

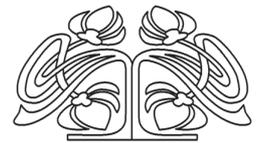


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2



Научный журнал
2016 Том 16

ISSN 1814-733X

ISSN 1816-9791

Издается с 2001 года

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

- Алдашев С. А.** Корректность задачи Дирихле для одного класса многомерных эллипτικο-параболических уравнений 125
- Алимов А. Р.** Пространства Мазура и 4.3-свойство пересечения (BM)-пространств 133
- Арутюнян Р. В.** Математическое моделирование тепло- и электропереноса при воздействии сильнооточного импульса на электрод 138
- Бурлуцкая М. Ш.** Смешанная задача для системы дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом 145
- Лукомский Д. С., Лукомский С. Ф., Терехин П. А.** Применение системы Хаара к численному решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка 151
- Перельман Н. Р.** Об одном случае явного решения трехэлементной задачи типа Карлемана для аналитических функций в круге 159
- Рыхлов В. С.** Разложение по корневым функциям сильно нерегулярного пучка дифференциальных операторов второго порядка с кратными характеристиками 165
- Фатыхов А. Х., Шабалин П. Л.** Однородная краевая задача Гильберта с бесконечным индексом на окружности 174
- Хромов А. А.** Решение одной обратной задачи 180

Механика

- Блинков Ю. А., Месянжин А. В., Могилевич Л. И.** Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость 184
- Челноков Ю. Н., Нелаева Е. И.** Бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела 198

Информатика

- Портенко М. С., Мельничук Д. В., Андрейченко Д. К.** Условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов комбинированных динамических систем 208
- Родионов Е. А.** О применении вейвлетов к цифровой обработке сигналов 217
- Салий В. Н.** Многоугольные графы как упорядоченные множества: критерий шпернеровости 226
- Твердохлебов В. А.** Геометрическая форма автоматных отображений, рекуррентное и Z-рекуррентное определение последовательностей 232

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (журнал входит в международную базу данных zbMATH)

Зарегистрировано в Министерстве Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года.
Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-56162 от 15 ноября 2013 года

Индекс издания по каталогу ОАО Агентства «Роспечать» 36017, раздел 39 «Физико-математические науки. Химические науки». Журнал выходит 4 раза в год

Заведующий редакцией
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Митенёва Елена Анатольевна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Степанова Наталья Ивановна

Верстка
Багаева Ольга Львовна

Технический редактор
Ковалева Наталья Владимировна

Корректор
Юдина Инна Геннадиевна

Адрес учредителя и редакции:
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: (845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izvestiya@sgu.ru

Подписано в печать 14.06.16.
Формат 60x84 1/8.
Усл. печ. л. 13,95(15,0).
Тираж 500 экз. Заказ 86-Т.

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.

Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2016



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал публикует научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (математический анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, математическая логика, алгебра и теория чисел, вычислительная математика, дискретная математика и математическая кибернетика, теоретическая механика, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры, биомеханика, машиностроение, информатика, вычислительная техника и управление и др.).

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу: <http://mmi.sgu.ru>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Статья должна быть аккуратно оформлена и тщательно отредактирована.

Последовательность предоставления материала:

– на русском языке: индекс УДК, название работы, инициалы и фамилии авторов, сведения об авторах (ученая степень, должность и место работы, e-mail), аннотация, ключевые слова, текст статьи, ссылки на гранты и благодарности (если есть), библиографический список;

– на английском языке: название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, почтовый адрес), e-mail, аннотация, ключевые слова, References.

Отдельным файлом приводятся сведения о статье: раздел журнала, УДК, авторы и название статьи (на русском и английском языках); сведения об авторах: фамилия, имя и отчество (полностью), e-mail, телефон (для ответственного за переписку обязательно указать сотовый или домашний). Если название статьи слишком длинное, для колонтитула следует привести его краткий вариант.

Требования к аннотациям и библиографическим спискам:

– аннотация не должна содержать сложных формул, ссылок на библиографический список, по содержанию повторять название статьи, быть насыщена общими словами, не излагающими сути исследования. Оптимальный объем: 500–600 знаков;

– в библиографическом списке должны быть указаны только процитированные в статье работы. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Образцы оформления различных источников приведены вместе со стилевым файлом по адресу: <http://mmi.sgu.ru>.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее чем через 3 месяца. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Адрес для переписки с редколлегией серии: mmi@sgu.ru.

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

- Aldashev S. A.** Well-posedness of the Dirichlet Problem for a Class of Multidimensional Elliptic-parabolic Equations 125
- Alimov A. R.** Mazur Spaces and 4.3-intersection Property of (BM) -spaces 133
- Arutyunyan R. V.** Simulation of the Temperature and Electric Fields by High-current Pulse to the Electrode 138
- Burlutskaya M. Sh.** A Mixed Problem for a System of First Order Differential Equations with Continuous Potential 145
- Lukomskii D. S., Lukomskii S. F., Terekhin P. A.** Solution of Cauchy Problem for Equation First Order Via Haar Functions 151
- Perelman N. R.** A Case of an Explicit Solutions for the Three-element Problem of Carleman Type for Analytic Functions in a Circle 159
- Rykhlov V. S.** Expansion in Root Functions of Strongly Irregular Pencil of Differential Operators of the Second Order with Multiple Characteristics 165
- Fatykhov A. K., Shabalin P. L.** Investigation Riemann – Hilbert Boundary Value Problem with Infinite Index on Circle 174
- Khromov A. A.** The Solution of a Certain Inverse Problem 180

Mechanics

- Blinkov Yu. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I.** Wave Occurrences Mathematical Modeling in Two Geometrically Nonlinear Elastic Coaxial Cylindrical Shells, Containing Viscous Incompressible Liquid 184
- Chelnokov Yu. N., Nelaeva E. I.** Solving Kinematic Problem of Optimal Nonlinear Stabilization of Arbitrary Program Movement of Free Rigid Body 198

Computer Sciences

- Portenko M. S., Melnichuk D. V., Andreichenko D. K.** Analyticity Conditions of Characteristic and Disturbing Quasipolynomials of Hybrid Dynamical Systems 208
- Rodionov E. A.** On Applications of Wavelets in Digital Signal Processing 217
- Salii V. N.** The Sperner Property for Polygonal Graphs Considered as Partially Ordered Sets 226
- Tverdokhlebov V. A.** The Geometric Form of Automaton Mappings, Recurrent and Z-recurrent Definition of Sequences 232



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ»**

Главный редактор

Чумаченко Алексей Николаевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Короновский Алексей Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Балаш Ольга Сергеевна, кандидат экон. наук, доцент (Саратов, Россия)

Бучко Ирина Юрьевна, директор Издательства Саратовского университета (Саратов, Россия)

Данилов Виктор Николаевич, доктор ист. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ивченков Сергей Григорьевич, доктор соц. наук, профессор (Саратов, Россия)

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Макаров Владимир Зиновьевич, доктор геогр. наук, профессор (Саратов, Россия)

Прозоров Валерий Владимирович, доктор филол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Усанов Дмитрий Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Устьянцев Владимир Борисович, доктор филос. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шамионов Раиль Мунирович, доктор психол. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шляхтин Геннадий Викторович, доктор биол. наук, профессор (Саратов, Россия)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES»**

Editor-in-Chief – Chumachenko A. N. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Koronovskii A. A. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Balash O. S. (Saratov, Russia)

Buchko I. Yu. (Saratov, Russia)

Danilov V. N. (Saratov, Russia)

Ivchenkov S. G. (Saratov, Russia)

Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Makarov V. Z. (Saratov, Russia)

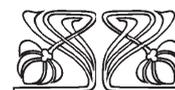
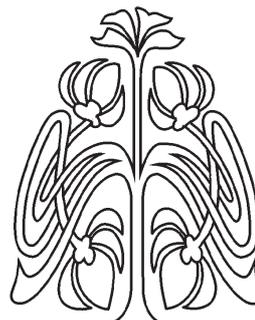
Prozorov V. V. (Saratov, Russia)

Usanov D. A. (Saratov, Russia)

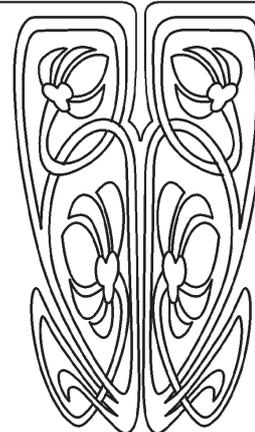
Ustiantsev V. B. (Saratov, Russia)

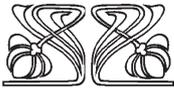
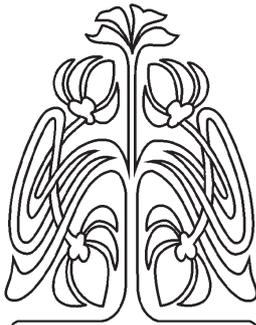
Shamionov R. M. (Saratov, Russia)

Shlyakhtin G. V. (Saratov, Russia)

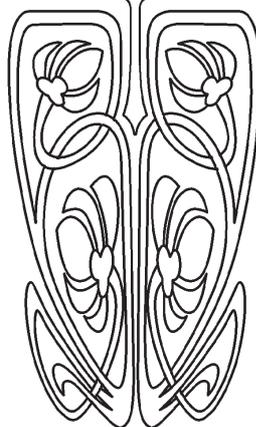


**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**





**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Халова Виктория Анатольевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Васильев Александр Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Берген, Норвегия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Ломакин Евгений Викторович, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Москва, Россия)

Манжиров Александр Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, акад. РАН, доктор техн. наук, профессор (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, акад. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Резчиков Александр Федорович, чл.-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор

(Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Субботин Юрий Николаевич, чл.-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор

(Екатеринбург, Россия)

Харченко Вячеслав Сергеевич, доктор техн. наук, профессор (Харьков, Украина)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Kossovich L. Yu. (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Prokhorov D. V. (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Khalova V. A. (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Andreichenko D. K. (Saratov, Russia)
Vasiliev A. Yu. (Bergen, Norway)
Vatulyan A. O. (Rostov-on-Don, Russia)
Indeitsev D. A. (St.-Petersburg, Russia)
Kaplunov J. D. (Keele, United Kingdom)
Kovalev V. A. (Moscow, Russia)
Lomakin E. V. (Moscow, Russia)
Manzhirou A. V. (Moscow, Russia)
Matveenko V. P. (Perm, Russia)
Morozov N. F. (St.-Petersburg, Russia)
Nasyrov S. R. (Kazan', Russia)

Parkhomenko P. P. (Moscow, Russia)
Radaev Yu. N. (Moscow, Russia)
Rezchikov A. F. (Saratov, Russia)
Rogerson Graham (Keele, United Kingdom)
Speranskii D. V. (Moscow, Russia)
Subbotin Yu. N. (Ekaterinburg, Russia)
Kharchenko V. S. (Kharkiv, Ukraine)
Khromov A. P. (Saratov, Russia)
Shalyto A. A. (St.-Petersburg, Russia)
Shashkin A. I. (Voronezh, Russia)
Yurko V. A. (Saratov, Russia)

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

Алдашев Серик Аймурзаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан, aldash51@mail.ru

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. В работе используется метод, предложенный в работах автора, показана однозначная разрешимость и получен явный вид задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптико-параболических уравнений.

Ключевые слова: корректность, многомерные уравнения, задача Дирихле, функция Бесселя.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-125-132

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТ

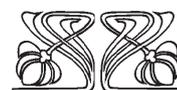
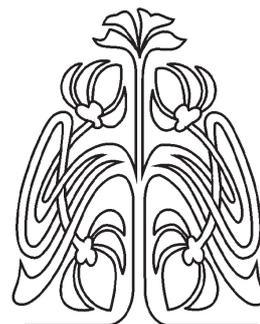
Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задачи Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. Дальнейшее изучение этой задачи приведено в [2].

В данной работе для одного класса многомерных эллиптико-параболических уравнений доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области. В работе используется метод, предложенный в работах [3, 4].

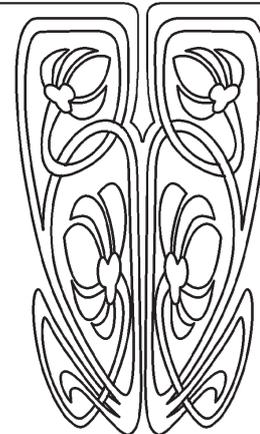
Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α , Γ_β — части поверхности Γ , лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α , Ω_β , представляющая множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m .



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающиеся смешанно-эллипτικο-параболические уравнения:

$$\begin{cases} \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u = 0, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i(x, t)u_{x_i} + e(x, t)u = 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m, m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, 3, \dots, m-2, 0 \leq \theta_{m-1} < 2\pi, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega_{\alpha\beta}}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), \quad u|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r, \theta), \quad (3)$$

при этом $\varphi_1(1, \theta) = \psi_1(\alpha, \theta), \varphi_2(1, \theta) = \psi_2(\beta, \theta), \psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1 \leq k \leq k_n, (m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2), W_2^l(S), l = 0, 1, \dots$, — пространства Соболева.

Имеют место следующие леммы [5].

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (4)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Через $\tilde{d}_{in}^k(r, t), d_{in}^k(r, t), \tilde{e}_n^k(r, t), \tilde{d}_n^k(r, t), \rho_n^k, \tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \psi_{1n}^k(t), \psi_{2n}^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций $d_i(r, \theta, t)\rho, d_i \frac{x_i}{r} \rho, e(r, \theta, t)\rho, d(r, \theta, t)\rho, \rho(\theta), i = 1, \dots, m, \varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta), \psi_1(t, \theta), \psi_2(t, \theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H), H$ — единичная сфера в E_m .

Пусть $a_i(r, \theta, t), b(r, \theta, t), c(r, \theta, t) \in W_2^l(\Omega_\alpha) \subset C(\overline{\Omega_\alpha}), d_i(r, \theta, t), e(r, \theta, t) \in W_2^l(\Omega_\beta), i = 1, \dots, m, l \geq m+1, c(r, \theta, t) \leq 0$ для всех $(r, \theta, t) \in \Omega_\alpha, e(r, \theta, t) \leq 0$ для всех $(r, \theta, t) \in \Omega_\beta$.

Тогда справедлива

Теорема. Если $\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta) \in W_2^p(S), \psi_1(t, \theta) \in W_2^p(\Gamma_\alpha), \psi_2(t, \theta) \in W_2^p(\Gamma_\beta), p > 3m/2$, то задача 1 однозначно разрешима.

Отметим, что это теорема для модельного многомерного эллипτικο-параболического уравнения получена в [3].

2. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ 1

Сначала покажем разрешимость задачи (1), (3). В сферических координатах уравнения (1) в области Ω_β имеет вид

$$L_1 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_t + \sum_{i=1}^m d_i(r, \theta, t) u_{x_i} + e(r, \theta, t) u = 0, \quad (5)$$



$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [5], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 в области Ω_β будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (6) в (5), умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав в сфере H для \bar{u}_n^k , получим [6–8]:

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \left(\frac{m-1}{r} \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m d_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \right. \\ & \left. + \left(\frac{m-1}{r} \rho_n^k + \sum_{i=1}^m d_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \left[\tilde{e}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in-1}^k - n d_n^k) \right] \bar{u}_n^k \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \frac{(m-1)}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \quad (8)$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1t}^k + \frac{(m-1)}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k = -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m d_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m d_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in-2}^k - (n-1) d_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до k_1 , уравнение (10) — от 1 до k_n , а затем сложив полученные выражения вместе с уравнением (8), получим уравнение (7).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$, — решение системы (8)–(10), то оно является решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (11)$$

где $\bar{f}_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{f}_0^1(r, t) \equiv 0$.

Далее из краевого условия (3) в силу (6) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_{2n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

В (11), (12), произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_{2n}^k(t)$, получим:

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{(m-1)}{r} \bar{v}_{nr}^k - \bar{v}_{nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{v}_n^k = f_n^k(r, t), \quad (13)$$

$$\bar{v}_n^k(r, \beta) = \varphi_{2n}^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

$$f_n^k(r, t) = \bar{f}_n^k(r, t) + \psi_{2nt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} \psi_{2n}^k, \quad \varphi_{2n}^k(r) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r) - \psi_{2n}^k(\beta).$$



Произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{(1-m)/2} v_n^k(r, t)$, задачу (13), (14) приведем к следующей задаче:

$$L v_n^k \equiv v_{nrr}^k - v_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (15)$$

$$v_n^k(r, \beta) = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \quad (16)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \quad \tilde{f}_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} f_n^k(r, t), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{(m-1)/2} \varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (15), (16) ищем в виде

$$v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t), \quad (17)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$L v_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (18)$$

$$v_{1n}^k(r, \beta) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad (19)$$

а $v_{2n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$L v_{2n}^k = 0, \quad (20)$$

$$v_{2n}^k(r, \beta) = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0. \quad (21)$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (22)$$

при этом пусть

$$\tilde{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \quad (23)$$

Подставляя (22) в (18), (19) с учетом (23), получим:

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (24)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (25)$$

$$T_{st} + \mu T_s(t) = -a_{s,n}(t), \quad \beta < t < 0, \quad (26)$$

$$T_s(\beta) = 0. \quad (27)$$

Ограниченным решением задачи (24), (25) является [9]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (28)$$

где $\nu = n + (m - 2)/2$, $\mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_{\nu}(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (26), (27) является

$$T_{s,n}(t) = (\exp(-\mu_{s,n}^2 t)) \int_t^{\beta} a_{s,n}^k(\xi) (\exp \mu_{s,n}^2 \xi) d\xi. \quad (29)$$

Подставляя (28) в (23), получим:

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \quad (30)$$

Ряды (30) — разложения в ряды Фурье – Бесселя [10], если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi, t) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (31)$$



$$b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad (32)$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \dots$, — положительные нули функций Бесселя $J_{\nu}(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (22), (28), (29) получим решение задачи (18), (19)

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \quad (33)$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяются из (31).

Далее, подставляя (22) в (20), (21) с учетом (23), будем иметь задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 T_s = 0, \quad \beta < t < 0, \quad T_s(\beta) = b_{s,n}^k,$$

решением которого является

$$T_s(t) = b_{s,n} \exp \mu_{s,n}^2 (\beta - t). \quad (34)$$

Из (28), (34) будем иметь

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} \sqrt{r} (\exp \mu_{s,n}^2 (\beta - t)) J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \quad (35)$$

где $b_{s,n}$ находятся из (32).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) ($n = 0$), а затем (9), (12) ($n = 1$) и т. д., найдем последовательно все $v_n^k(r, t)$ из (17), где $v_{1n}^k(r, t)$, $v_{2n}^k(r, t)$ определяются из (33), (35).

Итак, в области Ω_{β} , имеет место

$$\int_H \rho(\theta) L_1 u dH = 0. \quad (36)$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$ — плотна в $L_2(H)$, $T(t) \in V_1$, V_1 — плотна в $L_2((\beta, 0))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ — плотна в $L_2(\Omega_{\beta})$ [11].

Отсюда и из (36) следует, что

$$\int_{\Omega_{\beta}} f(r, \theta, t) L_1 u d\Omega_{\beta} = 0$$

и

$$L_1 u = 0, \quad \forall (r, \theta, t) \in \Omega_{\beta}.$$

Таким образом, решением задачи (1), (3) в области Ω_{β} является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \quad (37)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$, $v_{2n}^k(r, t)$ находятся из (33), (35).

Учитывая формулу [10] $2J_{\nu}'(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки [5, 12]

$$J_{\nu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) + o \left(\frac{1}{z^{3/2}} \right), \quad \nu \geq 0, \quad (38)$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad l = 0, 1, \dots,$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\psi_2(t, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta)$, аналогично [4] можно доказать, что полученное решение (37) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_{\beta}) \cap C^2(\Omega_{\beta})$.



Далее, из (33), (35), (37) $t \rightarrow -0$ имеем:

$$u(r, \theta, 0) = \tau(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{39}$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{2n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)s}{2}} \left[\int_0^{\beta} d_{s,n}^k(\xi) (\exp \mu_{s,n}^2 \xi) d\xi + b_{s,n}^k (\exp \mu_{s,n}^2 \beta) \right] J_{\nu + \frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r).$$

Из (30)–(33), (35), а также из леммы вытекает, что $\tau(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $l > 3m/2$.

Таким образом, учитывая краевые условия (2) и (39), приходим в области Ω_α к задаче Дирихле для эллиптического уравнения:

$$L_2 u = \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t) u_{x_i} + b(r, \theta, t) u_t + c(r, \theta, t) u = 0 \tag{40}$$

с данными

$$u|_S = \tau(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \tag{41}$$

которое имеет единственное решение [4].

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлено.

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Сначала рассмотрим задачу (1), (3) в области Ω_β и докажем ее единственность решения. Для этого сначала построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^* v \equiv \Delta_x v + v_t - \sum_{i=1}^m d_i v_{x_i} + dv = 0, \tag{42}$$

с данными

$$v|_S = \tau(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad v|_{\Gamma_\beta} = 0, \tag{43}$$

где $d(x, t) = e - \sum_{i=1}^m d_{ix_i}$, $\bar{\tau}_n^k(r) \in G$, G — множество функций $\tau(r)$ из класса $C([0, 1]) \cap C^1((0, 1))$.

Множество G плотно всюду в $L_2((0, 1))$ [11]. Решение задачи (42), (43) будем искать в виде (6), где функции $\bar{v}_n^k(r, t)$ будут определены ниже. Тогда аналогично п. 2 функции $\bar{v}_n^k(r, t)$ удовлетворяют систему уравнений вида (8)–(10), где \tilde{d}_{in}^k , d_{in}^k заменены соответственно на $-\tilde{d}_{in}^k$, $-d_{in}^k$, \tilde{e}_n^k , \tilde{d}_n^k , $i = 1, \dots, m$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Далее, из краевого условия (43) в силу (6) получим:

$$\bar{v}_n^k(r, 0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{44}$$

Как ранее замечено, каждое уравнение системы (8)–(10) представимо в виде (11). Задачу (11), (44) приведем к следующей задаче:

$$L v_n^k \equiv v_{nrr}^k + v_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \tag{45}$$

$$v_n^k(r, 0) = \tau_n^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \tag{46}$$

$$v_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{v}_n^k(r, t), \quad \tilde{f}_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r, t), \quad \tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\tau}_n^k(r).$$

Решение задачи (45), (46) будем искать в виде (17), где $v_{1n}^k(r, t)$ — решение задачи для уравнения (18) с данными

$$v_{1n}^k(r, 0) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \tag{47}$$



а $v_{2n}^k(r, t)$ — решение задачи для уравнения (20) с условием

$$v_{2n}^k(r, 0) = \tau_n^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0. \quad (48)$$

Решения задач (18), (47) и (20), (48) соответственно имеют вид

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} \left[(\exp(\mu_{s,n}^2 t)) \int_0^t a_{s,n}^k(\xi) (\exp(-\mu_{s,n}^2 \xi)) d\xi \right] J_{\nu}(\mu_{s,n} r),$$

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \tau_{s,n} \sqrt{r} (\exp(\mu_{s,n}^2 t)) J_{\nu}(\mu_{s,n} r),$$

где

$$\tau_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tau_n^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad \nu = n + \frac{(m-2)}{2}.$$

Таким образом, решение задачи (42), (43) построено в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)] Y_{n,m}^k(\theta)$$

и в силу (38) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_{\beta}) \cap C^2(\Omega_{\beta})$.

В результате интегрирования по области Ω_{β} получаем [13] тождество

$$vL_1 u - uL_1^* v = -vP(u) + uP(v) - uvQ,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^m u_{x_i} \cos(N^{\perp}, x_i), \quad Q = \cos(N^{\perp}, t) - \sum_{i=1}^m d_i \cos(N^{\perp}, x_i),$$

$$\int_S \tau(r, \theta) u(r, \theta, 0) ds = 0. \quad (49)$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна $L_2(S)$ [11], то из (49) заключаем, что $u(r, \theta, 0) = 0$ при всех $(r, \theta) \in S$. Стало быть, по принципу экстремума для параболического уравнения (5) [14] $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_{\beta}$. Далее из принципа Хопфа [15] $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_{\alpha}$.

В [4] приводится явный вид решения задачи (40), (41), поэтому можно записать представления решения и для задачи 1.

Библиографический список

1. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллипτικο-параболических уравнений второго порядка : сб. переводов // Математика. 1963. Т. 7, № 6. С. 99–121.
2. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2010. 360 с.
3. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного эллипτικο-параболического уравнения // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 5–10.
4. Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 7–13.
5. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.
6. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы : Гылым, 1994. 170 с.
7. Алдашев С. А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 64–68.
8. Алдашев С. А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Орал : ЗКАТУ, 2007. 139 с.



9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 703 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : в 2 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 297 с.
11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1976. 543 с.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1966. 724 с.
13. Смирнов В. И. Курс высшей математики : в 5 т. Т. 4, ч. 2. М. : Наука, 1981. 550 с.
14. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М. : Мир, 1968. 527 с.
15. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1966. 352 с.

Well-posedness of the Dirichlet Problem for a Class of Multidimensional Elliptic-parabolic Equations

S. A. Aldashev

Serik A. Aldashev, Kazakhstan National Pedagogical University named Abay, 86, Tolebi st., 050012, Almaty, Kazakhstan, aldash51@mail.ru

Correctness of boundary problems in the plane for elliptic equations is well analyzed by analytic function theory of complex variable. There appear principal difficulties in similar problems when the number of independent variables is more than two. An attractive and suitable method of singular integral equations is less strong because of lack of any complete theory of multidimensional singular integral equations. In the work, the method proposed in the author's works, shows the unique solvability and obtained the explicit form of the Dirichlet problem in the cylindrical domain for a class of multidimensional elliptic-parabolic equations.

Key words: correctness, many-dimensional equation, Dirichlet problem, Bessel's function.

References

1. Fikera G. K edinoi teorii kraevykh zadach dlia elliptiko-parabolicheskikh uravnenii vtorogo poriadka [The unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order]. *Sbornik perevodov. Matematika*, 1963, vol. 7, no. 6, pp. 99–121 (in Russian).
2. Oleinik O. A., Radkevich E. V. *Uravneniia s neotritsatel'noi kharakteristicheskoi formoi* [Equations with nonnegative characteristic form]. Moscow, Moscow Univ. Press, 2010, 360 p. (in Russian).
3. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem in the cylindrical domain for the multidimensional elliptic-parabolic equation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 5–10 (in Russian).
4. Aldashev S. A. Correctness of Dirichlet's Problem in a Cylindrical Domain for a Single Class of Many-dimensional Elliptic Equations. *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Matem., Mekh., Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 7–13 (in Russian).
5. Mikhlin S. G. *Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations*. New York, Pergamon, 1965 (Russ. ed.: Mikhlin S. G. *Mnogomernnye singuliarnye integraly i integral'nye uravneniia*. Moscow, Physmathgiz, 1962, 254 p.).
6. Aldashev S. A. *Boundary-Value Problems for Multi-Dimensional Hyperbolic and Mixed Equations*. Almaty, Kazakhstan, Gylym Press, 1994, 170 p. (in Russian).
7. Aldashev S. A. On Darboux problems for a class of multidimensional hyperbolic equations. *Differentsialnye Uravneniya*, 1998, vol. 34, no. 1, pp. 64–68 (in Russian).
8. Aldashev S. A. *Degenerate multidimensional hyperbolic equation*. Oral, ZKATU, 2007, 139 p. (in Russian).
9. Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Handbook on Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965, 703 p. (in Russian).
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции [Higher Transcendental Functions]. Moscow, Nauka, 1974, vol. 2, 297 p. (in Russian).
11. Колмогоров А., Фомин С. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Mineola, NY, USA, Dover Publications, 1999. (Russ. ed. : Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*. Moscow, Nauka, 1976, 543 p.).
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Nauka, 1966, 724 p. (in Russian).
13. Смирнов В. И. *The higher mathematics course*. Moscow, Nauka, 1981, vol. 4, pt. 2, 550 p. (in Russian).
14. Фридман А. *Uravneniia s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial differential Equations of parabolic type]. Moscow, Mir, 1968, 527 p. (in Russian).
15. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. *Uravneniia s chastnymi proizvodnymi* [Partial differential equations]. Moscow, Mir, 1966, 352 p. (in Russian).



УДК 517.982.252+517.982.256

ПРОСТРАНСТВА МАЗУРА И 4.3-СВОЙСТВО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ (BM) -ПРОСТРАНСТВ

А. Р. Алимов

Алимов Алексей Ростиславович, доктор физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории вычислительных методов механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, alexey.alimov-msu@yandex.ru

Устанавливается ряд комбинаторно-геометрических свойств конечномерных (BM) -пространств. Такие пространства замечательны тем, что в них удается получить положительный ответ на ряд давно стоящих задач геометрической теории приближений, в частности, на вопрос о существовании непрерывных ε -выборок на солнца (множества Колмогорова) при всех $\varepsilon > 0$. Показано, что конечномерное полиэдральное (BM) -пространство является пространством Мазура, удовлетворяет 4.3-свойству пересечения, а его единичный шар является порождающим множеством (в смысле Половинкина – Балашова – Иванова).

Ключевые слова: (BM) -пространство, 4.3-свойство пересечения, пространство Мазура, множество Мазура, зонотоп, порождающее множество.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-133-137

При изучении связности солнц в линейных нормированных пространствах А. Л. Браун (A. L. Brown) [1] ввел класс (BM) линейных нормированных пространств. В таких пространствах оказывается возможным установить ряд нетривиальных геометрическо-топологических свойств солнц (см. [2]) и в том числе доказать существование непрерывных ε -выборок на них для любого $\varepsilon > 0$. В частности, известно, что в (BM) -пространстве любое ограниченно компактное солнце монотонно линейно связно [2]; более того, такое свойство характеризует полиэдральные конечномерные (BM) -пространства [3].

Ниже все пространства будут предполагаться действительными.

Напомним, что линейное нормированное пространство X называется (BM) -пространством, если

$$B(0, \|x\|) \cap (m(x, y) \setminus \{x\}) \neq \emptyset, \quad \text{когда} \quad [x, x-y] \cap \overset{\circ}{B}(0, \|x\|) = \emptyset.$$

Здесь $m(x, y)$ — пересечение всех замкнутых шаров, содержащих x и y (оболочка Банаха – Мазура, или шаровая оболочка точек x и y), $B(x, r)$ и $\overset{\circ}{B}(x, r)$ — соответственно замкнутый и открытый шары с центром x и радиусом r .

Класс (BM) -пространств содержит в себе все гладкие пространства, все двумерные пространства с полиэдральным единичным шаром, пространства $\ell^\infty(n)$, c_0 , c , ℓ^∞ , все замкнутые идеалы пространства $C(Q)$, все подрешетки $C(Q)$ с единицей, а также замкнут по отношению к формированию конечной ℓ^∞ -прямой суммы [1] и бесконечной c_0 -прямой суммы сепарабельных (BM) -пространств. (Если X_1 , X_2 — линейные нормированные пространства, то ℓ^∞ -прямой суммой X_1 и X_2 называется прямая сумма X_1 и X_2 с нормой $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max\{\|x_1\|_{X_1}, \|x_2\|_{X_2}\}$.) Строго выпуклое пространство лежит в классе (BM) , если и только если оно гладкое. Любое двумерное пространство с полигональным шаром лежит в классе (BM) . Известно, что ℓ^1 , $\ell^1(n) \notin (BM)$, $n \geq 3$. Для более подробного ознакомления с результатами, упомянутыми выше, мы отсылаем читателя к обзору [2].

Напомним, что конечномерное пространство называется полиэдральным, если его единичная сфера содержит конечное число крайних точек.

Браун [1, 3] установил, что полиэдральные (BM) -пространства конечной размерности в точности являются ℓ^∞ -прямыми суммами

$$X = X_1 \oplus_\infty \dots \oplus_\infty X_r \quad (1)$$

конечного набора симметричных полиэдральных пространств X_1, \dots, X_r размерности 1 или 2. Браун [3] также получил характеристику двумерных и трехмерных (BM) -пространств. Характеристика Брауна трехмерных (BM) -пространств записывается следующим образом:

$$X \text{ гладко или имеет вид } X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}, \text{ где } Y \text{ — двумерное } (BM)\text{-пространство.} \quad (2)$$



Ниже мы устанавливаем ряд комбинаторно-геометрических свойства конечномерных (BM) -пространств.

Многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$ называется *зонотопом*, если его можно представить в виде проекции куба $C_d \subset \mathbb{R}^d$ некоторой размерности. Зонотоп является центрально-симметричным многогранником, у которого все грани любой размерности центрально-симметричны. Хорошо известно, любой двумерный политоп P является зонотопом, если и только если P центрально-симметричен. Из этой характеристики и определения прямой суммы следует, что единичный шар конечномерного полиэдрального (BM) -пространства (полиэдрального пространства вида (1)) необходимо является зонотопом [3]. Как следствие, все грани единичного шара полиэдрального (BM) -пространства центрально-симметричны. (Этот факт, очевидно, перестает быть верным для неполиэдральных пространств.) Отсюда вытекает, в частности, что $\ell^1(n) \notin (BM)$, $n \geq 3$.

Замечание 1. Класс всех зонотопов не исчерпывается шарами полиэдральных пространств вида (1) (шарами полиэдральных (BM) -пространств). Действительно, хорошо известно, что в трехмерном случае существует в точности пять комбинаторно различных параллелепипедов: куб, центрально-симметричная шестиугольная призма, ромбододекаэдр, удлиненный додекаэдр и усеченный кубооктаэдр (многогранник $P \subset \mathbb{R}^d$ размерности d называется d -мерным *параллелепипедом*, если пространство \mathbb{R}^d можно разбить на параллельные копии P , не пересекающиеся по внутренним точкам). В двумерном и трехмерном случаях любой параллелепипед является зонотопом (однако это уже не так в случае размерности 4). Легко видеть, что указанные выше параллелепипеды (зонотопы) с номерами 3–5 не представляются в виде (1).

Также несложно убедиться в том, что шар полиэдрального пространства вида (1) не обязан являться параллелепипедом. Действительно, рассматривая в \mathbb{R}^3 шар, образованный \oplus_∞ -прямой суммой отрезка и произвольного центрально-симметричного многогранника, не замощающего плоскость, мы получаем шар полиэдрального (BM) -пространства, не являющийся параллелепипедом.

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k \geq 2$. Пространство X имеет $n.k$ -свойство пересечения ($X \in (n.k.I.P)$), если для любого набора n замкнутых шаров $B(a_i, r_i)$, $i = 1, \dots, n$, таких, что $\bigcap_{r=1}^k B(a_{i_r}, a_{i_r}) \neq \emptyset$ при $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$, пересечение $\bigcap_{i=1}^n B(a_i, r_i) \neq \emptyset$ также непусто. Данное понятие введено и исследовалось О. Лимой и независимо В. Г. Болтянским и П. С. Солтаном, которые получили ряд фундаментальных результатов о свойствах $(n.k.I.P)$ -пространств. В последние годы наблюдается значительный интерес к $(n.k.I.P)$ -пространствам в связи с вопросами минимального заполнения подмножеств банаховых пространств и оптимальными сетями (см., например, Б. Б. Беднов и П. А. Бородин [4], А. О. Иванов, А. А. Тужилин, З. Н. Овсянников и др.).

Согласно классической теореме Хелли из выпуклого анализа, если $\dim X = n$, то $X \in ((n+2).(n+1).I.P)$; как следствие, любое одно- или двумерное пространство лежит в классе $(4.3.I.P)$. Это влечет, что \oplus_∞ -прямая сумма таких пространств также обладает свойством $(4.3.I.P)$. Обратное утверждение установлено О. Лимой (Á. Lima; см. [5]), а также независимо В. Г. Болтянским и П. С. Солтаном [6, замечание 7.9] в терминах чисел Ханнера. Приведем соответствующий результат.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело и k — натуральное число. Тогда k -е число Ханнера $\beta_k(M)$ определяется следующим образом:

$$\beta_k(M) := \sup\{m \mid X \in (m.k.I.P)\},$$

где X — (полу)нормированное пространство, имеющее M своим (квази)шаром. В [6] показано, что если M компактно и $\beta_2(M) = \infty$, то M — параллелепипед. Более того, если M — выпуклое компактное центрально-симметричное тело и $\beta_3(M) = \infty$ (т.е. $X \in (\infty.3.I.P)$), то M представляется в виде (1) конечного набора пространств X_1, \dots, X_r размерности 1 или 2.

Таким образом, если X конечномерно и полиэдрально, то

$$X \in (4.3.I.P) \iff X = X_1 \oplus_\infty \dots \oplus_\infty X_r,$$

где $\dim X_i \leq 2$. Отсюда с учетом (1) и (2) вытекает следующее утверждение.



Предложение 1. Предположим, что X конечномерно и полиэдрально или $\dim X = 3$ и X негладко. Тогда следующие свойства эквивалентны: а) $X \in (ВМ)$; б) $X \in (4.3.I.P)$.

Отсюда, с учетом того, что если $X \in (4.3.I.P)$, $\dim X < \infty$, то $X \in (\infty.3.I.P)$ (см., например, Болтянский, Мартини, Солтан [7, § VIII, теорема 5]), то мы приходим к следующему результату: если $X \in (ВМ)$ имеет конечную размерность и полиэдрально или $\dim X = 3$ и X негладко, то $X \in (\infty.3.I.P)$.

Замечание 2. Стоит упомянуть, что пространство $X = \ell^\infty(n)$ лежит в классе (ВМ) и удовлетворяет более сильному свойству пересечения (4.2.I.P), причем пространства $X = \ell^\infty(n)$ в точности составляют класс конечномерных (4.2.I.P)-пространств (последнее утверждение установлено в [5]).

