

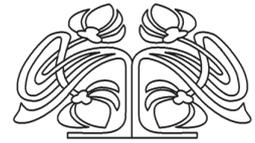


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 3



Научный журнал
2016 Том 16

ISSN 1814-733X

ISSN 1816-9791

Издается с 2001 года

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

- Аль-Джоурани Х. Х. Х., Миронов В. А., Терехин П. А.**
Аффинные системы функций типа Уолша. Полнота и минимальность 247
- Водолазов А. М., Лукомский С. Ф.** Ортогональные системы сдвигов
в поле p -адических чисел 256
- Галаев С. В.** Допустимые гиперкомплексные структуры
на распределениях сасакиевых многообразий 263
- Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г.** Итерационная процедура
построения оптимального решения в минимаксной задаче управления
сингулярно возмущенной системой с запаздыванием
при геометрических ограничениях 272
- Клячин В. А.** О разрешимости дискретного аналога многомерной
задачи Минковского – Александра 281
- Трынин А. Ю.** Необходимые и достаточные условия равномерной
на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации 288
- Хромова Г. В.** Об операторах с разрывной областью значений 298
- Шакиров И. А.** О предельном значении остаточного члена
константы Лебега, соответствующей тригонометрическому полиному
Лагранжа 302
- Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д.** Полиномы, ортогональные
по Соболеву, порожденные многочленами Мейкснера 310
- Шах-Эмиров Т. Н.** О сходимости последовательности операторов
Бернштейна – Канторовича в пространствах Лебега
с переменным показателем 322

Механика

- Блинков Ю. А., Кондратова Ю. Н., Месянжин А. В., Могилевич Л. И.**
Математическое моделирование нелинейных волн в соосных оболочках,
заполненных вязкой жидкостью 331
- Козлов Е. А., Челноков Ю. Н., Панкратов И. А.** Решение задачи
оптимальной коррекции угловых элементов орбиты космического аппарата
с использованием кватернионного уравнения ориентации орбиты 336
- Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э.** Щель переменной ширины
во втулке фрикционной пары 344

Информатика

- Курганский А. Н., Сапунов С. В.** О направленном перемещении
коллектива автоматов без компаса на одномерной целочисленной
решетке 356

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (журнал входит в международную базу данных zbMATH)

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года.
Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Заведующий редакцией
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Степанова Наталия Ивановна

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Ковалева Наталья Владимировна

Корректор
Юдина Инна Геннадиевна

Адрес учредителя и редакции:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: (845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 14.09.16.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 14,41(15,5).
Тираж 500 экз. Заказ 141-Т.

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2016



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: <http://mmi.sgu.ru>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

- Al-Jourany Kh. H. H., Mironov V. A., Terekhin P. A.** Affine System of Walsh Type. Completeness and Minimality 247
- Vodolazov A. M., Lukomskii S. F.** Orthogonal Shift Systems in the Field of p -adic Numbers 256
- Galaev S. V.** Admissible Hypercomplex Structures on Distributions of Sasakian Manifolds 263
- Grebennikova I. V., Kremlev A. G.** Iterative Procedure of Constructing Optimal Solving in the Minimax Problem of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Geometric Constraints 272
- Klyachin V. A.** On the Solvability of the Discrete Analogue of the Minkowski – Alexandrov Problem 281
- Trynin A. Yu.** Necessary and Sufficient Conditions for the Uniform on a Segment Sinc-approximations Functions of Bounded Variation 288
- Khromova G. V.** On Operators with Discontinuous Range 298
- Shakirov I. A.** On a Limit Value of a Remainder of the Lagrange Constant Corresponding to the Lagrange Trigonometrical Polynomial 302
- Sharapudinov I. I., Gadzhieva Z. D.** Sobolev Orthogonal Polynomials, Generated by Meixner Polynomials 310
- Shakh-Emirov T. N.** On Convergence of Bernstein – Kantorovich Operators sequence in Variable Exponent Lebesgue Spaces 322

Mechanics

- Blinkov Yu. A., Kondratova Yu. N., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I.** Nonlinear Waves Mathematical Modeling in Coaxial Shells Filled with Viscous Liquid 331
- Kozlov E. A., Chelnokov Yu. N., Pankratov I. A.** Investigation of the Problem of Optimal Correction of Angular Elements of the Spacecraft Orbit Using Quaternion Differential Equation of Orbit Orientation 336
- Mirsalimov V. M., Akhundova P. E.** Slot of Variable Width in a Hub of Friction Pair 344

Computer Sciences

- Kurganskyy O. M., Sapunov S. V.** On the Directional Movement of a Collective of Automata without a Compass on a One-dimensional Integer Lattice 356



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»**

Главный редактор

Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Короновский Алексей Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)

Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)

Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шамионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»**

Editor-in-Chief – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Koronovskii A. A. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Balash O. S. (Saratov, Russia)

Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)

Danilov V. N. (Saratov, Russia)

Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)

Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Makarov V. Z. (Saratov, Russia)

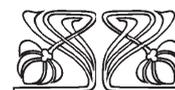
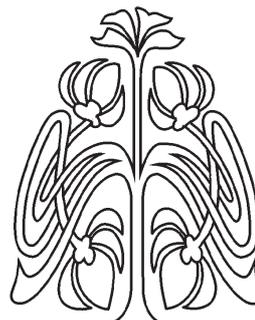
Prozorov V. V. (Saratov, Russia)

Usanov D. A. (Saratov, Russia)

Ustiantsev V. B. (Saratov, Russia)

Shamionov R. M. (Saratov, Russia)

Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**





**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор

(Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Екатеринбург, Россия)

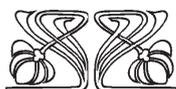
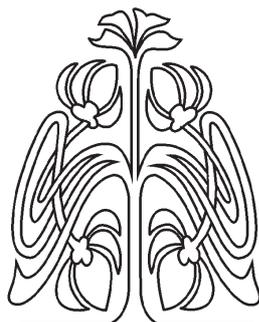
Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

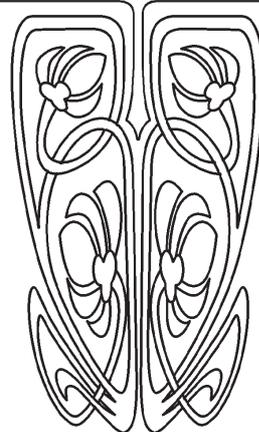
Deputy Editor-in-Chief – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)
Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)
Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)
Indeitsev D. A. (St.-Petersburg, Russia)
Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)
Kovalev V. A. (Moscow, Russia)
Lomakin E. V. (Moscow, Russia)
Manzhirou A. V. (Moscow, Russia)
Matveenko V. P. (Perm, Russia)
Morozov N. F. (St.-Petersburg, Russia)
Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)

Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)
Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)
Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)
Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)
Speranskii D. V. (Moscow, Russia)
Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)
Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)
Khromov A. P. (Saratov, Russia)
Shalyto A. A. (St.-Petersburg, Russia)
Shashkin A. I. (Voronezh, Russia)
Yurko V. A. (Saratov, Russia)





МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ТИПА УОЛША. ПОЛНОТА И МИНИМАЛЬНОСТЬ

Х. Х. Х. Аль-Джоурани¹, В. А. Миронов², П. А. Терехин³

¹Аль-Джоурани Халид Хади Хамид, лектор факультета математики, университет Диала, Ирак, hadi_hameed@ymail.com

²Миронов Вячеслав Александрович, аспирант кафедры теории функций и приближений, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, v.a.mironoff@gmail.com

³Терехин Павел Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и приближений, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, terekhinpa@mail.ru

Рассматривается вопрос о полноте и минимальности аффинных систем функций типа Уолша. На основе функционально-аналитической структуры мультисдвига в гильбертовом пространстве, являющейся обобщенным аналогом оператора (простого, одностороннего) сдвига и тесно связанной с представлениями C^* -алгебры Кунца, дано определение аффинной системы функций типа Уолша. Приведены различные критерии и признаки полноты аффинных систем функций. Установлена минимальность аффинной системы. Указан явный вид биортогонально сопряженной системы функций и установлена ее полнота.

Ключевые слова: система Уолша, аффинная система, полнота, минимальность, оператор сдвига, структура мультисдвига.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-247-256

1. АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ И СТРУКТУРА МУЛЬТИСДВИГА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение 1. Пусть H — гильбертово пространство и $W_0, W_1 : H \rightarrow H$ — изометрические операторы, действующие в пространстве H . Будем говорить, что пара изометрий W_0 и W_1 *определяет структуру мультисдвига*, если существует вектор $e \in H$ такой, что семейство

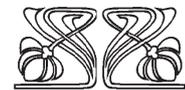
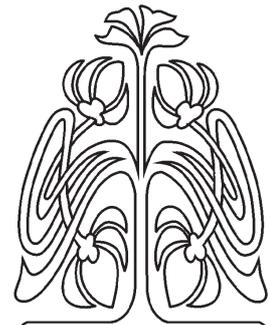
$$W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}} e, \quad \alpha_\nu \in \{0, 1\}, \quad 0 \leq \nu \leq k-1, \quad k \geq 0,$$

образует ортонормированный базис пространства H .

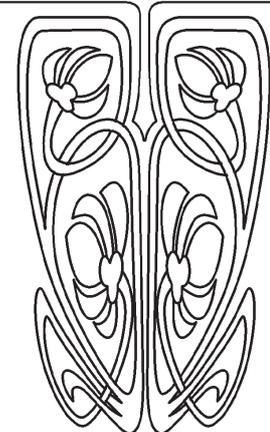
Понятие мультисдвига введено и изучено в работах [1–3]. Рассмотрим пример структуры мультисдвига в гильбертовом пространстве $H = L_0^2(0, 1)$, состоящем из всех 1-периодических функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, таких, что $f \in L^2(0, 1)$ и $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Именно для $f \in L_0^2(0, 1)$ положим

$$W_0 f(x) = f(2x), \quad W_1 f(x) = r(x) f(2x),$$

где $r(x) = 1$ при $x \in [m, m+1/2)$ и $r(x) = -1$ при $x \in [m+1/2, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$, — периодическая функция Хаара – Радемахера – Уолша.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Теорема 1. *Операторы W_0 и W_1 изометрические, их образы ортогональны. Пространство $H = L_0^2(0, 1)$ разлагается в прямую ортогональную сумму*

$$H = R \oplus W_0H \oplus W_1H,$$

где $R = \text{Span} [r]$ — одномерное подпространство, натянутое на функцию r .

Доказательство. Во-первых, поскольку $|r(x)| = 1$, то при $i \in \{0, 1\}$ имеем:

$$\|W_i f\|^2 = \int_0^1 |r^i(x)f(2x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 |f(x)|^2 dx = \|f\|^2.$$

Далее, для любых функций f и g получим:

$$(W_0 f, W_1 g) = \int_0^1 r(x)f(2x)\overline{g(2x)} dx = \int_0^{1/2} f(2x)\overline{g(2x)} dx - \int_{1/2}^1 f(2x)\overline{g(2x)} dx = 0,$$

что означает ортогональность образов операторов W_0 и W_1 . Теперь заметим, что пространство $H = L_0^2(0, 1)$ инвариантно относительно операторов W_0 и W_1 . В самом деле, при $i \in \{0, 1\}$ для любой функции $f \in L_0^2(0, 1)$ находим

$$\begin{aligned} \int_0^1 W_i f(x) dx &= \int_0^1 r^i(x)f(2x) dx = \int_0^{1/2} f(2x) dx + (-1)^i \int_{1/2}^1 f(2x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx + \frac{(-1)^i}{2} \int_1^2 f(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Далее, функция r ортогональна образам W_0H и W_1H , так как

$$(W_i f, r) = \int_0^1 r^i(x)f(2x)r(x) dx = \int_0^{1/2} f(2x) dx - (-1)^i \int_{1/2}^1 f(2x) dx = 0.$$

Наконец, пусть некоторая функция $h \in H$ ортогональна образам W_0H и W_1H , т. е. $(h, W_i f) = 0$ для всех $f \in H$, $i \in \{0, 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 h(x)r^i(x)\overline{f(2x)} dx = \int_0^{1/2} h(x)\overline{f(2x)} dx + (-1)^i \int_{1/2}^1 h(x)\overline{f(2x)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (h(\frac{x}{2}) + (-1)^i h(\frac{x+1}{2}))\overline{f(x)} dx. \end{aligned}$$

Это означает, что функция $h(\frac{x}{2}) + (-1)^i h(\frac{x+1}{2})$ ортогональна произвольной функции $f \in L_0^2(0, 1)$ и поэтому является тождественной постоянной на интервале $(0, 1)$. Так как $i \in \{0, 1\}$ также произвольно, то функции $h(\frac{x}{2})$ и $h(\frac{x+1}{2})$ являются тождественными постоянными на интервале $(0, 1)$. Таким образом, $h(x) \equiv c_0$ при $0 < x < \frac{1}{2}$ и $h(x) \equiv c_1$ при $\frac{1}{2} < x < 1$. Так как $\int_0^1 h(x) dx = 0$, то $h(x) = c_0 r(x)$, т. е. $h \in R = \text{Span} [r]$. Следовательно, одномерное подпространство R совпадает с ортогональным дополнением суммы $W_0H \oplus W_1H$ в пространстве H . Теорема 1 доказана. \square

Утверждения теоремы 1 можно записать в операторном виде:

$$W_i^* W_j = \delta_{ij} I, \quad W_0 W_0^* + W_1 W_1^* = I - P,$$

где P — оператор ортогонального проектирования на одномерное подпространство $R = \text{Span} [r]$. Действительно, для любых $f, g \in H$ и $i, j \in \{0, 1\}$ имеем

$$(f, W_i^* W_j g) = (W_i f, W_j g) = \delta_{ij} (f, g) = (f, \delta_{ij} I g)$$

в силу изометричности операторов W_0 и W_1 и ортогональности их образов. Оператор $P_i = W_i W_i^*$ является оператором ортогонального проектирования на образ изометрии $W_i H$, поскольку

$$P_i^2 = W_i W_i^* W_i W_i^* = W_i I W_i^* = P_i, \quad P_i^* = (W_i W_i^*)^* = W_i W_i^* = P_i,$$



т. е. $P_i : H \rightarrow H$ — ортопроектор и

$$P_i H = W_i W_i^* H \subset W_i H, \quad W_i H = W_i I H = W_i W_i^* W_i H = P_i W_i H \subset P_i H,$$

т. е. $P_i H = W_i H$. Осталось заметить, что

$$(P + P_0 + P_1)H = R \oplus W_0 H \oplus W_1 H = H,$$

т. е. $P + P_0 + P_1 = I$. Следует отметить, что расширения операторов W_0 и W_1 на пространство $L^2(0, 1)$ периодических функций $f(x)$, определяемые равенствами

$$V_0 f(x) = f(2x), \quad V_1 f(x) = r(x)f(2x),$$

являются представлением алгебры Кунца \mathcal{O}_2 , что означает выполнение соотношений

$$V_i^* V_j = \delta_{ij} I, \quad V_0 V_0^* + V_1 V_1^* = I.$$

Таким образом, операторная структура мультисдвига $\{W_0, W_1\}$ является сужением на подпространство $L_0^2(0, 1)$ представления $\{V_0, V_1\}$ в пространстве $L^2(0, 1)$ банаховой C^* -алгебры Кунца \mathcal{O}_2 .

Обозначим $\mathbb{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0, 1\}^k$ — множество всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$, состоящих из нулей и единиц: $\alpha_\nu \in \{0, 1\}$, $0 \leq \nu \leq k-1$. Положим $|\alpha| = k$ — длина мультииндекса $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A}$ (при $k = 0$ длину пустого мультииндекса полагаем равной нулю). Пусть далее $\alpha\beta = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \dots, \beta_{l-1})$ — конкатенация мультииндексов $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ и $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{l-1})$.

Имеется естественное взаимнооднозначное соответствие между множествами \mathbb{N} и \mathbb{A} , определяемое двоичным разложением $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k$ натурального числа n . При фиксированном $k = 0, 1, \dots$ каждому $n \in [2^k, 2^{k+1})$ соответствует мультииндекс $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ длины $|\alpha| = k$ (в частности, при $k = 0$ имеем $n = 1$ и соответствующий мультииндекс α пустой). В дальнейшем мы часто будем использовать замену индекса n на α и наоборот.

С помощью мультииндекса $\alpha \in \mathbb{A}$ удобно записать произведение операторов

$$W^\alpha = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}}, \quad \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}),$$

— первым действует оператор $W_{\alpha_{k-1}}$, последним — W_{α_0} (при $k = 0$ пустое произведение равно тождественному оператору I). Для функции $f \in L_0^2(0, 1)$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$f_n(x) = f_\alpha(x) = W^\alpha f(x) = r^{\alpha_0}(x) \dots r^{\alpha_{k-1}}(2^{k-1}x) f(2^k x) = f(2^k x) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(x),$$

где $r_k(x) = r(2^k x)$, $k \geq 0$, — функции Радемахера. Кроме того, пусть $f_0(x) \equiv 1$.

Определение 2. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ назовем *аффинной системой функций типа Уолша*, порожденной функцией $f(x)$.

Аффинные системы функций типа Уолша были введены в работе [4] и изучались также в работах [?, 5, 6]. Если в качестве порождающей функции выбрать $w(x) = r(x)$, то система $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ будет классической системой Уолша в нумерации Пэли. Функции Уолша (без постоянной $w_0(x) \equiv 1$)

$$w_n(x) = w_\alpha(x) = W^\alpha w(x) = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}} w(x) = r_k(x) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

образуют ортонормированный базис пространства $H = L_0^2(0, 1)$. Поэтому согласно определению 1 операторы W_0 и W_1 определяют структуру мультисдвига.

Для подпространства $L \subset H$ и мультииндекса $\alpha \in \mathbb{A}$ обозначим $L_\alpha = W^\alpha L$. В частности, $R_\alpha = W^\alpha R = \text{Span}[w_\alpha]$ — одномерное подпространство, натянутое на функцию Уолша w_α . При этом

$$H = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{A}} R_\alpha.$$

Всюду далее соотношение $L \ominus L' = L''$ означает, что $L = L' \oplus L''$.



Теорема 2. Для каждого $k \geq 0$ справедливо представление

$$H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha| < k} R_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha|=k} H_\alpha.$$

Доказательство. Сразу заметим, что при $k = 0$ представление $H \ominus \{0\} = H$ тривиально. Далее рассуждаем по индукции. При $k = 1$ по теореме 1 выполняется представление $H \ominus R = W_0H \oplus W_1H$. Предположим, что искомое представление уже доказано при некотором $k \geq 1$. Подействуем на представление изометриями W_0 и W_1 , получим:

$$W_0H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha| < k} W_0R_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha|=k} W_0H_\alpha, \quad W_1H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha| < k} W_1R_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha|=k} W_1H_\alpha.$$

Отсюда с учетом ортогональности образов W_0H и W_1H находим

$$(W_0H \oplus W_1H) \ominus \left(\bigoplus_{0 < |\alpha| < k+1} R_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha|=k+1} H_\alpha$$

и по теореме 1 окончательно будем иметь

$$H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha| < k+1} R_\alpha \right) = (R \oplus W_0H \oplus W_1H) \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha| < k+1} R_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha|=k+1} H_\alpha.$$

Получили искомое представление с заменой k на $k + 1$. Теорема 2 доказана. \square

Из теоремы 2 вытекает, что

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{|\alpha|=k} H_\alpha = \{0\}.$$

Действительно, если функция h принадлежит подпространству $\bigoplus_{|\alpha|=k} H_\alpha$ для всех $k \geq 0$, то h ортогональна каждому подпространству R_α , $\alpha \in \mathbb{A}$, и поэтому $h = 0$.

2. ПОЛНОТА АФФИННЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

В этом пункте рассматривается вопрос: при выполнении каких условий на порождающую функцию $f(x)$ аффинная система типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $L^2(0, 1)$?

Сразу заметим, что поскольку $f_0(x) \equiv 1$, то полнота системы $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в $L^2(0, 1)$ равносильна полноте системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ в $H = L^2_0(0, 1)$. Обозначим

$$M(f) = \overline{\text{Span}}[f_\alpha]_{\alpha \in \mathbb{A}} \subset H$$

— замыкание линейной оболочки аффинной системы (без единичной постоянной).

Начнем со следующего простого критерия полноты аффинной системы.

Теорема 3. Для полноты аффинной системы функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ необходимо и достаточно выполнения условия $r \in M(f)$.

Доказательство. Условие $r \in M(f)$ необходимо, так как полнота аффинной системы означает, что $M(f) = H$. Обратное, пусть выполнено условие $r \in M(f)$. Заметим, что подпространство $M(f) \subset H$ инвариантно относительно мультисдвига, т. е. $W_0M(f) \subset M(f)$ и $W_1M(f) \subset M(f)$, откуда $M_\alpha(f) = W^\alpha M(f) \subset M(f)$ для всех $\alpha \in \mathbb{A}$. Видим, что из условия $r \in M(f)$ следует включение $R_\alpha \subset M_\alpha(f) \subset M(f)$. Следовательно, имеем $H = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{A}} R_\alpha \subset M(f)$, так что $M(f) = H$ и аффинная система полна. Теорема 3 доказана. \square

Из теоремы 3 непосредственно вытекает следующее необходимое условие полноты аффинной системы.

Теорема 4. Если аффинная система функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной, то

$$(f, r) = \int_0^{1/2} f(x) dx - \int_{1/2}^1 f(x) dx \neq 0.$$



Доказательство. В противном случае $f \perp R$. Кроме того, при $|\alpha| = k \geq 1$ с учетом теоремы 2 имеем $f_\alpha \in H_\alpha \perp \bigoplus_{|\beta| < k} R_\beta \supset R$. Поэтому $r \perp M(f)$, что противоречит критерию теоремы 3. Теорема 4 доказана. \square

Всюду в дальнейшем полагаем, что функция $f \in L_0^2(0, 1)$ нормирована условием

$$(f, r) = \int_0^{1/2} f(x) dx - \int_{1/2}^1 f(x) dx = 1.$$

Рассмотрим ряд Фурье – Уолша функции f :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n w_n = w + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_\alpha w_\alpha,$$

где $\hat{f}_n = \hat{f}_\alpha = (f, w_n) = (f, w_\alpha)$ – коэффициенты Фурье функции f по системе Уолша $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$, причем $(f, w_0) = 0$ и $(f, w_1) = 1$.

Теорема 5. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} |\hat{f}_\alpha|^2 \right)^{1/2} \leq 1,$$

то аффинная система функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной.

Доказательство. Предположим, что $h \in L_0^2(0, 1)$ и $(h, f_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{A}$. Покажем, что $h = 0$. Для этого подействуем оператором W^β , $\beta \in \mathbb{A}$, на разложение функции f в ряд Фурье – Уолша. Получим:

$$f_\beta = W^\beta f = W^\beta w + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_\alpha W^\beta W^\alpha w = w_\beta + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_\alpha w_{\beta\alpha}.$$

Отсюда находим, что коэффициенты Фурье – Уолша $\hat{h}_\alpha = (h, w_\alpha)$ функции h для всех $\beta \in \mathbb{A}$ удовлетворяют соотношениям

$$(h, f_\beta) = \hat{h}_\beta + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \bar{\hat{f}}_\alpha \hat{h}_{\beta\alpha} = 0.$$

С учетом условия теоремы имеем:

$$|\hat{h}_\beta| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} |\hat{f}_\alpha|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|\alpha|=k} |\hat{h}_{\beta\alpha}|^2 \right)^{1/2} \leq \sup_{k \geq 1} \left(\sum_{|\alpha|=k} |\hat{h}_{\beta\alpha}|^2 \right)^{1/2},$$

откуда

$$\sum_{|\beta|=l} |\hat{h}_\beta|^2 \leq \sup_{k \geq 1} \sum_{|\beta|=l} \sum_{|\alpha|=k} |\hat{h}_{\beta\alpha}|^2 = \sup_{k \geq 1} \sum_{|\gamma|=l+k} |\hat{h}_\gamma|^2.$$

Итерируя последнюю оценку, будем иметь:

$$\sum_{|\beta|=l} |\hat{h}_\beta|^2 \leq \sup_{k_1 \geq 1} \dots \sup_{k_s \geq 1} \sum_{|\gamma|=l+k_1+\dots+k_s} |\hat{h}_\gamma|^2 \rightarrow 0$$

при $s \rightarrow \infty$. Поэтому $\hat{h}_\beta = 0$ для всех $\beta \in \mathbb{A}$, так что $h = 0$. Теорема 5 доказана. \square

Пример 1. Пусть $f = w + \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_\alpha w_\alpha$ при фиксированном $k \geq 1$. Покажем, что условие

$$F = \sum_{|\alpha|=k} |\hat{f}_\alpha|^2 \leq 1$$

необходимо и достаточно для полноты аффинной системы $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Достаточность этого условия прямо следует из доказанной теоремы 5. Докажем необходимость. Предположим противное, а именно пусть $F > 1$. Рассмотрим функцию

$$h = w + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{F^s} \sum_{|\alpha^{(1)}|=k} \dots \sum_{|\alpha^{(s)}|=k} \hat{f}_{\alpha^{(1)}} \dots \hat{f}_{\alpha^{(s)}} w_{\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(s)}}.$$



Здесь $\alpha^{(1)} \dots \alpha^{(s)}$ — конкатенация набора из s мультииндексов $\alpha^{(1)} = (\alpha_0^{(1)}, \dots, \alpha_{k-1}^{(1)})$, ..., $\alpha^{(s)} = (\alpha_0^{(s)}, \dots, \alpha_{k-1}^{(s)})$ длины k и внутренняя s -кратная сумма распространяется на все такие наборы. Функция h определена корректно, так как

$$\|h\|^2 = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{F^{2s}} \sum_{|\alpha^{(1)}|=k} \dots \sum_{|\alpha^{(s)}|=k} |\hat{f}_{\alpha^{(1)}}|^2 \dots |\hat{f}_{\alpha^{(s)}}|^2 = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{F^s}{F^{2s}} < \infty.$$

Далее, вычислим скалярное произведение

$$(h, f_{\beta}) = \hat{h}_{\beta} + \sum_{|\alpha|=k} \bar{\hat{f}}_{\alpha} \hat{h}_{\beta\alpha}.$$

Из определения функции h видим, что $\hat{h}_{\beta} = \hat{h}_{\beta\alpha} = 0$, если $|\beta| \neq ks$ ни при каком $s = 0, 1, \dots$. Пусть поэтому $|\beta| = ks$ для некоторого $s = 0, 1, \dots$. Тогда

$$\hat{h}_{\beta} = \frac{(-1)^s}{F^s} \hat{f}_{\alpha^{(1)}} \dots \hat{f}_{\alpha^{(s)}}, \quad \hat{h}_{\beta\alpha} = \frac{(-1)^{s+1}}{F^{s+1}} \hat{f}_{\alpha^{(1)}} \dots \hat{f}_{\alpha^{(s)}} \hat{f}_{\alpha},$$

где $\beta = \alpha^{(1)} \dots \alpha^{(s)}$ и второе равенство следует из первого после замены индекса s на $s + 1$ с учетом того, что $|\alpha| = k$ и $|\beta\alpha| = k(s + 1)$. Следовательно, имеем:

$$(h, f_{\beta}) = \frac{(-1)^s}{F^s} \hat{f}_{\alpha^{(1)}} \dots \hat{f}_{\alpha^{(s)}} + \sum_{|\alpha|=k} \bar{\hat{f}}_{\alpha} \frac{(-1)^{s+1}}{F^{s+1}} \hat{f}_{\alpha^{(1)}} \dots \hat{f}_{\alpha^{(s)}} \hat{f}_{\alpha} = 0$$

по определению величины $F = \sum_{|\alpha|=k} |\hat{f}_{\alpha}|^2$. Таким образом, получаем $(h, f_{\beta}) = 0$ для всех $\beta \in \mathbb{A}$, что противоречит полноте аффинной системы. \square

Рассмотрим матрицу Грама $G_f = \{(f_i, f_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$ аффинной системы типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. (Поскольку $(f_0, f_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то нулевые строка и столбец исключены из матрицы G_f .) Из теоремы 2 работы [4] непосредственно следует

Теорема 6. Для всякой ненулевой функции $f \in L_0^2(0, 1)$ существует и притом единственная с точностью до унимодулярной постоянной функция $g \in L_0^2(0, 1)$ такая, что аффинная система функций типа Уолша $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной и при этом $G_f = G_g$.

Сформулированная теорема 6 показывает, что произвольная (ненулевая) аффинная система функций типа Уолша допускает пополнение с сохранением структуры аффинной системы, а также жесткости пространственного расположения, которая определяется ее матрицей Грама.

3. МИНИМАЛЬНОСТЬ АФФИННЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

Пусть по-прежнему ряд Фурье – Уолша функции $f \in H = L_0^2(0, 1)$ имеет вид

$$f = w + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_{\alpha} w_{\alpha}.$$

По числовой последовательности $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\hat{f}_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ коэффициентов Фурье – Уолша функции f определим числовую последовательность $\{\hat{f}_n^*\}_{n=1}^{\infty} = \{\hat{f}_{\alpha}^*\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ следующим образом. Положим $\hat{f}_1^* = 1$ и для каждого $n \geq 2$, которому соответствует мультииндекс $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ длины $|\alpha| = k \geq 1$, определим $\hat{f}_n^* = \hat{f}_{\alpha}^* = \hat{f}^*(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ из рекуррентных соотношений:

$$\sum_{\nu=0}^k \hat{f}(\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu-1}) \bar{\hat{f}}^*(\alpha_{\nu}, \dots, \alpha_{k-1}) = 0.$$

Зададим функции $f_n^* = f_{\alpha}^*$ посредством равенств

$$f^*(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) = \sum_{\nu=0}^k \hat{f}^*(\alpha_{\nu}, \dots, \alpha_{k-1}) w(\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu-1}), \quad \alpha \in \mathbb{A}.$$

Кроме того, пусть $f_0^*(x) \equiv 1$.



Теорема 7. Последовательность функций $\{f_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$ образует биортогонально сопряженную систему к аффинной системе функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$.

Доказательство. Функция $f_0 = f_0^* \equiv 1$ ортогональна всем функциям f_n и f_n^* , $n \in \mathbb{N}$. Требуется проверить соотношения $(f_n, f_m^*) = \delta_{nm}$ для $n, m \in \mathbb{N}$. Для этого перейдем от натуральных индексов n и m к мультииндексам $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ и $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{l-1})$. Вычислим

$$(f_\alpha, f_\beta^*) = \sum_{\nu=0}^l (f_\alpha, w(\beta_0, \dots, \beta_{\nu-1})) \bar{f}^*(\beta_\nu, \dots, \beta_{l-1}).$$

Заметим, что в силу результатов п. 1

$$\begin{aligned} (f_\alpha, w(\beta_0, \dots, \beta_{\nu-1})) &= (W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}} f, W_{\beta_0} \dots W_{\beta_{\nu-1}} w) = \\ &= \delta_{\alpha_0 \beta_0} \dots \delta_{\alpha_{k-1} \beta_{k-1}} (f, w(\beta_k, \dots, \beta_{\nu-1})). \end{aligned}$$

Поэтому в том случае, когда $k \leq \nu$ и $\alpha_0 = \beta_0, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, имеем:

$$(f_\alpha, w(\beta_0, \dots, \beta_{\nu-1})) = \hat{f}(\beta_k, \dots, \beta_{\nu-1}).$$

Во всех остальных случаях $(f_\alpha, w(\beta_0, \dots, \beta_{\nu-1})) = 0$. Таким образом, при $k \leq \nu$ и $\alpha_0 = \beta_0, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$ окончательно получим:

$$(f_\alpha, f_\beta^*) = \sum_{\nu=k}^l \hat{f}(\beta_k, \dots, \beta_{\nu-1}) \bar{f}^*(\beta_\nu, \dots, \beta_{l-1}),$$

иначе $(f_\alpha, f_\beta^*) = 0$. Но при $k < l$ последняя сумма снова обращается в нуль, что следует из рекуррентных соотношений, определяющих числа \hat{f}_α^* , в которых мультииндекс α заменен на мультииндекс $(\beta_k, \dots, \beta_{l-1})$ длины $l - k \geq 1$. Наконец, при $k = l$ скалярное произведение (f_α, f_β^*) отлично от нуля лишь в случае $\alpha = \beta$, при этом $(f_\alpha, f_\alpha^*) = \hat{f}(\emptyset) \bar{f}^*(\emptyset) = \hat{f}_1 \bar{f}_1^* = 1$. Теорема 7 доказана. \square

Теорема 8. Биортогонально сопряженная система $\{f_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$ является полной в пространстве $L^2(0, 1)$.

Доказательство. Из определения биортогонально сопряженной системы видим, что каждая функция f_n^* является полиномом по системе Уолша порядка n со старшим коэффициентом равным 1. Отсюда следует ее полнота. \square

Заметим, что теорема 8 справедлива лишь при сделанном нами предположении, что первый коэффициент Фурье – Уолша \hat{f}_1 порождающей функции f аффинной системы отличен от нуля. Можно показать, что аффинная система типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является минимальной для любой ненулевой порождающей функции f , однако явный вид биортогонально сопряженной системы будет отличаться от приведенного выше для случая $\hat{f}_1 = 1$.

Как следует из результатов п. 1 функции аффинной системы имеют вид

$$f_n = \sum_{k=n}^\infty c_{n,k} w_k, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а функции построенной нами биортогонально сопряженной системы имеют вид

$$f_n^* = \sum_{k=1}^n d_{n,k} w_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что совпадение систем $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ и $\{f_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$ происходит в том и только том случае, когда порождающая функция f совпадает с функцией Уолша w с точностью до унимодулярной постоянной. Поэтому аффинная система функций типа Уолша является полной ортонормированной системой тогда и только тогда, когда $f = \varkappa w$, $|\varkappa| = 1$. Тем не менее класс неполных ортонормированных аффинных систем типа Уолша достаточно широк, как показывает следующая теорема (см. [4]).



Теорема 9. Для любой ненулевой функции $f \in L_0^2(0, 1)$ существует и притом единственная с точностью до унимодулярной постоянной функция $\varphi \in L_0^2(0, 1)$ такая, что аффинная система функций типа Уолша $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является ортонормированной и при этом

$$\overline{\text{Span}}\{f_n\}_{n=0}^\infty = \overline{\text{Span}}\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty.$$

Пример 2. Простым примером ортонормированной аффинной системы функций типа Уолша $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ служат аффинные системы, порожденные функциями вида

$$\varphi = \sum_{|\alpha|=k} \hat{\varphi}_\alpha w_\alpha, \quad \sum_{|\alpha|=k} |\hat{\varphi}_\alpha|^2 = 1,$$

при фиксированном $k \geq 0$.

Замечание. Аффинные системы функций типа Уолша по своей структуре подобны аффинным системам (системам сжатий и сдвигов функции) хааровского типа. Последние изучались в работах многих авторов (см., например, [7–13]). Теоремы 5, 7 и 8 данной статьи являются аналогами некоторых результатов, полученных П. А. Терехиным в [14–19].

Работа Х. Х. Х. Аль-Джоурани выполнена при финансовой поддержке Министерства высшего образования и научных исследований Республики Ирак. Работа В. А. Миронова и П. А. Терехина выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К). Работа П. А. Терехина выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Библиографический список

1. Терехин П. А. О представляющих свойствах системы сжатий и сдвигов функции на отрезке // Изв. Тульск. гос. ун-та. Сер. матем., мех., информ. 1998. Т. 4, № 1. С. 136–138.
2. Терехин П. А. О мультипликативной структуре централизатора мультисдвига в гильбертовом пространстве // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 119–122.
3. Терехин П. А. Мультисдвиг в гильбертовом пространстве // Функци. анализ и его прил. 2005. Т. 39, вып. 1. С. 69–81. DOI: 10.4213/faa32.
4. Терехин П. А. Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 395–400.
5. Миронов В. А., Терехин П. А. Минимальность аффинных систем функций типа Уолша // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 41–44.
6. Миронов В. А., Терехин П. А. Тригонометрическая аффинная система типа Уолша // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 37–39.
7. Filippov V. I., Oswald P. Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // J. Approx. Theory. 1995. Vol. 82, № 1. P. 15–29. DOI: 10.1006/jath.1995.1065.
8. Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А. О свойствах орторекурсивных разложений по подпространствам // Тр. МИАН. 2014. Т. 284. С. 138–141. DOI: 10.1134/S0371968514010075.
9. Кудрявцев А. Ю. О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Матем. заметки. 2012. Т. 92, вып. 5. С. 707–720. DOI: 10.4213/mzm8933.
10. Сильниченко А. В. О сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов // Матем. заметки. 2008. Т. 84, вып. 5. С. 795–800. DOI: 10.4213/mzm6365.
11. Sarsenbi A. M., Terexhin P. A. Riesz basicity for general systems of functions // J. Function Spaces. 2014. Vol. 2014. Article ID 860279. P. 1–3. DOI: 10.1155/2014/860279.
12. Терехин П. А. Сжатия и сдвиги функции с ненулевым интегралом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1999. Вып. 1. С. 67–68.
13. Терехин П. А. Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Матем. 1999. № 8. С. 74–81.
14. Терехин П. А. Базисы Рисса, порожденные сжатиями и сдвигами функции на отрезке // Матем. заметки. 2002. Т. 72, вып. 4. С. 547–560. DOI: 10.4213/mzm444.
15. Терехин П. А. К вопросу о возмущениях системы Хаара // Матем. заметки. 2004. Т. 75, вып. 3. С. 466–469. DOI: 10.4213/mzm553.
16. Терехин П. А. О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в



- пространства $L^p[0, 1]$ // Матем. заметки. 2008. Т. 83, вып. 5. С. 722–740. DOI: 10.4213/mzm4046.
17. Терехин П. А. О компонентах суммируемых функций по элементам семейств функций-всплесков // Изв. вузов. Матем. 2008. № 2. С. 53–59.
18. Терехин П. А. Линейные алгоритмы аффинного синтеза в пространстве Лебега $L^1[0, 1]$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, вып. 5. С. 115–144. DOI: 10.4213/im3562.
19. Терехин П. А. О наилучшем приближении функций в метрике L_p полиномами по аффинной системе // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 2. С. 131–158. DOI: 10.4213/sm7630.

Образец для цитирования:

Аль-Джурани Х. Х. Х., Миронов В. А., Терехин П. А. Аффинные системы функций типа Уолша. Полнота и минимальность // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 247–256. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-247-256.

Affine System of Walsh Type. Completeness and Minimality

Kh. H. H. Al-Jourany¹, V. A. Mironov², P. A. Terekhin³

¹Khalid H. H. Al-Jourany, University of Diyala, Baquba, Diyala Province, Iraq, hadi_hameed@ymail.com

²Vyacheslav A. Mironov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, v.a.mironoff@gmail.com

³Pavel A. Terekhin, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, terekhinpa@mail.ru

The question on completeness and minimality of Walsh affine systems is considered. On the basis of functional-analytical structure of multishift in Hilbert space, which being the generalized analogue of the operator of simple one-side shift and closely connected with Cuntz algebra representations, we give definition of Walsh affine system. Various criteria and tests of completeness of affine systems of functions are established. A biorthogonal conjugate system is found and its completeness is proved.

Key words: Walsh functions, affine system, completeness, minimality, shift operator, multishift structure.

This work of Kh. H. H. Al-Jourany was supported by the Iraq Ministry of High Education and Scientific Research. This work of V. A. Mironov and P. A. Terekhin were supported by the Russian Ministry of Science and Education (projects no. 1.1520.2014/K). This work of P. A. Terekhin was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00152).

References

1. Terekhin P. A. On representation properties of a system of contractions and shifts of functions on an interval. *Izv. Tul'sk. Gos. Univ., Ser. Matem., Mekh., Inform.*, 1998, vol. 4, no. 1, pp. 136–138 (in Russian).
2. Terekhin P. A. On the multiplicative structure of the centralizer of a multishift on a Hilbert space. *Mathematics. Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2000, iss. 2, pp. 119–122 (in Russian).
3. Terekhin P. A. Multishifts in Hilbert spaces. *Funct. Anal. Appl.*, 2005, vol. 39, no. 1, pp. 57–67. DOI: 10.1007/s10688-005-0017-5.
4. Terekhin P. A. Affine Systems of Walsh Type. Orthogonalization and Completion. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 1, pp. 395–400 (in Russian).
5. Mironov V. A., Terekhin P. A. Minimality of an affine systems of Walsh type. *Mathematics. Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2014, iss. 16, pp. 41–44 (in Russian).
6. Mironov V. A., Terekhin P. A. Trigonometric affine system of Walsh type. *Mathematics. Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2015, iss. 17, pp. 37–39 (in Russian).
7. Filippov V. I., Oswald P. Representation in L_p by series of translates and dilates of one function. *J. Approx. Theory*, 1995, vol. 82, no. 1, pp. 15–29. DOI: 10.1006/jath.1995.1065.
8. Galatenko V. V., Lukashenko T. P., Sadovnichii V. A. On the properties of orthorecursive expansions with respect to subspaces. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, pp. 129–132. DOI: 10.1134/S0081543814010076.
9. Kudryavtsev A. Yu. On the convergence of orthorecursive expansions in nonorthogonal wavelets. *Math. Notes*, 2012, vol. 92, iss. 5, pp. 643–656. DOI: 10.1134/S0001434612110077.
10. Sil'nichenko A. V. On the convergence of order-preserving weak greedy algorithms. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, iss. 5, pp. 741–747. DOI: 10.1134/S0001434608110187.
11. Sarsenbi A. M., Terekhin P. A. Riesz basicity for general systems of functions. *J. Function Spaces*, 2014, vol. 2014, article ID 860279, pp. 1–3. DOI: 10.1155/2014/860279.



12. Terekhin P. A. Translates and dilates of function with nonzero integral. *Mathematics. Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 1999, iss. 1, pp. 67–68 (in Russian).
13. Terekhin P. A. Inequalities for the components of summable functions and their representations by elements of a system of contractions and shifts. *Russian Math.*, 1999, vol. 43, no. 8, pp. 70–77.
14. Terekhin P. A. Riesz bases generated by contractions and translations of a function on an interval. *Math. Notes*, 2002, vol. 72, iss. 4, pp. 505–518. DOI: 10.1023/A:1020536412809.
15. Terekhin P. A. On perturbations of the Haar system. *Math. Notes*, 2004, vol. 75, iss. 3, pp. 466–469. DOI: 10.1023/B:MATN.0000023325.89390.66.
16. Terekhin P. A. Convergence of biorthogonal series in the system of contractions and translations of functions in the spaces $L^p[0, 1]$. *Math. Notes*, 2008, vol. 83, iss. 5, pp. 722–740. DOI: 10.1134/S000143460805009X.
17. Terekhin P. A. On the components of summable functions represented by elements of families of wavelet functions. *Russian Math.*, 2008, vol. 52, no. 2, pp. 51–57. DOI: 10.1007/s11982-008-2008-3.
18. Terekhin P. A. Linear algorithms of affine synthesis in the Lebesgue space $L^1[0, 1]$. *Izv. Math.*, 2010, vol. 74, iss. 5, pp. 993–1022. DOI: 10.1070/IM2010v074n05ABEH002513.
19. Terekhin P. A. Best approximation of functions in L^p by polynomials on affine system. *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 2, pp. 279–306. DOI: 10.1070/SM2011v202n02ABEH004146.

Please cite this article in press as:

Al-Jourany Kh. H. H., Mironov V. A., Terekhin P. A. Affine System of Walsh Type. Completeness and Minimality. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 247–256 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-247-256.

УДК 517.51

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СДВИГОВ В ПОЛЕ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

А. М. Водолазов¹, С. Ф. Лукомский²

¹Водолазов Александр Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, vam21@yandex.ru

²Лукомский Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, LukomskiiSF@nfo.sgu.ru

В 2010 г. S. Albeverio, С. Евдокимов и М. Скопина доказали, что если система сдвигов $(\varphi(x-h))$ ступенчатой функции φ ортонормирована, функция φ порождает ортогональный p -адический кратно масштабный анализ (КМА), то носитель ее преобразования Фурье лежит в единичном шаре. Мы доказываем, что в некоторых случаях требование « φ порождает КМА» можно опустить. В общем случае мы указываем количество линейно независимых ступенчатых функций, сдвиги которых образуют ортонормированную систему.

Ключевые слова: ортогональные системы сдвигов, поле p -адических чисел, p -адический КМА.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-256-262

ВВЕДЕНИЕ

Первые примеры вейвлетов на нуль-мерных группах принадлежат В. Ленгу [1–3] и относятся к случаю двоичной группы Кантора. Начиная с этого момента можно выделить две группы работ. С одной стороны, начались исследования кратно масштабного и вейвлет-анализа на группах Виленкина [4–7], с другой стороны — на полях p -адических чисел \mathbb{Q}_p . Оказалось, что эти две теории существенно отличаются. В случае групп Виленкина при любых натуральных M, N можно построить ступенчатую ортогональную масштабирующую функцию φ , порождающую кратно масштабный анализ (КМА), которая постоянна на смежных классах по подгруппе G_M и имеет носитель $\text{supp } \varphi \subset G_{-N}$, где (G_n) — основная цепочка подгрупп, порождающая топологию [7]. Для групп p -адических чисел ситуация иная. Если ступенчатая ортогональная масштабирующая функция φ , порождающая КМА,



имеет носитель $\text{supp } \varphi \subset G_{-N}$ и постоянна на смежных классах по подгруппе G_M , то $M = 0$ [8, 9]. Оказывается, что в некоторых случаях в последнем утверждении можно не требовать, чтобы φ была масштабирующей и порождала КМА. Достаточно потребовать, чтобы система сдвигов $\varphi(x-h)$ была ортонормированной и выполнялось условие $|\hat{\varphi}(G_N^\perp)| = 1$. Доказательству этого утверждения и посвящена настоящая статья.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть p — простое, G — локально компактная нуль-мерная группа с основной цепочкой подгрупп $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $(G_n/G_{n+1})^\# = p$, базисной последовательностью $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. Последнее означает, что любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде суммы ряда

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n g_n, \quad x_n = \overline{0, p-1},$$

в котором количество слагаемых с отрицательными номерами конечно. отображение

$$\lambda(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n p^n, \quad x_n = \overline{0, p-1}$$

переводит группу G в полупрямую $[0, +\infty)$. Его обычно называют отображением Монна. Пусть (g_n) удовлетворяют условиям $pg_n = g_{n+1}$. Группа с таким условием называется группой p -адических чисел. Она есть аддитивная группа поля \mathbb{Q}_p всех p -адических чисел, т. е. $G = \mathbb{Q}_p^+$. Конкретной реализацией такой группы является совокупность бесконечных в обе стороны последовательностей $x = (\dots, 0, x_k, x_{k+1}, \dots)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x_l = 0$ при $l < k$ и $x_l = \overline{0, p-1}$. Операция сложения в такой группе определяется покоординатно по модулю p с переносом единицы, возникающей при переполнении, в следующий разряд направо. Основная цепочка в этом случае состоит из подгрупп

$$G_n = \{x = (\dots, 0, x_n, x_{n+1}, \dots) : x_l = \overline{0, p-1}\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В качестве g_n удобно выбирать элементы $g_n = (\dots, 0, 1_n, 0_{n+1}, \dots)$. Обозначим

$$H_0 = \{h = a_{-1}g_{-1} + a_{-1}g_{-2} + \dots + a_{-s}g_{-s} : s \in \mathbb{N}\},$$

$$H_0^{(N)} = \{h = a_{-1}g_{-1} + a_{-1}g_{-2} + \dots + a_{-N}g_{-N}\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Множество H_0 есть множество сдвигов, так как при отображении Монна оно переходит в множество целых неотрицательных чисел.

Через X будем обозначать множество характеров группы G , через G_n^\perp — аннуляторы подгрупп G_n . Совокупность аннуляторов $(G_n^\perp)_{n \in \mathbb{Z}}$ образуют возрастающую последовательность:

$$G_n^\perp \subset G_{n+1}^\perp, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G_n^\perp = 1, \quad (G_{n+1}^\perp/G_n^\perp)^\# = p, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} G_n^\perp = X.$$

При каждом $k \in \mathbb{Z}$ выбираем характеры $r_k \in (G_{k+1}^\perp \setminus G_k^\perp)$ и фиксируем их. Характеры r_k называют функциями Радемахера. Любой характер $\chi \in X$ однозначно представим в виде произведения

$$\chi = \prod_{k \in \mathbb{Z}} r_k^{\alpha_k} = \prod_{k=-\infty}^m r_k^{\alpha_k}, \quad \alpha_k = \overline{0, p-1},$$

в котором лишь конечное число показателей α_k с положительными номерами отлично от нуля.

Лемма 1. Для любой локально-компактной нуль-мерной группы

- 1) $\int_{G_0^\perp} (\chi, x) d\nu(\chi) = \mathbf{1}_{G_0}(x);$
- 2) $\int_{G_0} (\chi, x) d\mu(x) = \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi).$

Первое равенство доказано в [7], второе равенство двойственно первому.



Лемма 2. Для любой локально-компактной нуль-мерной группы и для любого $n \in \mathbb{Z}$

- 1) $\int_{G_n^\perp} (\chi, x) d\nu(\chi) = p^n \mathbf{1}_{G_n}(x);$
- 2) $\int_{G_n} (\chi, x) d\mu(x) = \frac{1}{p^n} \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi).$

Доказательство. Докажем первое равенство. Пусть \mathcal{A} — оператор растяжения. Используя равенство

$$\int_X f(\chi \mathcal{A}) d\nu(\chi) = p \int_X f(\chi) d\nu(\chi), \quad \mathbf{1}_{G_n}(x) = \mathbf{1}_{G_0}(\mathcal{A}^n x)$$

и лемму 1, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{G_n^\perp} (\chi, x) d\nu(\chi) &= \int_X \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi) (\chi, x) d\nu(\chi) = p^n \int_X (\chi \mathcal{A}^n, x) \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi \mathcal{A}^n) d\nu(\chi) = \\ &= p^n \int_X (\chi, \mathcal{A}^n x) \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi) d\nu(\chi) = p^n \mathbf{1}_{G_0}(\mathcal{A}^n x) = p^n \mathbf{1}_{G_n}(x). \end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично. □

Лемма 3. Пусть G — локально-компактная нуль-мерная группа и $\chi_{n,s} = r_n^{\alpha_n} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \dots r_{n+s}^{\alpha_{n+s}}$ характер, не принадлежащий G_n^\perp . Тогда

$$\int_{G_n^\perp \chi_{n,s}} (\chi, x) d\nu(\chi) = p^n (\chi_{n,s}, x) \mathbf{1}_{G_n}(x).$$

Доказательство. По аналогии с предыдущим имеем:

$$\int_{G_n^\perp \chi_{n,s}} (\chi, x) d\nu(\chi) = \int_X \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi) (\chi_{n,s} \chi, x) d\nu(\chi) = \int_{G_n^\perp} (\chi_{n,s}, x) (\chi, x) d\nu(\chi) = p^n (\chi_{n,s}, x) \mathbf{1}_{G_n}(x). \quad \square$$

2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СДВИГОВ

Теорема 1. Пусть $M, N \in \mathbb{N}$, $G = \mathbb{Q}_p^+$, $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$. Система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0^{(N)}}$ — будет ортонормированной тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha_{-N}, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 (r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, b_{M-1} g_{M-1} \dot{+} \dots \dot{+} b_{-N} g_{-N}) = \\ &= \begin{cases} p^N, & \text{если все } b_j = 0, \\ 0, & \text{если } b_{M-1} = \dots = b_0 = p-1 \text{ и } b_{-1}^2 + \dots + b_{-N}^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } b_{M-1} = \dots = b_0 = 0 \text{ и } b_{-1}^2 + \dots + b_{-N}^2 \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $h_1, h_2 \in H_0^{(N)}$. Учитывая лемму 3, получаем:

$$\begin{aligned} &\int_G \varphi(x \dot{-} h_1) \overline{\varphi(x \dot{-} h_2)} d\mu(x) = \int_G \varphi(x) \overline{\varphi(x \dot{-} (h_2 \dot{-} h_1))} d\mu(x) = \int_X |\hat{\varphi}(\chi)|^2 (\chi, (h_2 \dot{-} h_1)) d\nu(\chi) = \\ &= \int_{G_M^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 (\chi, (h_2 \dot{-} h_1)) d\nu(\chi) = \sum_{\alpha_{-N}, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} \int_{G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 (\chi, (h_2 \dot{-} h_1)) d\nu(\chi) = \\ &= \sum_{\alpha_{-N}, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 \int_{G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}} (\chi, (h_2 \dot{-} h_1)) d\nu(\chi) = \\ &= \frac{\mathbf{1}_{G_{-N}}(h_2 \dot{-} h_1)}{p^N} \sum_{\alpha_{-N}, \dots, \alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 (r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, (h_2 \dot{-} h_1)). \quad (1) \end{aligned}$$



Пусть вначале $h_1 \neq h_2$. Так как $h_1, h_2 \in H_0^{(N)}$ и $h_1 \dot{-} h_2 \neq 0$, то либо

$$h_1 \dot{-} h_2 = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-N}g_{-N},$$

либо

$$h_1 \dot{-} h_2 = b_{-1}g_{-1} \dot{+} b_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} b_{-N}g_{-N} \dot{+} \sum_{k=0}^{+\infty} (p-1)g_k.$$

При этом если $h_1 \dot{-} h_2 = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{-N}g_{-N}$, то

$$h_2 \dot{-} h_1 = b_{-1}g_{-1} \dot{+} b_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} b_{-N}g_{-N} \dot{+} \sum_{k=0}^{\infty} (p-1)g_k.$$

Поэтому

$$\int_G \varphi(x \dot{-} h_1) \overline{\varphi(x \dot{-} h_2)} d\mu(x) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\alpha_{-N} \dots \alpha_0 \dots \alpha_{M-1} = 0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 (r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, b_{-1}g_{-1} \dot{+} b_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} b_{-N}g_{-N}) = 0$$

и

$$\sum_{\alpha_{-N} \dots \alpha_0 \dots \alpha_{M-1} = 0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 (r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, \sum_{k=0}^{M-1} (p-1)g_k \dot{+} b_{-1}g_{-1} \dot{+} b_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} b_{-N}g_{-N}) = 0.$$

При $h_1 = h_2$ утверждение леммы очевидно. □

Определим систему p^{N+M} -мерных векторов

$$\mathbf{e}_l(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}), \quad l = l_{-N} + l_{-N+1}p + \dots + l_0p^N + l_1p^{N+1} + \dots + l_{M-1}p^{N+M-1}$$

равенствами

$$\mathbf{e}_l(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) = \frac{1}{p^{\frac{M+N}{2}}} e^{\frac{-2\pi i}{p^{M+N}}(l_{-N} + \dots + l_{M-1}p^{N+M-1})(\alpha_{M-1} + \alpha_{M-2}p + \dots + \alpha_{-N}p^{N+M-1})}. \quad (2)$$

Ясно, что векторы $(\mathbf{e}_l)_{l=0}^{p^{N+M}-1}$ образуют ортонормированную систему. Поэтому условие ортогональности в теореме 1 можно представить в виде

$$c_0 = p^{\frac{N-M}{2}}, \quad c_1 = c_2 = \dots = c_{p^N-1} = 0, \quad c_{p^N(p^{M-1})+j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p^N - 1), \quad (3)$$

где c_l — коэффициенты Фурье разложения функции $|\hat{\varphi}|^2$ по системе (\mathbf{e}_l) , т.е.

$$|\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = \sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} c_l \mathbf{e}_l(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}). \quad (4)$$

Если $|\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp})| = 1$, то, полагая в этом равенстве $\alpha_{-N} = \dots = \alpha_{M-1} = 0$, получаем:

$$\sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} c_l \cdot \frac{1}{p^{\frac{M+N}{2}}} = |\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp})|^2 = 1,$$

т. е.

$$\sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} c_l = p^{\frac{M+N}{2}}. \quad (5)$$



Теорема 2. Пусть $M = 1$, $p = 2$, $N \in \mathbb{N}$, $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(G_1^\perp)$ и $|\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp)| = 1$. Если система сдвигов $(\varphi(x-h))_{h \in H_0}$ есть ортонормированная система, то $\hat{\varphi}(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$.

Доказательство. Из (3) и (4) следует, что

$$|\hat{\varphi}|^2 = c_0 \mathbf{e}_0 + c_{2^N} \mathbf{e}_{2^N}. \tag{6}$$

Из (2) видим, что $\mathbf{e}_0 \equiv \frac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}}$. Найдем значения $\mathbf{e}_l(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0})$ при $l = 2^N$. Имеем:

$$\mathbf{e}_l(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0}) = \frac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}} e^{\frac{2\pi i}{2^N} 2^N (\alpha_0 + \alpha_{-1} \cdot 2 + \dots + \alpha_{-N} 2^N)} = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}}, & \text{если } \alpha_0 = 0, \\ -\frac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}}, & \text{если } \alpha_0 = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Из (6) и (5) при $\chi = 1$ следует

$$c_0 \frac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}} + c_{2^N} \frac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}} = 1.$$

Так как $c_0 = 2^{\frac{N-1}{2}}$, то отсюда находим, что $c_{2^N} = c_0 = 2^{\frac{N-1}{2}}$. Тогда из (7) следует, что

$$|\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0})|^2 = \begin{cases} \frac{c_0}{2^{\frac{N+1}{2}}} + \frac{c_{2^N}}{2^{\frac{N+1}{2}}} = 1, & \text{если } \alpha_0 = 0, \\ \frac{c_0}{2^{\frac{N+1}{2}}} - \frac{c_{2^N}}{2^{\frac{N+1}{2}}} = 0, & \text{если } \alpha_0 = 1, \end{cases}$$

и теорема доказана. □

Покажем теперь, что в общем случае доказанная теорема неверна. Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n, \\ \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{8}$$

в которой $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, ранг системы (8) равен $m + 1$ и вектор $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ является решением этой системы. Определим для системы (8) вспомогательную систему:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\alpha_{11})x_1 + \dots + \operatorname{Re}(\alpha_{1n})x_n = 0, \\ \dots \\ \operatorname{Re}(\alpha_{m1})x_1 + \dots + \operatorname{Re}(\alpha_{mn})x_n = 0, \\ \operatorname{Im}(\alpha_{11})x_1 + \dots + \operatorname{Im}(\alpha_{1n})x_n = 0, \\ \dots \\ \operatorname{Im}(\alpha_{m1})x_1 + \dots + \operatorname{Im}(\alpha_{mn})x_n = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ действительная и мнимая части комплексного числа z .

