вершине. Вычисленные по формулам (13) значения присваиваем переменным $\alpha_{ij_1}, \alpha_{ij_2}, \dots, \alpha_{ij_r}$, которыми помечены исходящие из вершин v_i дуги:

$$\alpha_{ijk} = \beta_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, d^+(v_i), \quad \forall i \text{ таких, что } d^-(v_i) = 0. \quad (14)$$

Индуктивный переход. Если для некоторой вершины v_i определены все значения переменных $\alpha_{1_i}, \alpha_{2_i}, \dots, \alpha_{u_i}$ для дуг, заходящих в эту вершину, то вычисляем значение соответствующей операции в этой вершине. Полученное значение присваиваем переменным $\alpha_{ij_1}, \alpha_{ij_2}, \dots, \alpha_{ij_k}$, которыми помечены исходящие из v_i дуги:

$$\alpha_{ijk} = \beta_{ik}(\alpha_{1_i}, \alpha_{2_i}, \dots, \alpha_{u_i}), \quad k = 1, 2, \dots, d^+(v_i), \quad \forall i \text{ таких, что } d^-(v_i) > 0. \quad (15)$$

Данное определение задаёт естественный порядок вычислений на графе: вычисления начинаются для вершин источников с присвоения значений переменных x и s . Далее вычисляются значения для тех вершин, все заходящие дуги которых являются окончанием маршрутов от источников единичной длины. Потом вычисляются значения в вершинах, все заходящие дуги которых являются окончанием маршрутов от источников длины 2 и т.д. Очевидно, что если в графе нет циклов, то вычисления заканчиваются в вершинах с максимальной длиной маршрута от источников (рис. 2). В случае наличия циклов для остановки вычислений на графе необходим дополнительный критерий, который будет проверяться на каждой итерации вычислений.

Аналогичным образом задаётся граф-схема функции переходов h , с тем лишь отличием, что начальными значениями в вычислениях могут быть также и значения выходных переменных y .

Граф-схемой функции переходов (схемой обучения нейросети) над базисом $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q\}$ будем называть ориентированный упорядоченный граф $\Sigma_h = (V_h, E_h)$, между вершинами которого и множеством переменных $\{s_1, s_2, \dots, s_n, x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_p\}$ существует взаимно однозначное соответствие. При этом вершины и дуги графа помечаются следующим образом.

1. Каждая вершина помечена символом операции $\beta_i \in B$. Заходящие в вершину v_i дуги упорядочены в соответствии с порядком аргументов β_i . Количество и порядок аргументов β_i соответствует количеству и порядку заходящих в вершину v_i дуг.

2. Каждая дуга $(v_i, v_j) \in E_h$ помечена символом переменной α_{ij} .

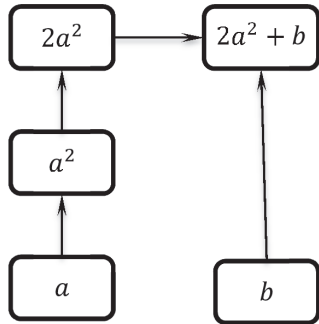
Вершины-источники граф-схемы функции перехода могут быть помечены любыми операциями множества B . Граф-схему, не меняющую вектор выхода или вектор состояния, будем обозначать единицей. Такая граф-схема соответствует тождественным функциям выхода и перехода (рис. 3):

$$1_g : g(s, x) := x;$$

$$1_h : h(s, x) := s.$$

Как видно из определения, граф-схемы нейросети характеризуются структурой — графом определённого вида и функционированием — законом преобразования входных векторов и векторов состояния в выходные. Это позволяет нам для определения нейросети использовать следующие обозначения:

$$N = (S, X, Y, \Sigma_g, \Sigma_h, B), \tag{16}$$



где S, X, Y — множества состояний, входных векторов и выходных векторов соответственно, Σ_g и Σ_h — граф-схемы функционирования и обучения соответственно, а $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q\}$ — базисный набор операций. При этом вычисления на графах Σ_g, Σ_h производятся по правилам (13)–(15).

Пример. Пусть у нас есть нейросеть, вычисляющая квадрат аргумента $N = (\emptyset, R, R, g(a, b) = 2a^2 + b, 1_h)$. Переменные состояния у этой нейросети отсутствуют, а граф-схему функции выхода можно определить, как показано на рис. 2.

Рис. 2. Граф-схема функции выхода $g(a, b) = 2a^2 + b$. В вершинах указана формула для получения результата операции над значениями переменных a, b

Задание функций нейросети граф-схемами более конструктивно, чем через формулы в том смысле, что даёт удобное представление порядка вычислений в нейросети. Однако такое описание нейросети не равнозначно определению (1)–(3), так как одна и та же функция может быть задана несколькими различными способами (граф-схемами).

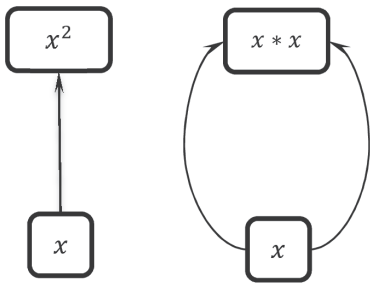


Рис. 3. Две различных граф-схемы, вычисляющие одну и ту же функцию выхода $g(x) = x^2$

Например, функцию выхода, заданную формулой $g(x) = x^2$, можно определить двумя разными графами вычислений (рис. 3). Первый способ использует базис $B = \{x^2, x\}$ и граф с одной дугой и двумя вершинами, а во втором — $B = \{*, x\}$ и граф с двумя дугами и двумя вершинами.

Ещё один важный вопрос — любое ли отображение в определении абстрактной нейросети представимо с помощью граф-схем? Ответ на этот вопрос утвердительный. Действительно, если у нас есть нейросеть $N = (S, X, Y, g, h)$, то мы можем выбрать базисный набор операций $B = \{g, h, s_1, s_2, \dots, s_n, x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_p\}$ и определить граф-схемы, как показано на рис. 4.

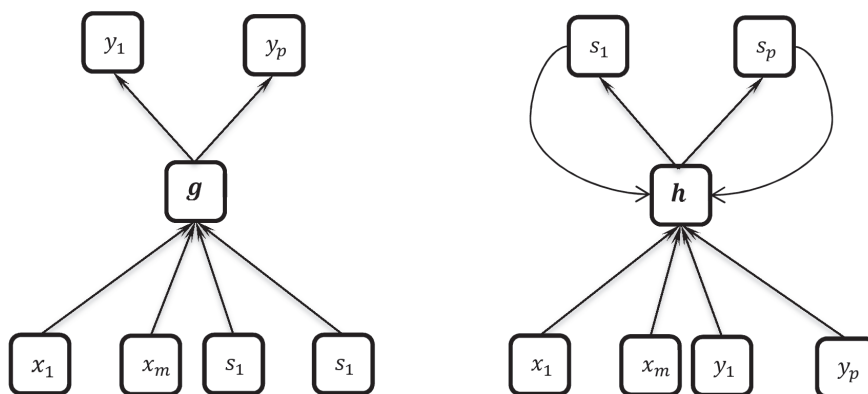


Рис. 4. Тривиальные граф-схемы для реализации функций g и h

Таким образом, мы доказали

Утверждение. Для любой нейросети $N = (S, X, Y, g, h)$ функции g, h можно задать с помощью граф-схем Σ_g, Σ_h соответственно, однако такое представление может быть не единственным.



Библиографический список

1. Головкин В. А. Нейронные сети : обучение, организация и применение. Кн. 4 : учеб. пособие для вузов / общ. ред. А. И. Галушкина. М. : ИПРЖР, 2001.
2. Горбань А. Н. Обобщенная аппроксимационная теорема и вычислительные возможности нейронных сетей // Сиб. журн. вычисл. матем. 1998. Т. 1, № 1. С. 11–24.
3. Круглов В. В., Дли М. И., Голунов Р. Ю. Нечёткая логика и искусственные нейронные сети. М. : Физматлит, 2001.
4. Тархов Д. А. Нейронные сети. Модели и алгоритмы. М. : Радиотехника, 2005.
5. Хайкин С. Нейронные сети : полный курс. М. : Издат. дом «Вильямс», 2006.
6. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука, 1997.
7. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одной переменной и сложения // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 5. С. 953–956.
8. Горбань А. Н. Обучение нейронных сетей. М. : СП «Параграф», 1990.
9. Алексеев В. Б., Ложкин С. А. Элементы теории графов, схем и автоматов. М. : Издат. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000.
10. Митрофанов Ю. И. Системный анализ. Саратов : Науч. кн., 2000.

Algebraic Properties of Abstract Neural Network

I. I. Slepovichev

Slepovichev Ivan Ivanovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, gurgutan@yandex.ru

The modern level of neuroinformatics allows to use artificial neural networks for the solution of various applied problems. However many neural network methods put into practice have no strict formal mathematical substantiation, being heuristic algorithms. It imposes certain restrictions on development of neural network methods of the solution of problems. At the same time there is a wide class of mathematical models which are well studied within such disciplines as theory of abstract algebras, graph theory, automata theory. Opportunity to use results received within these disciplines in relation to neural network models can be a good help in studying of artificial neural networks, their properties and functionality. In this work formulations and definitions of neural network models from the point of view of universal algebra and the theory of graphs are given. The main theorems of universal algebra are provided in neural network treatment. In article is also offered the way of the formal description of a neuronet by graph-schemes which allows to use results of graph theory for the analysis of neural network structures.