Замечание 3. Пространство \mathbb{R}^3 с евклидовой нормой лежит в классе (ВМ) (как гладкое пространство), но не удовлетворяет свойству пересечения (4.3.I.P) (для доказательства этого достаточно рассмотреть четыре шара с центрами в вершинах правильной пирамиды).

Установим ещё одно свойство конечномерных (ВМ)-пространств.

Напомним, что замкнутое ограниченное выпуклое множество M называется *множеством Мазура* (см. [8, 9]), если выполняется следующее свойство отделимости: для любой гиперплоскости H , находящейся на положительном расстоянии от M , найдется шар B такой, что $M \subset B$ и $H \cap B = \emptyset$. Это определение эквивалентно тому, что если $f \in X^*$, $\sup f(M) < \lambda$, то найдется шар $B \supset M$ такой, что $\sup f(B) < \lambda$. Линейное нормированное пространство, в котором класс множеств Мазура совпадает с классом пересечений замкнутых шаров, называется *пространством Мазура* (такой класс пространств введен А. С. Гранеро (A. S. Granero) и Х. Морено (J. P. Moreno); см. [8, 9]) в честь Станислава Мазура, который первым установил (1933 г.), что любое замкнутое ограниченное выпуклое подмножество \mathbb{R}^n можно представить в виде пересечения замкнутых евклидовых шаров.

Пространства Мазура естественно возникают в связи с вопросом об устойчивости пересечений выпуклых подмножеств линейных нормированных пространств. Классическими примерами пространств Мазура являются классические пространства $c_0(I)$, $\ell^\infty(I)$, $C(K)$, K — стоуновский хаусдорфов компакт, а также любое двумерное пространство (см. [8]). Класс пространств Мазура также включает в себя все рефлексивные пространства с дифференцируемой по Фреше нормой [9]. Известно, что $\ell^1(3)$ не является пространством Мазура. Легко проверяется, что \oplus_∞ -прямая сумма пространств Мазура является пространством Мазура.

Предложение 2. В классе конечномерных полиэдральных пространств X следующие свойства эквивалентны: а) $X \in (ВМ)$; б) X является пространством Мазура.

Доказательство предложения 2. Согласно следствию 4.2 из обзора [9] конечномерное полиэдральное пространство X является пространством Мазура, если и только если семейство \mathcal{M}_X пересечений замкнутых шаров в X устойчиво — это означает по определению, что $\overline{C + D} \in \mathcal{M}_X$ (замыкание векторной суммы множеств C и D), если $C, D \in \mathcal{M}_X$. Далее [9, теорема 3.2], в конечномерном полиэдральном пространстве семейство \mathcal{M}_X устойчиво, если и только если X представимо в виде (1) (или эквивалентно единичный шар X представляется как прямая сумма выпуклых многогранников размерности один или два). Теперь для окончания доказательства остается вспомнить, что конечномерные полиэдральные (ВМ)-пространства характеризуются свойством (1). \square

Следующий основной результат следует из предложений 1 и 2 и замечания 3.

Теорема. 1. В классе конечномерных полиэдральных пространств X следующие свойства эквивалентны: а) $X \in (ВМ)$; б) X — пространство Мазура; в) $X \in (4.3.I.P)$.

2. Если $\dim X = 3$, то условия а) и б) эквивалентны, при этом ни одно из этих условий не влечет в).

3. Если $\dim X = 3$ и негладко, то условия а)–в) эквивалентны.

Отметим, что в пп. 1, 2 пространство X не предполагается полиэдральным.



Замечание 4. Хорошо известно, что если норма $\| \cdot \|$ конечномерного банахова пространства дифференцируема, по Гато, в точке x , то она дифференцируема по Фреше в x . С учетом сказанного выше отсюда вытекает, что любое конечномерное гладкое пространство является пространством Мазура (а также (BM) -пространством).

Отметим связь между шарами (BM) -пространств и порождающими множествами. Выпуклое замкнутое множество $M \subset X$ называется *порождающим множеством* (см., например, [10]), если для любого множества $C \subset X$ такого, что множество $A = \bigcap_{c \in C} (M - c)$ непусто, существует выпуклое замкнутое множество $B \subset X$ такое, что замыкание (геометрической) суммы $A + B$ совпадает с M . Понятие порождающего множества было введено Е. С. Половинкиным и далее активно исследовалось в работах Г. Е. Иванова, М. В. Балашова, Р. Н. Карасева, Х. Морено, Р. Шнайдера и др. Название «порождающее» связано с тем, что каждое такое множество M порождает класс M -сильно выпуклых множеств, элементами которого являются множества, образованные всевозможными пересечениями сдвигов множества M . Известны некоторые классы порождающих множеств. К ним относятся эллипсоиды, надграфики квадратичных положительно определенных функций, плоские выпуклые замкнутые множества. Шар пространства $\ell^1(3)$ не является порождающим множеством. Полное описание порождающих множеств остается открытой проблемой [10, 11].

Напомним, что прямая сумма порождающих множеств является порождающим множеством [10, теорема 2.4]. Соответственно, если конечномерное полиэдральное X лежит в классе (BM) , то его единичный шар представляется в виде (1) как прямая сумма одно- и двумерных многоугольников. Поэтому такое пространство имеет порождающий шар. С другой стороны, любое гладкое (по Гато) пространство является (BM) -пространством (см. [2]) и, значит, *не всякое гладкое (BM) -пространство имеет порождающий шар* — это следует, например, из известной характеристики Г. Е. Иванова гладких порождающих множеств [11].

Нами получен следующий результат.

Предложение 3. *Предположим, что $X \in (BM)$ конечномерно и полиэдрально или $\dim X = 3$ и X негладко. Тогда X имеет порождающий единичный шар.*

Следующий результат фактически содержится в [12, лемма 4.12].

Предложение 4. *Если пространство Мазура X рефлексивно, то единичный шар пространства X является порождающим множеством.*

Обратная импликация в предложении 4 неверна в общем случае: любое гладкое (по Гато) конечномерное пространство является пространством Мазура, но не все гладкие пространства (размерности ≥ 3) обладают порождающим единичным шаром [11].

Замечание 5. В заключение отметим связь (полиэдральных конечномерных или негладких трехмерных) (BM) -пространств с известным неравенством Шнайдера об объемах проекционных тел [13]: согласно гипотезе Шнайдера (см., например, [13, § 7.4]) неравенство Шнайдера превращается в равенство в точности на пространствах вида (1), где X_1, \dots, X_r — конечный набор банаховых пространств размерности 1 или 2 (т.е. на указанном выше классе (BM) -пространств).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

Библиографический список

1. Brown A. L. Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional // Math. Ann. 1987. Vol. 279. P. 87–101. DOI: 10.1007/BF01456192.
2. Алимов А. Р., Царьков И. Г. Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышёвских множеств // Фунд. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 4. С. 21–91.
3. Brown A. L. Suns in polyhedral spaces // Seminar of Math. Analysis. Proceedings / eds. D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo, R. V. Caro; Univ. Malaga and Seville (Spain), Sept. 2002 – Febr. 2003. Sevilla : Universidad de Sevilla, 2003. P. 139–146.
4. Беднов Б. Б., Бородин П. А. Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 4. С. 3–20.
5. Hansen A. B., Lima Á. The structure of finite dimensional Banach spaces with the 3.2. intersection property // Acta Math. 1981. Vol. 146. P. 1–23. DOI: 10.1007/BF02392457.



6. Болтянский В. Г., Солтан П. С. Комбинаторная геометрия и классы выпуклости // УМН. 1978. Т. 33, вып. 1 (199). С. 3–42. DOI: 10.1070/RM1978v033n01ABEH003730.
7. Boltyanski V., Martini H., Soltan P. S. Excursions into combinatorial geometry. Berlin : Springer, 1997. 422 p. DOI: 10.1007/978-3-642-59237-9.
8. Granero A. S., Moreno J. P., Phelps R. R. Mazur sets in normed spaces // Discrete Comput Geom. 2004. Vol. 31. P. 411–420. DOI: 10.1007/s00454-003-0808-5.
9. Moreno J. P., Schneider R. Intersection properties of polyhedral norms // Adv. Geom. 2007. Vol. 7, № 3. P. 391–402. DOI: 10.1515/ADVGEOM.2007.025.
10. Балашов М. В., Половинкин Е. С. M -сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 1. С. 26. DOI: 10.4213/sm447.
11. Иванов Г. Е. Критерий гладких порождающих множеств // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 3. С. 51–76. DOI: 10.4213/sm1481.
12. Балашов М. В., Иванов Г. Е. Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, № 3. С. 23–66. DOI: 10.4213/im2646.
13. Schneider R. Convex bodies : The Brunn – Minkowski theory. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1993. DOI: 10.1017/CBO9780511526282.

Mazur Spaces and 4.3-intersection Property of (BM) -spaces

A. R. Alimov

Alexey R. Alimov, Moscow State University, Vorob'evy gory, 119899, Moscow, Russia, alexey.alimov-msu@yandex.ru

The paper puts forward some combinatorial and geometric properties of finite-dimensional (BM) -spaces. A remarkable property of such spaces is that in these spaces one succeeds in giving an answer to some long-standing problems of geometric approximation theory, and in particular, to the question on the existence of continuous ε -selections on suns (Kolmogorov sets) for all $\varepsilon > 0$. A finite-dimensional polyhedral (BM) -space is shown to be a Mazur space, satisfies the 4.3-intersection property, and its unit ball is proved to be a generating set (in the sense of Polovinkin, Balashov, and Ivanov).

Key words: (BM) -space, 4.3-intersection property, Mazur space, Mazur set, zonotope, generating set.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00295).

References

1. Brown A. L. Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional. *Math. Ann.*, 1987, vol. 279, pp. 87–101. DOI: 10.1007/BF01456192.
2. Alimov A. R., Tsar'kov I. G. Connectedness and other geometric properties of suns and Chebyshev sets. *Fund. prikl. matem.*, 2014, vol. 19, no. 4, pp. 21–91 (in Russian).
3. Brown A. L. Suns in polyhedral spaces. *Seminar of Mathem. Analysis*, Proceedings, eds.: D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo, R. V. Caro, Univ. Malaga and Seville (Spain), Sept. 2002 – Feb. 2003. Universidad de Sevilla, Sevilla, 2003, pp. 139–146.
4. Bednov B. B., Borodin P. A. Banach spaces that realize minimal fillings. *Sb. Math.*, 2014, vol. 205, no. 4, pp. 3–20. DOI: 10.1070/SM2014v205n04ABEH004383.
5. Hansen A. B., Lima Á. The structure of finite dimensional Banach spaces with the 3.2. intersection property. *Acta Math.*, 1981, vol. 146, pp. 1–23. DOI: 10.1007/BF02392457.
6. Boltyanskii V. G., Soltan P. S. Combinatorial geometry and convexity classes. *Russian Math. Surveys*, 1978, vol. 33, no. 1 (199), pp. 1–45. DOI: 10.1070/RM1978v033n01ABEH003730.
7. Boltyanskii V., Martini H., Soltan P. S. *Excursions into Combinatorial Geometry*. Berlin, Springer, 1997, 422 p. DOI: 10.1007/978-3-642-59237-9.
8. Granero A. S., Moreno J. P., Phelps R. R. Mazur sets in normed spaces. *Discrete Comput Geom.*, 2004, vol. 31, pp. 411–420. DOI: 10.1007/s00454-003-0808-5.
9. Moreno J. P., Schneider R. Intersection properties of polyhedral norms. *Adv. Geom.*, 2007, vol. 7, no. 3, pp. 391–402. DOI: 10.1515/ADVGEOM.2007.025.
10. Balashov M. V., Polovinkin E. S. M -strongly convex subsets and their generating sets. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 1, pp. 26–64. DOI: 10.1070/SM2000v191n01ABEH000447.
11. Ivanov G. E. A criterion of smooth generating sets. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 3, pp. 343–368. DOI: 10.1070/SM2007v198n03ABEH003839.
12. Balashov M. V., Ivanov G. E. Weakly convex and proximally smooth sets in Banach spaces. *Izv. Math.*, 2009, vol. 73, no. 3, pp. 455–499. DOI: 10.1070/IM2009v073n03ABEH002454.
13. Schneider R. *Convex Bodies : The Brunn – Minkowski Theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 1993. DOI: 10.1017/CBO9780511526282.



УДК 535:621

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И ЭЛЕКТРОПЕРЕНОСА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СИЛЬНОТОЧНОГО ИМПУЛЬСА НА ЭЛЕКТРОД

Р. В. Арутюнян

Арутюнян Роберт Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Московский технический университет связи и информатики, rob57@mail.ru

В статье исследовано влияние нелинейностей теплофизических параметров и фазовых переходов плавления и испарения на электрические и тепловые процессы при нагреве металлического электрода сильноточным импульсом. Сформулирована математическая модель, а также разработаны конечно-разностный метод и программы для ЭВМ, позволяющие эффективно осуществлять компьютерное моделирование тепло- и электрофизических процессов при воздействии сильноточного импульса на металлические электроды. Расчет полей осуществляется на основе сквозного энтальпийного метода. Осуществлена серия расчетов для информативного случая железа. Установлено значительное влияние нелинейностей теплофизических параметров, фазовых переходов плавления и испарения, вида краевых условий на значения температурного и электрического полей.

Ключевые слова: металлический электрод, сильноточный импульс, электрическое поле, температурное поле, расчет, сквозной энтальпийный метод.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-138-144

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В теории электрических контактов, плазмотронов, электросварки и т.д. является актуальной задача расчета электрического и температурного полей с учетом нелинейностей электро- и теплофизических свойств материала, фазовых переходов и других факторов [1–4]. В предлагаемой статье результаты отмеченных исследований развиваются на основе сквозного «энтальпийного» метода, позволяющего эффективно учитывать нелинейности теплофизических характеристик материала, фазовые переходы (плавления, испарения), радиационное и конвективное охлаждения поверхности материала.

Расчет тепло- и электрофизических процессов осуществляется на основе нестационарной пространственной осесимметричной модели. Предполагается, что электрод занимает полупространство $z > 0$, z — пространственная координата (аппликата) в цилиндрической системе координат. Ток величиной I_0 проводится через токовое пятно радиусом R_0 на поверхности электрода ($z = 0$).

1.1. Задача Стефана

При моделировании рассматриваются три этапа теплового процесса: нагрев материала до температуры плавления (твердая фаза); нагрев расплава и дальнейшее проплавление твердой части материала (жидкая фаза); начало интенсивного испарения и кипения материала (фаза испарения и кипения).

В статье для целей компьютерного моделирования применялся численный метод сквозного счета [5, 6], основанный на преобразовании многофазной задачи Стефана к «энтальпийному» виду с сосредоточенной теплоемкостью. Краевая задача для уравнения теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Lambda}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} + q_V, \quad r > 0, \quad z > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial z} = q_s, \quad z = 0, \quad r > 0, \quad t > 0; \quad q_s = \sigma(u^4 - u_0^4) + k(u - u_0) - q_{\text{исп}}(u), \quad (2)$$

$$u = u_0, \quad r > 0, \quad z > 0, \quad t = 0; \quad u \rightarrow u_0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial Q}{\partial r} = 0 \quad (r = 0), \quad (3)$$

где Q — энтальпия: $Q(u) = \int_{u_0}^u \rho(v)c(v)dv + \rho_1 u_{\text{пл}} r_{\text{пл}} 1(u - u_{\text{пл}})$, $1(u)$ — единичная функция, u — температура, $u_{\text{пл}}$ — температура плавления, $r_{\text{пл}}$ — скрытая теплота плавления, u_0 — начальное значение температуры тела ($u_0 < u_{\text{пл}}$), $\rho = \rho(u)$ — массовая плотность, $\rho_1(u)$ — плотность твердой фазы,



соответственно $\rho_2(u)$ — плотность расплава, $c = c(u)$ — удельная теплоемкость материала электрода, Λ — тепловой потенциал: $\Lambda(u) = \int_{u_0}^u \lambda(v) dv$, $\lambda(u)$ — теплопроводность, t — время, r — полярный радиус, σ — постоянная Стефана–Больцмана, k — коэффициент конвективного теплообмена, W_0 — энергия, а t_F — время токового импульса, q_V — плотность джоулевых источников: $q_V = \gamma |\nabla \varphi|^2$, где $\gamma = \gamma(u)$ — электропроводность, φ — электрический потенциал, $q_{исп}$ — удельные потери на испарение с поверхности материала: $q_{исп} = \rho_2(u) r_{исп} v_{исп}$, где $r_{исп}$ — скрытая теплота, а $v_{исп}$ — скорость фронта испарения:

$$v_{исп} = \sqrt{\frac{M}{2\pi R u_s} \frac{p(u_s)}{\rho_2(u_s)}},$$

где p — давление насыщенного пара при температуре поверхности $u_s = u(r, 0, t)$, M — масса моля и R — газовая постоянная. Давление насыщенного пара: $p(u_s) = p_0 \exp\left(\frac{M r_{исп}}{R u} - \frac{M r_{исп}}{R u_s}\right)$, где p_0 — давление газа окружающей тело среды, u — температура кипения при давлении p_0 . Толщина испаренного слоя $z_{исп}(t)$ определялась как интеграл: $z_{исп}(t) = \int_0^t v_{исп} dt$.

1.2. Модель электрического поля

Электрический потенциал является решением краевой задачи [1–4, 7]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \gamma(u) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma(u) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad r > 0, \quad z > 0. \quad (4)$$

В исследовании рассматривались два вида краевых условий:

$$-\gamma(u) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{cases} \frac{I_0}{\pi R_0^2}, & r \leq R, \quad z = 0, \\ 0, & r > R_0, \quad z = 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\varphi = \varphi_0, \quad r \leq R_0, \quad z = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad r > R_0, \quad z = 0. \quad (6)$$

В (5) предполагается, что ток в токовом пятне распределен равномерно. Соответствующим примером является воздействие электрической дуги или молнии на электрод. В (6) в токовом пятне электрический потенциал принимает постоянное значение, что соответствует задачам теории электрических контактов (как известно, линии тока перпендикулярны контактной площадке) [1–4]. Условие на бесконечности: $\varphi \rightarrow 0$ при $\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$. На оси симметрии ($r = 0$): $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$.

2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Дифференциальные соотношения краевой задачи приближенно заменяются системой конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{i,j}^{p+1} - Q_{i,j}^p}{\tau} &= \frac{1}{r_i \check{h}_{r,i}} \left(\check{r}_{i+1} \frac{\Lambda_{i+1,j}^{p+1} - \Lambda_{i,j}^{p+1}}{h_{r,i+1}} - \check{r}_i \frac{\Lambda_{i,j}^{p+1} - \Lambda_{i-1,j}^{p+1}}{h_{r,i+1}} \right) + \\ &+ \frac{1}{\check{h}_{z,j}} \left(\frac{\Lambda_{i,j+1}^{p+1} - \Lambda_{i,j}^{p+1}}{h_{z,j+1}} - \frac{\Lambda_{i,j}^{p+1} - \Lambda_{i,j-1}^{p+1}}{h_{z,j}} \right) + q_{V,i,j}^{p+1}, \\ i &= 1, \dots, n_r - 1, \quad j = 1, \dots, n_z - 1, \quad p = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где τ — шаг по времени, $t_p = p\tau$, p — номер временного слоя; $h_{r,i}$ — шаг сетки по координате r , i — номер узла сетки координаты r , $h_{z,j}$ — шаг сетки по координате z , j — номер узла сетки пространственной координаты z , $\check{h}_{r,i} = (h_{r,i} + h_{r,i+1})/2$, $\check{h}_{z,j} = (h_{z,j} + h_{z,j+1})/2$, $u_{i,j}^p$ — сеточная функция, $u_{i,j}^p \approx u(r_i, z_j, t_p)$, $i = 0, \dots, n_r$, $j = 0, \dots, n_z$, $p = 0, 1, \dots$, $Q_{i,j}^p = Q(u_{i,j}^p)$, $\Lambda_{i,j}^p = \Lambda(u_{i,j}^p)$.

Начальное условие запишется в виде: $u_{i,j}^0 = u_0$, $i = 0, \dots, n_r$, $j = 0, \dots, n_z$.

Краевое условие на поверхности тела с первым порядком точности:

$$\lambda(u_{i,0}^p) \frac{u_{i,1}^p - u_{i,0}^p}{h_{z,1}} = q_s(u_{i,0}^p), \quad i = 0, \dots, n_r, \quad p = 1, 2, \dots$$



со вторым порядком точности:

$$u_{i,0}^p = \frac{(h_{z,1} + h_{z,2})^2}{(2h_{z,1} + h_{z,2})h_{z,2}} u_{i,1}^p - \frac{h_{z,1}^2}{(2h_{z,1} + h_{z,2})h_{z,2}} u_{i,2}^p - \frac{h_{z,1}(h_{z,1} + h_{z,2})}{(2h_{z,1} + h_{z,2})} \frac{q_s(u_{i,0}^p)}{\lambda(u_{i,0}^p)}.$$

Условие на оси симметрии с первым порядком точности: $Q_{0,j}^p = Q_{1,j}^p$; со вторым порядком точности ($j = 1, \dots, n_z - 1, p = 0, 1, \dots$):

$$Q_{0,j}^p = \frac{(h_{r,1} + h_{r,2})^2}{2h_{r,1} + h_{r,2}} \frac{h_{r,2}}{Q_{1,j}^p} - \frac{h_{r,1}^2}{2h_{r,1} + h_{r,2}} \frac{h_{r,2}}{Q_{2,j}^p}.$$

Условия на границах сеточной области, соответствующие условиям на бесконечности: $Q_{n_r,j}^p = 0, j = 1, \dots, n_z - 1, Q_{i,n_z}^p = 0, i = 0, \dots, n_r, p = 0, 1, \dots$.

Система конечно-разностных уравнений, аппроксимирующая краевую задачу для электрического потенциала:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_i \check{h}_{r,i}} \left(\check{r}_{i+1} \check{\gamma}_{i+1,j}^p \frac{\varphi_{i+1,j}^p - \varphi_{i,j}^p}{h_{r,i+1}} - \check{r}_i \check{\gamma}_{i,j}^p \frac{\varphi_{i,j}^p - \varphi_{i-1,j}^p}{h_{r,i}} \right) + \\ & + \frac{1}{\check{h}_{z,j}} \left(\check{\gamma}_{i,j+1}^p \frac{\varphi_{i,j+1}^p - \varphi_{i,j}^p}{h_{z,j+1}} - \check{\gamma}_{i,j}^p \frac{\varphi_{i,j}^p - \varphi_{i,j-1}^p}{h_{z,j}} \right) = 0, \\ & i = 1, \dots, n_r - 1, \quad j = 1, \dots, n_z - 1, \quad p = 0, 1, \dots; \\ & \check{\gamma}_{i,j}^p = \frac{\gamma_{i,j-1}^p + \gamma_{i,j}^p}{2}, \quad \gamma_{i,j}^p = \gamma(u_{i,j}^p), \end{aligned}$$

$$q_{V,i,j}^p = \gamma_{i,j}^p (E_{r,i,j}^2 + E_{z,i,j}^2), \quad E_{r,i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j}^p - \varphi_{i-1,j}^p}{2\check{h}_{r,i}}, \quad E_{z,i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j}^p - \varphi_{i-1,j}^p}{2\check{h}_{z,j}}.$$

Конечно-разностная аппроксимация краевых условий на границах области:

Для случая (5):

$$-\check{\gamma}_{i,0}^p \frac{\varphi_{i,1}^p - \varphi_{i,0}^p}{h_{z,1}} = \begin{cases} I_0 / (\pi R_0^2), & r_i \leq R_0, \\ 0, & r_i > R_0, \end{cases} \quad i = 0, \dots, n_r, \quad p = 0, 1, \dots$$

Для случая (6): $\varphi_{i,0}^p = \varphi_0$ при $r_i \leq R_0, \varphi_{i,0}^p = \varphi_{i,1}^p, i = 0, \dots, n_r, p = 0, 1, \dots$.

Условие на оси симметрии: $\varphi_{0,j}^p = \varphi_{1,j}^p, j = 1, \dots, n_z - 1, p = 0, 1, \dots$.

Сеточные уравнения, соответствующие условию на бесконечности:

$$\varphi_{i,n_z}^p = 0, \quad i = 0, \dots, n_r, \quad \varphi_{n_r,j}^p = 0, \quad j = 1, \dots, n_z - 1, \quad p = 0, 1, \dots$$

На каждом временном слое система конечно-разностных уравнений решалась методом Зейделя. Вначале осуществлялся расчет электрического поля, что позволяло рассчитать плотность джоулевых источников. На следующем этапе для каждого внутреннего узла сетки система решалась методом Ньютона относительно сеточного значения энтальпии $Q_{i,j}^{p+1}$ при известном $Q_{i,j}^p, i = 1, \dots, n_r - 1, j = 1, \dots, n_z - 1$. По этим значениям вычислялась температура в тех же узлах сетки: $u_{i,j}^{p+1} = Q^{-1}(Q_{i,j}^{p+1}), p = 0, 1, \dots$, где Q^{-1} — функция, обратная к функции $Q(u)$, вычислявшаяся также методом Ньютона как решение нелинейного уравнения относительно вида: $Q(y) = z$. Величина $u_{i,0}^{p+1}$ в конечно-разностной производной краевого условия при $z = 0$ выражалась через остальную часть выражения и также находилась в процессе итераций по методу Зейделя.

Контроль погрешности численного решения осуществлялся по значениям теплового и токового баланса (порядка 5%).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В качестве материала рассмотрено железо, которое характеризуется нелинейностью теплофизических характеристик [8, 9]. Размер расчетной области, длительность и величина токового импульса были выбраны типичными для электрических контактов: $L_r = 10^{-3}$ м, $L_z = 10^{-3}$ м, $t_F = 2.25 \cdot 10^{-3}$ с, $I_0 = 500$ А. Площадь и радиус токового пятна: $S_0 = 10^{-7}$ м², $R_0 = \sqrt{S_0/\pi}$.



Параметры конечно-разностного метода выбирались в соответствии с требованиями точности: $n_r = 30$, $n_z = 70$, $\tau = 10^{-6}$.

Область в районе токопроводящего пятна с размерами $L_r = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $L_z = 5 \cdot 10^{-4}$ м покрывалась сеткой с меньшим шагом при количестве узлов: $n_{r0} = 20$, $n_{z0} = 50$.

3.1. Результаты для первого варианта краевых условий (5)

На рис. 1 представлены серии графиков температурного поля в зависимости от пространственных координат (1 — зависимости от z , r фиксированное, 2 — зависимости от r , z фиксированное, шаг по времени $2.5 \cdot 10^{-4}$ с). Из общего множества графиков на рисунках здесь и далее представлен каждый третий.

На рис. 2 представлены графики (в относительных единицах) зависимости от времени координат фронтов фазовых переходов (1 — среднее значение в токовом пятне, 2 — в начале координат, 3 — график максимальной температуры, 4 — $z_{пл}(t)$, 5 — $z_{исп}(t)$). Наибольшие значения координат фронтов фазовых переходов: $x_{пл}(t_F) = 80$ мкм, $x_{исп}(t_F) = 3.4$ мкм. Скорости движения фронта испарения: $v_{исп}(t_F) = 0.02$ м/с.

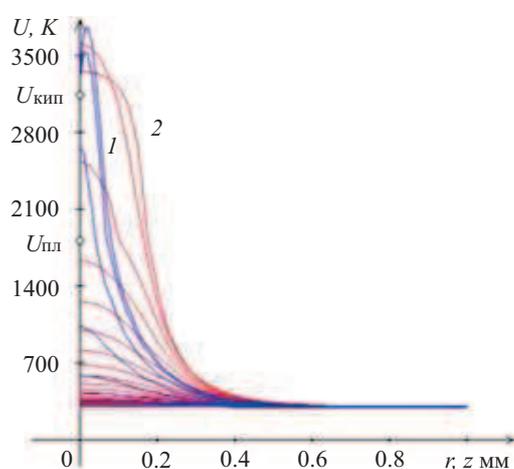


Рис. 1. Графики профилей температурного поля

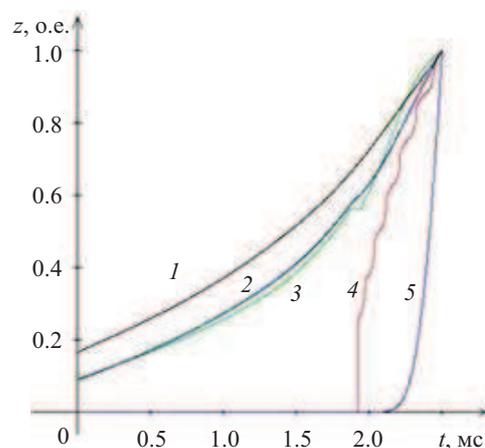
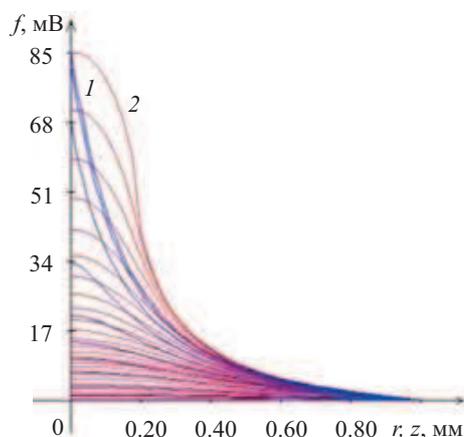
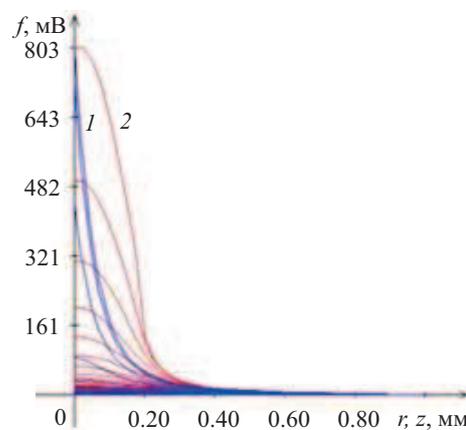


Рис. 2. Графики температур и фазовых переходов

На рис. 3 представлены графики, описывающие характер электрического поля в электроде. В работе исследовались также потери на радиационное излучение и конвективное охлаждение, которые составляют порядка 1% и являются пренебрежимыми. На рис. 3 и 4 1 — зависимости от z , r фиксированное, 2 — зависимости от r , z фиксированное.



а



б

Рис. 3. Зависимости потенциала на 2-м шаге (а) и на 2000-м шаге (б) по времени

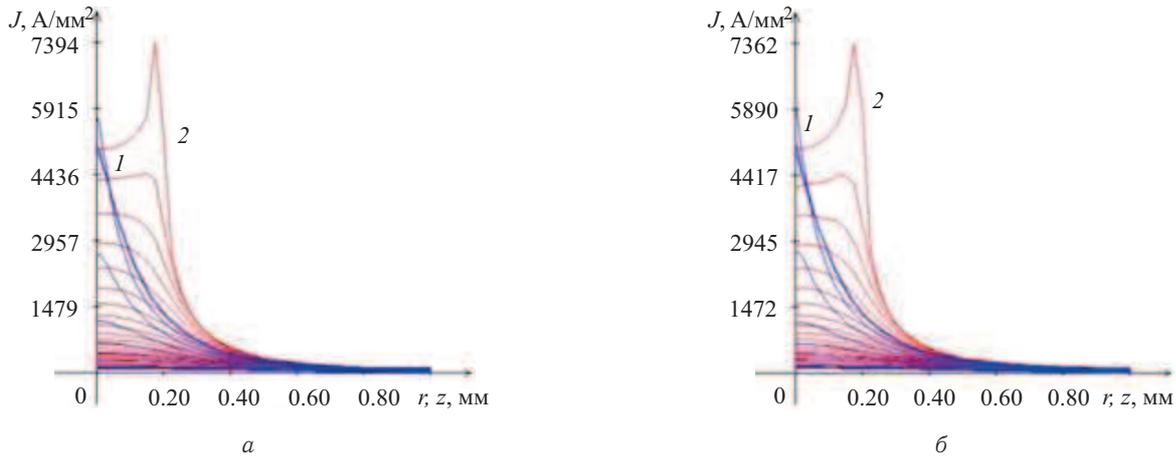


Рис. 4. Плотность тока на 2-м шаге (а) и на 2000-м шаге (б) по времени

Как следует из рис. 4, плотность тока относительно слабо зависит от времени.

3.2. Результаты для второго варианта краевых условий (6)

На рис. 5 представлены серии графиков температурного поля в зависимости от пространственных координат (с шагом по времени $2.5 \cdot 10^{-4}$ с).

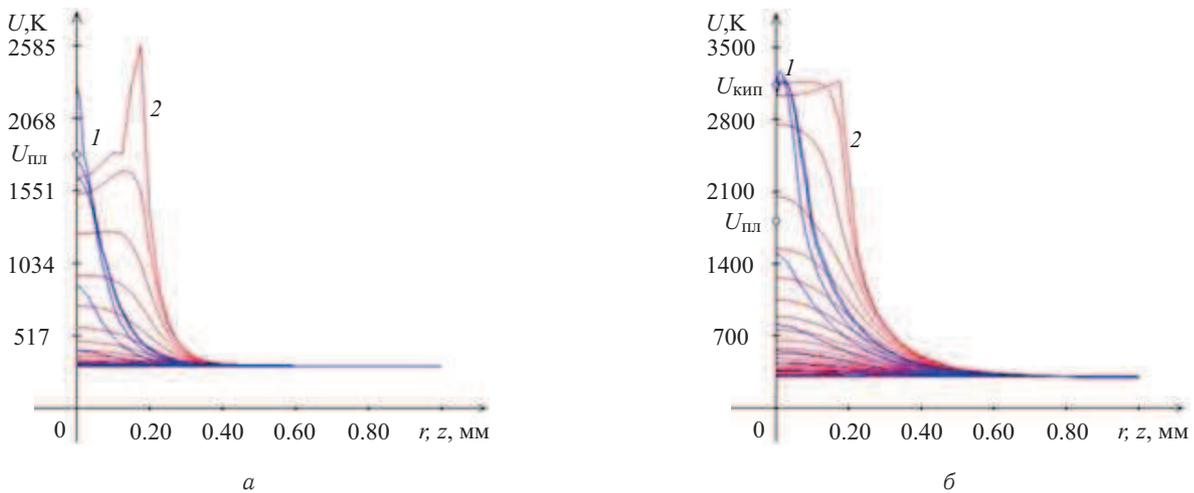


Рис. 5. Профили температурного поля на 200-м шаге (а) и на 2000-м шаге (б) по времени

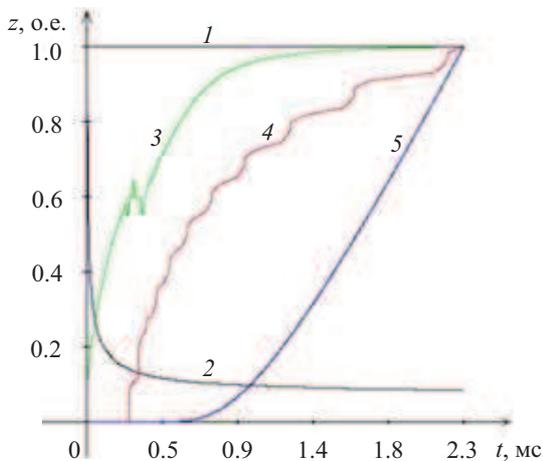


Рис. 6. Графики: 1 — электрического потенциала в токовом пятне, 2 — тока, 3 — максимальной температуры, 4 — $z_{пл}(t)$, 5 — $z_{исп}(t)$

На рис. 5 графики серии 1 выражают зависимости от z при фиксированном r , 2 — зависимости от r при фиксированном z .

При относительно малых напряжениях несколько миллисекунд происходит установление стационарного режима, при больших напряжениях происходит интенсивное кипение и испарение материала.

Наибольшие координаты плавления и испарения (рис. 6): $x_{пл}(t_F) = 80$ мкм, $x_{исп}(t_F) = 1.7$ мкм. Скорость движения фронта испарения: $v_{исп}(t_F) = 0.012$ м/с.

Графики, описывающие характер электрического поля в электроде, представлены на рис. 7 и 8.