Лемма 4. Любое решение $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ системы (8), у которого все координаты $\alpha_i \geq 0$ можно найти как линейную комбинацию:

$$\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}' + m(\bar{\alpha}')\bar{\alpha}_0) \frac{n}{nm(\bar{\alpha}') + \sum_{i=1}^n \alpha'_i}, \tag{10}$$

где константа $m(\bar{\alpha}')$ определена равенством

$$m(\bar{\alpha}') = \begin{cases} \min\{\alpha'_i\}, & \text{если существует } \alpha'_i < 0, \\ 0, & \text{если все } \alpha'_i \geq 0, \end{cases} \tag{11}$$

$\bar{\alpha}_0 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ и $\bar{\alpha}'$ — произвольное решение системы (9), отличное от $-m(\bar{\alpha}')\bar{\alpha}_0$.



Доказательство. Пусть $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — неотрицательное решение системы (8), т. е. $\alpha_i \geq 0$. Тогда при всех j комплексное число

$$\alpha_{j1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{jn}\alpha_n = 0,$$

и, значит,

$$\operatorname{Re}(\alpha_{j1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{jn}\alpha_n) = 0, \quad \operatorname{Im}(\alpha_{j1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{jn}\alpha_n) = 0.$$

Так как $\alpha_i \in \mathbb{R}$, то

$$\operatorname{Re}(\alpha_{j1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{jn}\alpha_n) = \operatorname{Re}(\alpha_{j1})\alpha_1 + \dots + \operatorname{Re}(\alpha_{jn})\alpha_n = 0,$$

$$\operatorname{Im}(\alpha_{j1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{jn}\alpha_n) = \operatorname{Im}(\alpha_{j1})\alpha_1 + \dots + \operatorname{Im}(\alpha_{jn})\alpha_n = 0.$$

Следовательно, $\bar{\alpha}$ — решение системы (9), и равенство (10) выполнено при $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}$. В этом случае $m(\bar{\alpha}') = 0$, так как все $\alpha_i \geq 0$, а $\sum_{i=1}^n \alpha_i = n$.

Пусть теперь $\bar{\alpha}'$ — произвольное решение системы (9). Проверим, что $\bar{\alpha}$, определенное по формуле (10), является решением системы (8) и все компоненты $\alpha_i \geq 0$. Последнее условие следует из определения $m(\bar{\alpha}')$. Так как $\bar{\alpha}'$ является решением системы (9), то $\bar{\alpha}'$ есть решение системы (8) без первого уравнения. Учитывая, что $\bar{\alpha}_0 = (1, 1, \dots, 1)$ есть решение системы (8), то $\bar{\alpha}$ является решением системы (8) без первого уравнения. А так как $\bar{\alpha}' \neq -m(\bar{\alpha}')\bar{\alpha}_0$, то из (10) следует, что $\bar{\alpha}$ удовлетворяет и первому уравнению. Лемма доказана. \square

Лемма 5. Если $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}'_1, \dots, \bar{\alpha}'_r$ — фундаментальная система решений системы (9), то соответствующие решения $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_r$ системы (8) являются линейно независимыми.

Доказательство. Пусть $\gamma_1\bar{\alpha}_1 + \dots + \gamma_r\bar{\alpha}_r = 0$, и существует $\gamma_j \neq 0$. Тогда

$$\gamma_1(\bar{\alpha}'_1 + m(\bar{\alpha}'_1)\bar{\alpha}_0) + \dots + \gamma_r(\bar{\alpha}'_r + m(\bar{\alpha}'_r)\bar{\alpha}_0) = 0,$$

$$\gamma_1\bar{\alpha}'_1 + \dots + \gamma_r\bar{\alpha}'_r + (m(\bar{\alpha}'_1) + \dots + m(\bar{\alpha}'_r))\bar{\alpha}_0 = 0,$$

и так как существует $\gamma_j \neq 0$, то это противоречит линейной независимости векторов $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}'_1, \dots, \bar{\alpha}'_r$. \square

Теорема 3. Пусть p — простое число и выполнено одно из условий:

1) $p \geq 5$ и $M \in \mathbb{N}$;

2) $p < 5$ и $M \geq 2$, $M \in \mathbb{N}$.

Тогда существуют функции $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$, сдвиги которой на элементы H_0 образуют ортонормированную систему в $L_2(\mathbb{Q}_p)$. Количество линейно независимых функций φ в пространстве $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$ не меньше $p^{N+M} - 4(p^N - 1)$.

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений из теоремы 1. Из леммы 3 следует, что $\bar{\alpha}_0 = (1, \dots, 1)$ является решением системы. Эта система имеет p^{N+M} неизвестных и $2(p^N - 1) - 1$ уравнений, а вспомогательная система имеет $4(p^N - 1)$ уравнений. Следовательно, из лемм 3 и 4 получаем, что система линейных уравнений из теоремы 1 имеет не меньше $p^{N+M} - 4(p^N - 1)$ линейно независимых решений. При $p \geq 5$, $M \in \mathbb{N}$ и $p = 2, 3$, $M \geq 2$ выполняется неравенство $p^{N+M} - 4(p^N - 1) > 1$, значит, система имеет решение, отличное от $\bar{\alpha}_0 = (1, \dots, 1)$. \square

Работа подготовлена частично в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К), а также при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Библиографический список

1. Lang W. C. Orthogonal Wavelets on the Cantor Dyadic Group // SIAM J. Math. Anal. 1996. Vol. 27, iss. 1. P. 305–312. DOI: 10.1137/S0036141093248049.
2. Lang W. C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. Vol. 24, № 3. P. 533–544.
3. Lang W. C. Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. Math. Sci. 1998. Vol. 21, iss. 2. P. 307–314. DOI: 10.1155/S0161171298000428.
4. Protasov V. Yu., Farkov Yu. A. Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line // Sb. Math.



2006. Vol. 197, № 10. P. 1529–1558. DOI: 10.1070/SM2006v197n10ABEH003811.
5. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, вып. 3. С. 193–220. DOI: 10.4213/im644.
 6. Фарков Ю. А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82, вып. 6. С. 934–952. DOI: 10.4213/mzm4181.
 7. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, iss. 1. P. 42–65. DOI: 10.1007/s00041-013-9301-6.
 8. Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., Skopina M. p -adic refinable functions and MRA-based wavelets // J. Approx. Theory. 2009. Vol. 161, iss. 1. P. 226–238. DOI: 10.1016/j.jat.2008.08.008.
 9. Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M. p -Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames // J. Fourier Anal. Appl. 2010. Vol. 16, iss. 5. P. 693–714. DOI : 10.1007/s00041-009-9118-5.

Образец для цитирования:

Водолазов А. М., Лукомский С. Ф. Ортогональные системы сдвигов в поле p -адических чисел // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 256–262. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-256-262.

Orthogonal Shift Systems in the Field of p -adic Numbers

A. M. Vodolazov¹, S. F. Lukomskii²

¹Aleksandr M. Vodolazov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, vam21@yandex.ru

²Sergey F. Lukomskii, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, LukomskiiDS@info.sgu.ru

In 2010 S. Albeverio, S. Evdokimov and M. Skopina proved that if the shift system $(\varphi(x-h))$ of a step function φ is orthonormal and φ generates p -adic MRA then its Fourier transform lies in the unit ball. We prove then in some cases the condition " φ generates MRA" is possible to be omitted. In general, we indicate the number of linearly independent step-functions, which shifts form an orthonormal system.

Key words: orthogonal shift systems, field of p -adic numbers, p -adic MRA .

This work was supported by the Russian Ministry of Science and Education (projects no. 1.1520.2014/K) and Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00152).

References

1. Lang W. C. Orthogonal Wavelets on the Cantor Dyadic Group. *SIAM J. Math. Anal.*, 1996, vol. 27, iss. 1, pp. 305–312. DOI:10.1137/S0036141093248049.
2. Lang W. C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group. *Housten J. Math.*, 1998, vol. 24, no. 3, pp. 533–544.
3. Lang W. C. Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group. *Intern. J. Math. Math. Sci.*, 1998, vol. 21, iss 2, pp. 307–314. DOI: 10.1155/S0161171298000428.
4. Protasov V. Yu., Farkov Yu. A. Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 10, pp. 1529–1558. DOI: 10.1070/SM2006v197n10ABEH003811.
5. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets with compact support on locally compact Abelian groups. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, iss. 3, pp. 623–650. DOI: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000540.
6. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, iss. 5, pp. 843–859. DOI: 10.1134/S0001434607110296.
7. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 42–65. DOI: 10.1007/s00041-013-9301-6.
8. Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., Skopina M. p -adic refinable functions and MRA-based wavelets. *J. Approx. Theory*, 2009, vol. 161, iss. 1, pp. 226–238. DOI: 10.1016/j.jat.2008.08.008.
9. Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M. p -Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2010, vol. 16, iss. 5, pp. 693–714. DOI : 10.1007/s00041-009-9118-5.

Please cite this article in press as:

Vodolazov A. M., Lukomskii S. F. Orthogonal Shift Systems in the Field of p -adic Numbers. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 256–262 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-256-262.



ДОПУСТИМЫЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ САСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Галаев

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, sgalaev@mail.ru

Вводятся понятия допустимой (почти) гиперкомплексной структуры и почти контактной гиперкэлеровой структуры. На многообразии M с почти контактной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ определяется внутренняя симметричная связность ∇ . В случае контактного многообразия размерности, большей или равной пяти, доказывается, что обращение в нуль тензора кривизны связности ∇ эквивалентно существованию адаптированных систем координат, относительно которых коэффициенты внутренней связности равны нулю. На распределении D почти контактной структуры как на тотальном пространстве векторного расслоения (D, π, M) определяется допустимая почти гиперкомплексная структура $(\vec{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$. При условии, что допустимая почти комплексная структура φ интегрируема, доказывается, что построенная почти гиперкомплексная структура интегрируема тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны. В случае сасакиевой структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ находятся условия, при которых допустимая гиперкомплексная структура $(\vec{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \vec{g}, D)$ является почти контактной гиперкэлеровой структурой.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, допустимая гиперкомплексная структура, почти контактная гиперкэлерова структура, распределение нулевой кривизны.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272

ВВЕДЕНИЕ

Изучение геометрии касательных расслоений начинается с основополагающей работы Сасаки (S. Sasaki) [1], опубликованной в 1958 г. Сасаки, используя риманову метрику g , заданную на гладком многообразии M , определяет риманову метрику g^S на его касательном расслоении TM . Конструкция Сасаки основана на естественном расщеплении (имеющему место благодаря существованию на римановом многообразии связности Леви – Чивита) касательного расслоения TTM многообразия TM в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений, слои которых изоморфны слоям расслоения TM . Исследования Сасаки послужили началом целой серии работ, посвященных изучению метрики Сасаки g^S и почти комплексной структуры J , естественным образом возникающих на касательном TM и кокасательном T^*M расслоениях риманова многообразия (M, g) (см., например, [2, 3]). Свойства метрики Сасаки g^S и канонической почти комплексной структуры J зависят от особенностей исходной структуры риманова многообразия (M, g) . Так, например, каноническая почти комплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда (M, g) — плоское риманово многообразие [4, 5]. Нечетным аналогом касательного расслоения является распределение D почти контактной метрической структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Так же, как и расслоение TTM , касательное расслоение TD благодаря заданию связности над распределением [6, 7] (а затем и N -продолженной связности — связности в векторном расслоении (D, π, M)) разлагается в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений. Как показано в [8, 9], на многообразии D , тем самым, естественным образом определяется почти контактная метрическая структура.

Гиперкомплексная структура на гладком многообразии M представляет собой тройку интегрируемых почти комплексных структур (I, J, K) , удовлетворяющих соотношению $IJ = -JI = K$. При этом M называется гиперкомплексным многообразием. Одним из первых гиперкомплексные структуры рассматривал Обата (Obata) [10, 11]. В настоящее время активно изучаются гиперкомплексные структуры, определяемые на касательном расслоении TM эрмитова многообразия (M, g, J) (см., например, [12, 13]).

В настоящей работе определяется контактный аналог гиперкомплексной структуры — допустимая гиперкомплексная структура $(M, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, D)$. Мы требуем, чтобы каждая допустимая структура $[\varphi_i, i = 1, 2, 3]$ удовлетворяла условию $N_{\varphi_i} + 2(d\eta \circ \varphi_i) \otimes \vec{\xi} = 0$ [7], замещающему условие интегрируемости почти комплексной структуры. В настоящей работе доказывается, что допустимая гиперкомплексная структура естественным образом возникает на распределении нулевой кривизны D почти контактной структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$.



В последние годы на гладком многообразии M с почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ все чаще, наряду со связностью Леви – Чивита, исследуются как метрические, так и не метрические связности с кручением. В настоящей работе на почти контактном метрическом многообразии рассматривается связность $\nabla_{\vec{x}}^N$, называемая N -связностью, однозначно определяемая условиями

- 1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$;
- 2) $\nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$;
- 3) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$;
- 4) $\nabla_{\vec{x}}^N \eta = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$,

где $S(\vec{x}, \vec{y})$ – кручение связности, $N : D \rightarrow D$ – эндоморфизм распределения структуры.

N -связность может быть отождествлена с парой (∇, N) , где ∇ – внутренняя связность [6], осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. В настоящей работе N -связность используется для задания на распределении D допустимой гиперкэлеровой структуры.

Работа устроена следующим образом. В п. 2 на почти контактном (метрическом) многообразии M определяются внутренняя и N -продолженная связности. Устанавливается соответствие между классом N -продолженных связностей и подклассом линейных связностей на многообразии с почти контактной (метрической) структурой. Доказывается, что в случае контактного многообразия размерности большей или равной пяти обращение в нуль тензора кривизны внутренней связности эквивалентно существованию адаптированных систем координат, для которых коэффициенты внутренней связности равны нулю. В п. 3 на распределении D почти контактной структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ как на тотальном пространстве векторного расслоения (D, π, M) определяется допустимая почти гиперкомплексная структура $(\vec{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$. Находятся условия, при которых полученная структура интегрируема. Отдельно рассматривается случай почти контактной метрической структуры $(M, \xi, \eta, \varphi, g, D)$.

1. ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Предположим, что на гладком многообразии M нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$, задана почти контактная структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$, где φ – тензор типа $(1, 1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой. В соответствии с определением почти контактной структуры выполняются следующие условия:

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}, \quad \eta(\vec{\xi}) = 1.$$

Мы требуем, чтобы $\vec{\xi} \in \ker \omega$, где $\omega = d\eta$. Почти контактная структура называется контактной, если $r\ker \omega = 2m$. Многообразии, наделенное (почти) контактной структурой, будем называть (почти) контактным многообразием. Почти контактное многообразие называется почти контактным метрическим многообразием, если M – (псевдо) риманово многообразие, метрический тензор g которого естественным образом [6] согласован с почти контактной структурой.

Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$ называется фундаментальной формой почти контактной метрической структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Пусть D – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η , $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$ – его оснащение: $TM = D \oplus D^\perp$. В контактном случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker \omega = \text{Span}(\vec{\xi})$, и называется вектором Рибба. Будем называть D распределением почти контактной (метрической) структуры. В работе, в частности, рассматривается пространство (многообразие) Сасаки – контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi(\vec{x}, \varphi\vec{y})$ – тензор Нейенхайса эндоморфизма φ . Выполнение условия $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством. Если условие $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ заменено более слабым условием $N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0$, то соответствующее почти контактное (метрическое) многообразие будем называть почти нормальным, а структуру φ – интегрируемой или почти нормальной структурой.

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$, $a, b, c = 1, \dots, n - 1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \vec{\xi}$ [6]. Пусть $P : TM \rightarrow D$ – проектор,



определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $k(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему $D : D = \text{Span}(\vec{e}_a)$. Неголономному полю базисов $(\vec{e}_a) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ соответствует поле кобазисов $(dx^a, \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$. Условие $\vec{\xi} \in \ker \omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $k(x^\alpha)$ и $k'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a(x^{\alpha'}), \quad x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'}).$$

Тензорное поле t типа (p, q) , заданное на почти контактном (метрическом) многообразии, назовем *допустимым* (κ *распределению* D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η . Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид

$$t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t_b^a = A_a^{a'} A_b^{b'} t_{b'}^{a'},$$

где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t_b^a$ являются компонентами допустимого тензорного поля. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t_b^a$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Под внутренней линейной связностью [6] на многообразии с почти контактной структурой понимается отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1 \vec{x} + f_2 \vec{y}} = f_1 \nabla_{\vec{x}} + f_2 \nabla_{\vec{y}}$;
- 2) $\nabla_{\vec{x}} f \vec{y} = (\vec{x} f) \vec{y} + f \nabla_{\vec{x}} \vec{y}$;
- 3) $\nabla_{\vec{x}} (\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} + \nabla_{\vec{x}} \vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A_a^{a'} \vec{e}_{a'}$, где

$$A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}, \tag{1}$$

обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов связности:

$$\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^c \Gamma_{a'b'}^c + A_c^c \vec{e}_a A_b^{c'}. \tag{2}$$

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем:

$$S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c.$$

Координатное представление тензора кручения внутренней связности указывает на целесообразность называть внутреннюю связность с нулевым кручением симметричной связностью. Действие внутренней линейной связности обычным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Известно, что внутренняя линейная связность естественным образом возникает на почти контактном метрическом пространстве [6]. Если кручение внутренней связности равно нулю и $\nabla g = 0$, то соответствующую связность будем называть внутренней метрической связностью без кручения.

Внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством векторного расслоения (D, π, M) . Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \rightarrow M$ — естественная проекция,



раскладывается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D .

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D , где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a})$ такого, что $HD = \text{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$. В случае, когда $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^\alpha) x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. Пусть ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD , и $N : D \rightarrow D$ — поле допустимого тензора типа $(1, 1)$. N -продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, M) , определяемую разложением $\widetilde{TD} = \widetilde{HD} \oplus VD$, такую, что $\widetilde{HD} = HD \oplus \text{Span}(\vec{u})$, где $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ — вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле \vec{u} получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$.

Всякому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, заданному на многообразии M , обычным образом соответствует его горизонтальный лифт \vec{x}^h , при этом $\vec{x}^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда \vec{x} — допустимое векторное поле: $\vec{x} \in \Gamma(D)$.

Под кручением N -продолженной связности будем понимать кручение исходной внутренней связности. Будем использовать следующее обозначение для N -продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$, где ∇ — внутренняя связность. N -продолженную связность назовем метрической, если ∇ — внутренняя симметричная метрическая связность и выполняется равенство

$$\nabla_{\vec{x}}^N g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N_a^c g_{cb} - N_b^c g_{ac} = 0.$$

Пусть ∇ — внутренняя симметричная связность. Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$, названо Вагнером [14] тензором кривизны Схоутена. Тензор Схоутена мы иногда будем называть тензором кривизны внутренней связности. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e]}^d \Gamma_{b]c}^e.$$

Тензор кривизны внутренней связности возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных:

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} v^c = R_{abe}^c v^e + 4\omega_{ba} \partial_n v^c.$$

Назовем тензор кривизны внутренней связности тензором кривизны распределения D , а распределение D , в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны. Из формул (1), (2) следует, что частные производные $\partial_n \Gamma_{bc}^a = P_{bc}^a$ являются компонентами допустимого тензорного поля, обозначаемого в дальнейшем $P(\vec{x}, \vec{y})$.

Для K -контактных [6] пространств тензор кривизны внутренней связности наделен теми же формальными свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае препятствием к этому выступает наличие производных $\partial_n g_{bc}$ в равенстве

$$\nabla_{[e} \nabla_{a]} g_{bc} = 2\omega_{ea} \partial_n g_{bc} - g_{dc} R_{eab}^d - g_{bd} R_{eac}^d.$$

Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$ определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^n, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b + N_b^a x^{n+b} dx^n)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \vec{u} + x^{n+d} (2\omega_{ba} N_d^c + R_{bad}^c) \partial_{n+c}, \tag{3}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d} (\partial_n \Gamma_{ad}^c - \nabla_a N_d^c) \partial_{n+c}, \tag{4}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}, \quad [\vec{u}, \partial_{n+a}] = N_a^c \partial_{n+c}.$$

Из (3), (4) получаем выражение для тензора кривизны N -продолженной связности:

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}, \tag{5}$$



$$K(\vec{\xi}, \vec{x})\vec{y} = P(\vec{x}, \vec{y}) - (\nabla_{\vec{x}}N)\vec{y}, \quad (6)$$

где $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$.

Как следует из (5), (6), тензор кривизны N -продолженной связности полностью определяется допустимыми тензорными полями. Видимо, впервые N -продолженная связность для эндоморфизма $N : D \rightarrow D$ специального вида получена в работе [14]. Координатное представление соответствующего эндоморфизма в контактном случае имеет следующий вид:

$$N_b^a = \frac{1}{4m} \omega^{cd} R_{cdb}^a.$$

Выбор эндоморфизма $N : D \rightarrow D$ зависит от характера решаемой задачи.

Теорема 1 (см. [9]). *На многообразии с контактной метрической структурой существует N -продолженная метрическая связность, однозначно определяемая следующими условиями:*

- 1) $\vec{z}g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\nabla_{\vec{z}}\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{x}, \nabla_{\vec{z}}\vec{y})$ (свойство метричности);
- 2) $\nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}] = 0$ (отсутствие кручения);
- 3) N — симметрический оператор такой, что

$$g(N\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} L_{\vec{\xi}}g(\vec{x}, \vec{y}), \quad (7)$$

где $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$ — сечения распределения D .

Пусть ∇^N — N -продолженная связность на многообразии с почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Поставим в соответствие связности ∇^N линейную связность на многообразии M , обозначаемую тем же символом ∇^N и удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$;
- 2) $\nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$;
- 3) $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$;
- 4) $\nabla_{\vec{x}}^N \eta = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$,

где $S(\vec{x}, \vec{y})$ — тензор кручения связности $\nabla_{\vec{x}}^N$.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M . Тогда на многообразии M существует единственная связность $\nabla_{\vec{x}}^N$ такая, что выполняются следующие условия:*

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}, \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM); \quad (8)$$

$$\nabla_{\vec{x}}^N g(\vec{y}, \vec{z}) = 0, \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D); \quad (9)$$

$$\nabla_{\vec{x}}^N \vec{\xi} = \vec{0}, \quad \vec{x} \in \Gamma(TM); \quad (10)$$

$$\nabla_{\vec{x}}^N \eta = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma(TM), \quad (11)$$

где $N : D \rightarrow D$ — эндоморфизм распределения D .

Доказательство Из предположения существования связности докажем ее единственность. Получим явное выражение для коэффициентов $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ связности $\nabla_{\vec{x}}^N$ в адаптированных координатах. Условия (8), (9) определяют коэффициенты $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$. Из условий (10), (11) следует справедливость следующих равенств: $\Gamma_{bn}^a = \Gamma_{an}^n = \Gamma_{nn}^a = \Gamma_{ab}^n = \Gamma_{nb}^n = \Gamma_{nn}^n = 0$. Повторно используя условие (8), получаем, что $\Gamma_{na}^b = N_a^b$. Что и доказывает единственность. Определим теперь отличные от нуля коэффициенты связности $\nabla_{\vec{x}}^N$, положив $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$, $\Gamma_{na}^b = N_a^b$. Непосредственно проверяется, что определяемая тем самым связность удовлетворяет условиям (8)–(11). Теорема доказана. \square

Следующее утверждение позволяет построить N -связность, используя связность Леви – Чивита.

Теорема 3. *Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M . Тогда определяемая с помощью равенства*

$$\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}} \vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$$

связность $\nabla_{\vec{x}}^N$ совпадает с N -связностью с соответствующим эндоморфизмом $N : D \rightarrow D$.



Доказательство теоремы сводится к вычислению коэффициентов связности $\nabla_{\vec{x}}^N$ в адаптированных координатах.

Используя равенства (5), (6), получаем выражение для тензора кривизны N -связности $\nabla_{\vec{x}}^N$:

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})(P(\vec{y}, \vec{z}) - (\nabla_{P\vec{y}}N)\vec{z}) - \eta(\vec{y})(P(\vec{x}, \vec{z}) - (\nabla_{P\vec{x}}N)\vec{z}), \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM).$$

Назовем тензор кривизны N -связности, так же как и тензор кривизны соответствующей N -продолженной связности, обобщенным тензором кривизны Вагнера.

Задавая надлежащим образом эндоморфизм $N : D \rightarrow D$, получаем следующие специальные классы N -связностей для случая почти контактного метрического многообразия:

1. Связность Бежанку ∇^B с нулевым эндоморфизмом $N = 0$. Бежанку (Bejancu) [15] определяет связность ∇^B на почти контактном метрическом многообразии с помощью формулы $\nabla_{\vec{x}}^B \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}} \vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}$. В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами $\Gamma_{\beta\gamma}^{B\alpha}$ связности ∇^B являются $\Gamma_{bc}^{Ba} = \Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. В случае многообразия Сасаки тензор кривизны связности Бежанку совпадает с тензором кривизны Схоутена. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической. Так как $\nabla_n^B g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна K -контактности контактной метрической структуры. N -связность ∇^N на многообразии с почти контактной метрической структурой с заданным эндоморфизмом $N : D \rightarrow D$ может быть определена с помощью равенства $\nabla_{\vec{x}}^N \vec{y} = \nabla_{\vec{x}}^B \vec{y} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$.

2. Связность Танака – Вебстера ∇^{TW} определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $\nabla^{TW} \eta = 0$;
- 2) $\nabla^{TW} \vec{\xi} = 0$;
- 3) $\nabla^{TW} g = 0$;
- 4) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi}, \vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$;
- 5) $S(\vec{\xi}, \varphi\vec{x}) = -\varphi S(\vec{\xi}, \vec{x}), \vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Связность ∇^{TW} является N -связностью для случая, когда $N = C$.

3. Связность Схоутена – ван Кампена ∇^{Sk} определяется с помощью равенства [16]: $\nabla_{\vec{x}}^{Sk} \vec{y} = (\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y}^h)^h + (\tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y}^v)^v$, где $\vec{y}^h = P\vec{y}$, $\vec{y}^h = P\vec{y}$, $\vec{y}^v = Q\vec{y}$. Непосредственно проверяется, что связность Схоутена – ван Кампена является N -связностью для случая, когда $N = C - \varphi$.

4. Совсем недавно было введено понятие φ -связности [17]. Для K -контактных метрических пространств φ -связность совпадает со связностью Схоутена – ван Кампена.

Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ – контактная структура, заданная на многообразии M . Предположим также, что на многообразии M определена внутренняя симметричная связность ∇ . Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ – контактная структура, заданная на многообразии M , $\dim M \geq 5$. Тогда обращение в нуль тензора Схоутена эквивалентно существованию такого атласа, состоящего из адаптированных карт, для которого выполняются равенства $\Gamma_{bc}^a = 0$.

Доказательство. Достаточность утверждения непосредственно подтверждается координатным представлением тензора Схоутена в адаптированных координатах. Докажем необходимость. Как показано в [14], обращение в нуль тензора Схоутена при наших предположениях влечет независимость коэффициентов связности Γ_{bc}^a от последней координаты: $\partial_n \Gamma_{bc}^a = P_{bc}^a = 0$. Покажем, что на многообразии M можно построить атлас адаптированных карт, в которых коэффициенты связности равны нулю. Составим систему уравнений в полных дифференциалах:

$$\partial_a f^{b'} = A_a^{b'}, \quad \partial_a A_b^{c'} = \Gamma_{ab}^c A_c^{c'}. \tag{12}$$

Условия интегрируемости полученной системы сводятся к следующим соотношениям:

$$S_{ab}^c A_c^{c'} = 0, \quad R_{abc}^d A_d^{d'} = 0,$$

которые выполняются тождественно. Следовательно, система (12) вполне интегрируема и имеет решение с произвольными начальными условиями, что и завершает доказательство теоремы.



Теорема 5. Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, g, \varphi, D)$ — контактная метрическая структура, заданная на многообразии M , $\dim M \geq 5$. Обобщенный тензор кривизны Вагнера тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда $N = 0$ и существует постоянное допустимое векторное поле любого направления.

Доказательство. Предположим, что обобщенный тензор кривизны Вагнера тождественно равен нулю. Из равенства (5) заключаем, что $2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \vec{0}$. В качестве следствия легко проверяемого тождества

$$R_{[abc]}^d = 0$$

получаем равенство $N_a^b(m-1) = 0$. Так как $m > 1$, то отсюда следует, что $N = 0$. Что, в свою очередь, влечет обращение в нуль тензора Схоутена. Оставшиеся рассуждения можно провести, опираясь на теорему 4.

2. ДОПУСТИМЫЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим на гладком многообразии M размерности $n = 4m + 1$ почти контактную структуру $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_1, D)$, где φ_1 — допустимая почти комплексная структура. Предположим, что на многообразии M заданы еще две такие допустимые почти комплексные структуры φ_2 и φ_3 , что $\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_2\varphi_1 = \varphi_3$. Назовем многообразие M , наделенное структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, D)$, $i = 1, 2, 3$, почти контактным, почти гиперкомплексным многообразием. Если каждая из почти комплексных структур φ_i интегрируема (почти нормальна), т. е. если $N_{\varphi_i} + 2(d\eta \circ \varphi_i) \otimes \vec{\xi} = 0$, то допустимую почти гиперкомплексную структуру $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, D)$ будем называть интегрируемой или допустимой гиперкомплексной структурой, а многообразие M — почти контактным гиперкомплексным многообразием.

Рассмотрим модельный пример почти контактного гиперкомплексного многообразия. Пусть $M = R^5$, $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_5$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $\vec{\xi} = \partial_5$, $\eta = dx^5 + x^2dx^1$, $D = \ker \eta$. Определим допустимые к распределению D почти комплексные структуры φ_i (таблица).

$\varphi_i \backslash \vec{e}_j$	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3	\vec{e}_4
φ_1	\vec{e}_3	\vec{e}_4	$-\vec{e}_1$	$-\vec{e}_2$
φ_2	\vec{e}_2	$-\vec{e}_1$	$-\vec{e}_4$	\vec{e}_3
φ_3	\vec{e}_4	$-\vec{e}_3$	\vec{e}_2	$-\vec{e}_1$

Из таблицы видно, что $\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_2\varphi_1 = \varphi_3$. Непосредственно проверяется, что допустимые почти комплексные структуры φ_i являются почти нормальными.

Пусть D — распределение почти контактной структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ с интегрируемым эндоморфизмом φ . Предположим, что над распределением D задана произвольная связность, т. е. распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \rightarrow M$ — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D . Таким образом, используя адаптированные координаты, получаем, что $HD = \text{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$. Пусть $N : D \rightarrow D$ — эндоморфизм распределения D . Определим на распределении D допустимую почти гиперкомплексную структуру $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая, что

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}, & J(\vec{\varepsilon}_a) &= \partial_{n+a}, & J(\partial_{n+a}) &= -\vec{\varepsilon}_a, & J(\vec{u}) &= \vec{0}, \\ J_1 \vec{x}^h &= -(\varphi \vec{x})^h, & J_1 \vec{x}^v &= (\varphi \vec{x})^v, & J_1(\vec{u}) &= \vec{0}, & J_2 &= J_1 J, & \vec{x} &\in \Gamma(D). \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда связность над распределением определяется некоторой внутренней линейной связностью: $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^\alpha) x^{n+c}$ и эндоморфизм $N : D \rightarrow D$ равен нулю.

Теорема 6. Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ — контактная почти нормальная структура, заданная на многообразии M , $\dim M \geq 5$. Допустимая почти гиперкомплексная структура $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ является допустимой гиперкомплексной структурой тогда и только тогда, когда тензор кривизны Схоутена соответствующей внутренней связности равен нулю.



Доказательство. Найдем условия, при которых $N_J + 2(d\lambda \circ J) \otimes \vec{u} = 0$.

Имеем:

$$\begin{aligned} N_J(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) + 2d\lambda(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) &= -R_{abc}^e x^{n+c} \partial_{n+e}, \\ N_J(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) + 2d\lambda(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) &= 2\omega_{ba} \partial_n + R_{abc}^e x^{n+c} \partial_{n+e} - 2\omega_{ba} \partial_n = R_{abc}^e x^{n+c} \partial_{n+e}, \\ N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) &= 0, \\ N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = N_J(\partial_{n+a}, \partial_n) &= -x^{n+c} P_{ac}^b \partial_{n+b}. \end{aligned}$$

Таким образом, структура J интегрируема тогда и только тогда, когда $R_{abc}^e = 0$. Предположим, что тензор кривизны Схоутена равен нулю. Воспользовавшись теоремой 4, выберем такую систему координат, что $\Gamma_{bc}^a = 0$. В этом случае нетрудно заметить, что интегрируемость структур J_1, J_2 эквивалентна интегрируемости структуры φ , что и доказывает теорему.

Пусть теперь M — почти контактное метрическое многообразие с допустимой гиперкомплексной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, D)$. Пусть далее для всех $i = 1, 2, 3$ выполняются равенства $g(\varphi_i \vec{x}, \varphi_i \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$. Назовем многообразие M почти контактным гиперкэлеровым многообразием, а структуру $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, g, D)$ — допустимой гиперкэлеровой структурой, если формы $\Omega_i(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi_i \vec{y})$ замкнуты.

Теорема 7. Пусть M — многообразие Сасаки с распределением нулевой кривизны. Тогда структура $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$, где $\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b)$, $\tilde{g}(\partial_n, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_n, \partial_{n+b}) = 0$, является допустимой гиперкэлеровой структурой.

Доказательство. Введем в рассмотрение фундаментальные формы $\tilde{\Omega}(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{g}(\vec{x}, J\vec{y})$, $\tilde{\Omega}_k(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{g}(\vec{x}, J_k \vec{y})$, $k = 1, 2$. Покажем, что $d\tilde{\Omega} = d\tilde{\Omega}_k = 0$. Действительно, с одной стороны, равенство $d\tilde{\Omega} = 0$ является следствием обращения в нуль тензора кривизны внутренней связности. С другой стороны, равенство $d\tilde{\Omega}_k = 0$ эквивалентно равенству $d\Omega = 0$, где Ω — фундаментальная форма сасакиевой структуры, что и доказывает теорему. \square

Библиографический список

1. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1958. Vol. 10. P. 338–354.
2. Dombrowski P. On the geometry of the tangent bundle // J. Reine Angew. Math. 1962. Vol. 210. P. 73–88.
3. Munteanu M. I. Some aspects on the geometry of the tangent bundles and tangent sphere bundles of a Riemannian manifold // Mediterr. J. Math. 2008. Vol. 5. P. 43–59.
4. Kowalski O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold // J. Reine Angew. Math. 1971. Vol. 250. P. 124–129.
5. Musso E., Tricerri F. Riemannian metrics on tangent bundles // Ann. Mat. Pura Appl. 1988. Vol. 150, iss. 4. P. 1–19.
6. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
7. Галаев С. В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Матем. 2014. № 8. С. 42–52.
8. Галаев С. В. Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 258–264. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.
9. Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Матем. заметки СВФУ. 2015. Вып. 1. С. 25–34.
10. Obata M. Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure // Jap. J. Math. 1956. Vol. 26. P. 43–77.
11. Obata M. Affine connections in a quaternion manifold and transformations preserving the structure // J. Math. Soc. Japan. 1957. Vol. 9. P. 406–416.
12. Bogdanovich S. A., Ermolitski A. A. On almost hyperHermitian structures on Riemannian manifolds and tangent bundles // Cent. Eur. J. Math. 2004. Vol. 2, iss. 5. P. 615–623.
13. Oproiu V. Hyper-Kähler structures on the tangent bundle of a Kähler manifold // Balkan J. Geom. Appl. 2010. Vol. 15, iss. 1. P. 104–119.
14. Вагнер В. В. Геометрия $(n - 1)$ -мерного негोलомного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.



15. Bejancu A. Kahler contact distributions // *J. Geometry and Physics*. 2010. Vol. 60. P. 1958–1967.
16. Schouten J., van Kampen E. Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // *Math. Ann.* 1930. Vol. 103. P. 752–783.
17. Букушева А. В. О геометрии контактных метрических пространств с φ -связностью // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. № 17(214), вып. 40. С. 20–24.

Образец для цитирования:

Галаев С. В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 263–272. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272.

Admissible Hypercomplex Structures on Distributions of Sasakian Manifolds

S. V. Galaev

Galaev Sergei Vasil'evich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, sgalaev@mail.ru

The notions of admissible (almost) hypercomplex structure and almost contact hyper-Kählerian structure are introduced. On a manifold M with an almost contact metric structure $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ an interior symmetric connection ∇ is defined. In the case of a contact manifold of dimension bigger than or equal to five, it is proved that the curvature tensor of the connection ∇ is zero if and only if there exist adapted coordinate charts with respect to that the coefficients of the interior connection are zero. On the distribution D of an almost contact structure as on the total space of the vector bundle (D, π, M) , an admissible almost hypercomplex structure $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ is defined. Under the condition that the admissible almost complex structure φ is integrable, it is proved that the constructed almost hypercomplex structure is integrable if and only if the distribution D is a distribution of zero curvature. In the case of a Sasakian structure $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, the conditions that imply that the admissible hypercomplex structure $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ is an almost contact hyper-Kählerian structure.

Key words: almost contact metric structure, admissible hypercomplex structure, almost contact hyper-Kählerian structure, distribution of zero curvature.

References

1. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. *Tohoku Math. J.*, 1958, vol. 10, pp. 338–354.
2. Dombrowski P. On the geometry of the tangent bundle. *J. Reine Angew. Math.*, 1962, vol. 210, pp. 73–88.
3. Munteanu M. I. Some aspects on the geometry of the tangent bundles and tangent sphere bundles of a Riemannian manifold. *Mediterr. J. Math.*, 2008, vol. 5, pp. 43–59.
4. Kowalski O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold. *J. Reine Angew. Math.*, 1971, vol. 250, pp. 124–129.
5. Musso E., Tricerri F. Riemannian metrics on tangent bundles. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1988, vol. 150, iss. 4, pp. 1–19.
6. Galaev S. V. The intrinsic geometry of almost contact metric manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 16–22 (in Russian).
7. Galaev S. V. Almost contact Kählerian manifolds of constant holomorphic sectional curvature. *Russian Math.*, 2014, iss. 8, pp. 42–52.
8. Galaev S. V. Almost contact metric spaces with N -connection. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 258–264. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.
9. Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by an N -prolonged connection. *Yakutian Math. J.*, 2015, iss. 1, pp. 25–34 (in Russian).
10. Obata M. Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure. *Jap. J. Math.*, 1956, vol. 26, pp. 43–77.
11. Obata M. Affine connections in a quaternion manifold and transformations preserving the structure. *J. Math. Soc. Japan*, 1957, vol. 9, pp. 406–416.
12. Bogdanovich S. A., Ermolitski A. A. On almost hyperHermitian structures on Riemannian manifolds and tangent bundles. *Cent. Eur. J. Math.*, 2004, vol. 2, iss. 5, pp. 615–623.
13. Oproiu V. Hyper-Kähler structures on the tangent bundle of a Kähler manifold. *Balkan J. Geom. Appl.*, 2010, vol. 15, iss. 1, pp. 104–119.
14. Vagner V. V. The geometry of an $(n - 1)$ -dimensional nonholonomic manifold in an n -dimensional space. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza*, Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 173–255 (in Russian).
15. Bejancu A. Kahler contact distributions. *J. Geome-*



- try and Physics, 2010, vol. 60, pp. 1958–1967.
16. Schouten J., van Kampen E. Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. *Math. Ann.*, 1930, vol. 103, pp. 752–783.
17. Bukusheva A. V. The geometry of the contact metric spaces φ -connection. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2015, no 17 (214), iss. 40, pp. 20–24 (in Russian).

Please cite this article in press as:

Galaev S. V. Admissible Hypercomplex Structures on Distributions of Sasakian Manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 263–272 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272.

УДК 517.977

ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И. В. Гребенникова¹, А. Г. Кремлёв²

¹Гребенникова Ирина Владимировна, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, giv001@mail.ru

²Кремлёв Александр Гурьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры мультимедиа технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, kremlev001@mail.ru

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на ресурсы управления. Предлагается итерационная процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы с постоянным запаздыванием по фазовым переменным. Рассматривается задача управления по минимаксному критерию в постановке [1, 2] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на управляющие воздействия. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных. В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы, предложенные А. Г. Кремлёвым в работе [3], но при отсутствии запаздывания и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных переменных, в виде равномерно сходящейся последовательности. При реализации метода используются результаты исследований [1–5] также аппарат выпуклого анализа [6]. Оптимальное решение аппроксимируется с любой заданной точностью (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_{11}(t)x(t-h) + \mu G_{12}(t)y(t-h) + B_1(t)u(t), \\ \mu dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_{21}(t)x(t-h) + \mu G_{22}(t)y(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \quad (1)$$



где $t \in T = [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, A_{ij} , B_i , G_{ij} ($i, j = 1, 2$) — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы $x(t) = \psi_x(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t) = \psi_y(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0 , Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi_x(t) \in \Psi_x(t)$, $\psi_y(t) \in \Psi_y(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $\Psi_x(t)$, $\Psi_y(t)$ — заданные многозначные отображения со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n , R^m), непрерывные по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае $P = \{u(\cdot) \mid u(t) \in P(t), t \in T\}$, где $P(t)$ — заданное непрерывное, ограниченное, выпуклое многозначное отображение.

Будем предполагать выполненным следующее предположение.

Предположение 1. Корни $\lambda_s(t)$ характеристического уравнения

$$|A_{22}(t) - \mu\lambda E_m + \mu G_{22}(t)e^{-\lambda h}| = 0,$$

где E_m — единичная $m \times m$ матрица, удовлетворяют неравенству: $\text{Re } \lambda_s(t) < -2c < 0$ при $t \in T$, $c = \text{const} > 0$.

Тогда по критерию асимптотической устойчивости для линейных систем с запаздыванием [7, с. 162] при достаточно малых μ ($0 < \mu \leq \mu_0$) фундаментальная матрица решений $Y[t, \tau]$ системы $\mu dy/dt = A_{22}(t)y(t) + \mu G_{22}(t)y(t-h)$, $Y[t, \tau] = 0$, при $\tau > t$, $Y[\tau, \tau] = E_m$, при $t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1$ имеет оценку

$$\|Y[t, \tau]\| \leq c_0 \exp\{-c(t-\tau)/\mu\}, \quad (2)$$

$c_0 > 0$ — некоторая постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Введем следующие обозначения: $z' = (x', y')$, штрих — знак транспонирования; $Z_0 = X_0 \times Y_0$, $\psi' = (\psi'_x, \psi'_y)$, $\Psi = \Psi_x \times \Psi_y$, $Z(t, u(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ — множество (ансамбль) траекторий $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ системы (1), исходящих из Z_0 , при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Определим функционал $J(\cdot)$:

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot): R^{n+m} \rightarrow R$ — заданная выпуклая функция (с конечными значениями).

Постановка задачи. Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J(u(\cdot))$ на множестве P :

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)). \quad (3)$$

Пусть $Z[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (1) (при $u \equiv 0$), причем $Z[\tau, \tau] = E_{n+m}$, $Z[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$. Матрицу $Z[t, \tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t, \tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t, \tau] & Z_{12}[t, \tau] \\ Z_{21}[t, \tau] & Z_{22}[t, \tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t, \tau]$, $Z_{12}[t, \tau]$, $Z_{21}[t, \tau]$, $Z_{22}[t, \tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$.

Решение задачи (3) при каждом фиксированном значении параметра $\mu > 0$ описывается следующими соотношениями (используя [2, с. 73] и [3, с. 62], но для системы с запаздыванием):

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot) \in P} \max_{l \in R^{n+m}} \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \{l' z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)) - \varphi^*(l)\} \max\{\chi^0(l, \mu) \mid l \in R^{n+m}\} = \chi^0(l^0, \mu), \quad (4)$$

$$\chi^0(l, \mu) = -h^{**}(l) - \rho(-r(\cdot; t_1, l, \mu) \mid P),$$

$$h(l) = \varphi^*(l) - \rho(l' Z[t_1, t_0] \mid Z_0) - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(l' Z[t, \tau] G(\tau) \mid \Psi(\tau-h)) d\tau,$$



$$r(\tau; t, l, \mu) = (p'Z_{11}[t, \tau] + q'Z_{21}[t, \tau])B_1(\tau) + (1/\mu)(p'Z_{12}[t, \tau] + q'Z_{22}[t, \tau])B_2(\tau),$$

где $l' = (p', q')$, $p \in R^n$, $q \in R^m$, $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная [6, с. 120] к $\varphi(z)$, $h^{**}(l) = \overline{(\text{co } h)}(l)$ — замыкание выпуклой оболочки [6, с. 120] функции $h(l)$, $\rho(s|X)$ — опорная функция множества X на элементе s , $G(t) = \begin{pmatrix} G_{11}(t) & \mu G_{12}(t) \\ G_{21}(t)/\mu & G_{22}(t) \end{pmatrix}$. Оптимальное управление $u^0(\cdot, \mu)$ удовлетворяет условию минимума: для почти всех $\tau \in T$

$$\min_{u(\tau) \in P(\tau)} r(\tau; t_1, l^0, \mu)u(\tau) = r(\tau; t_1, l^0, \mu)u^0(\tau, \mu). \tag{5}$$

Полученные $u^0(\cdot, \mu)$, l^0 , $\varepsilon^0(t_1)$ зависят от параметра μ . Однако эти величины при $\mu \rightarrow +0$ могут не сходиться [4, с. 38] к соответствующим решениям задачи (3) для вырожденной системы (полученной из исходной при $\mu = 0$). Поэтому важным представляется построение аппроксимации оптимального управления $u^0(\cdot, \mu)$, доставляющей оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot, \mu))$ с заданной точностью (относительно параметра μ). В данной работе в основе предложенного способа определения требуемого приближения лежит возможность представления блоков $Z_{ij}[t, \tau; \mu]$ ($i, j = 1, 2$) в виде пределов равномерно сходящихся на $[t_0, t_1]$ последовательностей $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau; \mu]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало.

2. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (3)

Теорема 1 (см. [5]). *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0 > 0$ и постоянная $N > 0$, что в области μ ($0 < \mu \leq \mu_0$), $t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1$ выполняются оценки:*

$$\begin{aligned} \|Z_{11}[t, \tau]\| &\leq N/(1 - \mu N), & \|Z_{12}[t, \tau]\| &\leq \mu N(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1 - \mu N), \\ \|Z_{21}[t, \tau]\| &\leq N(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1 - \mu N), & \|Z_{22}[t, \tau]\| &\leq c_0 e^{-c(t-\tau)/\mu} + \mu N^2(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1 - \mu N). \end{aligned}$$

В [5, с. 146] приведены оценки для блоков $Z_{ij}[t, \tau]$ ($i, j = 1, 2$), причем последние могут быть представлены в виде пределов равномерно сходящихся на T последовательностей $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau; \mu]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало:

$$\begin{aligned} Z_{11}^{(k+1)}[t, \tau] &= X[t, \tau] - \int_{\tau}^t (dZ_{12}^{(0)}[t, s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s, \tau] + G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s - h, \tau]) ds, \\ Z_{22}^{(k+1)}[t, \tau] &= Y[t, \tau] + \int_{\tau}^t Z_{21}^{(k)}[t, s](A_{12}(s)Y[s, \tau] + \mu G_{12}(s)Y[s - h, \tau]) ds, \\ Z_{12}^{(k)}[t, \tau] &= \int_{\tau}^t Z_{11}^{(k)}[t, s](A_{12}(s)Y[s, \tau] + \mu G_{12}(s)Y[s - h, \tau]) ds, \\ Z_{21}^{(k)}[t, \tau] &= (1/\mu) \int_{\tau}^t Y[t, s](A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s, \tau] + G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s - h, \tau]) ds, \end{aligned}$$

предполагается существование $A_{22}^{-1}(t)$;

$$\begin{aligned} \|Z_{12}^{(k+1)}[t, \tau] - Z_{12}^{(k)}[t, \tau]\| &\leq \mu^{k+2} N_0 N_1^{k+1} (c_0/c)(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu}), \\ \|Z_{21}^{(k+1)}[t, \tau] - Z_{21}^{(k)}[t, \tau]\| &\leq \mu^{k+1} N_0 N_1^{k+1} (c_0/c)(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu}), \\ \|Z_{22}^{(k+1)}[t, \tau] - Z_{22}^{(k)}[t, \tau]\| &\leq \mu^k N_0 N_1^k (c_0/c)^2 (\mu(1 - e^{-c(t-\tau)/\mu}) - c(t - \tau)e^{-c(t-\tau)/\mu}), \end{aligned} \tag{6}$$

причем $Z_{11}^{(0)}[t, \tau] = X[t, \tau]$, $Z_{22}^{(0)}[t, \tau] = Y[t, \tau]$, где N_0, N_1 — некоторые положительные постоянные, $X[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений вырожденной системы, полученной из (1) при $\mu = 0$:

$$dx(t)/dt = A_0(t)x(t) + G_0(t)x(t - h) + B_0(t)u(t), \tag{7}$$



$$\begin{aligned}
 y(t) &= -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t)x(t-h) - A_{22}^{-1}(t)B_2(t)u(t), \\
 A_0(t) &= A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t), \quad G_0(t) = G_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t), \\
 B_0(t) &= B_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t),
 \end{aligned}$$

причем $X[\tau, \tau] = E_n$, $X[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$.

Для задачи (3) соотношение (4) можно представить, используя [5, с. 147], в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^0(t_1) &= \min_{u(\cdot) \in P} \max_{p, q} \{-\varphi^*(p, q) + \rho(p'Z_{11}[t_1, t_0] + q'Z_{21}[t_1, t_0]|X_0) + \\
 &+ \rho(p'Z_{12}[t_1, t_0] + q'Z_{22}[t_1, t_0]|Y_0) + \int_{t_0}^{t_1} [(p'Z_{11}[t_1, \tau] + q'Z_{21}[t_1, \tau])B_0(\tau) + \\
 &+ (1/\mu)q'Y[t_1, \tau]B_2(\tau) - \xi(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)]u(\tau)d\tau + \\
 &+ \int_{t_0}^{t_0+h} \rho((p'Z_{11}[t_1, \tau] + q'Z_{21}[t_1, \tau])G_0(\tau) - \tilde{\xi}(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau + \\
 &+ \int_{t_0}^{t_0+h} \rho((p'Z_{11}[t_1, \tau] + q'Z_{21}[t_1, \tau])\mu G_{12}(\tau) + (p'Z_{12}[t_1, \tau] + q'Z_{22}[t_1, \tau])G_{22}(\tau)|\Psi_y(\tau-h))d\tau\}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \xi(\tau, t_1, p, q) &= \frac{d}{d\tau} [p'Z_{12}[t_1, \tau] + (1/\mu) \int_{\tau}^{t_1} q'Y[t_1, s]A_{21}(s)Z_{12}[s, \tau]ds], \\
 \tilde{\xi}(\tau, t_1, p, q) &= \frac{d}{d\tau} [p'Z_{12}[t_1, \tau] + (1/\mu) \int_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t_1, s]A_{21}(s)Z_{12}[s, \tau]ds].
 \end{aligned}$$

Поскольку для любых $t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1$, $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, имеет место

$$\begin{aligned}
 \frac{dZ_{12}[t, \tau]}{d\tau} A_{22}^{-1}(\tau) &= -A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)Y[t, \tau] - G_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)Y[t-h, \tau] + \\
 &+ \int_{\tau}^t \{d[Z_{11}[t, s]A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)]Y[s, \tau]\} + \int_{\tau}^t \{d[Z_{11}[t, s]G_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)]Y[s-h, \tau]\}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

причем для последних двух слагаемых на основании теоремы А. Лебега [8, с. 259] справедливы оценки в области $0 < \mu \leq \mu_0$

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_{\tau}^t \{d[Z_{11}[t, s]A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)]Y[s, \tau]\} \right\| &= o(1), \\
 \left\| \int_{\tau}^t \{d[Z_{11}[t, s]G_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)]Y[s-h, \tau]\} \right\| &= o(1),
 \end{aligned}$$

то из соотношения (9) с учетом оценки (2) следует утверждение.

Лемма 1. При $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, для любых $u(\cdot) \in P(\cdot)$, $p \in R^n$, $q \in R^m$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_{t_0}^{t_1} \xi(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)u(\tau)d\tau \right\| &\leq \omega(\mu)[\|p\| + N_1 \|q\|], \\
 \left\| \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(\tilde{\xi}(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau \right\| &\leq \omega(\mu)[\|p\| + N_2 \|q\|],
 \end{aligned} \quad (10)$$

где $\omega(\mu) = o(1)$, $N_1, N_2 > 0$ — некоторые постоянные.



Используя последовательности $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau, \mu]$, $i, j = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, можно аппроксимировать решение задачи (3) с любой заданной точностью (относительно μ , $0 < \mu \leq \mu_0$). Будем предполагать, что элементы матриц $A_{12}(\tau)$, $A_{22}^{-1}(\tau)$ имеют на T ограниченные производные. Построим управляющее воздействие $u_\mu^{(k)}(\cdot)$, доставляющее оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1)$ с точностью $o(\mu^k)$.

Выполняя преобразования соотношения (8), аналогичные [9, с. 19], имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t_1) = & \min_{u(\cdot) \in P} \max_{p, q} \{ \rho[p'Z_{11}^{(k)}[t_1, t_0] + q'Z_{21}^{(k)}[t_1, t_0] + \xi_1^{(k)}(t_0, t_1, p, q)|X_0] + \\ & + \rho[p'Z_{12}^{(k)}[t_1, t_0] + q'Z_{22}^{(k)}[t_1, t_0] + \xi_2^{(k)}(t_0, t_1, p, q)|Y_0] + \int_{t_0}^{t_1} r^{(k)}(\tau, t_1, p, q)u(\tau)d\tau + \\ & + \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_{h_x}^{(k)}(\tau, t_1, p, q)|\Psi_x(\tau - h))d\tau + \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_{h_y}^{(k)}(\tau, t_1, p, q)|\Psi_y(\tau - h))d\tau + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} [\xi_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q)B_0(\tau) + \xi^{(k)}(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)]u(\tau)d\tau + \\ & + \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(\xi_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q)G_0(\tau) + \tilde{\xi}^{(k)}(\tau, t_1, p, q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau - h))d\tau - \varphi^*(p, q) \}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$p \in R^n, \quad q \in R^m,$$

где обозначены

$$\begin{aligned} \xi_i^{(k)}(\tau, t, p, q) &= p'(Z_{1i}[t, \tau] - Z_{1i}^{(k-1)}[t, \tau]) + q'(Z_{2i}[t, \tau] - Z_{2i}^{(k-1)}[t, \tau]), \quad i = 1, 2, \\ \xi^{(k)}(\tau, t, p, q) &= -p' \frac{d}{d\tau} (Z_{12}[t, \tau] - Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau]) - (1/\mu) \int_{\tau}^t q'Y[t, s]A_{21}(s) \frac{d}{d\tau} (Z_{12}[s, \tau] - Z_{12}^{(k-1)}[s, \tau]) ds, \\ \tilde{\xi}^{(k)}(\tau, t, p, q) &= -p' \frac{d}{d\tau} (Z_{12}[t, \tau] - Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau]) - (1/\mu) \int_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t, s]A_{21}(s) \frac{d}{d\tau} (Z_{12}[s, \tau] - Z_{12}^{(k-1)}[s, \tau]) ds, \\ r^{(k)}(\tau, t, p, q) &= (p'Z_{11}^{(k)}[t, \tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t, \tau])B_0(\tau) + (1/\mu)q'Y[t, \tau]B_2(\tau) - \\ &- \frac{d}{d\tau} [p'Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau] + (1/\mu) \int_{\tau}^t q'Y[t, s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s, \tau]ds]A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau), \\ r_{h_x}^{(k)}(\tau, t, p, q) &= (p'Z_{11}^{(k)}[t, \tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t, \tau])G_0(\tau) - \\ &- \frac{d}{d\tau} (p'Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau] + (1/\mu) \int_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t, s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s, \tau]ds)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau), \\ r_{h_y}^{(k)}(\tau, t, p, q) &= (p'Z_{11}^{(k)}[t, \tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t, \tau] + \xi_1^{(k)}(\tau, t, p, q))\mu G_{12}(\tau) + \\ &+ (p'Z_{12}^{(k)}[t, \tau] + q'Z_{22}^{(k)}[t, \tau] + \xi_2^{(k)}(\tau, t, p, q))G_{22}(\tau). \end{aligned}$$

Используя оценки (6), (10), получим следующий результат.