Key words: neural net, homomorphism, congruence, graph-scheme of a neural network, computation on a graph.

References

1. Golovko V. A. *Nejronnye seti : obuchenie, organizacija i primenenie* [Neural networks: training, and organizing your application]. Book 4 : Manual for High Schools / ed. A. I. Galushkina, Moscow, IPRZhR, 2001 (in Russian).
2. Gorban A. N. Generalized approximation theorem and computational capabilities of neural networks. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 1998, vol. 1, no. 1, pp. 11–24 (in Russian).
3. Kruglov V. V., Dli M. I., Golunov R. U. *Nechjotkaja logika i iskusstvennye nejronnye seti* [Fuzzy Logic and Artificial Neural Network]. Moscow, Fizmatlit, 2001 (in Russian).
4. Tarhov D. A. *Nejronnye seti. Modeli i algoritmy* [Neural network. Models and Algorithms]. Moscow, Radiotekhnika, 2005 (in Russian).
5. Haykin S. *Neural Networks. A Comprehensive Foundation*. Hamilton, Ontario, Canada, 1999.
6. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997 (in Russian).
7. Kolmogorov A. N. On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1957, vol. 114, no. 5, pp. 953–956 (in Russian).
8. Gorban A. N. Training neural networks. Moscow, USSR-USA JV "Paragraph", 1990 (in Russian).
9. Alekseev V. B., Lozhkin S. A. *Elementy teorii grafov, skhem i avtomatov* [Elements of the theory of graphs, charts and machines]. Moscow, Izdat. otel fakulteta VMiK MGU, 2000 (in Russian).
10. Mitrofanov Yu. I. System analysis. Saratov, Nauchnaia kniga, 2000 (in Russian).



УДК 519.688

КВАНТОВЫЕ КОМПЬЮТЕРЫ И КВАНТОВЫЕ АЛГОРИТМЫ Часть 2. КВАНТОВЫЕ АЛГОРИТМЫ

В. М. Соловьев

Соловьев Владимир Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, начальник Поволжского регионального центра новых информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, svm@sgu.ru

В работе рассмотрены принципы построения квантовых алгоритмов и их основные особенности. Показано отличие квантового параллелизма от классических методов высокопроизводительных вычислений. Представлена стратегия разработки квантовых алгоритмов на основе квантовых схем. Предложены методы программирования, реализующие квантовые алгоритмы, с использованием языков высокого уровня. Описан подход, реализации унитарных преобразований, основанный на оракуле.

Ключевые слова: квантовые вычисления, квантовый компьютер, квантовые алгоритмы, кубит, базисные состояния, квантовый гейт, квантовая суперпозиция, квантовая запутанность, квантовый параллелизм, квантовая интерференция, оракул, языки квантового программирования.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-104-112

Окончание (см. [1]).

ВВЕДЕНИЕ

Как уже отмечалось в первой части [1], современные квантовые технологии могут поддерживать совершенно новые алгоритмы вычислений (квантовые алгоритмы), основанные на принципах квантовой механики, и для их реализации необходимы квантовые компьютеры. Но в настоящее время нет универсального квантового компьютера, а есть только экспериментальные образцы, реализующие отдельные подходы к его созданию. При этом одним из главных направлений деятельности в области квантовых вычислений становится разработка квантовых алгоритмов для решения как классических, так и квантовых задач (в том числе и моделирование квантовых систем). Это один из интенсивных путей развития квантовых вычислений, по которому уже существует более 50 доступных реализаций [2], охватывающих самые широкие области вычислений. В этой связи квантовые вычисления являются крайне интересной и перспективной областью исследований для специалистов в области информационных технологий (IT-специалистов). А для этого нужна более совершенная методическая база для обучения таких IT-специалистов. Она должна быть математически строгой и в то же время как можно проще описывать модели квантовых вычислений, балансируя на грани «ликбеза» по квантовой механике.

1. РАЗРАБОТКА КВАНТОВЫХ АЛГОРИТМОВ

Разработка квантовых алгоритмов отличается от разработки классических алгоритмов, так как парадигма квантовой информатики требует сдвига в сторону парадоксов и «переформатирования» мышления, потому что квантовая механика по своей сути контринтуитивна [3]. Среда разработки (design flow) квантовых алгоритмов должна переводить высокоуровневые квантовые программы в эффективные устойчивые к ошибкам реализации на различных квантовых средах. При этом она должна содержать языки программирования, компиляторы, оптимизаторы, симуляторы, дебаггеры и другие инструменты с хорошо определенными интерфейсами и инкорпорированной устойчивостью к исправлению квантовых ошибок (рис. 1).

Для квантовых компьютеров уже сейчас разработаны языки квантового программирования (табл. 1). Они основываются на языках функционального программирования¹ и реализуют квантовые

¹Языки функционального программирования (Lisp, Erlang, APL (MatLab), Scala, Miranda, ML, Haskell и т. д.) относятся к декларативным и определяют вычисления как строгие абстрактные понятия и методы символьной обработки данных. В отличие от языков императивного программирования на основе инструкций, изменяющих состояние данных, они не предполагают явного хранения состояния программы. Теоретической моделью этих вычислений является лямбда-исчисление, формализующее понятие вычислимости.



алгоритмы, используя векторную и матричную алгебру. Кроме того, на классических компьютерах можно решать симуляционные задачи, используя фреймворки функциональных языков (например, языка Haskell). Однако реализовать реальные квантовые алгоритмы при помощи таких фреймворков нельзя, поскольку потребуются гигантские вычислительные ресурсы для манипуляции необходимым количеством кубитов и для применения к ним унитарных преобразований. Такие ресурсы не обеспечат даже суперкомпьютеры эксафлопсной производительности, поэтому необходимы именно квантовые компьютеры, которые на физическом (аналоговом) уровне будут выполнять квантовые операции, что значительно эффективнее вычислительной модели на классическом компьютере.

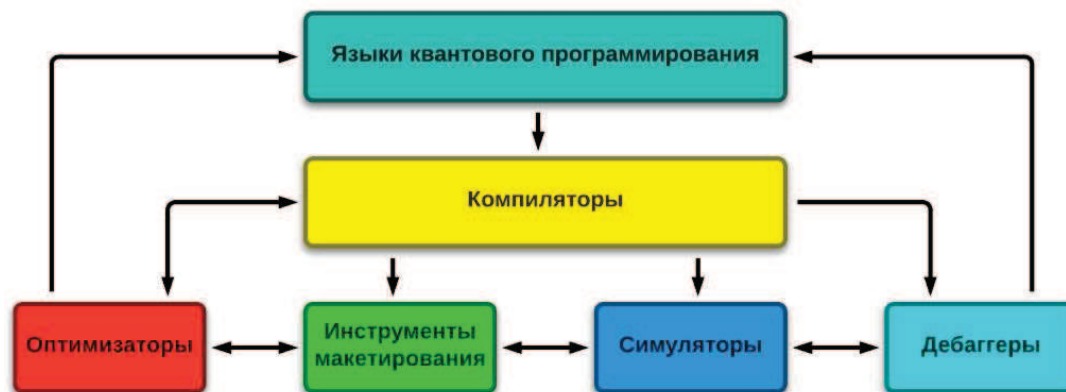


Рис. 1. Среда разработки квантовых алгоритмов

Таблица 1

Языки квантового программирования

Языки QC	Основа языка	Парадигма языка	Адрес в сети	Примечание
QCL	C	ИП	http://www.itp.tuwien.ac.at/~oemer/qcl.html	Первый язык QC
LanQ	Java	ИП	http://lanq.sourceforge.net	Синтаксис языка C
Q-gol	C	ИП	http://www.ifost.org.au/~gregb/q-gol	Поддержка графики
Q	C++	ИП	http://q-lang.sourceforge.net	Поддержка прекращения
Pure	C	ИП	http://purelang.bitbucket.org	Приемник языка Q
GCL	C	ИП	http://mirror.tochlab.net/pub/gnu/gcl	GNU Common Lisp
QPL, QFC		ФП	http://www.vcpc.univie.ac.at/~ian/hotlist/qc/programming.shtml	Языки квантовых схем и симуляторы
QML	Haskell	ФП	http://arxiv.org/abs/quant-ph/0409065	Поддержка графики
Quipper	Haskell	ФП	http://www.mathstat.dal.ca/~selinger/quipper	Последний язык QC
Библиотеки моделирования	C, Java, PHP, Python, и т. д.	-	http://www.quantiki.org/wiki/List-of-QC-simulators	Компьютерная алгебра и основные языки

В настоящее время языки квантового программирования условно можно разделить на два типа: языки, направленные на практическое применение (моделирование квантово-механических систем, программирование квантовых схем и т. д.); языки анализа квантовых алгоритмов. Языки второго типа в основном используются, когда невозможно формально доказать корректность и эффективность алгоритма, так как он может быть основан на недоказанных математических предположениях или эвристических методах. В этом случае чаще всего требуется тестирование алгоритма и его статистический анализ даже без квантового компьютера, используя квантовые виртуальные машины (quantum virtual machine) и библиотеки симуляции квантовых компьютеров. В этом случае, работая с небольшими размерами входных данных, можно осмыслить возможности и проблемы алгоритма.