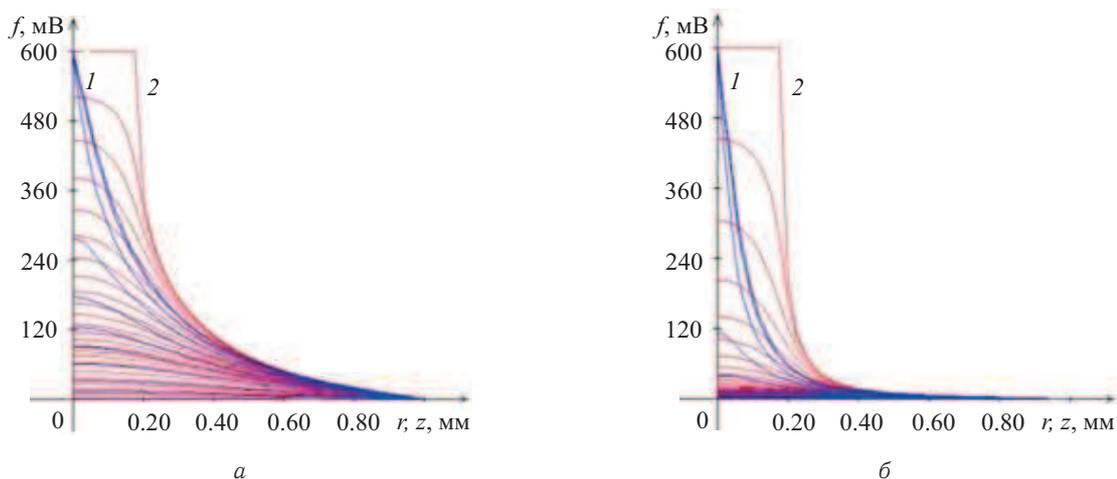


Рис. 7. Зависимости потенциала на 2-м шаге (а) и на 2000-м шаге (б) по времени: 1 – r фиксировано, 2 – z фиксировано

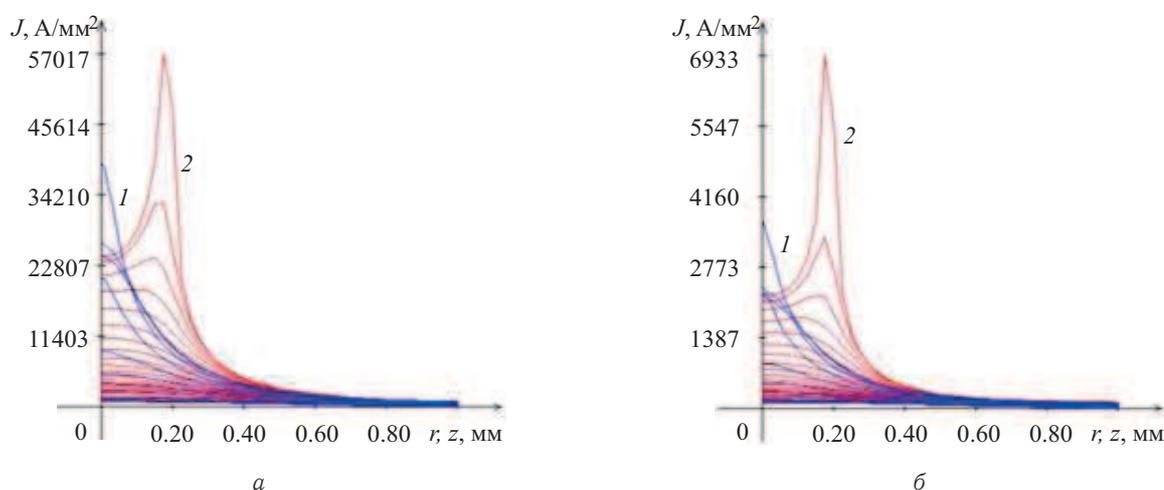


Рис. 8. Плотность тока на 2-м шаге (а) и на 2000-м шаге (б) по времени: 1 – r фиксировано, 2 – z фиксировано

В отличие от варианта (5) плотность тока на рассматриваемом интервале времени изменяется на порядок. Наибольшие значения плотности тока и температуры достигаются на краях проводящей ток площадки. Это согласуется с известным фактом теории контактов, что сваривание контактов часто происходит по краям контактного пятна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована математическая модель, а также разработаны конечно-разностный метод и программы для ЭВМ, позволяющие эффективно осуществлять моделирование тепло- и электрофизических процессов при воздействии сильноточного импульса на электроды. Результаты работы могут применяться в практике исследования и проектирования электрических аппаратов и других электротехнических устройств.

Библиографический список

1. Таев И. С. Электрические контакты и дугогасительные устройства аппаратов низкого напряжения. М. : Энергия, 1973.
2. Ульрих Т. А. Математическое моделирование процесса контактной точечной сварки : автореф. дис. ... канд. техн. наук. Пермь, 2000. 15 с.
3. Абрамов Н. Р., Кужекин И. П., Ларионов В. П. Характеристики проплавления стенок металлических объектов при воздействии на них молнии // Электричество. 1986. № 11. С. 22– 27.
4. Борисенко П. А., Павлейно О. М., Павлейно М. А. Методы численного решения нелинейных



- нестационарных термоэлектромеханических контактных задач // Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей : сб. тр. IX Междунар. науч. конф. СПб., 2009. С. 287–291.
5. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.
 6. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М. : Едиториал УРСС, 2014.
 7. Weisenfels C., Wriggers P. Numerical modeling of electrical contacts // *Computational Mechanics*. 2010. Vol. 46, iss. 2. P. 301–314.
 8. Теплофизические свойства расплавов. Справ.-информ. интернет-портал *ebibl/umkd/Mamina*, 2009. URL: http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/Mamina/u_lectures.pdf (дата обращения : 11.11.2015).
 9. Теплоемкость железа. Справ.-информ. интернет-портал «Лаборатория крупного слитка steelcast.ru», 2009. URL: http://steelcast.ru/iron_heat_capacity (дата обращения : 11.11.2015).

Simulation of the Temperature and Electric Fields by High-current Pulse to the Electrode

R. V. Arutyunyan

Robert V. Arutyunyan, Moscow Technical University of Communications and Informatics, 8a, Aviamotornaya st., 111024, Moscow, Russia, 111024, rob57@mail.ru

The paper investigates the influence of nonlinearities thermophysical properties and phase transitions of melting and evaporation on the electrical and thermal processes at heating of a metallic electrode of high-current pulse. We formulate a mathematical model and develop a finite-difference method and a computer program, allowing effectively to carry out computer modeling of thermal and physical processes when exposed to high current pulse to metal electrodes. The article describes the results of the calculation of the fields based on cross-cutting enthalpy method. A series of informative calculation is implemented for the case of iron. The study found the following effects – a significant influence of the nonlinearity of the thermophysical parameters, phase transitions melting and evaporation, types of boundary conditions on the values of temperature and electric fields.

Key words: metal electrode, a high current pulse electric field, temperature field, calculation, cross-cutting enthalpy method.

References

1. Taev I. S. *Elektricheskie kontakty i dugogasilitel'nye ustroystva apparatov nizkogo napriazheniia* [Electrical contacts and arcing devices low-voltage devices]. Moscow, Energiia, 1973 (in Russian).
2. Ul'rikh T. A. *Matematicheskoe modelirovanie protsessa kontaktnoi tochechnoi svarki* [Mathematical modeling of the resistance spot welding process]: Dis. ... kand. tekhn. nauk. Perm', 2000. 15 p. (in Russian).
3. Abramov N. R., Kuzhekin I. P., Larionov V. P. Characteristics of penetration of the walls of metal objects when exposed to lightning. *Elektrichestvo* [Electricity], 1986, no. 11, pp. 22–27 (in Russian).
4. Borisenko P. A., Pavleino O. M., Pavleino M. A. Metody chislennogo resheniia nelineinykh nestatsionarnykh termoelektromekhanicheskikh kontaktnykh zadach [Methods for the numerical solution of nonlinear transient termoelektromekhanicheskikh contact problems]. *Sovremennye problemy elektrofiziki i elektrogidrodinamiki zhidkosti* [Modern Problems of Electrophysics and Electrohydro-
5. Samarskii A. A., Moiseyenko B. D. An economic continuous calculation scheme for the Stefan multidimensional problem. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1965, vol. 5, no. 5, pp. 43–58. DOI: 10.1016/0041-5553(65)90004-2.
6. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Vychislitel'naia teploperedacha* [Computational Heat Transfer]. Moscow, Editorial URSS, 2014 (in Russian).
7. Weisenfels C., Wriggers P. Numerical modeling of electrical contacts. *Computational Mechanics*, 2010, vol. 46, iss. 2, pp. 301–314.
8. Thermal properties of melts. *Reference and information portal ebibl/umkd/Mamina*, 2009. Available at: http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/Mamina/u_lectures.pdf (accessed : 11.11.2015).
9. The specific heat of iron. *Reference and information portal "Laboratory of large ingots steelcast.ru"*, 2009. Available at: http://steelcast.ru/iron_heat_capacity (accessed : 11.11.2015).



УДК 517.95; 517.984

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

М. Ш. Бурлуцкая

Бурлуцкая Мария Шаукатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, bmsh2001@mail.ru

В работе исследуется смешанная задача для дифференциальной системы первого порядка с двумя независимыми переменными и непрерывным потенциалом, когда начальное условие представляет собой произвольную суммируемую с квадратом вектор-функцию. Соответствующая спектральная задача представляет собой систему Дирака. Устанавливается сходимости почти всюду ряда формального решения по методу Фурье. Показывается, что сумма формального решения является обобщенным решением смешанной задачи, понимаемым как предел классических решений для случая гладких аппроксимаций начальных данных задачи.

Ключевые слова: метод Фурье, начально-краевая задача, система Дирака, обобщенное решение.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-145-151

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = B \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + Q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (1)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad u_1(1, t) = u_2(1, t), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (3)$$

где $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))^T$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $u_j(x, t)$ и $\varphi_j(x)$ — скалярные функции, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & -q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $q_j(x) \in C[0, 1]$, все функции комплекснозначные.

Задача будет исследоваться с помощью метода Фурье. Метод Фурье применялся даже для более общих систем А. И. Вагабовым [1], но в [1] рассматривался случай, когда $Q(x)$ была непрерывно дифференцируема. Здесь же для $Q(x)$ предполагается только непрерывность. Соответствующая спектральная задача представляет собой систему Дирака с непрерывным потенциалом.

Основополагающие результаты для системы Дирака с недифференцируемым потенциалом принадлежат П. В. Джакову, Б. С. Митягину (см. [2, 3]). В дальнейшем близкие по тематике исследования для таких систем проводились в [4–6]. В [7, 8] предложен сравнительно простой способ изучения системы Дирака с негладким потенциалом, базирующийся на операторах преобразования. Этот же прием используется в настоящей статье.

В работе доказывается, что ряд формального решения по методу Фурье в случае $\varphi(x) \in L_2^2[0, 1]$ сходится почти всюду при $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$ и является обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3), понимаемым как предел классических решений для случая гладких аппроксимаций вектор-функции $\varphi(x)$. При этом используются методы из [9].

1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Метод Фурье для задачи (1)–(3) связан со спектральной задачей для оператора L :

$$(Ly)(x) = By'(x) + Q(x)y(x),$$

$$y_1(0) = y_2(0), \quad y_1(1) = y_2(1),$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$. Оператор L есть оператор Дирака с условиями Дирихле.

В [7, 8] доказано, что собственные значения оператора L , достаточно большие по модулю, простые с асимптотикой

$$\lambda_n = \pi ni + \beta_n, \quad (n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots),$$



а для собственных функций $y_n(x) = (y_{n1}(x), y_{n2}(x))^T$ оператора L имеют место асимптотические формулы:

$$y_{nj}(x) = e^{p_j \pi n i x} (1 + \beta_n x) + \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau + \int_0^x b(x, \tau) e^{-\pi n i \tau} d\tau + \beta_n \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau + \beta_n \int_0^x b(x, \tau) e^{-\pi n i \tau} d\tau + O(\beta_n^2), \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

где $n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots, p_1 = 1, p_2 = -1$, и оценка $O(\dots)$ равномерна по $x \in [0, 1]$.

Здесь и в дальнейшем через β_n обозначаем различные числа такие, что $\sum |\beta_n|^2 < \infty$, и β_n не зависят от $\varphi(x)$, через ν_n такие числа, которые зависят от $\varphi(x)$, но при этом $\sum |\nu_n|^2 < c \|\varphi\|^2$. Норма $\|\cdot\|$ — либо норма в $L_2[0, 1]$, либо в пространстве $L_2^2[0, 1]$ вектор-функций размерности 2. Через $b(x, t)$ будем обозначать различные непрерывные функции из некоторого конечного набора.

Замечание. В [7, 8] приводятся точные выражения для β_n и $b(x, t)$, но нам они не требуются, а вид (4) функций y_{nj} облегчает наши рассуждения.

Сопряженный оператор L^* есть

$$(L^* z)(x) = -Bz'(x) + Q^*(x)z(x),$$

$$z_1(0) = z_2(0), \quad z_1(1) = z_2(1),$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T, Q^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{q}_1(x) \\ -\bar{q}_2(x) & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. Для собственных функций $z_n(x) = (z_{n1}(x), z_{n2}(x))^T$ оператора L^* имеют место асимптотические формулы:

$$z_{nj}(x) = e^{p_j \pi n i x} (1 + \beta_n x) + \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau + \int_0^x b(x, \tau) e^{-\pi n i \tau} d\tau + \beta_n \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau + \beta_n \int_0^x b(x, \tau) e^{-\pi n i \tau} d\tau + O(\beta_n^2), \quad j = 1, 2,$$

где $n = \pm n_0, \pm(n_0 + 1), \dots, p_1 = 1, p_2 = -1$ (β_n и $b(x, t)$ другие, отличные от (4)).

Лемма 1. Множество с.п.ф. операторов L и L^* полны в $L_2^2[0, 1]$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Формальное решение задачи (1)–(3) по методу Фурье можно записать в виде (см. [1])

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \varphi)(x) e^{\lambda t} d\lambda, \quad (5)$$

где $r > 0$ достаточно велико и фиксировано, $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр), $\gamma_n = \{\lambda | |\lambda - \lambda_n^0| = \delta\}, \lambda_n^0 = \pi n i, \delta > 0$ и достаточно мало, чтобы собственные значения λ_n попадали по одному внутрь γ_n . При этом

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R_\lambda \varphi) e^{\lambda t} d\lambda = \frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)} y_n(x) e^{\lambda_n t},$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L_2^2[0, 1]$ (это же обозначение сохраняется и для скалярного произведения в $L_2[0, 1]$).



Лемма 2. *Имеют место соотношения:*

$$\nu_n + \nu_n = \nu_n, \quad \beta_n + \beta_n = \beta_n, \quad \nu_n \beta_n + \nu_n \beta_n = \nu_n \beta_n.$$

Доказательство. Первое и второе равенство очевидны. Обозначим $\beta_{3n} = |\beta_{1n}| + |\beta_{2n}|$. Если $\beta_{3n} \neq 0$, то $\nu_{1n}\beta_{1n} + \nu_{2n}\beta_{2n} = \beta_{3n}[\nu_{1n}\tilde{\beta}_{1n} + \nu_{2n}\tilde{\beta}_{2n}] = \beta_{3n}\nu_n$, так как $|\tilde{\beta}_{kn}| = |\beta_{kn}/\beta_{3n}| \leq 1$. Если $\beta_{3n} = 0$, то $\beta_{kn} = 0$, и тогда третье соотношение тривиально. \square

Лемма 3. *Имеют место соотношения:*

$$\left(g(x), \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau \right) = \beta_n, \quad \left(\int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau, \int_0^x b(x, \tau) e^{\pm \pi n i \tau} d\tau \right) = \beta_n,$$

где $g(x) \in L_2[0, 1]$.

Доказательство. Имеем:

$$\left(g(x), \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau \right) = \int_0^1 g(x) dx \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau = \int_0^1 e^{\pi n i \tau} d\tau \int_0^1 g(x) b(x, \tau) dx = \beta_n.$$

При получении второго соотношения для изменения порядка интегрирования удобно использовать функцию $\varepsilon(x, t)$: $\varepsilon(x, t) = 1$ при $x \geq t$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $x \leq t$. Имеем:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau, \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau \right) &= \int_0^1 dx \int_0^x b(x, \tau) d\tau \int_0^x b(x, \eta) e^{\pi n i (\tau - \eta)} d\eta = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x b(x, \tau) d\tau \int_{\tau-x}^{\tau} b(x, \tau - \xi) e^{\pi n i \xi} d\xi = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \varepsilon(x, \tau) b(x, \tau) d\tau \int_0^1 \varepsilon(\tau, \xi) \varepsilon(\xi, \tau - x) b(x, \tau - \xi) e^{\pi n i \xi} d\xi = \\ &= \int_0^1 e^{\pi n i \xi} d\xi \int_0^1 \varepsilon(x, \tau) b(x, \tau) d\tau \int_0^1 \varepsilon(\tau, \xi) \varepsilon(\xi, \tau - x) b(x, \tau - \xi) dx = \int_0^1 \psi(\xi) e^{\pi n i \xi} d\xi = \beta_n. \end{aligned}$$

Последнее справедливо в силу ограниченности внутреннего интеграла $\psi(\xi)$. Аналогично доказывается случай со знаком минус во втором соотношении. \square

Лемма 4. *Имеют место асимптотические формулы:*

$$(y_n, z_n) = 2 + \beta_n, \quad (\varphi, z_n) = \nu_n + \nu_n \beta_n,$$

$$\frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)} y_{nj}(x) e^{\lambda_n t} = \nu_n \left[e^{p_j \pi n i x} + \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau + \int_0^x b(x, \tau) e^{-\pi n i \tau} d\tau \right] e^{\pi n i t} + O(\nu_n \beta_n), \quad j = 1, 2,$$

где $x \in [0, 1]$, $t \in [-T, T]$, $T > 0$ — любое фиксированное число, и оценка $O(\dots)$ равномерна по x и t .

Лемма 5. *Ряды $\sum_{n \geq n_0} \nu_n \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i (\pm \tau + t)} d\tau$ и такие же ряды при $n \leq -n_0$ сходятся равномерно на множестве $Q_T = [0, 1] \times [-T, T]$ при любом $T > 0$, и для их сумм $F_{\pm}(x, t)$ имеют место оценки:*

$$\max_{Q_T} |F_{\pm}(x, t)| \leq C_T \|\varphi\|, \quad (6)$$

где $C_T > 0$ и зависит только от T .



Доказательство. Достаточно рассмотреть ряд $\sum_{n \geq n_0} \nu_n \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i (\tau+t)} d\tau$. При $(x, t) \in Q_T$ имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n_1}^{n_2} \nu_n \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i (\tau+t)} d\tau \right| &= \left| \int_t^{t+x} b(x, \xi - t) \sum_{n_1}^{n_2} \nu_n e^{\pi n i \xi} d\xi \right| \leq \\ &\leq c \int_{-T}^{T+1} \left| \sum_{n_1}^{n_2} \nu_n e^{\pi n i \xi} \right| d\xi \leq c \int_{-N}^N \left| \sum_{n_1}^{n_2} \nu_n e^{\pi n i \xi} \right| d\xi = \\ &= c \sum_{k=-N}^{N-1} \int_k^{k+1} \left| \sum_{n_1}^{n_2} \nu_n e^{\pi n i \xi} \right| d\xi = c \sum_{k=-N}^{N-1} \int_0^1 \left| \sum_{n_1}^{n_2} \nu_n (-1)^{nk} e^{\pi n i \eta} \right| d\eta \leq \\ &\leq c \sum_{k=-N}^{N-1} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n_1}^{n_2} \nu_n (-1)^{nk} e^{\pi n i \eta} \right|^2 d\eta \right)^{1/2} \leq 2Nc \left(\sum_{n_1}^{n_2} |\nu_n|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь N — натуральное число, $N \geq T + 1$. Из сходимости ряда $\sum |\nu_n|^2$ следует равномерная сходимость исследуемого ряда. Далее, аналогично для любых $(x, t) \in Q_T$ и любого натурального m получим:

$$\left| \sum_{n_0}^m \nu_n \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i (\tau+t)} d\tau \right| \leq 2Nc \left(\sum_{n_0}^m |\nu_n|^2 \right)^{1/2} \leq C_T \|\varphi\|,$$

откуда следует (6).

Аналогично доказывается утверждение леммы для остальных рядов. □

Лемма 6. Ряды $\sum O(\nu_n \beta_n)$ сходятся абсолютно и равномерно на множестве Q_T , причем $|\sum O(\nu_n \beta_n)| \leq C_T \|\varphi\|$.

3. КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

В этом пункте получим классическое решение в предположении, что $\varphi(x) \in D_{L^2}$ (D_{L^2} область определения оператора L^2).

Лемма 7. Пусть μ_0 не является собственным значением оператора L , $|\mu_0| > r$, и находится вне γ_n , $\varphi(x) \in D_{L^2}$, $g = (L - \mu_0 E)^2 \varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi)(x) e^{\lambda t} d\lambda &= \int_{|\lambda|=r} \frac{(R_\lambda g)(x)}{(\lambda - \mu_0)^2} e^{\lambda t} d\lambda, \\ \frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)} &= \frac{(g, z_n)}{(\lambda_n - \mu_0)^2 (y_n, z_n)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение следует из представления, справедливого для любой функции $\varphi \in D_{L^2}$:

$$R_\lambda \varphi = -\frac{\varphi}{\lambda - \mu_0} - \frac{g_1}{(\lambda - \mu_0)^2} + \frac{R_\lambda g}{(\lambda - \mu_0)^2},$$

где $g_1 = (L - \mu_0 E)\varphi$. □

Теорема 2. Если $\varphi(x) \in D_{L^2}$, то формальное решение $u(x, t)$ является классическим, т. е. $u(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и t и удовлетворяет (1)–(3).

Доказательство. По лемме 7 из (5) имеем:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{(R_\lambda g)(x)}{(\lambda - \mu_0)^2} e^{\lambda t} d\lambda + \sum_{|n| \geq n_0} \frac{(g, z_n) y_n(x)}{(\lambda_n - \mu_0)^2 (y_n, z_n)} e^{\lambda_n t}. \quad (7)$$



Отсюда следует, что ряд (7) и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t , равномерно сходятся в Q_T при любом $T > 0$. Далее, из (5) имеем при $t = 0$:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi)(x) d\lambda + \sum_{|n| \geq n_0} \frac{(\varphi, z_n) y_n(x)}{(y_n, z_n)}. \quad (8)$$

Правая часть (8) представляет собой ряд Фурье функции $\varphi(x)$, абсолютно и равномерно сходящийся к функции $\varphi(x)$, следовательно, $u(x, t)$ удовлетворяет (3). Условия (2) очевидны. \square

Заметим, что множество D_{L^2} всюду плотно в $L^2_2[0, 1]$.

4. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Теорема 3. Если $q_j(x) \in C[0, 1]$ ($j = 1, 2$) и $\varphi(x) \in L^2_2[0, 1]$, то ряд $u(x, t)$ формального решения сходится почти всюду по $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$, причем $u(x, 0) = \varphi(x)$ почти всюду на $[0, 1]$. При этом для любых $(x, t) \in Q_T$ справедлива оценка

$$\|u(x, t)\|_{L^2_2[Q_T]} \leq c_T \|\varphi\|. \quad (9)$$

Далее, если $\varphi_h(x) \in D_{L^2}$ сходится к $\varphi(x)$ в $L^2_2[0, 1]$ при $h \rightarrow 0$, то $u_h(x, t)$ сходится к $u(x, t)$ по норме $L^2_2[Q_T]$ при любом $T > 0$, где $u_h(x, t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) с начальным условием $u_h(x, 0) = \varphi_h(x)$.

Доказательство. 1. Для доказательства сходимости достаточно рассмотреть в (5) только ряд

$$\sum_{n \geq n_0} \frac{(\varphi, z_n) y_n(x)}{(y_n, z_n)} e^{\lambda_n t} \quad (10)$$

(случай $\sum_{n \leq -n_0}$ рассматривается аналогично).

По лемме 4 компоненты ряда (10) есть

$$\sum_{n \geq n_0} \nu_n \left[e^{\pm \pi n i x} + \int_0^x b(x, \tau) e^{\pi n i \tau} d\tau + \int_0^x b(x, \tau) e^{-\pi n i \tau} d\tau \right] e^{\pi n i t} + \sum_{n \geq n_0} O(\nu_n \beta_n).$$

Рассмотрим ряд $\Sigma_0 = \sum_{n \geq n_0} \nu_n y_n^0(x) e^{\pi n i t}$, $y_n^0(x) = (e^{\pi n i x}, e^{-\pi n i x})^T$. Имеем:

$$\Sigma_0 = (\Sigma_{01}, \Sigma_{01})^T, \quad \Sigma_{01} = \sum_{n \geq n_0} \nu_n e^{n \pi i (x+t)}, \quad \Sigma_{02} = \sum_{n \geq n_0} \nu_n e^{-n \pi i (x-t)}.$$

Исследуем сходимость $\Sigma_{01} = \sum_{n \geq n_0} \nu_n e^{n \pi i \eta t}$, $\eta = x + t$. По теореме Карлесона (о сходимости почти всюду тригонометрических рядов Фурье) ряд Σ_{01} сходится почти при всех $\eta \in (-\infty, \infty)$. Докажем, что ряд Σ_{01} сходится почти при всех $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Обозначим $Q_1 = \{(\eta, \xi) \mid \eta \in [-T, T + 1], \xi \in [-T, T]\}$ и через e — множество точек $\eta \in [-T, T + 1]$, в которых ряд расходится, $\text{mes } e = 0$. Тогда мера множества $e_1 = \{(\eta, \xi) \mid \eta \in e, \xi \in [-T, T]\}$ есть $\text{mes } e_1 = \iint_{Q_1} \chi(\eta, \xi) d\eta d\xi = 0$ (здесь $\chi(\eta, \xi)$ — характеристическая функция множества e_1). Преобразование $\eta = x + t$, $\xi = t$ переводит прямоугольник Q_1 в прямоугольник Q в плоскости x, t , а множество e_1 в множество e_2 . Так как $Q_T \subset Q$ и $\text{mes } e_2 = 0$, то ряд Σ_{01} сходится почти всюду в Q_T . Значит, он сходится почти всюду при всех $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Аналогично получаем сходимость ряда Σ_{02} . Отсюда с учетом лемм 5, 6 получаем сходимость ряда (10).

Оценка (9) следует из оценок для компонент ряда (10), аналогично получаемых оценок для Σ_0 и в силу ограниченности резольвенты.

2. Таким образом, доказано, что ряд $u(x, t)$ сходится почти всюду и $\|u(x, t)\|_{L^2_2[Q_T]} \leq c_T \|\varphi\|$.

Далее, поскольку $u_h(x, t) - u(x, t)$ есть формальное решение смешанной задачи (1)–(3) при начальной функции $\varphi_h(x) - \varphi(x)$, то получаем, что $\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h(x, t) - u(x, t)\|_{L^2_2[Q_T]} = 0$, когда



$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi_h(x) - \varphi(x)\| = 0$. Осталось обосновать, что $u(x, 0) = \varphi(x)$ почти всюду. Из соотношения

$$u(x, 0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) d\lambda + \sum_{|n| \geq n_0} \frac{(\varphi, z_n)}{(y_n, z_n)} y_n(x) \quad (11)$$

следует, что правая часть (11) есть ряд Фурье функции $\varphi(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L . Из лемм 3–6 и теоремы Карлесона получаем, что ряд (11) сходится почти всюду на $[0, 1]$, т.е. $u(x, 0)$ почти везде конечна. Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \|u(x, 0) - \varphi(x)\| &\leq \|u(x, 0) - u_h(x, 0)\| + \|u_h(x, 0) - \varphi\| \leq \\ &\leq c \{\|\varphi - \varphi_h\| + \|\varphi_h - \varphi\|\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Устремляя правую часть (12) к нулю, получим $u(x, 0) = \varphi(x)$ почти всюду. \square

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10125, выполняемый в Воронежском государственном университете).

Библиографический список

1. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д: Изд-во Рост. гос. ун-та, 1994. 160 с.
2. Джаков П. В., Митягин Б. С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // УМН. 2006. Т. 61, № 4. С. 77–182. DOI: 10.4213/gm2121.
3. Djakov P., Mityagin B. Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators // Math. Nachr. 2010. Vol. 283, № 3. P. 443–462. DOI: 10.1002/mana.200910003.
4. Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 3. С. 3–28. DOI: 10.4213/im4202.
5. Савчук А. М., Садовнича И. В. Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 573–584. DOI: 10.1134/S037406411305004X.
6. Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. 2014. Vol. 96, № 5–6. P. 777–810. DOI: 10.1134/S0001434614110169.
7. Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П. Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 4. С. 414–417.
8. Бурлуцкая М. Ш., Курдюмов В. П., Хромов А. П. Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака с недифференцируемым потенциалом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 22–30.
9. Хромов А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56, № 2. С. 239–251. DOI: 10.7868/S0044466916020149.

A Mixed Problem for a System of First Order Differential Equations with Continuous Potential

M. Sh. Burlutskaya

Mariya Sh. Burlutskaya, Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 394006, Voronezh, Russia, bms2001@mail.ru

We study a mixed problem for a first order differential system with two independent variables and continuous potential when the initial condition is an arbitrary square summable vector-valued function. The corresponding spectral problem is the Dirac system. It sets the convergence almost everywhere of a formal decision, obtained by the Fourier method. It is shown that the sum of a formal decision is a generalized solution of a mixed problem, understood as the limit of classical solutions for the case of smooth approximation of the initial data of the problem.

Key words: Fourier method, boundary value problem, Dirac system, generalized solution .

This work was supported by the Russian Science Foundation (projects no. 16-11-10125, performed at the Voronezh State University).



References

1. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriyu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to spectral theory of differential operators], Rostov-on-Don, Rostov Univ. Press, 1994, 160 p. (in Russian).
2. Djakov P., Mityagin B. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrodinger and Dirac operators. *Russian Math. Surveys*, 2006, vol. 61, no. 4, pp. 663–776. DOI: 10.1070/RM2006v061n04ABEH004343.
3. Djakov P., Mityagin B. Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators. *Math. Nachr.*, 2010, vol. 283, no. 3, pp. 443–462. DOI: 10.1002/mana.200910003.
4. Baskakov A. G., Derbushev A. V., Shcherbakov A. O. The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, no. 3, pp. 445–469. DOI: 10.1070/IM2011v075n03ABEH002540.
5. Savchuk A. M., Sadovnichaya I. V. Asymptotic formulas for fundamental solutions of the Dirac system with complex-valued integrable potential. *Difer. Equations*, 2013, vol. 49, no. 5, pp. 545–556. DOI: 10.1134/S0012266113050030.
6. Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Dirac operator with complex-valued summable potential. *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 5–6, pp. 777–810. DOI: 10.1134/S0001434614110169.
7. Burlutskaya M. Sh., Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Refined asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the Dirac system. *Doklady Math.*, 2012, vol. 85, no. 2, pp. 240–242. DOI: 10.1134/S1064562412020238.
8. Burlutskaya M. Sh., Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Refined Asymptotic Formulas for Eigenvalues and Eigenfunctions of the Dirac System with Nondifferentiable Potential. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, no. 3, pp. 56–66 (in Russian).
9. Khromov A. P. The behavior of the formal solution of the mixed problem for wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 2, pp. 239–251. DOI: 10.7868/S0044466916020149.

УДК 519.62

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ ХААРА К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Д. С. Лукомский¹, С. Ф. Лукомский², П. А. Терехин³

¹Лукомский Дмитрий Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, LukomskiiDS@info.sgu.ru

²Лукомский Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, LukomskiiSF@info.sgu.ru

³Терехин Павел Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории приближений функций, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, TerekhinPA@info.sgu.ru

Рассмотрена задача приближенного решения задачи Коши для уравнения первого порядка. Для этого производную решения мы ищем в виде суммы ряда Хаара. Получены оценки погрешности приближенного решения. Приведены результаты численного эксперимента. Примеры показывают, что в некоторых случаях погрешность предлагаемого метода намного меньше, чем в методе Рунге – Кутты второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, численные методы, приближенное решение, оценка погрешности, система Хаара.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-151-159

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] и других были рассмотрены методы численного решения дифференциальных уравнений с использованием системы Хаара. При этом искомая функция представлялась приближенно в виде частичной суммы ряда по системе Хаара. Так как в уравнении присутствуют производные неизвестной функции, то приходилось вводить оператор дифференцирования ступенчатой функции, что сразу делает проблематичной оценку погрешности рассматриваемого метода. В работе Д. С. Лукомского [4] была рассмотрена задача Коши для линейного уравнения второго порядка, и многочленом



Хаара заменялась не сама искомая функция, а ее вторая производная и был указан алгоритм получения решения. Оценки погрешности этого метода были приведены без доказательств в работе [5]. В настоящей работе приводятся доказательства оценок погрешности в случае решения уравнения 1-й степени. Приведены результаты численного эксперимента.

1. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Предполагаем, что $a(x), b(x) \in C[0, 1]$ — непрерывные функции. Будем искать приближенное решение $y_n(x)$ задачи (1), представляя его производную в виде полинома по системе Хаара $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ порядка не выше 2^n :

$$y_n'(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{y}_{n,k} \chi_k(x).$$

Такой полином является ступенчатой функцией:

$$y_n'(x) = y_{n,k}, \quad k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}, \quad k = 0, \dots, 2^n - 1,$$

которая во внутренних точках разрыва равна полусумме своих односторонних пределов, а в граничных точках 0 и 1 — своему пределу изнутри отрезка $[0, 1]$, т. е. $y_n'(0) = y_{n,0}$, $y_n'(k2^{-n}) = (y_{n,k-1} + y_{n,k})/2$ при $k = 1, \dots, 2^n - 1$, $y_n'(1) = y_{n,2^n-1}$.

Сразу заметим, что переход от набора $\{y_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ значений ступенчатой функции к набору $\{\hat{y}_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ ее коэффициентов Фурье – Хаара (и обратно) может быть осуществлен с использованием быстрого преобразования Хаара.

Восстановим функцию $y_n(x)$ по ее производной:

$$y_n(x) = y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}(x - k2^{-n}), \quad k2^{-n} \leq x \leq (k+1)2^{-n},$$

где $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Функция $y_n(x)$ является кусочно-линейной с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$. Фиксируем набор промежуточных точек $x_{n,k} = (k + \theta_{n,k})2^{-n}$, $0 < \theta_{n,k} < 1$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Потребуем, чтобы функция $y_n(x)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению (1) на множестве точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$. Получим систему уравнений

$$y_n'(x_{n,k}) + a(x_{n,k})y_n(x_{n,k}) = b(x_{n,k}), \quad k = 0, \dots, 2^n - 1.$$

С учетом представления функций $y_n(x)$ и $y_n'(x)$, обозначив для краткости $a_{n,k} = a(x_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$, будем иметь:

$$y_{n,k} + a_{n,k} \left(y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k} \theta_{n,k} 2^{-n} \right) = b_{n,k}, \quad k = 0, \dots, 2^n - 1. \quad (2)$$

Из системы линейных алгебраических уравнений (2) величины $\{y_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определяются рекуррентно и однозначно, если только $1 + a_{n,k} \theta_{n,k} 2^{-n} \neq 0$ для всех $k = 0, \dots, 2^n - 1$, что заведомо выполняется для достаточно больших n , а именно при $2^n \geq \|a\| = \max_{x \in [0,1]} |a(x)|$.

Можно избежать произвола при выборе множества промежуточных точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ полагая, например, $\theta_{n,k} = 1/2$. В таком случае каждая точка $x_{n,k}$ будет серединой отрезка $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$. Далее мы покажем, что от выбора промежуточных точек принципиально не зависят аппроксимативные свойства приближенного решения $y_n(x)$ задачи (1). Для этого определим новые величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ с помощью рекуррентных соотношений:

$$z_{n,k} + a_{n,k} \left(y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} \right) = b_{n,k}, \quad k = 0, \dots, 2^n - 1. \quad (3)$$



Очевидно, что из уравнений (3) величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определяются рекуррентно и однозначно для любого натурального числа n . По построенным величинам $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ определим функции $z'_n(x)$ и $z_n(x)$ равенствами $z'_n(x) = z_{n,k}$, где $k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$, и

$$z_n(x) = y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}(x - k2^{-n}), \quad k2^{-n} \leq x \leq (k+1)2^{-n}. \quad (4)$$

Функцию $z_n(x)$ нетрудно определить из рекуррентных соотношений (3) по входным интерполяционным и начальным данным: $\{a_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$, $\{b_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ и y_0 .

2. СВОЙСТВА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Введем следующие характеристики задачи (1):

$$C = |y_0| \|a\| + \|b\|, \quad \Omega_n = |y_0| \omega(a, \frac{1}{2^n}) + \omega(b, \frac{1}{2^n}), \quad \Omega_n^* = \omega(a, \frac{1}{2^n}) + \frac{\|a\|}{2^n},$$

где $\omega(f, \delta) = \sup_{|x_1-x_2| \leq \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$ — равномерный модуль непрерывности, а также характеристики входных интерполяционных и начальных данных:

$$A_n = \max_{0 \leq k \leq 2^n-1} |a_{n,k}|, \quad B_n = \max_{0 \leq k \leq 2^n-1} |b_{n,k}|, \quad C_n = |y_0| A_n + B_n$$

и приближенных решений

$$Y_n = \max_{0 \leq k \leq 2^n-1} |y_{n,k}|, \quad Z_n = \max_{0 \leq k \leq 2^n-1} |z_{n,k}|, \quad \Delta_n = \max_{0 \leq k \leq 2^n-1} |y_{n,k} - z_{n,k}|.$$

Лемма 1. *Справедливы неравенства*

$$Z_n \leq C_n e^{A_n} \leq C e^{\|a\|}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Неравенства из сформулированной леммы 1 дают, во-первых, оценку для приближенных решений $z_n(x)$ через введенные характеристики входных данных и, во-вторых, показывают равномерную ограниченность функций $z_n(x)$ и их производных.

Лемма 2. *Имеет место оценка*

$$\Delta_n \leq \frac{2A_n C_n e^{3A_n}}{2^n} \leq \frac{2C \|a\| e^{3\|a\|}}{2^n}, \quad n \geq \log_2 \|a\| + 1.$$

Оценка леммы 2 показывает, что $\Delta_n = O(2^{-n})$ при достаточно больших n . Следовательно, переход от приближенного решения $y_n(x)$ к $z_n(x)$ оправдан, и независимость аппроксимативных свойств приближенного решения от выбора промежуточных точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$ обоснована. Из лемм 1 и 2 также вытекает равномерная ограниченность функций $y_n(x)$ и их производных, поскольку

$$Y_n \leq Z_n + \Delta_n \leq C e^{\|a\|} (1 + O(2^{-n})).$$

Обозначим через $y(x)$ точное решение задачи (1).