Лемма 2. *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0 > 0$ и постоянная $N > 0$, что для любых $t_0 \leq \tau \leq t_1$, $p \in R^n$, $q \in R^m$, $0 < \mu \leq \mu_0$ справедливы неравенства:*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{d\tau} (Z_{12}[t, \tau] - Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau]) \right\| &\leq \mu^{k+1} N^{k+2} (c_0/c) (1 - e^{-c(t-\tau)/\mu}), \\ \left\| \xi_i^{(k)}(\tau, t, p, q) \right\| &\leq \mu^{k+1} N^{k+2} (\|p\| + \|q\|) (c_0/c) (1 - e^{-c(t-\tau)/\mu}), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$



Пусть $\alpha_k(\mu) > 0$: $\alpha_k(\mu) = o(1)$, $\alpha_k(\mu)/\mu \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow +0$, причем для $\tau \in [t_0, t_1 - \alpha_k(\mu)]$ выполняется

$$\|Y[t_1, \tau]\| \leq c_0 \exp\{-c(t_1 - \tau)/\mu\} < c_0 \mu^{k+2} N_1, \quad (12)$$

где $N_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Теорема 2. При $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, для любых $p \in R^n$, $q \in R^m$ выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \chi^0(p, q) &= \chi^{(k)}(p, q) + \widehat{\xi}_k(p, q), \\ \varepsilon^0(t_1) &= \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1}), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} |\widehat{\xi}_k(p, q)| &\leq \|l\| \widehat{\omega}_k(\mu), \quad \widehat{\omega}_k(\mu) = O(\mu^{k+1}), \\ \chi^{(k)}(p, q) &= -h_{(k)}^{**}(p, q) - \int_{t_0}^{t_1 - \alpha_k(\mu)} \rho(-r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) | P(\tau)) d\tau - \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} \rho(-r_2^{(k)}(s, t_1, p, q) | V(s)) ds, \\ V(s) &= P(t_1 - \mu s), \\ h_{(k)}(p, q) &= \varphi^*(p, q) - \rho(p' Z_{11}^{(k)}[t_1, t_0] + \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q' \Phi[t_1, s] (A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s, t_0] + \\ &+ G_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, t_0]) ds | X_0) - \rho(p' Z_{12}^{(k)}[t_1, t_0] + \\ &+ \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q' \Phi[t_1, s] (A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{12}^{(k)}[t_1 - \mu s, t_0] + G_{21}(t_1 - \mu s) Z_{12}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, t_0]) ds | Y_0) - \\ &- \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_{h_x}^{(k)}(\tau, t_1, p, q) | \Psi_x(\tau - h)) d\tau - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_{h_y}^{(k)}(\tau, t_1, p, q) | \Psi_y(\tau - h)) d\tau, \end{aligned}$$

функции $r_i^{(k)}(\tau, t_1, p, q)$, $i = 1, 2$ определяются следующим образом:
при $t_0 \leq \tau \leq t \leq t_1 - \alpha_k(\mu)$

$$\begin{aligned} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) &= (p' Z_{11}^{(k)}[t_1, \tau] + \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q' \Phi[t_1, s] (A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s, \tau] + \\ &+ G_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, \tau]) ds) B_0(\tau) - \frac{d}{d\tau} (p' Z_{12}^{(k-1)}[t_1, \tau] + \\ &+ \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q' \Phi[t_1, s] A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{12}^{(k-1)}[t_1 - \mu s, \tau] ds) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau), \end{aligned} \quad (14)$$

при $0 \leq s < \alpha_k(\mu)/\mu$

$$\begin{aligned} r_2^{(k)}(s, t_1, p, q) &= [q' \Phi[t_1, s] + \frac{d}{ds} (p' Z_{12}^{(k-1)}[t_1, t_1 - \mu s] + \\ &+ \int_0^s q' \Phi[t_1, \sigma] A_{21}(t_1 - \mu \sigma) Z_{12}^{(k-1)}[t_1 - \mu \sigma, t_1 - \mu s] d\sigma) A_{22}^{-1}(t_1 - \mu s)] B_2(t_1 - \mu s) + \\ &+ \mu [p' Z_{11}^{(k)}[t_1, t_1 - \mu s] + \int_0^s q' \Phi[t_1, \sigma] (A_{21}(t_1 - \mu \sigma) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu \sigma, t_1 - \mu s] + \\ &+ G_{21}(t_1 - \mu \sigma) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu \sigma - h, t_1 - \mu s]) d\sigma] B_0(t_1 - \mu s), \quad \Phi[t_1, s] = Y[t_1, t_1 - \mu s], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \max\{\chi^{(k)}(p, q) | p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}). \quad (16)$$



Доказательство. Из (11) следует

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot) \in P} \max_{p,q} \{ & -h^{**}(p,q) - \int_{t_0}^{t_1} r^{(k)}(\tau, t_1, p, q) u(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} [\xi_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) B_0(\tau) + \xi^{(k)}(\tau, t_1, p, q) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau)] u(\tau) d\tau \} = \max_{p,q} \{ \chi^0(p, q) \}, \end{aligned} \quad (17)$$

где функция $h(l) \equiv h(p, q)$ из (4), учитывая оценки (6), (10) и лемму 2, представима в виде

$$h(p, q) = h_{(k)}(p, q) + \hat{\xi}_1(l, \mu),$$

причем $\hat{\xi}_1(l, \mu)$ имеет по μ порядок малости $O(\mu^{k+1})$ при $0 < \mu \leq \mu_0$,

$$\begin{aligned} h_{(k)}(p, q) = \varphi^*(p, q) - \rho[p'Z_{11}^{(k)}[t_1, t_0] + q'Z_{21}^{(k)}[t_1, t_0] | X_0] - \rho[p'Z_{12}^{(k)}[t_1, t_0] + q'Z_{22}^{(k)}[t_1, t_0] | Y_0] - \\ - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_{h_x}^{(k)}(\tau, t_1, p, q) | \Psi_x(\tau - h)) d\tau - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_{h_y}^{(k)}(\tau, t_1, p, q) | \Psi_y(\tau - h)) d\tau. \end{aligned}$$

Далее, в силу оценок (6), (10), леммы 2, с учетом оценки (12) справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} r^{(k)}(\tau, t_1, p, q) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_1 - \alpha_k(\mu)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) u(\tau) d\tau + \\ + \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s, t_1, p, q) u(t_1 - \mu s) ds + \hat{\xi}_k(l, \mu), \end{aligned} \quad (18)$$

где $|\hat{\xi}_k(l, \mu)| \leq \|l\| \hat{\omega}_k(\mu)$, $\hat{\omega}_k(\mu) = o(\mu^k)$ при $0 < \mu \leq \mu_0$.

Таким образом, из представлений (17), (18) получаем следующий результат:

$$\varepsilon^0(t_1) = \max_{p,q} \{ \chi^0(p, q) \} = \max_{p,q} \{ \chi^{(k)}(p, q) \} + \hat{\xi}_k(l, \mu),$$

где

$$\begin{aligned} \chi^{(k)}(p, q) = -h_{(k)}^{**}(p, q) - \int_{t_0}^{t_1 - \alpha_k(\mu)} \rho(-r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) | P(\tau)) d\tau - \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} \rho(-r_2^{(k)}(s, t_1, p, q) | V(s)) ds, \\ V(s) = P(t_1 - \mu s), \end{aligned}$$

$\hat{\xi}_k(l, \mu)$ имеет по μ порядок малости $O(\mu^{k+1})$ при $0 < \mu \leq \mu_0$, функции $r_i^{(k)}(\tau, t_1, p, q)$, $i = 1, 2$ определяются соотношениями (14), (15) соответственно. \square

Предположение 2. 1. Система (7) относительно управляема [10] на T .

2. Для любого $t \in T$ $\text{rank}\{B_2(t_1), A_{22}(t_1)B_2(t_1), \dots, A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1)\} = m$.

3. Максимум в (16) достигается на векторе $(l^{(k)})' = (p^{(k)'}, q^{(k)'})$ таком, что $r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) \neq 0$, $q^{(k)} \neq 0$.

Следует заметить, что в условиях предположения 2 задача (3) разрешима [1, с. 110], [2, с. 76], т.е. существует управление $u^0(\cdot) \in P(\cdot)$, удовлетворяющее (5) при $0 < \mu \leq \mu_0$, причем вектор $(l^0)' = (p^{0'}, q^{0'})$, максимизирующий (4), отличен от нулевого.

Теорема 3. Пусть выполнены условия предположения 2. Тогда при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, управляющее воздействие

$$u_\mu^{(k)}(\tau) = \begin{cases} u^{(k)}(\tau), & t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha_k(\mu), \\ v^{(k)}((t_1 - \tau)/\mu), & t_1 - \alpha_k(\mu) < \tau \leq t_1, \end{cases}$$



доставляет оценку $\varepsilon^0(t_1)$ с точностью $O(\mu^{k+1})$:

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot)) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) + O(\mu^{k+1}), \quad (19)$$

причем $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ определяются условиями:

для почти всех $\tau \in [t_0, t_1 - \alpha_k(\mu)]$

$$r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})u^{(k)}(\tau) = \min_{u(\tau) \in P(\tau)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})u(\tau);$$

для почти всех $s \in [0, \alpha_k(\mu)/\mu]$

$$r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})v^{(k)}(s) = \min_{v(s) \in V(s)} r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})v(s).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из свойств функции

$$L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) = -h_{(k)}^{**}(p, q) + \int_{t_0}^{t_1 - \alpha_k(\mu)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q; \mu)u(\tau)d\tau + \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s, t_1, p, q; \mu)v(s)ds,$$

а именно элементы $p^{(k)}$, $q^{(k)}$, $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ определяют седловую точку $L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot))$, т.е. для $p \in R^n$, $q \in R^m$, $u \in P(\cdot)$, $v \in V(\cdot)$

$$L_{(k)}(p, q; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) \leq L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) \leq L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u(\cdot), v(\cdot)),$$

причем (пользуясь (16))

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(k)}(t_1) &= \min_{u(\cdot), v(\cdot)} \max_{p, q} L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) = \max_{p, q} \min_{u(\cdot), v(\cdot)} L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) = \\ &= L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)), \\ p &\in R^n, \quad q \in R^m, \quad u \in P(\cdot), \quad v \in V(\cdot). \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) = \max_{p \in R^n, q \in R^m} \{L_{(k)}(p, q; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) + \hat{\xi}_k(p, q; \mu)\}, \quad (20)$$

где $\hat{\xi}_k(p, q; \mu)$ имеет такой же порядок малости по μ ($0 < \mu \leq \mu_0$), как в (13), и максимум в (20) достигается на некотором векторе $\hat{l} \in \text{co } M^{(k)}$, здесь $M^{(k)} = \{l \in R^{n+m} \mid l \in \partial\varphi(z), z \in Z(t_1; u_\mu^{(k)}(\cdot), Z_0), \varphi(z) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot))\}$, $\partial\varphi(z)$ — субдифференциал функции φ в точке z [6], $\text{co } M^{(k)}$ — выпуклая оболочка $M^{(k)}$ (в данном случае $M^{(k)}$ компакт в R^{n+m}). Таким образом, имеем:

$$J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) = \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1}),$$

при $0 < \mu \leq \mu_0$ и, следовательно, справедливо равенство (19). □

Библиографический список

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М. : Наука, 1968. 475 с.
2. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.
3. Кремлёв А. Г. Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1993. № 9. С. 61–78.
4. Гребенникова И. В. Аппроксимация решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Изв. вузов. Матем. 2011. №. 10. С. 28–39. DOI: 10.3103/S1066369X11100045.
5. Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г. Аппроксимация управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 142–151. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-142-151.



6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 492 с.
7. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959. 468 с.
8. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М. : Наука, 1974. 468 с.
9. Гребенникова И. В. Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 14–22.
10. Кириллова Ф. М. Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.

Образец для цитирования:

Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г. Итерационная процедура построения оптимального решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 272–280. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280.

Iterative Procedure of Constructing Optimal Solving in the Minimax Problem of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Geometric Constraints

I. V. Grebennikova¹, A. G. Kremlev²

¹Irina V. Grebennikova, Ural Federal University, 19, Mira st., 620002, Ekaterinburg, Russia, giv001@mail.ru

²Alexandr G. Kremlev, Ural Federal University, 19, Mira st., 620002, Ekaterinburg, Russia, kremlev001@mail.ru

The control problem for the singularly perturbed system with delay with indeterminate initial conditions and geometric constraints on the control resources according to the minimax criterion is considered. Iterative procedure of constructing control response that approximates the optimal solution with given accuracy with respect to a small positive parameter is proposed.

Key words: singularly perturbed system with delay, optimal control, fundamental matrix.

References

1. Krasovskii N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka, 1968, 475 p. (in Russian).
2. Kurzhanskij A. B. *Upravlenie i nabljudenie v usloviyah neopredelennosti* [Control and Observation under the Uncertainty Conditions]. Moscow, Nauka, 1977, 392 p. (in Russian).
3. Kremlev A. G. Asymptotic properties of a set of trajectories of a singularly perturbed system in the optimal control problem. *Autom. Remote Control*, 1993, vol. 54, no. 9, pp. 1353–1367.
4. Grebennikova I. V. Solution approximation in a minimax control problem for a singularly perturbed system with delay. *Russian Math.*, 2011, vol. 55, no. 10, pp. 23–33. DOI: 10.3103/S1066369X11100045.
5. Grebennikova I. V., Kremlev A. G. Approximation of control for singularly perturbed system with delay with geometric constraints. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 142–151 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-142-151.
6. Rokafellar R. *Vypuklyj analiz* [Convex Analysis]. Moscow, Mir, 1973, 492 p. (in Russian).
7. Krasovskii N. N. *Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizheniya* [Some Problems in the Theory of Stability of Motion]. Moscow, Fizmatgiz, 1959, 468 p. (in Russian).
8. Natanson I. P. *Teoriya funktsij veshhestvennoj peremennoj* [Theory of Functions of a Real Variable]. Moscow, Nauka, 1974, 468 p. (in Russian).
9. Grebennikova I. V. On iterative method of constructing optimal control for singularly perturbed systems with delay. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 3, pp. 14–22 (in Russian).
10. Kirillova F. M. Relative controllability of linear dynamic systems with delay. *Doklady AN SSSR*, 1967, vol. 174, no. 6, pp. 1260–1263 (in Russian).

Please cite this article in press as:

Grebennikova I. V., Kremlev A. G. Iterative Procedure of Constructing Optimal Solving in the Minimax Problem of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Geometric Constraints. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 272–280 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280.



УДК 514.17

О РАЗРЕШИМОСТИ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МИНКОВСКОГО – АЛЕКСАНДРОВА

В. А. Клячин

Клячин Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики, Волгоградский государственный университет, klchnv@mail.ru

В статье рассматривается многомерный дискретный аналог задачи Минковского в постановке А. Д. Александрова о существовании выпуклого многогранника с заданными кривизнами в его вершинах. Найдены условия разрешимости этой задачи в общей постановке, когда в вершинах многогранника задается значение меры кривизны, определяемой произвольной непрерывной функцией, заданной на сфере $F : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow (0, +\infty)$. В основе решения задачи лежит разрешимость вопроса о том, можно ли каждой триангуляции конечного множества точек $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$ единичной сферы сопоставить выпуклый многогранник, у которого нормали к граням принадлежат множеству P .

Ключевые слова: выпуклый многогранник, триангуляция, сферический симплекс.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-281-288

ВВЕДЕНИЕ

Классическая задача Минковского ставится как задача о существовании выпуклой замкнутой поверхности с заданной гауссовой кривизной, являющейся функцией нормали к поверхности. Иными словами, пусть $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — положительная функция на единичной сфере \mathbb{S}^2 . Необходимо определить, существует ли замкнутая гладкая выпуклая поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$, гауссова кривизна K которой в точке $x \in M$ удовлетворяет соотношению

$$K(x) = F(\xi(x)),$$

где $\xi(x)$ — вектор внешней нормали поверхности M в соответствующей точке.

Условие разрешимости данной задачи в случае аналитической функции F найдено Г. Минковским и имеет вид

$$\int_{\mathbb{S}^2} \frac{\xi}{F(\xi)} = 0.$$

Вопросы разрешимости аналогичных задач в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, а также с более слабыми условиями регулярности на функцию F рассматривались в работах А. В. Погорелова [1], К. Йоргенса (Iörgens) [2], Е. Калаби (Calabi) [3], А. Д. Александрова [4], А. И. Бодренко [5].

В работе [6] А. Д. Александровым была поставлена задача о существовании выпуклого многогранника с заданными значениями $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ кривизн всех его вершин. При этом было отмечено, что необходимыми условиями разрешимости задачи являются соотношения

$$0 < \omega_i < 2\pi, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{i=1}^N \omega_i = 4\pi.$$

Достаточность этих условий для случая пространства \mathbb{R}^3 была доказана А. А. Зильбербергом (Zil'berberg) в [7]. Заметим, что поставленную задачу А. Д. Александровым можно считать дискретным аналогом проблемы Минковского.

В настоящей статье мы рассматриваем решение подобной задачи в \mathbb{R}^n , предлагая, в частности, несколько иной подход, нежели используемый в [7]. Для формулировки постановки задачи и результатов нам понадобится ввести некоторые понятия.

Пусть $\Delta \subset \mathbb{S}^{n-1}$ — некоторое замкнутое подмножество единичной сферы, лежащее в некоторой открытой полусфере. Множество Δ назовем сферически выпуклым, если оно вместе с любой парой своих точек содержит и кратчайшую дугу, соединяющую эти точки. Выпуклой оболочкой $\text{conv}(A)$ множества $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$, лежащего в некоторой открытой полусфере, мы назовем наименьшее сферически выпуклое множество, содержащее A .



Пусть, как и ранее, $F : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow (0, +\infty)$ — положительная, непрерывная функция, заданная на единичной сфере в \mathbb{R}^n , и такая, что

$$F(-\xi) = F(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Для измеримого множества $\Delta \subset \mathbb{S}^{n-1}$ введем обозначение

$$\mu_F(\Delta) = \int_{\Delta} F(\xi) d\xi.$$

Рассмотрим в \mathbb{R}^n некоторую выпуклую замкнутую многогранную поверхность M и пусть $V = V(M)$ — совокупность ее вершин. Обозначим через ξ_1, \dots, ξ_m векторы внешних нормалей к граням этой поверхности, инцидентных с вершиной $v \in V$. Пусть

$$\Sigma(v) = \text{conv}(\{\xi_1, \dots, \xi_m\})$$

обозначает выпуклую оболочку множества концов этих нормалей в сферической геометрии. Учитывая выпуклость M , можно сделать вывод, что множество $\Sigma(v) \subset \mathbb{S}^{n-1}$ лежит в некоторой открытой полусфере для всякой вершины v . Очевидно, что

$$\mathbb{S}^{n-1} = \cup_v \Sigma(v),$$

где объединение выполнено по всем вершинам многогранника M . Каждой вершине $v \in V(M)$ теперь можно сопоставить число

$$\sigma(v) = \mu_F(\Sigma(v)).$$

Заметим, что в силу четности функции $F(\xi)$ величина

$$\sigma_F = 2\mu_F(HS),$$

где HS — полусфера сферы \mathbb{S}^{n-1} , не зависит от выбора полусферы HS , и из выпуклости многогранника M будем иметь

$$\sigma(v) \leq \sigma_F.$$

Пусть задан набор положительных чисел

$$\sigma_F/2 > \sigma_1, \quad \dots, \quad \sigma_N > 0,$$

таких, что

$$\sigma_F \equiv \int_{\mathbb{S}^{n-1}} F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^N \sigma_i.$$

Требуется определить условия существования выпуклого многогранника, имеющего N вершин v_1, \dots, v_N , пронумерованных так, что

$$\sigma(v_i) = \sigma_i \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

1. ТРИАНГУЛЯЦИЯ СФЕРЫ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

В дальнейшем нам понадобится определение понятия триангуляции Делоне конечного множества на сфере \mathbb{S}^{n-1} . Сферическим k -мерным симплексом $S = S(\xi_0, \dots, \xi_k)$ назовем выпуклую оболочку точек сферы ξ_0, \dots, ξ_k , $0 \leq k < n$, лежащих в некоторой открытой полусфере. Рассмотрим некоторое конечное множество P точек на сфере \mathbb{S}^{n-1} . Триангуляцией P назовем совокупность невырожденных симплексов $\{S_i\}$ такую, что

- 1) любые два симплекса не пересекаются по внутренним точкам;
- 2) объединение вершин всех симплексов совпадает с P .

Рассмотрим некоторый невырожденный $(n-1)$ -мерный симплекс $S \subset \mathbb{S}^{n-1}$. Описанной сферой симплекса S назовем $(n-2)$ -мерную сферу, полученную пересечением сферы \mathbb{S}^{n-1} с гиперплоскостью, проходящей через вершины S . Через $B(S)$ обозначим тот сферический $(n-1)$ -мерный шар в \mathbb{S}^{n-1} , который содержит S , а его граница является описанной сферой симплекса S . Триангуляцию T



конечного множества $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$ назовем *триангуляцией Делоне*, если для любого ее симплекса $S \in T$ внутренность множества $B(S)$ не содержит точек из P .

Пусть M — выпуклый замкнутый многогранник в \mathbb{R}^n , причем число граней инцидентных с каждой его вершиной равно n . В таком случае для каждой вершины $v \in V(M)$ множество $\Sigma(v)$ представляет собой симплекс. Рассмотрим множество $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$ нормалей к граням M и построим триангуляцию P следующим образом:

$$T = \{\Sigma(v) : v \in V(M)\}.$$

Таким образом, каждому многограннику M с n -гранными вершинами можно сопоставить триангуляцию $T = T(M)$, причем

$$\mathbb{S}^{n-1} = \cup_{S \in T} S. \tag{1}$$

Теорема 1. *Если в многогранник M можно вписать сферу, то $T(M)$ — триангуляция Делоне.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что в M вписана единичная сфера.

Проверим выполнение условия триангуляции Делоне. Выберем $S \in T(M)$ и предположим, что пересечение внутренности $B(S)$ с P не пусто. Пусть $q \in P$ — внутренняя точка $B(S)$. Симплекс S определяется некоторой вершиной $v \in V(M)$ многогранника M . Эта вершина есть точка пересечения гиперплоскостей, касательных к сфере \mathbb{S}^{n-1} в вершинах симплекса S , которые лежат на границе $B(S)$. Поэтому v представляет собой вершину конуса построенного как огибающая семейства всех гиперплоскостей касательных к \mathbb{S}^{n-1} в точках границы $\partial B(S)$. Но тогда гиперплоскость, касательная к сфере \mathbb{S}^{n-1} в точке q , отделяет v от сферы \mathbb{S}^{n-1} . В частности, такая гиперплоскость является гиперплоскостью некоторой грани M , разделяющей вершины на два подмножества. Это противоречит выпуклости многогранника. Теорема доказана. \square

Зададимся вопросом: для каких триангуляций конечного множества точек $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$, обладающих свойством (1), найдется выпуклый многогранник M , для которого $T = T(M)$? В работе мы опишем два класса таких триангуляций.

Рассмотрим в пространстве некоторую C^1 -гладкую замкнутую строго выпуклую поверхность $\Phi \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\eta : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \Phi$ отображение, обратное к гауссовому (сферическому) отображению поверхности Φ . Пусть $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$ — конечное множество точек на сфере. Триангуляцию T этого множества точек со свойством (1) мы будем называть Φ -триангуляцией, если ее симплексы обладают следующим свойством. Рассмотрим симплекс $S \in T$ с вершинами ξ_1, \dots, ξ_n и точку v пересечения гиперплоскостей, касательных к Φ в точках $\eta(\xi_1), \dots, \eta(\xi_n)$. Через $\Phi(S)$ обозначим ту часть Φ , в точках x которой выполнено неравенство $\langle v - x, \xi \rangle \geq 0$, где ξ — внешняя нормаль к поверхности Φ . Другими словами, $B(S)$ — видимая из точки v часть поверхности Φ . Для Φ триангуляции мы требуем, чтобы внутренность $\Phi(S)$ не содержала бы точек $\eta(P)$. Это условие является специальным аналогом условия пустой сферы в классическом случае триангуляции Делоне.

Теорема 2. *Пусть T — некоторая Φ -триангуляция конечного множества точек $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$, для которой выполнено (1). Тогда в \mathbb{R}^n найдется выпуклый многогранник M , для которого $T = T(M)$.*

Доказательство. Введем следующее обозначение:

$$H_0(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - p, p \rangle \leq 0\}, \quad p \neq 0.$$

Заметим, что $H_0(p)$ представляет собой полупространство, содержащее начало координат и определяемое плоскостью, проходящей через точку p и ортогональной радиус-вектору этой точки. Построим многогранную область

$$\Omega_0 = \cap_{p \in P} H_0(p).$$

Ясно, что Ω_0 — выпуклая область и ее граница представляет собой выпуклый многогранник M_0 . Далее каждую гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - p, p \rangle = 0\}$ перенесем параллельно самой себе так, чтобы она стала касательной к поверхности Φ в точке $\eta(p)$. В результате мы получим новые полупространства $H(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - \eta(p), \eta(p) \rangle \leq 0\}$.

Покажем, что граница M пересечения $\Omega = \cap_{p \in P} H(p)$ будет искомым многогранником.

Пусть $S \in T$ — симплекс с вершинами ξ_1, \dots, ξ_n . Необходимо показать, что точка q пересечения гиперплоскостей, касательных к поверхности Φ в точках $\eta(\xi_1), \dots, \eta(\xi_n)$, определяет вершину многогранника M . Если это не так, то должна найтись точка $p \in P$, для которой $q \notin H(p)$. При этом в силу



условия Φ -триангуляции точка p лежит вне множества $\Phi(S)$. В силу выпуклости поверхности Φ и определения множества $\Phi(S)$ гиперплоскость, касательная к Φ в точке p , не может отделять точку q от поверхности Φ . Это значит, что $q \in H(p)$. Тем самым теорема доказана. \square

Из доказанной теоремы непосредственно получаем

Следствие 1. Если для заданных чисел $\sigma_F/2 > \sigma_i > 0, i = 1, \dots, N$, таких, что

$$\sigma_F = \sum_{i=1}^N \sigma_i,$$

найдется Φ триангуляция $T = \{S_i, i = 1, \dots, N\}$, для которой

$$\mu_F(S_i) = \sigma_i,$$

то найдется выпуклый многогранник M с вершинами v_1, \dots, v_N такой, что

$$\sigma(v_i) = \sigma_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Следствие 2. Если в условиях теоремы заданная триангуляция T является триангуляцией Делоне, то искомым многогранником можно найти такой, что в него можно вписать единичную сферу.

Доказательство. Достаточно показать, что найденный при доказательстве теоремы 2 многогранник M_0 — требуемый. Это будет следовать из того факта, что точка v пересечения n касательных к S^{n-1} гиперплоскостей, построенных в вершинах сферического симплекса $S \in T$ заданной триангуляции, определяет вершину многогранника M_0 . Если это не так, то найдется вершина триангуляции w такая, что касательная гиперплоскость к S^{n-1} , построенная в этой вершине, отделяет точку v и начало координат. Но тогда точка w должна принадлежать внутренности $B(S)$. Это устанавливается рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 1. Таким образом, мы приходим к нарушению условия Делоне. Полученное противоречие доказывает утверждение следствия. \square

Опишем второй класс триангуляций. Для этого рассмотрим некоторый выпуклый многогранник M_0 и построим по нему триангуляцию $T_0 = T(M_0)$. К этой триангуляции будем применять такую операцию. Выбираем некоторую внутреннюю точку p некоторого симплекса $S \in T_0$ с вершинами ξ_1, \dots, ξ_n и разбиваем этот симплекс на n симплексов $S_i = S(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, p, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n), i = 1, \dots, n$. При этом соответствующий многогранник строится отсечением подходящей гиперплоскостью, ортогональной радиус-вектору точки p части исходного многогранника у его вершины, определяемой симплексом S . Причем эта гиперплоскость должна пройти так, чтобы отделить эту вершину от остальных вершин исходного многогранника.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЗАДАННОГО РАЗБИЕНИЯ СФЕРЫ

Таким образом, из вышесказанного следует, что разрешимость поставленной задачи следует из возможности построения триангуляции первого или второго класса конечного множества точек сферы с заданными значениями мер μ_F симплексов. В этом параграфе статьи мы покажем построение требуемой триангуляции для второго класса. Ограничимся рассмотрением случая $n = 3$. Из формулы Эйлера вытекает четность количества треугольников триангуляции конечного набора точек сферы, обладающей свойством (1).

Теорема 3. Пусть $n = 3$ и заданы числа $\sigma_F/2 > \sigma_i > 0, i = 1, \dots, N = 2k \geq 4$, такие, что

$$\sigma_F = \sum_{i=1}^N \sigma_i.$$

Тогда найдется триангуляция второго класса $T = \{S_i, i = 1, \dots, N\}$, для которой

$$\mu_F(S_i) = \sigma_i.$$

Разобьем доказательство теоремы на несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $S_0 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$ — единичный симплекс в \mathbb{R}^n .



Лемма 1. Пусть $f : S_0 \rightarrow S_0$ — непрерывное отображение такое, что $f(\partial S_0) = \partial S_0$. Тогда $f(S_0) = S_0$.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда найдется точка $y \in S_0 \setminus f(S_0)$. Заметим, что в силу условия леммы y — внутренняя точка симплекса. Пусть x_0 — некоторая внутренняя точка S_0 . Рассмотрим семейство симплексов $S(t) = S(A_0(t), \dots, A_n(t))$, $0 \leq t \leq 1$, где $A_i(t) = A_i(1-t) + x_0 t$, $A_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (1 стоит на i -м месте).

Заметим, что $S(0) = S_0$, $S(1) = x_0$. В силу непрерывности отображения f при всех t , достаточно близких к 1, множество $f(S(t))$ содержится в некоторой окрестности точки $f(x_0)$. В силу того что $f(x_0) \neq y$, можно выбрать эту окрестность так, чтобы точка y в нее не попадала. Из соображений непрерывности по параметру t найдется такое $t_0 \in (0, 1)$, что $y \in f(S(t_0))$. Это противоречит предположению о том, что $y \in S_0 \setminus f(S_0)$. Тем самым лемма 1 доказана. \square

Пусть $S \subset \mathbb{S}^{n-1}$ — некоторый симплекс с вершинами ξ_1, \dots, ξ_n и $q \in S$ — произвольная его точка. Построим симплексы $S_1(q), \dots, S_n(q)$:

$$S_i(q) = S(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, q, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Лемма 2. Для любого набора чисел

$$0 \leq \sigma_1, \dots, \sigma_n \leq \mu_F(S), \quad \sum_{i=1}^n \sigma_i = \mu_F(S),$$

найдется точка $q \in S$ такая, что

$$\sigma_i = \mu_F(S_i(q)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по размерности пространства. При $n = 1$ утверждение следует из теоремы о промежуточном значении непрерывной функции. Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех размерностей, меньших $n - 1$. Пусть, как и выше, S_0 — единичный симплекс в \mathbb{R}^{n-1} и $g : S_0 \rightarrow S(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — некоторый гомеоморфизм, переводящий k -мерные грани симплекса S_0 в соответствующие k -мерные грани симплекса $S(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Построим непрерывное отображение $h : S \rightarrow S_0$ следующим образом. Для точки $q \in S$ положим

$$h(q) = \left(\frac{\mu_F(S_1(q))}{\mu_F(S)}, \frac{\mu_F(S_2(q))}{\mu_F(S)}, \dots, \frac{\mu_F(S_{n-1}(q))}{\mu_F(S)} \right).$$

Ясно, что $h(q) \in S_0$. Несложно увидеть, что в силу предположения индукции отображение $f = h \circ g$ удовлетворяет условиям лемм 1. Поэтому для всякой точки $y \in S_0$ найдется такая точка $x_0 \in S_0$, что $f(x_0) = y$. В частности, для

$$y = \left(\frac{\sigma_1}{\mu_F(S)}, \frac{\sigma_2}{\mu_F(S)}, \dots, \frac{\sigma_{n-1}}{\mu_F(S)} \right) \in S_0$$

найдется точка $x_0 \in S_0$ такая, что $f(x_0) = y$. Положим $q = g(x_0)$. Тогда по построению отображения h получаем:

$$\left(\frac{\mu_F(S_1(q))}{\mu_F(S)}, \dots, \frac{\mu_F(S_{n-1}(q))}{\mu_F(S)} \right) = f(x_0) = y = \left(\frac{\sigma_1}{\mu_F(S)}, \dots, \frac{\sigma_{n-1}}{\mu_F(S)} \right),$$

что и приводит к требуемому. \square

Замечание. При $n = 3$ справедливость доказанной леммы легко устанавливается и в случае, когда вместо симплекса $S \subset \mathbb{S}^2$ рассмотреть некоторую полусферу $HS \subset \mathbb{S}^2$ с выбранными на ее границе тремя точками, поскольку в этом случае необходимый при доказательстве гомеоморфизм $g : S_0 \rightarrow HS$, очевидно, также существует.

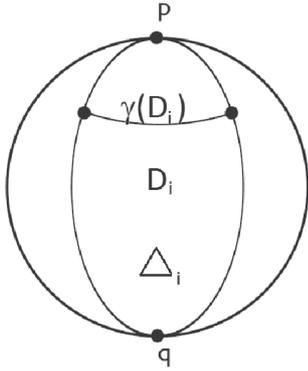
Лемма 3. Теорема 3 верна для $k = 2$.

Доказательство. Пусть $p = (0, 0, 1)$, $q = (0, 0, -1)$ — две диаметрально противоположные точки сферы $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Будем рассматривать тройки областей D_1, D_2, D_3 , ограниченных дугами $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ окружностей большого радиуса, соединяющих точки p и q (рисунок).



Будем считать, что

$$\partial D_1 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \quad \partial D_2 = \Sigma_2 \cup \Sigma_3, \quad \partial D_3 = \Sigma_3 \cup \Sigma_1.$$



Более того, мы будем рассматривать только те допустимые положения дуг $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, для которых справедливы неравенства

$$\mu_F(D_i) > \sigma_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ясно, что в силу неравенства $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_F - \sigma_4 < \sigma_F$ такое множество дуг непусто. В каждой области D_i построим дугу $\gamma(D_i)$ окружности большого радиуса, соединяющую две точки на ее граничных дугах, лежащие на одной горизонтальной плоскости, и такую,

что для нижнего сферического треугольника Δ_i , ограниченного граничными дугами и дугой $\gamma(D_i)$ было выполнено равенство $\mu_F(\Delta_i) = \sigma_i$. В силу неравенств $\sigma_i < \sigma_F/2$ получающиеся таким образом сферические треугольники лежат в некоторой полусфере. Покажем, что найдется такое расположение дуг $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, что дуги $\gamma(D_i), i = 1, 2, 3$ образуют сферический треугольник. С этой целью покажем сначала, что дугу Σ_3 можно выбрать так, чтобы дуги $\gamma(D_2), \gamma(D_3)$ имели общую точку на Σ_3 . Заметим, что если дугу Σ_3 перемещать в сторону дуги Σ_1 , то дуга $\gamma(D_3)$ будет перемещаться к точке p и в положении, близком к крайнему допустимому (когда $\mu_F(D_3)$ близко к σ_3), эта дуга будет располагаться выше дуги $\gamma(D_2)$. А если дугу Σ_3 перемещать в обратном направлении, то выше оказывается дуга $\gamma(D_2)$. Из соображений непрерывности найдется такое положение дуги Σ_3 , что дуги $\gamma(D_2)$ и $\gamma(D_3)$ пересекутся в некоторой точке на дуге Σ_3 . Ясно, что имеется непрерывная зависимость такого положения Σ_3 от положения дуг Σ_2 и Σ_1 . Рассмотрим допустимое положение дуг Σ_1, Σ_2 , близкое к крайнему положению, т. е. положению, при котором $\mu_F(D_1) = \sigma_1$. В этом случае дуга $\gamma(D_1)$ будет находиться вблизи точки p и выше дуг $\gamma(D_2)$ и $\gamma(D_3)$. Если мы будем «раздвигать» дуги Σ_1 и Σ_2 , то дуга $\gamma(D_1)$ будет перемещаться вниз, а сцепленные в общей точке дуги $\gamma(D_2)$ и γ_3 будут перемещаться вверх. И когда дуги Σ_2, Σ_1 будут близки к другому крайнему положению, т. е. положению, когда $\mu_F(D_2) = \sigma_2, \mu_F(D_3) = \sigma_3$, дуги $\gamma(D_2)$ и $\gamma(D_3)$ окажутся близкими к точке p , т. е. выше дуги $\gamma(D_1)$. Следовательно, найдется положение дуг Σ_1, Σ_2 такое, что все три дуги $\gamma(D_i), i = 1, 2, 3$ образуют сферический треугольник Δ_4 , причем в силу аддитивности интеграла $\mu_F(\Delta_4) = \sigma_4$. Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 3. Проведем доказательство по индукции. При $k = 2$ теорема справедлива в силу доказанной леммы. Предположим, что утверждение теоремы установлено для всех значений $k < l$. Докажем справедливость теоремы для случая $k = l$. Заметим тогда, что имеет место неравенство $N = 2k \geq 6$. Не ограничивая общности, будем считать, что заданный набор чисел упорядочен:

$$\sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_N.$$

Тогда $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \leq \sigma_F/2$. Если это не так, то тем более $\sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 \geq \sigma_F/2$, а значит,

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i > \sigma_F,$$

что противоречит условию теоремы. Рассмотрим новый набор чисел

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \sigma_4, \dots, \sigma_N.$$

Предположим сначала, что $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 < \sigma_F/2$. Используя предположение индукции, найдется триангуляция $T = \{S_i\}, i = 1, \dots, N - 2$, для которой имеет место (1) и

$$\mu_F(S_1) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad \mu_F(S_i) = \sigma_{i+2}, i = 2, \dots, N - 2.$$

Согласно лемме 2 симплекс S_1 можно разбить на три симплекса S'_1, S'_2, S'_3 так, чтобы

$$\mu_F(S'_i) = \sigma_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда триангуляция $T' = \{S'_1, S'_2, S'_3, S_2, \dots, S_{N-1}\}$ является искомой.



Пусть теперь $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_F/2$. В этом случае $N = 2k = 6$. Действительно, в силу упорядоченности заданного набора чисел получаем:

$$\sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 \geq \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_F/2,$$

и потому

$$\sum_{i=1}^6 \sigma_i = \sigma_F, \quad \sigma_i = 0 \quad \text{для } i > 6.$$

Требуемую триангуляцию построим следующим образом. Выберем на одной из окружностей большого радиуса три точки, образующих в \mathbb{R}^3 равносторонний треугольник. Такая окружность разделит сферу на две полусферы S_1, S_2 . Согласно замечанию к лемме 2 можно найти точку в одной полусфере и точку в другой полусфере так, чтобы образуемые сферические треугольники $S'_1, S''_1, S'''_1, S'_2, S''_2, S'''_2$ разбивали меру μ_F полусферы на требуемые части. Теорема доказана полностью. \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02517).

Библиографический список

1. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. М. : Наука, 1971. 95 с.
2. *Iörgens K.* Über die Lösungen der Differentialgleichung $nt - s^2 = 1$ // *Math. Ann.* 1954. Vol. 127. P. 130–134.
3. *Calabi E.* Improper affine hyperspheres of convex type and a generalizations of theorem by K. Iörgens // *Michigan Math. J.* 1958. Vol. 5, iss. 2. P. 105–126. DOI: 10.1307/mmj/1028998055.
4. *Александров А. Д.* Задача Дирихле для уравнения $\text{Det}||z_{ij}|| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$. I // *Вестн.* ЛГУ. Сер. Математика, механика и астрономия. 1958. № 1, вып. 1. С. 5–24.
5. *Bodrenko A. I.* The solution of the Minkowski problem for open surfaces in Riemannian space. *Arxiv.org*. 2007. arXiv:0708.3929.
6. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 429 с.
7. *Зильберберг А. А.* О существовании замкнутых выпуклых многогранников с произвольными заданными кривизнами вершин // *УМН.* 1962. Т. 17, вып. 4(106). С. 119–126.

Образец для цитирования:

Клячин В. А. О разрешимости дискретного аналога многомерной задачи Минковского – Александрова // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2016. Т. 16, вып. 3. С. 281–288. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-281-288.

On the Solvability of the Discrete Analogue of the Minkowski – Alexandrov Problem

V. A. Klyachin

Vladimir A. Klyachin, Volgograd State University, 100, Universitetskii prospekt, 400062, Volgograd, Russia, kchnv@mail.ru

The article deals with the multidimensional discrete analogue of the Minkowski problem in the production of A. D. Aleksandrov on the existence of a convex polyhedron with given curvatures at the vertices. We find the conditions for the solvability of this problem in a general setting, when the curvature measure at the polyhedron vertices is defined by an arbitrary continuous function defined on a field $F : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow (0, +\infty)$. The basis for solving the problem is the solvability of the problem whether each triangulation of a finite set of points $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$ of the unit sphere corresponds a convex polyhedron whose faces normal belong to the set P .

Key words: convex polyhedron, triangulation, spherical simplex.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-41-02517).

References

1. Pogorelov A. V. *Mnogomernaia problema Min-kovskogo* [Multidimensional Minkowsky problem]. Moscow, Nauka, 1971, 95 p. (in Russian).
2. Iörgens K. Über die Lösungen der Differentialgleichung $nt - s^2 = 1$. *Math. Ann.*, 1954, vol. 127, pp. 130–134.
3. Calabi E. Improper affine hyperspheres of convex type and a generalizations of theorem by K. Iörgens. *Michigan Math. J.*, 1958, vol. 5, iss. 2, pp. 105–126. DOI: 10.1307/mmj/1028998055.
4. Aleksandrov A. D. Dirichlet problem for equation $\text{Det}||z_{ij}|| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$. I. *Vestnik*



LGU, Ser. Mathematics, mechanics and astronomy, 1958, no. 1, iss. 1, pp. 5–24 (in Russian).

5. Bodrenko A. I. The solution of the Minkowski problem for open surfaces in Riemannian space. *Arxiv.org*, 2007, arXiv:0708.3929.
6. Aleksandrov A. D. *Vypuklye mnogogranniki* [Convex polyhedra]. Moscow ; Leningrad, GITTL, 1950, 429 p. (in Russian).

7. Zil'berberg A. A. On existence of closed convex polyhedra with prescribed curvature of vertices. *Uspehi Mat. Nauk*, 1962, vol. 17, no. 4(106), pp. 119–126 (in Russian).

7. Zil'berberg A. A. On existence of closed convex polyhedra with prescribed curvature of vertices. *Uspehi Mat. Nauk*, 1962, vol. 17, no. 4(106), pp. 119–126 (in Russian).

Please cite this article in press as:

Klyachin V. A. On the Solvability of the Discrete Analogue of the Minkowski – Alexandrov Problem. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 281–288 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-281-288.

УДК 517.518.85

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ НА ОТРЕЗКЕ СИНК-АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А. Ю. Трынин

Трынин Александр Юрьевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, tau@rambler.ru

Получены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости синк-приближений для функций ограниченной вариации. Отдельно рассматриваются условия равномерной сходимости внутри интервала $(0, \pi)$ и на отрезке $[0, \pi]$. Установлена невозможность равномерной аппроксимации произвольной непрерывной функции ограниченной вариации на отрезке $[0, \pi]$. Выделена главная часть погрешности синк-аппроксимации при приближении негладких функций из пространств непрерывных функций и непрерывных функций, исчезающих на концах отрезка $[0, \pi]$, снабженных чебышевской нормой.

Ключевые слова: равномерная сходимость, синк-приближения, ограниченная вариация, синк-аппроксимации.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-288-298

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению аппроксимативных свойств синк-приближений, используемых в теореме отсчетов Уиттекера – Котельникова – Шеннона [1–4]. В связи с необходимостью развития теории кодирования сигналов Э. Борель и Е. Т. Уиттекер ввели понятие кардинальной функции, сужение с оси на отрезок $[0, \pi]$ которой выглядит так:

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right). \quad (1)$$

К настоящему времени достаточно полно исследованы свойства синк-аппроксимаций аналитической на действительной оси функции, экспоненциально убывающей на бесконечности. Наиболее полный обзор результатов, полученных в этом направлении до 1993 года, а также большое количество важных приложений синк-аппроксимаций можно найти в [3]. Интересный исторический обзор исследований в этой области содержится также в [5].

Синк-приближения нашли широкое применение при построении различных численных методов математической физики и приближения функций как одной, так и нескольких переменных [6–8] в теории квадратурных формул [3] и теории вейвлет-преобразований или всплесков [1, 2, 4]. В [9, 10] изучаются модификации синк-приближений, с помощью которых можно приближать произвольные равномерно непрерывные функции, ограниченные на оси.

Результаты работ [11, 12] позволяют сделать заключение о том, что при использовании классических синк-аппроксимаций (1) вблизи концов отрезка $[0, \pi]$ возникает явление Гиббса (Уилбрейама – Гиббса).



Авторы гл. 13 интересной книги [13], описывающей новые перспективные направления развития теории приближения функций с использованием интерполяционных данных, получают оценки функций и констант Лебега усеченных кардинальных функций Уиттекера, аналогичные установленным в [15].

До появления работ [12–18], насколько нам известно, приближение такими операторами на отрезке или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций [3, 19] сведением к случаю оси с помощью конформного отображения. В [18] получена оценка сверху наилучшего приближения непрерывных, исчезающих на концах отрезка $[0, \pi]$, функций линейными комбинациями синков.

Из результатов исследований в [20] видно, что при попытке приближения негладких непрерывных функций значениями операторов (1) возможно появление «резонанса», приводящего к неограниченному росту погрешности аппроксимации на всем интервале $(0, \pi)$. В этой же работе [20] установлено отсутствие равномерности значений операторов (1) и рядов или интегралов Фурье на классе непрерывных функций.

В [21, 22] и [23] предложены различные модификации синк-приближений (1), позволяющие аппроксимировать произвольные непрерывные функции на отрезке $[0, \pi]$. Исследование полноты системы синков (1) в [22] в пространствах $C[0, \pi]$ и $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$, позволяет сделать вывод о тщетности попыток построить оператор в виде линейных комбинаций синков, допускающий возможность равномерной аппроксимации произвольной непрерывной функции на отрезке. В работах [22, 23], кроме того, установлены новые необходимые и достаточные условия равномерной сходимости синк-приближений (1) и некоторых их модификаций на всем отрезке $[0, \pi]$.

Работа [24] посвящена исследованию аппроксимативных свойств операторов интерполирования, построенных по решениям задач Коши с дифференциальными выражениями второго порядка. Операторы, предложенные в [24], являются обобщением классических синк-приближений (1). В [25] приводится ряд приложений результатов работы [24] к исследованию аппроксимативных свойств классических алгебраических интерполяционных многочленов Лагранжа с матрицей узлов интерполирования, каждая строка которой состоит из нулей многочленов Якоби $P_n^{\alpha, \beta}$ с параметрами, зависящими от n .

Начиная с известной работы Крамера [26] изучаются также аналоги теорем отсчетов для операторов интерполяции Лагранжа по узлам из спектра задачи Штурма – Лиувилля, например, [27].

В тесной связи с синк-приближениями находятся интерполяционные процессы Лагранжа, построенные по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля. Г. И. Натансон в [28] получил признак Дини – Липшица равномерной сходимости внутри интервала $(0, \pi)$, т. е. равномерной на любом компакте, содержащемся в $(0, \pi)$, процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля.

Исследования, проведенные в [29–31], показывают, что при сколь угодно малом изменении параметров задачи Штурма – Лиувилля (потенциала q , или констант h, H) аппроксимативные свойства процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля могут сильно измениться. В работе [32] устанавливается существование непрерывной на $[0, \pi]$ функции, интерполяционный процесс Лагранжа – Штурма – Лиувилля которой неограниченно расходится почти всюду на $[0, \pi]$.

Конечно, в [16] и [24] в терминах необходимых и достаточных условий полностью описан класс непрерывных функций, допускающих равномерное на отрезке $[0, \pi]$ приближение с помощью операторов синк-аппроксимаций (1). Но исследование вложений популярных классических функциональных классов таких как множество непрерывных функций ограниченной вариации, осталось за рамками этих публикаций. Поэтому, на наш взгляд, представляет интерес получение достаточных условий сходимости значений операторов (1) для функций из популярных функциональных классов без предварительной проверки каких-либо условий.

В настоящей работе, используя результаты и приемы доказательств, разработанные в [33–41], установлены необходимые и достаточные условия равномерной синк-аппроксимации на отрезке функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций.

1. О ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ СИНК-ПРИБЛИЖЕНИЙ

Приведем ряд вспомогательных результатов, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Обозначим $x_{k,n} = k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.



Утверждение 1. (см. [16, теорема 6]). Если функция f непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, то для всех $x \in [0, \pi]$ имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right) = 0, \quad (2)$$

где

$$l_{k,n}(x) = \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi}.$$

Сходимость в (2) — поточечная на отрезке $[0, \pi]$ и равномерная внутри интервала $(0, \pi)$, т. е. равномерная на каждом компакте, содержащемся в этом интервале.

Доказательство этого утверждения следует также из [15, теорема 2] или [17, теорема 6].

Обозначим подпространство пространства непрерывных на $[0, \pi]$ функций, исчезающих на концах отрезка, через $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$.

Для функций из пространства $C_0[0, \pi]$ результат предложения 1 может быть усилен.

Теорема 1. Если функция f непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, то поточечно на отрезке $[0, \pi]$ и равномерно внутри интервала $(0, \pi)$, т. е. равномерно на каждом компакте, содержащемся в этом интервале, имеет место соотношение (2). Сходимость в (2) является равномерной на отрезке $[0, \pi]$ тогда и только тогда, когда $f \in C_0[0, \pi]$.

Доказательство. Сделаем замену независимой переменной $t = (x + \pi)/2$, $x = 2t - \pi$, и рассмотрим новую функцию:

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(2t - \pi) & \text{при } t \in [\pi/2, \pi], \\ 0 & \text{при } t \in [0, \pi/2]. \end{cases}$$

Из непрерывности функции f и того, что $f(0) = f(\pi) = 0$, следует принадлежность \hat{f} пространству $C_0[0, \pi]$.

Заметив, что при $x \in [0, \pi]$ и $t \in [\pi/2, \pi]$

$$\begin{aligned} L_n(f, x) &= \sum_{k=0}^n f(x_{k,n}) \frac{(-1)^k \sin nx}{n(x - x_{k,n})} = \sum_{k=0}^n \hat{f}\left(\frac{x_{k,n} + \pi}{2}\right) \frac{(-1)^k \sin n(2t - \pi)}{n(2t - \pi - \frac{k\pi}{n})} = \\ &= \sum_{k=0}^n \hat{f}\left(\frac{(k+n)\pi}{2n}\right) \frac{(-1)^{k+n} \sin 2nt}{n(2t - \frac{(n+k)\pi}{n})} = \\ &= \sum_{m=n}^{2n} \hat{f}\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \frac{(-1)^m \sin 2nt}{2n(t - \frac{m\pi}{2n})} = \sum_{m=0}^{2n} \hat{f}(t_{m,2n}) \frac{(-1)^m \sin 2nt}{2n(t - t_{m,2n})} = L_{2n}(\hat{f}, t), \end{aligned}$$

воспользуемся утверждением предложения 1:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [\pi/2, 3\pi/4]} \left| \hat{f}(t) - L_{2n}(\hat{f}, t) - \frac{1}{2} \sum_{m=n}^{2n-1} (\hat{f}(t_{m+1,2n}) - \hat{f}(t_{m,2n})) l_{m,2n}(t) \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]} \left| \hat{f}(t) - L_{2n}(\hat{f}, t) - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2n-1} (\hat{f}(t_{m+1,2n}) - \hat{f}(t_{m,2n})) l_{m,2n}(t) \right| = 0. \end{aligned}$$

Аналогично или с помощью замены $z = \pi - x$ устанавливается справедливость соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]} \left| f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right| = 0.$$



Таким образом, равномерность сходимости по $x \in [0, \pi]$ для функций из пространства $C_0[0, \pi]$ в (2) установлена.

Пусть теперь функция $f \in C[0, \pi] \setminus C_0[0, \pi]$. Покажем, что в этом случае сходимости в (2) не является равномерной на $[0, \pi]$. Положим $\xi_n = \pi/(2n)$, тогда для любой $f \in C[0, \pi]$ установим справедливость соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f(\xi_n) - L_n(f, \xi_n) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(\xi_n) \right\} = f(0) \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \right\}, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f(\pi - \xi_n) - L_n(f, \pi - \xi_n) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(\pi - \xi_n) \right\} = f(\pi) \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \right\}. \quad (4)$$

Если $f \in C[0, \pi] \setminus C_0[0, \pi]$, то выполнено хотя бы одно из условий $f(0) \neq 0$ или $f(\pi) \neq 0$. Для определенности будем считать, что $f(0) \neq 0$.

Обозначим $\alpha(x) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0)$. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) &= \left(f(x) - \alpha(x) - L_n(f - \alpha, x) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1,n}) - \alpha(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}) + \alpha(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right) + \\ &\quad + \left(\alpha(x) - L_n(\alpha, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha(x_{k+1,n}) - \alpha(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Функция $f - \alpha \in C_0[0, \pi]$. Так как равномерность сходимости по $x \in [0, \pi]$ для функций из пространства $C_0[0, \pi]$ в (2) уже установлена, первое слагаемое в (5) равномерно сходится к нулю. Выберем последовательность $\xi_n = \pi/(2n)$. Второе слагаемое в (5) при $x = \xi_n$ в силу линейности оператора L_n , вычислим отдельно для функций $\hat{\alpha}(x) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x$ и $\tilde{\alpha}(x) \equiv f(0)$. В случае $\hat{\alpha}(\xi_n) = \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} \xi_n$ имеем:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} \xi_n - L_n \left(\frac{f(\pi) - f(0)}{\pi}, \xi_n \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} (x_{k+1,n} - x_{k,n}) \right) l_{k,n}(\xi_n) \right| = \\ &= \left| \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} \xi_n - \frac{1}{2} (f(\pi) - f(0)) l_{n,n}(\xi_n) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (l_{k,n}(\xi_n) + l_{k-1,n}(\xi_n)) \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k,n} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{f(\pi) - f(0)}{2n} \right| + \left| \frac{f(\pi) - f(0)}{(\pi - 2n\pi)} \right| + \left| \frac{2(f(\pi) - f(0))}{\pi n} \right| \left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k k}{(1 - 2k)(3 - 2k)} \right|. \end{aligned}$$

Последняя сумма является частичной суммой сходящегося ряда, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} \xi_n - L_n \left(\frac{f(\pi) - f(0)}{\pi}, \xi_n \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} (x_{k+1,n} - x_{k,n}) \right) l_{k,n}(\xi_n) \right| = 0. \quad (6)$$

Следовательно, осталось подсчитать второе слагаемое в (5) при $x = \xi_n$ для функции $\tilde{\alpha} \equiv f(0)$. Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + 1} = \frac{\pi}{4}.$$

Поэтому имеем равенство

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \tilde{\alpha}(\xi_n) - L_n(\tilde{\alpha}, \xi_n) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{\alpha}(x_{k+1,n}) - \tilde{\alpha}(x_{k,n})) l_{k,n}(\xi_n) \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f(0) - f(0) \sum_{k=0}^n l_{k,n}(\xi_n) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f(0) \left(1 - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k + 1} \right) \right\} = f(0) \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \right\}. \end{aligned}$$



Отсюда с учетом (5) и (6) следует (3). Равенство (4) устанавливается аналогично или с помощью замены $t = \pi - x$.

Невозможность равномерной сходимости в соотношении (2) для функций из множества $C[0, \pi] \setminus C_0[0, \pi]$ следует из предложения 1 и (3), (4). Теорема 1 доказана. \square

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ЗНАЧЕНИЯМИ ОПЕРАТОРОВ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ

Если не оговорено иное, считаем, что на протяжении этой работы $0 \leq a < b \leq \pi$ и $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. Индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определяются неравенствами

$$\begin{aligned} x_{p_1, n} &\leq a + \varepsilon < x_{p_1+1, n}, & x_{p_2, n} &\leq b - \varepsilon < x_{p_2+1, n}, \\ x_{k_1-1, n} &< a \leq x_{k_1, n}, & x_{k_2, n} &\leq b < x_{k_2+1, n}, \\ m_1 &= \left[\frac{k_1}{2} \right] + 1, & m_2 &= \left[\frac{k_2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z .

Теорема 2. Пусть $V_f[a, b]$ — полная вариация непрерывной на $[a, b]$ функции f . Если $V_f[a, b] < \infty$, то имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n(f, \cdot)\|_{C[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} = 0. \tag{7}$$

Доказательство. После продолжения

$$f(x) = \begin{cases} f(a) & \text{при } x < a, \\ f(x) & \text{при } x \in [a, b], \\ f(b) & \text{при } x > b, \end{cases} \tag{8}$$

функция $f \in C[a, b]$ стала непрерывной на всем множестве действительных чисел с тем же модулем непрерывности. Обозначим

$$\psi_{k, n} = f(x_{k+1, n}) - f(x_{k, n}) \quad k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Зафиксируем произвольное $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Выберем индекс $p = p(x, n)$ из соображений, что $x \in [x_{p, n}, x_{p+1, n})$. Тогда $x = x_{p, n} + \alpha(x_{p+1, n} - x_{p, n}) = x_{p, n} + \frac{\alpha\pi}{n}$, где $\alpha = \alpha(x, n) \in [0, 1)$

$$x - x_{k, n} = \frac{p - k + \alpha}{n} \pi.$$

Пользуясь (9), оценим разность сразу для всех $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$

$$\left| \sum_{k: |p-k| \geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k, n}}{p - k + \alpha} - \sum_{k: |p-k| \geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k, n}}{p - k} \right| \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k: |p-k| \geq 3} \frac{\alpha}{|p - k|(|p - k| - 1)} \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \tag{10}$$

Учитывая (8) и (9), разобьем сумму в (2) следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1, n}) - f(x_{k, n})) l_{k, n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k: k_1 \leq k \leq k_2; \\ |p-k| \geq 3;}} \psi_{k, n} l_{k, n}(x) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k: k_1 \leq k \leq k_2; \\ |p-k| < 3}} \psi_{k, n} l_{k, n}(x).$$

Теперь с помощью неравенства треугольника из (9), (10) равномерно для всех $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ получаем оценку

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1, n}) - f(x_{k, n})) l_{k, n}(x) - \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k \psi_{k, n}}{p - k} \right| \leq$$



$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k:|p-k|\geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k+\alpha} - \sum_{k:|p-k|\geq 3} \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k} \right| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k:|p-k|<3} |\psi_{k,n} l_{k,n}(x)| + \frac{1}{2\pi} \sum_{k:|p-k|<3} \frac{|\psi_{k,n}'|}{|p-k|} \leq \frac{5}{\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Штрих у суммы в этой работе означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю.