Это позволяет найти нужные алгоритмы при помощи метода проб и ошибок, а затем перенести их на квантовые компьютеры. Более интересной является архитектура программного обеспечения первого типа, где высокоуровневые языки программирования, позволяют реализовать квантовые алгоритмы (рис. 2).

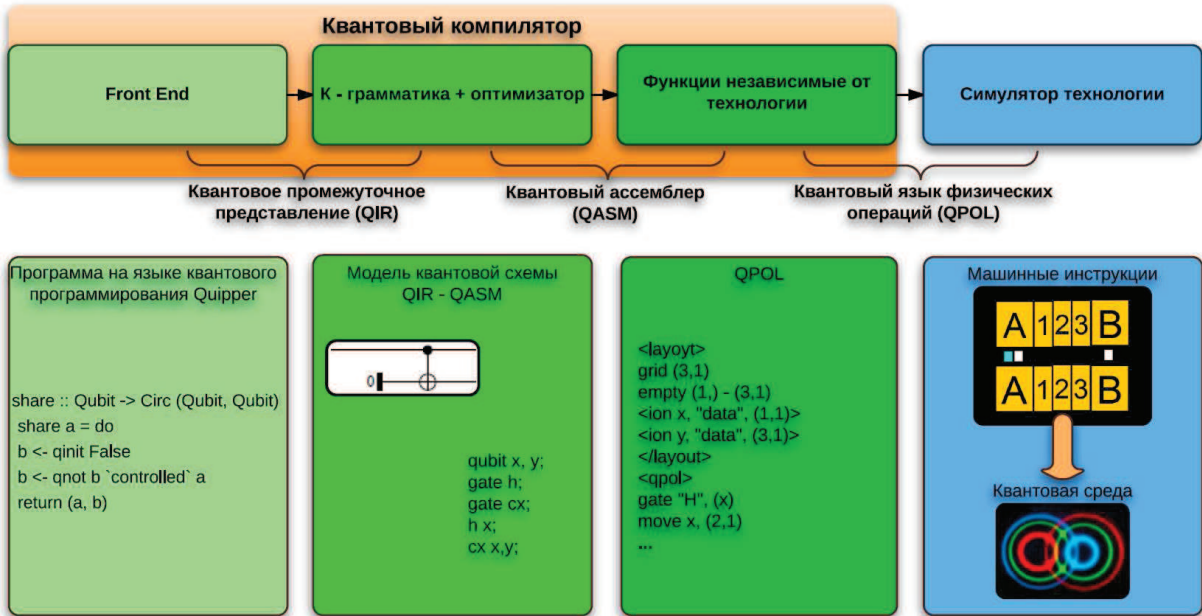


Рис. 2. Программное обеспечение, реализующее квантовые алгоритмы

Алгоритм может быть реализован на независимом от квантовой технологии высокоуровневом языке программирования (например, Quipper). Код программы транслируется фронт-эндом в квантовое промежуточное представление (QIP) на основе квантовой схемы. При этом поддерживается категориальная грамматика (categorical grammatical, CG) и оптимизатор, который выполняет преобразования и оптимизацию кода, независимую от использования квантовых технологий (например, удаление двух последовательных гейтов Адамара). В ходе преобразования QIP описание квантовых схем представляется низкоуровневым описанием на языке квантового ассемблера (QASM). На следующем шаге, уже зависящим от квантовой технологии, оптимизатор преобразует программу на QASM в инструкции квантового языка физических операций (QPOL). Набор этих инструкций QPOL отправляется для вычислений либо квантовому компьютеру, либо симулятору для исполнения. Такая архитектура программного обеспечения позволяет осуществить независимую разработку каждого слоя. Таким образом, разные языки квантового программирования могут использовать различные фронтенды, но один и тот же оптимизатор кода. При этом изменение технологии квантовых вычислений приведет лишь к замене зависящей от технологии части оптимизатора. Это позволяет независимо проектировать программное обеспечение и гарантировать его интероперабельность.

Для эффективных вычислений в квантовых алгоритмах могут использоваться так называемые оракулы — квантовые аналоги черных ящиков, реализующие, например, унитарные преобразования $U_f : \{0, 1\}^{k_1+k_2} \rightarrow \{0, 1\}^{k_1+k_2}$ функции $f : \{0, 1\}^{k_1} \rightarrow \{0, 1\}^{k_2}$. При этом считается, что существует некоторый физический процесс, вычисляющий обратимым образом эту функцию f , выполняя квантово-механическое унитарное преобразование. В оракуле (рис. 3) k_1 -кубитный регистр x содержит входные данные для функции f , а k_2 -кубитный регистр y является вспомогательным (обычно он инициализирован нулями). На выходе результат вычисления функции складывается с этим регистром по модулю 2.

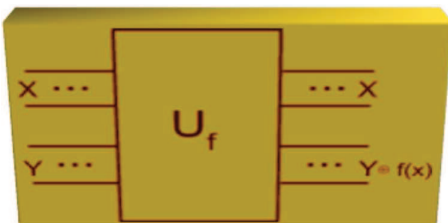


Рис. 3. Оракул U_f



При создании оракула используется метод конструирования коммуникационной квантовой схемы из базисных блоков, реализующей обратимое унитарное преобразование, которое можно использовать в алгоритме.

2. СТРАТЕГИЯ ПОСТРОЕНИЯ КВАНТОВОГО АЛГОРИТМА

Общая стратегия построения квантового алгоритма основана на выборе унитарного оператора преобразования U размерности $2^k \times 2^k$:

$$|\psi_{i+1}\rangle = U(2^k \times 2^k)|\psi_i\rangle \quad (1)$$

и измерениях. В алгоритмах, кроме оператора выражения (1), могут учитываться исходные квантовые состояния и распределения вероятностей. Кроме того, алгоритмы должны исключать копии произвольных квантовых состояний из-за запрета клонирования², когда копирование содержимого переменных не допускается в принципе [4]. Квантовая схемотехника создания квантовых алгоритмов — это методология анализа и синтеза схем квантовых вычислений на основе следующей структуры: входные данные, преобразования, выходные данные. В этой связи задачи квантовой схемотехники сводятся к следующему.

1. *Прямой анализ*, когда по схеме входа и описанию вычислительного процесса определяется схема выхода. Математически входная схема — это описание множества возможных значений на входе квантового вычислительного процесса. Поскольку квантовый регистр (набор кубитов) представляется в виде вектора, а каждый гейт в квантовой схеме представляется унитарной матрицей, то задача прямого анализа сводится к последовательному умножению матриц на вектор. Выполнив эту процедуру на всех возможных значениях входа, можно получить все возможные выходные значения, объединив их в схему. Этот процесс затруднителен для классического компьютера, так как при увеличении количества кубитов размерность векторов и матриц растет экспоненциально.

2. *Обратный анализ* в модели квантовых вычислений тривиально сводится к задаче прямого анализа, так как эти вычисления являются обратимыми, а матрицы всех гейтов — унитарными. Поэтому для обратного анализа квантовой схемы достаточно обратить её, то есть перекоммутировать гейты в обратном порядке, сделав выход входом, а вход — выходом, при этом сами гейты преобразовываются в эрмитово-сопряжённые. После всего этого проводится процедура прямого анализа. Это справедливо только для квантовых схем, где нет операций измерения, которые являются необратимыми. Но измерения в большинстве квантовых алгоритмов применяются в конце квантовых вычислений, когда необходимо получить классический результат, а поэтому обращение можно осуществлять, не обращая внимание на измерения. Однако существуют квантовые алгоритмы, в которых измерение производится в середине процесса вычислений (квантовая телепортация). В таких алгоритмах и их квантовых схемах описанный метод обратного анализа использовать нельзя, а нужно использовать иные методы, если они вообще существуют, так как в классических компьютерах задача обратного анализа неразрешима [5].

3. *Синтез квантовой схемы* по заданным входным и выходным данным усложняется по сравнению с классическим компьютером обратимостью вычислений. В общем виде произвольный вычислительный процесс может быть описан как двоичная функция, обрабатывающая входные данные и возвращающая выходные. Такая функция в классическом варианте строится при помощи базисного набора логических элементов. Далее классическая схема, используемая при синтезе, может быть сведена к задаче построения квантового оракула. Однако это не единственное решение задачи синтеза. Другой способ основан на построении одной унитарной матрицы для представления классической функции. Эта задача решается при помощи системы уравнений, получаемой из произведения матрицы на вектор. При этом количество уравнений и неизвестных растёт экспоненциально от количества кубитов (векторов) и решать такую систему на классическом компьютере проблематично.