Теорема 1. *Для любого $n = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство*

$$\|y' - z'_n\| \leq e^{\|a\|} (\Omega_n + C e^{\|a\|} \Omega_n^*). \quad (5)$$

Неравенство (5) можно записать в виде

$$\|y' - z'_n\| = O\left(\omega(a, \frac{1}{2^n}) + \omega(b, \frac{1}{2^n}) + \frac{1}{2^n}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Такое же соотношение будет иметь место для нормы $\|y' - y'_n\|$ для достаточно больших n . Постоянные в O -соотношениях зависят от величин $\|a\|$, $\|b\|$ и $|y_0|$.

Следует заметить, что оценка для уклонения $\|y - z_n\|$ повторяет оценку (5). Улучшения порядка сходимости, как это имеет место для интерполяционных сплайнов в нашем случае, вообще говоря, не происходит. Простым примером служит случай $a(x) \equiv 0$, когда теорема 1 дает нам оценку



$\|y' - z'_n\| \leq \omega(b, \frac{1}{2^n})$ и при этом оценка $\|y - z_n\| \leq \omega(b, \frac{1}{2^n})$ не улучшаема на классе всех непрерывных функций $b(x) \in C[0, 1]$. В самом деле, при $a(x) \equiv 0$ имеем $y(x) = y_0 + \int_0^x b(t) dt$ и $z_{n,k} = b_{n,k}$, откуда $y(1) - z_n(1) = \int_0^1 b(x) dx - 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} b_{n,k}$. Соотношение

$$\sup_{\{b(x) \in C[0,1]: b(x_{n,k})=0, k=0, \dots, 2^n-1\}} \frac{\int_0^1 b(x) dx}{\omega(b, \frac{1}{2^n})} = 1$$

показывает неулучшаемость оценки $\|y - z_n\| \leq \omega(b, \frac{1}{2^n})$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММ И ТЕОРЕМ

Лемма 3. Если набор неотрицательных чисел $\{f_k\}_{k=0}^N$ удовлетворяет с некоторыми постоянными $\alpha, \beta > 0$ условию

$$f_k \leq \alpha + \beta \sum_{j=0}^{k-1} f_j, \quad k = 0, \dots, N,$$

то выполняется неравенство

$$f_k \leq \alpha e^{\beta k}, \quad k = 0, \dots, N.$$

Доказательство. Из условия леммы следует оценка

$$f_k \leq \alpha(1 + \beta)^k, \quad k = 0, \dots, N,$$

которая легко проверяется по индукции

$$f_{k+1} \leq \alpha + \beta \sum_{j=0}^k f_j \leq \alpha \left(1 + \beta \sum_{j=0}^k (1 + \beta)^j \right) = \alpha(1 + \beta)^{k+1}.$$

Следовательно, имеем $f_k \leq \alpha(1 + \beta)^k \leq \alpha e^{\beta k}$. □

Лемма 3 является дискретным вариантом леммы Гронуолла (точнее, ее простейшего частного случая).

Лемма Гронуолла. Если неотрицательная непрерывная функция $f(x)$, $x_0 \leq x \leq X$, удовлетворяет с некоторыми постоянными $\alpha, \beta > 0$ условию

$$f(x) \leq \alpha + \beta \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x_0 \leq x \leq X,$$

то выполняется неравенство

$$f(x) \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)}, \quad x_0 \leq x \leq X.$$

Нам потребуется непосредственно вытекающая из леммы Гронуолла

Лемма 4. Если неотрицательная функция $f(x)$, $x_0 \leq x \leq X$, имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода $\{x_k\}_{k=1}^N \subset (x_0, X)$, в которых $f(x_k) \leq \max\{f(x_k - 0), f(x_k + 0)\}$, $k = 1, \dots, N$, и удовлетворяет с некоторыми постоянными $\alpha, \beta > 0$ условию

$$f(x) \leq \alpha + \beta \int_{x_0}^x f(t) dt$$

хотя бы во всех точках непрерывности (а тогда и вообще во всех точках отрезка $[x_0, X]$), то при $x_0 \leq x \leq X$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq \alpha e^{\beta(x-x_0)}. \tag{6}$$



Доказательство. Пусть $x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = X$. При $x_0 \leq x < x_1$ неравенство (6) выполняется в силу классической леммы Гронуолла. Теперь предположим, что (6) верно при $x_0 \leq x < x_1, \dots, x_{k-1} < x < x_k$.

При $x_k < x < x_{k+1}$ по условию имеем:

$$f(x) \leq \alpha + \beta \int_{x_0}^x f(t) dt = \alpha + \beta \int_{x_0}^{x_k} f(t) dt + \beta \int_{x_k}^x f(t) dt,$$

откуда снова в силу классической леммы Гронуолла находим

$$f(x) \leq \left(\alpha + \beta \int_{x_0}^{x_k} f(t) dt \right) e^{\beta(x-x_k)}. \quad (7)$$

Рассуждая более строго, следовало бы сначала вместо x_k взять $x_k + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, применить лемму Гронуолла, потом устремить $\varepsilon \rightarrow 0$ и получить (7).

Далее подставим в интеграл из (7) оценку $f(t) \leq \alpha e^{\beta(t-x_0)}$, $t \neq x_1, \dots, x_k$, которая верна по нашему предположению. Будем иметь

$$f(x) \leq \left(\alpha + \beta \int_{x_0}^{x_k} \alpha e^{\beta(t-x_0)} dt \right) e^{\beta(x-x_k)} = \alpha e^{\beta(x-x_0)}.$$

Таким образом, неравенство (6) доказано по индукции для всех $x \neq x_1, \dots, x_N$. Тогда в точках разрыва первого рода $f(x_k \pm 0) \leq \alpha e^{\beta(x_k-x_0)}$ и, следовательно,

$$f(x_k) \leq \max\{f(x_k - 0), f(x_k + 0)\} \leq \alpha e^{\beta(x_k-x_0)}, \quad k = 1, \dots, N.$$

(Точно так же проверяется утверждение из формулировки леммы, заключенное в скобки). \square

Доказательство леммы 1. Из рекуррентных соотношений (3) для всех $k = 0, \dots, 2^n - 1$ получаем оценку

$$|z_{n,k}| \leq |y_0| |a_{n,k}| + |b_{n,k}| + |a_{n,k}| 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} |z_{n,j}| \leq C_n + A_n 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} |z_{n,j}|.$$

По лемме 3 отсюда следуют неравенства

$$Z_n = \max_{0 \leq k \leq 2^n - 1} |z_{n,k}| \leq C_n e^{A_n 2^{-n}(2^n - 1)} \leq C_n e^{A_n} \leq C e^{\|a\|}. \quad \square$$

Доказательство леммы 2. Сравним рекуррентные соотношения (2) и (3), причем последние запишем в виде

$$z_{n,k} + a_{n,k} \left(y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k} \theta_{n,k} 2^{-n} \right) = b_{n,k} + a_{n,k} z_{n,k} \theta_{n,k} 2^{-n}.$$

При $k = 0, \dots, 2^n - 1$ находим

$$\begin{aligned} |y_{n,k} - z_{n,k}| &\leq |a_{n,k}| 2^{-n} \left(\sum_{j=0}^{k-1} |y_{n,j} - z_{n,j}| + |y_{n,k} - z_{n,k}| \theta_{n,k} + |z_{n,k}| \theta_{n,k} \right) \leq \\ &\leq A_n 2^{-n} \left(\sum_{j=0}^{k-1} |y_{n,j} - z_{n,j}| + |y_{n,k} - z_{n,k}| + Z_n \right). \end{aligned}$$

Поскольку $1 - A_n 2^{-n} \geq 1 - \|a\| 2^{-n} \geq \frac{1}{2}$ при $n \geq \log_2 \|a\| + 1$, то

$$|y_{n,k} - z_{n,k}| \leq 2A_n Z_n 2^{-n} + 2A_n 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} |y_{n,j} - z_{n,j}|.$$

По лемме 3 отсюда следуют неравенства

$$\Delta_n = \max_{0 \leq k \leq 2^n - 1} |y_{n,k} - z_{n,k}| \leq \frac{2A_n Z_n e^{2A_n}}{2^n} \leq \frac{2A_n C_n e^{3A_n}}{2^n} \leq \frac{2C \|a\| e^{3\|a\|}}{2^n}.$$

Учли оценку $Z_n \leq C_n e^{A_n}$ из леммы 1. \square



Доказательство теоремы 1. При $k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$, для производных точного и приближенного решений будем иметь

$$\begin{aligned} y'(x) - z'_n(x) &= b(x) - a(x)y(x) - z_{n,k} = \\ &= b(x) - a(x) \left(y_0 + \int_0^x y'(t) dt \right) - b_{n,k} + a_{n,k} \left(y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} \right) = \\ &= b(x) - b_{n,k} - y_0(a(x) - a_{n,k}) - a(x) \int_0^x y'(t) dt + a_{n,k} \int_0^{k2^{-n}} z'_n(t) dt. \end{aligned}$$

В последнем выражении отдельно оценим неинтегральные разности

$$|b(x) - b_{n,k} - y_0(a(x) - a_{n,k})| \leq |y_0| \omega(a, \frac{1}{2^n}) + \omega(b, \frac{1}{2^n}) = \Omega_n$$

и после преобразования

$$\begin{aligned} &a(x) \int_0^x y'(t) dt - a_{n,k} \int_0^{k2^{-n}} z'_n(t) dt = \\ &= a(x) \int_0^x (y'(t) - z'_n(t)) dt + (a(x) - a_{n,k}) \int_0^x z'_n(t) dt + a_{n,k} \int_{k2^{-n}}^x z'_n(t) dt \end{aligned}$$

оценим разность интегралов

$$\begin{aligned} &\left| a(x) \int_0^x y'(t) dt - a_{n,k} \int_0^{k2^{-n}} z'_n(t) dt \right| \leq \\ &\leq \|a\| \int_0^x |y'(t) - z'_n(t)| dt + \omega(a, \frac{1}{2^n}) \int_0^1 |z'_n(t)| dt + \|a\| \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} |z'_n(t)| dt. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что по лемме 1

$$\int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} |z'_n(t)| dt = 2^{-n} |z_{n,k}| \leq 2^{-n} C e^{\|a\|}, \quad \int_0^1 |z'_n(t)| dt \leq C e^{\|a\|}.$$

В результате получаем:

$$|y'(x) - z'_n(x)| \leq \Omega_n + C e^{\|a\|} \Omega_n^* + \|a\| \int_0^x |y'(t) - z'_n(t)| dt.$$

Функция $f(x) = |y'(x) - z'_n(x)|$ имеет разрывы первого рода в точках $k2^{-n}$, $k = 1, \dots, 2^n - 1$, в которых

$$f\left(\frac{k}{2^n}\right) = \left| y'\left(\frac{k}{2^n}\right) - \frac{z'_n\left(\frac{k}{2^n} - 0\right) + z'_n\left(\frac{k}{2^n} + 0\right)}{2} \right| \leq \max\{f\left(\frac{k}{2^n} - 0\right), f\left(\frac{k}{2^n} + 0\right)\}.$$

По лемме 4

$$|y'(x) - z'_n(x)| \leq e^{\|a\|x} (\Omega_n + C e^{\|a\|} \Omega_n^*), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad \square$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим алгоритм решения задачи (1).

Зафиксируем $n \geq 2$ и построим систему узлов $x_{n,k} = (k + \theta_{n,k})2^{-n}$, $\theta_{n,k} = 1/2$, $k = 0, \dots, 2^n - 1$.

Вычисляем $a_{n,k} = a(x_{n,k})$ и $b_{n,k} = b(x_{n,k})$.

Используя рекуррентные соотношения

$$z_{n,k} + a_{n,k} \left(y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} \right) = b_{n,k}, \quad k = 0, \dots, 2^n - 1.$$

находим величины $\{z_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$.



Восстановим функцию $z_n(x)$ по ее производной:

$$z_n(x) = y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j} + z_{n,k}(x - k2^{-n}), \quad x = (k + 1/2)2^{-n},$$

где $k = 0, \dots, 2^n - 1$. Функция $z_n(x)$ является кусочно-линейной с узлами в двоично-рациональных точках $k2^{-n}$.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши (1), где

$$a(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1/2], \\ 1 - x, & x \in (1/2, 1], \end{cases} \quad b(x) = 4 \cos(4x) + a(x) * \sin(4x),$$

с начальным условием $y(0) = 0$.

Очевидно, что точное решение данной задачи есть $y(x) = \sin(4x)$.

В табл. 1 приведено точное решение, а также погрешность решения, полученного методом Хаара и методом Рунге – Кутта второго порядка для 32 точек разбиения отрезка $[0, 1]$. Точки выведены через одну для краткости изложения.

Таблица 1

x	$Y(x)$	$ Y(x) - H(x) $	$ Y(x) - RK(x) $
0.07813	0.30744	0.00021	0.06260
0.14063	0.53330	0.00012	0.06248
0.20313	0.72601	0.00015	0.06209
0.26563	0.87357	0.00048	0.06143
0.32813	0.96683	0.00078	0.06049
0.39063	0.99997	0.00089	0.05928
0.45313	0.97093	0.00071	0.05780
0.51563	0.88153	0.00014	0.05610
0.57813	0.73732	0.00069	0.05443
0.64063	0.54726	0.00157	0.05294
0.70313	0.32318	0.00239	0.05161
0.76563	0.07901	0.00304	0.05045
0.82813	-0.17008	0.00347	0.04949
0.89063	-0.40859	0.00365	0.04874
0.95313	-0.62170	0.00362	0.04822

Таким образом, максимальные погрешности для метода Хаара (R_H) и для метода Рунге – Кутта (R_{RK}) составляют соответственно

$$R_H = 0.00366032835420937, \quad R_{RK} = 0.0625980949896783.$$

Данный пример показывает, что в определенных случаях метод Хаара дает погрешность на порядок лучше, чем метод Рунге – Кутта.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' + \sin(x)y = (2x + 1 + \sin(x)(x^2 + x)), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Точное решение данной задачи имеет вид $y(x) = x^2 + x$.

В табл. 2 приведено точное решение, а также погрешность решения, полученного методом Хаара и методом Рунге – Кутта второго порядка для 32 точек разбиения отрезка $[0, 1]$.



Таблица 2

x	$Y(x)$	$ Y(x) - H(x) $	$ Y(x) - RK(x) $
0.07813	0.08423	0.00030	0.01582
0.14063	0.16040	0.00043	0.01571
0.20313	0.24438	0.00065	0.01554
0.26563	0.33618	0.00097	0.01531
0.32813	0.43579	0.00141	0.01502
0.39063	0.54321	0.00196	0.01468
0.45313	0.65845	0.00265	0.01430
0.51563	0.78149	0.00346	0.01387
0.57813	0.91235	0.00440	0.01341
0.64063	1,05103	0.00548	0.01292
0.70313	1,19751	0.00668	0.01241
0.76563	1,35181	0.00800	0.01188
0.82813	1,51392	0.00944	0.01134
0.89063	1,68384	0.01098	0.01079
0.95313	1,86157	0.01263	0.01025

Таким образом, максимальные погрешности для метода Хаара (R_H) и для метода Рунге – Кутта (R_{RK}) составляют соответственно

$$R_H = 0.0134854117964, \quad R_{RK} = 0.015869140625.$$

В данном случае погрешности методов Хаара и Рунге – Кутта практически идентичны.

Работа подготовлена частично в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К), а также при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Библиографический список

1. *Ohkita M., Kobayashi Y.* An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations // IEEE Transactions on Circuit and Systems. 1968. Vol. 33, iss. 9. P. 853–862.
2. *Razzaghi M., Ordokhani Y.* Solution of differential equations via rationalized Haar functions // Mathematics and computers in simulation. 2001. Vol. 56, iss. 3. P. 235–246.
3. *Razzaghi M., Ordokhani Y.* An application of rationalized Haar functions for variational problems // Applied Mathematics and Computation. 2001. Vol. 122, iss. 3. P. 353–364.
4. *Лукомский Д. С.* Применение системы Хаара для решения задачи Коши // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 14. С. 47–50.
5. *Лукомский Д. С., Терехин П. А.* Об оценке погрешности решения задачи Коши с помощью систем сжатий и сдвигов // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2015. Т. 51. С. 295–297.

Solution of Cauchy Problem for Equation First Order Via Haar Functions

D. S. Lukomskii¹, S. F. Lukomskii², P. A. Terekhin³

¹Dmitry S. Lukomskii, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, LukomskiiDS@info.sgu.ru

²Sergey F. Lukomskii, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, LukomskiiDS@info.sgu.ru

³Pavel A. Terekhin, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, TerekhinPA@info.sgu.ru

In this article we consider a Cauchy problem for the first order differential equation and are looking for its numerical solution. For this aim we represent the derivative of the solution as Haar decomposition. We also obtain estimates of approximate solution. The method is computationally simple and applications are demonstrated through illustrative examples. These examples show that in some cases the error of the proposed method is much less, than in second order Runge – Kutta method.

Key words: differential equations, numerical methods, approximate solution, approximation error, Haar system.

The work has been prepared partially in the framework of the state task Russian Ministry of Education and Science (project no. 1.1520.2014/К) and with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00152).



References

1. Ohkita M., Kobayashi Y. An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations. *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, 1968, vol. 33, iss. 9, pp. 853–862.
2. Razzaghi M., Ordokhani Y. Solution of differential equations via rationalized Haar functions. *Mathematics and computers in simulation*, 2001, vol. 56, iss. 3, pp. 235–246.
3. Razzaghi M., Ordokhani Y. An application of rationalized Haar functions for variational problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, vol. 122, iss. 3, pp. 353–364.
4. Lukomskii D. S. Primenenie sistemy Haara dlya resheniya zadachi Koshi [Application of Haar system for solving the Cauchy problem]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, Saratov Univ. Press, 2014, iss. 14, pp. 47–50 (in Russian).
5. Lukomskii D. S., Terekhin P. A. Ob ocenke pogreshnosti resheniya zadachi Koshi s pomosh'yu sistem sjatij i sdvigoov [An error estimate for the Cauchy problem by using compression systems and shifts]. *Trudy Matematicheskogo centra imeni N. I. Lobachevskogo* [Proceedings of the Mathematical Centre named N. I. Lobachevsky]. Kazan, Kazan Matnematical Society, 2015, vol. 51, pp. 295–297 (in Russian).

УДК 517.968.23

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЯВНОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Н. Р. Перельман

Перельман Наталья Романовна, ассистент кафедры математики и информатики, Смоленский государственный университет, nataly@mannel.ru

Статья посвящена исследованию трехэлементной краевой задачи типа Карлемана в классе аналитических функций, непрерывно продолжимых на контур в смысле Гельдера, в случае, когда эта задача не редуцируется к двухэлементным краевым задачам. В качестве контура рассматривается единичная окружность. Для определенности исследуется случай обратного сдвига контура. В этом случае решение рассматриваемой задачи сводится к решению системы из двух интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода; при этом существенным образом используется теория Ф. Д. Гахова краевой задачи Римана для аналитических функций. На основании этого результата построен алгоритм решения исследуемой задачи. Далее в статье доказывается, что если в краевом условии коэффициенты являются рациональными функциями, а функция сдвига дробно-линейная, то исследуемая краевая задача решается в явном виде (в квадратурах). Затем рассмотрен более простой случай явного решения задачи, когда, кроме вышеуказанных ограничений на коэффициенты и функцию сдвига, требуется еще и аналитическая продолжимость некоторых функций, заданных на контуре, внутрь области. Этот случай иллюстрируется на конкретном примере.

Ключевые слова: краевая задача, сдвиг Карлемана.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-159-165

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время важным направлением в исследованиях краевых задач являются многоэлементные краевые задачи для аналитических и полианалитических функций, в том числе и задачи со сдвигом. В статье [1] исследовалась одна из таких задач — трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций. В частности, там было показано, что решение такой задачи в случае круговой области сводится к решению двух трехэлементных краевых задач типа Карлемана для аналитических функций (обозначим их для краткости задачи K_3).

Для задачи K_3 достаточно подробно была исследована ее разрешимость при различных предположениях относительно исходных данных (см., например, [2]).

Однако до недавнего времени не существовало конструктивного алгоритма решения задачи K_3 в случае, когда она не редуцируется к двухэлементной задаче. Поэтому разработка такого алгоритма и выявление случаев, когда задача K_3 решается в явном виде, является актуальной проблемой.



1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $L = \{t : |t| = 1\}$.

Будем говорить, что аналитическая в области T^+ функция принадлежит классу $A(T^+) \cap H(L)$, если она непрерывно продолжается на контур L , причем так, что ее граничные значения удовлетворяют условию Гельдера.

Требуется найти все аналитические в области T^+ функции $F(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$, удовлетворяющие на L условию

$$F^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + B(t)\overline{F^+(t)} + h(t), \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $h(t)$ — заданные на L функции класса $H(L)$, $\alpha(t)$ — прямой или обратный сдвиг контура L , удовлетворяющий условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t, \tag{2}$$

причем $\alpha'(t) \neq 0$, $\alpha'(t) \in H(L)$.

В монографии Г. С. Литвинчука (см. [2, гл. 6]) установлено, что краевое условие (1) легко приводится к виду

$$A_1(t)F^+(t) = B_1(t)\overline{F^+(t)} + h_1(t), \tag{3}$$

где

$$A_1(t) = 1 - A(t)A[\alpha(t)] - \overline{B(t)}B[\alpha(t)], \tag{4}$$

$$B_1(t) = A[\alpha(t)]B(t) + \overline{A(t)}B[\alpha(t)], \tag{5}$$

$$h_1(t) = A[\alpha(t)]h(t) + B[\alpha(t)]\overline{h(t)} + h[\alpha(t)]. \tag{6}$$

Следовательно, если на контуре L выполняются условия

$$A_1(t) \neq 0, \quad B_1(t) \neq 0, \quad h_1(t) \neq 0,$$

то задача \mathbf{K}_3 вырождается в хорошо исследованную (см., например, [2]) двухэлементную задачу вида (3).

Предположим теперь, что на контуре L выполняются тождества

$$A_1(t) \equiv 0, \quad B_1(t) \equiv 0, \quad h_1(t) \equiv 0,$$

которые с учетом обозначений (4)–(6) можно записать в следующей развернутой форме:

$$A(t)A[\alpha(t)] + \overline{B(t)}B[\alpha(t)] \equiv 1, \tag{7}$$

$$A[\alpha(t)]B(t) + \overline{A(t)}B[\alpha(t)] \equiv 0, \tag{8}$$

$$A[\alpha(t)]h(t) + B[\alpha(t)]\overline{h(t)} + h[\alpha(t)] \equiv 0, \tag{9}$$

Случай, когда выполняются условия (7)–(9), назовем невырожденным и в дальнейшем будем исследовать задачу \mathbf{K}_3 только в этом случае при некоторых дополнительных предположениях для коэффициентов задачи.

Для определенности будем исследовать задачу \mathbf{K}_3 при обратном сдвиге контура.

2. О РЕШЕНИИ НЕВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ \mathbf{K}_3 В НОРМАЛЬНОМ СЛУЧАЕ ПРИ ОБРАТНОМ СДВИГЕ КОНТУРА

Пусть на контуре L выполняются условия (7)–(9), $\alpha(t)$ — обратный сдвиг контура L , а также $A(t) \neq 0$. При указанных предположениях краевое условие (1) можно переписать в следующем виде:

$$F^+[\alpha(t)] = A(t)F^+(t) + Q(t), \tag{10}$$

где $Q(t) = h(t) + B(t)\overline{F^+(t)}$.

Если временно предположить, что $Q(t)$ — известная функция, то равенство (10) представляет собой краевое условие двухэлементной задачи Карлемана, теория которой достаточно подробно изложена, например, в монографии [2].



С учетом (7)–(9) в рассматриваемом случае представляет интерес исследование задачи (10) в следующих трех случаях:

- а) $A[\alpha(t)]A(t) - 1 \equiv 0, t \in L$;
- б) $A[\alpha(t)]A(t) - 1 \neq 0, t \in L$;
- в) когда выражение $A[\alpha(t)]A(t) - 1$ обращается в нуль в отдельных точках контура L .

В случае а) можно доказать, что с учетом (7) и (8) из $A[\alpha(t)]A(t) - 1 \equiv 0$ следует $B(t) \equiv 0$, т. е. задача \mathbf{K}_3 здесь равносильна хорошо изученной двухэлементной краевой задаче Карлемана.

Задача \mathbf{K}_3 в случае в) исследовалась, например, в [3].

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда выполняются условия пункта б), т. е.

$$A[\alpha(t)]A(t) - 1 \neq 0, \quad t \in L. \quad (11)$$

Назовем случай, когда выполняются условия (7)–(9) и (11), *нормальным случаем* задачи \mathbf{K}_3 .

Введем следующие обозначения:

$$G(t) = -\frac{B(t)}{A(t)}, \quad G_1(t) = \frac{1}{A(t)}, \quad h_1(t) = -\frac{h(t)}{A(t)},$$

а также пусть $X^\pm(z)$ — канонические функции однородной двухэлементной задачи Римана с коэффициентом $G(t)$ и индексом $\chi = \text{Ind } G(t)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\alpha(t)$ — обратный карлемановский сдвиг контура L и на этом контуре выполняются условия (7)–(9) и (11). Тогда если $\chi = \text{Ind } G(t) \geq 0$, то для того чтобы функция $F^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$ была решением краевой задачи \mathbf{K}_3 , необходимо и достаточно, чтобы ее граничные значения $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)], t \in L$, удовлетворяли системе интегральных уравнений типа Фредгольма:

$$\begin{cases} (U_1\varphi_1)(t) \equiv \varphi_1(t) + \int_L N_1(t, \tau)\varphi_1(\tau)d\tau + \overline{\int_L M_1(t, \tau)\varphi_1(\tau)d\tau} = q_1(t), \\ (U_2\varphi_2)(t) \equiv \varphi_2(t) + \int_L N_2(t, \tau)\varphi_2(\tau)d\tau = q_2(t). \end{cases} \quad (12)$$

Если же $\chi = \text{Ind } G(t) < 0$, то для того чтобы функция $F^+(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$ была решением краевой задачи \mathbf{K}_3 необходимо и достаточно, чтобы ее граничные значения $F^+(t) = \varphi[\alpha(t)], t \in L$, удовлетворяли системе интегральных уравнений типа Фредгольма (12), и, кроме того, функция $F[\alpha(t)] = \varphi(t)$ должна удовлетворять $-\chi - 1$ условиям вида

$$\int_L \frac{G_1(t)\varphi(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = - \int_L \frac{h_1(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt, \quad k = 1, 2, \dots, -\chi - 1. \quad (13)$$

Данная теорема сформулирована и полностью доказана автором. Частично ее доказательство приводится, например, в [1].

Замечание 1. В теореме 1 в формулах (12) приняты следующие обозначения:

$$N_1(t, \tau) = B(t)K^-(t, \tau), \quad M_1(t, \tau) = -\overline{B(t)}K^+(t, \tau), \quad q_1(t) = B(t)[\overline{q^+(t)} - q^-(t)],$$

$$K^\pm(t, \tau) = X^\pm(t)K(t, \tau),$$

$$K(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{A(\tau)X^+(\tau)} \frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{A(t)X^+(t)} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right), \quad (14)$$

$$q^+(t) = \frac{1}{2}h_1(t) + \frac{X^+(t)}{2\pi i} \int_L \frac{h_1(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + X^+(t)P_\chi(t),$$

$$q^-(t) = -\frac{1}{2} \frac{X^-(t)}{X^+(t)} h_1(t) + \frac{X^-(t)}{2\pi i} \int_L \frac{h_1(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + X^-(t)P_\chi(t),$$

$P_\chi(t)$ — многочлен с произвольными комплексными коэффициентами степени не выше χ ,

$$N_2(t, \tau) = -K^+[\alpha(t), \tau], q_2(t) = q^+[\alpha(t)].$$



Замечание 2. При $\chi < 0$ в формулах (12) нужно положить $P_\chi(t) \equiv 0$.

Таким образом, для решения задачи \mathbf{K}_3 в нормальном случае можно использовать следующий алгоритм:

1. Находим индекс $\chi = \text{Ind } G(t)$, канонические функции $X^\pm(z)$ однородной задачи Римана для аналитических функций с коэффициентом $G(t)$ и далее по формулам из замечания 1 функции $K^\pm(t, \tau)$, $q^\pm(t)$. Затем переходим к пункту 2.

2. Составляем первое интегральное уравнение типа Фредгольма из системы (12). Решая его (в случае его разрешимости), находим все его решения и переходим к п. 3. Если же данное уравнение неразрешимо, то неразрешима и задача \mathbf{K}_3 .

3. Если $\chi = \text{Ind } G(t) \geq 0$, то среди решений $\varphi(t)$ первого интегрального уравнения системы (12) выбираем только те $\tilde{\varphi}(t)$, которые удовлетворяют и второму интегральному уравнению системы (12) (т. е. находим решения системы (12)), а затем переходим к п. 4.

Если же $\chi = \text{Ind } G(t) < 0$, то сначала среди решений $\varphi(t)$ первого интегрального уравнения системы (12) выбираем только те, для которых выполняются условия (13), а затем из выбранных таким образом решений первого интегрального уравнения системы (12) отбираем только те $\tilde{\varphi}(t)$, которые удовлетворяют и второму интегральному уравнению системы (12) (т. е. находим решения системы (12)), а затем переходим к п. 4.

В случае, когда система (12) неразрешима, задача \mathbf{K}_3 тоже неразрешима.

4. Находим общее решение исходной задачи \mathbf{K}_3 по формуле

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tilde{\varphi}[\alpha(t)]}{t-z} dt, z \in T^+.$$

3. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ \mathbf{K}_3 В ЯВНОМ ВИДЕ

Будем говорить (см. также [4, с. 130]), что краевая задача \mathbf{K}_3 допускает явное решение, если ее общее решение удастся построить, используя только формулы Ф. Д. Гахова для решения обычной скалярной задачи Римана для аналитических функций, а также решая конечное число систем линейных алгебраических уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в квадратурах.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если ядро $K(t, \tau)$, задаваемое формулой (14), является вырожденным, то задача \mathbf{K}_3 , коэффициенты и функция сдвига которой удовлетворяют всем ограничениям нормального случая, решается в явном виде.

Доказательство. Пусть ядро $K(t, \tau)$ является вырожденным, т. е. представимо в виде

$$K(t, \tau) = \sum_{j=1}^m \mu_j(t) \eta_j(\tau).$$

Тогда система (12) примет вид

$$\begin{cases} \varphi(t) + \sum_{j=1}^m B(t) X^-(t) \mu_j(t) \lambda_j + \sum_{j=1}^m (-B(t)) \overline{X^+(t) \mu_j(t) \lambda_j} = q_1(t), \\ \varphi(t) + \sum_{j=1}^m -X^+[\alpha(t)] \mu_j[\alpha(t)] \lambda_j = q_2(t), \end{cases} \quad (15)$$

где $\lambda_j = \int_L \eta_j(\tau) \varphi(\tau) d\tau$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Умножив обе части уравнений системы (15) на $\eta_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) и проинтегрировав по L , получим следующую систему:

$$\begin{cases} \lambda_k + \sum_{j=1}^m A_{kj} \lambda_j + \sum_{j=1}^m B_{kj} \bar{\lambda}_j = D_k, \\ \lambda_k + \sum_{j=1}^m C_{kj} \lambda_j = F_k, \end{cases}$$



где $A_{kj} = \int_L a_j(t)\eta_k(t)dt$, $a_j(t) = B(t)X^-(t)\mu_j(t)$, $B_{kj} = \int_L b_j(t)\eta_k(t)dt$, $b_j(t) = -B(t)\overline{X^+(t)\mu_j(t)}$, $D_k = \int_L \eta_k(t)q_1(t)dt$, $C_{kj} = \int_L c_j(t)\eta_k(t)dt$, $c_j(t) = -X^+[\alpha(t)]\mu_j[\alpha(t)]$, $F_k = \int_L \eta_k(t)q_2(t)dt$, $j = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, m$. Пусть $\lambda_k = \rho_{2k-1} + i\rho_{2k}$, $A_{kj} = a_{k2j-1} + ia_{k2j}$, $B_{kj} = b_{k2j-1} + ib_{k2j}$, $C_{kj} = c_{k2j-1} + ic_{k2j}$, $D_{kj} = d_{k2j-1} + id_{k2j}$, $F_{kj} = f_{k2j-1} + if_{k2j}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Тогда последняя система равносильна следующей системе линейных алгебраических уравнений (записанной в векторно-матричной форме):

$$AX = B, \tag{16}$$

где $X = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_{2m} \end{pmatrix}$ — неизвестный вектор, элементы же вектора $B = \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_{2m} \\ f_1 \\ \dots \\ f_{2m} \end{pmatrix}$ и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} + b_{11} & -a_{12} + b_{12} & \dots & a_{12m-1} + b_{12m-1} & -a_{12m} + b_{12m} \\ a_{12} + b_{12} & 1 + a_{11} - b_{11} & \dots & a_{12m} + b_{12m} & a_{12m-1} - b_{12m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & -a_{m2} + b_{m2} & \dots & 1 + a_{m2m-1} + b_{m2m-1} & -a_{m2m} + b_{m2m} \\ a_{m2} + b_{m2} & a_{m1} - b_{m1} & \dots & a_{m2m} + b_{m2m} & 1 + a_{m2m-1} - b_{m2m-1} \\ 1 + c_{11} & -c_{12} & \dots & c_{12m-1} & -c_{12m} \\ c_{12} & 1 + c_{11} & \dots & c_{12m} & c_{12m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & -c_{m2} & \dots & 1 + c_{m2m-1} & -c_{m2m} \\ c_{m2} & c_{m1} & \dots & c_{m2m} & 1 + c_{m2m-1} \end{pmatrix}$$

являются вполне определенными действительными числами.

Предположим, что система алгебраических уравнений, представленная в виде (16), является совместной, и r — ранг матрицы A . Тогда, решая систему (16), находим значения параметров ρ_q ($q = 1, 2, \dots, 2m$), причем ровно r из этих параметров линейно выражаются через остальные $2m - r$ произвольных параметров.

Далее, подставив найденные числа $\lambda_k = \rho_{2k-1} + i\rho_{2k}$ ($k = 1, 2, \dots, 2m$) в любое из уравнений системы (15), определяем значение функции $\varphi(t)$, т. е. получаем решение системы (12) с вырожденным ядром $K(t, \tau)$. Затем, если $\chi \geq 0$, то по формуле

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi[\alpha(t)]}{t - z} dt, \quad z \in T^+,$$

находим решение \mathbf{K}_3 . Если же $\chi < 0$, то прежде чем подставлять $\varphi(t)$ в указанную формулу, сначала отбираем те из них, которые удовлетворяют условию (13).

Таким образом, если ядро $K(t, \tau)$, задаваемое формулой (14), является вырожденным, то решение задачи \mathbf{K}_3 , если оно существует, может быть получено в явном виде. \square

Следствие. Если в краевом условии задачи \mathbf{K}_3 коэффициенты $A(t), B(t), h(t)$ являются рациональными функциями, функция обратного сдвига является дробно-линейной, а также выполняются условия (7)–(9) и (11), то краевая задача \mathbf{K}_3 решается в явном виде.

Доказательство. Известно (см. [2, с. 28]), что обратный дробно-линейный сдвиг контура $L = \{t : |t| = 1\}$, удовлетворяющий условию Карлемана, имеет вид

$$\alpha(t) = \frac{t - c}{ct - 1}, \tag{17}$$

где c — комплексное число, $|c| > 1$.



Докажем, что если $\alpha(t)$ имеет вид (17) и $A(t), B(t), h(t)$ — рациональные функции, то ядро $K(t, \tau)$, определяемое формулой (14), является вырожденным.

Действительно, с учетом (17) $K(t, \tau)$ можно переписать в виде

$$K(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{A(\tau)X^+(\tau)} - \frac{1}{A(t)X^+(t)} \right] \frac{1}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{A(t)X^+(t)} \frac{\bar{c}}{\bar{c}\tau - 1}.$$

Рассмотрим отдельно $W(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{A(\tau)X^+(\tau)} - \frac{1}{A(t)X^+(t)} \right] \frac{1}{\tau - t}$. Так как $G(t) = -\frac{B(t)}{A(t)}$ — рациональная функция, $X^+(z)$ — одна из канонических функций однородной задачи Римана с коэффициентом $G(t)$, то и $X^+(t)$ — тоже рациональная функция. Следовательно, $\frac{1}{A(t)X^+(t)}$ — рациональная функция. Значит (см., например, [4, с. 131]), $W(t, \tau)$ — вырожденное ядро. Тогда и ядро $K(t, \tau)$ — вырожденное, а следовательно, в силу теоремы 2 задача \mathbf{K}_3 решается в явном виде. \square

Замечание 3. Отметим, что усилив условия вышеуказанного следствия, можно добиться отсутствия в системе (12) интегральных членов. Например, если потребовать, чтобы $\chi = \text{Ind } G(t) \geq 0$, а также чтобы $\frac{1}{A(t)}$ и $\frac{h(t)}{A(t)}$ были аналитически продолжимы в T^+ , то система (12) примет вид

$$\begin{cases} F^+(t) = \overline{X^-(t)P_\chi(t)}, \\ F^+(t) = h[\alpha(t)] - A[\alpha(t)]X^+[\alpha(t)]P_\chi[\alpha(t)] + A[\alpha(t)]\overline{X^-[\alpha(t)]P_\chi[\alpha(t)]}. \end{cases}$$

Пример. Найти все аналитические в круге T^+ функции $F(z)$ класса $A(T^+) \cap H(L)$, удовлетворяющие на $L = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию

$$F^+[\alpha(t)] = \frac{i}{t}F^+(t) + (1+i)\overline{F^+(t)} + \left(-\frac{i}{t} - i\right), \quad t \in L,$$

где $\alpha(t) = \frac{1}{t}$.