Отсюда и из (2) следует соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - L_n(f, x) - \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k} \right) = 0. \quad (12)$$

Обратите внимание на то, что это соотношение выполняется равномерно на отрезке $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Равномерно на всем отрезке $[0, \pi]$ в силу теоремы 1 оно имеет место тогда и только тогда, когда $f \in C_0[0, \pi]$. Оценим последнее слагаемое в (12) с помощью соотношения

$$|\psi_{k,n}| = |f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})| \leq \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

и неравенства треугольника

$$\left| \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k} \right| \leq 2 \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\psi_{2m,n}}{p-2m} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\psi_{k,n}}{p-k} \right| + O\left(\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)\right). \quad (14)$$

В силу непрерывности функции f существует последовательность натуральных чисел $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$l_n = o(n), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{l_n} \frac{1}{k} = 0. \quad (15)$$

Оценим вторую сумму в (14)

$$\left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\psi_{k,n}}{p-k} \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k:|p-k|\leq l_n} \frac{\psi_{k,n}}{p-k} \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k:|p-k|>l_n} \frac{\psi_{k,n}}{p-k} \right|. \quad (16)$$

Тогда, учитывая неравенство (13), получим оценку

$$\left| \frac{1}{2\pi} \sum_{k:|p-k|\leq l_n} \frac{\psi_{k,n}}{p-k} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k:|p-k|\leq l_n} \left| \frac{\psi_{k,n}}{p-k} \right| \leq \frac{1}{\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{l_n} \frac{1}{k}. \quad (17)$$

Для исследования суммы (16) в случае $k \in \mathbb{Z} : |p-k| > l_n$ применим преобразование Абеля. Теперь из (17) и (15) получаем равномерную на $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k} \right| &\leq \frac{1}{\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{l_n} \frac{1}{k} + \frac{1}{\pi(l_n+1)} \sum_{k:|p-k|>l_n} |\psi_{k,n}| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{l_n} \frac{1}{k} + \frac{V_f[a, b]}{\pi(l_n+1)} = o(1). \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда из (12) и неравенства треугольника получаем истинность утверждения (7). Теорема 2 доказана. \square

Замечание 1. Из результатов исследований в [12] следует, существование константы c_1 и функции f ограниченной вариации на отрезке $[0, \pi]$ таких, что будут выполняться соотношения

$$|f(\epsilon_n) - L_n(f, \epsilon_n)| \geq c_1 f(0), \quad |f(\pi - \epsilon_n) - L_n(f, \pi - \epsilon_n)| \geq c_1 f(\pi)$$

при $\epsilon_n = \pi/(2n)$.



Теорема 3. Пусть $V_f[0, \pi]$ — полная вариация непрерывной на $[0, \pi]$ функции f . Если $V_f[0, \pi] < \infty$, то имеет место равномерная сходимость на всем отрезке $[0, \pi]$ ($a = 0, b = \pi$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} = 0 \quad (19)$$

тогда и только тогда, когда $f \in C_0[0, \pi]$.

Доказательство. Равномерная аппроксимация (19) непрерывной функции ограниченной вариации, исчезающей на концах отрезка $[0, \pi]$ ($a = 0, b = \pi$), с помощью операторов (1), следует из теоремы 1 после соответствующего продолжения функции (8), так как в этом случае все оценки (9), (14), (16)–(18) будут равномерными на всем отрезке $[0, \pi]$. Отсюда же и из (3), (4) вытекает невозможность равномерного приближения функций ограниченной вариации из множества $f \in C[0, \pi] \setminus C_0[0, \pi]$.

Теорема 3 доказана. \square

Следствие 1. Из теоремы 2, в частности, следует равномерное внутри интервала (a, b) приближение значениями оператора синк-аппроксимаций (7) непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ и абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций.

Следствие 2. Из теоремы 3 следует, что абсолютная непрерывность функции f на отрезке $[0, \pi]$ гарантирует равномерную сходимость (19) на всем отрезке $[0, \pi]$ ($a = 0, b = \pi$) тогда и только тогда, когда $f \in C_0[0, \pi]$.

Библиографический список

1. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 550 с.
2. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков // УМН. 1998. Т. 53, вып. 6(324). С. 53–128. DOI: 10.4213/gm89.
3. Stenger F. Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions. Springer Series in Comput. Math. (Book 20). N. Y. : Springer-Verlag, 1993. 565 p.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.
5. Butzer P. L. A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields // J. Approx. Theory. 2009. Vol. 160, iss. 1–2. P. 3–18. DOI: 10.1016/j.jat.2009.05.004.
6. Schmeisser G., Stenger F. Sinc Approximation with a Gaussian Multiplier // Sampl. Theory Signal Image Process. 2007. Vol. 6, № 2. P. 199–221.
7. Livne O. E., Brandt A. E. MuST : The Multi-level Sinc Transform // SIAM J. Sci. Comput. 2011. Vol. 33, iss. 4. P. 1726–1738. DOI: 10.1137/100806904.
8. Tharwat M. M. Sinc approximation of eigenvalues of Sturm–Liouville problems with a Gaussian multiplier // Calcolo. 2014. Vol. 51, iss. 3. P. 465–484. DOI: 10.1007/s10092-013-0095-3.
9. Kiviniuk A., Tamberg G. Interpolating generalized Shannon sampling operators, their norms and approximation theoremetries // Sampl. Theory Signal Image Process. 2009. Vol. 8, № 1. P. 77–95.
10. Schmeisser G. Interconnections Between Multiplier Methods and Window Methods in Generalized Sampling // Sampl. Theory Signal Image Process. 2010. Vol. 9, № 1–3. P. 1–24.
11. Jerri A. J. Lanczos-Like σ -Factors for Reducing the Gibbs Phenomenon in General Orthogonal Expansions and Other Representations // J. Comput. Anal. Appl. 2000. Vol. 2, iss. 2. P. 111–127. DOI: 10.1023/A:1010146500493.
12. Trynin A. Yu., Sklyarov V. P. Error of sinc approximation of analytic functions on an interval // Sampl. Theory Signal Image Process. 2008. Vol. 7, № 3. P. 263–270.
13. Zayed A. I., Schmeisser G. New Perspectives on Approximation and Sampling Theory. Ser. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Basel : Birkhäuser, 2014. 472 p. DOI: 10.1007/978-3-319-08801-3.
14. Трынин А. Ю. Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 124–127.
15. Трынин А. Ю. Оценки функций Лебега и формула Неваи для синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1155–1166.
16. Трынин А. Ю. Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 10. С. 141–158. DOI: 10.4213/sm1533.
17. Трынин А. Ю. Критерий равномерной сходимости синк-приближений на отрезке // Изв. вузов. Матем. 2008. № 6. С. 66–78.
18. Sklyarov V. P. On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East J. Approx. 2008. Vol. 14, № 2. P. 183–192.



19. *Mohsen A., El-Gamel M.* A Sinc-Collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations // *ZAMP*. 2007. Vol. 58, iss. 3. P. 380–390. DOI 10.1007/s00033-006-5124-5.
20. *Трынин А. Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ // *Алгебра и анализ*. 2010. Т. 22, вып. 4. С. 232–256.
21. *Трынин А. Ю.* О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций // *Уфимск. матем. журн.* 2015. Т. 7, № 4. С. 116–132.
22. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // *Алгебра и анализ*. 2015. Т. 27, вып. 5. С. 170–194
23. *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // *Изв. вузов. Матем.* 2016. № 3. С. 72–81.
24. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера – Котельникова – Шеннона для непрерывных функций на отрезке // *Матем. сб.* 2009. Т. 200, № 11. С. 61–108. DOI: 10.4213/sm4502.
25. *Трынин А. Ю.* Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа – Якоби // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2011. Т. 75, вып. 6. С. 129–162. DOI: 10.4213/im4275.
26. *Kramer H. P.* A generalized sampling theorem // *J. Math. Phus.* 1959. Vol. 38. P. 68–72.
27. *Zayed A. I., Hinsen G., Butzer P. L.* On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm – Liouville problems // *SIAM J. Appl. Math.* 1990. Vol. 50, № 3. P. 893–909.
28. *Натансон Г. И.* Об одном интерполяционном процессе // *Учен. записки Ленингр. пед. ин-та*. 1958. Т. 166. С. 213–219.
29. *Трынин А. Ю.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля // *Изв. вузов. Матем.* 2000. № 9. С. 60–73.
30. *Трынин А. Ю.* Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма – Лиувилля // *Уфимск. матем. журн.* 2011. Т. 3, вып. 4. С. 133–143.
31. *Трынин А. Ю.* Об одной обратной узловых задаче для оператора Штурма – Лиувилля // *Уфимск. матем. журн.* 2013. Т. 5, вып. 4. С. 116–129.
32. *Трынин А. Ю.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля // *Изв. вузов. Матем.* 2010. № 11. С. 74–85.
33. *Трынин А. Ю.* Принцип локализации для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 137–140.*
34. *Трынин А. Ю.* Об одном интегральном признаке сходимости процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 94–97.*
35. *Трынин А. Ю.* Существование систем Чебышева с ограниченными константами Лебега интерполяционных процессов // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 79–81.*
36. *Трынин А. Ю.* Пример системы Чебышева с почти всюду сходящейся к нулю последовательностью функций Лебега интерполяционных процессов // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 74–76.*
37. *Трынин А. Ю., Панфилова И. С.* Об одном признаке типа Дини – Липшица сходимости обобщенных интерполяционных процессов Уиттекера – Котельникова – Шеннона // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 83–87.*
38. *Трынин А. Ю., Панфилова И. С.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по узлам Якоби на множестве полной меры // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 87–91.*
39. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях равномерной и поточечной сходимости интерполяционных процессов по «взвешенным» многочленам Якоби // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 96–100.*
40. *Трынин А. Ю.* Об одной модификации аналога формулы Неваи для синк-приближений непрерывных функций на отрезке // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 78–81.*
41. *Трынин А. Ю.* О некоторых достаточных условиях равномерной сходимости синк-аппроксимаций // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 269–272.*

Образец для цитирования:

Трынин А. Ю. Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2016. Т. 16, вып. 3. С. 288–298. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-288-298.



Necessary and Sufficient Conditions for the Uniform on a Segment Sinc-approximations Functions of Bounded Variation

A. Yu. Trynin

Alexandr Yu. Trynin, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, tayu@rambler.ru

The necessary and sufficient conditions for the uniform convergence of sinc-approximations of functions of bounded variation is obtained. Separately we consider the conditions for the uniform convergence in the interval $(0, \pi)$ and on the interval $[0, \pi]$. The impossibility of uniform approximation of arbitrary continuous function of bounded variation on the interval $[0, \pi]$ is settled. We identify the main error of the sinc-approximations when approaching non-smooth functions in spaces of continuous functions and continuous functions vanishing at the ends of the interval $[0, \pi]$, equipped with the norm of Chebyshev.

Key words: uniform convergence, sinc-approximations, bounded variation, sinc-approximation.

References

1. Kashin B. S.; Saakyan A. A. *Ortogonal'nye ryady* [Orthogonal series]. Moscow, AFTs, 1999, 550 p. (in Russian).
2. Novikov I. Ya., Stechkin S. B. Basic wavelet theory. *Russian Math. Surveys*, 1998, vol. 58, iss. 6, pp. 1159–1231. DOI: 10.1070/rm1998v053n06ABEH000089.
3. Stenger F. *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*. Springer Series in Comput. Math. (Book 20). New York, Springer-Verlag, 1993, 565 p.
4. Dobeshi I. *Desiat' lektzii po veioletam* [Ten lectures on wavelets]. Izhevsk, NITs "Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika", 2001, 464 p. (in Russian).
5. Butzer P. L. A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields. *J. Approx. Theory*, 2009, vol. 160, iss. 1–2, pp. 3–18. DOI: 10.1016/j.jat.2009.05.004.
6. Schmeisser G., Stenger F. Sinc Approximation with a Gaussian Multiplier. *Sampl. Theory Signal Image Process.*, 2007, vol. 6, no. 2, pp. 199–221.
7. Livne O. E., Brandt A. E. MuST : The Multi-level Sinc Transform. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2011, vol. 33, iss. 4, pp. 1726–1738. DOI: 10.1137/100806904.
8. Tharwat M. M. Sinc approximation of eigenvalues of Sturm–Liouville problems with a Gaussian multiplier. *Calcolo*, 2014, vol. 51, iss. 3, pp. 465–484. DOI : 10.1007/s10092-013-0095-3.
9. Kivinukk A., Tamberg G. Interpolating generalized Shannon sampling operators, their norms and approximation theoremerties. *Sampl. Theory Signal Image Process.*, 2009, vol. 8, no. 1, pp. 77–95.
10. Schmeisser G. Interconnections Between Multiplier Methods and Window Methods in Generalized Sampling. *Sampl. Theory Signal Image Process.*, 2010, vol. 9, no. 1–3, pp. 1–24.
11. Jerri A. J. Lanczos-Like σ -Factors for Reducing the Gibbs Phenomenon in General Orthogonal Expansions and Other Representations. *J. Comput. Anal. Appl.*, 2000, vol. 2, iss. 2, pp. 111–127. DOI: 10.1023/A:1010146500493.
12. Trynin A. Yu., Sklyarov V. P. Error of sinc-approximation of analytic functions on an interval. *Sampl. Theory Signal Image Process.*, 2008, vol. 7, no. 3, pp. 263–270.
13. Zayed A. I., Schmeisser G. *New Perspectives on Approximation and Sampling Theory*. Ser. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Basel, Birkhäuser, 2014. 472 p. DOI: 10.1007/978-3-319-08801-3.
14. Trynin A. Yu. Ob otsenke approksimatsii analiticheskikh funktsii interpoliatsionnym operatorom po sinkam [On an estimate of approximation of analytic functions by interpolation sinc-operator]. *Mathematics, Mechanics*. Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2005, iss. 7, pp. 124–127 (in Russian).
15. Trynin A. Yu. Estimates for the Lebesgue functions and the Nevai formula for the sinc-approximations of continuous functions on an interval. *Siberian Math. J.*, 2007, vol. 48, iss. 5, pp. 929–938. DOI: 10.1007/s11202-007-0096-z.
16. Trynin A. Yu. Tests for pointwise and uniform convergence of sinc approximations of continuous functions on a closed interval. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 10, pp. 1517–1534. DOI: 10.1070/SM2007v198n10ABEH003894.
17. Trynin A. Yu. A criterion for the uniform convergence of sinc-approximations on a segment. *Russian Math.*, 2008, vol. 52, iss. 6, pp. 58–69. DOI: 10.3103/S1066369X08060078.
18. Sklyarov V. P. On the best uniform sinc-approximation on a finite interval. *East J. Approx.*, 2008, vol. 14, no. 2, pp. 183–192.
19. Mohsen A., El-Gamel M. A Sinc-Collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations. *ZAMP*, 2007, vol. 58, iss.3, pp. 380–390. DOI 10.1007/s00033-006-5124-5.
20. Trynin A. Yu. On divergence of sinc-approximations everywhere on $(0, \pi)$. *St. Petersburg Math.*



- J.*, 2011, vol. 22, iss. 4, pp. 683–701. DOI: 10.1090/S1061-0022-2011-01163-X.
21. Trynin A. Yu. On some properties of sinc approximations of continuous functions on the interval. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, iss. 4, pp. 111–126. DOI: 10.13108/2015-7-4-111.
 22. Trynin A. Yu. On necessary and sufficient conditions for convergence of sinc approximations. *Algebra i Analiz*, 2015, vol. 27, iss. 5, pp. 170–194 (in Russian).
 23. Trynin A. Yu. Approximation of continuous on a segment functions with the help of linear combinations of sines. *Russian Math.*, 2016, vol. 60, iss. 3, pp. 63–71. DOI: 10.3103/S1066369X16030087.
 24. Trynin A. Yu. A generalization of the Whittaker–Kotel'nikov–Shannon sampling theorem for continuous functions on a closed interval. *Sb. Math.*, 2009, vol. 200, iss. 11, pp. 1633–1679. DOI: 10.1070/SM2009v200n11ABEH004054.
 25. Trynin A. Yu. On operators of interpolation with respect to solutions of a Cauchy problem and Lagrange–Jacobi polynomials. *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, iss. 6, pp. 1215–1248. DOI: 10.1070/IM2011v075n06ABEH002570.
 26. Kramer H. P. A generalized sampling theorem. *J. Math. Phys.*, 1959, vol. 38, pp. 68–72.
 27. Zayed A. I., Hinsen G., Butzer P. L. On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm–Liouville problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, vol. 50, no. 3, pp. 893–909.
 28. Natanson G. I. Ob odnom interpolatsionnom protsesse [An interpolation process]. *Uchen. zapiski Leningrad. ped. in-ta*, 1958, vol. 166, pp. 213–219 (in Russian).
 29. Trynin A. Yu. On the absence of stability of interpolation in eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem. *Russian Math.*, 2000, vol. 44, iss. 9, pp. 58–71.
 30. Trynin A. Yu. Differential properties of zeros of eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011, vol. 3, iss. 4, pp. 133–143 (in Russian).
 31. Trynin A. Yu. On inverse nodal problem for Sturm–Liouville operator. *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, iss. 4, pp. 112–124. DOI: 10.13108/2013-5-4-112.
 32. Trynin A. Yu. The divergence of Lagrange interpolation processes in eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem. *Russian Math.*, 2010, vol. 54, iss. 11, pp. 66–76. DOI: 10.3103/S1066369X10110071.
 33. Trynin A. Yu. Printsip lokalizatsii dlia protsessov Lagranzha–Shturma–Liuvillia [The localization principle for the Lagrange–Sturm–Liouville processes]. *Mathematics, Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2006, iss. 8, pp. 137–140 (in Russian).
 34. Trynin A. Yu. Ob odnom integral'nom priznake skhodimosti protsessov Lagranzha–Shturma–Liuvillia [An integral criterion for the convergence of the Lagrange–Sturm–Liouville processes]. *Mathematics, Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2007, iss. 9, pp. 94–97 (in Russian).
 35. Trynin A. Yu. Sushchestvovanie sistem Chebysheva s ogranichennymi konstantami Lebege interpolatsionnykh protsessov [Existence of Chebyshev systems with limited Lebesgue constants interpolation processes]. *Mathematics, Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2008, iss. 10, pp. 79–81 (in Russian).
 36. Trynin A. Yu. Primer sistemy Chebysheva s pochti vsiudu skhodiashcheisia k nuliu posledovatel'nost'iu funktsii Lebege interpolatsionnykh protsessov [Example Chebyshev system converges almost everywhere to zero Lebesgue functions of the sequence of interpolation processes]. *Mathematics, Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2009, iss. 11, pp. 74–76 (in Russian).
 37. Trynin A. Yu., Panfilova I. S. Ob odnom priznake tipa Dini–Lipshitsa skhodimosti obobshchennykh interpolatsionnykh protsessov Uittkera–Kotel'nikova–Shennona [A criterion such as the Dini–Lipschitz convergence of generalized interpolation processes Whittaker–Nyquist–Shannon]. *Mathematics, Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, iss. 12, pp. 83–87 (in Russian).
 38. Trynin A. Yu., Panfilova I. S. O raskhodimosti interpolatsionnykh protsessov Lagranzha po uzlam Iakobi na mnozhestve polnoi mery [On the divergence of Lagrange interpolation processes on Jacobi nodes on a set of full measure]. *Mathematics, Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, iss. 12, pp. 87–91 (in Russian).
 39. Trynin A. Yu. O neobkhodimyykh i dostatochnyykh usloviyakh ravnomernoii i potochechnoi skhodimosti interpolatsionnykh protsessov po "vzveshennym" mnogochlenam Iakobi [On necessary and sufficient conditions for the uniform and pointwise convergence of interpolation processes on the "weighted" Jacobi polynomials]. *Mathematics, Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2011, iss. 13, pp. 96–100 (in Russian).
 40. Trynin A. Yu. Ob odnoi modifikatsii analoga formuly Nevai dlia sink-priblizhenii nepreryvnykh funktsii na otrezke [A modification of the Nevai formula for analog sinc-approximations of continuous functions on the interval]. *Mathematics, Mechanics: Collection of Scientific Papers*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2014, iss. 16, pp. 78–81 (in Russian).



41. Trynin A. Yu. O nekotorykh dostatochnykh usloviakh ravnomernoi skhodimosti sinc-approksimatsii [Some sufficient conditions for the uniform convergence of sinc-approximations]. *Mathematics, Mechanics: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2015, iss. 17, pp. 269–272 (in Russian).*

chanics: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2015, iss. 17, pp. 269–272 (in Russian).

Please cite this article in press as:

Trynin A. Yu. Necessary and Sufficient Conditions for the Uniform on a Segment Sinc-approximations Functions of Bounded Variation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 288–298 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-288-298.

УДК 517.51

ОБ ОПЕРАТОРАХ С РАЗРЫВНОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ

Г. В. Хромова

Хромова Галина Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

На базе известных операторов из теории приближения функций построены интегральные операторы с разрывной областью значений, позволяющие получать равномерные приближения к непрерывным функциям на всем отрезке их задания.

Ключевые слова: оператор, непрерывная функция, отрезок, равномерные приближения.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-298-302

1. В теории приближения функций при решении целого ряда задач используются интегральные операторы с дельтаобразными ядрами [1]. Это интегралы вида

$$K_\alpha f = \int_a^b K_\alpha(x, t) f(t) dt, \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям:

- 1) $K_\alpha(x, t) > 0$ и интегрируема по t ;
- 2) $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{|x-t|>\eta} K_\alpha(x, t) dt = 0$ равномерно для всех значений x , каково бы ни было мало число $\eta > 0$;
- 3) $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{|x-t|\leq\eta} K_\alpha(x, t) dt = 1$ равномерно для всех x из промежутка $[a', b']$, где $a < a' < b' < b$.

Теорема 1 (см. [1]). Для любой $f(x) \in C[a, b]$ имеет место сходимость:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^b K_\alpha(x, t) f(t) dt = f(x)$$

равномерно по x из любого внутреннего отрезка $[a', b'] \subset [a, b]$.

Доказательство. В силу свойства 3) операторов K_α справедливо представление:

$$K_\alpha 1 = 1 + o(1),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ равномерно по $x \in [a', b']$, $a < a' < b' < b$. Значит, для таких x

$$f(x) = f(x)K_\alpha 1 + f(x)o(1).$$

Отсюда следует представление

$$K_\alpha f - f = \int_a^b K_\alpha(x, t)(f(t) - f(x)) dt + f(x)o(1). \tag{2}$$



Далее, обозначим интеграл в правой части (2) через I и представим его в виде

$$I = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_{|x-t| \leq \eta} K_\alpha(x,t)(f(t) - f(x)) dt, \quad I_2 = \int_{|x-t| > \eta} K_\alpha(x,t)(f(t) - f(x)) dt,$$

$$a' < \eta \leq (b' - a')/2.$$

Тогда $|I_1|$ можно сделать как угодно малым за счет оценки

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(\eta, f),$$

где $\omega(\eta, f)$ — модуль непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$, а $|I_2|$ — за счет оценки

$$|f(t) - f(x)| \leq 2\|f\|_{C[a,b]}$$

и условия 2).

Отсюда и из представления (2) следует утверждение теоремы. \square

Оператор K_α оказывает усредняющее действие на функцию $f(x)$. При этом усреднение может быть локальным, т.е. действующим на функцию в окрестности точки $x \in [a, b]$ (пример — известный оператор Стеклова), либо глобальным, т.е. действующим на всем отрезке (пример — оператор Ландау [1]).

Недостатком указанных выше операторов является затруднение при получении равномерных приближений к непрерывным функциям на всем отрезке их задания.

С целью устранения этого недостатка делались попытки модификации операторов K_α (особенно это относится к наиболее простому из них — оператору Стеклова [2, 3]).

А. П. Хромовым был предложен метод построения из операторов (1) операторов с разрывной областью значений (разрывных операторов), с помощью которых получают равномерные приближения к непрерывным функциям на всем отрезке их задания. Такие операторы построены из операторов Стеклова [4] и Ландау [5].

Разрывные операторы дают возможность строить из них конструкции, позволяющие получать равномерные приближения к решению различных задач. А именно на базе разрывных операторов были решены следующие задачи.

1. Задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному приближению — используя разрывный оператор Стеклова [4]:

$$S_\alpha f = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} f(t) dt \equiv S_{\alpha 2} f, & x \in [0, 1/2], \\ \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x f(t) dt \equiv S_{\alpha 1} f, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

и разрывный оператор [5]:

$$T_n f = \begin{cases} (n+1) \int_0^1 (1-t-x)^n f(t) dt, & x \in [0, 1/2], \\ (n+1) \int_0^x (1-x-t)^n f(t) dt, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

2. Задача приближения производной m -го порядка и задача восстановления такой производной по заданному среднеквадратичному приближению к самой функции — использовался разрывный оператор [6]:

$$T_{\alpha m} f = \begin{cases} D^m S_{\alpha 2}^{m+1} f, & x \in [0, 1/2], \\ D^m S_{\alpha 1}^{m+1} f, & x \in [1/2, 1] \end{cases} \quad (3)$$

(D^m — оператор дифференцирования порядка m).



3. Обратная задача для уравнения теплопроводности — использовались операторы (3) при $m = 1$ и оператор, составленный из квадратов операторов, стоящих в правой части (3) при $m = 1$ [7].

4. Задача приближенного решения уравнения Абеля — использовались разрывные операторы:

$$R_\alpha f = \begin{cases} S_{\alpha 2} A^{-1} f, & x \in [0, 1/2], \\ S_{\alpha 1} A^{-1} f, & x \in [1/2, 1], \end{cases} \quad R_\alpha f = \begin{cases} S_{\alpha 2}^2 A^{-1} f, & x \in [0, 1/2], \\ S_{\alpha 1}^2 A^{-1} f, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где A^{-1} — оператор, обратный к оператору в уравнении Абеля [8, 9].

2. Рассмотрим оператор [10, с. 298]

$$\bar{A}_n f = \frac{n}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t) dt}{1 + n^2(t-x)^2}.$$

Это один из операторов вида (1) и для него справедлива теорема 1.

Построим разрывный оператор:

$$A_n f = \begin{cases} \frac{2n}{\pi} \int_x^1 \frac{f(t) dt}{1 + n^2(t-x)^2} \equiv A_{n2} f, & x \in [0, \xi], \\ \frac{2n}{\pi} \int_0^x \frac{f(t) dt}{1 + n^2(t-x)^2} \equiv A_{n1} f, & x \in [\xi, 1]. \end{cases} \quad (4)$$

Лемма 1. При $x \in [\xi, 1]$, $0 < \xi \leq 1/2$ для любой $f(x) \in C[0, 1]$ имеет место сходимость:

$$\|A_{n1} f - f\|_{C[\xi, 1]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Имеем:

$$A_{n1} 1 = 1 + o(1), \quad (5)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [\xi, 1]$.

Действительно, справедливо представление

$$A_{n1} 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{nx} \frac{dt}{1 + t^2}. \quad (6)$$

Далее, из равенства $\int_0^{nx} = \int_0^\infty - \int_{nx}^\infty$ и оценки: $\left| \int_{nx}^\infty \right| \leq \left| \int_{n\xi}^\infty \right|$ вытекает равенство (6).

Отсюда получаем:

$$A_{n1} f - f(x) = \frac{2n}{\pi} \int_0^x \frac{f(t) - f(x)}{1 + n^2(t-x)^2} dt + o(1) f(x).$$

Теперь берем η из интервала $(0, x)$, пользуемся представлением

$$\int_0^x = \int_0^{x-\eta} + \int_{x-\eta}^x$$

и повторяем рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1. Учитываем, что равенство (5) выполняется при $x \in [\xi, 1]$, и получаем утверждение леммы. \square

Аналогично доказывается

Лемма 2. При $x \in [0, 1 - \xi]$, $0 < \xi \leq 1/2$ для любой $f(x) \in C[0, 1]$ имеет место сходимость

$$\|A_{n2} f - f\|_{C[0, 1-\xi]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$



Из (4) и лемм 1 и 2 при $\xi = 1/2$ следует

Теорема 2. Для любой $f(x) \in C[0, 1]$ выполняется сходимость

$$\|A_n f - f\|_{L_\infty[0,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\}$.

3. Рассмотрим оператор Вейерштрасса [10, с. 345]:

$$\bar{W}_n f = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-n^2(t-x)^2} f(t) dt.$$

Для него также справедлива теорема 1.

Построим разрывный оператор:

$$W_n f = \begin{cases} \frac{2n}{\pi} \int_0^1 e^{-n^2(t-x)^2} f(t) dt \equiv W_{n1} f, & x \in [0, \xi], \\ \frac{2n}{\pi} \int_x^1 e^{-n^2(t-x)^2} f(t) dt \equiv W_{n2} f, & x \in [\xi, 1]. \end{cases}$$

Для этого оператора справедливы утверждения лемм 1 и 2 с заменой A_{nj} на W_{nj} , $j = 1, 2$. В этом легко убедиться, повторив доказательства лемм с учетом равенства

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Отсюда следует справедливость теоремы 2 с заменой A_n на W_n .

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014К).

Библиографический список

1. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М. : ГИТЛ, 1954.
2. Хромова Г. В. О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17, № 5. С. 1161–1171.
3. Сендов Б. Х. Модифицированная функция Стеклова // Докл. Болг. Акад. наук. 1983. Т. 134, № 2. С. 355–379.
4. Хромов А. П., Хромова Г. В. Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 15-й Саратов. зимн. шк., посвящ. 125-летию со дня рожд. В. В. Голубева и 100-летию СГУ. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. С. 181.
5. Хромов А. П., Хромова Г. В. Об одном семействе операторов с разрывной областью значений в задачах приближения и восстановления непрерывных функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 10. С. 1603–1609. DOI: 10.7868/S0044466913100104.
6. Хромов А. П., Хромова Г. В. Разрывные операторы Стеклова в задаче равномерного приближения производных на отрезке // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, № 9. С. 57–62. DOI: 10.7868/S0044466914090099.
7. Хромов А. А., Хромова Г. В. Решение задачи об определении плотности тепловых источников // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 309–314. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314.
8. Хромова Г. В. Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4. С. 597–601.
9. Хромова Г. В. О равномерных приближениях к решению интегрального уравнения Абеля // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 10. С. 1703–1712. DOI: 10.7868/S0044466915100142.
10. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. СПб. : Лань, 2013. 560 с.

Образец для цитирования:

Хромова Г. В. Об операторах с разрывной областью значений // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 298–302. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-298-302.



On Operators with Discontinuous Range

G. V. Khromova

Galina V. Khromova, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

With the use of operators from approximation function theory we construct integral operators with discontinuous range of values, which make it possible to obtain uniform approximations of continuous functions on the whole interval of their definition.

Key words: operator, continuous function, interval, uniform approximations.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.1520.2014K).

References

1. Goncharov V. L. The theory of interpolation and approximation of functions. Moscow, GITL, 1954 (in Russian).
2. Khromova G. V. The problem of the reconstruction of functions that are given with error. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1977, vol. 17, no. 5, pp. 1161–1171.
3. Sendov B. X. A modified Steklov function. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 1983, vol. 134, no. 2, pp. 355–379.
4. Khromov A. P., Khromova G. V. On a modification of the Steklov operator. *Modern Problems in Function Theory and Applications: Abstracts of Papers of Saratov Winter School*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, pp. 181 (in Russian).
5. Khromov A. P., Khromova G. V. A family of operators with discontinuous ranges and approximation and restoration of continuous functions. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 10, pp. 1603–1609. DOI: 10.1134/S0965542513100096.
6. Khromov A. P., Khromova G. V. Discontinuous Steklov operators in the problem of uniform approximation of derivatives on an interval. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 9, pp. 57–62. DOI: 10.1134/S0965542514090085.
7. Хромов А. А., Хромова Г. В. The solution of the problem of determining the density of heat sources in a rod. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 309–314. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314.
8. Khromova G. V. Regularization of Abel Equation with the Use of Discontinuous Steklov Operator. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 597–601.
9. Khromova G. V. On uniform approximations to the solution of the Abel integral equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 10, pp. 1703–1712. DOI: 10.1134/S0965542515100139.
10. Nathanson I. P. *Theory of functions of a real variable*. St. Petersburg, Lan', 2013, 560 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:

Khromova G. V. On Operators with Discontinuous Range. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 298–302 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-298-302.

УДК 591.65

О ПРЕДЕЛЬНОМ ЗНАЧЕНИИ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМУ ПОЛИНОМУ ЛАГРАНЖА

И. А. Шакиров

Шакиров Искандер Асгатович, кандидат физико-математических наук, проректор по дополнительному образованию, Набережночелнинский государственный педагогический университет, iskander@tatngpi.ru

Изучается поведение константы Лебега тригонометрического полинома Лагранжа, интерполирующего периодическую функцию в нечетном числе узлов. Найдено предельное значение остаточного члена, входящего в известную асимптотическую формулу для этой константы. Специальное представление остаточного члена позволило установить его строгое убывание. На этой основе для константы Лебега получена наилучшая равномерная двусторонняя оценка логарифмическими функциями. Решены экстремальные задачи, связанные с наилучшим приближением константы Лебега: указаны вполне определенные элементы наилучшего приближения и значение наилучшего приближения.

Ключевые слова: полином Лагранжа, квадратурная формула, константа Лебега, экстремальная задача, аппроксимация.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-302-310



ВВЕДЕНИЕ

Приближение периодической функции тригонометрическими полиномами Лагранжа на практике осуществляется по равноотстоящим узлам, что дает выгодное с вычислительной точки зрения и близкое к оптимальному приближение исходной функции. При этом принципиальное значение имеют соответствующие им фундаментальные характеристики (функции и константы Лебега). Они впервые были введены Х. Лебегом в начале XX века в процессе изучения допущенной погрешности при таком способе приближения функции. Существенный вклад в развитие данного направления внесли Г. Фабер, Л. Фейер, С. Н. Бернштейн, Ю. Марцинкевич, Н. П. Натансон, С. М. Никольский, А. Зигмунд, В. Л. Гончаров [1], Н. И. Ахиезер, А. Ф. Тиман, А. Х. Турецкий [2], А. А. Привалов [3], Т. Ривлин, К. И. Бабенко и многие другие математики. В прошлом веке активные исследования в этой области проводили советские математики. В частности, их научные интересы были связаны с поиском более точных нижних и верхних оценок для фундаментальных характеристик, изучением их асимптотических поведений. В рамках данной работы рассмотрены и исследованы некоторые случаи тригонометрического интерполирования по равномерно распределенным на периоде узлам.

Известно, что тригонометрическому полиному Лагранжа

$$L_n(x, t) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} x(\tilde{t}_k) D_n(\tilde{t}_k - t) \quad \left(D_n(t) = \frac{\sin(n+0.5)t}{2 \sin 0.5t}, \quad \tilde{t}_k = \frac{2\pi}{2n+1} k, \quad k = \overline{1, N} \right), \quad (1)$$

определенному в нечетном числе $N = 2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) узлов интерполяции \tilde{t}_k , соответствует константа Лебега [4, с. 46]:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{1}{2n+1} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{cosec} \frac{2k-1}{4n+2} \pi \right) = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{cosec} \left(t_k - \frac{\pi}{2(2n+1)} \right) \right) \quad \left(t_k = \frac{\pi k}{2n+1} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где n — степень полинома (1). При $n = 0$ имеем тривиальный случай приближения исходной функции ($x(t) \approx L_0(x, t) \equiv x(2\pi)$, $\lambda_0 = 1$), который далее исключим из рассмотрения.

Для константы (2) имеет место известное асимптотическое равенство:

$$\lambda_n = (2/\pi) \ln n + O(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (O_n \equiv O(n) = \lambda_n - (2/\pi) \ln n, \quad n \in \mathbb{N}), \quad (3)$$

где O_n — остаточный член константы Лебега, соответствующий фиксированному значению параметра n , $\beta_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$ — его предельное значение, и они являются неопределенными числами из некоторого ограниченного интервала.

Проблемы верхней и нижней оценки константы (2), ее аналогов в случае интерполирования по четному числу узлов и по узлам Чебышева, многие другие вопросы подробно изучены в монографиях [1–3, 5], непосредственно посвященных теории интерполирования. Среди работ, связанных с более детальным исследованием соответствующих им остаточных членов (нахождением малых интервалов, к которым они принадлежат) и посвященных изучению их предельных значений, отметим статьи [6–10]. Заметим, что до сих пор не все составляющие константы Лебега (3) исследованы в полной мере; их более детальному рассмотрению и посвящена данная работа.

Получены следующие результаты:

- приведены специальные представления для остаточного члена, позволяющие установить строгое убывание последовательности (O_n) и строгое возрастание (λ_n);
- найдено предельное значение последовательности (O_n):

$$\beta_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = (2/\pi)[\gamma + \ln(16/\pi)] = 1.403794027\dots \quad (\gamma — константа Эйлера);$$

- решена экстремальная задача вида

$$\sup_{c \in \mathbb{R}} \{c \mid \lambda_n \geq c + (2/\pi) \ln n, \quad n \in \mathbb{N}\} = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{16}{\pi} + \gamma \right) = \beta_0; \quad (4)$$



– с учетом результатов предыдущих пунктов для константы Лебега получена неулучшаемая равномерная двусторонняя оценка:

$$(2/\pi)[\gamma + \ln(16/\pi)] + (2/\pi) \ln n \leq \lambda_n \leq 5/3 + (2/\pi) \ln n \quad (n \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\});$$

– решены экстремальные задачи, связанные с поиском элемента наилучшего приближения для константы λ_n и соответствующего наилучшего приближения.

Отметим, что часть результатов данной работы опубликована в работе [11] автора.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЛЕММЫ

В ходе доказательства основных теорем существенно используются следующие определение [10] и леммы.

Определение. Строго монотонную функцию $\varphi = \varphi(n)$ ($n \in \tilde{D} \subseteq \mathbb{N}$) дискретного аргумента, имеющую малое изменение δ области значений $R(\varphi)$, назовем *функцией, имеющей малую монотонную вариацию*, и класс таких функций обозначим через V_δ^\pm , где знак плюс используется в случае возрастания функции в области \tilde{D} , а минус — при ее убывании; $\delta = \sup\{\varphi(n) | n \in \tilde{D}\} - \inf\{\varphi(n) | n \in \tilde{D}\}$.

Введем в рассмотрение функцию

$$y = y(t) = 1/\sin t - 1/t \quad \left(t \in D = [0, \pi/2], \quad y(0) = y(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} y(t) = 0 \right) \quad (5)$$

и составим соответствующую ей интегральную сумму вида

$$S_n = S(n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sin(t_k - \pi/(4n+2))} - \frac{1}{t_k - \pi/(4n+2)} \right) \frac{\pi}{2n+1} \quad (6)$$

$$\left(t_k = \frac{\pi k}{2n+1} \in [0, \pi/2], \quad n \in \mathbb{N} \right).$$

Лемма 1. *Функциональная зависимость (5) является неотрицательной, строго возрастающей и выпуклой вниз функцией в области D . Соответствующая сумме (6) последовательность (S_n) строго возрастает и стремится к своему предельному значению $\ln(4/\pi)$, т. е.*

$$S_n < S_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln(4/\pi). \quad (7)$$

Доказательство. Для первой и второй производных функции (5) выполняются неравенства

$$y' = \frac{1}{t^2 \sin^2 t} \left(\frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{360}t^6 + \dots \right) = \left(\frac{t}{\sin t} \right)^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{360}t^2 + \dots \right) > 0 \quad (t \in (0, \pi/2]),$$

$$y'' = \frac{1}{t^3 \sin^3 t} \left(\frac{7}{60}t^7 - \frac{47}{2520}t^9 + \dots \right) = t \left(\frac{t}{\sin t} \right)^3 \left(\frac{7}{60} - \frac{47}{2520}t^2 + \dots \right) > 0 \quad (t \in (0, \pi/2]),$$

причем $y'(0) = y'(0+) = 1/6$, $y''(0) = y''(0+) = 0$, $R(y) = [0, 1 - 2/\pi]$. Эти сведения достаточны для завершения доказательства первой части леммы.

Относительно системы узлов $t_k = \pi k / (2n+1)$ ($k = \overline{0, n}$) сумма (6) представляет собой квадратурную формулу средних прямоугольников для определенного интеграла $I_n = I(n) = \int_0^{t_n} (1/\sin t - 1/t) dt$ с верхней переменной границей t_n , для которой верны соотношения

$$t_n < t_{n+1} < \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(t_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(2n+1)} \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \pi/2.$$

Расширение области интегрирования при неограниченном увеличении параметра n от промежутка $[0, t_n]$ до $[0, \pi/2]$ и установленные выше свойства подинтегральной функции обеспечивают выполнение соотношений

$$I_n < I_{n+1} < I \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^{\pi/2} (1/\sin t - 1/t) dt = \ln(4/\pi).$$



Согласно лемме 1 из [6] для класса выпуклых вниз в области своего определения функций средние суммы Римана монотонно возрастают независимо от поведения их третьих производных. В нашем случае неотрицательная функция (5), у которой первая и вторая производные также неотрицательны, удовлетворяет условиям указанной леммы. Поэтому для соответствующей квадратурной формулы средних прямоугольников (6) с учетом вышеизложенного выполняются неравенства $S_n < S_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, а также дополнительные соотношения:

$$S_n < I_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \int_0^{\pi/2} (1/\sin t - 1/t) dt = \ln(4/\pi) = 0.241564475 \dots,$$

где $S_1 = 2\pi/3 - 2 = 0.094395102 \dots$, $S_2 = \frac{\pi}{5} (\operatorname{cosec} \frac{\pi}{10} + \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{10}) - \frac{8}{3} = 0.143259225 \dots$, $S_3 = \frac{\pi}{7} (\operatorname{cosec} \frac{\pi}{14} + \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{14} + \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{14}) - \frac{46}{15} = 0.168164392 \dots$ и т.д.

Справедливость леммы 1 установлена полностью. □

Лемма 2. Разность $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k - 0.5) - \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ двух расходящихся числовых рядов $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k - 0.5)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ является сходящимся рядом, для суммы s которого верно следующее равенство:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \ln 4 \quad \left(s_n = \sum_{k=1}^n 1/(k - 0.5) - \sum_{k=1}^n 1/k = \sum_{k=1}^n 1/[k(2k - 1)], \quad n \in \mathbb{N} \right), \quad (8)$$

где (s_n) — строго возрастающая числовая последовательность.

Доказательство. Над известным разложением в степенной ряд функции $y = \ln(1 - t)$ ($t \in [0, 1)$) проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \ln(1 - t) &= -t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{5}t^5 - \dots \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{t} \ln(1 - t) &= 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{5}t^4 + \dots \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{t^2} \ln(1 - t^2) &= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{1}{4}t^6 + \frac{1}{5}t^8 + \dots \quad (t \in (0, 1)) \Rightarrow \\ \Rightarrow -\int_0^1 \frac{1}{t^2} \ln(1 - t^2) dt &= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^4 + \frac{1}{4}t^6 + \frac{1}{5}t^8 + \dots \right) dt. \end{aligned}$$

Применяя формулу интегрирования по частям к несобственному интегралу в левой части последнего равенства, после некоторых вычислений найдем его значение, равное $\ln 4$. В правой части равенства после интегрирования получим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/[k(2k - 1)]$, последовательность частных сумм которого, очевидно, монотонно возрастает. Лемма доказана. □

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для большинства встречающихся в приложениях операторов соответствующие им константы Лебега либо равномерно ограничены, либо ведут себя как логарифмическая функция натурального аргумента. В нашем случае поведения последовательностей (λ_n) , (O_n) и их предельных значений будут полностью определены следующими теоремами.

Теорема 1. Для остаточного члена $O_n = \lambda_n - (2/\pi) \ln n$ имеет место представление

$$O_n = O(n) = (2/\pi)[S_n + s_n + \gamma_n + \pi/(4n + 2)] \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (9)$$

где последовательности (S_n) , (s_n) определены в (6), (8) соответственно, а числа γ_n определяют известную константу Эйлера:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0.5772156649 \dots \quad \left(\gamma_n = \sum_{k=1}^n 1/k - \ln n \right). \quad (10)$$



Доказательство. Преобразуем константу Лебега (2), используя при этом соотношения (6), (8)–(10):

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n+1} \operatorname{cosec} \left(t_k - \frac{\pi}{4n+2} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin(t_k - \pi/(4n+2))} \cdot \frac{\pi}{2n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k - \pi/(4n+2)} \cdot \frac{\pi}{2n+1} \right] + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k - \pi/(4n+2)} \cdot \frac{\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)} \right\} = \frac{2}{\pi} \left[S_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-1/2} + \frac{\pi}{4n+2} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[S_n + \left(\sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{\pi}{4n+2} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[S_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(2k-1)} + \gamma_n + \ln n + \frac{\pi}{4n+2} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \ln n + \frac{2}{\pi} \left(S_n + s_n + \gamma_n + \frac{\pi}{4n+2} \right) = (2/\pi) \ln n + O_n \quad (t_k = \pi k/(2n+1)). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Далее, используя теорему 1, приведем простейшее доказательство строгого возрастания последовательности констант Лебега (2) (известный факт [12, с. 125]). Затем установим строгое убывание последовательности (9), и найдем ее предельное значение.

Теорема 2. Последовательность (O_n) строго убывает $(O_n \in V_\delta^-)$, а последовательность (λ_n) строго возрастает.

Доказательство. Вначале докажем вторую часть теоремы. Для этого проверим выполнение неравенства $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$, используя при этом одно из представлений для константы Лебега, полученное в ходе доказательства предыдущей теоремы, и неравенство (7):

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} - \lambda_n &= \frac{2}{\pi} \left[\left(S_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k-1/2} + \frac{\pi}{4(n+1)+2} \right) - \left(S_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-1/2} + \frac{\pi}{4n+2} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[(S_{n+1} - S_n) + \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{2}{2k-1} \right) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[(S_{n+1} - S_n) + \frac{4n+6-\pi}{(2n+1)(2n+3)} \right] > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

где обе части слагаемого в квадратных скобках положительны.

Для доказательства первой части теоремы используем полученное в работе [10, формула (18)] двойное неравенство

$$(11/6)\alpha_n + \varphi_n + (2/\pi) \ln n < \lambda_n < 2\alpha_n + \varphi_n + (2/\pi) \ln n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

которое представим в виде

$$\begin{aligned} (11/6)\alpha_n + \varphi_n < \lambda_n - (2/\pi) \ln n < 2\alpha_n + \varphi_n &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (11/6)\alpha_n + \varphi_n < O_n < 2\alpha_n + \varphi_n &\quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\alpha_n \equiv 1/[(2n+1) \sin(\pi/(4n+2))]$, $\varphi_n \equiv \frac{2}{\pi} \ln \left[\left(2 + \frac{1}{n} \right) \alpha_n \cos \left(\frac{\pi}{4n+2} \right) \right]$ $(n \in \mathbb{N})$.

Согласно леммам 1 и 2 из [10] для функций натурального аргумента $\alpha_n = \alpha(n)$, $\varphi_n = \varphi(n)$ верны соотношения $\alpha_n \in V_\delta^-$, $\varphi_n \in V_\delta^-$. Ясно, что их линейные комбинации $\psi_n \equiv (11/6)\alpha_n + \varphi_n$, $\bar{\psi}_n \equiv 2\alpha_n + \varphi_n$ также являются строго убывающими функциями ($\psi_n, \bar{\psi}_n \in V_\delta^-$); для их образов и вариаций верны соотношения

$$R(\psi_n) = \left(\frac{11}{3\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4}{\pi}, \frac{11}{9} + \frac{1}{\pi} \ln 3 \right) \subset (1.320920, 1.571922), \quad \delta(\psi_n) = 0.251000 \dots,$$



$$R(\bar{\psi}_n) = \left(\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4}{\pi}, \frac{4}{3} + \frac{1}{\pi} \ln 3 \right] \subset (1.427024, 1.683033), \quad \delta(\bar{\psi}_n) = 0.256008 \dots$$

Эти сведения, неравенство (11) и теорема о трех последовательностях позволяют утверждать, что остаточный член $O_n \in V_\delta^-(R(O_n) = (\beta_0, 5/3], \delta(O_n) = 0.262872 \dots)$. Следовательно, строго возрастающая функция $\lambda_n = \lambda(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) состоит из логарифмической части $(2/\pi) \ln n$ и строго убывающего остаточного члена O_n ($O_n \in V_\delta^-$) вида (9).

Теорема 2 полностью доказана. □

Теперь, используя представление (9) для остаточного члена O_n , найдем его предельное значение β_0 .

Теорема 3. Для последовательности (O_n) имеет место следующее предельное равенство:

$$\beta_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{16}{\pi} \right) = 1.403794027 \dots \quad (12)$$

Доказательство. Переходя в (9) к пределу и используя при этом соотношения (7), (8), (10), легко получим справедливость (12):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} O_n &= \frac{2}{\pi} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \pi/(4n+2) \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{4}{\pi} + \ln 4 + \gamma \right) = \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{16}{\pi} \right) = \beta_0, \end{aligned}$$

причем

$$R(O_n) = \left(\frac{2}{\pi} \gamma + \frac{2}{\pi} \ln \frac{16}{\pi}, \frac{5}{3} \right] \subset (1.403794, 1.666667), \quad \delta = \delta(O_n) = 0.262872 \dots \quad (13)$$

Следствие 1. Для константы Лебега (2) имеет место представление

$$\lambda_n = \beta_0 + (2/\pi) \ln n + \bar{O}_n \quad (\bar{O}_n = O_n - \beta_0, \quad n \in \mathbb{N}), \quad (14)$$

где для нового остаточного члена \bar{O}_n выполнены соотношения

$$\bar{O}_n \in V_\delta^-, \quad R(\bar{O}_n) = (0, 5/3 - \beta_0] \subset (0, 0.262873), \quad \delta(\bar{O}_n) = 0.262872 \dots \quad (15)$$

Доказательство. Найденное ранее предельное значение β_0 позволяет выразить константу Лебега через логарифмическую функцию $\beta_0 + (2/\pi) \ln n$ (главную часть) и новый остаточный член \bar{O}_n , т. е. представить ее в виде (14). Так как $O_n \in V_\delta^-$ (см. теорему 2), то линейно выраженный через него остаточный член \bar{O}_n также принадлежит этому же классу. Теперь из (13), (14) легко следует справедливость соотношений (15).

Следствие 2. Константа β_0 является единственным решением экстремальной задачи

$$\sup \{ c \in \mathbb{R} \mid \lambda_n \geq c + (2/\pi) \ln n, \quad n \in \mathbb{N} \} = \beta_0 = 1.403794027 \dots,$$

причем в нижней оценке $\beta_0 + (2/\pi) \ln n \leq \lambda_n$ ($n \in \mathbb{N}$) для константы Лебега равенство достигается лишь при $n = +\infty \in \bar{\mathbb{N}}$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \beta_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} [(2/\pi) \ln n].$$

Доказательство. Выполнение утверждений следствия 2 (см. также (4)) обеспечивает свойство строгой монотонности последовательности O_n ($O_n \in V_\delta^-$). □

Теорема 4. Константу Лебега $\lambda_n = \lambda(n)$ наилучшим образом приближает логарифмическая функция:

$$\mu_n^* = \mu^*(n) = \frac{2}{\pi} \ln n + \frac{5}{6} + \frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{16}{\pi} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

т. е. она является решением следующей экстремальной задачи:

$$\inf_{b \in [0, \infty)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \lambda_n - b - \frac{2}{\pi} \ln n \right| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \mu_n^*| = \frac{5}{6} - \frac{\gamma}{\pi} - \frac{1}{\pi} \ln \frac{16}{\pi} = 0.131436319 \dots = \varepsilon^*, \quad (16)$$

где ε^* — наилучшее равномерное (дискретное) приближение $\lambda(n)$ логарифмическими функциями [13, с. 9].



Доказательство. Полученные в теореме 3 и в двух ее следствиях результаты обеспечивают выполнение следующего двойного неравенства для константы (2):

$$(2/\pi)[\gamma + \ln(16/\pi)] + (2/\pi) \ln n \leq \lambda_n \leq 5/3 + (2/\pi) \ln n \quad (n \in \overline{\mathbb{N}}), \quad (17)$$

где нижнее равенство достигается только при предельном значении параметра n ($n = +\infty$), а верхнее — при $n = 1$.

Согласно (17) все значения дискретной функции $z = \lambda(n)$ ($n \in \overline{\mathbb{N}}$), рассматриваемой в декартовой системе координат nOz , находятся строго между двумя вполне определенными логарифмическими функциями (совпадение значений $\lambda(n)$ и указанных функций имеет место лишь на концах их области определения, т.е. при $n = 1$ и $n = +\infty$). Ясно, что их полусумма $\mu_n^* = \mu^*(n) = \frac{2}{\pi} \ln n + \frac{5}{6} + \frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{16}{\pi} = \frac{2}{\pi} \ln n + 1.535230346\dots$ является элементом наилучшего равномерного приближения для λ_n среди всевозможных логарифмических функций вида $b + a \ln n$ ($a, b \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$).

Проверка справедливости соотношения (16) требует лишь элементарных технических расчетов. □

Замечание. Рассматривая экстремальную задачу (16) на различных вложенных друг в друга подмножествах множества натуральных чисел \mathbb{N} и используя при этом результаты теоремы 2 относительно последовательностей (O_n) , (λ_n) , можно сколько угодно уменьшать значение погрешности ε^* , возникающей в процессе приближенного вычисления константы Лебега согласно формуле $\lambda_n \approx \mu_n^*$ ($n \in \mathbb{N}$).

Например, для константы (2) при $\mathbb{N}_0 = \{4, 5, 6, 7, \dots\} \subset \mathbb{N}$ имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{5}{3} = 1.66666666\dots, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5} \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{10} = 1.988854381\dots, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{7} + \frac{2}{7} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{14} + \frac{2}{7} \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{14} + \frac{2}{7} \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{14} = 2.202214555\dots \end{aligned}$$

(они вычислены точно). Остальные значения константы Лебега вычислим приближенно ($\lambda_n \approx \bar{\mu}_n$, $n \geq 4$), используя при этом логарифмическую функцию:

$$\bar{\mu}_n = \bar{\mu}(n) = \frac{2}{\pi} \ln n + \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\pi} \ln 3 + \beta_0 + 2.202214555\dots \right) = \frac{2}{\pi} \ln n + 1.453305138\dots \quad (n \geq 4)$$

наилучшего равномерного приближения для $\lambda_n = \lambda(n)$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Она построена согласно алгоритму, использованному в ходе доказательства теоремы 4. В этом случае для модифицированной экстремальной задачи имеем:

$$\begin{aligned} \inf_{b \in [0, \infty)} \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left| \lambda_n - \frac{2}{\pi} \ln n - b \right| &= \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |\lambda_n - \bar{\mu}_n| = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\pi} \ln 3 - \beta_0 + 2.202214555\dots \right) = \\ &= 0.049511111\dots = \bar{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом, выбором подмножества $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ и соответствующей функции $\bar{\mu}(n)$ ($n \in \mathbb{N}_0$) ранее найденная погрешность ε^* уменьшена более чем в 2.5 раза ($\varepsilon^*/\bar{\varepsilon} = 2.654683\dots$).

Библиографический список

1. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М. : Гостехиздат, 1954. 328 с.
2. Турецкий А. Х. Теория интерполирования в задачах. Минск : Вышэйшая школа, 1968. 320 с.
3. Привалов А. А. Теория интерполирования функций : в 2 кн. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1990. Кн. 1. 230 с.; Кн. 2. С. 231–424.
4. Дзядык В. К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наук. думка, 1988. 304 с.
5. Szabados J., Vertesi P. Interpolation of Functions. Singapore : World Scientific, 1990. 305 p.
6. Rivlin T. J. The Lebesgue constants for polynomial interpolation // Functional Analysis and its Application, Int. Conf., Madras, 1973 (eds. H. G. Gamier et al.). Berlin : Springer-Verlag, 1974. P. 422–437.
7. Brutman L. Lebesgue functions for polynomial interpolation — a survey // The heritage of P. L. Chebyshev : a Festschrift in honor of the 70th birthday



- of T. J. Rivlin. *Ann. Numer. Math.* 1997. Vol. 4, № 1–4. P. 111–127.
8. Vértesi P. On the Lebesgue function and Lebesgue constant : a tribute to Paul Erdős // Paul Erdős and his mathematics, I (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud. Vol. 11. Budapest : János Bolyai Math. Soc., 2002. P. 705–728..
 9. Simon J. S. Lebesgue constants in polynomial interpolation // *Annal. Math. et Inf.* 2006. Vol. 33. P. 109–123.
 10. Шакиров И. А. О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на точные и приближенные значения констант Лебега // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1404–1423.
 11. Шакиров И. А. О значении неопределенной величины в асимптотической формуле для константы Лебега // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С. 322–326.
 12. Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 616 с.
 13. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М. : Наука, 1976. 320 с.

Образец для цитирования:

Шакиров И. А. О предельном значении остаточного члена константы Лебега, соответствующей тригонометрическому полиному Лагранжа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 302–310. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-302-310.

On a Limit Value of a Remainder of the Lagrange Constant Corresponding to the Lagrange Trigonometrical Polynomial

I. A. Shakirov

Iskander A. Shakirov, Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, 28, Nizametdinov st., 423806, Naberezhnye Chelny, Tatarstan, Russia, iskander@tatngpi.ru

The behavior of Lebesgue constant of a trigonometrical Lagrange polynomial interpolating the periodic function in an odd number of clusters is studied. The limit value of the remainder in the known asymptotic formula for this constant is found. A special representation of a remainder allowed us to establish its strict decreasing. On this basis, for a Lebesgue constant, a non-improvable uniform bilateral logarithmic function estimate is received. The extremum problems related to the best approximation of a constant of Lebesgue are solved: quite particular elements of the best approximation and the value of the best approximation are specified.

Key words: Lagrange polynomial, quadrature formula, Lebesgue constant, extremum problem, approximation.