В общем виде квантовая схема — это только основа для построения квантового алгоритма, которая позволяет решать на квантовом компьютере произвольную вычислительную задачу. Разработка же

²Согласно запрета клонирования невозможно создать идеальную копию произвольного неизвестного квантового состояния. Это вытекает из того, что клонирование является операцией, в результате которой создается состояние, являющееся тензорным произведением идентичных состояний подсистем, а идентичности в квантовых системах достичь нельзя.



при этом вычисления станут необратимыми и будет выделяться тепло, что повысит декогеренцию. Однако можно создать реверсивную схему и минимизировать накопление мусора за счет специально разработанных методов уничтожения «мусора» [7]. Обычно они собирают все неиспользованные выходы и преобразуют их специальным образом так, чтобы они использовались (например, для вычисления обратной функции), а весь процесс вычислений и его квантовая схема были полностью реверсивными. В этом случае за экспоненциальное ускорение решения некоторых задач, которое даёт модель квантовых вычислений, придётся заплатить экспоненциальным увеличением размера памяти. Кроме того, обратимость не разрешает в квантовых схемах циклы и возвраты назад. Кубиты как бы двигаются по гейтам, проходя через них и преобразовываясь в соответствии со схемой. Выполнение квантовой программы происходит от начала только вперёд. Единственный способ выполнения алгоритма — унитарные преобразования, а единственный способ получения результата — измерение, уничтожающее суперпозицию, в которой находятся кубиты.

2. *Квантовый параллелизм* обеспечивает параллельное решение одной и той же задачи для экспоненциально больших данных путем прохождения их через гейты унитарных преобразований. Параллелизм обеспечивается суперпозицией базисных состояний кубитов, и с ростом числа кубитов размерность базиса растёт в степенной зависимости. Поэтому квантовый параллелизм обладает огромной вычислительной мощностью, которой алгоритмы должны правильно воспользоваться.

3. *Интерференция*, тесно связанная с принципом параллелизма, широко используется в квантовых алгоритмах для взаимного усиления требуемых результатов и ослабления результатов нежелательных. Повторяя несколько раз последовательность параллельной обработки с учетом интерференции состояний кубитов, в алгоритме можно так усилить амплитуду (вероятность) искомого состояния, что в дальнейшем при измерении получится требуемый результат с высокой вероятностью. При этом, варьируя количеством повторений и шагом интерференции, можно управлять вероятностями, доводя их до любого заданного значения.

4. *Квантовая запутанность* — наименее изученный принцип, который не поддается рациональному осмыслению уже в течение века. Но именно этот принцип является ключевым фактором многих квантовых алгоритмов, позволяющим решать неразрешимые классическими компьютерами задачи.

Из вышеперечисленного следует, что не обязательно ждать появления реального универсального квантового компьютера или его облачной реализации (quantum cloud) [8, 9]. Можно уже сейчас, изучая квантовые вычисления, разрабатывать квантовые алгоритмы, делая это поэтапно (рис. 5).



Рис. 5. Этапы разработки квантовых алгоритмов

Во-первых, проанализировать моделируемую физическую систему и ее математическое описание (модель), обратив особое внимание на возможность дискретизации и параллелизма. Тем самым создав вычислительную модель — основу разрабатываемого квантового алгоритма, учитывающего особенности квантовых вычислений. Во-вторых, реализовать будущий квантовый алгоритм на одном из языков функционального программирования (Lisp, Erlang, Scala, Miranda, ML, Haskell) или с помощью систем компьютерной алгебры (Maple, Mathematica, Maxima, MatLab, Octave), симуляторов и соответствующих фреймворков (Eqcs-0.0.8, Q++, QCLib, QCSim, Quantum Computer Simulator, Quantum Network Computing, QC Simulator, QCAD, Quantum Qudit Simulator, QSim, jQuantum, Quantum Algorithm Designer, Quantum eXpress, Haskell Simulator of Quantum Computer и т. д.). В-третьих, используя существующие языки квантового программирования (QCL, LanQ, Q-gol, Q, Pure, GCL, QPL, QML, Quipper), реализовать алгоритмы. При этом нужно учитывать, что размерности используемых в вычислениях векторов (квантовых регистров) и матриц унитарных преобразований (гейтов) растут экспоненциально в зависимости от количества кубитов, используемых в



алгоритме. На современных классических суперкомпьютерах пока можно реализовать квантовые алгоритмы, требующие не более 15 кубитов [7, 10]. Современные эмуляторы квантовых алгоритмов, реализованные на классических компьютерах, по сравнению с классическими алгоритмами преимуществ не дают, а для некоторых алгоритмов, использующих небольшие данные, классические алгоритмы работают значительно быстрее. Преимущества квантовых вычислений проявляются только на квантовом компьютере и на больших данных. Поэтому работы по квантовым вычислениям в большинстве своем ведутся пока только в интересах теоретической информатики и фундаментальных исследований. Однако некоторые алгоритмы, приведенные на рис. 4, имеют уже и чисто прикладное значение. Например, алгоритм Шора позволил скомпрометировать криптографический алгоритм RSA и протокол обмена ключами Деффи – Хеллмана, а алгоритмы Гровера, квантового блуждания, нахождения глобального минимума позволили значительно повысить эффективность неструктурированного поиска. Кроме того, фундаментальность и глубина алгоритмов об идеалах, скрытых абелевых группах, дискретных логарифмов дает основание предполагать, что они могут стать основой для решения прикладных задач в ближайшем будущем. Именно такой путь прошли классические вычисления, когда сначала были разработаны алгоритмы с совершенно непонятными структурами данных, а уже потом прикладные программисты реализовывали современное программное обеспечение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квантовые алгоритмы уже сейчас начинают воплощаться в реально функционирующих экспериментальных устройствах, а квантовые вычисления являются довольно развитой областью знаний. В неё вовлечены многие лучшие умы в области физики и информатики [7, 11], а количество публикаций растёт день ото дня. Интенсивно создаются новые алгоритмы и способы их применения к решению прикладных задач. Поэтому всем тем, кто хочет заниматься квантовыми вычислениями, уже сегодня надо полноценно погружаться в эту область и изучать её фундаментальные основы.

При создании программного обеспечения (software) квантового компьютера необходимо, прежде всего, решить следующие задачи:

- подготовить алгоритмы унитарных преобразований (решения задачи), исключающие копии произвольных квантовых состояний, циклы и возвраты назад, обеспечивающие сборку и удаление «мусорных» данных, а также коррекцию квантовых ошибок, поддержку квантового параллелизма для экспоненциально больших данных, повторяющие несколько раз параллельную обработку, с учетом интерференции состояний кубитов и повышающие вероятность результата;
- написать и отладить программу на языке функционального или квантового программирования, реализующую подготовленный алгоритм (подготовку и отладку программ можно выполнять и на классическом компьютере, компиляторы которого совместимы с компиляторами квантового компьютера, кроме того, необходимо учитывать ограничения на размеры обрабатываемых данных и наличие «драйверов» для низкоуровневого доступа к квантовому компьютеру);
- предусмотреть вывод результата на классическом компьютере, работающем как элемент квантового компьютера или с использованием квантовых облачных технологий.

Современный этап развития квантовых вычислений является этапом фундаментальных исследований и экспериментального подтверждения результатов этих исследований (табл. 2). Этот этап позволит выбрать из нескольких прототипов квантовых компьютеров, реализуемых по разным технологиям создания квантовой среды, лучший. Его преимущества будут проявляться, прежде всего, в эффективности решения вышеперечисленных проблем.

Собственно говоря, квантовый компьютер ничего не будет вычислять в обычном смысле. Он как бы заранее будет знать все возможные решения. Останется только отбросить неверные результаты посредством квантовых алгоритмов. Кроме того, на этом этапе необходимо будет решать, как задачи создания программного обеспечения, так и задачи подготовки специалистов в области квантовых вычислений. Этим специалистам придется создавать образцы пока трудно реализуемой гипотетической аналогово-цифровой вычислительной системы, создавать новые и использовать уже появляющиеся квантовые алгоритмы.



Таблица 2

Исследования по созданию квантового компьютера

Компании	Квантовая среда	Особенности
IBM	Исследования квантовой среды на основе схем из сверхпроводящих металлов	Очень высокая вероятность квантовых ошибок, что не позволяет создавать полноценные квантовые компьютеры
Microsoft	Исследование теоретически более надежной квантовой среды и создание топологического кубита*	Существование квазичастиц, используемых в топологическом кубите, пока не доказано
Alcatel-Lucent (Bell Labs)	Исследования конденсированного состояния вещества с целью создания топологического кубита	Создание топологического кубита на основе дробного квантового эффекта Холла пока в стадии исследований
D-Wave Systems	Исследования по созданию квантового компьютера на основе сверхпроводящего чипа, содержащего 512 кубитов	Пока не доказано, что чипы построены на основе квантовых эффектов
Google	Разноплановые исследования компьютеров D-Wave Systems, построенных на основе контактов Джозефсона	Google адаптирует свои технологии под возможности квантовых компьютеров

Примечание. *Топологический кубит — это теоретический кубит на основе двумерных квазичастиц (анионов), являющихся более стабильными, что позволяет уменьшить ошибки декогеренции. Это одно из трех направлений уменьшения ошибок в квантовых компьютерах (первое — коррекция, второе — подавление декогеренции). Топологическое состояние анионов подразумевает неизменность топологии при изменении их состояния, базирующейся на принципе запрета Паули (две частицы не могут находиться в одинаковом состоянии). Состояния из нескольких анионов соответствуют переплетению топологий, аналогично пряже. Это позволяет построить математическую теорию соответствующих групп и алгебр, называемых не абелевыми. На этих состояниях в результате переплетения, можно построить квантовый компьютер.