Решение. Здесь $A(t) = \frac{i}{t}$, $B(t) = 1+i$, $h(t) = -\frac{i}{t} - i$, $\alpha(t) = \frac{1}{t}$, $G(t) = (-1+i)t$, $\chi = \text{Ind } G(t) = 1$, $X^+(z) = -1+i$, $X^-(z) = \frac{1}{z}$.

Заметим, что при таком выборе коэффициентов и функции сдвига будут выполняться условия следствия из теоремы 2; $\chi \geq 0$ и $\frac{1}{A(t)}, \frac{h(t)}{A(t)}$ аналитически продолжимы в T^+ . Тогда краевое условие задачи равносильно системе

$$\begin{cases} F^+(t) = \bar{c}_0 t + \bar{c}_1, \\ F^+(t) = t(c_0 + i(\bar{c}_1 + c_0 - 1)) + (c_1 + i(\bar{c}_0 + c_1 - 1)), \end{cases}$$

где c_0, c_1 — произвольные комплексные постоянные.

Решением такой системы будет $F^+(t) = (a_0 - ib_0)t + (1 - a_0 - 2b_0 - ib_0)$, где a_0, b_0 — произвольные действительные постоянные, а следовательно, функция $F^+(z) = (a_0 - ib_0)z + (1 - a_0 - 2b_0 - ib_0)$ будет решением исходной задачи.

Библиографический список

1. Перельман Н. Р., Расулов К. М. Трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 18–26.
2. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М : Наука, 1977. 448 с.
3. Перельман Н. Р., Расулов К. М. Трехэлементная односторонняя краевая задача для аналитических функций с обратным сдвигом Карлемана в исключительном случае // Вестн. Брянск. гос. ун-та. 2012. № 4(2). С. 46–53.
4. Расулов К. М. Метод сопряжения для аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2013. 189 с.



A Case of an Explicit Solutions for the Three-element Problem of Carleman Type for Analytic Functions in a Circle

N. R. Perelman

Natalia R. Perelman, Smolensk State University, 4, Przheval'skogo st., 214000, Smolensk, Russia, nataly@mannel.ru

The article investigates the three-element Carleman boundary value problem in the class of analytic functions, continuous extension to the contour in the Holder sense, when this problem can not be reduced to a two-element boundary value problems. The unit circle is considered as the contour. To be specific, we study a case of inverse shift. In this case, the solution of the problem is reduced to solving a system of two integral equations of Fredholm second kind; thus significantly used the theory of F. D. Gakhov about Riemann boundary value problem for analytic functions. Based on this result, an algorithm for the solution of the problem is built. Then it is proved that if the boundary condition coefficients are rational functions, and shift a linear-fractional function, then the boundary value problem is solved in an explicit form (in quadrature). Then we consider a simple case of an explicit solution of the problem, when in addition to the above restrictions on the coefficients and shift function is required also analytic continuation of some functions defined on the contour, inside the area. This case is illustrated by a concrete example.

Key words: boundary value problem, Carleman shift.

References

1. Perelman N. R., Rasulov K. M. Three-element problem of Carleman type for bianalytic functions in a circle. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 18–26 (in Russian).
2. Litvinchuk G. S. *Solvability theory of boundary value problems and singular integral equations with shift*. Dordrecht; Boston, Kluwer Academic Publ., 2000, 378 p. DOI: 10.1007/978-94-011-4363-9. (Russ. ed.: Litvinchuk G. S. Kraevye zadachi i singuliarnye integral'nye uravneniia so sdvigom. Moscow, Nauka, 1977, 448 p.)
3. Perelman N. R., Rasulov K. M. Three-element Carleman boundary value problem with a reverse shift for analytic functions on an exceptional case. *Izv. Brjanskogo Gos. Univ.* [The Bryansk State Univ. Herald], 2012, no. 4(2), pp. 46–53 (in Russian).
4. Rasulov K. M. *Metod soprjazhenija analiticheskikh funkcij i nekotorye ego prilozhenija* [Conjugation method of analytic functions and some of its applications]. Smolensk, SmolGU Publ., 2013, 189 p. (in Russian).

УДК 517.927.25

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В. С. Рылов

Рылов Виктор Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, RykhlovVS@yandex.ru

Рассматривается квадратичный сильно нерегулярный пучок обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка с постоянными коэффициентами и с кратным корнем характеристического уравнения. Находятся суммы двукратных разложений в биортогональный ряд Фурье по корневым функциям таких пучков и, как следствие, необходимое и достаточное условие сходимости указанных разложений к разлагаемой вектор-функции. Это необходимое и достаточное условие является дифференциальным уравнением, связывающим компоненты разлагаемой вектор-функции. При этом на разлагаемую вектор-функцию накладываются некоторые условия гладкости и требования обращения в нуль ее компонент и некоторых их производных на концах основного отрезка.

Ключевые слова: квадратичный пучок дифференциальных операторов, кратная характеристика, кратный корень характеристического уравнения, сильно нерегулярный пучок, двукратное разложение по собственным функциям, двукратное разложение по корневым элементам, биортогональный ряд по корневым элементам, производные цепочки, условия кратной разложимости.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-165-174



1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Рассмотрим в пространстве $L_2[0, 1]$ квадратичный пучок $L(\lambda)$ дифференциальных операторов 2-го порядка

$$\ell(y, \lambda) := y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y, \tag{1}$$

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) - y'(0) = 0. \tag{2}$$

Характеристическое уравнение $\omega^2 - 2\omega + 1 = 0$ пучка имеет кратные корни $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Обозначим $y_1(x, \lambda) = e^{\lambda x}$, $y_2(x, \lambda) = xe^{\lambda x}$. Функции y_1, y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения $\ell(x, \lambda) = 0$.

Характеристический определитель пучка $L(\lambda)$

$$\Delta(\lambda) := \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} \equiv e^\lambda - 1 \equiv \Delta_0^-(\lambda) \equiv e^\lambda(1 - e^{-\lambda}) \equiv e^\lambda \Delta_0^+(\lambda) \tag{3}$$

является вырожденным (отсутствует слагаемое с $e^{2\lambda}$), а пучок $L(\lambda)$, таким образом, сильно нерегулярным (с.н.) (определение регулярных, почти регулярных, нормальных или слабо нерегулярных пучков см. в [1, 2]; все остальные пучки называются с.н.). Собственные значения (с.з.) λ_k пучка (нули (3)) простые и $\lambda_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решается задача нахождения условий на вектор-функцию (в.-ф.) $f = (f_1, f_2)^T$, при которых имеет место двукратная разложимость этой в.-ф. в биортогональный ряд Фурье по корневым элементам (к.э.) пучка $L(\lambda)$.

Задачи о разложении для простейших с.н. дифференциальных операторов 1-го и 2-го порядков со знакопеременной весовой функцией были решены в [3]. А именно рассматривались операторы

$$y' - \lambda p(x)y, \quad y(0) = y(1)$$

и

$$y'' - \lambda p(x)y, \quad y(0) + ay(1) = 0, \quad y'(0) + ia y'(1) = 0 \quad (a \neq 0),$$

где $p(x) = 1$ при $x \in [0, \alpha]$ и $p(x) = -1$ при $x \in [\alpha, 1]$ ($0 < \alpha < 1/2$ или $1/2 < \alpha < 1$).

В случае оператора 1-го порядка на разлагаемую функцию $f(x)$ накладывались условия непрерывности, ограниченности вариации и выполнения двух простых функциональных соотношений

$$f(x) = f(1 - x), \quad f(x) = f(2\alpha - x), \quad x \in [0, \alpha].$$

В случае оператора 2-го порядка на разлагаемую функцию, помимо условий гладкости на основном отрезке, накладывались условия аналитической продолжимости в некоторые треугольники и выполнения в этих треугольниках определенных функциональных соотношений.

В случае слабо нерегулярного дифференциального оператора 3-го порядка

$$y''' - \lambda y, \quad a_\nu y^{(\nu)}(0) + y^{(\nu)}(1) = 0, \quad \nu = 0, 1, 2,$$

где $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ (здесь корни $\{\omega_j\}$ лежат в вершинах правильного треугольника), задача о разложении решена в [4]. При этом на разлагаемую функцию накладывались условия (и это по существу) аналитичности в некоторых многоугольниках комплексной плоскости и выполнения там функционального соотношения

$$af(\omega_3 x) + bf(\omega_1 x) + f(1 - x) = 0,$$

где

$$a = (a_1 + a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon)/3, \quad b = (a_1 + a_2 \varepsilon + a_3 \varepsilon^2)/3, \quad \varepsilon = \exp 2\pi i/3,$$

при тех значениях $x \in [0, 1]$, при которых аргументы функции f попадают в упомянутые многоугольники.

Этот результат был распространен в [5] на случай оператора n -го порядка, где $n = 4k + 1$, аналогичного оператору 3-го порядка.



В статье автора [6] рассмотрен пучок 2-го порядка с простыми характеристиками

$$y'' + p_1 \lambda y' + p_2 \lambda^2 y, \\ (\alpha_{\nu 1} y'(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y'(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

где $p_j \in \mathbb{C}$. Для корней ω_1, ω_2 этого пучка справедливо $0 < \omega_1 < \omega_2$. На коэффициенты $\alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$ наложены условия, при которых рассматриваемый пучок является с.н. Получены достаточные условия сходимости двукратных разложений в.-ф. в биортогональные ряды по к.э. этого пучка (некоторые условия гладкости на разлагаемую в.-ф. и обращения в нуль в 0 и 1 компонент разлагаемой в.-ф. и их производных до некоторого порядка). Кроме того, найдено необходимое и достаточное условие на разлагаемую в.-ф. $f = (f_1, f_2)^T$, при котором имеет место представление в.-ф. этими рядами:

$$f'_1(x) - \omega_2 f_2(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Недавно в статье [7] изучались кратные разложения в.-ф. по к.э. регулярного пучка 4-го порядка с кратными характеристиками вида

$$(d/dx - \lambda)^4 y, \quad y^{(\nu)}(0) - y^{(\nu)}(1) = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Получены достаточные условия 4-кратной разложимости в.-ф. по к.э. этого пучка (некоторые условия гладкости на разлагаемую в.-ф. и обращения в нуль в 0 и 1 компонент разлагаемой в.-ф. и их производных до некоторого порядка). Выполнение еще каких-то соотношений при этом не предполагалось.

В данной статье исследуются разложения в.-ф. по к.э. в случае с.н. пучка $L(\lambda)$ вида (1)–(2) с кратными характеристиками.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Линеаризуем задачу $L(\lambda) = 0$ подстановкой $z_1 = y, z_2 = \lambda z_1$. С учетом (1)–(2) в результате получается краевая задача на с.з. уже для обыкновенного дифференциального оператора \hat{L} , но в пространстве в.-ф. $z = (z_1, z_2)^T$:

$$\hat{L}z - \lambda z = 0,$$

где оператор \hat{L} определяется дифференциальным выражением

$$\hat{\ell}(z) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{d^2}{dx^2} & 2\frac{d}{dx} \end{pmatrix} z,$$

действующем на множестве

$$D_{\hat{L}} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \middle| z'_1, z_2 \in L_1[0, 1], \hat{U}_1(z) = z_1(0) = 0, \hat{U}_2(z) = z_1(1) - z'_1(0) = 0 \right\}.$$

С.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора \hat{L} , очевидно, совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ (см. определение в [1, с. 102]) совпадает с системой к.э. оператора \hat{L} .

Обозначим через Γ_ν круговые контуры с центром в начале координат и радиуса $(2\nu - 1)\pi, \nu \in \mathbb{N}$. Хорошо известно, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f d\lambda,$$

где $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора \hat{L} , есть частичная сумма разложений в.-ф. f в биортогональный ряд Фурье по к.э. оператора \hat{L} , соответствующим тем с.з., которые попали внутрь контура Γ_ν .

Пусть $\hat{R}_\lambda f = (z_1(x, \lambda; f), z_2(x, \lambda; f))^T$ и $I_s(x, \nu; f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} z_s(x, \lambda; f) d\lambda, s = 1, 2$.

Обозначим через $G(x, t, \lambda)$ функцию Грина пучка $L(\lambda)$. Для данной в.-ф. $f = (f_1, f_2)^T$ определим функцию $F(x, \lambda; f) := -\lambda f_1(x) + 2f'_1(x) - f_2(x)$.

Лемма 1. Если $f_1, f_2 \in L_1[0, 1]$, то при $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$

$$z_1(x, \lambda; f) = \int_0^1 G(x, t, \lambda) F(t, \lambda; f) dt = \int_0^x (x-t)e^{\lambda(x-t)} F(t, \lambda; f) dt +$$



$$+ \frac{1}{\Delta_0^-(\lambda)} \int_0^1 x(t-1)e^{\lambda(x+1-t)} F(t, \lambda; f) dt =: z_{11}^-(x, \lambda; f) + z_{12}^-(x, \lambda; f), \quad (4)$$

а при $\text{Re } \lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} z_1(x, \lambda; f) &= \int_0^1 G(x, t, \lambda) F(t, \lambda; f) dt = \int_x^1 (t-x)e^{\lambda(x-t)} F(t, \lambda; f) dt + \\ &+ \int_0^1 (x-1)te^{\lambda(x-t)} F(t, \lambda; f) dt + \frac{1}{\Delta_0^+(\lambda)} \int_0^1 x(t-1)e^{\lambda(x-1-t)} F(t, \lambda; f) dt =: \\ &=: z_{11}^+(x, \lambda; f) + z_{12}^+(x, \lambda; f) + z_{13}^+(x, \lambda; f); \quad (5) \\ z_2(x, \lambda; f) &= \lambda z_1(x, \lambda; f) + f_1(x). \quad (6) \end{aligned}$$

Доказательство. Найдем резольвенту $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda E)^{-1}$. Для этого решим задачу $(\hat{L} - \lambda E)z = f$ относительно в.-ф. z или, подробнее, задачу

$$\begin{cases} z_2 - \lambda z_1 = f_1, \\ -z_1'' + 2z_1' - \lambda z_2 = f_2, \end{cases} \quad \hat{U}_j(z) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

Выражая z_2 из первого уравнения системы в (7) и подставляя во второе (здесь требуется гладкость функции f_1) для нахождения z_1 получим краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\ell(z_1, \lambda) = F(x, \lambda; f), \quad \hat{U}_j(z) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных, находим общее решение дифференциального уравнения в (8) в случае $\text{Re } \lambda \leq 0$ в виде

$$z_1(x, \lambda) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + \int_0^x (x-t)e^{\lambda(x-t)} dt,$$

а в случае $\text{Re } \lambda \geq 0$ — в виде

$$z_1(x, \lambda) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} - \int_x^1 (x-t)e^{\lambda(x-t)} dt.$$

Затем находим константы C_1, C_2 из краевых условий (8) и в результате получим формулы (4)–(5). Формула (6) есть следствие первого соотношения в системе (7). Тем самым, лемма 1 доказана. \square

Пусть $K_\delta(\lambda_k)$ есть круги радиуса δ с центрами в λ_k и $\mathbb{C}_\delta = \mathbb{C} \setminus (\cup_{k \in \mathbb{Z}} K_\delta(\lambda_k))$. Обозначим через \mathbb{C}_δ^+ (\mathbb{C}_δ^-) части \mathbb{C}_δ , лежащие в правой (левой) полуплоскости. Используя те же рассуждения, что и в [1, с. 74–84], без труда устанавливаем справедливость леммы. В этой лемме и далее через Γ_ν^- и Γ_ν^+ обозначены части контура Γ_ν , лежащие, соответственно, в левой и правой полуплоскости.

Лемма 2. Существует такая положительная константа C_δ , что

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}_\delta^- : |\Delta_0^-(\lambda)| \geq C_\delta; \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_\delta^+ : |\Delta_0^+(\lambda)| \geq C_\delta. \quad (9)$$

Далее в доказательстве теоремы о разложении существенно используются оценки, даваемые следующей леммой (первоначальную сформулированную и доказанную в [6]).

Лемма 3. Если $\gamma(x, t) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 t$ ($\gamma_2 \neq 0$) и $\gamma(x, t) \text{Re } \lambda \leq 0$ для всех $\lambda \in \Gamma_\nu^+ (\Gamma_\nu^-)$ при $x \in [0, 1]$, $t \in [a(x), b(x)]$, где $a(x), b(x)$ — заданные линейные функции, $f \in L_p[0, 1]$, $p > 1$, $\chi_p(\nu) = \nu^{1/p}$ при $1 < p < \infty$ и $\chi_\infty(\nu) = \ln \nu$ при $p = \infty$, то

$$\left| -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+ (\Gamma_\nu^-)} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} e^{\gamma(x,t)\lambda} h(t) dt \right) d\lambda \right| \leq C \|h\|_p \chi_p(\nu), \quad (10)$$

где обозначено $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p[0,1]}$.

Отметим, что аналогичные оценки впервые использовались в [8].



3. ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ О РАЗЛОЖЕНИИ

Справедлива следующая теорема о разложении.

Теорема 1. Если в.-ф. $f = (f_1, f_2)^T$ удовлетворяет условиям:

$$f_1''', f_2'' \in L_p[0, 1], \quad 1 < p \leq +\infty, \quad (11)$$

$$f_1^{(s)}(0) = f_1^{(s)}(1) = 0, \quad s = 0, 1, 2; \quad f_2^{(s)}(0) = f_2^{(s)}(1) = 0, \quad s = 0, 1. \quad (12)$$

то справедливы формулы двукратного разложения в.-ф. f по к.э. пучка $L(\lambda)$:

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} I_s(x, \nu; f) = f_s(x) + (1-x) \left(x f_1'(x) - f_1(x) - x f_2(x) \right)^{(s-1)}, \quad s = 1, 2, \quad (13)$$

где сходимость равномерная по $x \in [0, 1]$.

Доказательство. Рассмотрим $I_1(x, \nu; f)$. Справедливо представление

$$I_1(x, \nu; f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} z_1(x, \lambda; f) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+} z_1(x, \lambda; f) d\lambda =: I_1^-(x, \nu; f) + I_1^+(x, \nu; f). \quad (14)$$

Найдем асимптотику $I_1^-(x, \nu; f)$ при $\nu \rightarrow +\infty$. В соответствии с формулой (4)

$$I_1^-(x, \nu; f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} z_{11}^-(x, \lambda; f) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} z_{12}^-(x, \lambda; f) d\lambda =: I_{11}^-(x, \nu; f) + I_{12}^-(x, \nu; f). \quad (15)$$

Для выражения при экспоненте под знаком интеграла в $z_{11}^-(x, \lambda; f)$ имеем:

$$(x-t)F(t, \lambda; f) = \lambda((t-x)f_1(t)) + ((x-t)(2f_1'(t) - f_2(t))) =: \lambda a_{111}(x, t) + a_{112}(x, t).$$

Следовательно,

$$z_{11}^-(x, \lambda; f) = \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-t)} a_{111}(x, t) dt + \int_0^x e^{\lambda(x-t)} a_{112}(x, t) dt =: \lambda A_{111}(x, \lambda; f) + A_{112}(x, \lambda; f). \quad (16)$$

Справедливы формулы

$$\left. \begin{aligned} a'_{112,t}(x, t) &= -(2f_1'(t) - f_2(t)) + (x-t)(2f_1''(t) - f_2'(t)), \\ a''_{112,t^2}(x, t) &= -(4f_1''(t) - 2f_2'(t)) + (x-t)(2f_1'''(t) - f_2''(t)), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} a'_{111,t}(x, t) &= f_1(t) + (t-x)f_1'(t), \\ a''_{111,t^2}(x, t) &= 2f_1'(t) + (t-x)f_1''(t), \\ a'''_{111,t^3}(x, t) &= 3f_1''(t) + (t-x)f_1'''(t). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Проинтегрируем по частям $A_{112}(x, \lambda; f)$ один раз, а $A_{111}(x, \lambda; f)$ два раза. При этом воспользуемся формулами (17), (18) и предположениями (11), (12). Получим:

$$A_{112}(x, \lambda; f) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} a'_{112,t}(x, t) dt, \quad (19)$$

$$\lambda A_{111}(x, \lambda; f) = -\frac{1}{\lambda} f_1(x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} a''_{111,t^2}(x, t) dt. \quad (20)$$

Так как подынтегральные функции ограничены при $0 \leq t \leq x$, $x \in [0, 1]$, то по лемме 3

$$\left| -\frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_\nu^-} A_{112}(x, \lambda; f) d\lambda \right| \leq C(\|f_2'\|_\infty + \|f_1''\|_\infty) \frac{\chi_\infty(\nu)}{\nu} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow +\infty,$$

расномерно по $x \in [0, 1]$. Следовательно,

$$A_{112}(x, \lambda; f) = \alpha(x, \lambda; f), \quad (21)$$



где через $\alpha(x, \lambda; f)$ здесь и далее будет обозначаться любая функция, для которой

$$\int_{\Gamma_{\pm}^{\nu}} \alpha(x, \lambda; f) d\lambda = o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty,$$

равномерно по $x \in [0, 1]$. Далее, не оговаривая это особо, считаем $o(1)$ равномерной по $x \in [0, 1]$.

Для $A_{111}(x, \lambda; f)$ аналогично получим:

$$\lambda A_{111}(x, \lambda; f) = -\frac{1}{\lambda} f_1(x) + \alpha(x, \lambda; f). \quad (22)$$

Таким образом, из (15), (16), (21), (22) следует асимптотика

$$I_{11}^{-}(x, \nu; f) = \frac{1}{2} f_1(x) + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь $I_{12}^{-}(x, \nu; f)$. Для выражения при экспоненте под знаком интеграла в $z_{12}^{-}(x, \lambda; f)$ имеем:

$$x(t-1)F(t, \lambda; f) = \lambda(x(1-t)f_1(t)) + (x(t-1)(2f_1'(t) - f_2(t))) =: \lambda a_{121}(x, t) + a_{122}(x, t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z_{12}^{-}(x, \lambda; f) &= \frac{\lambda}{\Delta_0^{-}(\lambda)} \int_0^1 e^{\lambda(x+1-t)} a_{121}(x, t) dt + \frac{1}{\Delta_0^{-}(\lambda)} \int_0^1 e^{\lambda(x+1-t)} a_{122}(x, t) dt =: \\ &=: \lambda A_{121}(x, \lambda; f) + A_{122}(x, \lambda; f). \end{aligned} \quad (24)$$

Справедливы формулы

$$\left. \begin{aligned} a'_{122,t}(x, t) &= x(2f_1'(t) - f_2(t)) + x(t-1)(2f_1''(t) - f_2'(t)), \\ a''_{122,t^2}(x, t) &= x(4f_1''(t) - 2f_2'(t)) + x(t-1)(2f_1'''(t) - f_2''(t)), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} a'_{121,t}(x, t) &= -x f_1(t) + x(1-t) f_1'(t), \\ a''_{121,t^2}(x, t) &= -2x f_1'(t) + x(1-t) f_1''(t), \\ a'''_{121,t^3}(x, t) &= -3x f_1''(t) + x(1-t) f_1'''(t). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Проинтегрируем по частям $A_{122}(x, \lambda; f)$ один раз, а $A_{121}(x, \lambda; f)$ два раза. При этом воспользуемся формулами (25), (26), предположениями (11), (12) и леммой 2. Получим:

$$A_{122}(x, \lambda; f) = \frac{1}{\lambda \Delta_0^{-}(\lambda)} \int_0^1 e^{\lambda(x+1-t)} a'_{122,t}(x, t) dt = \alpha(x, \lambda; f), \quad (27)$$

$$\lambda A_{121}(x, \lambda; f) = -\frac{1}{\lambda \Delta_0^{-}(\lambda)} \int_0^1 e^{\lambda(x+1-t)} a''_{121,t^2}(x, t) dt = \alpha(x, \lambda; f). \quad (28)$$

Таким образом, из (15), (24), (9), (27), (28) следует асимптотика

$$I_{12}^{-}(x, \nu; f) = o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (29)$$

Следовательно, на основании (15), (23), (29)

$$I_1^{-}(x, \nu; f) = \frac{1}{2} f_1(x) + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (30)$$

Найдем теперь асимптотику $I_1^{+}(x, \nu; f)$ при $\nu \rightarrow +\infty$. В соответствии с формулой (5)

$$\begin{aligned} I_1^{+}(x, \nu; f) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\uparrow}^{\nu}} z_{11}^{+}(x, \lambda; f) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\uparrow}^{\nu}} z_{12}^{+}(x, \lambda; f) d\lambda - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\uparrow}^{\nu}} z_{13}^{+}(x, \lambda; f) d\lambda =: I_{11}^{+}(x, \nu; f) + I_{12}^{+}(x, \nu; f) + I_{13}^{+}(x, \nu; f). \end{aligned} \quad (31)$$



Аналогично предыдущему (см. (23), (29)) получим:

$$I_{11}^+(x, \nu; f) = \frac{1}{2}f_1(x) + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty, \quad (32)$$

$$I_{13}^+(x, \nu; f) = o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (33)$$

Осталось рассмотреть интеграл $I_{12}^+(x, \nu; f)$.

Для выражения при экспоненте под знаком интеграла в $z_{12}^+(x, \lambda; f)$ имеем:

$$(x-1)tF(t, \lambda; f) = \lambda((1-x)tf_1(t)) + ((x-1)t(2f_1'(t) - f_2(t))) =: \lambda b_{121}(x, t) + b_{122}(x, t).$$

Следовательно,

$$z_{12}^+(x, \lambda; f) = \lambda \int_0^1 e^{\lambda(x-t)} b_{121}(x, t) dt + \int_0^1 e^{\lambda(x-t)} b_{122}(x, t) dt =: \lambda B_{121}(x, \lambda; f) + B_{122}(x, \lambda; f). \quad (34)$$

Справедливы формулы

$$\left. \begin{aligned} b'_{122,t}(x, t) &= (x-1)(2f_1'(t) - f_2(t) + 2tf_1''(t) - tf_2'(t)), \\ b''_{122,t^2}(x, t) &= (x-1)(4f_1''(t) - 2f_2'(t) + 2tf_1'''(t) - tf_2''(t)), \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} b'_{121,t}(x, t) &= (1-t)(f_1(t) + tf_1'(t)), \\ b''_{121,t^2}(x, t) &= (1-t)(2f_1'(t) + tf_1''(t)), \\ b'''_{121,t^3}(x, t) &= (1-x)(3f_1''(t) + tf_1'''(t)). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Проинтегрируем по частям $B_{122}(x, \lambda; f)$ один раз, а $B_{121}(x, \lambda; f)$ два раза. При этом воспользуемся формулами (35), (36) и предположениями (11), (12). Получим:

$$B_{112}(x, \lambda; f) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 e^{\lambda(x-t)} b'_{122,t}(x, t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} b'_{122,t}(x, t) dt + \alpha(x, \lambda; f), \quad (37)$$

$$\lambda B_{121}(x, \lambda; f) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 e^{\lambda(x-t)} b''_{121,t^2}(x, t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} b''_{121,t^2}(x, t) dt + \alpha(x, \lambda; f). \quad (38)$$

Из (34), (37), (38) будем иметь:

$$z_{12}^+(x, \lambda; f) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} (b'_{122,t}(x, t) + b''_{121,t^2}(x, t)) dt + \alpha(x, \lambda; f).$$

Используя аддитивность интеграла, теорию вычетов и предположения (12), получим:

$$\begin{aligned} I_{12}^+(x, \nu; f) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} (b'_{122,t}(x, t) + b''_{121,t^2}(x, t)) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} (b'_{122,t}(x, t) + b''_{121,t^2}(x, t)) dt + o(1) = \\ &= -\int_0^x (b'_{122,t}(x, t) + b''_{121,t^2}(x, t)) dt + o(1) = -(b'_{122,t}(x, x) + b''_{121,t^2}(x, x)) + o(1) = \\ &= (1-x)(xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2(x)) + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (39)$$

Следовательно, на основании (31)–(33), (39)

$$I_1^+(x, \nu; f) = \frac{1}{2}f_1(x) + (1-x)(xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2(x)) + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (40)$$

С учетом (14), (30) и (40)

$$I_1(x, \nu; f) = \frac{1}{2}f_1(x) + (1-x)(xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2(x)) + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty$$

что доказывает (13) для $s = 1$.



Рассмотрим теперь $I_2(x, \nu; f)$. Справедливо представление

$$\begin{aligned} I_2(x, \nu; f) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} \lambda z_1(x, \lambda; f) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} f_1(x) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} \lambda z_1(x, \lambda; f) d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} \lambda z_{11}^-(x, \lambda; f) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+} \lambda z_{12}^-(x, \lambda; f) d\lambda =: I_2^-(x, \nu; f) + I_2^+(x, \nu; f). \end{aligned} \quad (41)$$

Отсюда видно, как изменятся рассуждения при исследовании $I_2(x, \nu; f)$ по сравнению с исследованием $I_1(x, \nu; f)$. Эти изменения вызваны присутствием лишнего множителя λ у каждого слагаемого в (41).

Найдем асимптотику $I_2^-(x, \nu; f)$ при $\nu \rightarrow +\infty$. В соответствии с (41) и (15) имеем:

$$I_2^-(x, \nu; f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} \lambda z_{11}^-(x, \lambda; f) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} \lambda z_{12}^-(x, \lambda; f) d\lambda =: I_{21}^-(x, \nu; f) + I_{22}^-(x, \nu; f). \quad (42)$$

На основании (16)

$$\lambda z_{11}^-(x, \lambda; f) = \lambda^2 A_{111}(x, \lambda; f) + \lambda A_{112}(x, \lambda; f). \quad (43)$$

Чтобы погасить дополнительный множитель λ , проинтегрируем по частям $A_{112}(x, \lambda; f)$ не один раз, как раньше, а два раза, а $A_{111}(x, \lambda; f)$ три раза. Воспользовавшись формулами (17), (18), предположениями (11), (12), леммой 3 (формула (10) применяется для p из (11)) и формулами (19), (20), получим:

$$\begin{aligned} \lambda A_{112}(x, \lambda; f) &= -\frac{1}{\lambda} f_2(x) + \frac{2}{\lambda} f_1'(x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} a''_{112,t^2}(x, t) dt = \\ &= -\frac{1}{\lambda} f_2(x) + \frac{2}{\lambda} f_1'(x) + \alpha(x, \lambda; f), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 A_{111}(x, \lambda; f) &= -f_1(x) - \frac{2}{\lambda} f_1'(x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda(x-t)} a'''_{111,t^3}(x, t) dt = \\ &= -f_1(x) - \frac{2}{\lambda} f_1'(x) + \alpha(x, \lambda; f). \end{aligned} \quad (45)$$

Следовательно, на основании (42)–(45) имеем:

$$I_{21}^-(x, \nu; f) = \frac{1}{2} f_2(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} f_1(x) d\lambda + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (46)$$

Аналогично предыдущему

$$I_{22}^-(x, \nu; f) = o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (47)$$

С учетом (42) из (46), (47) получим:

$$I_2^-(x, \nu; f) = \frac{1}{2} f_2(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^-} f_1(x) d\lambda + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (48)$$

Найдем теперь асимптотику $I_2^+(x, \nu; f)$ при $\nu \rightarrow +\infty$. В соответствии с формулами (41), (5), (4) имеем:

$$\begin{aligned} I_2^+(x, \nu; f) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+} \lambda z_{11}^+(x, \lambda; f) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+} \lambda z_{12}^+(x, \lambda; f) d\lambda - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+} \lambda z_{13}^+(x, \lambda; f) d\lambda =: I_{21}^+(x, \nu; f) + I_{22}^+(x, \nu; f) + I_{23}^+(x, \nu; f). \end{aligned} \quad (49)$$

Аналогично предыдущему в силу предположений (11), (12), лемм 2 и 3, свойств интегралов в комплексной плоскости, теории вычетов и формул (35), (36) получим:

$$I_{21}^+(x, \nu; f) = \frac{1}{2} f_2(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu^+} f_1(x) d\lambda + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} I_{22}^+(x, \nu; f) &= -b'_{122,t}(x, x) - b''_{121,t^2}(x, x) + o(1) = \\ &= (1-x)(xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2'(x))' + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (51)$$



$$I_{23}^+(x, \nu; f) = o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (52)$$

Из (49)–(52) получим:

$$I_2^+(x, \nu; f) = \frac{1}{2}f_2(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} f_1(x) d\lambda + (1-x)(xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2'(x))' + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty. \quad (53)$$

Таким образом, на основании (41), (48), (53) справедливо равенство

$$\begin{aligned} I_2(x, \nu; f) &= f_2(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} f_1(x) d\lambda + (1-x)(xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2'(x))' + o(1) = \\ &= f_2(x) + (1-x)(xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2'(x))' + o(1), \quad \nu \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

а это и есть утверждение (13) в случае $s = 2$. □

Из этой теоремы, как простое следствие, получаем необходимое и достаточное условие разложения в.-ф. $f = (f_1, f_2)^T$ в биортогональный ряд Фурье по к.э. пучка $L(\lambda)$.

Теорема 2. Пусть в.-ф. f удовлетворяет условиям (11), (12). Для того чтобы имели место формулы двукратного разложения в.-ф. f по корневым элементам пучка $L(\lambda)$ с равномерной сходимостью по $x \in [0, 1]$

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} I_s(x, \nu; f) = f_s(x), \quad s = 1, 2,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее тождество на $[0, 1]$

$$xf_1'(x) - f_1(x) - xf_2(x) \equiv 0.$$

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К).

Библиографический список

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
2. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190–229.
3. Хромов А. П., Гуревич А. П. Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Матем. заметки. 1994. Т. 56, вып. 1. С. 3–15.
4. Хромов А. П. Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182–193.
5. Дмитриев О. Ю. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n -го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 10–14.
6. Рыжлов В. С. Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 21–26.
7. Вагабов А. И., Абуд А. Х. Четырехкратная разложимость в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с четырехкратной характеристикой // Вестн. Дагест. гос. ун-та. 2015. Т. 30, вып. 1. С. 34–39.
8. Хромов А. П. Теоремы равномерности для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.

Expansion in Root Functions of Strongly Irregular Pencil of Differential Operators of the Second Order with Multiple Characteristics

V. S. Rykhlov

Victor S. Rykhlov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, RykhlovVS@yandex.ru

We consider the quadratic strongly irregular pencil of ordinary second order differential operators with constant coefficients and with a multiple root of the characteristic equation. The amounts of double expansions in biorthogonal Fourier series in the derived chains of such pencils and a necessary and sufficient condition for convergence of these expansions to the expanded vector-valued function are found. This necessary and sufficient condition is a differential equation relating the components of the expanded vector function. At the same time some conditions of smoothness on the components of the expanded vector-valued function and requirements of the vanishing of its components and some of their derivatives at the ends of the main segment are imposed.



Key words: quadratic pencil of differential operators, multiple characteristic, multiple root of characteristic equation, strongly irregular pencil, two-fold expansion in the eigenfunctions, two-fold expansion in the root elements, biorthogonal series on root elements, derived chains, conditions of multiple expandability.

The results were obtained within the framework of the state task of Russian Ministry of Education and Science (project no. 1.1520.2014K).

References

1. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. Pt. I. New York, F. Ungar Publ. Co., 1967, 144 p.; Pt. II. New York, F. Ungar Publ. Co., 1968, 352 p. (Russ. ed.: Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. Moscow, Nauka, 1968, 528 p.).
2. Shkalikov A. A. Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions. *J. Soviet Math.*, 1986, vol. 33, iss. 6, pp. 1311–1342.
3. Gurevich A. P., Khromov A. P. First and second order differential operators with weight functions of variable sign. *Math. Notes*, 1994, vol. 56, iss. 1, pp. 653–661.
4. Khromov A. P. Razlozhenie po sobstvennym funktsiiam odnoi kraevoi zadachi tret'ego poriadka [Expansion in the eigenfunctions of a boundary value problem of the third order]. *Issledovaniia po teorii operatorov* [Researches on the theory of operators], Ufa, 1988, pp. 182–193 (in Russian).
5. Dmitriev O. Iu. Expansion on eigenfunctions the differential operator of n -th order with irregular boundary conditions. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2007, vol. 7, iss. 2, pp. 10–14 (in Russian).
6. Rykhlov V. S. Expansion in eigenfunctions of quadratic strongly irregular pencils of differential operators of the second order. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, part 1, pp. 21–26 (in Russian).
7. Vagabov A. I., Abud A. Kh. Quadruple expandability in Fourier's series on root elements of a differential pencil with quadruple characteristic. *Vestnik Dagest. gos. un-ta* [Bull. of the Dagestan State Univ.], 2015, vol. 30, iss. 1, pp. 34–39.
8. Hromov A. P. Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators. *Math. USSR Sb.*, 1982, vol. 42, iss. 3, pp. 331–355.

УДК 517.54

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ НА ОКРУЖНОСТИ

А. Х. Фатыхов¹, П. Л. Шабалин²

¹Фатыхов Азат Халитович, аспирант кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, vitofat@gmail.com

²Шабалин Павел Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, pavel.shabalin@mail.ru

В статье рассматривается краевая задача Гильберта теории аналитических функций с бесконечным индексом и краевым условием на окружности, коэффициенты краевого условия непрерывны по Гельдеру всюду, кроме одной особой точки, в которой аргумент функции коэффициентов имеет разрыв второго рода (степенного порядка с показателем, меньше единицы). В такой постановке задача с бесконечным индексом рассматривается впервые. Получены формулы общего решения однородной задачи, исследованы вопросы существования и единственности решения, описано множество решений в случае неединственности. При исследовании решения применялся аппарат теории целых функций и геометрической теории функций комплексного переменного.