References

1. Goncharov V. L. *Interpolation theory and approximations of functions*. Moscow, Gostekhizdat, 1954, 328 p. (in Russian)
2. Turetskii A. Kh. *Teoriia interpolirovaniia v zadachakh* [Theory of interpolation in problems]. Minsk, Vysheishaia shkola, 1968, 320 p. (in Russian).
3. Privalov A. A. *Teoriya interpolirovaniya funktsii? Kniga 1, 2* [Theory of interpolation of functions. Book 1, 2]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1990. Book 1 : 230 p.; Book 2 : pp. 231–424 (in Russian).
4. Dzyadyk V. K. *Approksimatsionnye metody resheniya differentsial'nykh i integral'nykh uravnenii?* [Approximation methods for solving differential and integral equations]. Kiev, Naukova Dumka, 1988, 304 p. (in Russian).
5. Szabados J., Vertesi P. *Interpolation of Functions*. Singapore, World Scientific, 1990, 305 p.
6. Rivlin T. J. The Lebesgue constants for polynomial interpolation. *Functional Analysis and its Application, Int. Conf., Madras, 1973* (eds. H. G. Gamier et al.), Berlin, Springer-Verlag, 1974, pp. 422–437.
7. Brutman L. Lebesgue functions for polynomial interpolation — a survey. The heritage of P. L. Chebyshev : a Festschrift in honor of the 70th birthday of T. J. Rivlin. *Ann. Numer. Math.*, 1997, vol. 4, no. 1–4, pp. 111–127.
8. Vértesi P. On the Lebesgue function and Lebesgue constant : a tribute to Paul Erdős. *Paul Erdős and his mathematics, I (Budapest, 1999)*, Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 11, Budapest, János Bolyai Math. Soc., 2002, pp. 705–728.
9. Simon J. S. Lebesgue constants in polynomial interpolation. *Annal. Math. et Inf.*, 2006, vol. 33, pp. 109–123.
10. Shakirov I. A. Influence of the choice of Lagrange interpolation nodes on the exact and approximate values of the Lebesgue constants. *Siberian Math. J.*, 2014, vol. 55, iss. 6, pp. 1144–1160. DOI: 10.1134/S0037446614060184.
11. Shakirov I. A. O znachenii neopredelennoi velichiny v asimptoticheskoi formule dlia konstanty Lebe-ga [About the value of uncertain quantities in the asymptotic formula for the Lebesgue constants]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : materialy 18-i mezhdunar. Sarat. zimnei shkoly* [Modern problems of function theo-



- ry and their applications : Proc. 18th Intern. Sarat. Winter School]. Saratov, OOO Izd-vo "Nauchnaia kniga", 2016, pp. 322–326.
12. Zygmund A. *Trigonometric series: Vol. I, II*. Second edition, reprinted with corrections and some additions. London ; New York, Cambridge Univ. Press, 1968, vol. I : 383 p.; vol. II : 364 p. (two volumes bound as one) (Russ. ed. : Zygmund A. *Trigonometricheskie riady*. Tom 1. Moscow, Mir, 1965, 616 p.).
13. Korneichuk N. P. *Ekstremal'nye zadachi teorii priblizheniya* [Extremal problems of approximation theory]. Moscow, Nauka, 1976, 320 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:

Shakirov I. A. On a Limit Value of a Remainder of the Lagrange Constant Corresponding to the Lagrange Trigonometrical Polynomial. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 302–310 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-302-310.

УДК 517.587

ПОЛИНОМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНАМИ МЕЙКСНЕРА

И. И. Шарапудинов¹, З. Д. Гаджиева²

¹Шарапудинов Идрис Идрисович, заведующий отделом математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН; Владикавказский научный центр РАН; Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, sharapud@mail.ru

²Гаджиева Зульфия Джамалдиновна, научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала, zulfiya.gadzhieva.1976@mail.ru

Рассмотрена задача о конструировании полиномов $m_{r,n}^\alpha(x, q)$, ($n = 0, 1, \dots$), ортогональных по Соболеву и порожденных классическими полиномами Мейкснера. Эти полиномы могут быть определены с помощью следующих равенств $m_{r,k}^\alpha(x, q) = \frac{x^{[k]}}{k!}$, $x^{[k]} = x(x-1)\dots(x-k+1)$, $k = 0, 1, \dots, r-1$, $m_{r,k+r}^\alpha(x, q) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} m_k^\alpha(t, q)$, где через $m_k^\alpha(t, q)$ обозначены полиномы Мейкснера, ортонормированные на сетке $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ с весом $\rho(x) = q^{\frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)}} (1-q)^{\alpha+1}$. Полиномы $m_{r,n}^\alpha(x, q)$ ($n = 0, 1, \dots$) образуют ортонормированную систему на $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ относительно скалярного произведения типа Соболева следующего вида:

$$\langle m_{r,n}^\alpha, m_{r,m}^\alpha \rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k m_{r,n}^\alpha(0, q) \Delta^k m_{r,m}^\alpha(0, q) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r m_{r,n}^\alpha(j, q) \Delta^r m_{r,m}^\alpha(j, q) \rho(j).$$

Для $m_{r,n}^\alpha(x, q)$ мы получили явную формулу, содержащую полиномы Мейкснера $M_n^{\alpha-r}(x, q)$:

$$m_{r,k+r}^\alpha(x, q) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \{h_n^\alpha(q)\}^{-1/2} \left[M_{k+r}^{\alpha-r}(x, q) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{r,k,\nu} x^{[\nu]}}{\nu!} \right], \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $A_{r,k,\nu} = \left(\frac{q-1}{q}\right)^\nu \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+r-\nu)! \Gamma(\nu-r+\alpha+1)}$, $M_n^\alpha(x, q) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{\Gamma(k+\alpha+1) k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k$,

$$h_n^\alpha(q) = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n} \Gamma(\alpha+1).$$

Ключевые слова: полиномы, ортогональные по Соболеву, полиномы Мейкснера, ортогональные на сетке, приближение дискретных функций, смешанные ряды по полиномам Мейкснера, ортогональным на равномерной сетке.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-310-321

ВВЕДЕНИЕ

Теория полиномов, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева, получила в последние три десятилетия интенсивное развитие и нашла ряд важных приложений (см. [1–6] и цитированную там литературу). Характерной особенностью скалярных произведений типа Соболева



является, в частности, то что они, как правило, содержат слагаемые, которые «контролируют» поведение соответствующих ортогональных полиномов в одной или нескольких точках числовой оси. Например, часто рассматривают скалярное произведение вида

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a) + \int_a^b f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)\rho(t)dt, \quad (1)$$

в котором f и g — функции, заданные на $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемые там $r - 1$ -раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ и $g^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны и $f^{(r)}(x), g^{(r)}(x) \in L^2_\rho(a, b)$, где $L^2_\rho(a, b)$ — пространство Лебега с весом $\rho(x)$. Следует отметить, что полиномы, ортогональные по Соболеву, по своим свойствам могут весьма существенно отличаться от обычных ортогональных на интервале полиномов. Например, в некоторых случаях оказывается так, что полиномы, ортогональные по Соболеву на интервале (a, b) , могут иметь нули, совпадающие с одним или с обоими концами этого интервала. Это обстоятельство имеет важное значение для некоторых приложений, в которых требуется, чтобы значения частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ по рассматриваемой системе ортогональных полиномов совпали в концах интервала (a, b) со значениями $f(a)$ и $f(b)$. Заметим, что обычные ортогональные с положительным на (a, b) весом полиномы этим важным свойством не обладают. Скалярное произведение (1) имеет одну особую точку, а именно точку a , в окрестности которой «контролируется» поведение соответствующих полиномов, ортогональных по Соболеву. Это достигается за счет наличия в скалярном произведении (1) слагаемого вида $\sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(a)g^{(\nu)}(a)$.

С другой стороны, в работах [7–18] независимо были рассмотрены так называемые смешанные ряды по классическим ортонормированным системам $\{\varphi_k(x)\}$, которые представляют собой ряды по системам функций $\{\varphi_{r,k}(x)\}$, порожденным соответствующей системой $\{\varphi_k(x)\}$ посредством применения равенств вида

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1 \quad (2)$$

и

$$\varphi_{r,k}(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x (x-t)^{r-1} \varphi_{k-r}(t) dt, \quad k = r, r+1, \dots \quad (3)$$

Обозначим через $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ весовое пространство Соболева, состоящее из функций $f(x)$, заданных на $[a, b]$ и непрерывно дифференцируемых там $(r-1)$ -раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна и $f^{(r)}(x) \in L^2_\rho(a, b)$. Если $f \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$, то смешанный ряд по системе $\{\varphi_k(x)\}$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k} \varphi_{r,k}(x), \quad (4)$$

где

$$f_{r,k} = \int_a^b f^{(r)}(t) \varphi_{r,k}(t) \rho(t) dt = \int_a^b f^{(r)}(t) \varphi_{k-r}(t) \rho(t) dt. \quad (5)$$

Пользуясь определением функций $\varphi_{r,k}(x)$ (см. (2) и (3)), нетрудно увидеть [18], что система $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является ортонормированной в пространстве $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ относительно скалярного произведения (1), величины $f^{(k)}(a) (k = 0, 1, \dots, r-1)$ и $f_{r,k} (k = r, r+1, \dots)$ являются коэффициентами Фурье функции f , а смешанный ряд (4) представляет собой ряд Фурье функции $f \in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ по этой системе. Мы будем называть систему $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения (1) и порожденной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Таким образом, понятие смешанного ряда по ортонормированной системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, введенное в работах [7–18], совпадает с понятием ряда Фурье по системе $\{\varphi_{r,k}(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения (1) и порожденной ортонормированной системой $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Следует отметить, что смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам были введены в работах [7–18] как альтернативный рядам Фурье по тем же полиномам аппарат решения задач, в которых требуется одновременно приближать дифференцируемую функцию и несколько ее производных. В частности, такая задача часто возникает при решении дифференциальных уравнений



численно-аналитическими (спектральными) методами [19, 20]. Смешанные ряды по ортонормированным системам функций оказались естественным и весьма эффективным средством решения краевых задач для дифференциальных уравнений спектральными методами. По этому поводу мы можем отослать, например, к работе [21].

В настоящей статье мы рассмотрим дискретный аналог скалярного произведения (1) следующего вида:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \Delta^k g(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) \Delta^r g(j) \rho(j), \quad (6)$$

где функции f и g заданы на множестве $\Omega = \{0, 1, \dots\}$, $\rho = \rho(j)$ — дискретная весовая функция, заданная на множестве Ω . В случае, когда $r = 0$, мы будем считать, что $\sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \Delta^k g(0) = 0$. При $r \geq 1$ особой точкой в скалярном произведении (6) является $x = 0$, в которой контролируется поведение соответствующих ортогональных по Соболеву полиномов дискретной переменной благодаря присутствию в (6) выражения $\sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \Delta^k g(0)$. В настоящей статье рассматриваются системы дискретных функций, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (6), порожденных заданной ортонормированной системой функций дискретной переменной. Основное внимание будет уделено изучению свойств полиномов, ортогональных по Соболеву, порожденных классическими ортогональными полиномами Мейкснера дискретной переменной.

1. СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ, ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ПО СОБОЛЕВУ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Перейдем к конструированию дискретных функций, ортонормированных по Соболеву относительно скалярного произведения (6), порожденных заданной системой $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной на дискретном множестве $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ с весом $\rho(x)$. Для этого нам понадобятся некоторые обозначения и понятия. Если целое $k \geq 0$, то положим $a^{[k]} = a(a-1) \cdots (a-k+1)$, $a^{[0]} = 1$ и рассмотрим следующие функции:

$$\psi_{r,k}(x) = \frac{x^{[k]}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1, \quad (7)$$

$$\psi_{r,k}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \psi_{k-r}(t), & r \leq x, \\ 0, & x = 0, 1, \dots, r-1, \end{cases} \quad (8)$$

которые определены на сетке $\Omega = \{0, 1, \dots\}$. Рассмотрим некоторые важные разностные свойства системы функций $\psi_{r,k}(x)$, определенных равенствами (7) и (8). Введем оператор конечной разности $\Delta f: \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ и положим $\Delta^{\nu+1} f(x) = \Delta \Delta^{\nu} f(x)$. Имеет место следующая

Лемма 1. *Имеют место равенства*

$$\Delta^{\nu} \psi_{r,k}(x) = \begin{cases} \psi_{r-\nu, k-\nu}(x), & \text{если } 0 \leq \nu \leq r-1, r \leq k, \\ \psi_{k-r}(x), & \text{если } \nu = r \leq k, \\ \psi_{r-\nu, k-\nu}(x), & \text{если } \nu \leq k < r, \\ 0, & \text{если } k < \nu \leq r. \end{cases} \quad (9)$$

Доказательство. Справедливость утверждения леммы 1 при $r = 1$ почти очевидна, поэтому мы будем считать, что $r \geq 2$. Прежде всего заметим, что если $f(x) = (x-1-t)^{[r-1]}$, то $\Delta f(x) = (r-1)(x-1-t)^{[r-2]}$, поэтому для $r \leq x, k$ в силу (8) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta \psi_{r,k}(x) &= \frac{1}{(r-1)!} \left(\sum_{t=0}^{x-r+1} (x-t)^{[r-1]} \psi_{k-r}(t) - \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \psi_{k-r}(t) \right) = \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r+1} \left((x-t)^{[r-1]} - (x-1-t)^{[r-1]} \right) \psi_{k-r}(t) = \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{(r-2)!} \sum_{t=0}^{x-r+1} (x-1-t)^{[r-2]} \psi_{k-1-(r-1)}(t) = \psi_{r-1, k-1}(x). \quad (10)$$

Отсюда убеждаемся в справедливости первого из равенств (9) для $r \leq x$. Справедливость равенства $\Delta\psi_{r,k}(x) = \psi_{r-1, k-1}(x)$ для $x = 0, 1, \dots, r-2$ очевидна. Остается проверить первое из равенств (9) для $x = r-1$. Но в этом случае мы имеем:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{r,k}(x) &= \psi_{r,k}(x+1) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r+1} (x-t)^{[r-1]} \psi_{k-r}(t) = \frac{(r-1)^{[r-1]}}{(r-1)!} \psi_{k-r}(0) = \psi_{k-r}(0), \\ \psi_{r-1, k-1}(x) &= \frac{1}{(r-2)!} \sum_{t=0}^{x-r+1} (x-1-t)^{[r-2]} \psi_{(k-1)-(r-1)}(t) = \frac{(r-2)^{[r-2]}}{(r-2)!} \psi_{k-r}(0) = \psi_{k-r}(0), \end{aligned}$$

поэтому мы снова находим $\Delta\psi_{r,k}(x) = \psi_{r-1, k-1}(x)$. Таким образом, полностью доказано первое из равенств (9) для $0 \leq \nu \leq 1$. Его справедливость для $2 \leq \nu \leq r-1$ выводим по индукции.

Рассмотрим второе из равенств (9). В силу уже доказанного первого из равенств (9) и того, что второе из них для $r=1$ легко проверяется, имеем

$$\Delta^r \psi_{r,k}(x) = \Delta \Delta^{r-1} \psi_{r,k}(x) = \Delta \psi_{1, k-r+1}(x) = \psi_{k-r}(x).$$

Тем самым мы доказали второе из равенств (9). Третье и четвертое равенства из (9) непосредственно вытекают из (7). Лемма 1 полностью доказана. \square

Пусть $0 \leq r$ — целое. Обозначим через l_ρ пространство дискретных функций $f = f(x)$, заданных на сетке $\Omega = \{0, 1, \dots\}$, в которых скалярное произведение $\langle f, g \rangle$ определено с помощью равенства (6). Рассмотрим задачу об ортогональности, нормированности и полноте в l_ρ системы $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, состоящей из функций, определенных равенствами (7) и (8).

Теорема 1. *Предположим, что функции $\psi_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) образуют полную в l_ρ ортонормированную систему с весом $\rho(x)$. Тогда система $\{\psi_{r,k}(x)\}_{k=0}^\infty$, порожденная системой $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ посредством равенств (7) и (8), полна в l_ρ и ортонормирована относительно скалярного произведения (6).*

Доказательство. Из равенства (8) следует, что если $r \leq k$ и $0 \leq \nu \leq r-1$, то $\Delta^\nu \psi_{r,k}(x)_{x=0} = 0$, поэтому в силу (6) и (9) имеем:

$$\langle \psi_{r,k}, \psi_{r,l} \rangle = \sum_{x=0}^\infty \Delta^r \psi_{r,k}(x) \Delta^r \psi_{r,l}(x) \rho(x) = \sum_{x=0}^\infty \psi_{k-r}(x) \psi_{l-r}(x) \rho(x) = \delta_{kl}, \quad k, l \geq r, \quad (11)$$

$$\langle \psi_{r,k}, \psi_{r,l} \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu \psi_{r,k}(0) \Delta^\nu \psi_{r,l}(0) = \delta_{kl}, \quad k, l < r. \quad (12)$$

Очевидно также, что

$$\langle \psi_{r,k}, \psi_{r,l} \rangle = 0, \quad \text{если } k < r \leq l, \quad \text{или } l < r \leq k. \quad (13)$$

Это означает, что функции $\psi_{r,k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) образуют в l_ρ ортонормированную систему относительно скалярного произведения (6). Чтобы проверить полноту этой системы в l_ρ предположим, что для функции $f = f(x) \in l_\rho$ имеют место равенства

$$\langle \psi_{r,k}, f \rangle = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Тогда, во-первых, в силу того что $0 = \langle \psi_{r,k}, f \rangle = \Delta^k f(0)$ при $k = 0, \dots, r-1$, имеем $f(j) = 0$ для всех $j = 0, \dots, r-1$. Во-вторых, из равенств $\langle \psi_{r,k}, f \rangle = 0$, $k = r, r+1, \dots$ и полноты в l_ρ исходной системы $\psi_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) следует, что $\Delta^r f(x) \equiv 0$ ($x \in \Omega$) и поэтому f совпадает с алгебраическим полиномом степени не выше $r-1$. Из этих двух фактов вытекает, что $f(x) \equiv 0$ ($x \in \Omega$). Теорема 1 доказана. \square

Систему функций $\psi_{r,k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) мы будем называть системой, ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения (6).



Из теоремы 1 следует, что система дискретных функций $\psi_{r,k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) является ортонормированным базисом (ОНБ) в пространстве l_ρ , поэтому для произвольной функции $f(x) \in l_\rho$ мы можем записать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_{r,k} \rangle \psi_{r,k}(x), \tag{14}$$

которое представляет собой ряд Фурье функции $f(x) \in l_\rho$ по системе $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$, ортонормированной по Соболеву. Поскольку коэффициенты Фурье $\langle f, \psi_{r,k} \rangle$ имеют вид

$$f_{r,k} = \langle f, \psi_{r,k} \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu f(0) \Delta^\nu \psi_{r,k}(0) = \Delta^k f(0), \quad k = 0, \dots, r-1, \tag{15}$$

$$f_{r,k} = \langle f, \psi_{r,k} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) \Delta^r \psi_{r,k}(j) \rho(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r f(j) \psi_{k-r}(j) \rho(j), \quad k = r, r+1, \dots, \tag{16}$$

то равенство (14) можно переписать в следующем смешанном виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} f_{r,k} \psi_{r,k}(x), \quad x \in \Omega. \tag{17}$$

Поэтому ряд Фурье по системе $\{\psi_{r,k}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ мы будем, следуя [7–18], называть смешанным рядом по исходной ортонормированной $\{\psi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Отметим некоторые важные свойства смешанных рядов (17) и их частичных сумм вида

$$\mathcal{Y}_{r,n}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^n f_{r,k} \psi_{r,k}(x). \tag{18}$$

Из (17) и (18) с учетом равенств (9) мы можем записать ($0 \leq \nu \leq r-1, x \in \Omega$)

$$\Delta^\nu f(x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{\infty} f_{r,k+\nu} \psi_{r-\nu,k}(x), \tag{19}$$

$$\Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}(f, x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{n-\nu} f_{r,k+\nu} \psi_{r-\nu,k}(x), \tag{20}$$

$$\Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}(f, x) = \mathcal{Y}_{r-\nu,n-\nu}(\Delta^\nu f, x). \tag{21}$$

2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ МЕЙКСНЕРА

При конструировании полиномов, ортогональных по Соболеву и порожденных классическими многочленами Мейкснера, нам понадобится ряд свойств этих многочленов, которые мы приведем в настоящем параграфе. Для произвольного α и $0 < q < 1$ положим

$$\rho(x) = \rho(x; \alpha) = q^x \frac{\Gamma(x + \alpha + 1)}{\Gamma(x + 1)} (1 - q)^{\alpha+1}, \tag{22}$$

$$M_n^\alpha(x, q) = \frac{q^{-n}}{n! \rho(x)} \Delta^n \left\{ \rho(x) x^{[n]} \right\}, \tag{23}$$

где $\Delta^n f(x)$ — конечная разность n -го порядка функции $f(x)$ в точке x , т.е. $\Delta^0 f(x) = f(x)$, $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^n f(x) = \Delta \Delta^{n-1} f(x)$ ($n \geq 1$), $a^{[0]} = 1$, $a^{[k]} = a(a-1) \cdots (a-k+1)$ при $k \geq 1$. Для каждого $0 \leq n$ равенство (23) определяет [22], алгебраический полином степени n , для которого $M_n^\alpha(0, q) = \binom{n+\alpha}{n}$.

Полные доказательства приведенных после свойств полиномов Мейкснера $M_n^\alpha(x, q)$ можно найти, например, в [22, 23]. Прежде всего отметим, что полиномы $M_n^\alpha(x, q)$ допускают следующее явное представление:

$$M_n^\alpha(x, q) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{\Gamma(k + \alpha + 1) k!} \left(1 - \frac{1}{q} \right)^k. \tag{24}$$



Если $\alpha > -1$, то полиномы $M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x, q)$ ($n = 0, 1, \dots$) образуют ортогональную с весом $\rho(x)$ (см. (22)) систему на множестве $\Omega = \{0, 1, \dots\}$:

$$\sum_{x \in \Omega} M_k^\alpha(x) M_n^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{n,k} h_n^\alpha(q) \quad 0 < q < 1, \quad \alpha > -1, \quad (25)$$

где

$$h_n^\alpha(q) = \sum_{x=0}^{\infty} \rho(x) \{M_n^\alpha(x)\}^2 = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n} \Gamma(\alpha+1). \quad (26)$$

Нам понадобятся также следующие свойства:

$$\Delta M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x+1) - M_n^\alpha(x) = \frac{q-1}{q} M_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad (27)$$

$$M_n^\alpha(x, q) = \sum_{k=0}^n \frac{(a-\alpha)_k}{k!} M_k^\alpha(x, q), \quad (28)$$

$$M_{k+r}^{\alpha-r}(x, q) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \frac{r^{[j]}}{j!} M_{k+r-j}^\alpha(x, q), \quad (29)$$

$$M_n^{-l}(x, q) = \frac{(n-l)!}{n!} \left(\frac{1}{q} - 1\right)^l (-x)_l M_{n-l}^l(x-l, q), \quad l - \text{целое}, \quad 1 \leq l \leq n, \quad (30)$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_l = a(a+1) \dots (a+l-1)$.

Лемма 2. Пусть $0 \leq r$. Тогда

$$\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(x, q) = \frac{1}{(1-q)^r} \sum_{i=0}^r (-q)^i \binom{r}{i} M_{k+i}^0(x, q).$$

Доказательство. Полагая в (29) $\alpha = r$, имеем:

$$M_j^0(x, q) = \sum_{\nu=0}^r (-1)^\nu \binom{r}{\nu} M_{j-\nu}^r(x, q).$$

В то же время мы можем записать

$$\frac{(x+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(x, q) = \sum_{j=0}^{k+r} \gamma_j M_j^0(x, q), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \frac{1}{h_j^0(q)} \sum_{t=0}^{\infty} \rho(t, 0, q) \frac{(t+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(t, q) M_j^0(t, q) = q^j (1-q) \sum_{t=0}^{\infty} q^t \frac{(t+r)^{[r]}}{(k+r)^{[r]}} M_k^r(t, q) M_j^0(t, q) = \\ &= \frac{q^j}{(k+r)^{[r]} (1-q)^r} \sum_{t=0}^{\infty} q^t \frac{\Gamma(t+r+1)}{\Gamma(t+1)} (1-q)^{r+1} M_k^r(t, q) M_j^0(t, q), \end{aligned} \quad (32)$$

в частности, $\gamma_j = 0$ при $j < k$. Из (31) и (32) имеем:

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \frac{q^j}{(k+r)^{[r]} (1-q)^r} \sum_{t=0}^{\infty} \rho(t, r, q) M_k^r(t, q) \sum_{\nu=0}^r (-1)^\nu \binom{r}{\nu} M_{j-\nu}^r(x, q) = \\ &= \frac{q^j (-1)^{j-k}}{(k+r)^{[r]} (1-q)^r} \binom{r}{j-k} \sum_{t=0}^{\infty} \rho(t, r, q) [M_k^r(t, q)]^2 = \\ &= \frac{q^j (-1)^{j-k}}{(k+r)^{[r]} (1-q)^r} \binom{r}{j-k} h_k^r(q) = \frac{(-q)^{j-k}}{(k+r)^{[r]} (1-q)^r} \binom{r}{j-k} \binom{k+r}{k} \Gamma(r+1). \end{aligned}$$



Отсюда и из (31) находим

$$(1 - q)^q \frac{(x + r)^{[r]}}{(k + r)^{[r]}} M_k^r(x, q) = \sum_{j=k}^{k+r} (-q)^{j-k} \binom{r}{j-k} M_j^0(x, q) = \sum_{i=0}^r (-q)^i \binom{r}{i} M_{k+i}^0(x, q).$$

Лемма 2 доказана. □

Из (25) следует, что полиномы

$$m_n^\alpha(x) = m_n^\alpha(x, q) = (h_n^\alpha(q))^{-1/2} M_n^\alpha(x, q) \tag{33}$$

образуют ортонормированную систему на множестве Ω с весом $\rho(x) = \rho(x, \alpha, q)$, т.е.

$$\sum_{x \in \Omega} m_k^\alpha(x) m_n^\alpha(x) \rho(x) = \delta_{n,k}. \quad 0 < q < 1, \quad \alpha > -1. \tag{34}$$

3. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ, ПО СОБОЛЕВУ, ПОЛИНОМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНАМИ МЕЙКСНЕРА

Из равенства (34) следует, что если $\alpha > -1$, то полиномы $m_n^\alpha(x, q)$ ($n = 0, 1, \dots$) образуют ортонормированную на $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ с весом $\rho(x)$ систему. Эта система порождает на Ω систему полиномов $m_{r,k+r}^\alpha(x, q)$ ($k = 0, 1, \dots$), определенных равенством

$$m_{r,k+r}^\alpha(x, q) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} m_k^\alpha(t, q). \tag{35}$$

Кроме того, определим полиномы

$$m_{r,k}^\alpha(x, q) = \frac{x^{[k]}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, r-1. \tag{36}$$

Покажем, что полином $m_{r,k+r}^\alpha(x, q)$ обращается в нуль, если $x \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. С этой целью мы рассмотрим следующий дискретный аналог формулы Тейлора ($x \in \{r, r+1, \dots\}$):

$$F(x) = Q_{r-1}(F, x) + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \Delta^r F(t), \tag{37}$$

где

$$Q_{r-1}(F, x) = F(0) + \frac{\Delta F(0)}{1!} x + \frac{\Delta^2 F(0)}{2!} x^{[2]} + \dots + \frac{\Delta^{r-1} F(0)}{(r-1)!} x^{[r-1]}. \tag{38}$$

Так как для функции $F(x) = x^{[l+r]}$, где целое $l \geq 0$, имеем $\Delta^r F(x) = (l+r)^{[r]} x^{[l]}$ и $Q_{r-1}(F, x) \equiv 0$, то из (37) следует, что

$$\frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} t^{[l]} = \frac{1}{(l+r)^{[r]} (r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \Delta^r F(t) = \frac{x^{[l+r]}}{(l+r)^{[r]}}. \tag{39}$$

С другой стороны, функция $x^{[l+r]}$ обращается в нуль в узлах $x \in \{0, 1, \dots, r-1\}$, поэтому наше утверждение вытекает из того, что полином $m_{k+r}^\alpha(x, q)$ в силу (24) и (33) можно представить в виде линейной комбинации функций вида $x^{[l]}$. Поэтому из теоремы 1 и свойства (29) непосредственно выводим следующий результат.

Теорема 2. Если $\alpha > -1$, то система полиномов $m_{r,k}^\alpha(x, q)$ ($k = 0, 1, \dots$), порожденная многочленами Мейкснера $m_n^\alpha(x, q)$ ($n = 0, 1, \dots$) посредством равенств (35) и (36), полна в l_p и ортонормирована относительно скалярного произведения (6).

4. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ $m_{r,k}^\alpha(x, q)$

Перейдем к исследованию дальнейших свойств полиномов $m_{r,k}^\alpha(x, q)$ ($k = 0, 1, \dots$). Речь, в первую очередь, идет о том, чтобы получить представление полиномов $m_{r,k}^\alpha(x, q)$, которое не содержит знаков



суммирования с переменным верхним пределом типа (35). С этой целью применим формулу (37) к полиному $F(x) = M_{k+r}^{\alpha-r}(x, q)$ и запишем

$$F(x) = Q_{r-1}(F, x) + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} \Delta^r M_{k+r}^{\alpha-r}(t, q). \quad (40)$$

Вместо $\Delta^r M_{k+r}^{\alpha-r}(x, q)$ подставим его значение, которое согласно формуле (27) равно $(\frac{q-1}{q})^r M_k^\alpha(x, q)$, тогда из (37) получим:

$$F(x) - Q_{r-1}(F, x) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^r \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} M_k^\alpha(t, q). \quad (41)$$

Сопоставляя (35) и (41) с (33), находим

$$\left(\frac{q-1}{q}\right)^r \{h_k^\alpha(q)\}^{1/2} m_{r,k+r}^\alpha(x, q) = F(x) - Q_{r-1}(F, x). \quad (42)$$

Из (42) имеем ($F(x) = M_{k+r}^{\alpha-r}(x, q)$)

$$m_{r,k+r}^\alpha(x, q) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \{h_k^\alpha(q)\}^{-1/2} [F(x) - Q_{r-1}(F, x)]. \quad (43)$$

Далее, в силу (27)

$$\Delta^\nu M_{k+r}^{\alpha-r}(x, q) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^\nu M_{k+r-\nu}^{\alpha-r+\nu}(x, q),$$

поэтому из (24) находим

$$\Delta^\nu M_{k+r}^{\alpha-r}(0, q) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^\nu \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+r-\nu)! \Gamma(\nu-r+\alpha+1)} = A_{r,k,\nu}. \quad (44)$$

Равенства (38) и (44), взятые вместе, дают

$$F(x) - Q_{r-1}(F, x) = M_{k+r}^{\alpha-r}(x, q) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{r,k,\nu} x^{[\nu]}}{\nu!}. \quad (45)$$

Подставив это выражение в (43), находим

$$m_{r,k+r}^\alpha(x, q) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \{h_k^\alpha(q)\}^{-1/2} \left[M_{k+r}^{\alpha-r}(x, q) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{r,k,\nu} x^{[\nu]}}{\nu!} \right], k = 0, 1, \dots \quad (46)$$

Еще одно важное представление для полиномов $m_{r,k+r}^\alpha(x, q)$ можно получить, если мы обратимся к равенствам (24) и (33) и запишем

$$m_k^\alpha(x, q) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k! \{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}} \sum_{l=0}^k \frac{k^{[l]} x^{[l]}}{\Gamma(l+\alpha+1) l!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k. \quad (47)$$

Подставим это выражение в (35) и воспользуемся равенством (39). Это приводит к следующему явному виду для полиномов $m_{r,k+r}^\alpha(x, q)$ ($k = 0, 1, \dots$):

$$m_{r,k+r}^\alpha(x, q) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k! \{h_k^\alpha(q)\}^{1/2}} \sum_{l=0}^k \frac{k^{[l]} x^{[r+l]}}{\Gamma(l+\alpha+1) l! (r+l)^{[r]}} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k. \quad (48)$$



5. ПОЛИНОМЫ $\{m_{r,k}^0(x, q)\}_{k=0}^\infty$

Рассмотрим частный случай, который соответствует выбору $\alpha = 0$. Заметим, что если $\alpha = 0$, то из (44) имеем $A_{r,k,\nu} = 0$ при всех $\nu = 0, 1, \dots, r - 1$. Поэтому из (46) имеем:

$$m_{r,k+r}^0(x, q) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \{h_k^0(q)\}^{-1/2} M_{k+r}^{-r}(x, q), \quad k = 0, 1, \dots \quad (49)$$

Далее, если мы обратимся к равенству (30), то можем записать

$$M_{k+r}^{-r}(x, q) = \frac{k!}{(k+r)!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^r x^{[r]} M_k^r(x-r, q). \quad (50)$$

Из (49) и (50) находим

$$m_{r,k+r}^0(x, q) = \frac{k!}{(k+r)!} \{h_k^0(q)\}^{-\frac{1}{2}} x^{[r]} M_k^r(x-r, q), \quad k = 0, 1, \dots \quad (51)$$

С учетом (26) и (33) этому равенству можно придать также следующий вид:

$$m_{r,k+r}^0(x, q) = \left((k+r)^{[r]}\right)^{-1/2} x^{[r]} m_k^r(x-r, q), \quad k = 0, 1, \dots \quad (52)$$

Воспользовавшись леммой 2 и равенством (51), мы также можем получить для $m_{r,k+r}^0(x, q)$ представления в виде линейных комбинаций полиномов Мейкснера $m_{k+i}^0(x, q)$ ($i = 0, 1, \dots, r$).

Наконец, если $0 \leq k \leq r - 1$, то в силу определения (36)

$$m_{r,k}^0(x, q) = \frac{x^{[k]}}{k!}. \quad (53)$$

Из теоремы 1 следует, что система полиномов $m_{r,k}^0(x, q)$ ($k = 0, 1, \dots$) является ортонормированным базисом (ОНБ) в пространстве l_ρ , поэтому для произвольной функции $f(x) \in l_\rho$ мы можем записать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty \langle f, m_{r,k}^0 \rangle m_{r,k}^0(x, q), \quad (54)$$

которое представляет собой ряд Фурье функции $f(x) \in l_\rho$ по системе $\{m_{r,k}^0(x, q)\}_{k=0}^\infty$, ортонормированной по Соболеву относительно скалярного произведения (6). Поскольку коэффициенты Фурье $\langle f, m_{r,k}^0 \rangle$ имеют вид

$$f_{r,k} = \langle f, m_{r,k}^0 \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} \Delta^\nu f(0) \Delta^\nu m_{r,k}^0(0, q) = \Delta^k f(0), \quad k = 0, \dots, r-1, \quad (55)$$

$$f_{r,k} = \langle f, m_{r,k}^0 \rangle = \sum_{j=0}^\infty \Delta^r f(j) m_{k-r}^0(j, q) \rho(j), \quad k = r, r+1, \dots, \quad (56)$$

то равенство (54) можно переписать в следующем смешанном виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^\infty f_{r,k} m_{r,k}^0(x, q), \quad x \in \Omega. \quad (57)$$

6. РАЗНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНЫХ СУММ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ $\{m_{r,k}^\alpha(x, q)\}_{k=0}^\infty$

Основные разностные свойства сумм Фурье по полиномам $m_{r,k}^\alpha(x, q)$, которые согласно (18) имеют вид

$$\mathcal{Y}_{r,n}^\alpha(f, x) = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r}^n f_{r,k} m_{r,k}^\alpha(x, q), \quad (58)$$

где

$$f_{r,k} = \langle f, m_{r,k}^0 \rangle = \sum_{j=0}^\infty \Delta^r f(j) m_{k-r}^0(j, q) \rho(j), \quad k = r, r+1, \dots$$



выражены равенствами (19)–(21). Для системы $\{m_{r,k}^\alpha(x, q)\}_{k=0}^\infty$ они принимают вид ($0 \leq \nu \leq r - 1$)

$$\Delta^\nu f(x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{\infty} f_{r,k+\nu} m_{r-\nu,k}^\alpha(x, q), \quad (59)$$

$$\Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}^\alpha(f, x) = \sum_{k=0}^{r-\nu-1} \Delta^{k+\nu} f(0) \frac{x^{[k]}}{k!} + \sum_{k=r-\nu}^{n-\nu} f_{r,k+\nu} m_{r-\nu,k}^\alpha(x, q), \quad (60)$$

$$\Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}^\alpha(f, x) = \mathcal{Y}_{r-\nu,n-\nu}^\alpha(\Delta^\nu f, x). \quad (61)$$

Из (19) и (20) мы также можем записать для $n \geq r > \nu \geq 0$

$$\Delta^\nu f(x) - \Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}^\alpha(f, x) = \sum_{k=n-\nu+1}^{\infty} f_{r,k+\nu} m_{r-\nu,k}^\alpha(x, q). \quad (62)$$

Равенство (62) дает выражение для погрешности, истекающей в результате замены конечной разности $\Delta^\nu f(x)$ ее приближенным значением $\Delta^\nu \mathcal{Y}_{r,n}^\alpha(f, x)$. При решении задачи об оценке этой погрешности возникает вопрос об асимптотических свойствах полиномов $m_{r-\nu,k}^\alpha(x, q)$. Этот вопрос, в свою очередь, сводится, как это было показано в пп. 4 и 5 настоящей статьи, к задаче об асимптотических свойствах полиномов $m_k^\alpha(x, q)$, которые весьма подробно исследованы в [22].

Библиографический список

1. Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products // J. Approx. Theory. 1991. Vol. 65, iss. 2. P. 151–175. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90100-O.
2. Marcellán F., Alfaro M., Rezola M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions // J. Comput. Appl. Math. 1993. Vol. 48, iss. 1–2. P. 113–131. DOI:10.1016/0377-0427(93)90318-6.
3. Meijer H. G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 73, iss. 1. P. 1–16. DOI: 10.1006/jath.1993.1029.
4. Kwon K. H., Littlejohn L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k // Ann. Numer. Anal. 1995. Vol. 2. P. 289–303.
5. Kwon K. H., Littlejohn L. L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations // Ann. Numer. Anal. 1998. Vol. 28. P. 547–594.
6. Marcellán F., Yuan Xu On sobolev orthogonal polynomials. arXiv: 6249v1 [math.CA]. 25 Mar 2014. P. 1–40.
7. Шарпудинов И. И. Приближение дискретных функций и многочлены Чебышева, ортогональные на равномерной сетке // Матем. заметки. 2000. Т. 67, № 3. С. 460–470. DOI: 10.4213/mzm858.
8. Шарпудинов И. И. Приближение функций с переменной гладкостью суммами Фурье–Лежандра // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 5. С. 143–160. DOI: 10.4213/sm480.
9. Шарпудинов И. И. Аппроксимативные свойства операторов $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ и их дискретных аналогов // Матем. заметки. 2002. Т. 72, вып. 5. С. 765–795. DOI: 10.4213/mzm466.
10. Шарпудинов И. И. Смешанные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Матем. сб. 2003. Т. 194, № 3. С. 115–148. DOI: 10.4213/sm723.
11. Шарпудинов И. И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам / Дагестан. науч. центр РАН. Махачкала, 2004. 176 с.
12. Шарпудинов И. И. Смешанные ряды по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Матем. заметки. 2005. Т. 78, вып. 3. С. 442–465. DOI: 10.4213/mzm2599.
13. Шарпудинов И. И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра на классах W^r // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 3. С. 135–154. DOI: 10.4213/sm1539.
14. Шарпудинов Т. И. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке // Вестн. Дагестан. науч. центра РАН. 2007. Т. 29. С. 12–23.
15. Шарпудинов И. И. Аппроксимативные свойства средних типа Валле–Пуссена частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лежандра // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 452–471. DOI: 10.4213/mzm5541.
16. Шарпудинов И. И., Муратова Г. Н. Некоторые свойства g -кратно интегрированных рядов по системе Хаара // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 68–76.
17. Шарпудинов И. И., Шарпудинов Т. И. Смешанные ряды по полиномам Якоби и Чебышева и их дискретизация // Матем. заметки. 2010. Т. 88, вып. 1. С. 116–147. DOI: 10.4213/mzm6607.
18. Шарпудинов И. И. Системы функций, ортогональных по Соболеву, порожденные ортогональными функциями // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й



- междунар. Саратов. зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С.329–332.
19. *Trefethen L. N.* Spectral methods in Matlab. Philadelphia : SIAM, 2000. 160 p.
 20. *Trefethen L. N.* Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University, 1996. 325 p.
 21. *Магомед-Касумов Р. Г.* Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием смешанных рядов по системе Хара // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Саратов. зимней школы. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С. 176–178.
 22. *Шарапудинов И. И.* Многочлены, ортогональные на дискретных сетках. Махачкала : Изд-во Даг. гос. пед. ун-та, 1997. 252 с.
 23. *Gasper G.* Positivity and special function // Theory and Application of Special Functions : Proceedings of an Advanced Seminar Sponsored by the Mathematics Research Center, the University of Wisconsin-Madison, March 31-April 2, 1975 / ed. R. Askey. N. Y. ; San Francisco ; L. : Academic Press, Inc., 1975. P. 375–433.

Образец для цитирования:

Шарапудинов И. И., Гаджиева З. Д. Полиномы, ортогональные по Соболеву, порожденные многочленами Мейкнера // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 310–321. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-310-321.

Sobolev Orthogonal Polynomials Generated by Meixner Polynomials

I. I. Sharapudinov¹, Z. D. Gadzhieva²

¹ Idris I. Sharapudinov, Dagestan Scientific Center RAS, Vladikavkaz Scientific Center RAS, Dagestan State Pedagogical University, 45, M. Gadzhieva st., 367032, Makhachkala, Russia, sharapud@mail.ru

² Zulfiya D. Gadzhieva, Dagestan Scientific Center RAS, Dagestan State Pedagogical University, 45, M. Gadzhieva st., 367032, Makhachkala, Russia, zulfiya.gadzhieva.1976@mail.ru

The problem of constructing Sobolev orthogonal polynomials $m_{r,n}^\alpha(x, q)$ ($n = 0, 1, \dots$), generated by classical Meixner's polynomials is considered. They can be defined using the following equalities $m_{r,k}^\alpha(x, q) = \frac{x^{[k]}}{k!} x^{[k]} = x(x-1) \dots (x-k+1)$, $k = 0, 1, \dots, r-1$, $m_{r,k+r}^\alpha(x, q) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{x-r} (x-1-t)^{[r-1]} m_k^\alpha(t, q)$, where $m_k^\alpha(t, q)$ denote Meixner's polynomial of degree k , orthonormal on $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ with weight $\rho(x) = q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)} (1-q)^{\alpha+1}$. Polynomials $m_{r,n}^\alpha(x, q)$, ($n = 0, 1, \dots$) are orthonormal on $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ with respect to the inner product

$$\langle m_{r,n}^\alpha, m_{r,m}^\alpha \rangle = \sum_{k=0}^{r-1} \Delta^k m_{r,n}^\alpha(0, q) \Delta^k m_{r,m}^\alpha(0, q) + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta^r m_{r,n}^\alpha(j, q) \Delta^r m_{r,m}^\alpha(j, q) \rho(j).$$

For $m_{r,n}^\alpha(x, q)$ we obtain the explicit formula that contains the Meixner polynomial $M_n^{\alpha-r}(x, q)$:

$$m_{r,k+r}^\alpha(x, q) = \left(\frac{q}{q-1}\right)^r \{h_k^\alpha(q)\}^{-1/2} \left[M_{k+r}^{\alpha-r}(x, q) - \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{A_{r,k,\nu} x^{[\nu]}}{\nu!} \right], k = 0, 1, \dots,$$

where $A_{r,k,\nu} = \left(\frac{q-1}{q}\right)^\nu \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{(k+r-\nu)! \Gamma(\nu-r+\alpha+1)}$, $M_n^\alpha(x, q) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n^{[k]} x^{[k]}}{\Gamma(k+\alpha+1) k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k$, $h_n^\alpha(q) = \binom{n+\alpha}{n} q^{-n} \Gamma(\alpha+1)$.

Key words: orthogonal Sobolev polynomial, Meixner polynomials orthogonal on the grid, approximation of discrete functions, mixed series in Meixner polynomials orthogonal on a uniform grid.

References

1. Iserles A., Koch P. E., Norsett S. P., Sanz-Serna J. M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products. *J. Approx. Theory*, 1991, vol. 65, iss. 2, pp. 151–175. DOI: 10.1016/0021-9045(91)90100-O.
2. Marcellán F., Alfaro M., Rezola M. L. Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: old and new directions. *J. Comput. Appl. Math.*, 1993, vol. 48, iss. 1–2, pp. 113–131. DOI: 10.1016/0377-0427(93)90318-6.
3. Meijer H. G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space. *J. Approx. Theory*, 1993, vol. 73, iss. 1, pp. 1–16. DOI: 10.1006/jath.1993.1029.



4. Kwon K. H., Littlejohn L. L. The orthogonality of the Laguerre polynomials $\{L_n^{(-k)}(x)\}$ for positive integers k . *Ann. Numer. Anal.*, 1995, vol. 2, pp. 289–303.
5. Kwon K. H., Littlejohn L. L. Sobolev orthogonal polynomials and second-order differential equations. *Ann. Numer. Anal.*, 1998, vol. 28, pp. 547–594.
6. Marcellan F., Xu Y. On sobolev orthogonal polynomials. *arXiv:6249v1 [math.C.A]*. 25 Mar 2014, pp. 1–40.
7. Sharapudinov I. I. Approximation of discrete functions and Chebyshev polynomials orthogonal on the uniform grid. *Math. Notes*, 2000, 67, iss. 3, pp. 389–397. DOI: 10.1007/BF02676675.
8. Sharapudinov I. I. Approximation of functions of variable smoothness by Fourier – Legendre sums. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 5, pp. 759–777. DOI: 10.1070/SM2000v191n05ABEH000480.
9. Sharapudinov I. I. Approximation properties of the operators $\mathcal{Y}_{n+2r}(f)$ and of their discrete analogs. *Math. Notes*, 2002, vol. 72, iss. 5, pp. 705–732. DOI: 10.1023/A:1021421425474.
10. Sharapudinov I. I. Mixed series in ultraspherical polynomials and their approximation properties. *Sb. Math.*, 2003, vol. 194, no. 3, pp. 423–456. DOI: 10.1070/SM2003v194n03ABEH000723.
11. Sharapudinov I. I. *Smeshannye rjady po ortogonal'nyh polinomam* [Mixed series of orthogonal polynomials]. Makhachkala, Dagestan Scientific Center RAS, 2004, 176 p. (in Russian).
12. Sharapudinov I. I. Mixed series of Chebyshev polynomials orthogonal on a uniform grid. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, iss. 3, pp. 403–423. DOI: 10.1007/s11006-005-0139-3.
13. Sharapudinov I. I. Approximation properties of mixed series in terms of Legendre polynomials on the classes W^r . *Sb. Math*, 2006, vol. 197, no. 3, pp. 433–452. DOI: 10.1070/SM2006v197n03ABEH003765.
14. Sharapudinov T. I. Approximative properties of mixed series by Chebyshev polynomials, orthogonal on an uniform net. *Vestnik Dagestan. nauch. centra RAN*, 2007, vol. 29, pp. 12–23 (in Russian).
15. Sharapudinov I. I. Approximation properties of the Vallee – Poussin means of partial sums of a mixed series of Legendre polynomials. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, iss 3–4, pp. 417–434. DOI: 10.1134/S0001434608090125.
16. Sharapudinov I. I., Muratova G. N. Same Properties r -fold Integration Series on Fourier – Haar System. *Izv. Saratov Univ. (N.S), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 68–76 (in Russian).
17. Sharapudinov I. I., Sharapudinov T. I. Mixed series of Jacobi and Chebyshev polynomials and their discretization. *Math. Notes*, vol. 88, iss. 1–2, pp. 112–139. DOI: 10.1134/S0001434610070114.
18. Sharapudinov I. I. Sistemy funktsii, ortogonal'nykh po Sobolevu, porozhdennye ortogonal'nymi funktsiyami [System functions orthogonal on Sobolev generated orthogonal functions]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : materialy 18-i mezhdunar. Sarat. zimnei shkoly* [Modern problems of function theory and their applications : Proc. 18th Intern. Sarat. Winter School]. Saratov, OOO Izd-vo "Nauchnaia kniga", 2016, pp. 329–332.
19. Trefethen L. N. *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia, SIAM, 2000, 160 p.
20. Trefethen L. N. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation*. Cornell University, 1996, 325 p.
21. Magomed-Gasimov M. G. Priblizhennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s ispol'zovaniem smeshannykh riadov po sisteme Khaara [Approximate solution of ordinary differential equations with the use of mixed series on the Haar system]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : materialy 18-i mezhdunar. Sarat. zimnei shkoly* [Modern problems of function theory and their applications : Proc. 18th Intern. Sarat. Winter School]. Saratov, OOO Izd-vo "Nauchnaia kniga", 2016, pp. 176–178.
22. Sharapudinov I. I. *Mnogochleny, ortogonal'nye na dickretnykh setkah* [Polynomials orthogonal on discrete grids]. Mahachkala, Izd-vo Dag. Gos. Ped. Un-ta, 1997, 252 p. (in Russian).
23. Gasper G, ppositivity and special function. *Theory and Application of Special Functions* : Proc. of an Advanced Seminar Sponsored by the Mathematics Research Center, the University of Wisconsin-Madison, March 31-April 2, 1975, ed. R. Askey, New York, San Francisco, London, Academic Press, Inc., 1975, pp. 375–433.

Please cite this article in press as:

Sharapudinov I. I., Gadzhieva Z. D. Sobolev Orthogonal Polynomials, Generated by Meixner Polynomials. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 310–321 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-310-321.



УДК 517.51

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ БЕРНШТЕЙНА – КАНТОРОВИЧА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров

Шах-Эмиров Таджидин Нурмагомедович, научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, tadgius@gmail.com

Пусть $E = [0, 1]$, $1 \leq p(x)$ — измеримая и существенно ограниченная на E функция. Через $L^{p(x)}(E)$ обозначим множество измеримых на E функций f , для которых $\int_E |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$. Исследуется сходимость последовательности операторов Бернштейна – Канторовича $\{K_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ к функции f в пространствах Лебега с переменным показателем $L^{p(x)}(E)$. Получены условия на переменный показатель, при которых указанная последовательность равномерно ограничена в этих пространствах и, как следствие, показано, что $K_n(f, x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к функции f в метрике пространства $L^{p(x)}(E)$ определяемой нормой $\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$.

Ключевые слова: пространства Лебега с переменным показателем, операторы Бернштейна – Канторовича, полиномы Бернштейна.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-322-330

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что полиномы Бернштейна, определяемые формулой

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n p_{nk}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad f \in C([0, 1]), \quad x \in [0, 1],$$

где $p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, равномерно сходятся в пространстве $C([0, 1])$, однако они не подходят для аппроксимации разрывных функций. В работе [1] Л. В. Канторовичем (Kantorovich) были введены операторы, представляющие собой аналог полиномов Бернштейна для суммируемых функций. Для $f \in L^1([0, 1])$ определим, следуя [1], оператор Бернштейна – Канторовича следующим образом:

$$K_n(f) = K_n(f, x) = \sum_{k=0}^n p_{nk}(x)(n+1) \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt, \quad (1)$$

где $\Delta_{nk} = \left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. В работе [2] доказано, что для произвольного постоянного показателя $p \geq 1$ и $f \in L^p([0, 1])$ имеет место соотношение $\|f - K_n(f)\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). В настоящей работе ставится задача получить аналогичный результат для функций из пространств Лебега с переменным показателем. Для точной формулировки полученного результата нам понадобятся некоторые обозначения.

Пусть E — измеримое подмножество числовой оси, $p = p(x)$ — измеримая и существенно ограниченная на E функция. Через $L^{p(x)}(E)$ обозначим множество измеримых на E функций f , для которых $\int_E |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$. Из [3] известно, что если переменный показатель $1 \leq p(x)$ существенно ограничен на E , то $L^{p(x)}(E)$ можно превратить в банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}. \quad (2)$$

При этом отметим (см. [4]), что если $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q}(E) < \infty$, то имеет место неравенство

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) \leq r_{p,q} \|f\|_{q(\cdot)}(E), \quad (3)$$

в котором

$$r_{p,q} = \max \left\{ 1/\underline{\beta}(E) + \mu(E)/\underline{\beta}(E), 1 \right\}, \quad \beta(x) = q(x)/p(x),$$

где $\bar{g}(M) = \operatorname{ess\,sup}_{x \in M} g(x)$, $\underline{g}(M) = \operatorname{ess\,inf}_{x \in M} g(x)$.



1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть φ – выпуклая функция, заданная на промежутке $A \subset \mathbb{R}$, неотрицательные числа q_1, \dots, q_n таковы, что $\sum_{k=0}^n q_k = 1$. Тогда имеет место неравенство Йенсена:

$$\varphi \left(\sum_{k=0}^n q_k x_k \right) \leq \sum_{k=0}^n q_k \varphi(x_k), \tag{4}$$

для любых $x_k \in A$. Если $f(x)$ и $g(x)$ – интегрируемые на промежутке $B \subset \mathbb{R}$ функции, $a \leq f(x) \leq b$ ($a, b \in A$), $g(x) \geq 0$, при $x \in B$, и $\int_B g(x) dx = 1$. Тогда выполняется следующее неравенство Йенсена для интегралов:

$$\varphi \left(\int_B g(x) f(x) dx \right) \leq \int_B g(x) \varphi(f(x)) dx \tag{5}$$

при условии существования правого интеграла в неравенстве (5).

Приведем также некоторые свойства функций $p_{nk}(x)$. Прежде всего, заметим, что для произвольного $x \in [0, 1]$ имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^n p_{nk}(x) = 1. \tag{6}$$

Далее, пусть $x \in [0, 1]$ и $\xi > 0$ – произвольное положительное число. Тогда (см. [5, лемма 2, с. 21])

$$\sum_{k, \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \xi} p_{nk}(x) \leq \frac{1}{4n\xi^2}. \tag{7}$$

Отметим также, что

$$\int_0^1 (n+1)p_{nk}(x) dx = 1. \tag{8}$$

В самом деле, используя бета-функцию

$$B(k+1, n-k+1) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)},$$

находим

$$C_n^k = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} = \frac{1}{(n+1)B(k+1, n-k+1)},$$

откуда и следует (8).