Библиографический список

1. Соловьев В. М. Квантовые компьютеры и квантовые алгоритмы. Ч. 1. Квантовые компьютеры // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 462–477. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-462-477.
2. Algebraic and Number Theoretic Algorithms. URL: <http://math.nist.gov/quantum/zoo/> (дата обращения: 23.06.2015).
3. Богданов Ю. И., Кокин А. А., Лукичёв В. Ф., Орликовский А. А., Семенухин И. А., Чернявский А. Ю. Квантовая механика и развитие информационных технологий // Информационные технологии и вычислительные системы. 2012. № 1. С. 17–31.
4. Venegas-Andraca S. E. Quantum Walks for Computer Scientists. Synthesis Lectures on Quantum Computing. Morgan Claypool, 2008. 133 p.
5. Горбачев В. Н., Жилиба А. И. Физические основы современных информационных процессов или учебное пособие по квантовой телепортации, квантовым вычислениям и другим вопросам квантовой информации. Тверь : Из-во Твер. гос. ун-та, 2001. 43 с.
6. Shor P. W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. arXiv: quant-ph/9508027. 25.01.1996. 28 p.
7. Williams C. P. Explorations in Quantum Computing. Springer-Verlag London Ltd., 2011. 740 p.
8. Closing in on quantum computing. URL: <http://www.wired.com/2014/10/quantum-computing-close> (дата обращения: 23.06.2015).
9. Bhamri S. Quantum Clouds: A future perspective. arXiv: quant-ph/1410.6502v1. 05.10.2014. 14 p.
10. Валеев К. А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // Успехи физических наук. 2005. Т. 175, № 1. С. 3–39.
11. Metodi T. S., Faruque A. I., Chong F. T. Quantum Computing for Computer Architects. Synthesis Lectures on Computer Architecture. Morgan Claypool, 2011. 203 p.



Quantum Computers and Quantum Algorithms. Part 2. Quantum Algorithms

V. M. Solovyev

Solovyev Vladimir Mihajlovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., Saratov, Russia, 410012, svm@sgu.ru

The paper discusses principles of construction for quantum algorithms and their main features. Distinction of quantum parallelism from classical methods of high-performance computing is shown. Quantum algorithms design strategy is presented based on quantum circuits. Methods of programming for implementation of quantum algorithms using high-level languages are proposed. An approach to implement unitary transformations based on the oracle method is described.

Key words: quantum computing, quantum computers, quantum algorithms, qubit, quantum gate, quantum superposition, quantum entanglement, quantum parallelism, quantum interference, oracle, quantum-programming languages.

References

1. Solovyev V. M. Quantum Computers and Quantum Algorithms. Pt. 1 : Quantum Computers. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 462–477. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-462-477 (in Russian).
2. *Algebraic and Number Theoretic Algorithms*. Available at: <http://math.nist.gov/quantum/zoo/> (accessed 23 June 2015).
3. Bogdanov U. I., Kokin A. A., Lukichev V. F., Orlikovskij A. A., Semehin I. A., Chernavskij A. U. Quantum mechanics and the development of information technology. *Information technologies and computer systems*, 2012, no. 1, pp. 17–31 (in Russian).
4. Venegas-Andraca S. E. *Quantum Walks for Computer Scientists*. Synthesis Lectures on Quantum Computing, Morgan Claypool, 2008, 133 p.
5. Gorbachev V. N., Zhiliba A. I. *Physical basis of modern information processes or textbook on quantum teleportation, quantum computing and other issues of quantum information*. Tver, Tver State University, 2001, 43 p. (in Russian).
6. Shor P. W. *Polynomial-time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer*. arXiv: quant-ph/9508027, 25.01.1996, 28 p.
7. Williams C. P. *Explorations in Quantum Computing*. Springer-Verlag London Ltd., 2011, 740 p.
8. *Closing in on quantum computing*. Available at: <http://www.wired.com/2014/10/quantum-computing-close> (accessed 23 June 2015).
9. Bhambri S. *Quantum Clouds: A future perspective*. arXiv: quant-ph/1410.6502v1, 05.10.2014, 14 p.
10. Valiev K. A. Quantum computers and quantum computing. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* [Successes of physical sciences], 2005, vol. 175, no 1, pp. 3–39 (in Russian).
11. Metodi T. S., Faruque A. I., Chong F. T. *Quantum Computing for Computer Architects*. Synthesis Lectures on Computer Architecture, Morgan Claypool, 2011, 203 p.

УДК 517.11

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К НЕЧЕТКОМУ ЛОГИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ

Д. В. Сперанский

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Московский государственный университет путей сообщения, Speranskiy.dv@gmail.com

В статье исследуется проблема двоичного нечеткого моделирования цифровых устройств (ЦУ). В отличие от аналогичной классической проблемы предполагается, что входные сигналы ЦУ являются нечеткими. В реальных ЦУ для каждого входа (0 или 1) существует определенный диапазон в вольтах. Если входной сигнал выходит за этот диапазон, то корректность его идентификации не гарантируется. Нечеткость входного сигнала означает, что наблюдаемые его значения могут быть либо внутри определенного диапазона, или вне его. Известно, что логическое моделирование каждого ЦУ состоит в вычислении значения определенного логического выражения. Это выражение есть математическая модель ЦУ. Кроме того, это логическое выражение может всегда быть представлено в терминах трех логических операций, а именно И, ИЛИ, НЕ. В статье предлагается метод сведения исследуемой проблемы к проблеме нечеткого моделирования систем в пространстве вещественных чисел. Метод основан на представлении логического выражения с исполь-



зованием бесконечнозначной (непрерывной) логики. Вычисление в этой логике сводится к вычислению выражения в пространстве вещественных чисел. Предложенная в статье процедура намного менее трудоемка, чем ранее известная процедура для нечеткого моделирования, использующая нечеткую арифметику в пространстве вещественных чисел.

Ключевые слова: непрерывная логика, цифровые устройства, нечеткое логическое моделирование.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-112-119

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, логическое моделирование цифровых устройств (ЦУ) широко применяется для решения многих задач, к числу которых относится, в частности, проектирование ЦУ, включающее разработку структурной и функциональной схем ЦУ, анализ схемотехнической реализации, разработку его принципиальной электрической схемы и т.д. Упомянутое моделирование может осуществляться с различной степенью детализации, которая существенно зависит от преследуемой при моделировании цели.

Напомним, что обычно логическое моделирование ЦУ основано на применении классического математического аппарата, подразумевающего выполнение операций с точными значениями данных. Вместе с тем для реальных ЦУ такие данные часто являются неточными (нечеткими) по объективным причинам (неточность измерений, нечеткость в описании функционирования ЦУ и т. п.). Очевидно, что это приводит к огрублению результатов моделирования. Понятно, что для отражения нечеткости данных нужно иметь подходящие средства, созданию которых способствовало введение Л. Заде [1] концепции нечетких множеств.

Названная концепция послужила толчком к появлению и развитию таких новых разделов математики и ее приложений, как нечеткая арифметика, нечеткая алгебра, нечеткая логика, теория нечеткого управления и т. п. Не останавливаясь на обзоре работ в этих направлениях, поскольку это лежит за рамками нашей статьи, назовем лишь некоторые из известных публикаций [2–5], связанных с рассматриваемыми ниже вопросами.

В предлагаемой статье рассматривается нечеткое двоичное логическое моделирование ЦУ, ориентированное, в частности, на решение задач контроля и диагностирования ЦУ, идентификации ЦУ и т. п.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве ЦУ как комбинационных, так и с памятью далее рассматриваются устройства, выходные сигналы которых по заданным входным сигналам вычисляются с использованием логических выражений. Это означает, что совокупность таких выражений представляет собой математическую модель рассматриваемого ЦУ. Предполагается, что каждое логическое выражение в общем случае может содержать различные логические операции, включая отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, сумму по модулю 2 и др. Известно [6], что, например, первые три названные операции образуют полную систему булевых функций (базис), т. е. любая другая логическая функция может быть представлена в виде логического выражения, содержащего только функции из этого базиса.

Поскольку реальные ЦУ комбинационного типа чаще всего состоят из микросхем, реализующих функции упомянутого базиса, математической моделью таких ЦУ являются описывающие их функционирование логические выражения. Известно также [7], что любое ЦУ с памятью всегда можно преобразовать в эквивалентную ему итеративную комбинационную сеть. Таким образом, и для ЦУ с памятью соответствующее ему логическое выражение также является адекватной математической моделью. Исходя из сказанного, далее для простоты изложения в качестве объекта исследования будет рассматриваться комбинационное ЦУ (хотя это и не принципиально) с несколькими входами и одним выходом.