Ключевые слова: задача Гильберта, бесконечный индекс, целые функции, индикатор роста.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-174-180

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $D = \{z = re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ — единичный круг в плоскости комплексного переменного z , $L = \partial D$. Рассмотрим краевую задачу Гильберта теории аналитических функций с краевым условием на единичной окружности

$$a(t) \operatorname{Re} \Phi(t) - b(t) \operatorname{Im} \Phi(t) = c(t), \quad t \in L, \quad t \neq 1,$$



и двусторонним завихрением в точке $t = 1$, которая относится к краевым задачам с бесконечным индексом, по терминологии Н. В. Говорова [1]. По этой тематике после основополагающих исследований Н. В. Говорова (см. [1] и библиографию) появилось много работ (см., например, [2–5]), в которых контуром служила вещественная ось, а завихрение (т.е. точка разрыва второго рода у аргумента функции коэффициентов) располагалось в бесконечно удаленной точке. Мы впервые рассмотрим задачу, когда контур и точка нарушения непрерывности коэффициентов краевого условия конечны.

Будем считать, что коэффициенты краевого условия $a(t)$, $b(t)$ непрерывны в каждой точке t окружности L , кроме $t = 1$. Краевое условие задачи Гильберта обычно записывают в виде

$$\operatorname{Re} [e^{-i\nu(t)}\Phi(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|}, \quad (1)$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L и функция $\nu(t) = \arg G(t)$, на L удовлетворяет условию Гельдера всюду, кроме окрестности точки $t = 1$, в которой она имеет разрыв второго рода. Именно при $t = e^{i\theta}$ справедливо представление

$$\nu(t) = \begin{cases} \frac{\nu^+}{\sin^\rho(\theta/2)} + \tilde{\nu}(\theta), & 0 < \theta < \pi, \\ \frac{\nu^-}{\sin^\rho(\theta/2)} + \tilde{\nu}(\theta), & \pi < \theta < 2\pi, \end{cases} \quad (2)$$

для некоторых чисел ν^+ , ν^- , ρ , $0 < \rho < 1$, функция $\tilde{\nu}(\theta)$ удовлетворяет условиям $\tilde{\nu}(0) = \tilde{\nu}(2\pi)$ и $\tilde{\nu}(\pi+) - \tilde{\nu}(\pi-) = \nu^+ - \nu^-$.

Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в области D по краевому условию однородной задачи Гильберта:

$$a(t) \operatorname{Re} \Phi(t) - b(t) \operatorname{Im} \Phi(t) = 0, \quad t \in L.$$

2. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Для аналитического выделения особенности (2) краевое условие однородной задачи с учетом (1) перепишем в виде

$$\operatorname{Re} [e^{-i\nu(t)}\Phi(t)] = 0 \quad (3)$$

и рассмотрим аналитическую в области D функцию

$$P(z) + iQ(z) = \frac{le^{i\alpha}}{(z-1)^\rho},$$

где l , α — действительные постоянные, $l > 0$, $0 < \theta < 2\pi$. Эта функция на окружности L принимает значения

$$P(e^{i\theta}) + iQ(e^{i\theta}) = \frac{l}{2^\rho \sin^\rho(\theta/2)} \left[\cos\left(\alpha - \frac{(\theta + \pi)\rho}{2}\right) + i \sin\left(\alpha - \frac{(\theta + \pi)\rho}{2}\right) \right]. \quad (4)$$

Выберем числа l , $l > 0$, и α , $0 < \alpha < 2\pi$, так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \frac{l}{2^\rho} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\rho\right) = \nu^+, \\ \frac{l}{2^\rho} \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\rho\right) = \nu^-. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) имеет единственное решение:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\nu^+ \sin(\pi\rho)}\right) + \frac{\pi}{2}\rho, \\ l = \frac{2^\rho}{\sin(\pi\rho)} \sqrt{\nu^{-2} - 2\nu^-\nu^+ \cos(\pi\rho) + \nu^{+2}},$$



учтя которое перепишем формулу (4) в виде

$$P(e^{i\theta}) = \frac{\nu^+ \sin(\pi\rho - \theta\rho/2) + \nu^- \sin(\theta\rho/2)}{\sin^\rho(\theta/2) \sin(\pi\rho)}, \quad (6)$$

$$Q(e^{i\theta}) = \frac{\nu^- \cos(\theta\rho/2) - \nu^+ \cos(\pi\rho + \theta\rho/2)}{\sin^\rho(\theta/2) \sin(\pi\rho)}. \quad (7)$$

Таким образом, для функции $\hat{\nu}(e^{i\theta}) = \nu(e^{i\theta}) - P(e^{i\theta})$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} \hat{\nu}(e^{i\theta}) &= 2 \frac{\nu^+ \cos(\pi\rho - \theta\rho/4) - \nu^- \cos(\theta\rho/4)}{\sin \pi\rho} \cdot \frac{\sin(\theta\rho/4)}{\sin^\rho(\theta/2)} + \tilde{\nu}(\theta), \quad \theta \in (0, \pi), \\ \hat{\nu}(e^{i\theta}) &= 2 \frac{\nu^- \cos(\pi\rho/2 + \theta\rho/4) - \nu^+ \cos(\pi\rho/2 - \theta\rho/4)}{\sin \pi\rho} \cdot \frac{\sin(\pi\rho/2 - \theta\rho/4)}{\sin^\rho(\theta/2)} + \tilde{\nu}(\theta), \quad \theta \in (\pi, 2\pi), \end{aligned}$$

из которых ясно, что функция $\hat{\nu}(t)$ непрерывна по Гельдеру на окружности L . Краевое условие однородной задачи (3) запишем в виде

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\Gamma(t)} \exp \left\{ -i \frac{te^{i\alpha}}{(t-1)^\rho} \right\} \Phi(t) \right] = 0, \quad (8)$$

где $\Gamma(t)$ — краевое значение на окружности L аналитической в D и непрерывной в \bar{D} функции

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\nu}(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta.$$

Рассмотрим аналитическую в круге D функцию

$$F(z) = ie^{-i\Gamma(z)} e^{-i \frac{te^{i\alpha}}{(z-1)^\rho}} \Phi(z), \quad (9)$$

граничные значения которой в силу (8) удовлетворяют условию

$$\operatorname{Im} F(t) = 0, \quad t \in L, \quad t \neq 1, \quad (10)$$

всюду на L , кроме точки $t = 1$. Выразим из равенства (9) искомую функцию

$$\Phi(z) = -ie^{i\Gamma(z)} e^{i \frac{te^{i\alpha}}{(z-1)^\rho}} F(z). \quad (11)$$

Потребуем, чтобы аналитическая в D функция $F(z)$, кроме условия (10), удовлетворяла еще неравенству

$$|F(t)| \leq Ce^{Q(t)}, \quad C = \text{const}, \quad t \in L. \quad (12)$$

Поскольку в силу (12) всюду на L выполняется неравенство $|F(t)|e^{-Q(t)} \leq C$, то по принципу максимума модуля функция (11) будет ограниченной в D .

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Общее решение однородной краевой задачи в классе ограниченных в D функций дается формулой (11), где $F(z)$ — произвольная аналитическая в D функция, принимающая на единичной окружности чисто мнимые значения и удовлетворяющая на границе условию (12).*

3. УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ

Из теоремы 1 следует, что существование и число решений зависит от существования и множества функций $F(z)$, удовлетворяющих условиям (10), (12). Для изучения последнего вопроса пересадим функцию $F(z)$ в верхнюю полуплоскость $E^+ = \{\zeta : \zeta = \xi + i\eta, \eta > 0\}$ функцией

$$z = z(\zeta), \quad z(\zeta) = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}.$$



Получим аналитическую в E^+ функцию $F_1(\zeta) = F \circ z(\zeta)$, удовлетворяющую условию $\text{Im } F_1(\xi) = 0$. Следовательно, $F_1(\zeta)$ можно по симметрии продолжить на всю комплексную плоскость. Таким образом, $F_1(\zeta)$ является целой функцией. В силу формулы (9) имеем $F_1(\zeta) = \exp\{\zeta^\rho\}O(1)$, $\zeta \rightarrow \infty$. Ясно, что $F_1(\zeta)$ является целой функцией порядка не выше ρ . Граничные значения этой функции определяются формулами

$$F_1(\xi) = e^{-i\Gamma_1(\xi)} e^{-i(P_1(\xi) + iQ_1(\xi))} \Phi_1(\xi), \quad \Phi_1(\zeta) = \Phi \circ z(\zeta), \quad \Gamma_1(\zeta) = \Gamma \circ z(\zeta),$$

где $P_1(\xi) + iQ_1(\xi)$ — значения на вещественной оси функции

$$P_1(\zeta) + iQ_1(\zeta) = (P + iQ) \circ z(\zeta) = \left[\nu^- + i \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} \right] \zeta^\rho \left(1 + \frac{i}{\zeta} \right)^\rho,$$

которую представим в следующем виде:

$$P_1(re^{i\theta}) + iQ_1(re^{i\theta}) = \left[\nu^- e^{i\rho\theta} + i \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} e^{i\rho\theta} \right] r^\rho + O\left(\frac{1}{r^{1-\rho}}\right). \quad (13)$$

Отсюда получаем представление для граничных значений:

$$P_1(\xi) + iQ_1(\xi) = \begin{cases} \left[\nu^- + i \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} \right] \xi^\rho + O\left(\frac{1}{\xi^{1-\rho}}\right), & \xi \rightarrow +\infty, \\ \left[\nu^+ + i \frac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)} \right] |\xi|^\rho + O\left(\frac{1}{|\xi|^{1-\rho}}\right), & \xi \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (14)$$

Справедлива

Теорема 2. Пусть $\rho < 1/2$. Тогда однородная краевая задача:

- 1) не имеет нетривиальных ограниченных решений, если $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ < 0$ либо $\nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- > 0$;
- 2) имеет единственное решение вида

$$\Phi(z) = -iAe^{\Gamma(z)} e^{-l \frac{e^{i\alpha}}{(z-1)^\rho}}, \quad A = \text{const}, \quad \text{Im } A = 0,$$

если

$$\begin{cases} \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ = 0, \\ \nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- < 0, \end{cases} \quad (15)$$

либо

$$\begin{cases} \nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- = 0, \\ \nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0; \end{cases} \quad (16)$$

- 3) имеет бесконечное множество решений вида (11), где $F(z)$ — произвольная аналитическая в D функция, принимающая на единичной окружности вещественные значения и удовлетворяющая на границе условию (12), если $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0$ и $\nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- < 0$.

Доказательство. В самом деле, пусть $\rho < 1/2$ и имеет место неравенство

$$\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ < 0,$$

тогда согласно первой из формул (14) будет выполнено $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} Q_1(\xi) = -\infty$. В силу неравенства (12) будет выполнено условие

$$|F_1(\xi)| \leq C e^{Q_1(\xi)}, \quad C = \text{const}, \quad (17)$$

и, следовательно, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |F_1(\xi)| = 0$. В силу зеркальной симметрии функции $F_1(\zeta)$ относительно вещественной оси последнее равенство будет выполнено и для нижнего берега разреза, проведенного по положительной действительной полуоси. По принципу Фрагмена – Линделёфа для плоскости, разрезанной по положительной полуоси, получим $F_1(\zeta) \equiv 0$. Ясно, что тогда и $F(z) \equiv 0$. К такому же выводу придем в случае $\rho < 1/2$ и условия $\nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- > 0$, если использовать вторую формулу (14).



Если выполнено условие (15) либо (16), то по принципу Фрагмена – Линделёфа для плоскости, разрезанной по действительной полуоси, с последующим применением теоремы Лиувилля, получим $F_1(\zeta) \equiv A$, $A = \text{const}$, но тогда и $F(z) \equiv A$, т. е. получим единственное, с точностью до постоянного множителя, решение однородной задачи.

Пусть, наконец, выполнены условия $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0$ и $\nu^+ \cos(\pi\rho) - \nu^- < 0$. Неравенство (17) с учетом формул (14) представим в виде

$$|F_1(\xi)| \leq C \begin{cases} \exp \left\{ \frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} \xi^\rho + O \left(\frac{1}{\xi^{1-\rho}} \right) \right\}, & \xi \rightarrow +\infty, \\ \exp \left\{ \frac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)} |\xi|^\rho + O \left(\frac{1}{|\xi|^{1-\rho}} \right) \right\}, & \xi \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (18)$$

Ясно, что такому соотношению будут удовлетворять бесконечное множество целых функций $F_1(\zeta)$ порядка не выше, чем ρ , с зеркальной симметрией относительно вещественной оси. Сужение этих функций на верхнюю полуплоскость, пересажённое затем при помощи функции $\zeta(z)$ в круг, определяет множество функций $F(z)$, удовлетворяющих условию (12) и принимающих на единичной окружности чисто мнимые значения. \square

Примеры построения целых функций заданного порядка с зеркальной симметрией относительно вещественной оси и указанным выше асимптотическим поведением приведены в работе [6], см., также [5, с. 98].

Теорема 3. Если $1 > \rho \geq 1/2$ и выполняется условие $\nu^- < 0$ или $\nu^+ > 0$, то однородная краевая задача имеет лишь нулевое решение; если $1 > \rho \geq 1/2$ и выполняется условие $\nu^- \geq 0$ и $\nu^+ \leq 0$, то однородная краевая задача имеет бесконечное множество решений вида (11), где $F(z)$ — произвольная аналитическая в D функция, принимающая на единичной окружности вещественные значения и удовлетворяющая на границе условию (12).

Доказательство. Пусть $\rho \geq 1/2$ и выполняется условие $\nu^- < 0$. Если однородная задача (8) имеет нетривиальное ограниченное решение (11) с неравной тождественно нулю функцией $F(z)$, то построенная по $F(z)$ целая функция $F_1(\zeta)$ порядка $\rho_{F_1} \leq \rho$ имеет индикатор

$$h_{F_1}(\theta) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |F_1(re^{i\theta})|}{r^{\rho_{F_1}}},$$

удовлетворяющий в силу условия (17) неравенству

$$h_{F_1}(\theta) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{Q_1(re^{i\theta})}{r^{\rho_{F_1}}}.$$

Отсюда следует, что если $\rho_{F_1} < \rho$, то $h_{F_1}(\theta) = -\infty$, что сразу же влечет $F_1(\zeta) \equiv 0$. Поэтому нужно считать, что $\rho_{F_1} = \rho$. Но тогда из представления (13) получим:

$$Q_1(re^{i\pi/(2\rho)}) = \nu^- r^\rho + O \left(\frac{1}{r^{1-\rho}} \right) < 0, \quad r \rightarrow +\infty,$$

откуда и в силу зеркальной симметрии функции $F_1(\zeta)$ для индикатора получим оценку

$$h_{F_1}(\pi/(2\rho)) = h_{F_1}(-\pi/(2\rho)) \leq \nu^- < 0.$$

Последнее противоречит известному соотношению [7, с. 84]

$$h_{F_1}(\theta + \pi/\rho) + h_{F_1}(\theta) \geq 0$$

при $\theta = -\pi/(2\rho)$. Поскольку

$$Q_1(re^{i(\pi-\pi/(2\rho))}) = -\nu^+ r^\rho + O \left(\frac{1}{r^{1-\rho}} \right) < 0, \quad r \rightarrow +\infty,$$

следовательно, $h_{F_1}(\pi - \pi/(2\rho)) \leq -\nu^+ < 0$ и в силу симметрии $h_{F_1}(\pi + \pi/(2\rho)) < 0$, то приходим к противоречию и при $\theta = \pi - \pi/(2\rho)$. Таким образом, при выполнении условий $\nu^- < 0$ или $\nu^+ > 0$ нетривиального ограниченного решения задачи (8) не существует.



Пусть теперь выполнены условия $\nu^- \geq 0$ и $\nu^+ \leq 0$, при этом, разумеется, хотя бы одно из неравенств строгое. Тогда если $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0$ и $\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) > 0$, то существование аналитических в D функций, принимающих на единичной окружности вещественные значения и удовлетворяющих на границе условию (12), следует из очевидного существования бесконечного множества целых функций порядка не выше ρ , удовлетворяющих условию зеркальной симметрии и неравенствам (18). Если же выполнены условия $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0$ и $\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) \leq 0$ либо $\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ \leq 0$ и $\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) > 0$, то в работах [5, 6, с. 98] доказано, что существует бесконечное множество целых функций порядка ρ , удовлетворяющих условию зеркальной симметрии и неравенствам (18). \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00371-а).

Библиографический список

1. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986. 239 с.
2. Толочко М. Э. О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. науки. 1969. № 4. С. 52–59.
3. Сандрыгайло И. Е. О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. науки. 1974. № 6. С. 16–23.
4. Монахов В. Н., Семенко Е. В. Краевые задачи с бесконечным индексом в пространствах Харди // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 544–547.
5. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. Казань : Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2005. 297 с.
6. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности порядка меньше $1/2$ // Уфим. матем. журн. 2013. Т. 5, № 2. С. 82–93.
7. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.

Investigation Riemann – Hilbert Boundary Value Problem with Infinite Index on Circle

A. K. Fatykhov¹, P. L. Shabalin²

¹Azat K. Fatykhov, Kazan State University of Architecture and Engineering, 1, Zelenaya st., 420043, Kazan, Russia, vitofat@gmail.com

²Pavel L. Shabalin, Kazan State University of Architecture and Engineering, 1, Zelenaya st., 420043, Kazan, Russia, pavel.shabalin@mail.ru

We consider the Riemann – Hilbert boundary value problem of analytic function theory with infinite index and the boundary condition on the circumference. The boundary condition coefficients are Holder’s continuous everywhere except one particular point where the coefficients have discontinuity of second kind (power order with the index is less than one). In this formulation the problem with infinite index is considered for the first time. As the result of the research, we obtained the formulas of the general solution of the homogeneous problem, investigated the existence and uniqueness of solutions, described the set of solutions in the case of non-uniqueness. In the study of solutions we applied the theory of entire functions and the geometrical theory of functions of complex variables.

Key words: Riemann – Hilbert boundary value problem, infinite index, entire function.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 14-01-00371-a).

References

1. Govorov N. V. *Riemann’s boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka, 1986, 239 p. (in Russian).
2. Tolochko M. E. About the solvability of the homogeneous Riemann boundary value program for the half-plane with infinite index. *Izv. AN BSSR. Ser. Fiz.-matem. nauki*, 1969, no. 4, pp. 52–59 (in Russian).
3. Sandrygailo I. E. On Hilbert – Riemann boundary value program for the half-plane with infinite index. *Izv. AN BSSR. Ser. Fiz.-matem. nauki*, 1974, no. 6, pp. 872–875 (in Russian).
4. Monahov V. N., Semenko E. V. Boundary value problem with infinite index in Hardy spaces. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, 1986, vol. 291, pp. 544–547 (in Russian).



5. Salimov R. B., Shabalin P. L. *Hilbert boundary value problem of the theory analytic functions and its applications*. Kazan, Kazan Math. Publ., 2005, 297 p. (in Russian).
6. Salimov R. B., Shabalin P. L. On solvability of homogeneous Riemann – Hilbert problem with a countable set of coefficients discontinuities and two-side curling at infinity of order less than 1/2. *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 82–93 (in Russian).
7. Levin B. Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Moscow, Gostekhizdat, 1956, 632 p. (in Russian).

УДК 519.642.8

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

А. А. Хромов

Хромов Александр Августович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Дано решение задачи о нахождении равномерных приближений к правой части линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида в случае, когда заданы приближения к точному решению. Построенный метод имеет простую конструкцию, не требует дополнительной информации о точной правой части, дает равномерные приближения к ней на всем отрезке, не связан с краевыми условиями.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, регуляризация, оператор Стеклова.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-180-183

1. Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x) \quad (1)$$

в предположении, что $y(x) \in C^n[0, 1]$, $a_i(x) \in C[0, 1]$, $i = 0, \dots, n$.

Пусть $y(x)$ — решение некоторой краевой задачи для уравнения (1), и нам известно равномерное приближение $y_\delta(x)$ к $y(x)$ такое, что $\|y_\delta - y\|_{C[0,1]} \leq \delta$. Требуется по $y_\delta(x)$ и δ найти равномерные приближения к $f(x)$.

Эта задача поставлена некорректно и ее решение требует применения методов регуляризации [1].

В работе [2] предлагается несколько таких способов: либо свести задачу к задаче решения интегрального уравнения первого рода с ядром Грина, либо аппроксимировать производные с помощью разностных формул, либо свести вычисление каждой из производных к решению интегрального уравнения первого рода с оператором кратного интегрирования. Недостатками этих способов являются в первом случае трудности с обращением дифференциального оператора при произвольных краевых условиях, во втором случае — невозможность получить решение на всем отрезке $[0, 1]$, так как аргументы в разностных формулах выводят нас за границы отрезка, а третий способ можно применить лишь в частном случае краевых условий. При этом в первом и третьем способах еще нужно найти метод регуляризации интегрального уравнения, не требующий никакой дополнительной информации о решении, а только его непрерывности, что является самостоятельной проблемой.

В [3] на базе операторов из [4] дается метод решения поставленной задачи при $n = 2$ применительно к известной обратной задаче для уравнения теплопроводности, свободный от указанных недостатков. В настоящей работе приводится обобщение метода из [3].

Используем семейство интегральных операторов из [5], равномерно аппроксимирующих непрерывную производную любого порядка функции, заданной на отрезке $[0, 1]$. Оно имеет вид

$$T_{m\alpha}y = \begin{cases} T_{m\alpha 2}y, & x \in [0, 1/2], \\ T_{m\alpha 1}y, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где

$$T_{m\alpha 1}y \equiv D^m S_{\alpha 1}^{m+1}y = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k F_1(x - k\alpha),$$



$$T_{m\alpha 2}y \equiv D^m S_{\alpha 2}^{m+1}y = \alpha^{-(m+1)} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k F_2(x + (m-k)\alpha), \quad (2)$$

$$S_{\alpha 1}y = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x y(t)dt, \quad S_{\alpha 2}y = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} y(t)dt,$$

D — оператор дифференцирования,

$$F_1(x) = \int_{x-\alpha}^x y(\xi)d\xi, \quad F_2(x) = \int_x^{x+\alpha} y(\xi)d\xi, \quad m \geq 1, \quad \alpha \leq \frac{1}{2(m+1)}.$$

Справедлива [5]

Теорема 1. Для любой $y(x) \in C^m[0, 1]$ при $\alpha \leq \frac{1}{2(m+1)}$ имеет место сходимость

$$\|T_{m\alpha}y - y^{(m)}\|_{L_\infty[0,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0,$$

где $\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\}$.

Лемма 1. Справедливы равенства:

$$\|T_{m\alpha}\|_{C[0,1] \rightarrow L_\infty[0,1]} = 2^m \alpha^{-m}, \quad m = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Доказательство вытекает из формул:

$$\|T_{m\alpha}\|_{C \rightarrow L_\infty} = \max\{\|T_{m\alpha 2}\|_{C[0,1] \rightarrow C[0,1/2]}, \|T_{m\alpha 1}\|_{C[0,1] \rightarrow C[1/2,1]}\},$$

$$\|T_{m\alpha j}\|_{C[0,1] \rightarrow C[c,d]} = \max_{c \leq x \leq d} \int_0^1 |T_{m\alpha j}(x, t)| dt,$$

где $T_{m\alpha j}(x, t)$ — ядро интегрального оператора $T_{m\alpha j}$, $j = 1, 2$; $[c, d] = [0, 1/2]$ для $j = 2$, $[c, d] = [1/2, 1]$ для $j = 1$, и формул (2).

Введем в рассмотрение величины:

$$\Delta(\delta, T_{m\alpha}, y^{(m)}) = \sup\{\|T_{m\alpha}y_\delta - y^{(m)}\|_{L_\infty} : \|y_\delta - y\|_C \leq \delta\}, \quad m = 1, \dots, n.$$

По аналогии с теоремой 3 в [5] из теоремы 1 и леммы 1 следует

Теорема 2. Для сходимости $\Delta(\delta, T_{m\alpha}, y^{(m)}) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям: $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-m} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

2. Построим приближенное решение нашей задачи с помощью операторов $T_{m\alpha}$. Рассмотрим функции

$$f_\delta^\alpha(x) = a_0(x)T_{n\alpha}y_\delta + a_1(x)T_{n-1,\alpha}y_\delta + \dots + a_{n-1}(x)T_{1\alpha}y_\delta + a_n(x)y_\delta.$$

Теорема 3. При согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющем условиям $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-n} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, имеет место сходимость

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - f(x)\|_{L_\infty[0,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Доказательство. Из (1) следует очевидная оценка:

$$\|f_\delta^\alpha(x) - f(x)\|_{L_\infty} \leq A_0\|T_{n\alpha}y_\delta - y^{(n)}\|_{L_\infty} + \dots + A_{n-1}\|T_{1\alpha}y_\delta - y'\|_{L_\infty} + A_n\|y_\delta - y\|_C, \quad (4)$$

где $A_k = \|a_k(x)\|_{C[0,1]}$, $k = 0, \dots, n$.

Поскольку

$$\|T_{m\alpha}y_\delta - y^{(m)}\|_{L_\infty} \leq \Delta(\delta, T_{m\alpha}, y^{(m)}),$$

$m = 1, \dots, n$, а согласование $\alpha = \alpha(\delta)$, указанное в теореме, достаточно для сходимости $\delta(\alpha(\delta))^{-m} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, если $m \leq n$, то отсюда вытекает утверждение теоремы. \square



3. Пусть нам известно, что $y^{(n)} \in Lip_k 1$. Справедлива

Лемма 2. При каждом фиксированном α выполняются оценки:

$$\|T_{m\alpha}y - y^{(m)}\|_{L_\infty} \leq (m + 1)M_{m+1}\alpha, \tag{5}$$

где $M_{m+1} = \|y^{(m+1)}\|_{C[0,1]}$, $m = 1, \dots, n - 1$.

Доказательство. Из равенств $T_{m\alpha j} = D^m S_{\alpha j}^{m+1}$, $D^m S_{\alpha j}^{m+1}y = S_{\alpha j}^{m+1}y^{(m)}$ и оценки $\|S_{\alpha j}^k \varphi - \varphi\|_C \leq \omega(\varphi, k\alpha)$, где $j = 1, 2$, $\varphi(x)$ — любая непрерывная на $[0, 1]$ функция, $\omega(\varphi, k\alpha)$ — ее модуль непрерывности, следует, что

$$\|T_{m\alpha}y - y^{(m)}\|_{L_\infty} \leq \omega(y^{(m)}, (m + 1)\alpha).$$

Но каждая из функций $y^{(m)}(x)$ при $m = 1, \dots, n - 1$ принадлежит в силу ограниченности ее производной классу $Lip_{M_{m+1}} 1$. Значит, $\omega(y^{(m)}, (m + 1)\alpha) \leq M_{m+1}(m + 1)\alpha$, откуда следует утверждение леммы. \square

Теорема 4. Если $y^{(n)}(x) \in Lip_k 1$, то справедлива оценка:

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)} - f\|_{L_\infty} \leq C_0\delta^{\frac{1}{n+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k\delta^{\frac{n-k}{n+1}} + A_n\delta, \tag{6}$$

где

$$\alpha(\delta) = C\delta^{\frac{1}{n+1}}, \tag{7}$$

$$C = (A_0 2^n B^{-1})^{\frac{1}{n+1}}, B = A_0 K(n + 1) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k M_{n-k+1}, C_0 = 2(A_0 2^n B^n)^{\frac{1}{n+1}}, C_k = A_k 2^{n-k} \left(\frac{B}{A_0 2^n}\right)^{\frac{n-k}{n+1}}.$$

Доказательство. Запишем оценку (4) в виде

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leq A_0(\|T_{n\alpha}y - y^{(n)}\|_{L_\infty} + \delta\|T_{n\alpha}\|_{C \rightarrow L_\infty}) + A_1(\|T_{n-1,\alpha}y - y^{(n-1)}\|_{L_\infty} + \delta\|T_{n-1,\alpha}\|_{C \rightarrow L_\infty}) + \dots + A_{n-1}(\|T_{1\alpha}y - y'\|_{L_\infty} + \delta\|T_{1\alpha}\|_{C \rightarrow L_\infty}) + A_n\delta.$$

Подставим в правую часть этой оценки равенства (3) и оценки (5). Тогда получим:

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leq B\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k}\alpha^{-(n-k)} + A_n\delta, \tag{8}$$

где B определена в теореме, $M_k = \|y^{(k)}\|_{C[0,1]}$.

Выберем $\alpha = \alpha(\delta)$ из разумных соображений — из равенства первого слагаемого в правой части оценки (8) самому большому по асимптотике α , содержащему отрицательные степени α , т. е. из равенства $B\alpha = A_0 2^n \alpha^{-n} \delta$. Отсюда получаем (7). Подставляем (7) в оценку (8) — получаем оценку (6).

Если известны числа M_k , то все константы в (6) и (7) имеют конкретные значения, если же неизвестны, то формула (7) и оценка (6) дают нам информацию лишь о порядке по δ этих формул.

Библиографический список

1. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. : Наука, 1978. 206 с.
2. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1994. 206 с.
3. Хромов А. А., Хромова Г. В. Решение задачи об определении плотности тепловых источников // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 309–314. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314.
4. Хромов А. А. Приближение функции и её производных с помощью модифицированных операторов Стеклова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 593–597.
5. Хромов А. П., Хромова Г. В. Разрывные операторы Стеклова в задаче равномерного приближения производных на отрезке // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2014. Т. 54, № 9. С. 1442–1447. DOI: 10.7868/S0044466914090099.



The Solution of a Certain Inverse Problem

A. A. Khromov

Aleksandr A. Khromov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

The solution is given for the problem of finding uniform approximations of a the right-hand side of a general linear ordinary differential equation in the case when approximations of the exact solution are known. The constructed method has a simple structure, produces approximations of the right-hand side on the whole interval of definition and does not employ boundary conditions.

Key words: ordinary differential equation, regularization, Steklov discontinuous operator.

References

1. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriia lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniia* [The theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow, Nauka, 1978, 206 p. (in Russian).
2. Denisov A. M. *Vvedenie v teoriiu obratnykh zadach* [Introduction to the theory of inverse problems]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1994, 206 p. (in Russian).
3. Khromov A. A., Khromova G. V. The Solution of the Problem of Determining the Dendity of Heat Sources in a Rod. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 309–314. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314 (in Russian).
4. Khromov A. A. Approximation of Function and Its Derivative by the Modified Steklov Operator. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 2, pp. 593–597 (in Russian).
5. Khromov A. P., Khromova G. V. Discontinuous Steklov operators in the problem of uniform approximation of derivatives on closed integral. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 9, pp. 1389–1394. DOI: 10.1134/S0965542514090085.

МЕХАНИКА

УДК 532.516:539.3

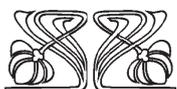
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В ДВУХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СООСНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

Ю. А. Блинков¹, А. В. Месянжин², Л. И. Могилевич³

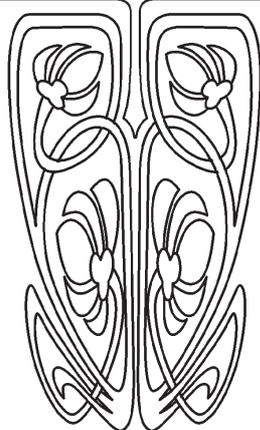
¹Блинков Юрий Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, BlinkovUA@info.sgu.ru

²Месянжин Артем Вячеславович, ведущий математик, ОАО Конструкторское бюро промышленной автоматики, Саратов, a.v.mesyanzhin@gmail.com

³Могилевич Лев Ильич, доктор технических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Московский государственный университет путей сообщения императора Николая II (Поволжский филиал), Саратов, mogilevich@sgu.ru



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ



В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих оболочках. Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщенных уравнений Кортвега де Вриза. Также методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках, отличающиеся от известных учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками, на основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщенных уравнений КдВ. В представленной статье проведено исследование модели волновых явлений двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочек типа Кирхгофа — Лява, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, как между ними, так и внутри. Для рассмотренных систем уравнений с учетом влияния жидкости с помощью построения базиса Грёбнера получены разностные схемы типа Кранка – Николсона. Для генерации этих разностных схем использованы базовые интегральные разностные соотношения, которые аппроксимируют исходную систему уравнений. Применение техники базисов Грёбнера позволяет генерировать схемы, для которых с помощью эквивалентных преобразований можно получить дискретные аналоги законов сохранения исходных дифференциальных уравнений. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс программ, позволяющий построить графики и получить численные решения задач Коши при точных решениях системы уравнений динамики соосных оболочек в качестве начального условия.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197



1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих оболочках. Для абсолютно жесткой трубы с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического по времени перепада давления исследовано в [1]. Для трубы — упругой цилиндрической оболочки — проведено аналогичное исследование в [2–5].

Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически нелинейных оболочках [6], содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщенных уравнений Кортвега де Вриза (КдВ). Выявлены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. В частности, при наличии жидкости в оболочке из неорганических материалов (различные трубопроводы в технологических сооружениях) выявлен экспоненциальный рост амплитуды волны. В случае органического материала (кровеносные сосуды) наличие жидкости приводит к быстрому затуханию волн.

Методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках [7], отличающиеся от известных учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками, на основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщенных уравнений КдВ. Выявлены эффекты влияния несжимаемой вязкой жидкости между оболочками на поведение волны деформаций в соосных оболочках. Наличие волны деформаций во внешней оболочке приводит к возникновению волны деформаций во внутренней оболочке, которой не было в начальный момент времени, и происходит «перекачка энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, которая сопровождается немонотонным падением амплитуды волны во внешней оболочке и, как следствие, немонотонным снижением скорости её распространения. При этом во внутренней оболочке происходит немонотонное увеличение амплитуды. Вследствие колебаний амплитуд и скоростей с течением времени их скорости и амплитуды выравниваются.

Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки на рис. 1, внутри которых находится вязкая несжимаемая жидкость. Введем следующие обозначения: δ — ширина щели, занимаемой жидкостью, R — радиус срединной поверхности оболочки; $R_1 = R^{(1)} - \frac{h_0^{(1)}}{2}$ — внутренний радиус внешней оболочки; $R_2 = R^{(2)} + \frac{h_0^{(2)}}{2}$ — внешний радиус внутренней оболочки; $R_3 = R^{(2)} - \frac{h_0^{(2)}}{2}$ — внутренний радиус внутренней оболочки, $R^{(1)}, R^{(2)}$ — радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек; $h_0^{(1)}, h_0^{(2)}$ — их толщины; p — давление в жидкости; ρ — плотность жидкости; ν — кинематический коэффициент вязкости. Все механические перемещения внутренней оболочки обозначены индексом (2) сверху, а внешней — индексом (1).

Записывая уравнение движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирггофа–Лява, считаем материал упругим с линейной зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i :

$$\sigma_i = E e_i \quad (1)$$

где E — модуль Юнга.

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат (r, Θ, x) в случае осесимметричного течения [8, 9] записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

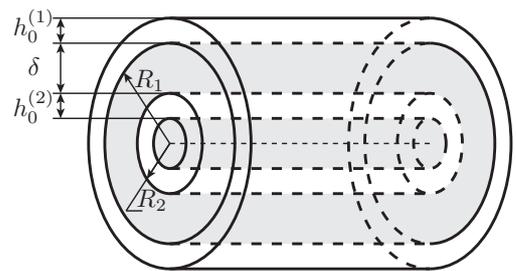


Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки



На границе оболочек и жидкости на рис. 1 при $r = R_i - W^{(i)}$ выполняются условия прилипания жидкости [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} &= V_x + U^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial r}, \\ -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} &= V_r + U^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $U^{(i)}$ — продольное упругое перемещение оболочки по оси x ; $W^{(i)}$ — прогиб оболочки, положительный к центру кривизны; t — время; V_x, V_r — проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости; x, r — цилиндрические координаты.

Уравнения динамики оболочки записываются в виде [10, 11]

$$\begin{aligned} \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left[U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]_x - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} &= -q_x^{(i)} - \tilde{q}_x^{(i)}(i-1), \\ \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} (W_{xx}^{(i)} + U_x^{(i)} W_{xx}^{(i)})_{xx} - \right. & \\ - \left. \left\{ W_x^{(i)} \left(U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right\}_x - \right. & \\ - \frac{1}{R} \left(\mu_0 U_x^{(i)} + \frac{1}{2} \mu_0 U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} \mu_0 W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \mu_0 W_{xx}^{(i)2} - \frac{W^{(i)}}{R} \right) \rangle + & \\ + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} &= (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $h_0^{(i)}$ — толщины оболочек, μ_0 — коэффициент Пуассона, ρ_0 — плотность; $U^{(i)}, W^{(i)}$ — продольное перемещение и прогиб, положительный к центру кривизны, x — продольная координата, t — время, q_x^i, q_n — напряжения со стороны жидкости, которая находится между оболочками, \tilde{q}_x, \tilde{q}_n — напряжения со стороны жидкости, которая находится во внутренней оболочке. Нижние индексы у перемещений обозначают соответствующие частные производные.