2. О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ БЕРНШТЕЙНА – КАНТОРОВИЧА

В $L^{p(x)}(E)$, $E = [0, 1]$

Пусть $E = [0, 1]$. Через \mathcal{P} обозначим класс показателей $p(x) \geq 1$, для которых выполнено условие Дини – Липшица

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x-y|} \leq d, \quad x, y \in E, \tag{9}$$

и существует число $0 < \delta \ll 1$ такое, что

$$p(x) = \begin{cases} q_1, & 0 \leq x \leq \delta, \\ q_2, & 1 - \delta \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{10}$$

где $q_1 \geq 1, q_2 \geq 1$. Для краткости записи введем обозначение

$$\zeta_{nk}(x) = \zeta_{nk}(f, x) = p_{nk}(x)(n+1) \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая



Теорема. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}$. Тогда последовательность операторов $\{K_n(f, x)\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничена в $L^{p(x)}(E)$. Другими словами, справедливо следующее неравенство:

$$\|K_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p)\|f\|_{p(\cdot)}.$$

Доказательство. Пусть

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1. \tag{11}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_E |K_n(f, x)|^{p(x)} dx = \int_0^\delta |K_n(f, x)|^{p(x)} dx + \int_\delta^{1-\delta} |K_n(f, x)|^{p(x)} dx + \int_{1-\delta}^1 |K_n(f, x)|^{p(x)} dx \tag{12}$$

и покажем, что каждое из слагаемых в правой части равномерно ограничено относительно n . Пусть $0 < \alpha < 1/2$ и

$$p_0 = \min_{0 \leq x \leq \delta + n^{-\alpha} + n^{-1}} p(x), \quad p_1 = \min_{1-\delta - n^{-\alpha} - n^{-1} \leq x \leq 1} p(x).$$

Оценим первое слагаемое. Рассмотрим разность $p(x) - p_0$ на отрезке $[0, \delta]$. Возможны два случая. В первом случае $p_0 = q_1$ и в силу (10) $p(x) - p_0 = q_1 - p_0 = 0$, во втором случае $p(x) > p_0$, тогда из (10) имеем $p(x) - p_0 = q_1 - p(x_0) = p(\delta) - p(x_0)$, где $\delta < x_0 \leq \delta + n^{-\alpha} + n^{-1}$, $p(x_0) = p_0$. Следовательно, используя условие (9), приходим к оценке

$$p(x) - p_0 = p(\delta) - p(x_0) \leq \frac{d}{\ln \frac{1}{|\delta - x_0|}} \leq \frac{d}{\ln \frac{1}{n^{-\alpha} + n^{-1}}} \leq \frac{d}{\ln \frac{n^\alpha}{2}} \leq \frac{c(\alpha)}{\ln n}, \quad n > 2^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{13}$$

С учетом равенства (6) и оценки (13) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\delta |K_n(f, x)|^{p(x)} dx &= \int_0^\delta \left| \sum_{k=0}^n \zeta_{nk}(x) \right|^{p(x)} dx = \int_0^\delta \left| \sum_{k=0}^n \zeta_{nk}(x) \right|^{p(x) - p_0 + p_0} dx \leq \\ &\leq (n+1)^{\frac{c(\alpha)}{\ln n}} \int_0^\delta \left| \sum_{k=0}^n p_{nk}(x) \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p(x) - p_0} \left| \sum_{k=0}^n \zeta_{nk}(x) \right|^{p_0} dx \leq \\ &\leq (n+1)^{\frac{c(\alpha)}{\ln n}} \int_0^\delta \left(\int_E |f(t)| dt \right)^{p(x) - p_0} \left| \sum_{k=0}^n \zeta_{nk}(x) \right|^{p_0} dx. \end{aligned} \tag{14}$$

Легко видеть с учетом (3), (11) и (13), что

$$\left(\int_E |f(t)| dt \right)^{p(x) - p_0} \leq r_{1,p}^{p(x) - p_0} \leq r_{1,p}^{\frac{c(\alpha)}{\ln n}}. \tag{15}$$

Тогда, подставляя (15) в (14), получим следующую оценку для первого интеграла:

$$\int_0^\delta |K_n(f, x)|^{p(x)} dx \leq r_{1,p}^{\frac{c(\alpha)}{\ln n}} (n+1)^{\frac{c(\alpha)}{\ln n}} \int_0^\delta \left| \sum_{k=0}^n \zeta_{nk}(x) \right|^{p_0} dx \leq c(p, \alpha) \int_0^\delta \left| \sum_{k=0}^n \zeta_{nk}(x) \right|^{p_0} dx. \tag{16}$$

В силу неравенства треугольника для нормы L^{p_0} имеем:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\delta \left| \sum_{k=0}^n \zeta_{nk}(x) \right|^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} &\leq \left(\int_0^\delta \left| \sum_{k, \frac{k}{n} < \delta + n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x) \right|^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} + \\ &+ \left(\int_0^\delta \left| \sum_{k, \delta + n^{-\alpha} \leq \frac{k}{n} < 1 - \delta} \zeta_{nk}(x) \right|^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} + \left(\int_0^\delta \left| \sum_{k, \frac{k}{n} \geq 1 - \delta} \zeta_{nk}(x) \right|^{p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} = I_{11}^{\frac{1}{p_0}} + I_{12}^{\frac{1}{p_0}} + I_{13}^{\frac{1}{p_0}}. \end{aligned}$$



Пусть $\mu(x) = \sum_{k, \frac{k}{n} < \delta + n^{-\alpha}} p_{nk}(x)$. Применим к I_{11} неравенства (4) и (5)

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^\delta \left| \mu(x) \sum_{k, \frac{k}{n} < \delta + n^{-\alpha}} \frac{p_{nk}(x)}{\mu(x)} (n+1) \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p_0} dx \leq \\ &\leq \int_0^\delta \mu^{p_0-1}(x) \sum_{k, \frac{k}{n} < \delta + n^{-\alpha}} p_{nk}(x) \left| (n+1) \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p_0} dx \leq \\ &\leq \int_0^\delta \sum_{k, \frac{k}{n} < \delta + n^{-\alpha}} p_{nk}(x) (n+1) \int_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_0} dt dx = \sum_{k, \frac{k}{n} < \delta + n^{-\alpha}} \int_0^\delta p_{nk}(x) (n+1) dx \int_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_0} dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть $A_n = \{k : \Delta_{nk} \cap [0, \delta + n^{-\alpha}] \neq \emptyset\}$, $h_0(t) = \begin{cases} p_0, & t \in \bigcup_{k \in A_n} \Delta_{nk}, \\ p(t), & t \in ([0, 1] \setminus \bigcup_{k \in A_n} \Delta_{nk}). \end{cases}$

В силу (8) для правой части (17) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{k, \frac{k}{n} < \delta + n^{-\alpha}} \int_0^\delta p_{nk}(x) (n+1) dx \int_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_0} dt &\leq \sum_{k, \frac{k}{n} < \delta + n^{-\alpha}} \int_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_0} dt \leq \\ &\leq \int_0^1 |f(t)|^{h_0(t)} dt = \int_0^1 \|f\|_{h_0(\cdot)}^{h_0(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{h_0(\cdot)}} \right|^{h_0(t)} dt. \end{aligned}$$

Из (3) и (11) получаем:

$$\int_0^1 \|f\|_{h_0(\cdot)}^{h_0(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{h_0(\cdot)}} \right|^{h_0(t)} dt \leq r_{h_0, p}^{\bar{h}_0}. \quad (18)$$

Перейдем к оценке I_{12} . Пусть $\tau_{nk} = \frac{k}{n}$. Для оценки $p_{nk}(x)$ при

$$\delta + n^{-\alpha} \leq \tau_{nk} < 1 - \delta \quad (19)$$

воспользуемся асимптотической формулой для гамма-функции при $x > 0$

$$\ln \Gamma(x) = (x - \frac{1}{2}) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + R_0(x), \quad (20)$$

где $|R_0(x)| \leq \frac{w(x)}{12|x|}$, $w(x) = \sup_{u \geq 0} \frac{x^2}{u^2+x^2}$. Из (20) для $p_{nk}(x)$ получаем:

$$\begin{aligned} \ln p_{nk}(x) &= \ln n - \ln k - \ln(n-k) + \ln \Gamma(n) - \ln \Gamma(k) - \ln \Gamma(n-k) + k \ln x + (n-k) \ln(1-x) = \\ &= n \ln n - k(\ln k - \ln x) - (n-k)(\ln(n-k) - \ln(1-x)) - \\ &- \frac{1}{2} \ln 2\pi n \tau_{nk} (1 - \tau_{nk}) + R_0(n) - R_0(k) - R_0(n-k) = -n \left(\tau_{nk} \ln \frac{\tau_{nk}}{x} + (1 - \tau_{nk}) \ln \frac{1 - \tau_{nk}}{1 - x} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \ln(2\pi n \tau_{nk} (1 - \tau_{nk})) + R_0(n) - R_0(k) - R_0(n-k). \end{aligned} \quad (21)$$

Полагая $H(\tau) = \tau \ln \frac{\tau}{x} + (1 - \tau) \ln \frac{1 - \tau}{1 - x}$ и замечая, что $H(x) = H'(x) = 0$, $H''(x) = \frac{1}{x(1-x)}$, применим к (21) формулу Тейлора

$$\ln p_{nk}(x) = -n \left(\frac{(\tau_{nk} - x)^2}{2x(1-x)} + r(\tau_{nk}) \right) - \frac{1}{2} \ln(2\pi n \tau_{nk} (1 - \tau_{nk})) + R_0(n) - R_0(k) - R_0(n-k). \quad (22)$$

Поскольку $|r(\tau_{nk})| \leq \frac{|\tau_{nk} - x|^3}{3x^2(1-x)^2}$ (см. [6, с. 118, теорема 5]), при $|\tau_{nk} - x| \leq \frac{1}{2} \min\{x, 1 - x\}$ из (22) и определения $R_0(x)$ для $|\tau_{nk} - x| \leq n^{-\alpha}$ легко получается оценка

$$p_{nk}(x) \leq ce^{-n \left[\frac{(\tau_{nk} - x)^2}{2x(1-x)} - \frac{|\tau_{nk} - x|^3}{3x^2(1-x)^2} \right] - \frac{1}{2} \ln(2\pi n \tau_{nk} (1 - \tau_{nk}))}. \quad (23)$$



Отметим, что при условии (19) и $x \in [0, \tau_{nk}]$ функция $p_{nk}(x)$ возрастает. Заметим, что при $\tau_{nk} - x = n^{-\alpha}$

$$-n \left[\frac{(\tau_{nk} - x)^2}{2x(1-x)} - \frac{|\tau_{nk} - x|^3}{3x^2(1-x)^2} \right] \leq -n \left[2n^{-2\alpha} - \frac{n^{-3\alpha}}{3\delta^4} \right] = -n^{1-2\alpha} \left[2 - \frac{n^{-\alpha}}{3\delta^4} \right].$$

Подставляя правую часть последнего неравенства в (23) и учитывая, что

$$\ln(2\pi n \tau_{nk}(1 - \tau_{nk})) \geq \ln(2\pi n \delta^2),$$

приходим к оценке

$$p_{nk}(\tau_{nk} - n^{-\alpha}) \leq ce^{-n^{1-2\alpha} \left[2 - \frac{n^{-\alpha}}{3\delta^4} \right] - \frac{1}{2} \ln(2\pi n \delta^2)}, \tag{24}$$

верной также для всех $x \in [0, \delta]$ в силу возрастания $p_{nk}(x)$ на указанном отрезке. Воспользовавшись полученной оценкой, покажем, что $np_{nk}(x)$ равномерно ограничены по n при $\delta + n^{-\alpha} \leq \tau_{nk} < 1 - \delta$, $x \in [0, \delta]$. Действительно, в силу того что $n^{1-2\alpha} \geq \ln n$ при любом $0 < \alpha < 1/2$ и достаточно больших n

$$\ln n - n^{1-2\alpha} \left[2 - \frac{n^{-\alpha}}{3\delta^4} \right] - \frac{1}{2} \ln(2\pi n \delta^2) < 0, \tag{25}$$

откуда и вытекает, что $np_{nk}(x) < c(\delta, \alpha)$, когда $\delta + n^{-\alpha} \leq \tau_{nk} \leq 1 - \delta$, $x \in [0, \delta]$. Тем самым,

$$I_{12} \leq c(p, \alpha) \int_0^\delta \left| \sum_{k, \delta + n^{-\alpha} \leq \frac{k}{n} < 1 - \delta} \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p_0} dx \leq c(p, \alpha, \delta). \tag{26}$$

Покажем теперь равномерную ограниченность по n величины I_{13} . С учетом (7) получаем:

$$\begin{aligned} I_{13} &= \int_0^\delta \left| \sum_{k, \frac{k}{n} \geq 1 - \delta} p_{nk}(x)(n+1) \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p_0} dx \leq \int_0^\delta \left| \sum_{k, \frac{k}{n} \geq 1 - \delta} \frac{n+1}{4n(1-2\delta)^2} \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p_0} dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{p_0}(1-2\delta)^{2p_0}} \int_0^\delta \left| \sum_{k, \frac{k}{n} \geq 1 - \delta} \int_{\Delta_{nk}} |f(t)| dt \right|^{p_0} dx \leq c(p, \delta, \alpha) \int_0^\delta \left| \int_0^1 |f(t)| dt \right|^{p_0} dx \leq \\ &\leq c(p, \delta, \alpha) \delta \|f\|_1^{p_0} \leq c(p, \delta, \alpha) r_{1,p}^{p_0} \|f\|_{p(\cdot)}^{p_0} \leq c(p, \delta, \alpha) r_{1,p}^{p_0}. \end{aligned} \tag{27}$$

Равномерная ограниченность по n первого интеграла из (12) доказана. Перейдем к доказательству равномерной ограниченности по n третьего интеграла из (12). Для этого заметим, что почти дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к оценкам (13)–(16), получим

$$\begin{aligned} &\left(\int_{1-\delta}^1 \left| \sum_{k=0}^n \zeta_{nk}(x) \right|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\int_{1-\delta}^1 \left| \sum_{k, \frac{k}{n} \leq \delta} \zeta_{nk}(x) \right|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} + \\ &+ \left(\int_{1-\delta}^1 \left| \sum_{k, \delta \leq \frac{k}{n} < 1 - \delta - n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x) \right|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} + \left(\int_{1-\delta}^1 \left| \sum_{k, \frac{k}{n} \geq 1 - \delta - n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x) \right|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} = I_{31}^{\frac{1}{p_1}} + I_{32}^{\frac{1}{p_1}} + I_{33}^{\frac{1}{p_1}}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что для I_{31} можно получить по аналогии с (27) следующую оценку:

$$I_{31} \leq c(p, \delta, \alpha) \delta \|f\|_1^{p_1} \leq c(p, \delta, \alpha) r_{1,p}^{p_1} \|f\|_{p(\cdot)}^{p_1} \leq c(p, \delta, \alpha) r_{1,p}^{p_1}. \tag{28}$$

Поскольку для $p_{nk}(\tau_{nk} + n^{-\alpha})$ также справедлива оценка (24), то, учитывая (25) и убывание $p_{nk}(x)$ на $[\tau_{nk}, 1]$ ($\delta \leq \tau_{nk} < 1 - \delta - n^{-\alpha}$), получаем для I_{32} оценку

$$I_{32} \leq c(p, \alpha) \int_{1-\delta}^1 \left| \sum_{k, \delta \leq \frac{k}{n} < 1 - \delta - n^{-\alpha}} \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p_0} dx \leq c(p, \alpha, \delta). \tag{29}$$



Наконец, для I_{32} таким же путем, как и для I_{11} , выводится окончательная оценка вида

$$I_{32} \leq r_{h_1, p}^{\bar{h}_1}, \quad (30)$$

где $h_1(t) = \begin{cases} p_1, & t \in \bigcup_{k \in B_n} \Delta_{nk}, \\ p(t), & t \in ([0, 1] \setminus \bigcup_{k \in B_n} \Delta_{nk}), \end{cases}$ $B_n = \{k : \Delta_{nk} \cap [1 - \delta - n^{-\alpha}, 1] \neq \emptyset\}$.

Из (28)–(30) вытекает равномерная ограниченность по n третьего интеграла в (12).

Перейдем к доказательству равномерной ограниченности второго интеграла из (12). Пользуясь тем, что величина $\rho(f, g) = (\int_E |f(x) - g(x)|^{p(x)} dx)^{\frac{1}{p}}$ – метрика в $L^{p(x)}(E)$ (см. [3, с. 615] или [4, с. 11, лемма 1.2.1]), имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\delta}^{1-\delta} \left| \sum_{k=0}^n \zeta_{nk}(x) \right|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\delta}^{1-\delta} \left| \sum_{k, |\frac{k}{n}-x| < n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x) \right|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \\ & + \left(\int_{\delta}^{1-\delta} \left| \sum_{k, n^{-\alpha} \leq |\frac{k}{n}-x| \leq \frac{\delta}{2}} \zeta_{nk}(x) \right|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\delta}^{1-\delta} \left| \sum_{k, |\frac{k}{n}-x| \geq \frac{\delta}{2}} \zeta_{nk}(x) \right|^{p(x)} dx \right)^{\frac{1}{p}} = I_{21}^{\frac{1}{p}} + I_{22}^{\frac{1}{p}} + I_{23}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Из неравенств (3) и (7) имеем:

$$I_{23} \leq \frac{2^{\bar{p}}}{\delta^{2\bar{p}}} \int_{\delta}^{1-\delta} \left| \int_0^1 |f(t)| dt \right|^{p(x)} dx \leq c(p, \delta) \|f\|_1^{\bar{p}} \leq c(p, \delta) r_{1, p}^{\bar{p}} \|f\|_{p(\cdot)}^{\bar{p}} \leq c(p, \delta) r_{1, p}^{\bar{p}}. \quad (31)$$

Учитывая, что $p_{nk}(x)$ возрастает на $[\delta, \tau_{nk}]$ и убывает на $[\tau_{nk}, 1 - \delta]$, и пользуясь оценкой (24) для $p_{nk}(\tau_{nk} \pm n^{-\alpha})$, получаем:

$$\begin{aligned} I_{22} &= \int_{\delta}^{1-\delta} \left| \sum_{k, n^{-\alpha} \leq |\frac{k}{n}-x| \leq \frac{\delta}{2}} p_{nk}(x)(n+1) \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p(x)} dx \leq \\ &\leq \int_{\delta}^{1-\delta} \left| \sum_{k, n^{-\alpha} \leq |\frac{k}{n}-x| \leq \frac{\delta}{2}} c e^{-n^{1-2\alpha} [2 - \frac{n^{-\alpha}}{3\delta^4}] - \frac{1}{2} \ln(2\pi n \delta^2)} \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p(x)} dx \stackrel{(25)}{\leq} \\ &\leq \int_{\delta}^{1-\delta} \left| \sum_{k, n^{-\alpha} \leq |\frac{k}{n}-x| \leq \frac{\delta}{2}} c(\delta, \alpha) \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p(x)} dx \leq c_1^{\bar{p}}(\delta, \alpha) r_{1, p}^{\bar{p}}. \end{aligned}$$

Пусть $N = [(1 - 2\delta)n^{\alpha}]$, $h = \frac{1-2\delta}{N} \geq n^{-\alpha}$, $\lambda_{nl} = [\delta + (l-1)h, \delta + lh]$, $\Lambda_{nl} = \lambda_{nl-1} \cup \lambda_{nl} \cup \lambda_{nl+1}$, $\Delta_n^l = \bigcup_{k \in \mathfrak{K}_{nl}} \Delta_{nk}$, где $\mathfrak{K}_{nl} = \{k : \Delta_{nk} \cap \Lambda_{nl} \neq \emptyset\}$, $\kappa_l = (\delta + (l-1)h - n^{-\alpha}, \delta + lh + n^{-\alpha})$ и $p_l = \min_{x \in \Delta_n^l} p(x)$.

Займемся оценкой интеграла I_{21}

$$\int_{\delta}^{1-\delta} \left| \sum_{k, |\frac{k}{n}-x| < n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x) \right|^{p(x)} dx = \sum_{l=1}^N \int_{\lambda_{nl}} \left| \sum_{k, |\frac{k}{n}-x| < n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x) \right|^{p(x)-p_l+p_l} dx. \quad (32)$$

Пользуясь введенными обозначениями и (9), легко видеть, что

$$p(x) - p_l \leq \frac{d}{\ln \frac{1}{2h+(n+1)^{-1}}} \leq \frac{d}{\ln \frac{1}{2c(\delta, \alpha)n^{-\alpha+n-1}}} \leq \frac{d}{\ln c(\delta, \alpha)n^{\alpha}}. \quad (33)$$

Далее из (33) получим оценку

$$\left| \sum_{k, |\frac{k}{n}-x| < n^{-\alpha}} p_{nk}(x)(n+1) \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p(x)-p_l} \leq$$



$$\leq (n+1)^{\frac{d}{\ln c(\delta, \alpha)n^\alpha}} \left| \sum_{k=0}^n \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{\frac{d}{\ln c(\delta, \alpha)n^\alpha}} \leq c(\delta, \alpha) r_{1,p}^{\frac{d}{\ln c(\delta, \alpha)n^\alpha}} \|f\|_{p(\cdot)}^{\frac{d}{\ln c(\delta, \alpha)n^\alpha}} \leq c(\delta, \alpha, p)$$

и подставим ее в (32)

$$\int_{\delta}^{1-\delta} \left| \sum_{k, |\frac{k}{n}-x| < n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x) \right|^{p(x)} dx \leq c(\delta, \alpha, p) \sum_{l=1}^N \int_{\lambda_{nl}} \left| \sum_{k, |\frac{k}{n}-x| < n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x) \right|^{p_l} dx. \quad (34)$$

Пусть $\mu(x) = \sum_{k, |\frac{k}{n}-x| < n^{-\alpha}} p_{nk}(x)$. Из (34) с помощью неравенств (4), (5) находим

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N \int_{\lambda_{nl}} \mu^{p_l}(x) \left| \sum_{k, |\frac{k}{n}-x| < n^{-\alpha}} \frac{p_{nk}(x)}{\mu(x)} (n+1) \int_{\Delta_{nk}} f(t) dt \right|^{p_l} dx \leq \\ & \leq \sum_{l=1}^N \int_{\lambda_{nl}} \mu^{p_l-1}(x) \sum_{k, |\frac{k}{n}-x| < n^{-\alpha}} p_{nk}(x) (n+1) \int_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_l} dt dx \leq \\ & \leq \sum_{l=1}^N \int_{\lambda_{nl}} \sum_{k, \frac{k}{n} \in \kappa_l} p_{nk}(x) (n+1) \int_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_l} dt dx = \sum_{l=1}^N \sum_{k, \frac{k}{n} \in \kappa_l} \int_{\Delta_{nk}} p_{nk}(x) (n+1) \int_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_l} dt dx = \\ & = \sum_{l=1}^N \sum_{k, \frac{k}{n} \in \kappa_l} \int_{\Delta_{nk}} p_{nk}(x) (n+1) dx \int_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_l} dt \stackrel{(8)}{\leq} \sum_{l=1}^N \sum_{k, \frac{k}{n} \in \kappa_l} \int_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_l} dt \leq \sum_{l=1}^N \int_{\Delta_n^l} |f(t)|^{p_l} dt = \\ & = \sum_{l=1}^N \left(\int_{\Lambda_{nl}} |f(t)|^{p_l} dt + \int_{\Delta_n^l \setminus \Lambda_{nl}} |f(t)|^{p_l} dt \right) = \sum_{l=1}^N \int_{\Lambda_{nl}} |f(t)|^{p_l} dt + \sum_{l=1}^N \int_{\Delta_n^l \setminus \Lambda_{nl}} |f(t)|^{p_l} dt = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2. \end{aligned}$$

Обозначим

$$s_i(t) = \begin{cases} p_l, & \text{при } t \in \lambda_{nl-2+i}, \quad i = 1, 2, 3, \\ p(t), & \text{для остальных } t \in E, \end{cases}$$

и перейдем к оценке \mathfrak{S}_1

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \sum_{l=1}^N \int_{\Lambda_{nl}} |f(t)|^{p_l} dt = \sum_{l=1}^N \int_{\lambda_{nl-1} \cup \lambda_{nl} \cup \lambda_{nl+1}} |f(t)|^{p_l} dt = \\ &= \sum_{l=1}^N \int_{\lambda_{nl-1}} |f(t)|^{p_l} dt + \sum_{l=1}^N \int_{\lambda_{nl}} |f(t)|^{p_l} dt + \sum_{l=1}^N \int_{\lambda_{nl+1}} |f(t)|^{p_l} dt = \\ &= \int_{\delta-h}^{1-\delta-h} |f(t)|^{s_1(t)} dt + \int_{\delta}^{1-\delta} |f(t)|^{s_2(t)} dt + \int_{\delta+h}^{1-\delta+h} |f(t)|^{s_3(t)} dt \leq \\ &\leq \int_E \left(|f(t)|^{s_1(t)} + |f(t)|^{s_2(t)} + |f(t)|^{s_3(t)} \right) dt. \quad (35) \end{aligned}$$

Так как $s_i(t) \leq p(t)$, то с учетом (3) можно получить для (35) следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \int_E \left(|f(t)|^{s_1(t)} + |f(t)|^{s_2(t)} + |f(t)|^{s_3(t)} \right) dt = \\ &= \int_E \|f\|_{s_1(\cdot)}^{s_1(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{s_1(\cdot)}} \right|^{s_1(t)} dt + \int_E \|f\|_{s_2(\cdot)}^{s_2(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{s_2(\cdot)}} \right|^{s_2(t)} dt + \int_E \|f\|_{s_3(\cdot)}^{s_3(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{s_3(\cdot)}} \right|^{s_3(t)} dt \leq \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\leq \int_E r_{p,s_1}^{s_1(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{s_1(\cdot)}} \right|^{s_1(t)} dt + \int_E r_{p,s_2}^{s_2(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{s_2(\cdot)}} \right|^{s_2(t)} dt + \int_E r_{p,s_3}^{s_3(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{s_3(\cdot)}} \right|^{s_3(t)} dt \leq \\ &\leq r_{s_1,p}^{\bar{s}_1(E)} + r_{s_2,p}^{\bar{s}_2(E)} + r_{s_3,p}^{\bar{s}_3(E)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Остается оценить \mathfrak{S}_2 . Пусть $k_l^- = \min\{k : \Delta_{nk} \in \Delta_n^l\}$ и $k_l^+ = \max\{k : \Delta_{nk} \in \Delta_n^l\}$. Введем следующие обозначения:

$$\eta_{nl}^- = \Delta n k_l^- \setminus \lambda_{nl-1}, \quad \eta_{nl}^+ = \Delta n k_l^+ \setminus \lambda_{nl+1},$$

$$s^-(t) = \begin{cases} p_l & \text{при } t \in \eta_{nl}^-, \\ p(t) & \text{для остальных } t \in E, \end{cases} \quad s^+(t) = \begin{cases} p_l & \text{при } t \in \eta_{nl}^+, \\ p(t) & \text{для остальных } t \in E. \end{cases}$$

Тогда $\Delta_n^l \setminus \Lambda_{nl} = \eta_{nl}^- \cup \eta_{nl}^+$ и из (3)

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_2 &= \sum_{l=1}^N \int_{\eta_{nl}^-} |f(t)|^{p_l} dt + \sum_{l=1}^N \int_{\eta_{nl}^+} |f(t)|^{p_l} dt \leq \int_E |f(t)|^{s^-(t)} dt + \int_E |f(t)|^{s^+(t)} dt \leq \\ &\leq \int_E \|f\|_{s^-(\cdot)}^{s^-(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{s^-(\cdot)}} \right|^{s^-(t)} dt + \int_E \|f\|_{s^+(\cdot)}^{s^+(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{s^+(\cdot)}} \right|^{s^+(t)} dt \leq \\ &\leq \int_E r_{p,s^-}^{s^-(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{s^-(\cdot)}} \right|^{s^-(t)} dt + \int_E r_{p,s^+}^{s^+(t)} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{s^+(\cdot)}} \right|^{s^+(t)} dt \leq r_{s^-,p}^{\bar{s}^-(E)} + r_{s^+,p}^{\bar{s}^+(E)}. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (18), (26), (27), (31), (36) и (37) получаем равномерную ограниченность операторов Канторовича – Бернштейна на единичном шаре пространства $L^{p(x)}(E)$. \square

Покажем теперь, что операторы Бернштейна – Канторовича сходятся в $L^{p(x)}(E)$. Сначала рассмотрим случай непрерывных функций. Пусть для $\xi > 0$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x' - x''| < \xi, \quad x', x'' \in E, \quad f \in C([0, 1]). \quad (38)$$

Полагая $\zeta'_{nk}(x) = p_{nk}(x)(n+1) \int_{\Delta_{nk}} [f(x) - f(t)] dt$, из (6) имеем:

$$f(x) - K_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \zeta'_{nk}(x) dt = \sum_1 \zeta'_{nk}(x) + \sum_2 \zeta'_{nk}(x),$$

где \sum_1 берется по k , для которых $|x - t| < \xi$, а \sum_2 – по остальным k . Поскольку из $|f(x)| < C$ ($x \in [0, 1]$) следует, что $\|f\|_{p(\cdot)} < C$, то, воспользовавшись (38) и (7), приходим к оценке

$$\|f - K_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq \left\| \sum_1 \zeta'_{nk}(\cdot) \right\|_{p(\cdot)} + \left\| \sum_2 \zeta'_{nk}(\cdot) \right\|_{p(\cdot)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\xi^2},$$

где $M = \max_{x \in E} f(x)$. Если n достаточно велико, то $\frac{M}{n\xi^2} < \varepsilon$ и

$$\|f - K_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq \varepsilon,$$

что и доказывает сходимость операторов Бернштейна – Канторовича в $L^{p(x)}(E)$ в случае непрерывных функций. Для сходимости последовательности $\{K_n(f, x)\}_{n=1}^\infty$ к функции $f(x) \in L^{p(x)}(E)$ достаточно того, чтобы (см. [7, с. 215]) операторы $K_n(f, x)$ были равномерно ограничены и сходились к тождественному оператору $I(f)$ для любой $f \in \mathfrak{D}$, где \mathfrak{D} – некоторое множество, всюду плотное в $L^{p(x)}(E)$. Из доказанной теоремы и того факта, что $C[0, 1]$ плотно в $L^{p(x)}(E)$ (см. [3, с. 41]), вытекает сходимость операторов Бернштейна – Канторовича в случае произвольных функций из $L^{p(x)}(E)$. \square

Автор благодарит И. И. Шарापудинова за постановку задачи, а также ценные советы при ее решении.



Библиографический список

1. Kantorovich L. V. Sur certains developpements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein I, II // C. R. Acad. Sci. URSS. 1930. P. 563–568; 595–600.
2. Lorentz G. G. Bernstein Polynomials. Toronto : Univ. Toronto Press, 1953. 130 p.
3. Шарпудинов И. И. О топологии пространства $L^{p(t)}([0, 1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, вып. 4. С. 613–632.
4. Шарпудинов И. И. Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем / ЮМИ ВЦ РАН и РСО-А. Владикавказ, 2012. 270 с.
5. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.
6. Боровков А. А. Теория вероятностей : учеб. пособие для вузов. М. : Наука, 1986. 432 с.
7. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. М. : Наука, 1967. 416 с.

Образец для цитирования:

Шах-Эмиров Т. Н. О сходимости последовательности операторов Бернштейна – Канторовича в пространствах Лебега с переменным показателем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 322–330. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-322-330.

On Convergence of Bernstein – Kantorovich Operators sequence in Variable Exponent Lebesgue Spaces

T. N. Shakh-Emirov

Tadgidin N. Shakh-Emirov, Daghestan Scientific Centre of RAS, 45, Gadgieva st., 367000, Makhachkala, Republic of Dagestan, Russia, tadgius@gmail.com

Let $E = [0, 1]$ and let a function $p(x) \geq 1$ be measurable and essentially bounded on E . We denote by $L^{p(x)}(E)$ the set of measurable function f on E for which $\int_E |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$. The convergence of a sequence of operators of Bernstein – Kantorovich $\{K_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ to the function f in Lebesgue spaces with variable exponent $L^{p(x)}(E)$ is studied. The conditions on the variable exponent at which this sequence is uniformly bounded in these spaces are obtained and, as a corollary, it is shown that if $n \rightarrow \infty$ then $K_n(f, x)$ converges to function f in the metric of space $L^{p(x)}(E)$ defined by the norm $\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$.

Key words: Lebesgue spaces with variable exponent, Bernstein – Kantorovich operators, Bernstein polynomials.

References

1. Kantorovich L. V. Sur certains developpements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein I, II. C. R. Acad. Sci. URSS, 1930, pp. 563–568; pp. 595–600.
2. Lorentz G. G. *Bernstein Polynomials*. Toronto, Univ. Toronto Press, 1953, 130 p.
3. Sharapudinov I. I. Topology of the space $L^{p(t)}([0, 1])$. *Math. Notes*, 1979, vol. 26, iss 4, pp. 796–806. DOI: 10.1007/BF01159546.
4. Sharapudinov I. I. *Nekotorye voprosy teorii priblizhenii v prostranstvakh Lebeга s peremennym pokazatelem* [Some aspects of approximation theory in variable Lebesgue spaces]. YuMI VNTs RAN i RSO-A, Vladikavkaz, 2012, 270 p. (in Russian).
5. Natanson I. P. *Konstruktivnaia teoriia funktsii* [Constructive theory of functions]. Moscow ; Leningrad, GITTL, 1949. 688 p. (in Russian).
6. Borovkov A. A. *Teoriia veroiatnostei : ucheb. posobie dlia vuzov* [Probability Theory : Textbook for High Schools]. Moscow, Nauka, 1986, 432 p. (in Russian).
7. Vulih B. Z. *Vvedenie v funktsional'nyi analiz* [Introduction to functional analysis]. Moscow, Nauka, 1967, 416 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:

Shakh-Emirov T. N. On Convergence of Bernstein – Kantorovich Operators sequence in Variable Exponent Lebesgue Spaces. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 322–330 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-322-330.

МЕХАНИКА

УДК 532.516:539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СООСНЫХ ОБОЛОЧКАХ, ЗАПОЛНЕННЫХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ю. А. Блинков¹, Ю. Н. Кондратова², А. В. Месянжин³, Л. И. Могилевич⁴

¹Блинков Юрий Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, BlinkovUA@info.sgu.ru

²Кондратова Юлия Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, kondratovaun@info.sgu.ru

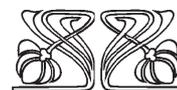
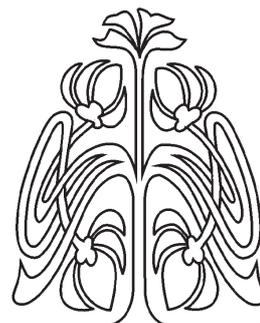
³Месянжин Артем Вячеславович, ведущий математик, ОАО Конструкторское бюро промышленной автоматики, Саратов, a.v.mesyanzhin@gmail.com

⁴Могилевич Лев Ильич, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., mogilevich@sgu.ru

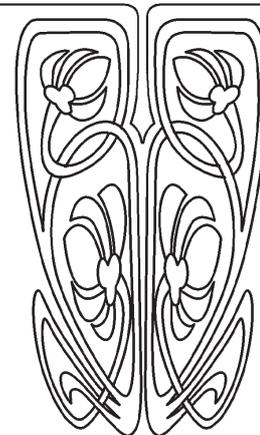
В современной волновой динамике известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость. Они получены на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщенных уравнений Кортвега де Вриза (КдВ). Также методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках, отличающиеся от известных учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками. На основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, получены системы обобщенных уравнений КдВ. В представленной работе проведено исследование модели волновых явлений двух физически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочек типа Кирхгофа – Лява, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, как между ними, так и внутри. Для рассмотренных систем уравнений с учетом влияния жидкости с помощью построения базиса Грёбнера получены разностные схемы типа Кранка – Николсона. Для генерации этих разностных схем использованы базовые интегральные разностные соотношения, которые аппроксимируют исходную систему уравнений. Применение техники базисов Грёбнера позволяет генерировать схемы, для которых с помощью эквивалентных преобразований можно получить дискретные аналоги законов сохранения исходных дифференциальных уравнений. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс программ, позволяющий построить графики и получить численные решения задач Коши при точных решениях системы уравнений динамики соосных оболочек в качестве начального условия.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-331-336



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ



1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для абсолютно жесткой трубы с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического по времени перепада давления исследовано в [1]. Для трубы — упругой цилиндрической оболочки — проведено аналогичное исследование в [2, 3], а с учетом жидкости — в [4].

Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках [5,6], содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщенных уравнений Кортвега де Вриза (КдВ). Выявлены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки.

Методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках [7, 8], отличающиеся от известных учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками, на основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщенных уравнений КдВ. Выявлены эффекты влияния несжимаемой вязкой жидкости между оболочками на поведение волны деформаций в соосных оболочках. Наличие волны деформаций во внешней оболочке приводит к возникновению волны деформаций во внутренней оболочке, которой не было в начальный момент времени, и происходит «перекачка энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, которая сопровождается немонотонным падением амплитуды волны во внешней оболочке и, как следствие, немонотонным снижением скорости её распространения. При этом во внутренней оболочке происходит немонотонное увеличение амплитуды. Вследствие колебаний амплитуд и скоростей с течением времени их скорости и амплитуды выравниваются.

Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки, внутри которых находится вязкая несжимаемая жидкость (рис. 1). Введем следующие обозначения: δ — ширина щели, занимаемой жидкостью, R — радиус срединной поверхности оболочки, $R_1 = R^{(1)} - \frac{h_0^{(1)}}{2}$ — внутренний радиус внешней оболочки, $R_2 = R^{(2)} + \frac{h_0^{(2)}}{2}$ — внешний радиус внутренней оболочки, $R_3 = R^{(2)} - \frac{h_0^{(2)}}{2}$ — внутренний радиус внутренней оболочки, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ — радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек, $h_0^{(1)}$, $h_0^{(2)}$ — их толщины. Все механические перемещения внешней оболочки сверху будем обозначать индексом (1), а внутренней — индексом (2).

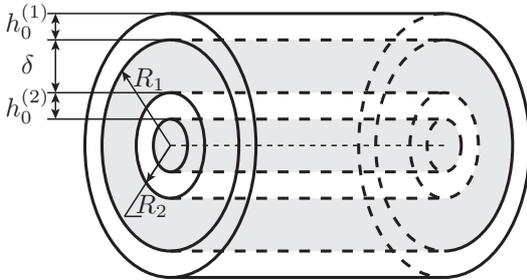


Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Записывая уравнение движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Киргофа – Лява, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i [9]

$$\sigma_i = E e_i \mp m e_i^3,$$

где E — модуль Юнга, m — константа материала, которая определяется из опытов на сжатие или растяжение.

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат рассматриваются в случае осесимметричного течения. На границе оболочек и жидкости (рис. 1) при $r = R_i - W^{(i)}$ выполняются условия прилипания жидкости.

Уравнения динамики оболочки записываются в виде [10]

$$\frac{E h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left\langle \left[U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 \mp \frac{4m}{3E} \left[\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\} \right\rangle_x - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} = -q_x^{(i)} - \tilde{q}_x^{(i)}(i-1), \\ \frac{E h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(W_{xx}^{(i)} + U_x^{(i)} W_{xx}^{(i)} \right)_{xx} - \left\{ W_x^{(i)} \left(U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \right. \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left[1 \mp \frac{4m}{3E} \left(\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right] \Bigg\}_x - \\
 & - \frac{1}{R} \left(\mu_0 U_x^{(i)} + \frac{1}{2} \mu_0 U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} \mu_0 W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \mu_0 W_{xx}^{(i)2} - \frac{W^{(i)}}{R} \right) \times \\
 & \times \left[1 \pm \frac{4m}{3E} \left(\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right] \Bigg\} + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} = (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1).
 \end{aligned}$$

Здесь $h_0^{(i)}$ — толщины оболочек, μ_0 — коэффициент Пуассона, ρ_0 — плотность, $U^{(i)}$, $W^{(i)}$ — продольное перемещение и прогиб, положительный к центру кривизны, x — продольная координата, t — время, q_x^i , q_n — напряжения со стороны жидкости, которая находится между оболочками, \tilde{q}_x , \tilde{q}_n — напряжения со стороны жидкости, которая находится во внутренней оболочке. Нижние индексы у перемещений обозначают соответствующие частные производные.

Для соосных цилиндрических оболочек, внутри которых находится вязкая несжимаемая жидкость, кольцевой слой жидкости имеет ширину значительно меньше радиуса оболочек, как и толщина жидкости во внутренней оболочке. Их отношение можно выбрать в качестве малого параметра для моделей гидромеханики кольцевого и кругового сечения. Уравнения этих моделей связаны через краевые условия прилипания жидкости с уравнениями динамики оболочек, для которых в качестве малого параметра выбираем отношение амплитуды продольного перемещения и прогиба к характерной длине волны в оболочках. С помощью комбинирования метода многих масштабов и метода сращиваемых асимптотических разложений, проводя вычисления аналогичные [8], получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 \phi_t^{(1)} + 6\sigma_0 \phi^{(1)} \phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} \mp 6\sigma_1 \phi^{(1)2} \phi_\eta^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} &= 0, \\
 \phi_t^{(2)} + 6\sigma_0 \phi^{(2)} \phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} \mp 6\sigma_1 \phi^{(2)2} \phi_\eta^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma \phi^{(2)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Система уравнений (1) имеет в качестве точного решения с верхнем знаком — при σ_1 и при $\sigma = 0$ (отсутствие жидкости во внутренней оболочке) следующее точное решение:

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \frac{\sigma_0}{2\sigma_1} \pm \frac{k}{\sqrt{\sigma_1}} \operatorname{th} \left(k \left(\eta + \left(2k^2 - \frac{3\sigma_0^2}{2\sigma_1} \right) t \right) \right). \tag{2}$$

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В работах [11, 12] развит подход к построению разностных схем, основанный на построении перепределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. Построение базиса Грёбнера соответствующих разностных многочленов позволяет построить разностную схему, которая автоматически обеспечивает выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из шаблонов интегрирования.

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (1), аналогичную схеме Кранка – Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}
 & \frac{u^{(1)j}_{n+1} - u^{(1)j}_n}{\tau} + 3\sigma_0 \frac{(u^{(1)j+1}_{n+1} - u^{(1)j+1}_n) + (u^{(1)j+1}_n - u^{(1)j-1}_n)}{4h} + \\
 & + \frac{(u^{(1)j+2}_n - 2u^{(1)j+1}_n + 2u^{(1)j}_n - u^{(1)j-2}_n) + (u^{(1)j+2}_n - 2u^{(1)j+1}_n + 2u^{(1)j}_n - u^{(1)j-2}_n)}{4h^3} \mp \\
 & \mp 2\sigma_1 \frac{(u^{(1)j+1}_{n+1} - u^{(1)j+1}_n) + (u^{(1)j+1}_n - u^{(1)j-1}_n)}{4h} + \frac{u^{(1)j}_{n+1} + u^{(1)j}_n}{2} - \frac{u^{(2)j}_{n+1} + u^{(2)j}_n}{2} = 0, \\
 & \frac{u^{(2)j}_{n+1} - u^{(2)j}_n}{\tau} + 3\sigma_0 \frac{(u^{(2)j+1}_{n+1} - u^{(2)j+1}_n) + (u^{(2)j+1}_n - u^{(2)j-1}_n)}{4h} + \\
 & + \frac{(u^{(2)j+2}_{n+1} - 2u^{(2)j+1}_{n+1} + 2u^{(2)j+1}_n - u^{(2)j-2}_{n+1}) + (u^{(2)j+2}_n - 2u^{(2)j+1}_n + 2u^{(2)j}_n - u^{(2)j-2}_n)}{4h^3} \mp \\
 & \mp 2\sigma_1 \frac{(u^{(2)j+1}_{n+1} - u^{(2)j+1}_n) + (u^{(2)j+1}_n - u^{(2)j-1}_n)}{4h} +
 \end{aligned}$$



$$+\frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} - \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \sigma \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} = 0.$$

При отсутствии жидкости во внутренней оболочке, как показано в работах [4, 8], возникает нелинейная волна деформации во внутренней оболочке, в которой ее не было в начальный момент времени.

На рис. 2 представлены результаты вычислительных экспериментов (а, б — для внешней оболочки, в, г — для внутренней оболочки).

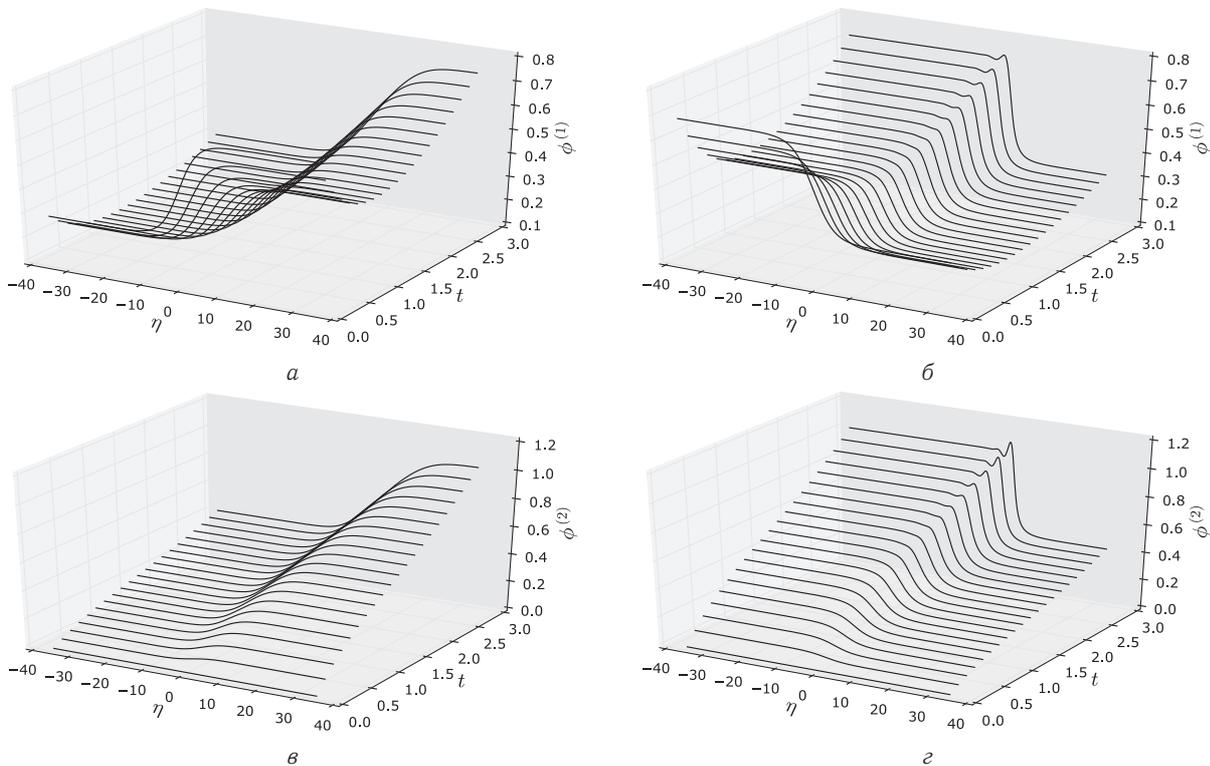


Рис. 2. Графики численного решения уравнений (1) при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma = 0.7$, с начальным условием $\phi^{(2)} = 0$ и с $\phi^{(1)}$, взятого из точного решения (2) при $t = 0$, $k = 0.2$ со знаком + (а, в) и знаком - (б, г)

Выполненные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке на поведение нелинейной волны деформации при значении параметра $\sigma > 0$. Сначала происходит выравнивание амплитуд с их дальнейшим линейным ростом, при этом угол наклона амплитуды волны больше во внутренней оболочке. Наблюдается линейный синхронный рост амплитуды волны относительно времени в обеих оболочках при более сильном росте во внутренней оболочке.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00175-а).

Библиографический список

1. Громека И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах // Собр. соч. М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1952. С. 149–171.
2. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 1. С. 52–58.
3. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // Акустический журн. 2001. Т. 47, № 3. С. 359–363.
4. Блинков Ю. А., Ковалева И. А., Могилевич Л. И. Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестн. РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. 2013. Т. 3. С. 42–51.
5. Блинкова А. Ю., Иванов С. В., Ковалев А. Д., Могилевич Л. И. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 12–18.
6. Блинкова А. Ю., Блинков Ю. А., Иванов С. В.,



- Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в геометрически и физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окружающей упругой средой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 193–202. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202.
7. Блинкова А. Ю., Блинков Ю. А., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6, № 3. С. 336–345. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.38.
 8. Блинков Ю. А., Месянжин А. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 2. С. 184–197. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197.
 9. Каудерер Г. Нелинейная механика. М. : Иностран. лит., 1961. 778 с.
 10. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. : Наука, 1972. 432 с.
 11. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and difference schemes for the Navier – Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing. Vol. 5743 of Lecture Notes in Computer Science. 2009. P. 94–105. DOI: 10.1007/978-3-642-04103-7_10.
 12. Amodio P., Blinkov Yu. A., Gerdt V. P., La Scala R. On Consistency of Finite Difference Approximations to the Navier – Stokes Equations // Computer Algebra in Scientific Computing. Vol. 8136 of Lecture Notes in Computer Science. 2013. P. 46–60. DOI: 10.1007/978-3-319-02297-0_4.

Образец для цитирования:

Блинков Ю. А., Кондратова Ю. Н., Месянжин А. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование нелинейных волн в соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 331–336. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-331-336.

Nonlinear Waves Mathematical Modeling in Coaxial Shells Filled with Viscous Liquid

Yu. A. Blinkov¹, Yu. N. Kondratova², A. V. Mesyanzhin³, L. I. Mogilevich⁴

¹Yury A. Blinkov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, BlinkovUA@info.sgu.ru

²Yulia N. Kondratova, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, kondratovau@info.sgu.ru

³Artem V. Mesyanzhin, Industrial Automatics Design Bureau JSC, 239, B. Sadovaya st., 410005, Saratov, Russia, a.v.mesyanzhin@gmail.com

⁴Lev I. Mogilevich, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77, Politekhnikeskaya st., 410054, Saratov, Russia, mogilevich@sgu.ru

There exist wave motion mathematical models in infinitely long geometrically nonlinear shells filled with viscous incompressible liquid. They are based on related hydroelasticity problems, described by dynamics and viscous incompressible liquid equations in the form of generalized KdV equations. Mathematical models of wave process in infinitely long geometrically nonlinear coaxial cylindrical shells are obtained by means of the small parameter perturbation method. The problems differ from the already known ones by the consideration of viscous incompressible liquid presence. The system of generalized KdV equations is obtained on the basis of related hydroelasticity problems, described by shell dynamics and viscous incompressible liquid equations with corresponding boundary conditions. This paper deals with investigating of wave occurrence model of the two geometrically and physically nonlinear elastic coaxial cylindrical Kirchhoff – Love type shells containing viscous incompressible liquid between and inside them. The difference Crank – Nicholson type schemes aimed at investigating equations systems with the consideration of liquid impact are obtained with the help of Gröbner basis construction. To generate these difference schemes, basic integral difference correlations, approximating the initial equations system, are used. The use of Gröbner basis techniques makes it possible to generate the schemes allowing to obtain discrete preservation laws analogues to the initial differential equations. To do this, equivalent transformations were made. On the basis of computational algorithm the software allowing to construct graphs and to obtain Cauchy problem numerical solution was developed, using the exact solutions of the coaxial shell dynamics equations system as an initial condition.

Key words: nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylindrical shells.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00175).

References

1. Gromeka I. S. K teorii dvizheniya zhidkosti v uzkih tsilindricheskikh trubakh [On the Theory of Fluid Motion in Narrow Cylindrical Tubes]. *Collected works*, Moscow, Leningrad, Publ. House of the Academy of Sciences of the USSR, 1952, pp. 149–171 (in Russian).
2. Zemlianukhin A. I., Mogilevich L. I. Nelineinnye volny deformatsii v tsilindricheskikh obolochkakh



- [Nonlinear Waves of Deformation in Cylindrical Shells]. *Izv. vuzov. Prikladnaia nelineinaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 1995, vol. 3, no. 1, pp. 52–58 (in Russian).
- Zemlianukhin A. I., Mogilevich L. I. Nonlinear Waves in Inhomogeneous Cylindrical Shells: A New Evolution Equation. *Akusticheskij Zhurnal*, 2001, vol. 47, no. 3, pp. 359–363 (in Russian).
 - Blinkov Yu. A., Kovaleva I. A., Mogilevich L. I. Nonlinear Waves Dynamics Modeling in Coaxial Geometrically And Physically Nonlinear Shell Containing Viscous Incompressible Fluid in between. *Vestnik RUDN. Ser. Math., Inform., Physics*, 2013, vol. 3, pp. 42–51 (in Russian).
 - Blinkova A. Iu., Ivanov S. V., Kovalev A. D., Mogilevich L. I. Mathematical and Computer Modeling of Nonlinear Waves Dynamics in a Physically Nonlinear Elastic Cylindrical Shells with Viscous Incompressible Liquid inside Them. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 12–18 (in Russian).
 - Blinkova A. Yu., Blinkov Yu. A., Ivanov S. V., Mogilevich L. I. Nonlinear Deformation Waves in a Geometrically and Physically Nonlinear Viscoelastic Cylindrical Shell Containing Viscous Incompressible Fluid and Surrounded by an Elastic Medium. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 193–202 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202.
 - Blinkova A. Yu., Blinkov Yu. A., Ivanov S. V., Mogilevich L. I. Non-linear waves in coaxial cylinder shells containing viscous liquid inside with consideration for energy dispersion. *Comp. Contin. Mech.*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 336–345 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.38.
 - Blinkov Yu. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Wave Occurrences Mathematical Modeling in Two Geometrically Nonlinear Elastic Coaxial Cylindrical Shells, Containing Viscous Incompressible Liquid. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 184–197 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197.
 - Kauderer G. *Nelinejnaja mehanika* [Nonlinear mechanics]. Moscow, Publ. Inostrannaja literatura, 1961, 778 p. (in Russian).
 - Vol'mir A. S. *Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972, 432 p. (in Russian).
 - Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and difference schemes for the Navier–Stokes equations. *Computer Algebra in Scientific Computing*, vol. 5743 of Lecture Notes in Computer Science, 2009, pp. 94–105. DOI: 10.1007/978-3-642-04103-7_10.
 - Amodio P., Blinkov Yu. A., Gerdt V. P., La Scala R. On Consistency of Finite Difference Approximations to the Navier–Stokes Equations. *Computer Algebra in Scientific Computing*, vol. 8136 of Lecture Notes in Computer Science, 2013, pp. 46–60. DOI: 10.1007/978-3-319-02297-0_4.

Please cite this article in press as:

Blinkov Yu. A., Kondratova Yu. N., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Nonlinear Waves Mathematical Modeling in Coaxial Shells Filled with Viscous Liquid. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 331–336 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-331-336.

УДК 629

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ УГЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОННОГО УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ

Е. А. Козлов¹, Ю. Н. Челноков², И. А. Панкратов³

¹Козлов Евгений Александрович, аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ewgeni11_91@mail.ru

²Челноков Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

³Панкратов Илья Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, PankratovIA@info.sgu.ru



В статье рассмотрена задача оптимальной коррекции угловых элементов орбиты космического аппарата. Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Комбинированный функционал качества характеризует затраты времени и энергии на процесс управления. С помощью принципа максимума Понтрягина и кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты космического аппарата сформулирована дифференциальная краевая задача коррекции угловых элементов орбиты космического аппарата. Приведены закон оптимального управления, условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Построены примеры численного решения задачи.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, оптимальное управление, кватернион, угловые элементы орбиты.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-336-344

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ МГНОВЕННОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В данной работе рассматривается задача оптимальной коррекции угловых элементов орбиты космического аппарата (КА) посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты, которая решается с помощью принципа максимума Понтрягина [1] и кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА. Присутствующая в этом уравнении кватернионная переменная характеризует собой ориентацию мгновенной орбиты КА. Работа является развитием исследований [2,3].

Исследование задачи оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты, при помощи принципа максимума Понтрягина сводится к решению краевых задач, описываемых системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Так как точное аналитическое решение рассматриваемой задачи и других пространственных задач оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА вряд ли возможно, то при решении этих задач на основе принципа максимума приходится рассчитывать лишь на их приближенное решение.

Считается, что вектор ускорения u от тяги реактивного двигателя во всё время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. В этом случае орбита КА не меняет своей формы и своих размеров, а лишь поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Движение центра масс КА рассматривается в инерциальной системе координат X — геоцентрической экваториальной системе координат $OX_1X_2X_3(X)$ с началом в центре O притяжения Земли (рис. 1). Ось OX_3 этой системы координат направлена вдоль оси суточного вращения Земли, оси OX_1 и OX_2 лежат в плоскости экватора Земли, ось OX_1 направлена в точку весеннего равноденствия для Земли, а ось OX_2 образует с осями OX_1 и OX_3 правую тройку векторов.

Введем в рассмотрение систему координат ξ , связанную с плоскостью и перигеумом орбиты КА. Начало системы координат ξ находится в перигеуме P орбиты КА, который на рис. 1 обозначен точкой B . Ось ξ_1 направлена вдоль радиуса-вектора перигеума орбиты, ось ξ_3 перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора c момента скорости центра масс КА, а ось ξ_2 дополняет систему до правой тройки векторов. В инерциальной системе координат X ориентация системы координат ξ характеризуется собой ориентацией орбиты КА в инерциальном пространстве и задается тремя угловыми оскулирующими элементами орбиты: долготой восходящего узла Ω_u , наклоном орбиты I и угловым расстоянием перигеума от узла ω_π .

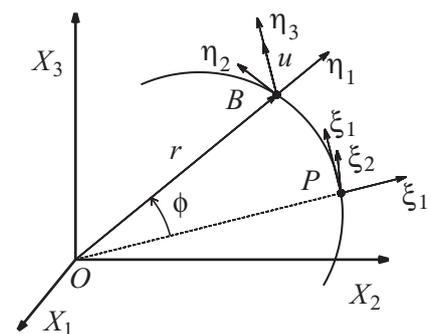


Рис. 1. Системы координат

Систему координат η , связанную с центром масс КА, введем таким образом, чтобы ось η_1 была направлена вдоль радиуса-вектора r центра масс КА, а ось η_3 была перпендикулярна плоскости орбиты. Ось η_2 направим так, чтобы орты осей η_1 , η_2 и η_3 образовывали правую тройку. В инерциальной системе координат X ориентация орбитальной системы координат η задается тремя угловыми переменными: Ω_u , I , $\omega_\pi + \varphi$, где φ — истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перигеума и характеризующая положение КА на орбите).



В рассматриваемом случае дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в инерциальной системе координат в угловых элементах орбиты имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= u \frac{r}{c} \sin(\omega_\pi + \varphi) \operatorname{cosec} I, & \frac{dI}{dt} &= u \frac{r}{c} \cos(\omega_\pi + \varphi), & \frac{d\omega_\pi}{dt} &= -u \frac{r}{c} \sin(\omega_\pi + \varphi) \operatorname{ctg} I, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2}, & r &= \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, & c &= \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u — проекция вектора ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА); c — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ центра масс КА); p и e — параметр и эксцентриситет орбиты.

Задача переориентации орбиты КА в угловых переменных формулируется следующим образом: требуется построить управление u , переводящее орбиту КА, изменение ориентации которой описывается уравнениями (1) из заданного начального положения

$$\Omega_u = \Omega_u(t_0) = \Omega_u^0, \quad I = I(t_0) = I^0, \quad \omega_\pi = \omega_\pi(t_0) = \omega_\pi^0, \quad I^0 \neq 0, \pi,$$

в требуемое конечное положение

$$\Omega_u = \Omega_u(t_*) = \Omega_u^*, \quad I = I(t_*) = I^*, \quad \omega_\pi = \omega_\pi(t_*) = \omega_\pi^*, \quad I^* \neq 0, \pi.$$

Так как дифференциальные уравнения (1) движения центра масс КА в угловых переменных нелинейны и имеют особые точки $I = 0, \pi$, то решить сформулированную задачу достаточно сложно. Задача решается гораздо проще, если использовать дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера (Родрига – Гамильтона), имеющие вид [5]

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\Lambda_0}{dt} &= -\Lambda_1 \Omega_1 - \Lambda_2 \Omega_2, & 2 \frac{d\Lambda_1}{dt} &= \Lambda_0 \Omega_1 - \Lambda_3 \Omega_2, \\ 2 \frac{d\Lambda_2}{dt} &= \Lambda_0 \Omega_2 + \Lambda_3 \Omega_1, & 2 \frac{d\Lambda_3}{dt} &= \Lambda_1 \Omega_2 - \Lambda_2 \Omega_1, \\ \Omega_1 &= u \frac{r}{c} \cos \varphi, & \Omega_2 &= u \frac{r}{c} \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2}, & r &= \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, & c &= \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (2)$$

где Λ_j ($j = \overline{0,3}$) — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбиты КА (системы координат ξ) в инерциальной системе координат X ; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 = 0$ — проекции вектора $\boldsymbol{\Omega}$ мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты на связанные с ней координатные оси $O\xi_i$.

Параметры Λ_j связаны с угловыми элементами орбиты соотношениями:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \cos \left(\frac{I}{2} \right) \cos \left(\frac{\Omega_u + \omega_\pi}{2} \right), & \Lambda_1 &= \sin \left(\frac{I}{2} \right) \cos \left(\frac{\Omega_u - \omega_\pi}{2} \right), \\ \Lambda_2 &= \sin \left(\frac{I}{2} \right) \sin \left(\frac{\Omega_u + \omega_\pi}{2} \right), & \Lambda_3 &= \cos \left(\frac{I}{2} \right) \sin \left(\frac{\Omega_u - \omega_\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (2) в кватернионной записи принимают вид

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{dt} &= \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi, & \boldsymbol{\Omega}_\xi &= u \frac{r}{c} (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2}, & r &= \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, & c &= \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3$ — кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА), $\boldsymbol{\Omega}_\xi$ — отображение вектора $\boldsymbol{\Omega}$ на базис ξ (вектор $\boldsymbol{\Omega}$ мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты направлен вдоль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА и определяется формулой: $\boldsymbol{\Omega} = (u/c)\mathbf{r}$); \mathbf{i}_j ($j = \overline{1,3}$) — векторные мнимые единицы Гамильтона; \circ — символ кватернионного умножения.