В классической модели ЦУ при традиционном двоичном логическом моделировании на каждом его входном и выходном полюсе может появиться только точный двоичный сигнал «0» или «1». Исследуемая здесь задача предполагает, что поступающие на входы ЦУ сигналы являются нечеткими. Понятно, что получаемые при этом выходные сигналы ЦУ также являются нечеткими.



Сформулируем теперь рассматриваемую нами задачу. Пусть заданы логическое выражение, реализуемое исследуемым ЦУ, и входной набор ЦУ, состоящий из нечетких сигналов. На основе этой информации требуется осуществить нечеткое логическое моделирование ЦУ и определить двоичное значение выходного сигнала (0 или 1), являющееся максимальным приближением к вычисленному в результате моделирования нечеткому значению.

Использованные выше термины «нечеткий сигнал» и «нечеткое моделирование» требуют уточнения. Напомним [8], что использование логической модели ЦУ предполагает некоторую идеализацию реальных сигналов. Поведение каждого из реальных элементов ЦУ описывается в терминах переменных, отображающих значения меняющихся во времени физических величин. При этом у значения переменной всегда имеется область неопределенности, обусловленная инерционностью элементов. На диаграммах изменения сигнала это изображается трапециевидальной его формой, а не абсолютно прямоугольной.

Так, изменение сигнала от одного уровня до другого (за время переходного процесса) в действительности различается и составляет, как правило, приблизительно 10% при изменении $0 \rightarrow 1$ и 90% при изменении $1 \rightarrow 0$ от максимального значения сигнала. Уровни сигнала (0 и 1) должны находиться в некоторых заранее допустимых пределах и при выходе за эти пределы сигнал иногда не может быть отождествлен ни с 1, ни с 0. Заметим, что в ЦУ значения сигналов отображаются соответствующими уровнями напряжения. Так, например, в КМОП-схемах это $0.0 \div 1.5$ В для отображения сигнала 0 и $3.5 \div 5.0$ В для сигнала 1; в ТТЛ-схемах для тех же сигналов эти уровни таковы: $0.0 \div 0.8$ В и $2.0 \div 5.0$ В.

2. ПРИЛОЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ К НЕЧЕТКОМУ ЛОГИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ЦУ

Классическая двузначная логика во многих случаях является недостаточной, что привело к разработке рядом авторов (Лукасевичем, Постом, Тарским, Яблонским и др.) так называемых многозначных логик. Такие логики относятся к разряду дискретных логик, в которых имеется конечное множество значений истинности высказывания на заданном отрезке числовой оси. При осуществлении предельного перехода, заключающегося в устремлении к бесконечности числа значений истинности высказывания, в итоге получаем бесконечнозначную логику, называемую также непрерывной логикой. Таким образом, непрерывную логику можно рассматривать как обобщение дискретной логики.

Основная идея предлагаемого ниже подхода к нечеткому логическому моделированию базируется на применении для этой цели математического аппарата нечеткой логики.

Отметим, что приложениям непрерывной логики к исследованию динамики, надежности и других проблем ЦУ посвящен целый ряд работ В. И. Левина, среди которых назовем, например, [9, 10]. Решение некоторых из перечисленных проблем требует применения моделирования. Однако такое моделирование предполагает исследование функционирования ЦУ, во-первых, в динамике, когда на его входы подаются последовательности символов, а не отдельные символы, и, во-вторых, когда входные воздействия являются точными (четкими). Рассматриваемая нами задача отличается наличием нечетких входных воздействий и необходимостью вычисления реакции ЦУ только на отдельные входные воздействия. Понятно, что такая «статическая» задача менее сложна и есть основания рассчитывать на разработку более простого метода ее решения, чем применение достаточно сложного и трудоемкого аппарата «динамического» моделирования.

Напомним некоторые положения непрерывной логики, с основами которой можно ознакомиться, например, по книге С. А. Гинзбурга [11]. Значения истинности в этой логике образуют ограниченное множество вещественных чисел, содержащее свою верхнюю грань B и нижнюю грань A . Предполагается, что это множество является симметричным относительно точки $C = (A + B)/2$, которую можно назвать центром множества значений высказываний. Основными логическими операциями в непрерывной логике являются обобщенные дизъюнкция, конъюнкция и отрицание — аналоги соответствующих операций в классической двузначной логике. Значения истинности перечисленных обобщенных операций определяются следующим образом:

$$x \vee y = \max(x, y), \quad (1)$$

$$x \wedge y = \min(x, y), \quad (2)$$



$$\bar{x} = A + B - x = 2C - x, \quad (3)$$

где x и y — значения истинности соответствующих высказываний. Формула (3) означает, что значения истинности двух противоположных высказываний представляют собой две точки на отрезке $[A, B]$, расположенные симметрично относительно центра множества значений.

Отметим, что для непрерывной логики так же, как и для двузначной логики, оказываются справедливыми следующие общие законы:

$$\begin{array}{lll} x \vee x = x, & x \wedge x = x & \text{(тавтология);} \\ x \vee y = y \vee x, & x \wedge y = y \wedge x & \text{(коммутативность);} \\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), & (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) & \text{(ассоциативность);} \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), & x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) & \text{(дистрибутивность);} \\ \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}, & \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} & \text{(законы де Моргана).} \end{array}$$

Помимо приведенных законов для непрерывной логики справедливыми являются также следующие:

$$\begin{array}{ll} x \vee A = x, & x \wedge B = x, \\ x \vee B = x, & x \wedge A = A. \end{array}$$

Понятно, что поскольку аргументами логических функций непрерывной логики являются непрерывные величины, то и значениями таких функций также являются непрерывные величины. Поэтому естественно, что логические операции могут здесь сочетаться с операциями обычной алгебры — сложением, умножением, вычитанием. Такое в принципе возможно и для дискретной логики, но для нее результаты выполнения логических и алгебраических операций должны обязательно принадлежать множеству принятых дискретных значений. Что касается непрерывной логики, то в ней результат операций должен удовлетворять единственному ограничению — находиться в пределах отрезка $[A, B]$.

Очевидно, что при сочетании логических операций с алгебраическим суммированием и умножением оказываются справедливыми некоторые законы, на которых мы здесь не останавливаемся, поскольку их приложения лежат за рамками нашей статьи.

3. СТРУКТУРНАЯ МОДЕЛЬ НЕЧЕТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проблемы нечеткого моделирования, необходимость исследования которых возникла с 70-х годов прошлого века в связи с появлением обширных приложений теории нечетких множеств, сейчас оказались в зоне интересов многих ученых. Значительное внимание было проявлено в первую очередь к нечетким моделям процессов, описываемых различного рода уравнениями и соотношениями, включающими переменные со значениями из поля вещественных чисел. Соответствующие методы и многие аспекты такого моделирования в настоящее время достаточно хорошо разработаны. В частности, проблемы и методы нечеткого моделирования в поле вещественных чисел подробно изложены в монографии А. Пегата [12], терминология и понятия из которой используются нами в дальнейшем изложении.

Как известно [12], нечеткое моделирование в поле вещественных чисел потребовало разработки нечеткой арифметики (определения всех четырех арифметических действий над нечеткими числами), нечеткой математики (определения операторов объединения, пересечения, понятий нечеткого отношения и импликации). Кроме того, значительных усилий потребовала разработка структуры и операций в нечетких моделях и различных их типов, и, наконец, методов нечеткого моделирования. Результатом указанных разработок явилось создание достаточно эффективной, но весьма трудоемкой в применении математической теории.

Для решения рассматриваемой нами задачи упомянутая выше теория безусловно может быть использована. Вместе с тем специфика этой задачи позволяет уменьшить в значительной степени трудоемкость процесса нечеткого логического моделирования ЦУ, теоретически обоснованного в [12]. Так, этому способствует отсутствие необходимости использования нечеткой арифметики, аппарата

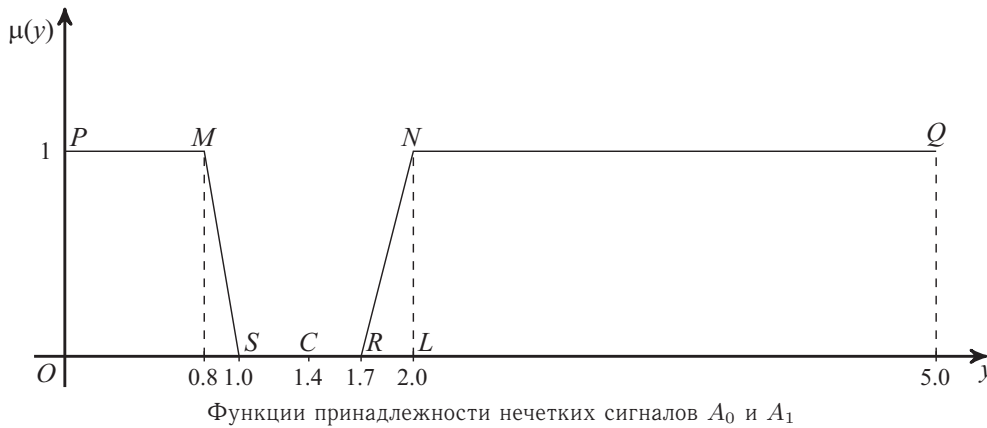


нечеткой математики и возможность значительного упрощения типовой структуры нечеткой модели, описанной в [12]. Остановимся подробнее на отмеченных особенностях.