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами

$$\begin{aligned} q_n &= \left[P_{rr} \cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r}) + P_{rx} \cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{i}}) \right] \Big|_{r=R_i - W^{(i)}}, \\ q_x &= \left[P_{rx} \cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r}) + P_{xx} \cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{i}}) \right] \Big|_{r=R_i - W^{(i)}}, \\ P_{rr} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad P_{rx} = \rho\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right), \quad P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5)$$

В подходе Эйлера здесь имеем:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r}) &= \frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|}, \quad \cos(\widehat{-\bar{n}^{(i)}, \bar{i}}) = -\frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}, \\ \cos(\widehat{-\bar{n}, \bar{n}_r}) &= \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos(\widehat{-\bar{n}, \bar{i}}) = -\frac{\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}}{\left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \\ |\bar{N}| &= (R_i - W^{(i)}) \left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь \bar{n} — нормаль к срединной поверхности i -й оболочки, \bar{n}_r, \bar{i} — орты базиса (r, Θ, x) цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси. Если снять напряжения на невозмущенную поверхность оболочки, то можно считать $-\bar{n} = \bar{n}_r$ и $\cos(\widehat{-\bar{n}, \bar{n}_r}) = 1$, $\cos(\widehat{-\bar{n}, \bar{i}}) = 0$. Напряжения \tilde{q}_x, \tilde{q}_n со стороны жидкости, которая находится во внутренней оболочке определяется теми же формулами (5), (6), в которых $\tilde{\rho}$ — плотность жидкости, $\tilde{\nu}$ — коэффициент кинематической вязкости.



2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ НАЛИЧИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ УПРУГИМИ ОБОЛОЧКАМИ И ВО ВНУТРЕННЕЙ ОБОЛОЧКЕ

Принимая длину волны l за характерный размер и обозначая амплитуду продольного перемещения u_m и прогиба w_m , переходим к безразмерным переменным:

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}}. \quad (7)$$

Здесь c_0 — скорость звука в оболочке. Полагаем

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon).$$

Введем полухарактеристические (бегущие) координаты и растянутое время:

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*,$$

где c — неизвестная безразмерная скорость волны. Тогда, разделив обе части 1-го уравнения (4) на

$$\frac{1}{l} \frac{E h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} = \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \frac{1}{l},$$

получим:

$$\left\langle \frac{u_m}{l} \left[u_{1\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)2} + \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi}^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{12l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{\xi\xi}^{(i)2} \right] \right\rangle_{\xi} - \frac{u_m}{l} \left(c^2 u_{1\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon c u_{1\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{1\tau\tau}^{(i)} \right) = - \frac{l(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.$$

Разделив обе части 2-го уравнения (4) на

$$\frac{1}{R^{(i)}} \frac{E h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} = \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{R^{(i)}},$$

получим:

$$\begin{aligned} & \frac{u_m}{l} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12l^2} \left[\frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)} \left(1 + \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)} \right) \right] \right\rangle_{\xi\xi} + \\ & + \left[-\mu_0 u_{1\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} - \mu_0 \frac{1}{2} \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)2} - \mu_0 \frac{1}{2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi}^{(i)2} - \mu_0 \frac{1}{2} \frac{h_0^{(i)2}}{24l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)2} \right] + \\ & + \frac{R^{(i)}}{l} \left\{ \frac{w_m}{l} u_{3\xi}^{(i)} \left[-u_{1\xi}^{(i)} + \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} - \frac{1}{2} \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)2} - \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi}^{(i)2} - \frac{1}{2} \frac{h_0^{(i)2}}{24l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)2} \right] \right\}_{\xi} + \\ & + \frac{w_m R^{(i)}}{l^2} \left(c^2 u_{3\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon c u_{3\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{3\tau\tau}^{(i)} \right) = R^{(i)} \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}. \end{aligned}$$

Разложим упругие перемещения по степеням $\varepsilon = u_m/l$:

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots$$

подставим их в уравнения, разделим обе части уравнений на $\varepsilon = u_m/l$ и, оставляя члены ε^0 и ε^1 , получим:

$$\left(u_{10\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right)_{\xi} + \varepsilon \left\{ u_{11\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l\varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \right\}_{\xi} -$$



$$\begin{aligned}
 & -c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} - \varepsilon c^2 u_{11\xi\xi}^{(i)} + 2\varepsilon c u_{10\xi\tau}^{(i)} = -\frac{l^2(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}, \\
 & -\mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} + \varepsilon \left\langle -\mu_0 u_{11\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \right\rangle + \\
 & + \frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} c^2 u_{30\xi\xi}^{(i)} = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.
 \end{aligned}$$

Приравняем к нулю коэффициенты при ε^0 , получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 u_{10\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30\xi}^{(i)} - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} &= 0, \\
 -\mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} &= 0.
 \end{aligned}$$

Из этой системы следует

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_{10\xi}^{(i)}, \quad (1 - \mu_0^2 - c^2) u_{10\xi\xi}^{(i)} = 0$$

Следовательно, u_{10} — произвольная функция, а безразмерная скорость волны $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$, так как $c^2 = 1 - \mu_0^2$. Приравняем коэффициенты при ε в правых и левых частях уравнений и учитываем предыдущие результаты, тогда получаем:

$$\begin{aligned}
 \left[\mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31\xi}^{(i)} \right]_{\xi} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi\xi}^{(i)2} + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\tau\xi}^{(i)} &= -\frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)), \\
 -\mu_0 u_{11\xi} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \mu_0 (1 - \mu_0^2) u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} &= R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.
 \end{aligned}$$

Умножим обе части второго уравнения на μ_0 и продифференцируем по ξ , получим систему

$$\begin{aligned}
 \left(\mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31\xi}^{(i)} \right)_{\xi} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi\xi}^{(i)2} &= -\frac{l^2 (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}, \\
 \left(\mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31\xi}^{(i)} \right)_{\xi} + \left[\frac{1}{2} \mu_0^2 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \right]_{\xi} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \mu_0^2 (1 - \mu_0^2) u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} &= \\
 = \frac{R^{(i)} l}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \mu_0 \left((-1)^{i-1} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} + (i-1) \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} \right). &
 \end{aligned}$$

Вычтем из первого уравнения второе и разделив обе части этого уравнения на $2\sqrt{1 - \mu_0^2}$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 u_{10\xi\tau}^{(i)} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(i)} u_{10\xi\xi}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} &= \\
 = -\frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \left(\frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} + (i-1) \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} \right) \right]. &
 \end{aligned}$$

В случае, когда жидкость отсутствует, правая часть уравнений становится равна нулю и получаются независимые уравнения КдВ. Надо определить правую часть, для чего необходимо решить уравнения гидродинамики для случая кольцевого и кругового сечений трубы.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ОБОЛОЧКИ СО СТОРОНЫ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

3.1. Кольцевое сечение

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, \quad r = R_2 + \delta r^*, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l},$$



$$p = \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} P + p_0, \quad \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = o\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right),$$

$$\frac{w_m}{R_2} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_2} = \lambda \psi, \quad \frac{w_m}{l} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \lambda \psi \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \psi \varepsilon^{1/2}.$$

Во введенных безразмерных переменных получим уравнения гидродинамики:

$$\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \left\{ \frac{\delta c_0}{\nu} \frac{\delta}{l} \left[\frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] \right\} + \frac{\partial P}{\partial r^*} =$$

$$= \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2 (1 + \psi_{r^*})} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\delta^2 v_r}{R_2^2 (1 + \psi_{r^*})^2} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right],$$

$$\frac{\delta c_0}{\nu} \frac{\delta}{l} \left[\frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2 (1 + \psi_{r^*})} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}};$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\delta v_r}{R_2 (1 + \psi_{r^*})} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0;$$

и граничные условия

$$\frac{\delta}{l} \frac{u_m}{w_m} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t^*} = v_x - \frac{u_m}{w_m} \frac{\delta}{l} \lambda u_1^{(i)} \frac{\partial v_x}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(i)} \frac{\partial v_x}{\partial r^*},$$

$$-\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*} = v_r + \frac{u_m}{w_m} \frac{\delta}{l} \lambda u_1^{(i)} \frac{\partial v_r}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(i)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*}$$

при $r^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}$ и $r^* = -\lambda u_3^{(2)}$.

Полагая теперь $\delta/l = 0$, $\delta/R_2 = 0$ (нулевое приближение по δ/l — гидродинамическая теория смазки), а также $\frac{\delta}{l} \frac{\delta c_0}{\nu} = 0$ — ползущие течения, получим уравнения гидродинамики:

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия: $v_r = -\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*}$, $v_x = 0$ при $r^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}$ и $r^* = -\lambda u_3^{(2)}$. Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра λ

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots$$

Для первых членов разложения получим те же уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 1,$$

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 0.$$

С точностью до ψ , λ получим:

$$\cos\left(\widehat{-\vec{n}, \vec{n}_r}\right) \approx 1, \quad \cos\left(\widehat{-\vec{n}, \vec{i}}\right) \approx 0,$$

$$q_x^i = \rho\nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \left[\frac{\partial v_{x^*}}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r^*}{\partial x^*} \right] \Bigg|_{\substack{r_2^* = -\frac{w_m u_3^{(2)}}{\delta} \\ r_1^* = 1 - \frac{w_m u_3^{(1)}}{\delta}}} \approx \rho\nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_{x^*}}{\partial r^*} \Bigg|_{\substack{r_2^* = -\lambda u_3^{(2)} \\ r_1^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}}},$$

$$q_n = -\frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} P - p_0 + 2\rho\nu \frac{w_m c_0}{l \delta} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} =$$



$$= -p_0 - \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} \left(P - 2 \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \right) = \left\{ \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 = \psi_i^2 \varepsilon_i \right\} \approx -p_0 - \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} P.$$

Из уравнений движения жидкости получаем с учетом граничных условий

$$v_x^0 = \frac{r^{*2} - r^*}{2} \frac{\partial P^0}{\partial x^*}.$$

Подставляя в уравнение неразрывности, получим:

$$\frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = - \frac{r^{*2} - r^*}{2} \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}}.$$

Тогда, учитывая условия при $r^* = 0$, получаем:

$$v_r^0 = - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{1}{2} \left(\frac{r^{*3}}{3} - \frac{r^{*2}}{2} \right) \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}}.$$

Удовлетворяя условиям при $r^* = 1$, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}} &= 12 \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right), \\ \frac{\partial P^0}{\partial x^*} &= 12 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\ P^0 &= 12 \int \left[\int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*. \end{aligned}$$

При этом имеем:

$$\begin{aligned} v_x^0 &= (r^{*2} - r^*) 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} &= (2r^* - 1) 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} &= 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} &= 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) dx^*. \end{aligned}$$

Учитывая, что введены переменные $\xi = x^* - ct^*$ и $\tau = \varepsilon t^*$, $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$, найдем

$$\begin{aligned} P^0 &= 12 \int \left[\int \left(c \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - c \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(1)}}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} - \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} \right) d\xi \right] d\xi = \\ &= 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \int \left(u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)} \right) d\xi, \\ - \frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_n &= \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \int \left(u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)} \right) d\xi, \\ - \frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} &= \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)} \right) \end{aligned}$$

и учитывая, что $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$, найдем

$$\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho\nu}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0 \mu_0} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[u_m R^{(2)} u_{10\xi}^{(2)} - u_m R^{(1)} u_{10\xi}^{(1)} \right], \quad q_x^{(i)} = \frac{\delta}{2l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^i.$$



3.2. Круговое сечение

Рассматривая круговое сечение, введем безразмерные переменные и параметры

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_3} v_x, \quad r^* = \frac{r}{R_3}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{1}{l} x,$$

$$p = \frac{\tilde{\rho} \tilde{\nu} c_0 l w_m}{R_3^3} P + p_0, \quad \frac{R_3}{l} = \psi = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \lambda = \frac{w_m}{R_3} = O(\varepsilon).$$

В этих переменных получим уравнения гидродинамики:

$$\psi^2 \left\{ \psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} \left[\frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial r^*} \right\} = \psi^2 \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right],$$

$$\psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} \left[\frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}},$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{v_r}{r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0,$$

и граничные условия

$$\frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t} = v_x + \frac{u_m R_3}{w_m l} \lambda u_1^{(2)} \frac{\partial v_x}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(2)} \frac{\partial v_x}{\partial r^*},$$

$$-\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t} = v_r + \frac{u_m R_3}{w_m l} \lambda u_1^{(2)} \frac{\partial v_r}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(2)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*}$$

при $r^* = 1 - \lambda u_3^{(2)}$; v_r, v_x — ограничены при $r^* = 0$: $r^* \frac{\partial v_r}{\partial r^*} = 0, r^* \frac{\partial v_x}{\partial r^*} = 0$. Полагая теперь $\psi = 0$ (нулевое приближение по ψ — гидродинамическая теория смазки [12]), а также $\psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} = 0$ — ползущие течения [13, 14], получаем уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0.$$

Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра λ

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots$$

для первых членов разложений получим те же уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия вида

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} \quad \text{при } r^* = 1,$$

$$r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \quad \text{при } r^* = 0.$$

Определим теперь в этих переменных напряжения со стороны жидкости на оболочке. С точностью до λ, ψ имеем

$$\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{n}_r}) = \frac{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)})}{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)}) \left(1 + \lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} \right)} \approx 1,$$

$$\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{i}}) = -\frac{\lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)})}{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)}) \left(1 + \lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} \right)} \approx 0,$$



$$\tilde{q}_x = \tilde{\rho}\tilde{v}\frac{c_0 w_m}{R_3^2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \psi^2 \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right] \Big|_{r^*=1-\lambda u_3^{(2)}} \approx \frac{w_m}{R_3} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1},$$

$$\tilde{q}_n = \left[-p_0 - \frac{\tilde{\rho}\tilde{v}c_0 w_m l}{R_3^3} P + 2\tilde{\rho}\tilde{v} \frac{w_m c_0}{l R_3} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \right] \Big|_{r^*=1-\lambda u_3^{(2)}} \approx -p_0 - \frac{w_m}{R_3} \left(\frac{l}{R} \right)^{(2)} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 P.$$

Получаем:

$$\tilde{q}_x = \lambda \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}, \quad \tilde{q}_n = -p_0 - \frac{\lambda}{\psi} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho}_0 c_0^2 P. \quad (8)$$

Решение уравнений гидродинамики легко получить (это классические уравнения гидродинамической теории смазки). Из уравнений движения имеем:

$$v_x = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} + \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial P}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} + \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Здесь учтены граничные условия при $r^* = 1$, $r^* = 0$. Подставляя в уравнение неразрывности, получаем:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r) = -\frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Тогда, учитывая условия при $r^* = 0$, получим:

$$v_r = -\frac{r^*}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{1}{4} \left(\frac{r^{*3}}{4} - \frac{r^*}{2} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Удовлетворяя граничным условиям при $r^* = 1$, найдем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}} = 16 \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right].$$

Интегрируя, получим:

$$\frac{\partial P}{\partial x^*} = 16 \int \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right] dx^* = 16 \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right]$$

и

$$P = 16 \int \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] dx^*,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = \frac{r^*}{2} \frac{\partial}{\partial t^*} 16 \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] \Big|_{r^*=1} = 8 \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right].$$

Учитывая, что введены переменные $\xi = x^* - ct^*$ и $\tau = \varepsilon t^*$, $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$, найдем с точностью до ε и с учетом связи (8)

$$P = 8\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \left\{ 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} - 1 \right\} u_{10}^{(2)}.$$

При этом

$$\frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = 4\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \left\{ 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} - 1 \right\} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}.$$

Тогда, учитывая, что $\frac{w_m l}{u_m R_3} u_{30}^{(2)} = \mu_0 u_{10\xi}$ получаем:

$$\tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} = -\frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m}{l} \left[1 - \left(2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} \right)^2 \right] \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}.$$



4. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧКИ

Система уравнений становится такой с учетом найденной правой частью

$$\begin{aligned}
 & u_{10\xi\tau}^{(1)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(1)} u_{10\xi\xi}^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l}\right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(1)} + \\
 & + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right] [u_{10\xi}^{(1)} - u_{10\xi}^{(2)}] = 0, \\
 & u_{10\xi\tau}^{(2)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(2)} u_{10\xi\xi}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l}\right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(2)} + \\
 & + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right] [u_{10\xi}^{(2)} - u_{10\xi}^{(1)}] - 2(1-4\mu_0^2) \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{\nu}}{R c_0 \varepsilon} u_{10\xi}^{(2)} = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь с принятой точностью $h_0/R \approx O(\varepsilon)$, $\delta/R_2 = \psi \ll 1$ обозначено $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$, при этом положено $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} \approx h_0$.

Можно также ввести обозначения $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \phi^{(1)}$, $u_{10\xi}^{(2)} = c_3 \phi^{(2)}$, $\eta = c_1 \xi$, $t = c_2 \tau$, где

$$\begin{aligned}
 c_2 &= 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right] \frac{\nu}{\delta c_0}, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R}\right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}} \right]^{1/3}, \\
 c_3 &= \frac{c_2 l_\varepsilon}{c_1 u_m} \frac{2}{\sqrt{1-\mu_0^2}} 6\sigma_0, \quad \sigma = \frac{1-4\mu_0^2}{3\mu_0^2} \left(\frac{\delta}{R}\right)^3 \frac{\tilde{\rho} \tilde{\nu}}{\rho \nu} \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right]^{-1},
 \end{aligned}$$

и получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 & \phi_t^{(1)} + 6\sigma_0 \phi^{(1)} \phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} = 0, \\
 & \phi_t^{(2)} + 6\sigma_0 \phi^{(2)} \phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma \phi^{(2)} = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Система уравнений (9) имеет в качестве точного решения при $\sigma = 0$ (отсутствие жидкости во внутренней оболочке) следующее решение:

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \frac{2k^2}{\cosh^2(kx - 4k^3t)}. \tag{10}$$

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В работах [15–17] развит подход к построению разностных схем, основанный на построении переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате разностная схема определяется как условие совместности для данной системы. Таким образом, получается разностная схема, автоматически обеспечивающая выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из шаблонов интегрирования построения.

Запишем систему уравнений (9) в интегральной форме:

$$\begin{aligned}
 & \oint_{\partial\Omega} \left(-3\sigma_0 \phi^{(1)2} - \phi_{\eta\eta}^{(1)}\right) dt + \phi^{(1)} d\eta + \iint_{\Omega} \left(\phi^{(1)} - \phi^{(2)}\right) dt d\eta = 0, \\
 & \oint_{\partial\Omega} \left(-3\sigma_0 \phi^{(2)2} - \phi_{\eta\eta}^{(2)}\right) dt + \phi^{(2)} d\eta + \iint_{\Omega} \left(\phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma \phi^{(2)}\right) dt d\eta = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

для любой области Ω .

Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u^{(i)j}_j = \phi^{(i)}(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве



базового контур, показанный на рис. 2. Добавим интегральные соотношения:

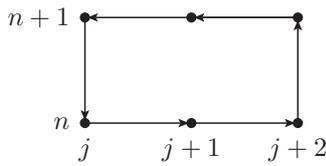


Рис. 2. Базовой контур для уравнения (11)

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{\eta} d\eta = u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j),$$

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u^{(i)}_{\eta\eta} d\eta = u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_{j+2}) - u^{(i)}_{\eta}(t, \eta_j).$$
(12)

Используя для интегрирования по времени и первой производной по η формулу трапеций, а по второй производной по η формулу среднего значения и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (11), (12) в виде

$$\begin{aligned} & \left(-3\sigma_0 \left(u^{(1)2n}_j + u^{(1)2n+1}_j - u^{(1)2n}_{j+2} - u^{(1)2n+1}_{j+2} \right) - \left(u^{(1)n}_{\eta\eta_j} + u^{(1)n+1}_{\eta\eta_j} - u^{(1)n}_{\eta\eta_{j+2}} - u^{(1)n+1}_{\eta\eta_{j+2}} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \\ & + \left(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n}_{j+1} \right) \cdot 2h + \left(\left(u^{(1)n+1}_{j+1} + u^{(1)n}_{j+1} \right) - \left(u^{(2)n+1}_{j+1} + u^{(2)n}_{j+1} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \\ & \left(-3\sigma_0 \left(u^{(2)2n}_j + u^{(2)2n+1}_j - u^{(2)2n}_{j+2} - u^{(2)2n+1}_{j+2} \right) - \right. \\ & \left. - \left(u^{(2)n}_{\eta\eta_j} + u^{(2)n+1}_{\eta\eta_j} - u^{(2)n}_{\eta\eta_{j+2}} - u^{(2)n+1}_{\eta\eta_{j+2}} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \left(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n}_{j+1} \right) \cdot 2h + \\ & + \left(\left(u^{(2)n+1}_{j+1} + u^{(2)n}_{j+1} \right) - \left(u^{(1)n+1}_{j+1} + u^{(1)n}_{j+1} \right) - \sigma \left(u^{(2)n+1}_{j+1} + u^{(2)n}_{j+1} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \\ & \left(u^{(i)n}_{\eta_{j+1}} + u^{(i)n}_{\eta_j} \right) \cdot \frac{h}{2} = u^{(i)n}_{j+1} - u^{(i)n}_j, \\ & u^{(i)n}_{\eta\eta_{j+1}} \cdot 2h = u^{(i)n}_{\eta_{j+2}} - u^{(i)n}_{\eta_j}. \end{aligned}$$
(13)

Поскольку пакет [17] работает только в случае линейных разностных идеалов, а исходное дифференциальное уравнение (9) нелинейно, заменим нелинейную часть введением дополнительной функции $F^{(i)} = 3\sigma_0 u^{(i)2}$. За счет выбора допустимого упорядочения, так чтобы $u^{(1)} \succ u^{(2)} \succ \dots \succ F^{(1)} \succ F^{(1)}$, а затем по переменным n, j , нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера, и структура базиса позволит проверить принадлежность искомой разностной схеме.

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (9), аналогичную схеме Кранка – Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(1)n+1}_j - u^{(1)n}_j}{\tau} + 3\sigma_0 \frac{(u^{(1)2n+1}_{j+1} - u^{(1)2n+1}_{j-1}) + (u^{(1)2n}_{j+1} - u^{(1)2n}_{j-1})}{4h} + \\ & + \frac{(u^{(1)n+1}_{j+2} - 2u^{(1)n+1}_{j+1} + 2u^{(1)n+1}_{j-1} - u^{(1)n+1}_{j-2}) + (u^{(1)n}_{j+2} - 2u^{(1)n}_{j+1} + 2u^{(1)n}_{j-1} - u^{(1)n}_{j-2})}{4h^3} + \\ & + \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} = 0, \\ & \frac{u^{(2)n+1}_j - u^{(2)n}_j}{\tau} + 3\sigma_0 \frac{(u^{(2)2n+1}_{j+1} - u^{(2)2n+1}_{j-1}) + (u^{(2)2n}_{j+1} - u^{(2)2n}_{j-1})}{4h} + \\ & + \frac{(u^{(2)n+1}_{j+2} - 2u^{(2)n+1}_{j+1} + 2u^{(2)n+1}_{j-1} - u^{(2)n+1}_{j-2}) + (u^{(2)n}_{j+2} - 2u^{(2)n}_{j+1} + 2u^{(2)n}_{j-1} - u^{(2)n}_{j-2})}{4h^3} - \\ & - \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \sigma \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} = 0. \end{aligned}$$
(14)

Полученные неявные разностные схемы имеют квадратичную и кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линеаризация:

$$v^2_{k+1} = v^2_{k+1} - v^2_k + v^2_k = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1} + v_k) + v^2_k \approx v_{k+1} \cdot 2v_k - v^2_k.$$



Количество итераций для достижения точности 10^{-12} на следующем временном слое, как правило, не превышало 2 – 3. Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчета была написана на языке Python с использованием пакета SciPy (<http://\scipy.org>).

При отсутствии жидкости во внутренней оболочке, как показано в работе [7], возникает нелинейная волна деформации во внутренней оболочке, в которой ее не было в начальный момент времени, и амплитуды волн деформации в соосных оболочках со временем начинают совпадать. Эти амплитуды в два раза меньше исходной амплитуды волны деформации внешней оболочки в начальный момент времени.

Выполненные вычислительные эксперименты на рис. 3 позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке на поведение нелинейной волны деформации при значении параметра $\sigma > 0$.

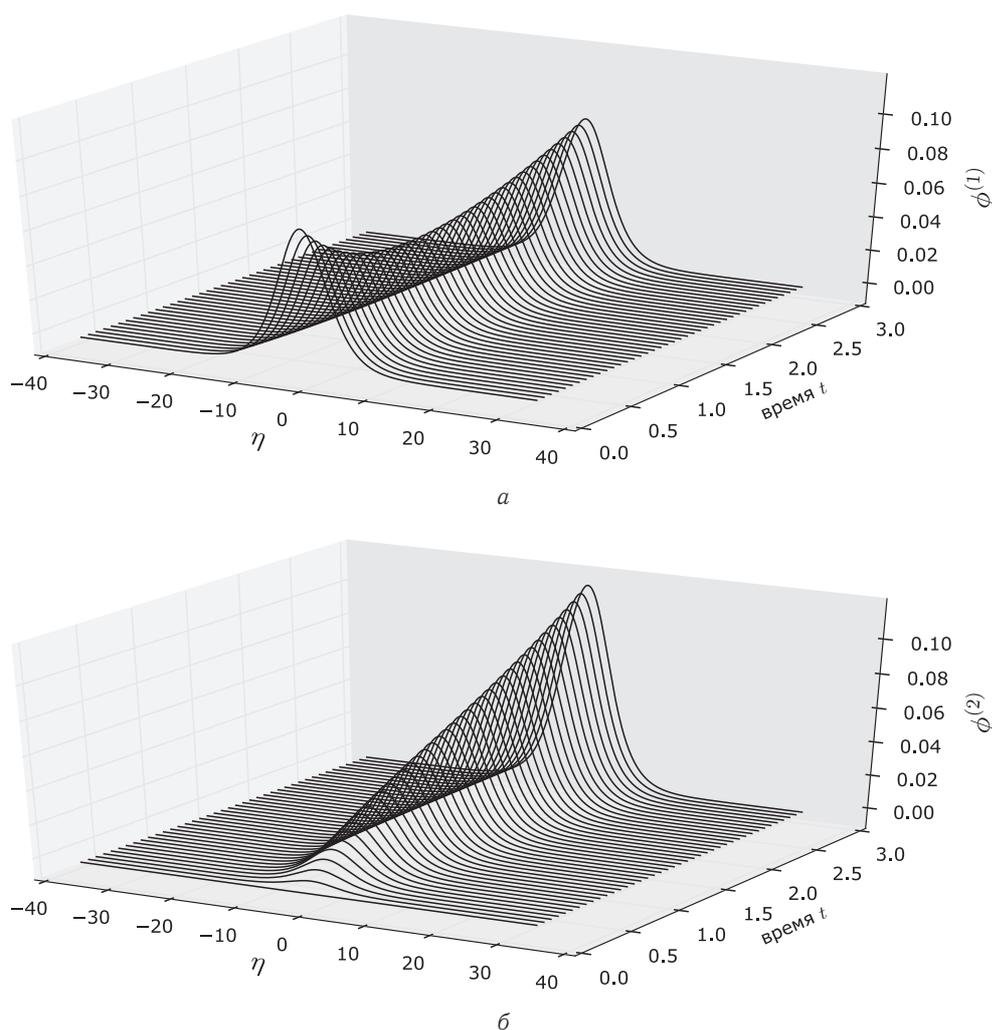


Рис. 3. Графики численного решения уравнений (9) при $\sigma = 0.7$ с начальным условием $\phi^{(2)} = 0$ и с $\phi^{(1)}$, взятого из точного решения (10) при $t = 0$ с $k = 0.2$: а — амплитуда волны для внешней оболочки; б — амплитуда волны для внутренней оболочки

Сначала происходит выравнивание амплитуд с их дальнейшим линейным ростом, при этом угол наклона амплитуды волны больше во внутренней оболочке. Наблюдается линейный синхронный рост амплитуды волны относительно времени в обеих оболочках при более сильном росте во внутренней оболочке.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00175-а).



Библиографический список

1. Громека И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах // Громека И. С. Собрание сочинений. М. : Изд-во АН СССР, 1952. С. 149–171.
2. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 1. С. 52–58.
3. Ерофеев В. И., Клюева Н. В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журн. 2002. Т. 48, № 6. С. 725–740.
4. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках : новое эволюционное уравнение // Акустический журн. 2001. Т. 47, № 3. С. 359–363.
5. Аршинов Г. А., Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // Акустический журн. 2000. Т. 46, № 1. С. 116–117.
6. Блинкова А. Ю., Иванов С. В., Ковалев А. Д., Могилевич Л. И. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 12–18.
7. Блинков Ю. А., Ковалева И. А., Могилевич Л. И. Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестн. РУДН. Сер. Матем., информ., физ. 2013. Т. 3. С. 42–51.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Дрофа, 2003. 840 с.
9. Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. Л. : Изд-во ЛГУ, 1978. 296 с.
10. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. : Наука, 1972. 432 с.
11. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа : задачи гидроупругости. М. : Наука, 1979. 320 с.
12. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М. : Наука, 1974. 712 с.
13. Чивилихин С. А., Попов И. Ю., Гусаров В. В. Динамика скручивания нанотрубок в вязкой жидкости // Докл. АН. 2007. Т. 412, № 2. С. 201–203.
14. Попов И. Ю., Родыгина О. А., Чивилихин С. А., Гусаров В. В. Солитон в стенке нанотрубки и стоково течение в ней // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 18. С. 48–54.
15. Гердт В. П., Блинков Ю. А. О стратегии выбора немультимпликативных продолжений при вычислении базисов Жана // Программирование. 2007. Т. 33, № 3. С. 34–43.
16. Блинков Ю. А., Гердт В. П. Специализированная система компьютерной алгебры GINV // Программирование. 2008. Т. 34, № 2. С. 67–80.
17. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and difference schemes for the Navier – Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing. Vol. 5743 of Lecture Notes in Computer Science. 2009. P. 94–105. DOI: 10.1007/978-3-642-04103-7_10.

Wave Occurrences Mathematical Modeling in Two Geometrically Nonlinear Elastic Coaxial Cylindrical Shells, Containing Viscous Incompressible Liquid

Yu. A. Blinkov¹, A. V. Mesyanzhin², L. I. Mogilevich³

¹Yury A. Blinkov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, BlinkovUA@info.sgu.ru

²Artem V. Mesyanzhin, Industrial Automatics Design Bureau JSC, 239, B. Sadovaya st., 410005, Saratov, Russia, a.v.mesyanzhin@gmail.com

³Lev I. Mogilevich, University of Means of Communication Emperor Nicholas II (Volga Region Branch of Moscow State), 1a, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, mogilevich@sgu.ru

The investigation of deformation waves behavior in elastic shells is one of the important trends in the contemporary wave dynamics. There exist mathematical models of wave motions in infinitely long geometrically non-linear shells, containing viscous incompressible liquid, based on the related hydroelasticity problems, which are derived by the shell dynamics and viscous incompressible liquid equations in the form of generalized Korteweg – de Vries equations. In addition, mathematical models of the wave process in infinitely long geometrically non-linear coaxial cylindrical elastic shells are obtained by the perturbation method. These models differ from the known ones by the consideration of incompressible liquid between the shells, based on the related hydroelasticity problems. These problems are described by shell dynamics and viscous incompressible liquid equations with corresponding edge conditions in the form of generalized KdV equation system. The paper presents the investigation of wave occurrences in two geometrically non-linear elastic coaxial cylindrical shells of Kirchhoff-Love type, containing viscous incompressible liquid both between and inside them. The difference schemes of Crank-Nicholson type are obtained for the considered equation system by taking into account liquid and with



the help of Gröbner basis construction. To generate these difference schemes, the basic integral difference correlations, approximating the initial equation system, were used. The usage of Gröbner basis technology provides generating the schemes, for which it becomes possible to obtain discrete analogs of the laws of preserving the initial equation system. To do that, equivalent transformations were made. Based on the computation algorithm the corresponding software, providing graphs generation and numerical solutions under exact solutions of coaxial shell dynamics equation system obtaining, was developed.

Key words: nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylindrical shells.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00175).

References

1. Gromeka I. S. K teorii dvizheniia zhidkosti v uzkih tsilindricheskikh trubakh [On the Theory of Fluid Motion in Narrow Cylindrical Tubes]. *Collected works*. Moscow, Publ. House of the Academy of Sciences of the USSR, 1952, pp. 149–171 (in Russian).
2. Zemlyanukhin A. I., Mogilevich L. I. Nonlinear Waves of Deformation in Cylindrical Shells. *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 1995, vol. 3, no. 1, pp. 52–58 (in Russian).
3. Erofeev V. I., Klyueva N. V. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates, and shells (a review). *Acoustical Physics*, 2002, vol. 48, no. 6, pp. 643–655. DOI: 10.1134/1.1522030.
4. Zemlyanukhin A. I., Mogilevich L. I. Nonlinear waves in inhomogeneous cylindrical shells : a new evolution equation. *Acoustical Physics*, 2001, vol. 47, no. 3, pp. 303–307. DOI: 10.1134/1.1371586.
5. Arshinov G. A., Zemlyanukhin A. I., Mogilevich L. I. Two-dimensional solitary waves in a strained nonlinear viscoelastic medium. *Acoustical Physics*, 2000, vol. 46, no. 1, pp. 100–101.
6. Blinkova A. Iu., Ivanov S. V., Kovalev A. D., Mogilevich L. I. Mathematical and Computer Modeling of Nonlinear Waves Dynamics in a Physically Nonlinear Elastic Cylindrical Shells with Viscous Incompressible Liquid inside Them. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 12–18 (in Russian).
7. Blinkov Yu. A., Kovaleva I. A., Mogilevich L. I. Nonlinear Waves Dynamics Modeling in Coaxial Geometrically and Physically Nonlinear Shell Containing Viscous Incompressible Fluid in between. *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Mathematics. Information Sciences. Physics*, 2013, vol. 3, pp. 42–51 (in Russian).
8. Loitsianskii L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [And Fluid Mechanics Gas]. Moscow, Drofa, 2003, 840 p. (in Russian).
9. Vallander S. V. *Lektsii po gidroaeromekhanike* [Lectures on Hydromechanics]. Leningrad, Leningrad Univ. Press, 1978, 296 p. (in Russian).
10. Vol'mir A. S. *Nelineinaiia dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow. Nauka, 1972, 432 p. (in Russian).
11. Vol'mir A. S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza : zadachi gidrouprugosti* [Shell in the Liquid and Gas Flow : Tasks Hydroelasticity]. Moscow, Nauka, 1979, 320 p. (in Russian).
12. Schlichting H. *Boundary Layer Theory*. New York, USA, McGraw-Hill, 1960, 605 p. (Russ. ed. : Schlichting H. *Teoriia pogranichnogo sloia*. Moscow, Nauka, 1974, 712 p.)
13. Chivilikhin S. A., Popov I. Yu., Gusarov V. V. Dynamics of nanotube twisting in a viscous fluid. *Doklady Physics*, 2007, vol. 52, no. 1, pp. 60–62.
14. Popov I. Yu., Rodygina O. A., Chivilikhin S. A., Gusarov V. V. Soliton in a nanotube wall and Stokes flow in the nanotube. *Technical Physics Letters*, 2010, vol. 36, no. 9, pp. 852–855. DOI: 10.1134/S1063785010090221.
15. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. On Selection of Nonmultiplicative Prolongations in Computation of Janet Bases. *Programming and Computer Software*, 2007, vol. 33, no. 3, pp. 147–153. DOI: 10.1134/S0361768807030048.
16. Blinkov Yu. A., Gerdt V. P. Specialized Computer Algebra System Ginv. *Programming and Computer Software*, 2008, vol. 34, no. 2, pp. 67–80. DOI: 10.1007/s11086-008-2009-8.
17. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and difference schemes for the Navier–Stokes equations. *Computer Algebra in Scientific Computing*, vol. 5743 of Lecture Notes in Computer Science, 2009, pp. 94–105. DOI: 10.1007/978-3-642-04103-7_10.



УДК 531.38

БИКВАТЕРНИОННОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ю. Н. Челноков¹, Е. И. Нелаева²

¹Челноков Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского; заведующий лабораторией ИПТМУ РАН, chelnokovyun@info.sgu.ru

²Нелаева Екатерина Игоревна, аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, LomovtsevaEI@yandex.ru

Рассматривается в бикватернионной постановке кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела. В качестве математической модели движения используется бикватернионное кинематическое уравнение возмущенного движения свободного твердого тела в двух различных формах, а в качестве управления — мгновенный винт скоростей движения тела. Каждый из минимизируемых функционалов характеризует собой интегральную величину энергетических затрат на управление и квадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений. С помощью принципа максимума Понтрягина построены законы оптимального управления и дифференциальные уравнения задачи оптимизации. Найдено аналитическое решение этой задачи. Приводятся результаты применения найденного закона кинематического управления к решению обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора.

Ключевые слова: оптимальное управление, твердое тело, бикватернион, обратная задача кинематики.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-198-207

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается в бикватернионной постановке кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела. Кинематические задачи управления играют важную роль в теории управления движением твердого тела. Эти задачи во многих случаях имеют аналитические решения, которые часто используются при построении программных и стабилизирующих траекторий и управлений движением твердого тела. Использование аналитических решений кинематических задач управления в сочетании с методом решения обратных задач динамики позволяет в ряде случаев построить эффективные законы управления движением твердого тела, учитывающие его динамику. Задачи управления в кинематической постановке также рассматриваются в теории дифференциальных игр, бесплатформенных инерциальных навигационных системах, в механике роботов-манипуляторов, при решении задач наведения, анимации (оживления) пространственных образов на экранах ЭВМ.