Отметим, что скалярные уравнения ориентации орбиты в параметрах Эйлера (2) использовались ранее для описания орбитального движения в работах А. Deprit [6] и В. А. Брумберга [7].



2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ КВАТЕРНИОННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ

Требуется определить ограниченное по модулю управление u :

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max} < \infty, \quad u = \pm|u|, \quad (5)$$

ортогональное плоскости орбиты КА, движение центра масс которого описывается уравнениями (2), переводящее орбиту КА из заданного начального состояния:

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \Lambda(t_0) = \Lambda^0, \quad (6)$$

в требуемое конечное состояние

$$t = t^* = ?, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \Omega_u^* = \frac{\Lambda_1^* \Lambda_3^* + \Lambda_0^* \Lambda_2^*}{\Lambda_0^* \Lambda_1^* - \Lambda_2^* \Lambda_3^*}, \quad \cos I^* = (\Lambda_0^*)^2 - (\Lambda_1^*)^2 - (\Lambda_2^*)^2 + (\Lambda_3^*)^2.$$

При этом необходимо минимизировать комбинированный функционал:

$$J = \int_{t_0}^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0, \quad (8)$$

который характеризует затраты времени и энергии на процесс управления. Здесь Λ_j^* — компоненты кватерниона $\Lambda^* = \Lambda(t^*)$, характеризующего требуемое положение орбиты КА.

Кватернионная переменная Λ , присутствующая в краевых условиях, характеризует ориентацию орбиты КА, а переменная φ — положение КА на орбите.

Величины c , p , e , φ_0 , Λ^0 , Ω_u^* и I^* заданы. Начальные значения компонент кватерниона Λ могут быть найдены через заданные значения угловых элементов орбиты по формулам (3). Углы Ω_u^* и I^* описывают требуемую конечную ориентацию плоскости мгновенной орбиты КА. Определению подлежат оптимальный закон управления $u(t)$ и величины t^* , φ^* . Отметим, что в отличие от работ [3, 8] конечное положение орбиты КА в её плоскости не фиксировано, что упрощает процесс нахождения численного решения задачи.

3. ЗАКОН ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума Понтрягина. Для этого введем дополнительные переменные $M = M_0 + M_1 i_1 + M_2 i_2 + M_3 i_3$ и χ , сопряженные по отношению к фазовым переменным Λ и φ соответственно.

Функция Гамильтона – Понтрягина имеет вид

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2 u^2) + u \frac{r}{2c} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi) + \chi \frac{c}{r^2}, \quad (9)$$

где N_1 и N_2 — компоненты кватерниона $N = \tilde{\Lambda} \circ M$, $\tilde{\Lambda}$ — кватернион, сопряженный к кватерниону Λ .

Система уравнений для сопряженных переменных примет вид

$$2 \frac{dM}{dt} = M \circ \Omega_\xi, \quad (10)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = 2 \frac{\chi}{r} \frac{dr}{dt} + u \frac{r}{2c} (N_1 \sin \varphi - N_2 \cos \varphi) - u \frac{r^2}{2c^2} \frac{dr}{dt} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi).$$

Отметим, что сопряженное кватернионное уравнение в (10) совпадает по своей форме с фазовым уравнением (4), поскольку кватернионное уравнение (4) обладает свойством самосопряженности (это свойство кватернионного кинематического уравнения было установлено В. Н. Бранцем и И. П. Шмыглевским [9]).

Закон оптимального управления (т.е. закон управления, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности) находится из условия максимума функции Гамильтона – Понтрягина (9) по переменной u с учетом наложенного ограничения (5).



Найдем критические точки функции $H = H(u)$. Производная функции Гамильтона – Понтрягина (9) по переменной u имеет вид

$$\frac{dH}{du} = -2\alpha_2 u + \frac{r}{2c}(N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi)$$

и обращается в нуль при

$$u = u_{кр} = \frac{r}{4\alpha_2 c}(N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi),$$

где u – критическая точка.

Найдем вторую производную функции H по u :

$$\frac{d^2 H}{du^2} = -2\alpha_2.$$

Так как вторая производная меньше нуля, то $u = u_{кр}$ – точка максимума функции Гамильтона – Понтрягина.

Если $u_{кр} > u_{\max}$, то функция H возрастает на отрезке $[-u_{\max}, +u_{\max}]$ и $\max_{u \in [-u_{\max}; +u_{\max}]} H(u) = H(u_{\max})$, т.е. $u_{\text{опт}} = u_{\max}$.

Если $u_{кр} < -u_{\max}$, то функция H убывает на отрезке $[-u_{\max}, +u_{\max}]$ и $\max_{u \in [-u_{\max}; +u_{\max}]} H(u) = H(-u_{\max})$, т.е. $u_{\text{опт}} = -u_{\max}$.

Тогда при $|u_{кр}| > +u_{\max}$ закон оптимального управления запишется так:

$$u_{\text{опт}} = u_{\max} \text{sign } \nu_1,$$

где $\nu_1 = N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi$.

Если $u_{кр} \in [-u_{\max}; +u_{\max}]$, то $\max_{u \in [-u_{\max}; +u_{\max}]} H(u) = H(u_{кр})$.

Таким образом,

$$u_{\text{опт}} = \begin{cases} \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1|, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1| \leq u_{\max}, \\ u_{\max} \text{sign } \nu_1, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1| > u_{\max}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\nu_1 = N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi$.

4. УСЛОВИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

Введем неопределенные множители Лагранжа C_1 и C_2 . Получим условия трансверсальности, соответствующие многообразию конечных состояний (7): при $t = t^*$

$$\begin{aligned} M_0 + C_1(\Lambda_2^* - \Lambda_1^* \text{tg } \Omega_u) + 2C_2 \Lambda_0^* &= 0, \\ M_1 + C_1(\Lambda_3^* - \Lambda_0^* \text{tg } \Omega_u) - 2C_2 \Lambda_1^* &= 0, \\ M_2 + C_1(\Lambda_0^* + \Lambda_3^* \text{tg } \Omega_u) - 2C_2 \Lambda_2^* &= 0, \\ M_3 + C_1(\Lambda_1^* + \Lambda_2^* \text{tg } \Omega_u) + 2C_2 \Lambda_3^* &= 0, \\ \chi &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Если исключить из (12) неопределенные множители Лагранжа, то мы получим три недостающих условия трансверсальности при $t = t^*$

$$\begin{aligned} M_0(\Lambda_1^* + \Lambda_2^* \text{tg } \Omega_u) + M_1(\Lambda_0^* + \Lambda_3^* \text{tg } \Omega_u) - M_2(\Lambda_3^* - \Lambda_0^* \text{tg } \Omega_u) - M_3(\Lambda_2^* - \Lambda_1^* \text{tg } \Omega_u) &= 0, \\ N_3 = -M_0 \Lambda_3^* + M_1 \Lambda_2^* - M_2 \Lambda_1^* + M_3 \Lambda_0^* &= 0, \\ \chi &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, задача оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (4), (10), (11) десятого порядка и семью краевыми уравнениями (6), (7), которые необходимо дополнить тремя условиями трансверсальности (13) и равенством нулю функции Гамильтона – Понтрягина при $t = t^*$ $H(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \chi, u_{\text{опт}}) = 0$, имеющим место для оптимального управления $u_{\text{опт}}$ и оптимальной траектории.



5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Для численного решения задачи был осуществлен переход к безразмерным переменным. При этом в уравнениях для фазовых и сопряженных переменных появился характерный безразмерный параметр $N^b = u_{\max} p^3 / c^2$.

Разработана программа численного решения задачи оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА, являющаяся комбинацией методов Рунге – Кутты, Ньютона и градиентного спуска [10].

Для одного из рассмотренных численных примеров величины, характеризующие форму и размеры орбиты КА, полагались равными:

$$a_{or} = 25500000 \text{ м}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N^b = 0.35,$$

где a_{or} — большая полуось орбиты.

Для начального положения КА истинная аномалия полагалась равной нулю: $\varphi_0 = 0$ рад. Конечная ориентация орбиты соответствует ориентации орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС. Отличие между начальными и конечными ориентациями орбит КА составляет по угловым элементам около 15° в угловой мере.

Значения масштабирующих множителей для безразмерных переменных равны:

$$R = 26000000 \text{ м}, \quad T = 9449.714506 \text{ с}, \quad V = 2751.405874 \text{ м/с}.$$

Здесь R — характерное расстояние, T — характерное время, а V — характерная скорость. Указанные значения этих величин отвечают значениям декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА, приведенным в [11].

На рис. 2, 4 приведены законы изменения фазовых переменных и управления для задачи, близкой к экономии энергетических затрат, т.е. для случая, когда коэффициенты в функционале (8) имеют значения $\alpha_1 = 0.001$, $\alpha_2 = 1$.

На рис. 3, 5 приведены законы изменения фазовых переменных и управления для задачи, близкой к задаче быстрого действия ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.001$). Отметим, что в этом случае оптимальное управление близко к разрывному, что значительно усложняет процесс нахождения неизвестных начальных значений сопряженных переменных при численном решении задачи.

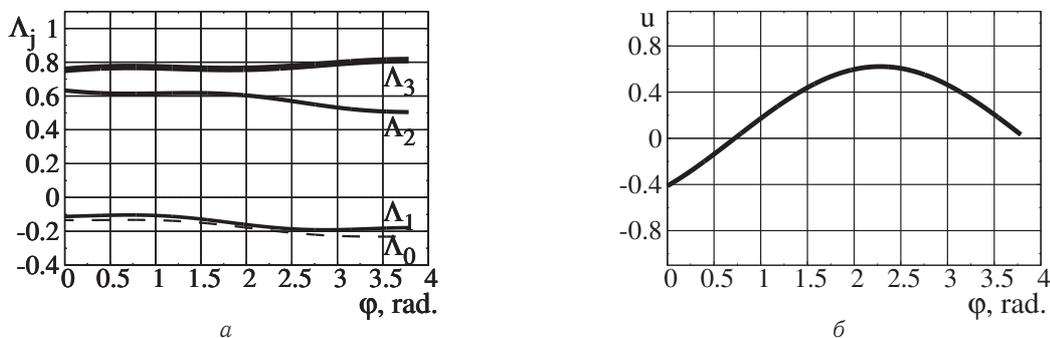


Рис. 2. Фазовые переменные (а) и оптимальное управление (б) при $J = \int_0^{t^*} (0.001 + u^2) dt$, $e = 0$

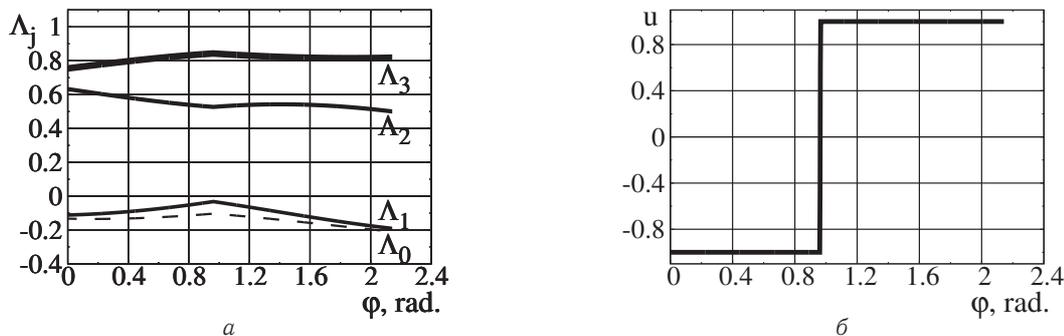


Рис. 3. Фазовые переменные (а) и оптимальное управление (б) при $J = \int_0^{t^*} (1 + 0.001u^2) dt$, $e = 0$

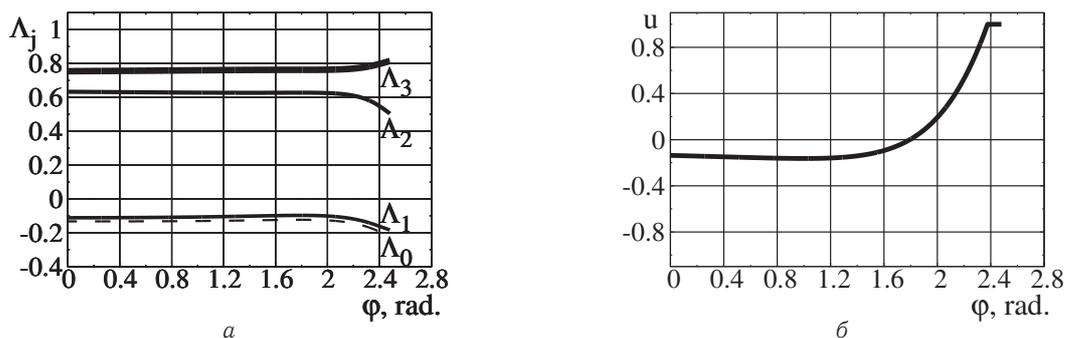


Рис. 4. Фазовые переменные (а) и оптимальное управление (б) при $J = \int_0^{t^*} (0.001 + u^2) dt$, $e = 0.5$



Рис. 5. Фазовые переменные (а) и оптимальное управление (б) при $J = \int_0^{t^*} (1 + 0.001u^2) dt$, $e = 0.5$

Для случая, близкого к экономии энергетических затрат, длительность процесса переориентации круговой орбиты КА ($e = 0$) составила 9.9459657114 ч, а для задачи, близкой к задаче быстрогодействия, — 5.6298512412 ч. Длительность процесса переориентации эллиптической орбиты КА ($e = 0.5$) составила 6.6025088379 ч для случая экономии энергетических затрат и 4.9469579758 ч для задачи, близкой к задаче быстрогодействия.

Отметим, что при решении задачи, близкой к задаче быстрогодействия, имеется лишь одно переключение управления, а при решении задачи, близкой к экономии затрат энергии, управление не достигает своего максимального по модулю значения.

Из-за нелинейности дифференциальных уравнений в поставленной задаче численное решение краевой задачи оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА неоднозначно. При одних и тех же граничных условиях в постановке краевой задачи оптимального управления (с одним и тем же функционалом) получены различные варианты решения для законов движения, управления и поведения сопряженных переменных. Из них были выбраны те, при которых функционал минимален.

При численном решении задачи были выявлены также особенности и закономерности построенных оптимальных траекторий и управлений. Установлено, что при увеличении эксцентриситета орбиты от 0 до 0.5 уменьшается количество активных участков движения, их длительности и общее время переориентации. При эксцентриситете орбиты более 0.5 пропадают участки, где управление принимает свое максимальное по модулю значение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165-а).

Библиографический список

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с.
2. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
3. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95.
4. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М. : Наука, 1976. 864 с.
5. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 512 с.



6. Deprit A. Ideal frames for perturbed keplerian motions // *Celestial Mechanics*. 1976. Vol. 13, № 2. P. 253–262.
7. Брумберг В. А. Аналитические алгоритмы небесной механики. М. : Наука, 1980. 208 с.
8. Chelnokov Yu. N., Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G. Optimal reorientation of spacecraft orbit // *Archives of Control Sciences*. 2014. Vol. 24, № 2. P. 119–128.
9. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.
10. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М. : Наука, 1971. 424 с.
11. Бордовицына Т. В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М. : Наука, 1984. 136 с.

Образец для цитирования:

Козлов Е. А., Челноков Ю. Н., Панкратов И. А. Решение задачи оптимальной коррекции угловых элементов орбиты космического аппарата с использованием кватернионного уравнения ориентации орбиты // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 336–344. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-336-344.

Investigation of the Problem of Optimal Correction of Angular Elements of the Spacecraft Orbit Using Quaternion Differential Equation of Orbit Orientation

E. A. Kozlov¹, Yu. N. Chelnokov², I. A. Pankratov³

¹Evgeniy A. Kozlov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, ewgeni11_91@mail.ru

²Yuriy N. Chelnokov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

³Iliia A. Pankratov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, PankratovIA@info.sgu.ru

In this paper we consider the problem of optimal correction of angular elements of the spacecraft orbit. Control (jet thrust vector orthogonal to the plane of the orbit) is limited by absolute value. The combined quality functional characterizes the amount of time and energy consumption. With the help of the Pontryagin maximum principle and quaternion differential equation of the spacecraft orbit orientation, we have formulated differential boundary value problem of correction of the angular elements of the spacecraft orbit. Optimal control law, transversality conditions, not containing Lagrange multipliers, examples of the numerical solution of the problem are given.

Key words: spacecraft, orbit, optimal control, quaternion, angular orbital elements.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 12-01-00165-a).

References

1. Pontryagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka, 1983, 393 p. (in Russian).
2. Chelnokov Yu. N. Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, iss. 6, pp. 646–657. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.02.002.
3. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. About a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 87–95 (in Russian).
4. Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebennikov E. A., Demin V. G., Ryabov Yu. A. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoi mehanike i astrodinamike* [Handbook on Celestial Mechanics and Astrodynamics]. Moscow, Nauka, 1976, 864 p. (in Russian).
5. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mehaniki tverdogo tela i ih prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya* [Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of a Rigid Body and their Applications. Geometry and Kinematics of Motion]. Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian).
6. Deprit A. Ideal frames for perturbed keplerian motions. *Celestial Mechanics*, 1976, vol. 13, no. 2, pp. 253–262.
7. Brumberg V. A. Analytical techniques of celestial mechanics. Berlin, Springer-Verlag, 1995, 236 p. (Rus. ed.: Brumberg V.A. Analiticheskie algoritmy nebesnoj mehaniki. Moscow, Nauka, 1980, 208 p.)
8. Chelnokov Yu. N., Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G. Optimal reorientation of spacecraft orbit. *Archives of Control Sciences*, 2014, vol. 24, no. 2, pp. 119–128.
9. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Application of Quaternions in Problems of Orientation of a Rigid Body]. Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).



10. Moiseev N. N. *Chislennye metody v teorii optimal'nyh sistem* [Numerical methods in the theory of optimal systems]. Moscow, Nauka, 1971, 424 p. (in Russian).
11. Bordovitzyna T. V. *Sovremennye chislennye metody v zadachah nebesnoj mehaniki* [Modern numerical methods in problems of celestial mechanics]. Moscow, Nauka, 1984, 136 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:

Kozlov E. A., Chelnokov Yu. N., Pankratov I. A. Investigation of the Problem of Optimal Correction of Angular Elements of the Spacecraft Orbit Using Quaternion Differential Equation of Orbit Orientation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 336–344 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-336-344.

УДК 539.375

ЩЕЛЬ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ ВО ВТУЛКЕ ФРИКЦИОННОЙ ПАРЫ

В. М. Мирсалимов¹, П. Э. Ахундова²

¹Мирсалимов Вагиф Мирахмедович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Азербайджанский технический университет, главный научный сотрудник, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, vagif.mirsalimov@imm.az

²Ахундова Парвана Эльман гызы, кандидат физико-математических наук, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, sopromat_v@mail.ru

Рассмотрена плоская задача механики разрушения для втулки фрикционной пары. Считается, что во втулке вблизи шероховатой поверхности трения имеется прямолинейная щель переменной ширины, сравнимой с упругими деформациями. Дан критерий и метод решения обратной задачи механики контактного разрушения по определению функции перемещений точек внешнего контура втулки фрикционной пары с учетом перепада температуры и неровностей контактной поверхности в деталях фрикционной пары. Найденная функция перемещений точек внешнего контура втулки обеспечивает повышение несущей способности втулки фрикционной пары.

Ключевые слова: фрикционная пара, втулка, плунжер, температура, шероховатая поверхность трения, щель, смыкание берегов щели, функция перемещений наружного контура втулки.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-344-355

ВВЕДЕНИЕ

Ресурс работы фрикционной пары определяется [1,2] работоспособностью втулки, распределением напряжений в зонах взаимодействия деталей фрикционной пары. Практика эксплуатации фрикционных пар нефтепромыслового оборудования, транспортных машин показывает, что при многократном возвратно-поступательном движении плунжера разрушение втулки фрикционной пары происходит на пятнах фактического касания в тонких приповерхностных слоях путем образования микротрещин, с которыми втулка «живет» значительную часть ресурса работы. В связи с этим на стадии проектирования новых конструкций подвижных сопряжений нужно проводить предельный анализ деталей фрикционной пары, чтобы установить, что предполагаемые исходные щели, расположенные самым неблагоприятным образом, не будут расти до критических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока службы. Размер исходной минимальной щели следует рассматривать как проектную характеристику материала.

Считается, что внутренний контур втулки и внешний контур плунжера близки к круговым. На современном этапе развития техники важное значение имеет [3–11] оптимальное проектирование деталей фрикционной пары, обеспечивающее увеличение работоспособности фрикционных пар. Представляет значительный интерес решение задачи механики по определению такой функции перемещений точек внешнего контура втулки, при которой созданное ею напряженное поле тормозило бы развитие щели во втулке.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние втулки фрикционной пары. В процессе работы фрикционной пары «втулка – плунжера» при многократном возвратно-поступательном движе-



нии плунжера происходит силовое взаимодействие между контактирующими поверхностями втулки и плунжера, возникают силы трения, приводящие к изнашиванию материалов сопряжения. Для определения контактного давления необходимо рассмотреть [1, 2] износоконтактную задачу о вдавлении плунжера в поверхность втулки, ослабленной прямолинейной щелью.

Пусть к внутренней поверхности втулки с упругими параметрами G (модуль сдвига) и μ (коэффициент Пуассона) на некотором неизвестном заранее участке прижимается плунжер с упругими параметрами G_1 и μ_1 . Считается, что втулка на наружном контуре имеет некоторые перемещения. Функция этих перемещений заранее неизвестна и подлежит определению из дополнительного условия.

Принято, что выполняются условия плоской деформации. Режимы работа фрикционной пары, в которой могут возникать остаточные деформации, приняты недопустимыми. Пусть в упругой втулке имеется прямолинейная щель переменной ширины $h(x)$ и длиной $2l_1$ (рис. 1). Отнесем втулку фрикционной пары к полярной системе координат $r\theta$, выбрав начало координат в центре концентрических окружностей L, L_0 с радиусами R и R_0 соответственно (рис. 1).

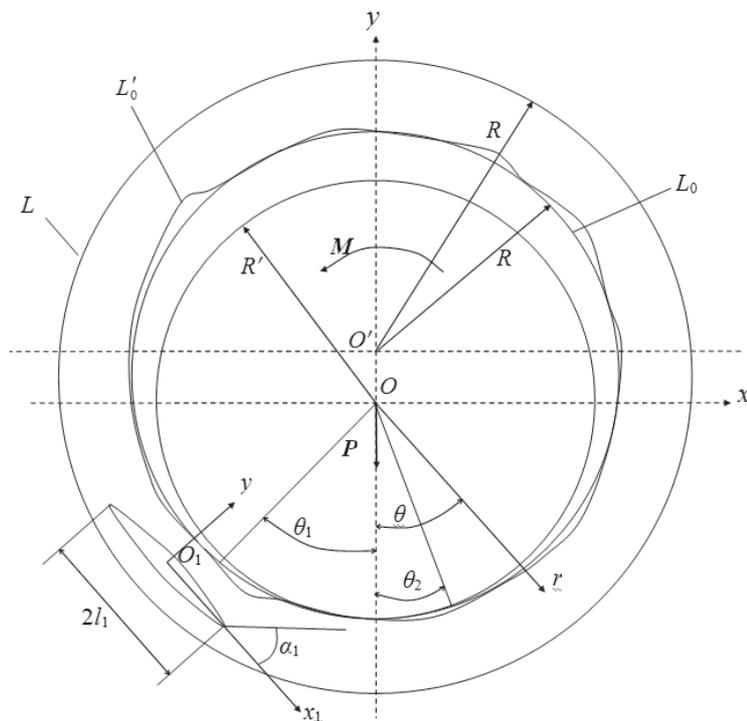


Рис. 1. Расчетная схема задачи механики разрушения для втулки фрикционной пары

Будем считать, что внутренний контур втулки и наружный контур плунжера близки к круговому. Представим границу внутреннего контура втулки L_0'' в виде $r = \rho(\theta) : \rho = R_0 + \varepsilon H(\theta)$, где $\varepsilon = R_{\max}/R_0$ — малый параметр; R_{\max} — наибольшая высота неровности поверхности трения. С помощью профилограмм обработанной поверхности втулки находятся коэффициенты ряда Фурье для функции $H(\theta)$, описывающие каждый внутренний профиль втулки:

$$H(\theta) = \sum_{k=0}^n (a_k^0 \cos k\theta + b_k^0 \sin k\theta).$$

Внешний контур плунжера близок к круговому и может быть представлен в виде

$$\rho_1(\theta) = R' + \varepsilon H_1(\theta), \quad H_1(\theta) = \sum_{k=0}^n (a_k^1 \cos k\theta + b_k^1 \sin k\theta).$$

Считается, что износ втулки и плунжера носит абразивный характер.

В центре прямолинейной щели разметим начало локальной системы координат $x_1O_1y_1$, ось x_1 которой совпадает с линией щели и образует угол α_1 с осью x (см. рис. 1). Принято, что берега



щели свободны от внешних нагрузок. Условие, связывающее перемещения втулки и плунжера, имеет вид [1, 2]:

$$v_1 + v_2 = \delta(\theta) \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2). \quad (1)$$

Здесь $\delta(\theta)$ — осадка точек поверхности втулки и плунжера, определяемая формой внутренней поверхности втулки и плунжера, а также величиной прижимающей силы P ; $(\theta_2 - \theta_1)$ — величина угла (площадки) контакта.

В зоне контакта, кроме контактных давлений, действует касательное напряжение $\tau_{r\theta}$, связанное с контактным давлением $p(\theta, t)$ по закону Амонтона – Кулона:

$$\tau_{r\theta} = fp(\theta, t),$$

где f — коэффициент трения пары «втулка – плунжер».

Касательные усилия (силы трения) $\tau_{r\theta}(\theta, t)$ способствуют тепловыделению в зоне контакта. Общее количество тепла в единицу времени пропорционально мощности сил трения, а количество тепла, выделяемое в точке зоны контакта с координатой θ , будет равно

$$Q(\theta, t) = Vfp(\theta, t),$$

где V — средняя за период скорость перемещений плунжера.

Общее количество тепла $Q(\theta, t)$ будет расходоваться следующим образом: поток тепла во втулку $Q_b(\theta, t)$ и аналогичный поток $Q_1(\theta, t)$ тепла на повышение температуры плунжера, т. е. $Q = Q_b + Q_1$.

Для перемещений точек поверхности трения втулки имеем $v_1 = v_{1e} + v_{1r} + v_{1w}$, где v_{1e} — термоупругие перемещения точек контактной поверхности втулки; v_{1r}, v_{1w} — перемещения, вызванные смятием микровыступов и износом поверхности втулки соответственно. Аналогично для перемещений контактной поверхности плунжера имеем $v_2 = v_{2e} + v_{2r} + v_{2w}$.

Скорость изменения перемещений поверхности при износе втулки и плунжера будет равна [1, 2]

$$\frac{dv_{kw}}{dt} = K^{(k)}p(\theta, t) \quad (k = 1, 2), \quad (2)$$

где $K^{(k)}$ — коэффициенты изнашивания материала втулки и плунжера ($k = 1, 2$) соответственно.

Так как частота движения плунжера достаточно велика, рассматриваем задачу как стационарную. В этом случае температура втулки (r, θ) удовлетворяет дифференциальному уравнению теории теплопроводности $\Delta T = 0$ и граничным условиям

$$\begin{aligned} \text{при } r = R \quad A_{T1}\lambda \frac{\partial T}{\partial n} - A_{T2}\alpha_1^*(T - T_c) &= -Q_*(\theta), \\ \text{при } r = R_0 \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_2(T - T_c) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности втулки, Δ — оператор Лапласа, α_1^* — коэффициент теплоотдачи с внутренней поверхности втулки, α_2 — коэффициент теплоотдачи с наружной цилиндрической поверхности втулки с внешней средой с температурой T_c , A_{T1} — теплопоглощающая поверхность, A_{T2} — охлаждающая поверхность, Q_* — часть количества тепла, выделившегося при трении, и приходящаяся на нагрев втулки, причем на площадке контакта $Q_* = Q_b$, а вне площадки $Q_* = 0$, n, t — натуральные координаты.

Для определения перемещений v_1 и v_{1r} необходимо решить задачу термоупругости для втулки при следующих условиях:

при $r = \rho(\theta)$ на площадке контакта $\sigma_n = -p(\theta)$, $\tau_{nt} = -fp(\theta)$, вне площадки контакта $\sigma_n = 0$, $\tau_{nt} = 0$;

при $r = R_0$ $v_r - iv_\theta = g(\theta)$, на берегах щели $\sigma_{y1} = 0$, $\tau_{x_1y_1} = 0$.

Здесь $\sigma_n, \tau_{nt}, \sigma_{y1}, \tau_{x_1y_1}$ — компоненты тензора напряжений, v_r, v_θ — соответственно радиальная и касательная составляющие вектора перемещений контура L , $g(\theta)$ — искомая функция перемещений точек наружного контура L втулки, $i^2 = -1$.

Аналогично ставится задача термоупругости для определения перемещений v_2 и v_{2r} контактной поверхности плунжера

$$\Delta T_1 = 0,$$



при $r = \rho_1(\theta)$ на площадке контакта $\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = -Q_1(\theta)$, вне площадки контакта $\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} + \alpha_1^* T_1 = 0$;
 при $r = \rho_1(\theta)$ на площадке контакта $\sigma_n = -p(\theta)$, $\tau_{nt} = -fp(\theta)$, вне площадки контакта $\sigma_n = 0$,
 $\tau_{nt} = 0$.

Контактное давление $p(\theta)$ заранее неизвестно и подлежит определению в процессе решения задачи механики контактного разрушения. Величины θ_1 и θ_2 , являющиеся концами участка соприкосновения плунжера с втулкой, неизвестны. Для их определения используем условие [12], где давление $p(\theta)$ непрерывно переходит в нуль, когда точка θ выходит за участок соприкосновения

$$p(\theta_1) = 0, \quad (\theta_2) = 0. \quad (3)$$

Для нахождения искомой функции $g(\theta)$ перемещений точек внешнего контура L втулки необходимо постановку задачи дополнить условием (критерием) определения функции $g(\theta)$. В качестве такого условия определения функции перемещений точек контура L (функции $g(\theta)$) принимаем, что в процессе работы фрикционной пары у вершин щели должны появляться концевые зоны, берега которых смыкаются, т. е. входят в контакт. Смыкание берегов щели в концевых зонах, примыкающих к вершинам щели, сдерживает развитие щели и тем самым задерживает процесс разрушения втулки фрикционной пары.

Таким образом, требуется определить функцию перемещений точек внешнего контура L втулки (функцию $g(\theta)$) так, чтобы созданное в процессе работы фрикционной пары напряженно-деформированное поле обеспечивало бы смыкание берегов щели в концевых зонах, примыкающих к вершинам щели. В концевых зонах, где происходит смыкание берегов щели, раскрытие щели должно обращаться в нуль

$$(u_1^+ - u_1^-) - i(v_1^+ - v_1^-) = -h(x). \quad (4)$$

Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию $g(\theta)$ перемещений точек внешнего контура L втулки.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Температуру, напряжения и перемещения во втулке и плунжере ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε степени выше первой. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской термоупругости. Значения температуры, компонент тензора напряжений при $r = \rho(\theta)$ (аналогично и при $r = \rho_1(\theta)$) получим, разлагая в ряд выражения для температуры, напряжений и перемещений в окрестности $r = R_0$. Используя метод возмущений с учетом сказанного, приходим к последовательности граничных условий для задач плоской теории термоупругости для втулки:

для нулевого приближения

$$\begin{aligned} A_{T1} \lambda \frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} - A_{T2} \alpha_1^* t^{(0)} &= -Q_*^{(0)}(\theta) \quad \text{при } r = R_0 \\ \lambda \frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} + \alpha_2 t^{(0)} &= 0 \quad \text{при } r = R, \\ \sigma_r^{(0)} &= -p^{(0)}(\theta), \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = -fp^{(0)}(\theta) \quad \text{на площадке контакта при } r = R_0, \\ \sigma_r^{(0)} &= 0, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0 \quad \text{вне площадки контакта,} \\ v_r^{(0)} - i v_\theta^{(0)} &= g^{(0)}(\theta) \quad \text{при } r = R, \\ \sigma_{y_1}^{(0)} &= 0, \quad \tau_{x_1 y_1}^{(0)} = 0 \quad \text{на берегах щели;} \end{aligned} \quad (5)$$

для первого приближения

$$\begin{aligned} A_{T1} \lambda \frac{\partial t^{(1)}}{\partial r} - A_{T2} \alpha_1^* t^{(1)} &= -Q_*^{(1)}(\theta) \quad \text{при } r = R_0, \\ \lambda \frac{\partial t^{(1)}}{\partial r} + \alpha_2 t^{(1)} &= 0 \quad \text{при } r = R, \\ \sigma_r^{(1)} &= N - p^{(1)}(\theta), \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T_t - fp^{(1)}(\theta) \quad \text{на площадке контакта при } r = R_0, \\ \sigma_r^{(1)} &= N, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T_t \quad \text{вне площадки контакта,} \end{aligned} \quad (7)$$



$$v_r^{(1)} - iv_\theta^{(1)} = g^{(1)}(\theta) \quad \text{при } r = R,$$

$$\sigma_{y_1}^{(1)} = 0, \quad \tau_{x_1 y_1}^{(1)} = 0 \quad \text{на берегах щели.}$$

Здесь

$$Q_*^{(1)}(\theta) = -Q_b^{(1)}(\theta) + \left[A_{T1} \lambda \frac{\partial^2 t^{(0)}}{\partial r^2} - A_{T2} \alpha_1^* \frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} \right] H(\theta),$$

$$N = -H(\theta) \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta}^{(0)} \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta} \quad \text{при } r = R_0,$$

$$T_t = \left(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} \right) \frac{1}{R_0} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta) \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r},$$

$t = T - T_c$ — избыточная температура для втулки.

Аналогично можно записать граничные условия в каждом приближении для плунжера.

Дополнительные уравнения (4) принимают вид в нулевом приближении

$$(u_1^{0+}(x_1, 0) - u_1^{0-}(x_1, 0)) - i(v_1^{0+}(x_1, 0) - v_1^{0-}(x_1, 0)) = -h(x); \quad (8)$$

в первом приближении

$$(u_1^{1+}(x_1, 0) - u_1^{1-}(x_1, 0)) - i(v_1^{1+}(x_1, 0) - v_1^{1-}(x_1, 0)) = 0. \quad (9)$$

Перейдем к построению решения задачи в нулевом приближении.

Решение краевых задач теории теплопроводности в каждом приближении ищутся методом разделения переменных. Распределение избыточной температуры $t = t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)}$ для втулки находим в следующем виде:

$$t^{(0)} = C_{10} + C_{20} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{10}^{(k)} r^k + C_{20}^{(k)} r^{-k} \right) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{10}^{(k)} r^k + A_{20}^{(k)} r^{-k} \right) \sin k\theta,$$

$$t^{(1)} = C_{11} + C_{21} \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{11}^{(k)} r^k + C_{21}^{(k)} r^{-k} \right) \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{11}^{(k)} r^k + A_{21}^{(k)} r^{-k} \right) \sin k\theta.$$

Постоянные $C_{10}, C_{20}, C_{10}^{(k)}, C_{20}^{(k)}, A_{10}^{(k)}, A_{20}^{(k)}$ определяются из граничных условий (5) задачи теории теплопроводности в нулевом приближении. Соответственно коэффициенты $C_{11}, C_{21}, C_{11}^{(k)}, C_{21}^{(k)}, A_{11}^{(k)}, A_{21}^{(k)}$ находятся из краевых условий (7) задачи теории теплопроводности в первом приближении. Из-за громоздкости соответствующие формулы не приводятся.

Для решения задачи термоупругости в каждом приближении используем термоупругий потенциал перемещений [13]. В рассматриваемой задаче термоупругий потенциал перемещений F для втулки в нулевом и первом приближениях определяется решением дифференциальных уравнений:

$$\Delta F^{(0)} = \beta t^{(0)}, \quad \Delta F^{(1)} = \beta t^{(1)}, \quad \beta = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha. \quad (10)$$

Здесь α — коэффициент линейного температурного расширения.

Ищем решения уравнения (10) в виде

$$F^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_n^{(0)}(r) \cos n\theta + f_n^{(0)*}(r) \sin n\theta \right),$$

$$F^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_n^{(1)}(r) \cos n\theta + f_n^{(1)*}(r) \sin n\theta \right).$$

Для функций $f_n^{(0)}(r), f_n^{(0)*}(r)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения, частные решения которых ищем методом вариации постоянных.

После определения термоупругого потенциала перемещений в нулевом приближении для втулки с помощью известных формул [13] вычисляем соответствующие термоупругому потенциалу напряжения $\bar{\sigma}_r^{(0)}, \bar{\sigma}_\theta^{(0)}, \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)}$ и перемещения $\bar{v}_r^{(0)}, \bar{v}_\theta^{(0)}$ во втулке.



Найденные напряжения и перемещения для втулки не будут удовлетворять краевым условиям (6). Необходимо для втулки найти второе напряженно-деформированное состояние $\bar{\sigma}_r^{(0)}$, $\bar{\sigma}_\theta^{(0)}$, $\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)}$ и $\bar{v}_r^{(0)}$, $\bar{v}_\theta^{(0)}$ такое, чтобы выполнялись граничные условия (6).

Следовательно, для определения второго напряженно-деформированного состояния имеем граничные условия:

$$\bar{\sigma}_r^{(0)} = -p^{(0)}(\theta) - \bar{\sigma}_r^{(0)}, \quad \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} = -fp^{(0)}(\theta) - \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} \quad (11)$$

на площадке контакта при $r = R_0$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r^{(0)} &= -\bar{\sigma}_r^{(0)}, \quad \bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} = -\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)} \quad \text{вне площадки контакта,} \\ \bar{v}_r^{(0)} - i\bar{v}_\theta^{(0)} &= g^{(0)}(\theta) - \left(\bar{v}_r^{(0)} - i\bar{v}_\theta^{(0)} \right) \quad \text{при } r = R, \\ \bar{\sigma}_{y_1}^{(0)} &= -\bar{\sigma}_{y_1}^{(0)}, \quad \bar{\tau}_{x_1y_1}^{(0)} = -\bar{\tau}_{x_1y_1}^{(0)} \quad \text{на берегах щели.} \end{aligned} \quad (12)$$

Краевые условия задачи (11)–(12) с помощью формул Колосова – Мусхелишвили [12] можно записать в виде граничной задачи для отыскания комплексных потенциалов $\Phi^{(0)}(z)$, $\Psi^{(0)}(z)$ для втулки. Комплексные потенциалы ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(z) &= \Phi_1^{(0)}(z) + \Phi_2^{(0)}(z), \quad \Psi^{(0)}(z) = \Psi_1^{(0)}(z) + \Psi_2^{(0)}(z), \\ \Phi_1^{(0)}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi_1^{(0)}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \\ \Phi_2^{(0)}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \frac{g_1^0(t) dt}{t - z_1}, \\ \Psi_2^{(0)}(z) &= \frac{1}{2\pi} e^{-2i\alpha_1} \int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[\frac{g_1^0(t)}{t - z_1} - \frac{\bar{T}_1 e^{i\alpha_1}}{(t - z_1)^2} g_1^0(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $T_1 = te^{i\alpha_1} + z_1^0$, $z_1 = e^{-i\alpha_1} (z - z_1^0)$, $g_1^0(t)$ – искомая функция, характеризующая скачок перемещений в нулевом приближении при переходе через линию щели.

$$g_1(x) = \frac{2G}{i(1 + \kappa)} \frac{\partial}{\partial x_1} [u_1^{0+}(x_1, 0) - u_1^{0-}(x_1, 0) + i(v_1^{0+}(x_1, 0) - v_1^{0-}(x_1, 0))],$$

$$\kappa = 3 - 4\mu.$$

Представим граничную задачу для отыскания комплексных потенциалов на круговых границах в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(0)}(\tau_0) + \overline{\Phi_1^{(0)}(\tau_0)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau}_0 \Phi_1^{(0)}(\tau_0) + \Psi_1^{(0)}(\tau_0)] &= X^{(0)}(\theta) - (f_1 - if_2), \\ \Phi_1^{(0)}(\tau) - \kappa \overline{\Phi_1^{(0)}(\tau)} - e^{2i\theta} [\bar{\tau} \Phi_1^{(0)}(\tau) + \Psi_1^{(0)}(\tau)] &= g^{(0)}(\theta) - (f_3 - if_4), \\ \tau &= R \exp(i\theta) \quad \tau_0 = R_0 \exp(i\theta), \\ X^{(0)}(\theta) &= \begin{cases} -(1 - if)p^{(0)}(\theta) - (\bar{\sigma}_r^{(0)} - i\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)}) & \text{на площадке контакта,} \\ -(\bar{\sigma}_r^{(0)} - i\bar{\tau}_{r\theta}^{(0)}) & \text{вне площадки контакта.} \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения краевой задачи (14) относительно потенциалов $\Phi_1^{(0)}(z)$ и $\Psi_1^{(0)}(z)$ используется метод степенных рядов. Для этого правые части условий (14) разлагаются в ряды Фурье

$$\begin{aligned} X^{(0)}(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(0)} e^{ik\theta}, \\ -(f_1 - if_2) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k^{(0)} e^{ik\theta}, \quad -(f_3 - if_4) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^{(0)} e^{ik\theta}. \end{aligned}$$

Коэффициенты $D_k^{(0)}$ и $F_k^{(0)}$ выражаются в виде интегралов от искомой функции $g_1^{(0)}$. Для их определения использовали теорию вычетов. После некоторых преобразований придем к бесконечной



линейной алгебраической системе относительно коэффициентов a_k и b_k . В эту систему входят коэффициенты разложения функции $g^{(0)}(\theta)$ перемещений точек внешнего контура L втулки в нулевом приближении

$$g^{(0)' }(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^0 e^{ik\theta} = a_0^{*(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^{*(0)} \cos k\theta + b_k^{*(0)} \sin k\theta \right),$$

контактного давления

$$p^{(0)}(\theta) = \alpha_0^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^0 \cos k\theta + \beta_k^0 \sin k\theta),$$

а также интегралы от искомой функции $g_1^{(0)}(t)$.

Удовлетворяя функциями (13) граничным условиям на берегах щели (12), получим сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1^{(0)}(x_1)$:

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} \left[R(t, x_1) g_1^0(t) + S(t, x_1) \overline{g_1^0(t)} \right] dt = \pi f_1(x_1), \tag{15}$$

$$f_1(x_1) = - \left[\Phi_1^{(0)}(x_1) + \overline{\Phi_1^{(0)}(x_1)} + x_1 \overline{\Phi_1^{(0)' } (x_1)} + \overline{\Psi_1^{(0)}(x_1)} \right] - \left(\overline{\sigma}_{y_1}^{(0)} - \overline{\tau}_{x_1 y_1}^{(0)} \right).$$

Переменные x_1, t, ℓ_1 — безразмерные величины, отнесенные к R_0 ; $R(t, x_1)$ и $S(t, x_1)$ определяются по известным соотношениям [14, формулы (VI.61)].

К сингулярному интегральному уравнению для внутренней щели следует добавить условие однозначности перемещений при обходе контура щели

$$\int_{-\ell_1}^{\ell_1} g_1^0(t) dt = 0. \tag{16}$$

С помощью процедуры алгебраизации [14–16] комплексное сингулярное интегральное уравнение (15) при отмеченном выше условии (16) сводится к системе M комплексных алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g_1^0(t_m) = v_1^0(t_m) - iu_1^0(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$)

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \ell_1 \left[g_1^0(t_m) R(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) + \overline{g_1^0(t_m)} S(\ell_1 t_m, \ell_1 x_r) \right] = f_1(x_r), \tag{17}$$

$$\sum_{m=1}^M g_1^0(t_m) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, M - 1,$$

$$t_m = \cos \frac{2m - 1}{2M} \pi, \quad x_r = \cos \frac{\pi r}{M}.$$

Если в (17) перейти к комплексно сопряженным значениям, получим еще M алгебраических уравнений. В правые части системы (17) входят неизвестные значения коэффициентов разложения функций перемещений точек внешнего контура L втулки и контактного давления $p^{(0)}(\theta)$.

С помощью комплексных потенциалов (13), формул Колосова – Мухелишвили и интегрирования кинетического уравнения изнашивания (2) материала втулки находится радиальное перемещение v_1^0 контактной поверхности втулки в нулевом приближении.

Аналогично рассматривается задача термоупругости для плунжера. С использованием решения задачи термоупругости для плунжера в нулевом приближении и кинетического уравнения изнашивания материала плунжера находится радиальное перемещение v_2^0 контактной поверхности плунжера в нулевом приближении. Найденные величины v_1^0 и v_2^0 подставляются в основное контактное уравнение (1) в нулевом приближении.

Для алгебраизации основного контактного уравнения неизвестные функции контактного давления в нулевом приближении ищутся в виде разложений

$$p^{(0)}(\theta, t) = p_0^0(\theta) + t p_1^0(\theta) + \dots, \tag{18}$$

$$p_s^0(\theta) = \alpha_s^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^s \cos k\theta + \beta_k^s \sin k\theta), \quad s = 0, 1, \dots$$



Подставляя соотношения (18) в основное контактное уравнение в нулевом приближении, получим функциональные уравнения для последовательного определения $p_0^0(\theta)$, $p_1^0(\theta)$ и т.д. Для построения алгебраической системы относительно α_k , β_k приравниваем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой частях функционального уравнения контактной задачи. В результате получим бесконечную алгебраическую систему относительно α_k^0 ($k = 0, 1, 2, \dots$), β_k^0 ($k = 1, 2, \dots$) и α_k^1 , β_k^1 и т.д. Из-за неизвестных величин θ_1 и θ_2 система уравнений оказывается нелинейной. Для определения величин θ_1 и θ_2 ($\theta_1 = \theta_1^0 + \varepsilon\theta_1^1 + \dots$; $\theta_2 = \theta_2^0 + \varepsilon\theta_2^1 + \dots$) имеем условие (3). Эти уравнения можно представить в виде

$$p^{(0)}(\theta_1^0) = 0, \quad p^{(0)}(\theta_2^0) = 0 \quad \text{для нулевого приближения,} \quad (19)$$

$$p^{(1)}(\theta_1^1) = 0, \quad p^{(1)}(\theta_2^1) = 0 \quad \text{для первого приближения.} \quad (20)$$

В правые части бесконечных алгебраических систем относительно α_k , β_k входят интегралы от неизвестной функции $g_1^0(x_k)$, а также неизвестные значения коэффициентов разложения функции $g^0(\theta)$ перемещений точек внешнего контура L втулки в нулевом приближении. Таким образом, бесконечные алгебраические системы относительно α_k , β_k и конечная система относительно $g_1^0(x_k)$ связаны между собой и их надо решать совместно.

Полученные системы уравнений относительно a_k , b_k , α_k , β_k , $g_1^0(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) позволяют при заданной функции перемещений точек внешнего контура L втулки найти в нулевом приближении напряженно-деформированное состояние втулки фрикционной пары при наличии щели во втулке, контактное давление, коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин щели, распределение температуры, а также абразивный износ деталей фрикционной пары. В поставленной задаче оптимального проектирования требуется определить функцию перемещений точек внешнего контура L втулки. Коэффициенты A_k^0 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) подлежат определению. Следовательно, полученная объединенная алгебраическая система не является пока замкнутой.

Для построения недостающих уравнений в нулевом приближении требуем выполнения условий (8) в узловых точках, принадлежащих концевым зонам, в которых должно происходить смыкание берегов щели. В рассматриваемом случае вместо (8) удобно использовать выражение для производной раскрытия берегов щели. Таким образом, недостающие уравнения в нулевом приближении получаются в виде

$$g_1^0(t_k) = -\frac{2G}{1 + \kappa} h'(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, M_1, \quad (21)$$

где M_1 — число узловых точек, принадлежащих концевым зонам.

3. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Совместное решение полученных систем уравнений позволяет найти приближенные значения коэффициентов a_k , b_k , α_k , β_k , значений функций раскрытия берегов щели $v_1^0(t_m)$, $u_1^0(t_m)$ и коэффициентов функции перемещений точек внешнего контура L втулки A_k^0 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M_1$). Так как размеры концевых зон мы задаем заранее, то система (21) уравнений оказывается линейной. Объединенная же система алгебраических уравнений из-за неизвестных величин θ_1^0 и θ_2^0 будет нелинейной. Для ее решения используется методы редукции и последовательных приближений, суть которых состоит в следующем. Решаем объединенную алгебраическую систему при некоторых определенных значениях θ_1^{0*} и θ_2^{0*} относительно остальных неизвестных (были перечислены выше). Остальные неизвестные входят в объединенную систему линейным образом. Значения θ_1^{0*} и θ_2^{0*} и найденные величины остальных неизвестных подставляются в неиспользованные уравнения (19). Взятые значения θ_1^{0*} и θ_2^{0*} и соответствующие им значения остальных неизвестных не будут, вообще говоря, удовлетворять уравнениям (19). Поэтому, подбирая значения параметров θ_1^0 и θ_2^0 , будем многократно повторять вычисления до тех пор, пока последние уравнения системы (19), (20) не будут удовлетворяться с заданной точностью.

После определения искомых величин нулевого приближения можно перейти к построению решения обратной задачи в первом приближении. На основании полученного решения при R_0 определяются функции N и T_t . Краевые условия (7) записываются в виде граничной задачи для отыскания комплексных потенциалов $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$. Комплексные потенциалы $\Phi^{(1)}(z)$ и $\Psi^{(1)}(z)$ ищем аналогично как (13) с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения такой же, как и в нулевом приближении. Полученное комплексное сингулярное интегральное уравнение относительно $g_1^1(t)$ при



дополнительном условии типа (16) с помощью процедуры алгебраизации сводится к конечной системе M алгебраических уравнений для определения M неизвестных $g_1^1(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$).

В правые части этой системы входят коэффициенты разложения функции $g^{(1)}(\theta)$ перемещений точек внешнего контура L втулки в первом приближении

$$g^{(1)'}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^1 e^{ik\theta} = a_0^{*(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{*(1)} \cos k\theta + b_k^{*(1)} \sin k\theta)$$

контактного давления $p^{(1)}(\theta) = \alpha_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^1 \cos k\theta + \beta_k^1 \sin k\theta)$, а также интегралы от функции $g_1^1(t)$.

Построение недостающих уравнений для определения неизвестных контактных напряжений осуществляется подобно нулевому приближению. Аналогично решается задача термоупругости для плунжера в первом приближении. Алгебраизация основного уравнения контактной задачи в первом приближении проводится таким же образом, как и в нулевом приближении. Для этого искомые функции контактного давления представляются в виде

$$p^{(1)}(\theta) = p_0^1(\theta) + tp_0^1(\theta) + \dots,$$

$$p_0^1(\theta) = \alpha_{0,0}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k,0}^1 \cos k\theta + \beta_{k,0}^1 \sin k\theta), \quad p_1^1(\theta) = \alpha_{0,1}^1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{k,1}^1 \cos k\theta + \beta_{k,1}^1 \sin k\theta).$$

В результате получим бесконечные линейные алгебраические системы относительно $\alpha_{0,0}^1, \alpha_{k,0}^1, \beta_{k,0}^1$ ($k = 1, 2, \dots$) и $\alpha_{0,1}^1, \alpha_{k,1}^1, \beta_{k,1}^1$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Из-за неизвестных величин θ_1^1 и θ_2^1 система уравнений оказывается нелинейной.

Полученные системы уравнений относительно $a_k^1, b_k^1, \alpha_k^1, \beta_k^1, g_1^1(t_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M$) позволяют при заданной функции перемещений точек внешнего контура L втулки найти в первом приближении напряженно-деформированное состояние втулки фрикционной пары при наличии щели во втулке, контактное давление, коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин щели, распределение температуры, а также абразивный износ втулки и плунжера.

В рассматриваемой задаче оптимального проектирования коэффициенты A_k^1 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) функции перемещений точек внешнего контура L втулки подлежат определению. Для построения недостающих уравнений в первом приближении требуем выполнения дополнительных условия (9) в узловых точках, принадлежащих конечным зонам, в которых происходит смыкание берегов щели. Как и в нулевом приближении, вместо (9) удобно использовать соотношение для производной раскрытия берегов щели. Следовательно, недостающие уравнения в первом приближении имеем в следующем виде:

$$g_1^1(t_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M_1. \quad (22)$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ АНАЛИЗ

Из-за неизвестных концов контактной площадки (величин θ_1 и θ_2) объединенная система уравнений оказывается нелинейной. Построенная объединенная система уравнений является замкнутой и позволяет при заданных функциях $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$ численными расчетами найти оптимальную функцию перемещений точек внешнего контура L втулки, контактное давление, напряженно-деформированное состояние, температуру и износ втулки и плунжера фрикционной пары.

Функции $H(\theta)$ и $H_1(\theta)$, описывающие шероховатости внутренней поверхности втулки и плунжера, рассматривались [17–20] как детермированные совокупности неровностей профиля контуров и моделировались стационарной случайной функцией с нулевым средним значением и известной дисперсией.

В рассматриваемой задаче имеется много свободных параметров. Это различные теплофизические и механические характеристики материалов, геометрические размеры втулки, скорость движения плунжера. Результаты расчета контактного давления для втулки бурового насоса в зависимости от



значения полярного угла $\theta' = \theta - \theta_+$ ($\theta_0 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$, $\theta_+ = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}$) представлены в виде графиков на рис. 2 при скорости плунжера $V = 0.4$ м/с для случая прямолинейной щели при $\alpha_1 = 60^\circ$; кривая 1 соответствует шероховатому контуру, а кривая 2 — гладкому. В качестве параметров были приняты: $2R_0 = 57$ мм, $2R = 73$ мм, $2R'_0 = 56.7$ мм, $f = 0.2$, $E = 1.8 \cdot 10^5$ МПа, $E_1 = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.25$, $\nu_1 = 0.3$, $K^{(1)} = 2 \cdot 10^{-8}$, $K^{(2)} = 2.5 \cdot 10^{-9}$, $\Delta = R_0 - R'_0 = 0.15$ мм, ширина щели меняется по параболическому закону.

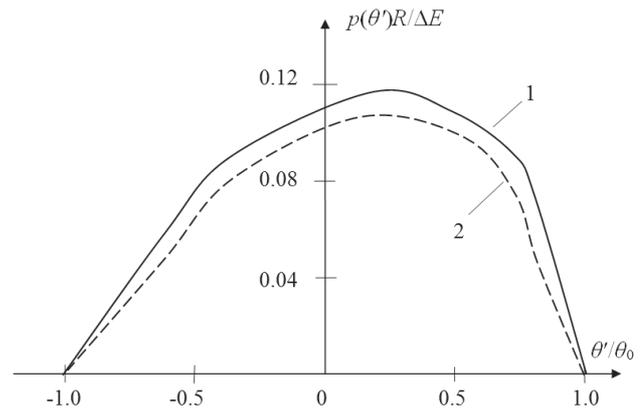


Рис. 2. Распределение контактного давления в зависимости от значения полярного угла θ'

Максимальные значения контактного давления, как правило, находятся в средней части контактной поверхности в зависимости от угла обхвата и коэффициента трения. Наличие сил трения в контактной зоне приводит к смещению графика распределения контактного давления в сторону, противоположную действию момента.

Результаты расчетов функции перемещений точек внешнего контура L втулки приведены в таблице.

a_0^*	a_1^*	a_2^*	a_3^*	a_4^*	a_5^*	a_6^*	a_7^*	a_8^*	a_9^*
0.1152	0.0897	0.0754	0.0671	0.0582	0.0497	0.0412	0.0317	0.0291	0.0213
	b_1^*	b_2^*	b_3^*	b_4^*	b_5^*	b_6^*	b_7^*	b_8^*	b_9^*
	0.0825	0.0713	0.0589	0.0516	0.0432	0.0367	0.0281	0.0214	0.0147

Примечание. $V = 0.4$ м/с, коэффициенты даны в мм.

Меняя значения параметров z_1^0 и α_1 , характеризующих положение щели, можно исследовать различные случаи расположения щели во втулке. Если же щель одним концом выходит на внутреннюю поверхность втулки, то равенство (16) заменяется условием, выражающим конечность напряжений у края щели.

Там, где берега щели вошли в контакт, т. е. в концевых областях, возникнут нормальные $q_{y_1}(x_1)$ и касательные $q_{x_1 y_1}(x_1)$ контактные напряжения. Для их определения при известной уже функции перемещений $g(\theta)$ точек внешнего контура L втулки необходимо вновь решить задачу механики разрушения для щели с частично контактирующими берегами. Метод решения таких задач для втулки фрикционной пары дан в [21].

5. ВЫВОДЫ

Практика эксплуатации фрикционных пар показывает, что на стадии проектирования новых конструкций подвижных сопряжений необходимо учитывать случаи, когда в отдельных узлах трения (втулка) могут возникнуть щели. Полученные в статье основные разрешающие уравнения позволяют при заданной функции перемещений точек внешнего контура втулки численными расчетами путем нахождения коэффициентов интенсивности напряжений прогнозировать рост имеющейся щели во втулке, установить допустимый размер дефекта и максимальные значения рабочих нагрузок, обеспечивающих достаточный запас надежности. Решение обратной задачи по определению функции перемещений точек внешнего контура втулки дает возможность на стадии проектирования устанавливать оптимальные геометрические параметры элементов подвижных сопряжений, обеспечивающие повышение несущей способности фрикционной пары.