Условимся, что используемая нами математическая модель ЦУ (логическое выражение, описывающее его функционирование) содержит переменные, представленные в единицах электрического напряжения (в вольтах). Конкретные значения переменные приобретают в результате измерений в процессе штатного функционирования ЦУ и являются нечеткими.

Проиллюстрируем предлагаемый метод на примере ТТЛ-схемы. Как было отмечено выше, сигналу «0» в таких схемах соответствует диапазон напряжения $0 \div 0.8$ В, а сигналу «1» — диапазон $2.0 \div 5.0$ В. Между этими диапазонами расположена так называемая мертвая зона, в пределах которой не гарантируется корректное восприятие уровня сигнала. Для ТТЛ-схем это диапазон $0.8 \div 2.0$ В. Середина этой зоны (в нашем случае напряжение 1.4 В) является так называемым пороговым уровнем сигнала. Если сигнал ниже этого уровня, то он может восприниматься как «0», если выше, то как «1» или как некорректный.

Условимся, что при нечетком логическом моделировании ЦУ на его входы подаются сигналы из двух нечетких множеств $A_0 =$ «примерно 0» и $A_1 =$ «примерно 1». Пусть графики функций принадлежности этих множеств есть ломаные, изображенные на рисунке.



Функции принадлежности нечетких сигналов A_0 и A_1

Ломаная PMS на рисунке соответствует множеству A_0 , а ломаная QNR — множеству A_1 . По оси абсцисс выписаны напряжения, определяющие эти множества и мертвую зону $[0.8 \div 2.0]$.

Перейдем к интерпретации перечисленных величин применительно к нашей задаче в терминах непрерывной логики. Значения возможных значений на выходе ЦУ образуют ограниченное множество вещественных чисел, лежащих на отрезке $[0.0; 5.0]$. Зону «нечеткости» входных и выходных сигналов ЦУ образуют значения, лежащие на отрезке $[A, B]$, где $A = 0.8$ и $B = 2.0$. Центром этого множества является точка $C = (A + B)/2 = (0.8 + 2.0)/2 = 1.4$, которая выполняет роль порогового значения сигнала. Степень принадлежности $\mu(y)$ сигнала y множествам A_0 и A_1 , где $0 \leq \mu(y) \leq 1$, определяется с помощью функции принадлежности, графически представленной на рисунке.

Для выполнения нечеткого логического моделирования воспользуемся типовой структурой нечеткой модели, ориентированной на применение в поле вещественных чисел, которая детально описана в [12, гл. 5]. Напомним, что структура этой модели в общем случае состоит из трех последовательно соединенных блоков, выполняющих следующие функции.

1. Блок фазификации (fuzzification) для поступающих на него нечетких значений входов вычисляет их степени принадлежности $\mu(y)$ входным нечетким множествам.

2. Блок вывода (inference) на входе получает степени принадлежности, вычисленные предыдущим блоком, и на выходе вычисляет так называемую результирующую функцию $\mu_{res}(y)$ принадлежности выходного значения сигнала модели. Для выполнения вычислений этот блок включает в себя базу правил, механизм вывода и функции принадлежности выходного значения y .

3. Блок дефазификации (defuzzification) на основе $\mu_{res}(y)$ вычисляет значение y^* выхода по его нечетким входным значениям. Этот блок включает в себя вычисление степеней выполнения условий отдельных правил, определения активизированных функций принадлежности заключений этих правил и результирующей функции принадлежности вывода из всех правил, входящих в базу.



Имеющийся опыт проведения нечеткого моделирования ряда реальных процессов, описанных в литературе, подтверждает высокую трудоемкость реализации такого моделирования. Основную часть в нем составляют затраты на реализацию алгоритмов в блоках вывода и дефазификации.

Перейдем теперь к описанию предлагаемой нами процедуры нечеткого логического моделирования ЦУ, существенно менее трудоемкой по сравнению с трудоемкостью реализации приведенной выше типовой структурной модели.

Суть этой процедуры кратко изложим на примере простого комбинационного устройства с тремя входами x_1, x_2, x_3 , значение на выходе которого описывается следующей структурной формулой:

$$y = (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_2 \wedge x_3). \quad (4)$$

Используя равенства (1)–(3), представим логическое выражение (4) в терминах обобщенных операций инверсии, конъюнкции и дизъюнкции:

$$y = \max(\min(x_1, A + B - x_2), \min(x_2, x_3)). \quad (5)$$

При вычислении значения сигнала y на выходе ЦУ при конкретных значениях нечетких переменных x_1, x_2, x_3 , являющихся вещественными числами, применяются стандартные правила арифметики вещественных чисел для нахождения максимума и минимума. Результат этих вычислений есть нечеткое вещественное число. Описанные действия применительно к предлагаемой нами процедуре моделирования эквивалентны действию блоков фазификации и вывода типовой структуры нечеткой модели.

Следующий этап предлагаемой процедуры эквивалентен блоку дефазификации типовой структуры нечеткой модели. Сформулируем теперь предлагаемые нами правила, по которым нечеткое значение выхода ЦУ, полученное на предыдущем этапе при вычислении по формуле типа (5), преобразуется в четкое значение (0 или 1).

Предварительно введем следующие обозначения: $\Delta(0) = [0.0; 1.0]$ — диапазон значений сигнала, воспринимаемого как «примерно 0»; $\Delta(1) = [1.7; 5.0]$ — диапазон значений сигнала, воспринимаемого как «примерно 1».

Прокомментируем эти диапазоны. Если нечеткое значение выхода ЦУ $y \in [0.0; 0.8]$, то оно воспринимается как четкий 0, если же $y \in [0.8 + \varepsilon; 1.0]$, где $0 < \varepsilon < 0.2$, то по графику функции принадлежности определяется его степень $\mu(y)$ принадлежности сигналу «примерно 0». Аналогичная ситуация имеет место и для диапазона $\Delta(1)$. Если нечеткое значение выхода ЦУ $y \in [2.0; 5.0]$, то оно воспринимается как четкая 1, если же $y \in [2.0 - \delta; 5.0]$, где $0 < \delta < 0.3$, то по графику функции принадлежности определяется его степень $\mu(y)$ принадлежности сигналу «примерно 1».

Будем предполагать, что экспертами-технологами в сфере производства ЦУ названы и обоснованы два значения $\mu^*(y)$ и $\bar{\mu}(y)$ из диапазона $[0; 1]$, являющиеся пороговыми значениями степени принадлежности сигналам соответственно «примерно 0» и «примерно 1». Это означает, если сигнал $y \in \Delta(0)$ ($y \in \Delta(1)$) со степенью принадлежности $\mu(y)$, где $\mu(y) < \mu^*(y)$ ($\mu(y) < \bar{\mu}(y)$), то этот сигнал будет восприниматься как некорректный, в противном случае — как 0 (как 1).

Отметим, что экспертные оценки, аналогичные упомянутым выше, необходимы и для назначения правой (левой) границы отрезка $\Delta(0)$ ($\Delta(1)$).

В терминах этих обозначений сформулируем правила, по которым нечеткое значение на выходе ЦУ, полученное по формуле типа (5), будет преобразовано в четкое значение (0 или 1).

1. Если нечеткое значение y выхода ЦУ превышает пределы диапазона $\Delta(0)$ ($\Delta(1)$) и $y < C$ ($y > C$), где C — пороговое значение сигнала, то этот сигнал считается некорректным, т.е. не воспринимаемым ни как 0, ни как 1.

2. Пусть нечеткое значение выхода ЦУ $y \in [0.0; 1.0]$ и пусть степень его принадлежности сигналу «примерно 0», определяемая по графику (см. рисунок), равно $\mu(y)$. Если $\mu(y) \geq \mu^*(y)$, то четкое значение сигнала y полагается равным 0, в противном случае этот сигнал считается некорректным.

3. Пусть нечеткое значение выхода ЦУ $y \in [1.7; 5.0]$ и пусть степень его принадлежности сигналу «примерно 1», определяемое по графику (см. рисунок), равна $\mu(y)$. Если $\mu(y) \geq \bar{\mu}(y)$, то четкое значение сигнала y полагается равным 1, в противном случае этот сигнал считается некорректным.

Фигурирующие в приведенных правилах величины $\mu^*(y)$ и $\bar{\mu}(y)$ — это своего рода пороговые степени принадлежности нечеткого выходного сигнала ЦУ, которые служат для отделения корректных



сигналов от некорректных. Отметим, что конкретные значения этих величин диктуются спецификой различных технологий изготовления микросхем. Аналогичные соображения имеют место при назначении правой (левой) границы диапазона $\Delta(0)$ ($\Delta(1)$).