Библиографический список

1. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. М. : Машиностроение, 1988. 256 с.
2. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М. : Наука, 2001. 478 с.
3. Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М. Оптимальное проектирование контактной пары цилиндр – плунжер // Трение и износ. 2004. Т. 25, № 5. С. 466–473.



4. Мирсалимов В. М. Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра // Изв. РАН МТТ. 2009. № 1. С. 165–173.
5. Мирсалимов В. М. Минимизация теплового состояния втулки контактной пары // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 5. С. 88–95.
6. Мирсалимов В. М. Минимизация напряженного состояния втулки контактной пары // Трение и износ. 2006. Т. 27, № 4. С. 388–393.
7. Мирсалимов В. М. Обратная износоконтактная задача для фрикционной пары // Проблемы машин и надежности машин. 2008. № 1. С. 62–69.
8. Мирсалимов В. М. Обратная задача механики разрушения для диска, посаженного на вращающийся вал // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 4. С. 201–209.
9. Mirsalimov V. M., Veliyev F. E. Inverse problem of failure mechanics for a drawing die strengthened with a holder // Acta Polytechnica Hungarica. 2013. Vol. 10. P. 121–138. DOI: 10.12700/APH.10.01.2013.1.7.
10. Гаджиев Г. Х., Мирсалимов В. М. Минимизация износа внутренней поверхности втулки составного цилиндра контактной пары // Трение и износ. 2004. Т. 25, № 3. С. 231–237.
11. Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Минимизация контактного давления для фрикционной пары «втулка – вал» // Трение и износ. 2015. Т. 36, № 5. С. 529–535.
12. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1966. 707 с.
13. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М. : Физматгиз, 1963. 252 с.
14. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев : Наук. думка, 1976. 443 с.
15. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. М. : Наука, 1987. 256 с.
16. Ladopoulos E. G. Singular integral equations : Linear and non-linear theory and its Applications in Science and Engineering. Berlin : Springer-Verlag, 2000. 556 p. DOI: 10.1007/978-3-662-04291-5.
17. Thomas T. R. Rough surface. L. : Longman, 1982. 261 p.
18. Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology : multiple asperity contact // Tribology Letters. 1998. Vol. 4, iss. 1. P. 1–35. DOI: 10.1023/A:1019186601445.
19. Carbone G., Bottiglione F. Contact mechanics of rough surfaces : a comparison between theories // Meccanica. 2011. Vol. 46, iss. 3. P. 557–565. DOI: 10.1007/s11012-010-9315-y.
20. Czifra A., Horvath S. Complex microtopography analysis in sliding friction of steel-ferodo material pair // Meccanica. 2011. Vol. 46, iss. 3. P. 609–616. DOI: 10.1007/s11012-010-9422-9.
21. Мирсалимов В. М. Моделирование закрытия трещины со связями между берегами во втулке контактной пары // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 78–92.

Образец для цитирования:

Мирсалимов В. М., Ахундова П. Э. Щель переменной ширины во втулке фрикционной пары // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 344–355. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-344-355.

Slot of Variable Width in a Hub of Friction Pair

V. M. Mirsalimov¹, P. E. Akhundova²

¹Vagif M. Mirsalimov, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, 9, B. Vahabzade, Baku, Azerbaijan, AZ1141; Azerbaijan Technical University 25, H. Javid av., Baku, Azerbaijan, AZ1073, vagif.mirsalimov@imm.az

²Parvana E. Akhundova, Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, 9, B. Vahabzade, Baku, Azerbaijan, AZ1141, sopromat_v@mail.ru

Plane problem of fracture mechanics for a hub of a friction pair is studied. It is suggested that near the rough friction surface, the hub has a rectilinear slot of variable width. The slot width is comparable with elastic deformations. A criterion and a method for solving the inverse problem of mechanics of contact fracture on definition of displacement function of the hub external contour points in a friction pair with regard to the temperature drop and irregularities of the contact surface in friction pair components is given. The obtained displacement function of the external contour points of the hub provides the increase of load-bearing capacity of the friction pair hub.

Key words: friction pair, hub, plunger, temperature, rough friction surface, slot, closure of slot faces, function of displacements of external contour of the hub.



References

1. Goryacheva I. G. *Contact mechanics in tribology*. Dordrecht, Kluwer. Acad. Publ., 1998. 346 p. DOI: 10.1007/978-94-015-9048-8 (Russ. ed.: Goryacheva I. G., Dobychin M. N. Kontaktnye zadachi v tribologii. Moscow, Mashinostroenie, 1988, 256 p.)
2. Goryacheva I. G. *Mehanika frikcionnogo vzaimodejstviya* [Mechanics of frictional interaction]. Moscow, Nauka, 2001, 478 p. (in Russian).
3. Gadzhiev G. H., Mirsalimov V. M. Optimal design of the composite cylinder – piston contacting pair. *J. of Friction and Wear*, 2004, vol. 25, no. 5, pp. 466–473.
4. Mirsalimov V. M. Inverse problem of fracture mechanics for a compound cylinder. *Mech. Solids*, 2009, vol. 44, iss. 1, pp. 141–148. DOI : 10.3103/S0025654409010154.
5. Mirsalimov V. M. Minimization of thermal state of contact pair bushing. *Problemy Mashinostroeniya i Nadezhnosti Mashin*, 2006, no. 5, pp. 88–95 (in Russian).
6. Mirsalimov V. M. Minimization of stress state of contact pair bushing. *J. of Friction and Wear*, 2006, vol. 27, no. 4, pp. 388–393.
7. Mirsalimov V. M. An inverse wear contact problem for a friction couple. *J. of Machinery Manufacture and Reliability*, 2008, vol. 37, iss. 1, pp. 53–59. DOI: 10.1007/s12001-008-1011-2.
8. Mirsalimov V. M. Inverse problem of fracture mechanics for a disk fitted onto a rotating shaft. *J. of Applied Mech. and Technical Physics*, 2009, vol. 50, iss. 4, pp. 712–719. DOI: 10.1007/s10808-009-0097-8.
9. Mirsalimov V. M., Veliyev F. E. Inverse problem of failure mechanics for a drawing die strengthened with a holder. *Acta Polytechnica Hungarica*, 2013, vol. 10, no. 1, pp. 121–138. DOI: 10.12700/APH.10.01.2013.1.7.
10. Gadzhiev G. H., Mirsalimov V. M. Minimizing wear of the internal surface of a split cylinder sleeve in a contact pair. *J. of Friction and Wear*, 2004, vol. 25, no. 3, pp. 231–237.
11. Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Minimization of contact pressure for hub–shaft friction pair. *J. of Friction and Wear*, 2015, vol. 36, iss. 5, pp. 404–408. DOI: 10.3103/S1068366615050116.
12. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problem of Mathematical Theory of Elasticity*. Amsterdam, Kluwer, 1977, 732 p.
13. Parkus H. *Instationäre Wärmespannungen*. Wien, Springer-Verlag, 1959, 168 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-5710-7.
14. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshyn A. P. *Raspredelenie naprjazhenij okolo treshhin v platinah i obolochkah* [The stress distribution around cracks in plates and shells]. Kiev, Naukova Dumka, 1976, 443 p. (in Russian)
15. Mirsalimov V. M. *Neodnomernye uprugoplasticheskie zadachi* [Non-one-dimensional elastoplastic problems]. Moscow, Nauka, 1987, 256 p. (in Russian).
16. Ladopoulos E. G. *Singular integral equations: Linear and non-linear theory and its Applications in Science and Engineering*. Berlin, Springer-Verlag, 2000, 556 p. DOI: 10.1007/978-3-662-04291-5.
17. Thomas T. R. *Rough surface*. London, Longman, 1982, 261 p.
18. Bhushan B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: multiple asperity contact. *Tribology Letters*, 1998, vol. 4, iss. 1, pp. 1–35. DOI: 10.1023/A:1019186601445.
19. Carbone G., Bottiglione F. Contact mechanics of rough surfaces : a comparison between theories. *Meccanica*, 2011, vol. 46, iss. 3, pp. 557–565. DOI: 10.1007/s11012-010-9315-y.
20. Czifra A., Horvath S. Complex microtopography analysis in sliding friction of steel-ferodo material pair. *Meccanica*, 2011, vol. 46, iss. 3, pp. 609–616. DOI: 10.1007/s11012-010-9422-9.
21. Mirsalimov V. M. Simulation of bridged crack closure in a contact pair bushing. *Mechanics of Solids*. 2009, vol. 44, iss. 2, pp. 232–243. DOI: 10.3103/S0025654409020083.

Please cite this article in press as:

Mirsalimov V. M., Akhundova P. E. Slot of Variable Width in a Hub of Friction Pair. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 344–355 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-344-355.

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.7

О НАПРАВЛЕННОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ КОЛЛЕКТИВА АВТОМАТОВ БЕЗ КОМПАСА НА ОДНОМЕРНОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКЕ

А. Н. Курганский¹, С. В. Сапунов²

¹Курганский Алексей Николаевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ГУ «Институт прикладной математики и механики», Донецк, kurgansk@iamm.su

²Сапунов Сергей Валерьевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск, Украина, sapunov_sv@yahoo.com

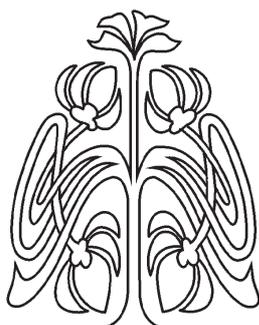
Рассматривается задача сохранения однонаправленного движения коллективом конечных автоматов на одномерной целочисленной решетке. Автоматы не различают вершины среды по их координатным направлениям (т. е. автоматы не имеют компаса). Мы рассматриваем коллективы, состоящие из одного автомата и нескольких камней, расположение которых полностью определяется автоматом. В работе доказано, что автомат с двумя и менее камнями не может сохранять однонаправленного движения на одномерной целочисленной решетке, а автомат с тремя камнями может.

Ключевые слова: коллектив автоматов, лабиринт, однонаправленное движение.

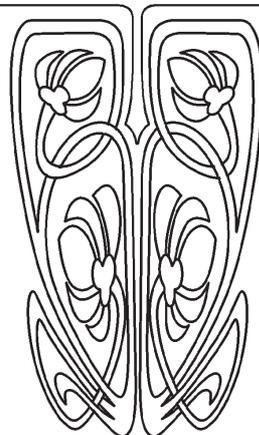
DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-356-365

ВВЕДЕНИЕ

Проблема взаимодействия управляющей и управляемой систем (управляющего автомата и его операционной среды) является центральной проблемой теоретической кибернетики [1–4]. У истоков исследований этой проблематики стояли К. Шеннон (Shannon) [5] и В. М. Глушков [6]. Взаимодействие управляющей системы и среды зачастую представляется как процесс перемещения управляющего автомата по графу (лабиринту) среды [7], что привело к возникновению обширной и интенсивно развивающейся области исследований поведения автоматов в лабиринтах (см. обзоры [8, 9]). Основными задачами для автоматов и лабиринтов являются задачи синтеза автоматов (коллективов автоматов), которые обходят лабиринты из заданного класса, и задачи описания по заданному автомату (коллективу автоматов) всех лабиринтов, которые обходятся этими автоматами. В рамках этого подхода решены задачи обхода лабиринта автоматом и коллективом автоматов, отличия вершин лабиринта друг от друга и лабиринта-эталона от класса лабиринтов. Исследование в этом направлении получили широкий спектр приложений, например в задачах анализа изображений [10–12] и навигации мобильных роботов [13]. Результаты, полученные для автоматов и лабиринтов, опираются на важное допущение — функционирующие в лабиринтах автоматы могут различать направления, т. е. обладают «компасом» [14–17].



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





В настоящей работе рассматриваются коллективы автоматов без компаса, взаимодействующие между собой в среде, представляющей собой одномерную целочисленную решетку. Взаимодействуя со средой, каждый автомат получает на вход информацию о наличии или отсутствии других автоматов в окрестности его текущей вершины, а его выходом является перемещение в одну из наблюдаемых им вершин. Автоматы не различают направление и взаимное расположение этих вершин, но различают занята вершина или нет.

При таком ограничении возможностей автоматов их двигательное поведение значительно усложняется. Например, задача сохранения направления движения в среде является тривиальной для автоматов с компасом, но для автоматов без компаса требует привлечения дополнительных средств и разработки методов их использования. В работе приводятся достаточные и необходимые условия в виде ограничений на свойства автоматов и структуру коллектива, при которых коллектив как цельный, связанный взаимодействием объект, сохраняет постоянное направление перемещения в среде.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В начальный момент времени коллектив автоматов помещается в среду, представляющую собой одномерную целочисленную решетку. Элементы среды далее будем называть ее вершинами, а вершину, в которой находится рассматриваемый автомат, — его текущей вершиной. Каждый автомат наблюдает вершины, координаты которых на единицу отличаются от координат его текущей вершины (соседние вершины). Ни один из автоматов не имеет компаса, т. е. не различает направления в среде и взаимное расположение вершин. Каждый автомат может перемещаться из текущей вершины в соседнюю с ней вершину. Требуется найти необходимые и достаточные условия в виде ограничений на свойства автоматов и структуру коллектива, при которых коллектив как цельный, связанный взаимодействием объект, сохраняет постоянное направление перемещения в среде. В данной работе решена задача сохранения направления движения для коллектива, состоящего из одного активного автомата и автоматов-камней, выполняющих для него роль внешней памяти. Такое представление коллективов в виде автоматов и камней является традиционным для исследований поведения коллективов автоматов в лабиринтах.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Через \mathbb{Z} и \mathbb{N} обозначим множества целых и натуральных чисел (с нулем) и $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Произвольное множество $E \subseteq \mathbb{Z}^n$ назовем n -мерной геометрической средой E . Элементы множества E назовем вершинами среды. Имя вершины есть ее координаты. Две вершины $v = (a_1, \dots, a_n)$ и $v' = (b_1, \dots, b_n)$ назовем соседними, если для единственного $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $|a_i - b_i| = 1$, а для всех остальных i выполняется $a_i = b_i$. Множество всех вершин, соседних с вершиной $v \in E$, назовем окрестностью вершины v .

Положим, что в среде E перемещается конечный автомат A . На вход ему подается информация о текущей вершине и ее окрестности. Выходом автомата является перемещение в вершину соседнюю с текущей, выбранную на основании анализа входа. Если автомат A различает вершины в текущей окрестности по координатам направлений в среде E , то будем называть его автоматом с компасом. В противном случае, если он не использует координатную систему, назовем его автоматом без компаса.

Пусть автомат A в момент времени t находится в вершине $v(t) \in E$. Перемещение автомата будем называть равномерным и направленным, если существует такой период $T \in \mathbb{N}$, что для любого момента времени t выполняется $v(t+T) - v(t) = v(t+2T) - v(t+T)$.

В среде E также будем рассматривать коллектив взаимодействующих автоматов $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_m)$. Каждому автомату A_i на вход, кроме информации о текущей вершине и ее окрестности, подается еще и информация о наличии в вершине других автоматов коллектива \mathcal{A} и их состояниях. Если каждый автомат из коллектива \mathcal{A} является автоматом без компаса, то \mathcal{A} будем называть коллективом автоматов без компаса. Далее рассматриваются только такие коллективы автоматов.

Пусть автомат $A_i \in \mathcal{A}$ в момент времени t находится в вершине $v_i(t) = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$. Координатой коллектива \mathcal{A} в момент времени t будем называть вектор $v_{\mathcal{A}}(t) = (v_1(t) + \dots + v_m(t))/m$. Диаметр коллектива будем называть величину $d_{\mathcal{A}} = \max \{|a_{ik} - a_{il}| \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k, l \leq m\}$. Перемещение коллектива \mathcal{A} будем называть равномерным и направленным, если его диаметр ограничен некоторой константой и существует такой период $T \in \mathbb{N}$, что для любого момента времени t выполняется $v_{\mathcal{A}}(t+T) - v_{\mathcal{A}}(t) = v_{\mathcal{A}}(t+2T) - v_{\mathcal{A}}(t+T)$.



Пусть $J \subset \{1, \dots, m\}$. Подсистему $(A_j)_{j \in J}$ коллектива взаимодействующих автоматов \mathcal{A} будем называть камнями в коллективе \mathcal{A} , если для любого $j \in J$ выполняются следующие два условия: 1) A_j имеет только одно состояние; 2) A_j может перемещаться только если с ним на одной вершине находится автомат A_i ($i \notin J$), причём A_j может переместиться только в ту же вершину, что и A_i . Для автоматов, которые не являются камнями, камни играют роль внешней памяти.

Дадим точные определения. Одномерной целочисленной решеткой будем называть геометрическую среду $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_1$. Обозначим через $\mathcal{P}(M)$ множество всех подмножеств произвольного множества M . Пусть I – некоторое множество индексов и $\{M_i | i \in I\}$ – некоторое семейство множеств. Тогда через $\mathcal{T}(\{M_i | i \in I\})$ обозначим множество всех частичных трансверселей этого семейства, где частичная трансверсаль по определению содержит не более одного элемента из каждого M_i . Заметим, что пустое множество также является частичной трансверсалью.

Коллективом взаимодействующих автоматов типа $(1, m)$ назовем коллектив $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{m+1})$, состоящий из одного автомата A_1 и m камней A_2, \dots, A_{m+1} . Пусть $I = \{1, \dots, m+1\}$. Каждый автомат A_i из коллектива \mathcal{A} представлен шестеркой $A_i = (S_i, X_i, Y_i, s_0^i, \delta_i, \lambda_i)$, где S_i – конечное множество состояний; $X_i = \{(\alpha, \{\beta, \gamma\}) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{T}(\{S_j | j \in I \setminus \{i\}\})\}$ – входной алфавит (здесь α описывает автоматы, расположенные в текущей вершине, а мультимножество $\{\beta, \gamma\}$ описывает автоматы, расположенные в ее окрестности); $Y_i = \mathcal{P}(I \setminus \{i\}) \cup \{h\}$ – выходной алфавит (здесь $y = h$ обозначает «оставаться в текущей вершине», $y \in Y_i \setminus \{\emptyset, h\}$ обозначает «перейти в вершину, в которой находятся автоматы из списка y и только они», $y = \emptyset$ обозначает «перейти в любую вершину из окрестности текущей, в которой нет других автоматов»); $s_0^i \in S_i$ – начальное состояние; $\delta_i : S_i \times X_i \rightarrow S_i$ – функция переходов; $\lambda_i : S_i \times X_i \rightarrow Y_i$ – функция выходов. Для любого камня A_j , $2 \leq j \leq m+1$, выполняются следующие условия:

$$1) S_j = \{s_0^j\};$$

2) для любого $x = (\alpha, \{\beta, \gamma\}) \in X_j$ либо $\lambda_j(s_0^j, x) = h$, либо если $\lambda_j(s_0^j, x) = b \neq h$, то существует $s \in S_1$ такое, что $s \in \alpha$ и $\lambda_1(s, x') = b$, где $x' = ((\alpha \setminus \{s\}) \cup \{s_0^j\}, \{\beta, \gamma\})$.

Поведением коллектива $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{m+1})$ типа $(1, m)$ в геометрической среде E назовем последовательность $\pi(\mathcal{A}, E): (\vec{x}_0, \vec{s}_0, \vec{y}_0), \dots, (\vec{x}_t, \vec{s}_t, \vec{y}_t), (\vec{x}_{t+1}, \vec{s}_{t+1}, \vec{y}_{t+1}), \dots$, где $\vec{x}_t = (x_t^1, \dots, x_t^{m+1})$, $x_t^j = (\alpha_t^j, \{\beta_t^j, \gamma_t^j\}) \in X_j$, $\vec{s}_t = (s_t^1, \dots, s_t^{m+1})$, $s_t^j \in S_j$, $\vec{y}_t = (y_t^1, \dots, y_t^{m+1})$, $y_t^j \in Y_j$ ($1 \leq j \leq m+1$) такие, что $s_{t+1}^j = \delta_j(s_t^j, x_t^j)$, $y_{t+1}^j = \lambda_j(s_t^j, x_t^j)$.

Положим, что в начальный момент времени все автоматы из коллектива \mathcal{A} установлены в одной и той же вершине среды E .

3. НАПРАВЛЕННОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ НА ОДНОМЕРНОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЁТКЕ

Для одномерной целочисленной решетки $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_1$ и коллектива автоматов типа $(1, m)$ справедливо следующее утверждение.

Теорема. 1. При $0 \leq m < 3$ не существует коллектива из одного автомата и m камней (коллектива типа $(1, m)$), который совершает равномерное направленное перемещение на одномерной целочисленной решетке.

2. Существует коллектив, состоящий из одного автомата и трех камней (коллектив типа $(1, 3)$), который совершает равномерное направленное перемещение на одномерной целочисленной решетке.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем методом разбора случаев.

Для представления поведения коллектива автоматов будем использовать ориентированное корневое дерево, растущее вниз. С вершинами дерева свяжем входные символы автомата A_1 , а с дугами – его выходные символы. Рядом с выходным символом будем указывать множество индексов камней, перемещающихся вместе с A_1 (если такие камни есть). Корнем дерева является вершина $x_0 = (\{2, \dots, m+1\}, \{\emptyset, \emptyset\})$. Дуга с меткой $(y, \{i_1, \dots, i_k\})$ (здесь $y \in Y_1$, $i_j \in \{2, \dots, m+1\}$) начинается в вершине $x \in X_1$ и оканчивается в вершине $x' \in X_1$ тогда и только тогда, когда после перемещения автоматов $A_1, A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ в вершину, в которой находится y , вход автомата A_1 изменяется с x на x' . Ветви дерева будем называть стратегиями поведения коллектива \mathcal{A} . У каждой ветви



выделим два поддерева. Первое поддерево соответствует поведению коллектива \mathcal{A} во время первоначальной расстановки камней в вершинах среды. Его корнем является вершина x_0 . Так как камней конечное число, то это дерево также является конечным. Второе поддерево соответствует поведению коллектива \mathcal{A} во время перемещений по среде. Корнем этого поддерева является вершина первого поддерева, наиболее удаленная от вершины x_0 . Второе поддерево в силу бесконечности поведения коллектива автоматов является бесконечным.

Так как входной и выходной алфавиты автомата A_1 конечны, то описанное выше дерево содержит изоморфные поддеревья. Поэтому для анализа поведения коллектива автоматов достаточно рассмотреть следующий конечный фрагмент этого дерева. Положим, что вершина дерева является листом, если приписанный ей вход автомата A_1 уже был приписан некоторой вершине, расположенной ближе к корню дерева и находящейся в том же поддереве своей ветви, что и рассматриваемая вершина.

Рассмотрим способность совершать равномерное направленное перемещение в среде E для коллективов автоматов типа $(1, m)$, различающихся по числу камней. Положим, что перемещения коллектива в среде происходят по наихудшему сценарию из всех возможных.

С целью сохранения единообразия обозначений автомат без камней будем обозначать как коллектив $(1, 0)$. Единственным входным символом такого коллектива является $x = (\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\})$, а единственным выходным символом — $y = \emptyset$, который в виду отсутствия других автоматов означает «перейти в любую вершину, соседнюю с текущей». Рассмотрим перемещения автомата A_1 в среде E представленные на рис. 1. Здесь окружности обозначают вершины среды, число под вершиной — её абсолютные координаты, квадрат — положение автомата A_1 .

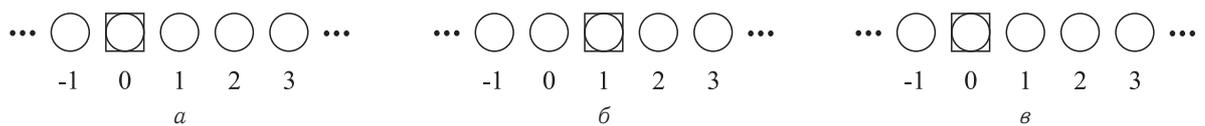


Рис. 1. Перемещения коллектива типа $(1, 0)$

Пусть автомат A_1 первоначально помещен в вершину 0 (рис. 1, а). После перехода в соседнюю с ней вершину он может оказаться либо в вершине 1, либо в вершине -1 . Пусть автомат A_1 переместился в вершину 1 (рис. 1, б). Так как вершина для перехода выбирается случайным образом из двух возможных, то после следующего перемещения автомат в наихудшем случае окажется в вершине 0 (рис. 1, в). Приведенный пример показывает, что в наихудшем случае перемещения коллектива $(1, 0)$ не сохраняют направление. Заметим, что поведение этого автомата отличается неоднозначностью выбора следующей вершины из текущей и невозможностью в наихудшем случае возвращения в предыдущую вершину для того, чтобы повторить выбор. Можно предположить, что для направленного перемещения автомата необходимо либо избегать неоднозначного выбора, либо иметь возможность оценить правильность своего выбора и в случае необходимости вернуться исходную вершину.

Пусть $\mathcal{A} = (A_1, A_2)$, т.е. коллектив имеет тип $(1, 1)$. Поведение этого коллектива изображено на рис. 2. Здесь полужирным шрифтом набраны номера вершин дерева, введенные для облегчения комментирования рисунка. Для камня A_2 вместо пары $(2, s_0^2)$ указан только его индекс — 2.

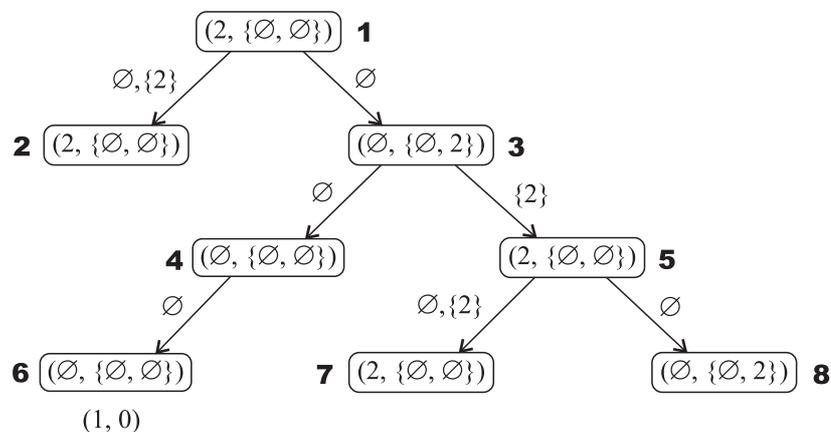


Рис. 2. Поведение коллектива типа $(1, 1)$



Рассмотрим возможные стратегии коллектива \mathcal{A} . Стратегия, соответствующая последовательности вершин (1, 2), заключается в том, что автоматы A_1 и A_2 всегда перемещаются вместе. В этом случае коллектив (A_1, A_2) перемещается как автомат A_1 и, как показано выше, в наихудшем случае не совершает направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности вершин (1, 3, 4, 6), заключается в том, что автомат A_1 оставляет камень A_2 в начальной вершине и далее перемещается без него. Перемещения коллектива при использовании этой стратегии представлены на рис. 3.

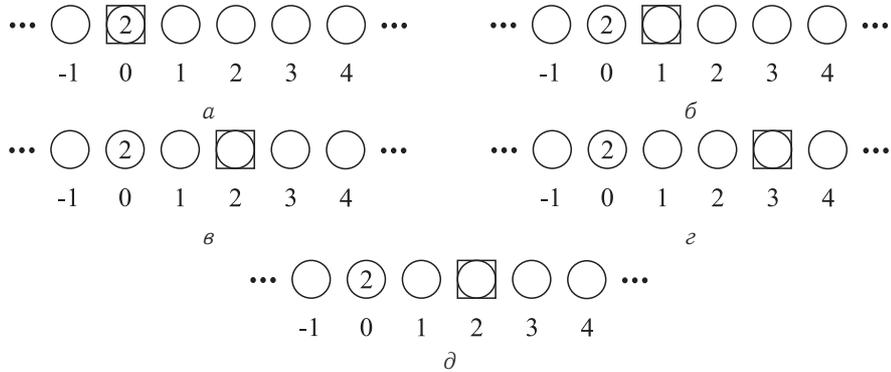


Рис. 3. Перемещения коллектива типа (1, 1) при использовании стратегии (1, 3, 4, 6)

Пусть коллектив (A_1, A_2) первоначально установлен в вершине 0 (рис. 3, а). Следуя своей стратегии, автомат A_1 оставляет камень A_2 в этой вершине и переходит в произвольно выбранную соседнюю вершину, например, в вершину 1 (рис. 3, б). В этот момент его вход равен $(\emptyset, \{\emptyset, 2\})$. Единственной вершиной в окрестности вершины 1, в которой нет других автоматов, является вершина 2. После перехода в эту вершину вход автомата A_1 становится равен $(\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\})$ (рис. 3, в). В наихудшем случае автомата A_1 не сможет вернуться к камню A_2 и далее коллектив (A_1, A_2) будет вести себя как коллектив типа (1, 0), а значит, не будет совершать направленного перемещения (рис. 2, з, д).

Стратегия, соответствующая последовательности вершин (1, 3, 5, 7), заключается в повторении следующей последовательности действий: автомат A_1 оставляет камень A_2 в текущей вершине, переходит в соседнюю с ней вершину, возвращается в вершину, в которой установлен A_2 , а затем вместе с A_2 переходит в соседнюю вершину. Перемещения коллектива при использовании этой стратегии представлены на рис. 4.

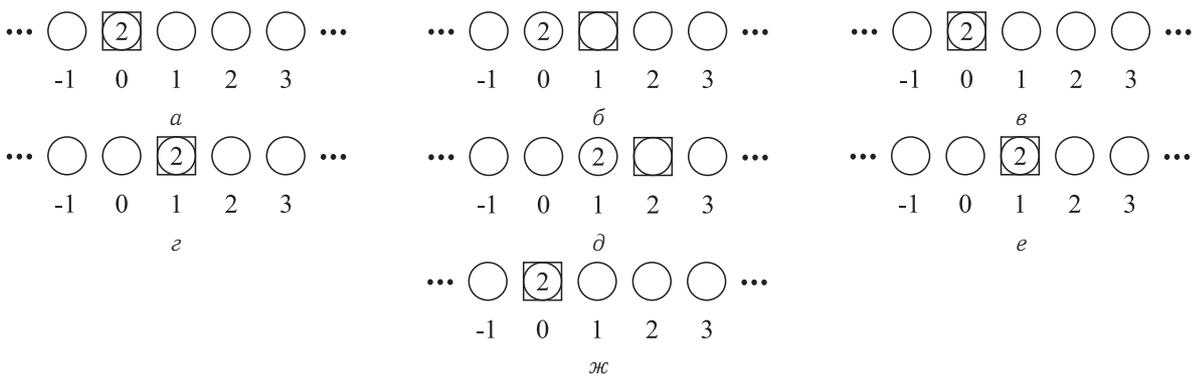


Рис. 4. Перемещения коллектива типа (1, 1) при использовании стратегии (1, 3, 5, 7)

Пусть коллектив (A_1, A_2) первоначально установлен в вершине 0 (рис. 4, а). Согласно выбранной стратегии автомат A_1 оставляет в этой вершине камень A_2 и переходит в одну из соседних вершин, например в вершину 1 (рис. 4, б). Далее A_1 возвращается в вершину 0 (рис. 4, в). Он может это сделать, так как наблюдает на своем входе камень A_2 , установленный в этой вершине. Автоматы A_1 и A_2 вместе перемещаются в одну из соседних вершин. Пусть ей снова будет вершина 1 (рис. 4, г). Далее A_1 оставляет A_2 в этой вершине и переходит в одну из соседних вершин, например, вершину 2



(рис. 4, д). Затем A_1 возвращается в вершину 1 (рис. 4, е) и вместе с A_2 переходит в одну из соседних вершин. Этой вершиной в худшем случае окажется вершина 0 (рис. 4, ж). Таким образом, следуя стратегии (1, 3, 5, 7), коллектив (A_1, A_2) в наихудшем случае не совершает направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности вершин (1, 3, 5, 8), заключается в том, что автомат A_1 оставляет камень A_2 в начальной вершине и далее перемещается из неё в вершины из её окрестности и обратно. Ясно, что в этом случае коллектив (A_1, A_2) не совершает направленного перемещения.

Из приведенных рассуждений следует, что коллектив типа (1, 1) в наихудшем случае не совершает направленного перемещения в среде E .

Пусть $\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3)$, т. е. коллектив имеет тип (1, 2). Поведение этого коллектива изображено на рис. 5. Для камней A_2 и A_3 указаны только их индексы. С целью упрощения рисунка на нем не изображено поддерево, соответствующее стратегии, в которой в начальной вершине остается камень A_2 , а камень A_3 перемещается вместе с автоматом A_1 . Это поддерево изоморфно поддереву, порожденному вершинами $\{1, 6, \dots, 17\}$, с точностью до замены A_2 на A_3 .

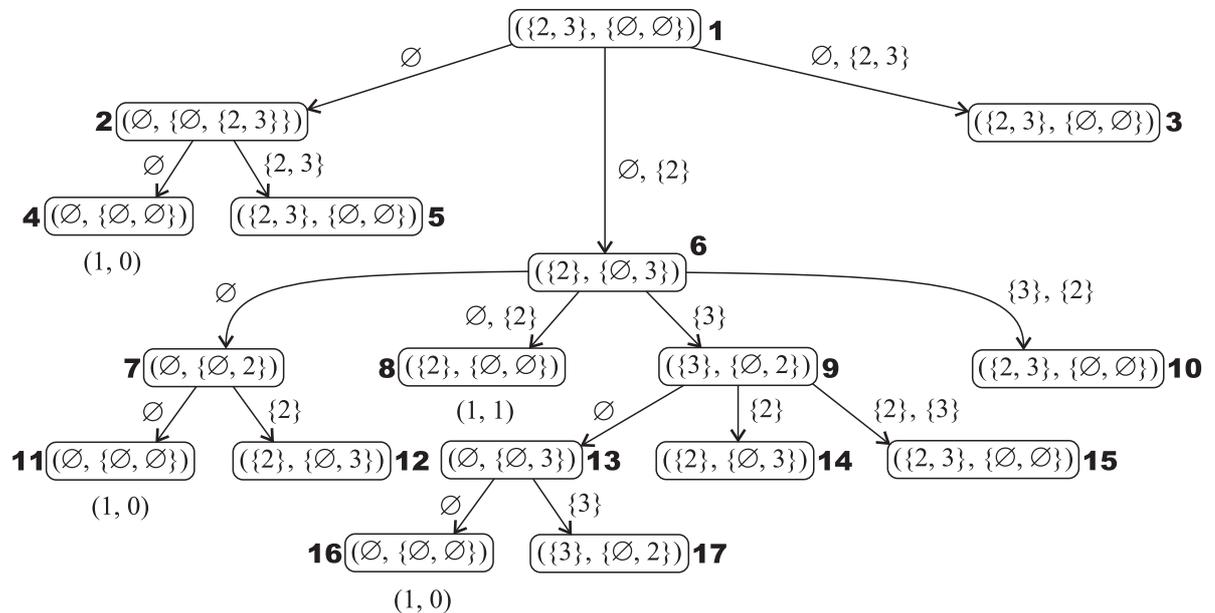


Рис. 5. Поведение коллектива типа (1, 2)

Рассмотрим возможные стратегии коллектива \mathcal{A} . Стратегия, соответствующая последовательности вершин (1, 2, 4), заключается в следующем. Автомат A_1 оставляет камни A_2 и A_3 в начальной вершине и переходит в одну из вершин в ее окрестности. Затем A_1 переходит в ту вершину из окрестности текущей, в которой нет камней. После этого его вход становится равен $(\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\})$. В наихудшем случае A_1 не сможет вернуться к камням и поэтому, как показано ранее, не сможет совершать направленного перемещения.

Следуя стратегии (1, 2, 5), автомат A_1 оставляет камни в начальной вершине и далее перемещается из неё в вершины из её окрестности и обратно. Ясно, что в этом случае коллектив (A_1, A_2, A_3) не совершает направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности вершин (1, 3), заключается в том, что автоматы A_1 , A_2 и A_3 всегда перемещаются вместе. В этом случае коллектив (A_1, A_2, A_3) перемещается как автомат A_1 и, как показано выше, в наихудшем случае не совершает направленного перемещения.

Следуя стратегии (1, 6, 7, 11), автомат A_1 оставляет камни A_2 и A_3 в соседних вершинах и далее перемещается так, что в наихудшем случае не возвращается к камням. Так как автомат более не может взаимодействовать с камнями, то он ведет себя как коллектив типа (1, 0) и, как показано ранее, не совершает направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности вершин (1, 6, 8), заключается в том, что автомат A_1 оставляет камень A_3 в начальной вершине и, перемещаясь вместе с камнем A_2 , теряет A_3



из вида. В наихудшем случае автоматы A_1 и A_2 больше не вернуться к A_3 . Следовательно, они будут вести себя как коллектив типа $(1, 1)$, который, как показано ранее, не совершает направленного перемещения.

Следуя стратегии $(1, 6, 9, 13, 16)$, автомат A_1 , в конце концов, теряет из виду камни и ведет себя далее как коллектив $(1, 0)$, т.е. не совершает направленного перемещения.

Стратегии, соответствующие последовательностям $(1, 6, 7, 12)$, $(1, 6, 9, 13, 17)$ и $(1, 6, 9, 14)$, заключаются в том, что автомат A_1 оставляет камни A_2 и A_3 в соседних вершинах, а затем перемещается в окрестностях этих вершин не покидая ограниченного отрезка среды E . Ясно, что в этом случае коллектив не совершает равномерного направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности $(1, 6, 9, 15)$, заключается в повторении следующей последовательности действий: автомат A_1 оставляет камень A_3 в текущей вершине и вместе с автоматом A_2 переходит в соседнюю с ней вершину; автомат A_1 оставляет камень A_2 в текущей вершине и переходит в вершину, в которой находится камень A_3 ; автоматы A_1 и A_3 вместе переходят в вершину, в которой находится камень A_2 . Перемещения коллектива $\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3)$ при использовании этой стратегии изображены на рис. 6.

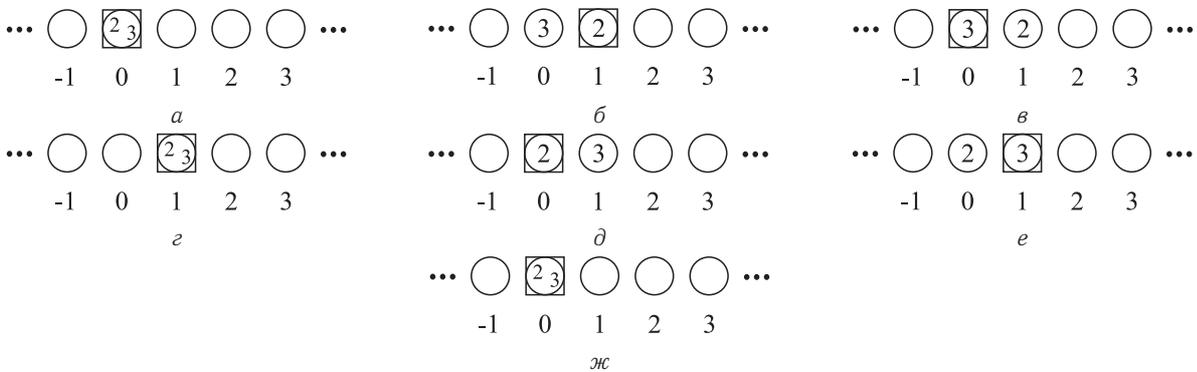


Рис. 6. Перемещения коллектива типа $(1, 2)$ при использовании стратегии $(1, 6, 9, 15)$

Пусть в начальный момент времени коллектив \mathcal{A} находится в вершине 0 (рис. 6, а). Автомат A_1 оставляет камень A_3 в этой вершине и вместе с камнем A_2 перемещается в одну из соседних вершин, например в вершину 1 (рис. 6, б). Затем автомат A_1 оставляет камень A_2 в этой вершине и переходит в вершину 0, в которой находится камень A_3 (рис. 6, в). После этого автомат A_1 и камень A_3 вместе переходят в вершину 1, в которой расположен камень A_2 (рис. 6, г). На следующем шаге автомат A_1 и камень A_2 вновь должны перейти в вершину, соседнюю с текущей. Таких вершин две — 0 и 2. Поскольку коллектив \mathcal{A} не имеет компаса, то его члены не могут различить эти вершины. Поэтому в худшем случае автомат A_1 и камень A_2 переместятся в вершину 0 (рис. 6, д). Повторяя последовательность действий, предписанную используемой стратегией, коллектив \mathcal{A} , в конце концов, вновь окажется в вершине 0 (рис. 6, е, ж). В худшем случае коллектив будет перемещаться в окрестности вершины 0 на протяжении сколь угодно большого промежутка времени. Таким образом, следуя стратегии $(1, 6, 9, 15)$, коллектив типа $(1, 2)$ в худшем случае не совершает равномерного направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности $(1, 6, 10)$, заключается в том, что автомат A_1 вместе с камнем A_2 перемещаются в окрестности вершины, в которой установлен камень A_3 . Ясно, что в этом случае коллектив \mathcal{A} не совершает равномерного направленного перемещения.

Из приведенных рассуждений следует, что коллектив типа $(1, 2)$ в наихудшем случае не совершает равномерного направленного перемещения в среде E .

Покажем, что для коллектива $\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ (т.е. коллектива типа $(1, 3)$) существует стратегия, обеспечивающая его равномерное направленное перемещение в среде E . Эта стратегия представлена на рис. 7. Здесь последовательность вершин $(1, 2, 3)$ соответствует поведению коллектива при первоначальной расстановке камней в вершинах среды E , а последовательность вершин $(3, 4, 5, 6, 8)$ — его поведению при перемещении по среде, сопровождающемся переносом камней из вершины в вершину.

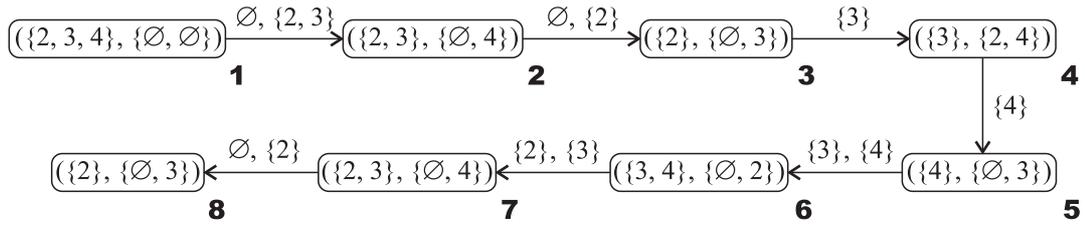


Рис. 7. Фрагмент поведения коллектива типа (1, 3)

Стратегия заключается в выполнении следующего алгоритма. Первоначально автомат A_1 и камни A_2, A_3, A_4 установлены в одной и той же вершине среды E .

Шаг 1. Автомат A_1 оставляет камень A_4 в текущей вершине и вместе с камнями A_2, A_3 переходит в соседнюю с ней вершину, в которой нет камней.

Шаг 2. Автомат A_1 оставляет камень A_3 в текущей вершине и вместе с камнем A_2 переходит в соседнюю с ней вершину, в которой нет камней.

Шаг 3. Автомат A_1 оставляет камень A_2 в текущей вершине и переходит в вершину, в которой находится камень A_3 .

Шаг 4. Автомат A_1 оставляет камень A_3 в текущей вершине и переходит в вершину, в которой находится камень A_4 .

Шаг 5. Автомат A_1 вместе с камнем A_4 переходит в вершину, в которой находится камень A_3 .

Шаг 6. Автомат A_1 оставляет камень A_4 в текущей вершине и вместе с камнем A_3 переходит в вершину, в которой находится камень A_2 .

Шаг 7. Автомат A_1 оставляет камень A_3 в текущей вершине и вместе с камнем A_2 переходит в соседнюю с ней вершину, в которой нет камней. Перейти к шагу 3.

Покажем, что данная стратегия действительно приводит к равномерному направленному перемещению коллектива \mathcal{A} . На рисунке 8 изображены перемещения коллектива при использовании им этой стратегии.

Пусть коллектив \mathcal{A} в момент времени $t = 0$ расположен в вершине 0 (рис. 8, а). В окрестности этой вершины находятся вершины -1 и 1 и в этих вершинах нет камней. Автомат A_1 случайным образом выбирает одну из этих вершин и перемещается в нее вместе с камнями A_2 и A_3 , а камень A_4 остается в вершине 0. Этим случайным выбором задается направление, в котором будет перемещаться коллектив. Пусть автомат и камни переместились в вершину 1 (рис. 8, б). В окрестности этой вершины только в вершине 2 нет камней, т.е. выбор автоматом A_1 вершины для перемещения детерминирован. Камень A_3 остается в вершине 1, а автомат A_1 и камень A_2 перемещаются в вершину 2 (рис. 8, в). Первоначальная расстановка камней окончена и автомат A_1 возвращается в вершину 0, последовательно проходя вершины, в которых установлены камни A_2, A_3, A_4 (рис. 8, в-д).

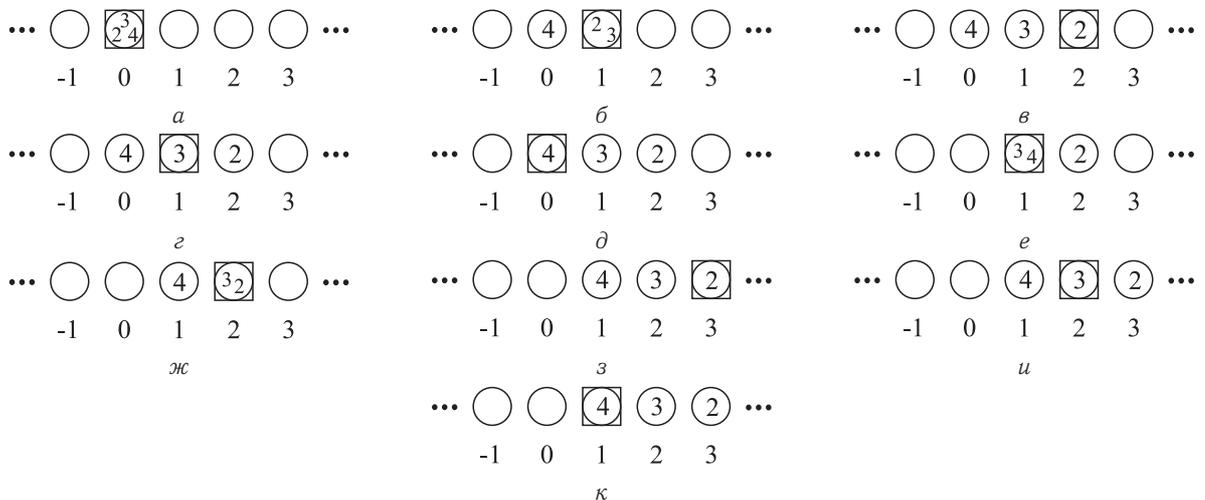


Рис. 8. Перемещения коллектива типа (1, 3)



Итак, в момент времени $t = 4$ коллектив \mathcal{A} расположен в вершинах 0, 1, 2, его диаметр $d_{\mathcal{A}}$ равен 2, его координата $v_{\mathcal{A}}(t)$ равна $3/4$ (рис. 8, *д*). Следуя предписаниям алгоритма, автомат A_1 вместе с камнем A_4 переходят в вершину, в которой находится камень A_3 (рис. 8, *е*). Далее, автомат A_1 и камень A_3 перемещаются в вершину, в которой расположен камень A_2 (рис. 8, *ж*). Только в одной вершине в окрестности этой вершины нет камней. Поэтому A_1 и A_2 перемещаются в эту вершину (рис. 8, *з*). После этого автомат A_1 возвращается в вершину, в которой находится камень A_4 (рис. 8, *з-к*). Все эти действия занимают 5 единиц времени. Как видно из рисунка 8, *к*, в момент времени $t = 4 + 5 = 9$ коллектив \mathcal{A} располагается в вершинах 1, 2, 3, его диаметр $d_{\mathcal{A}}$ равен 2, его координата $v_{\mathcal{A}}(9)$ равна $7/4$. Так как все перемещения коллектива детерминированы, то в момент времени $4 + 5k$, $k \in \mathbb{N}$, он будет занимать вершины k , $k + 1$, $k + 2$, его диаметр $d_{\mathcal{A}}$ будет равен 2, а его координата $v_{\mathcal{A}}(4 + 5k)$ будет равна $3/4 + k$. Следовательно, при следовании описанной выше стратегии коллектив типа (1,3) совершает равномерное направленное перемещение.

Теорема доказана. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых коллектив, состоящий из автомата и конечного набора камней, сохраняет направленное перемещение в среде, представляющей собой одномерную целочисленную решетку. Работа закладывает основы для дальнейших исследований поведения коллективов автоматов без компаса в дискретных топологических средах.

Библиографический список

1. Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б. Теория хранения и поиска информации. М. : Физматлит, 2002. 288 с.
2. Капитонова Ю. В., Кривой С. Л., Летичевский А. А., Луцкий Г. М. Лекции по дискретной математике. СПб. : БХВ-Петербург, 2004. 624 с.
3. Novikov D. A. Cybernetics: From Past to Future. Springer, 2016. 115 p.
4. Kline R. R. The Cybernetics Moment : Or Why We Call Our Age the Information Age. Baltimore, Maryland : Johns Hopkins Univ. Press, 2015. 352 p.
5. Shannon Cl. E. Presentation of a maze-solving machine // Cybernetics: Circular, Causal and Feedback Mechanisms in Biological and Social Systems: Transactions of VIII Conference. N.Y. : Josiah Macy Jr. Foundation, 1952. P. 169–181.
6. Глушков В. М., Летичевский А. А. Теория дискретных преобразователей // Избранные вопросы алгебры и логики. Новосибирск : Наука, 1973. С. 5–39.
7. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М. : Наука, 1985. 320 с.
8. Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. М. Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 2003. Т. 15, вып. 2. С. 3–39. DOI: 10.1515/156939203322385847.
9. Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. М. Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 2003. Т. 15, вып. 3. С. 3–39. DOI: 10.1515/156939203322694736.
10. Стаматович Б. Распознавание односвязных цифр автоматом // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 3, вып. 3–4. С. 281–305.
11. Стаматович Б. Распознавание двусвязных цифр коллективом автоматов // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 4, вып. 1–2. С. 321–337.
12. Деглина Ю. Б., Козловский В. А., Костогрыз К. А. Автоматное распознавание оцифрованных многоугольников // Искусственный интеллект. 2004. № 3. С. 443–452.
13. Dudek G., Jenkin M. Computational Principles of Mobile Robotics. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2010, 406 p.
14. Blum M., Kozen D. On the Power of the Compass // SFCS '78 Proc. 19th Annu. Symp. Found. Comput. Sci. IEEE Computer Society Washington, 1978. P. 132–142. DOI: 10.1109/SFCS.1978.30.
15. Donald B. R. The Compass That Steered Robotics // Logic and Program Semantics. Springer, 2012. P. 50–65. DOI: 10.1007/978-3-642-29485-3-5.
16. Bhatt S., Even S., Greenberg D., Tayar R. Traversing Directed Eulerian Mazes // J. Graph Algorithms and Appl. 2002. Vol. 6, № 2. P. 157–173. DOI: 10.7155/jgaa.00049
17. Бабичев А. В. Ориентирование в лабиринте // Автоматика и телемеханика. 2008. Вып. 2. С. 135–145. DOI: 10.1134/S0005117908020100.

Образец для цитирования:

Курганский А. Н., Сапунов С. В. О направленном перемещении коллектива автоматов без компаса на одномерной целочисленной решетке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 356–365. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-356-365.



On the Directional Movement of a Collective of Automata without a Compass on a One-dimensional Integer Lattice

O. M. Kurganskyy¹, S. V. Sapunov²

¹Oleksiy M. Kurganskyy, State Institution «Institute of Applied Mathematics and Mechanics», 74, Rosa Luxemburg st., 83114, Donetsk, Ukraine, kurgansk@iamm.su

²Sergey V. Sapunov, Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, 1, Dobrovolskogo st., 84100, Slavyansk, Donetskaya obl., Ukraine, sapunov_sv@yahoo.com

A collective of finite automata has to preserve unidirectional movement on one-dimensional integer lattice whose elements (vertices) are unlabelled. The automata does not distinguish between equally labelled vertices by their coordinates of direction (that means each automaton has no compass). We considered collectives consisting of an automaton and some pebbles, i.e. automata of the simplest form, whose positions are completely determined by automaton. We prove that a collective of automaton and a maximum of 2 pebbles cannot maintain movement direction on the one-dimensional integer lattice, but collective of automaton and 3 pebbles can.

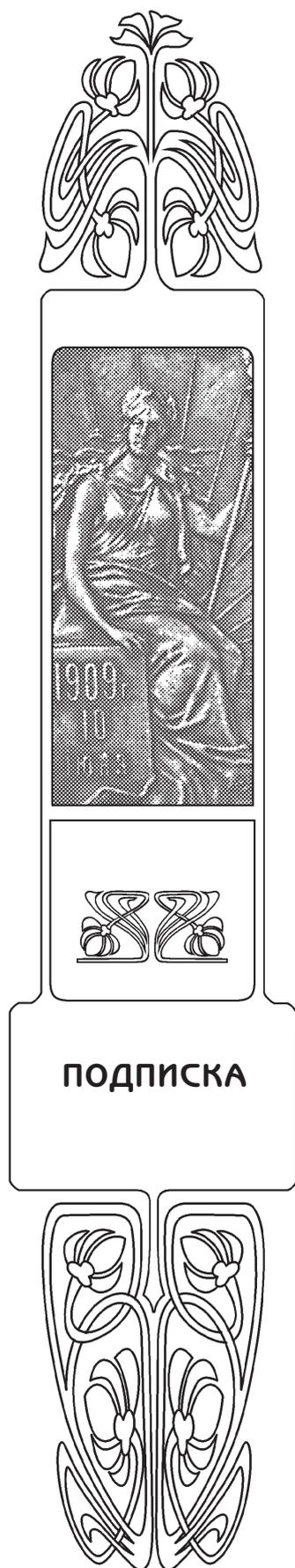
Key words: collectives of automata, labyrinth, unidirectional movement.

References

1. Gasanov E. E., Kudryavtsev V. B. *Teoriya hraneniya i poiska informatsii* [The theory of information storage and retrieval]. Moscow, Fizmatlit, 2002, 288 p. (in Russian).
2. Kapitonova Yu. V., Krivoy S. L., Letichevsky A. A., Lutskiy G. M. *Lektsii po diskretnoy matematike* [Lectures on discrete mathematics]. Saint Petersburg, BHV-Petersburg, 2004, 624 p. (in Russian).
3. Novikov D. A. *Cybernetics : From Past to Future*. Springer, 2016. 115 p.
4. Kline R. R. *The Cybernetics Moment : Or Why We Call Our Age the Information Age*. Baltimore, Maryland, Johns Hopkins Univ. Press, 2015, 352 p.
5. Shannon Cl. E. Presentation of a maze-solving machine. *Cybernetics : Circular, Causal and Feedback Mechanisms in Biological and Social Systems: Transactions of VIII Conference*. New York, Josiah Macy Jr. Foundation, 1952, pp. 169–181
6. Glushkov V. M., Letichevsky A. A. *Teoriya diskretnykh preobrazovateley* [The theory of discrete converters]. *Izbrannyye voprosy algebry i logiki* [Selected problems of algebra and logic]. Novosibirsk, Nauka, 1973, pp. 5–39 (in Russian).
7. Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S. *Vvedenie v teoriyu avtomatov* [Introduction to Automata Theory]. Moscow, Nauka, 1985, 320 p. (in Russian).
8. Kilibarda G., Kudryavtsev V. B., Ušćumlić Š. Independent systems of automata in labyrinths. *Discrete Math. and Appl.*, 2003, vol. 13, iss. 3, pp. 221–255. DOI: 10.1515/156939203322385847.
9. Kilibarda G., Kudryavtsev V. B., Ušćumlić Š. Collectives of automata in labyrinths. *Discrete Math. and Appl.*, 2003, vol. 13, iss. 5, pp. 429–466. DOI: 10.1515/156939203322694736.
10. Stamatovich B. Recognizing simply connected numerals by automata. *Intelligent systems*, 1998, vol. 3, iss. 3–4, pp. 281–305 (in Russian).
11. Stamatovich B. Recognizing doubly connected numerals by collectives of automata. *Intelligent systems*, 1998, vol. 4, iss. 1–2, pp. 321–337 (in Russian).
12. Deglina Yu. B., Kozlovskii V. A., Kostogryz K. A. Automata recognition of digitized polygons. *Artificial Intelligence*, 2004, no. 3, pp. 443–452 (in Russian).
13. Dudek G., Jenkin M. *Computational Principles of Mobile Robotics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2010, 406 p.
14. Blum M., Kozen D. On the Power of the Compass. *SFCS '78 Proc. 19th Annu. Symp. Found. Comput. Sci.* IEEE Computer Society Washington, 1978, pp. 132–142. DOI: 10.1109/SFCS.1978.30.
15. Donald B. R. The Compass That Steered Robotics. *Logic and Program Semantics*. Springer, 2012, pp. 50–65. DOI: 10.1007/978-3-642-29485-3-5.
16. Bhatt S., Even S., Greenberg D., Tayar R. Traversing Directed Eulerian Mazes. *J. Graph Algorithms and Appl.*, 2002, vol. 6, no. 2, pp. 157–173. DOI: 10.7155/jgaa.00049.
17. Babichev A. V. Orientation in a maze. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, iss. 2, pp. 299–309. DOI: 10.1134/S0005117908020100.

Please cite this article in press as:

Kurganskyy O. M., Sapunov S. V. On the Directional Movement of a Collective of Automata without a Compass on a One-dimensional Integer Lattice. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 356–365 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-356-365.



Подписка на I полугодие 2017 года

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год.

Цена свободная.

Оформить подписку онлайн можно в Интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.akc.ru).

По всем вопросам обращаться в редакцию журнала:
410012, Саратов, Астраханская, 83;
тел. (845-2) 51-45-49, 52-26-89; факс (845-2) 27-85-29;
e-mail: izvestiya@sgu.ru