Сравнение описанной нами процедуры нечеткого логического моделирования ЦУ с типовой структурой нечеткой модели, представленной в [12], позволяет сделать вывод о существенно меньшей трудоемкости процедуры, предложенной нами. Действительно, в нашей процедуре отсутствуют блоки фазификации и вывода, тогда как последний блок в типовой модели представляет собой наиболее трудоемкую ее часть. Кроме того, преобразование нечеткого значения выходного сигнала в четкое выполняется по предельно простым правилам в отличие от трудоемких преобразований, необходимых в типовой структурной модели.

Известно, что в общем случае адекватность разрабатываемых алгоритмов нечеткого моделирования в поле вещественных чисел и трудоемкость их реализации на основе структурной типовой модели зависит от многих факторов [12]. К их числу относятся формы представления нечетких чисел, определения арифметических операций над ними, выбор способов дефазификации и т.д. В нашей процедуре все эти факторы либо вообще отсутствуют, либо предельно упрощаются.

Качество алгоритмов нечеткого моделирования вполне естественно оценивать по соотношению числа правильных и неправильных результатов, получаемого путем сравнения реальных выходов ЦУ с вычисленными по оцениваемым алгоритмам в процессе проводимых численных или натуральных экспериментов. Понятно, что от любого такого алгоритма невозможно требовать, чтобы на любых входных данных он всегда давал правильный результат, поскольку он оперирует с нечеткими данными. Для описанного в статье алгоритма нечеткого логического моделирования ЦУ, как нетрудно убедиться с помощью простых рассуждений и вычислений, для всех входных наборов, когда сигналы 0 и 1 представлены их заявленными по технологии диапазонами напряжений, получаются правильные результаты. Вместе с тем на аномальных входных воздействиях, когда они находятся вне пределов их заданных по технологии диапазонов, гарантии получения только правильных результатов отсутствуют. Понятно, что соотношение числа верных и неверных результатов, получаемых при нечетком логическом моделировании по предложенной процедуре, в общем случае зависит от используемой конкретной математической модели и технологии изготовления ЦУ. По-видимому, любые статистические данные для оценки упомянутого соотношения вряд ли могут служить основанием для «глобальных» оценок качества алгоритмов, а скорее будут «привязаны» к конкретным ЦУ и носить локальный характер. Поэтому в статье какие-либо данные такого характера не приводятся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложена процедура нечеткого логического моделирования ЦУ, основанная на применении математического аппарата непрерывной логики для переменных из ограниченного множества вещественных чисел. Показано, что эта процедура по сравнению с процедурой, базирующейся на использовании известной типовой структуры нечеткой модели ЦУ, значительно менее трудоемка.

Библиографический список

1. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Inf. Control. 1965. № 8. P. 338–353.
2. Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers, on overview // Analysis of fuzzy information : Mathematics and logic. Boca Raton, FL : CRC Press, 1988. P. 3–39.
3. Kandel A. Fuzzy Mathematical Techniques with Applications. Boston, MA, USA : Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1986. 274 p.
4. Kaufman A., Gupta M. M. Introduction to fuzzy arithmetic theory and applications. N.Y. : Van Nostrand Reinhold Co., 1991. 351 p.
5. Hanss M. Applied fuzzy arithmetic: Introduction with engineering applications. Berlin ; Heidelberg : Springer Publ. Co., Inc., 2010. 274 p.
6. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов. 2-е изд. М. : Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 384 с.
7. Скобцов Ю. А., Сперанский Д. В., Скобцов В. Ю. Моделирование, тестирование и диагностика цифровых устройств. М. : Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2012. 439 с.
8. Закревский А. Д., Поттосин Ю. В., Черемисинова Л. Д. Логические основы проектирования дискретных устройств. М. : Физматлит, 2007. 590 с.
9. Левин В. И. Динамика логических устройств и систем. М. : Энергия, 1980. 224 с.
10. Левин В. И. Бесконечнозначная логика в задачах кибернетики. М. : Радио и связь, 1982. 176 с.



11. Гинзбург С. А. Математическая непрерывная логика и изображение функций. М. : Энергия, 1968. 136 с.
12. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление : пер. с англ. 2-е изд. М. : БИНОМ ; Лаборатория знаний, 2013. 798 с.

An Approach to Fuzzy Modeling of Digital Devices

D. V. Speranskiy

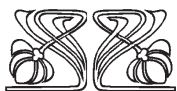
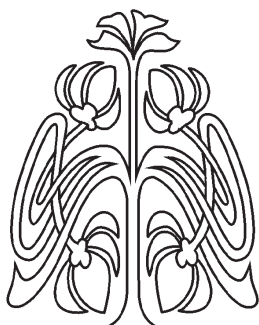
Speranskiy Dmitriy Vasilievich, Moscow University of Railway Engineering, 22/2, Chasovaja st., Moscow, Russia, 125993, Speranskiy.dv@gmail.com

In the article the problem of fuzzy binary logic modeling for digital devices (DD) is investigated. In contrast to the similar classic problem of logical simulation, it is assumed that inputs signals of DD are fuzzy signals. In the real of DD for each input (0 or 1) there is a certain voltage range. If an input signal is out of the range, the correct signal identification is not guaranteed. The fuzziness of input signals means that there observed values can be either within of the defined range, or out of it. It is known that the logic modeling of every DD is the calculation of value of the certain logical expression. This expression is a mathematical model of DD. Also, the corresponding expression can be always represented in the terms of three logic operations, namely, AND, OR, and NOT. In article, a method of reducing the investigated problem to the problem of fuzzy modeling systems in the space of real numbers is proposed. The method is based on the presentation of logical expression using the infinite-valued (continuous) logic. The calculations in this logic are reduced to the evaluation of the expression in the space of real numbers. The proposed procedure in article is much less labor intensive than the previously known procedure for fuzzy modeling using fuzzy arithmetic in the space of real numbers.

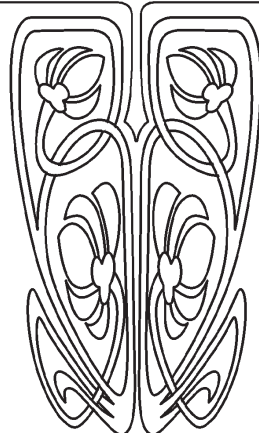
Key words: continuous logic, digital devices, fuzzy logic modeling.

References

1. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Inf. Control*, 1965, no. 8, pp. 338–353.
2. Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers, on overview. *Analysis of fuzzy information : Mathematics and logic*. Boca Raton, FL, CRC Press, 1988, pp. 3–39.
3. Kandel A. *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*. Boston, MA, USA, Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1986, 274 p.
4. Kaufman A., Gupta M. M. *Introduction to fuzzy arithmetic theory and applications*. New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1991, 351 p.
5. Hanss M. *Applied fuzzy arithmetic : Introduction with engineering applications*. Berlin ; Heidelberg, Springer Publishing Co., Inc., 2010, 274 p.
6. Yablonskiy S. V. *Voedenie v diskretnuyu matematiku* [Introduction to discrete mathematics]. Moscow, Nauka, 1986, 384 p. (in Russian).
7. Skobtsov Yu. A., Speranskiy D. V., Skobtsov V. Yu. *Modelirovanie, testirovanie i diagnostika tsifrovyykh ustroystv* [Modeling, testing and diagnostics of digital devices]. Moscow, National Public University "INTUIT" Publ., 2012, 439 p. (in Russian).
8. Zakrevskiy A. D., Pottosin Yu. V., Cheremisinova L. D. *Logicheskie osnovy proektirovaniya diskretnyykh ustroystv* [Logic design principles of discrete devices]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 590 p. (in Russian).
9. Levin V. I. *Dinamika logicheskikh ustroystv i sistem* [The Dynamics of Logic Units and Systems]. Moscow, Energiya, 1980, 224 p. (in Russian).
10. Levin V. I. *Beskonechnoznachnaya logika v zadachah kibernetiki* [Infinite-Valued Logic in Problems of Cybernetics]. Moscow, Radio i Svyaz', 1982, 176 p. (in Russian).
11. Ginzburg S. A. *Matematicheskaya nepreryonnaya logika i izobrazheniye funktsiy* [Mathematical continuous logic and the representation of functions]. Moscow, Energiya, 1968, 136 p. (in Russian).
12. Piegat A. *Fuzzy Modeling and Control*. Springer Science & Business Media, 2001, 728 p. (Rus. ed. : Piegat A. Nечеткое моделирование и управление. Moscow, BINOM, Laboratoriya znaniy Publ., 2013, 798 p.)



ПОДПИСКА



Подписка на II полугодие 2016 года

Индекс издания по объединенному каталогу «Пресса России» 36017.
Журнал выходит 4 раза в год.

Цена свободная.

Оформить подписку онлайн можно
в Интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.akc.ru).

По всем вопросам обращаться в редакцию журнала:
410012, Саратов, Астраханская, 83;
тел. (845-2) 51-45-49, 52-26-89; факс (845-2) 27-85-29;
e-mail: izvestiya@sgu.ru