В изучаемой задаче роль управления играет кинематический винт свободного твердого тела, фазовой переменной является нормированный бикватернион конечного перемещения твердого тела. Математическая модель движения имеет вид дифференциального бикватернионного кинематического уравнения движения свободного твердого тела. Производится построение оптимального стабилизирующего управления с использованием принципа максимума Понтрягина. Ошибка по местоположению твердого тела задается двумя способами с помощью бикватерниона ошибки местоположения, определенного своими компонентами либо в основной системе координат, либо в системе координат, связанной с твердым телом. Кроме того, рассматриваются два способа формирования полного управления: винтовой, когда это управление формируется в виде винтовой суммы стабилизирующего и программного управлений (кинематических винтов); формальный, когда дуальные ортогональные проекции полного управления на оси связанной системы координат формируются в виде суммы дуальных ортогональных проекций программного и стабилизирующего управлений на оси программной и связанной



систем координат соответственно (т.е. на оси разных систем координат). Полученные с помощью этих способов дифференциальные уравнения возмущенного движения различаются как по форме, так и по смыслу используемых переменных, что приводит к разным законам формирования управления.

В кватернионной постановке задачи управления вращательным движением твердого тела рассматривались в [1–10]. В работах [3, 9] изучалась задача кинематического оптимального (в смысле быстродействия) пространственного разворота твердого тела. В этой задаче роль управления играет вектор угловой скорости твердого тела. Фазовой переменной является нормированный кватернион ориентации твердого тела, математическая модель движения имеет вид дифференциального кватернионного кинематического уравнения вращательного движения. Граничные условия накладываются на кватернион ориентации твердого тела. Эта задача для интегрального квадратичного (в отношении проекций вектора абсолютной угловой скорости твердого тела) функционала качества изучалась в работе [7]. В работах [1–6] рассматривалась кинематическая задача управления ориентацией твердого тела в рамках теории нелинейной стабилизации (с использованием кватернионных уравнений углового движения в отклонениях и управления, построенного по принципу обратной связи), а в работах [8, 10] — в рамках теории оптимальной нелинейной стабилизации. Задача построения оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения твердого тела из заданного начального положения в требуемое конечное в бикватернионной кинематической постановке изучалась в [9, 11]. Для решения задачи использованы бикватернионные кинематические уравнения винтового движения твердого тела, предложенные в [12]. В [13] изучалась задача построения с использованием принципа обратной связи кинематического винта скоростей, сообщение которого твердому телу обеспечивает его асимптотически устойчивый перевод из произвольного начального положения на любую выбранную программную траекторию винтового движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по этой траектории.

Рассматриваемая задача является обобщением кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного углового движения твердого тела, исследованной в [8, 10], на случай произвольного движения свободного твердого тела.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу построения оптимального кинематического стабилизирующего управления движением свободного твердого тела. В качестве управления в этой задаче рассматривается кинематический винт свободного твердого тела, при сообщении которого твердому телу оно переходит асимптотически устойчивым образом из любого, заранее не заданного начального положения на любую выбранную программную траекторию и в дальнейшем совершает асимптотически устойчивое движение по этой траектории. При этом должен выполняться некоторый критерий качества переходного процесса.

В соответствии с [13] уравнения возмущенного движения свободного твердого тела имеют вид

$$2\dot{\mathbf{M}} = \delta\mathbf{U}_\xi \circ \mathbf{M}, \quad (1)$$

$$2\dot{\mathbf{M}}^* = \dot{\mathbf{M}}^* \circ \Delta\mathbf{U}_x, \quad (2)$$

где \mathbf{M} , \mathbf{M}^* — бикватернионы ошибки ориентации и местоположения, характеризующие отклонение действительной ориентации и местоположения твердого тела от его программной ориентации и программного местоположения, причем бикватернион \mathbf{M}^* определен своими компонентами в связанной системе координат X , а \mathbf{M} — в основной (например, инерциальной) системе координат Ξ ; винты $\delta\mathbf{U}_\xi$ и $\Delta\mathbf{U}_x$ — это искомые стабилизирующие управления движением свободного твердого тела, \circ — символ бикватернионного умножения, верхняя точка означает производную по времени.

Бикватернионы \mathbf{M} и \mathbf{M}^* определяются соотношениями:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{N}}(t), \quad \mathbf{M}^* = \bar{\mathbf{N}}(t) \circ \mathbf{A},$$

где \mathbf{A} и $\mathbf{N}(t)$ — бикватернионы действительной и программной ориентации и местоположения твердого тела в инерциальной системе координат, верхняя черта — символ сопряжения бикватернионов.



Винты δU_ξ и ΔU_x (управления) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \delta U_\xi &= \mathbf{A} \circ \delta U_x \circ \overline{\mathbf{A}}, & \delta U_x &= U_x - U_z^{pr}(t), \\ \Delta U_x &= U_x - U_x^{pr} = U_x - \overline{\mathbf{M}}^* \circ U_z^{pr}(t) \circ \mathbf{M}^*, \end{aligned}$$

где U_x — отображение кинематического винта твердого тела на оси связанной системы координат, U_z^{pr} и U_x^{pr} — отображения программного кинематического винта твердого тела на оси программной Z и связанной систем координат соответственно.

Выберем следующие функционалы минимизации:

$$J = \frac{1}{4} \int_0^\infty (\alpha_1 |\mathbf{M}_v|^2 + \alpha_2 |\delta U_\xi|^2) dt, \quad (3)$$

$$J = \frac{1}{4} \int_0^\infty (\alpha_1 |\mathbf{M}_v^*|^2 + \alpha_2 |\Delta U_x|^2) dt, \quad (4)$$

где α_1, α_2 — положительные весовые коэффициенты; $\mathbf{M}_v, \mathbf{M}_v^*$ — винтовые части бикватернионов \mathbf{M}, \mathbf{M}^* .

Каждый из функционалов характеризует собой интегральную величину энергетических затрат на управление и квадратичных отклонений параметров движения свободного твердого тела от их программных значений, взятых в определенной пропорции, определяемой величинами весовых коэффициентов α_1 и α_2 .

Задача заключается в построении стабилизирующих управлений δU_ξ и ΔU_x , обеспечивающих асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{M} = \mathbf{M}^* = 1$ ($\mathbf{M}_v = \mathbf{M}_v^* = 0$) и доставляющих минимум функционалам (3), (4).

2. МЕТОДОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Методология решения задачи одинакова как для бикватернионного уравнения возмущенного движения (1) и функционала качества (3), так и для уравнения (2) и функционала (4), поэтому далее будем рассматривать только задачу (1), (3), имея в виду, что полученный результат можно перенести на задачу (2), (4).

Для решения поставленной задачи воспользуемся принципом максимума Л. С. Понтрягина. Дуальная функция Гамильтона – Понтрягина для задачи, описываемой фазовым бикватернионным кинематическим уравнением (1) и функционалом качества (3), имеет вид

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{4}(\alpha_1(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + \alpha_2(\delta U_1^2 + \delta U_2^2 + \delta U_3^2)) + \\ &+ \frac{1}{2}(\Psi_0(-M_1\delta U_1 - M_2\delta U_2 - M_3\delta U_3) + \Psi_1(M_0\delta U_1 + M_3\delta U_2 - M_2\delta U_3) + \\ &+ \Psi_2(M_0\delta U_2 + M_1\delta U_3 - M_3\delta U_1) + \Psi_3(M_0\delta U_3 + M_2\delta U_1 - M_1\delta U_2)), \end{aligned} \quad (5)$$

где M_i ($i = \overline{0, 3}$) — компоненты бикватерниона \mathbf{M} (дуальные фазовые переменные), Ψ_i ($i = \overline{0, 3}$) — дуальные сопряженные переменные, δU_i ($i = \overline{0, 3}$) — компоненты кинематического винта δU_ξ (дуальные скалярные управления).

В соответствии с выражением (5) уравнения для дуальных сопряженных переменных запишутся в виде

$$\begin{aligned} 2\dot{\Psi}_0 &= -\frac{\partial H}{\partial M_0} = -(\Psi_1\delta U_1 + \Psi_2\delta U_2 + \Psi_3\delta U_3), \\ 2\dot{\Psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial M_1} = (\Psi_0\delta U_1 - \Psi_2\delta U_3 + \Psi_3\delta U_2) + \alpha_1 M_1, \\ 2\dot{\Psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial M_2} = (\Psi_0\delta U_2 + \Psi_1\delta U_3 - \Psi_3\delta U_1) + \alpha_1 M_2, \\ 2\dot{\Psi}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial M_3} = (\Psi_0\delta U_3 - \Psi_1\delta U_2 + \Psi_2\delta U_1) + \alpha_1 M_3. \end{aligned}$$



Если ввести бикватернион Ψ , компонентами которого являются дуальные вспомогательные переменные Ψ_i , то уравнения для сопряженных переменных можно записать в бикватернионном виде:

$$2\dot{\Psi} = \alpha_1 \mathbf{M}_v + \delta \mathbf{U}_\xi \circ \Psi. \quad (6)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина, для того чтобы управление \mathbf{U}_ξ было оптимальным, необходимо, чтобы функция Гамильтона – Понтрягина принимала максимальное значение. Применяя необходимое условие экстремума, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial U_1} &= -\frac{1}{2}\alpha_2 \delta U_1 + \frac{1}{2}(-\Psi_0 M_1 + \Psi_1 M_0 - \Psi_2 M_3 + \Psi_3 M_2) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial U_2} &= -\frac{1}{2}\alpha_2 \delta U_2 + \frac{1}{2}(-\Psi_0 M_2 + \Psi_1 M_3 + \Psi_2 M_0 - \Psi_3 M_1) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial U_3} &= -\frac{1}{2}\alpha_2 \delta U_3 + \frac{1}{2}(-\Psi_0 M_3 - \Psi_1 M_2 + \Psi_2 M_1 + \Psi_3 M_0) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим законы оптимального управления в виде функций компонент бикватерниона ошибки местоположения и сопряженных переменных:

$$\begin{aligned} \delta U_1 &= \frac{1}{\alpha_2}(-\Psi_0 M_1 + \Psi_1 M_0 - \Psi_2 M_3 + \Psi_3 M_2), \\ \delta U_2 &= \frac{1}{\alpha_2}(-\Psi_0 M_2 + \Psi_1 M_3 + \Psi_2 M_0 - \Psi_3 M_1), \\ \delta U_3 &= \frac{1}{\alpha_2}(-\Psi_0 M_3 - \Psi_1 M_2 + \Psi_2 M_1 + \Psi_3 M_0). \end{aligned}$$

Перепишем эти соотношения в бикватернионном виде:

$$\delta \mathbf{U}_\xi = \frac{1}{\alpha_2} \text{screw}(\Psi \circ \overline{\mathbf{M}}), \quad (7)$$

где $\text{screw}(\cdot)$ – винтовая часть бикватерниона, стоящего в круглых скобках.

Соотношение (7) представляет собой выражение стабилизирующего управления $\delta \mathbf{U}_\xi$ через сопряженные переменные и компоненты бикватерниона ошибки местоположения. Подчеркнем, что соотношение (7) справедливо в случае отсутствия ограничений на управление.

Подставляя соотношение (7) в фазовое уравнение (1) и уравнение для сопряженных переменных (6), получим уравнения задачи оптимального управления:

$$\begin{aligned} 2\dot{\mathbf{M}} &= \frac{1}{\alpha_2}(\Psi - \text{scal}(\Psi \circ \overline{\mathbf{M}})\mathbf{M}), \\ 2\dot{\Psi} &= \alpha_1 \mathbf{M}_v + \frac{1}{\alpha_2} \Psi \circ \overline{\mathbf{M}} \circ \Psi - \frac{1}{\alpha_2} \text{scal}(\Psi \circ \overline{\mathbf{M}})\Psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\text{scal}(\cdot)$ – скалярная часть бикватерниона, стоящего в круглых скобках.

Полученные бикватернионные дифференциальные уравнения являются нелинейными и вряд ли могут быть решены аналитически в общем случае. Однако в случае, когда бикватернионная сопряженная переменная Ψ имеет нулевую винтовую часть, т. е. когда $\Psi = \psi_0$, эти уравнения интегрируются в явном виде. В этом случае закон управления (7) принимает вид

$$\delta \mathbf{U}_\xi = -\frac{1}{\alpha_2} \psi_0 \mathbf{M}_v. \quad (9)$$

Первое уравнение системы (8) с учетом (9) принимает вид

$$2\dot{\mathbf{M}} = \frac{1}{\alpha_2} \psi_0 (1 - M_0 \mathbf{M}). \quad (10)$$

Это дифференциальное уравнение интегрируется аналитически. Общее решение уравнения для переменной M_0 (дуальной скалярной части бикватерниона \mathbf{M}) имеет вид

$$M_0(t) = \frac{1 - c_0 \exp(-\psi_0 \frac{t}{\alpha_2})}{1 + c_0 \exp(-\psi_0 \frac{t}{\alpha_2})}, \quad c_0 = \frac{1 - M_0(0)}{1 + M_0(0)},$$



где c_0 — дуальная скалярная постоянная, определяемая начальными условиями движения (при $t = 0$ $M_0 = M_0(0)$).

Интегрирование уравнения (10) для переменных M_k ($k = \overline{1, 3}$) (компонент винтовой части бикватерниона \mathbf{M}) дает

$$|M_k(t)| = |M_k(0)| \exp\left(-\frac{\psi_0}{2\alpha_2}\right) \int_0^t (M_0(\tau) d\tau), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Из второго уравнения (8) и соотношения (9) следует, что

$$\psi_0 = \pm \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}.$$

Из полученного закона изменения переменной M_0 видно, что невозмущенное движение для оптимального закона управления (9) асимптотически устойчиво при $\psi_0 > 0$, т.е. когда $\psi_0 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$.

Следовательно, оптимальный закон стабилизирующего управления имеет вид

$$\delta U_\xi = -\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \mathbf{M}_v, \quad (11)$$

а соответствующие ему оптимальные законы изменения дуальных параметров Эйлера M_i ($i = \overline{0, 3}$), характеризующих управляемое угловое движение свободного твердого тела, описываются соотношениями

$$M_0(t) = \frac{1 - c_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}{1 + c_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}, \quad c_0 = \frac{1 - M_0(0)}{1 + M_0(0)},$$

$$|M_k(t)| = |M_k(0)| \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \int_0^t (M_0(\tau) d\tau), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Аналогичным образом могут быть получены закон оптимального управления и соответствующие ему законы изменения дуальных параметров Эйлера для задачи, описываемой уравнением возмущенного движения (2) и функционалом минимизации (4):

$$\Delta U_x = -\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \mathbf{M}_v^*,$$

$$M_0^*(t) = \frac{1 - c_0^* \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}{1 + c_0^* \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} t\right)}, \quad c_0^* = \frac{1 - M_0^*(0)}{1 + M_0^*(0)},$$

$$|M_k^*(t)| = |M_k^*(0)| \exp\left(\left(-\frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \int_0^t (M_0^*(\tau) d\tau)\right), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Оптимальное движение свободного твердого тела в текущий момент времени t представляет собой мгновенное винтовое движение вокруг оси, имеющей в инерциальной системе координат направление, противоположное направлению винта $\mathbf{M}_v(t) = \text{screw}(\mathbf{\Lambda}(t) \circ \overline{\mathbf{N}}(t))$, а в связанной системе координат — винта $\mathbf{M}_v^*(t) = \text{screw}(\overline{\mathbf{N}}(t) \circ \mathbf{\Lambda}(t))$.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Полученные законы управления применим для решения обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора. Обратная задача кинематики заключается в определении фазовых координат манипулятора по известному угловому и линейному местоположению выходного звена. Методология решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием бикватернионной теории кинематического управления была описана в [13] и применялась в [14, 15].

Применение бикватернионной теории кинематического управления движением свободного твердого тела позволяет свести решение обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов к решению задачи управления движением выходного звена манипулятора. При этом за программное (требуемое)



положение выходного звена манипулятора будем принимать то положение, для которого необходимо решить обратную задачу кинематики. Начальное положение выходного звена зададим произвольным набором значений обобщенных координат манипулятора из их рабочих диапазонов. В качестве управления будем использовать векторы угловой и линейной скоростей выходного звена манипулятора. Таким образом, в результате решения задачи управления получим набор обобщенных координат манипулятора, отвечающих заданному программному положению, т.е. одно из решений обратной задачи кинематики.

Рассмотрим численное решение обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора для заданного местоположения выходного звена, соответствующего следующим значениям обобщенных координат робота-манипулятора: $\varphi_1 = 20^\circ$, $\varphi_2 = 40^\circ$, $d_3 = 0.3$ м, $\varphi_4 = -35^\circ$, $\varphi_5 = 60^\circ$, $\varphi_6 = -45^\circ$. Начальное положение схвата манипулятора зададим следующим набором фазовых координат: $\varphi_1 = -30^\circ$, $\varphi_2 = 15^\circ$, $d_3 = 0.5$ м, $\varphi_4 = 36^\circ$, $\varphi_5 = -90^\circ$, $\varphi_6 = 45^\circ$. Шаг интегрирования выберем равным 0.01 с, отношение весовых коэффициентов примем $\alpha_1/\alpha_2 = 1$. Точность решения задачи будем полагать равной $\delta = 10^{-6}$. Под достижением заданной точности решения задачи будем понимать выполнение условий:

$$\sum_{i=0}^4 \|n_i\| - |\lambda_i| < \delta, \quad \sum_{i=0}^4 \|n_i^0\| - |\lambda_i^0| < \delta,$$

где n_i и n_i^0 — компоненты главной и моментной частей программного бикватерниона \mathbf{N} , а λ_i и λ_i^0 — компоненты главной и моментной частей бикватерниона текущего положения выходного звена манипулятора \mathbf{A} .

На рис. 1–3 приведены графики изменения компонент главной и моментной частей бикватерниона ошибки местоположения \mathbf{M}^* , компонент главной и моментной частей управления (угловой ω и линейной v скоростей выходного звена манипулятора), обобщенных координат. Время численного решения задачи с заданной точностью составило 11.72 с.

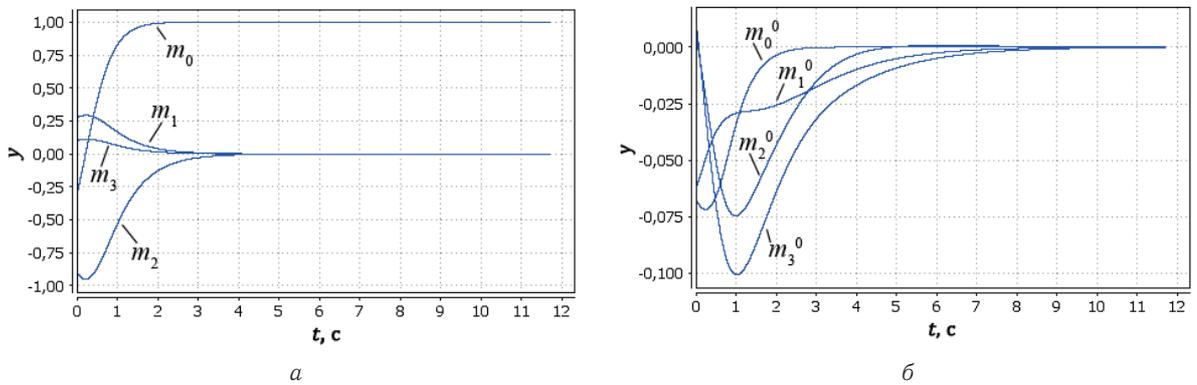


Рис. 1. Компоненты главной (а) и моментной (б) части бикватерниона ошибки местоположения

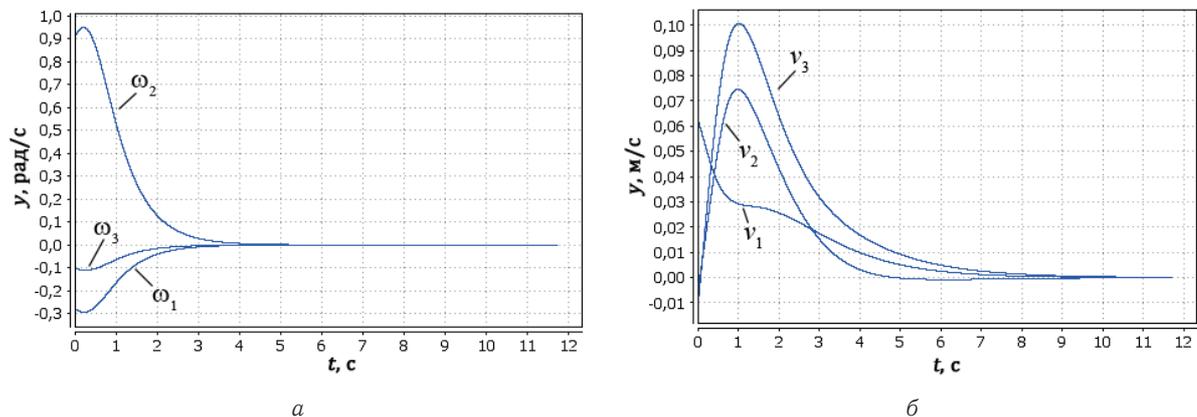


Рис. 2. Компоненты главной (а) и моментной (б) части управления

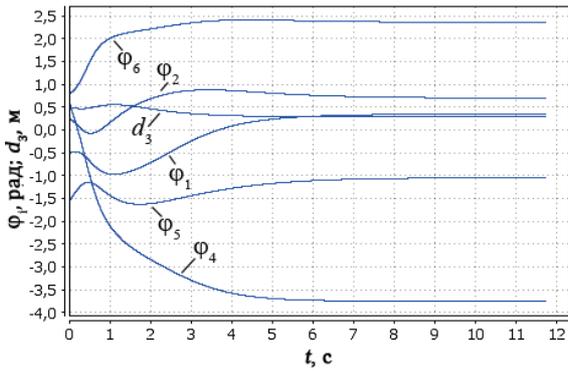


Рис. 3. Фазовые координаты

На рис. 1–3 ω_i и v_i — компоненты угловой ω и линейной \mathbf{v} скоростей выходного звена манипулятора, φ_i, d_3 ($i = 1, 2, 4, 5, 6$) — фазовые координаты стэнфордского манипулятора.

В результате численного решения были получены следующие значения обобщенных координат: $\varphi_1 = 20^\circ, \varphi_2 = 40^\circ, d_3 = 0.3 \text{ м}, \varphi_4 = -215^\circ, \varphi_5 = -60^\circ, \varphi_6 = 135^\circ$. Отметим, что в силу неоднозначности решения обратной задачи кинематики полученные значения фазовых координат могут отличаться от тех задаваемых значений, по которым вычислялся бикватернион программного положения выходного звена. Компоненты бикватерниона ошибки местоположения выходного звена в результате численного решения приняли следующие значения: $m_0 = 1, m_i = 0, m_j^0 = 0, i = \overline{1, 3}, j = \overline{0, 3}$. Таким образом, получили, как и следовало ожидать, что бикватернион $\mathbf{M}^*(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$. Компоненты управления в процессе управляемого движения асимптотически стремятся к нулю.

Рассмотрим также численное решение обратной задачи кинематики для различных отношений весовых коэффициентов. Остальные начальные параметры будем задавать как в первом случае. Результаты решения задачи приведены в таблице.

Результаты решения задачи для различных отношений весовых коэффициентов

α_1/α_2	$t, \text{ с}$	$\max(\omega)$	$\max(\mathbf{v})$
0.01	117.74	0.1	0.003
0.05	52.62	0.224	0.007
0.1	37.17	0.316	0.01
0.5	16.60	0.707	0.023
1	11.72	1	0.032
5	5.2	2.236	0.072
10	3.66	3.162	0.101
50	1.6	7.071	0.215
100	1.12	10	0.307

В таблице $|\omega|$ и $|\mathbf{v}|$ — модули главной и моментной частей управления, определяемые по формулам:

$$|\omega(t)| = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} |\mathbf{m}_v(t)| = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} (1 - (\mathbf{m}_0(t))^2)}, \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} |\mathbf{m}_{v0}(t)|.$$

На рис. 4, 5 приведены графики изменения главной и моментной частей управления при $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0.05$ и $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 50$.

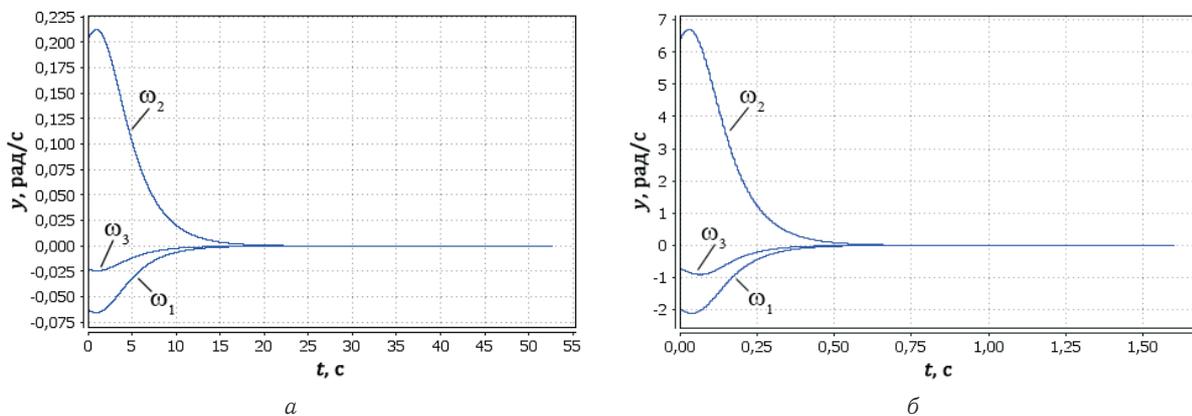


Рис. 4. Компоненты главной части управления при $\alpha_1/\alpha_2 = 0.05$ (а) и $\alpha_1/\alpha_2 = 50$ (б)

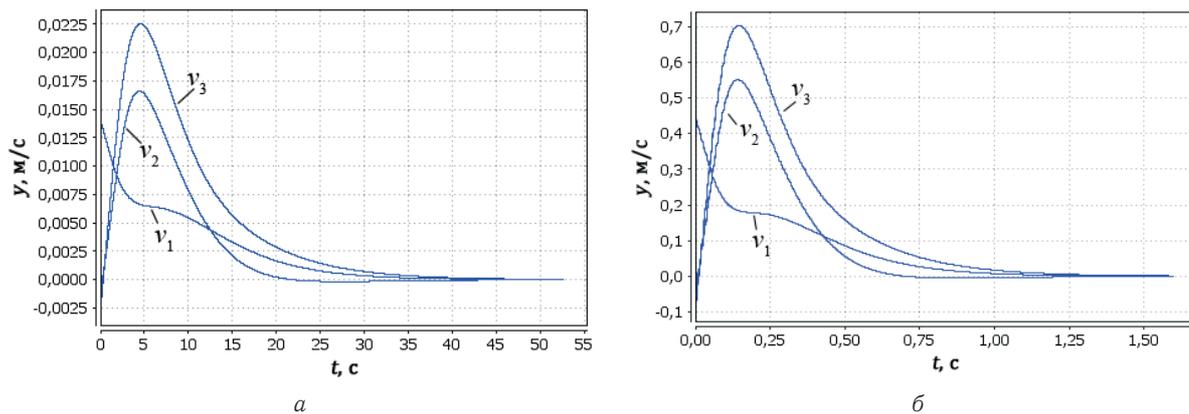


Рис. 5. Компоненты моментной части управления при $\alpha_1/\alpha_2 = 0.05$ (а) и $\alpha_1/\alpha_2 = 50$ (б)

Из таблицы и рис. 4, 5 можно сделать вывод: чем больше коэффициент α_1 , отвечающий за минимизацию среднеквадратичных отклонений, тем больше модули главной и моментной частей управления и меньше время решения задачи, и, наоборот, чем больше коэффициент α_2 , отвечающий за минимизацию управления, тем меньше модули главной и моментной частей управления и больше время, за которое достигается требуемая точность решения.

Из сравнения рис. 2, а, рис. 4, а, б и рис. 2, б, рис. 5, а, б следует, что при различных отношениях весовых коэффициентов характер переходного процесса одинаков, изменяются лишь величины управлений и время решения задачи.

Полученные законы изменения управлений и обобщенных координат манипулятора являются оптимальными для перевода выходного звена из заданного начального в требуемое конечное положение. Поэтому рассмотренный подход позволяет не только решать обратную задачу кинематики, но и численно строить программные оптимальные законы изменения обобщенных координат, угловой и линейной скорости выходного звена манипулятора для задачи перевода манипулятора из заданного начального в заданное конечное положение.

Библиографический список

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах управления положением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 24–31.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Кинематическая задача ориентации во вращающейся системе координат // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 6. С. 36–43.
3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.
4. Плотников П. К., Сергеев А. Н., Челноков Ю. Н. Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 9–18.
5. Панков А. А., Челноков Ю. Н. Исследование кватернионных законов кинематического управления ориентацией твердого тела по угловой скорости // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 3–13.
6. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М. : Наука, 1992. 280 с.
7. Молоденков А. В. Кватернионное решение задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс // Проблемы механики и управления : межвуз. сб. науч. тр. Пермь : Изд-во ПГУ, 1995. С. 122–131.
8. Бирюков В. Г., Челноков Ю. Н. Кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации углового движения твердого тела // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 172–174.
9. Маланин В. В., Стрелкова Н. А. Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 204 с.
10. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : Физматлит, 2006. 511 с.
11. Стрелкова Н. А. Оптимальное по быстродействию кинематическое управление винтовым перемещением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 73–76.
12. Челноков Ю. Н. Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44, вып. 1. С. 32–39.
13. Челноков Ю. Н. Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твер-



дого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 38–58.

14. Ломовцева Е. И., Челноков Ю. Н. Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задач кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора. II // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мате-

матика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 88–95.

15. Нелаева Е. И., Челноков Ю. Н. Решение прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц и бикватернионов на примере стэнфордского манипулятора. Ч. 1 // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 6. С. 373–380. DOI: 10.17587/mau.16.373-380.

Solving Kinematic Problem of Optimal Nonlinear Stabilization of Arbitrary Program Movement of Free Rigid Body

Yu. N. Chelnokov¹, E. I. Nelaeva²

¹Yurii N. Chelnokov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia; Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya st., 410028, Saratov, Russia, chelnokovyun@info.sgu.ru

²Ekaterina I. Nelaeva, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia LomovtsevaEI@yandex.ru

The kinematic problem of nonlinear stabilization of arbitrary program motion of free rigid body is studied. Biquaternion kinematic equation of perturbed motion of a free rigid body is considered as a mathematical model of motion. Instant speed screw of body motion is considered as a control. There are two functionals that are to be minimized. Both of them characterize the integral quantity of energy costs of control and squared deviations of motion parameters of a free rigid body from their program values. Optimal control laws and differential equations of optimization problem are determined using the Pontryagin's maximum principle. Analytical solution of this problem has been found. The control law obtained is used for numerical solution of the inverse kinematics of a Stanford robot arm. The analysis of the numerical solution is carried out.

Key words: optimal control, rigid body, biquaternion, inverse kinematics.

References

1. Branec V. N., Shmyglevskij I. P. Using Biquaternions in Problem of Rigid Body Position Control. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1972, no. 4, pp. 24–31 (in Russian).
2. Branec V. N., Shmyglevskij I. P. Kinematic Problem of Orientation in Rotating Coordinate Frame. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1972, no. 6, pp. 36–43 (in Russian).
3. Branec V. N., Shmyglevskij I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachah orientacii tverdogo tela* [Using Biquaternions in Problem of Rigid Body Orientation]. Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).
4. Plotnikov P. K., Sergeev A. N., Chelnokov Yu. N. Kinematic control problem for the orientation of a rigid body. *Mech. Solids*, 1991, vol. 37, no. 5, pp. 7–16.
5. Pankov A. A., Chelnokov Yu. N. Investigation of quaternion laws of kinematic control of solid body orientation in angular velocity. *Mech. Solids*, 1995, vol. 33, no. 6, pp. 3–13.
6. Branec V. N., Shmyglevskij I. P. *Vvedenie v teoriju besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh sistem* [Introduction to the Theory of Strapdown Inertial Navigation Systems]. Moscow, Nauka, 1992, 280 p. (in Russian).
7. Molodenkov A. V. Kvaternionnoe reshenie zadachi optimal'nogo razvorota tverdogo tela so sfericheskim raspredeleniem mass [Quaternion Solution of the Problem of Optimal Rotation of a Rigid Body With a Spherical Mass Distribution]. *Problemy mehaniki i upravleniya: Mezhdvuz. sb. nauch. tr.* Perm', Perm Univ. Press, 1995, pp. 122–131 (in Russian).
8. Birjukov V. G., Chelnokov Ju. N. Kinematicheskaja zadacha optimal'noj nelinejnoj stabilizacii uglovo-go dvizhenija tverdogo tela [Kinematic Problem of Optimal Nonlinear Stabilization of Rigid Body Angular Motion]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2002, iss. 4, pp. 172–174 (in Russian).
9. Malanin V. V., Strelkova N. A. *Optimal'noe upravlenie orientaciej i vintovym dvizheniem tverdogo tela* [Optimal Control of Rigid Body Orientation and Screw Motion]. Moscow; Izhevsk, NIC "Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika", 2004, 204 p. (in Russian).
10. Chelnokov Yu. N. *Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of Solid Bodies and its Applications. Geometry and Kinematics of Motion*. Moscow, Fizmatlit, 2006, 511 p. (in Russian).
11. Strelkova N. A. Optimal'noe po bystrodejstviju kinematicheskoe upravlenie vintovym peremeshhe-



- niem tverdogo tela [Time Optimal Kinematic Control of Rigid Body Screw Motion]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1982, no. 4, pp. 73–76 (in Russian).
12. Chelnokov Yu. N. On integration of kinematic equations of a rigid body's screw-motion. *Applied mathematics and mechanics*, 1980, vol. 44, no. 1, pp. 19–23.
 13. Chelnokov Yu. N. Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics. *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, no. 1, pp. 31–46.
 14. Lomovceva E. I., Chelnokov Ju. N. Dual matrix and biquaternion methods of solving direct and inverse kinematics problems of manipulators for example Stanford robot arm. II. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 88–95 (in Russian).
 15. Nelaeva E. I., Chelnokov Ju. N. Solution to the Problems of Direct and Inverse Kinematics of the Robots-Manipulators Using Dual Matrices and Biquaternions on the Example of Stanford Robot Arm. Pt. 1. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 6, pp. 373–380. DOI: 10.17587/mau.16.373-380 (in Russian).

ИНФОРМАТИКА

УДК 517.935.2

УСЛОВИЯ АНАЛИТИЧНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО И ВОЗМУЩАЮЩИХ КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ КОМБИНИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. С. Портенко¹, Д. В. Мельничук², Д. К. Андрейченко³

¹Портенко Марина Сергеевна, старший преподаватель кафедры информатики и программирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, msportenko@gmail.com

²Мельничук Дмитрий Вадимович, магистрант факультета компьютерных наук и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, meldm007@gmail.com

³Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, kp_andreichenko@renet.ru

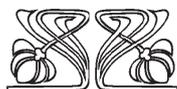
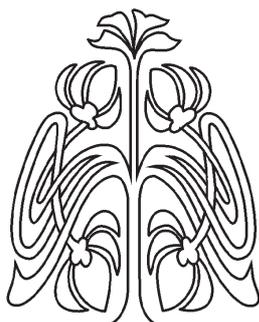
Комбинированные динамические системы (КДС) представляют собой связанные посредством граничных условий и условий связи системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях. Проверка устойчивости КДС может быть выполнена на основе быстрого алгоритма, для применения которого необходима аналитичность характеристического и возмущающих квазимногочленов КДС в правой комплексной полуплоскости и вблизи мнимой оси. В статье сформулированы и доказаны условия аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов КДС. Рассмотрены математические модели объектов управления с распределенными по пространству параметрами, соответствующие процессам теплопроводности и диффузии, динамики поддерживающих слоев вязкой несжимаемой жидкости, а также динамики упругодеформируемой среды с учетом внутреннего трения.

Ключевые слова: комбинированные динамические системы, устойчивость.

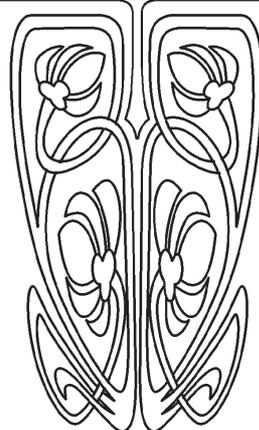
DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-208-217

ВВЕДЕНИЕ

Комбинированные динамические системы (КДС) — это математические модели в форме связанных посредством граничных условий и условий связи обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при соответствующих начальных условиях [1, 2]. Основные теоремы об устойчивости КДС сформулированы и доказаны в [1, 2], где приведен основанный на теореме об устойчивом квазимногочлене «быстрый» алгоритм проверки устойчивости КДС. Для его применения необходимо, чтобы характеристический и возмущающий квазимногочлены КДС были аналитическими функциями в правой комплексной полуплоскости и вблизи мнимой оси. В общем случае вопрос об условиях аналитичности характеристического и возмущающего квазимногочленов КДС остался открыт, а его решение является целью данной работы.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





1. КОМБИНИРОВАННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Структурная схема КДС с входной вектор-функцией $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_x}$ и характеризующей движение объектов управления с сосредоточенными по пространству параметрами выходной вектор-функцией $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y}$ приведена на рис. 1 (где t — время). Здесь ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения, УЧП — уравнения в частных производных, ГУ — граничные условия, УС — условия связи, НУ — начальные условия. Модельные уравнения движения КДС можно привести к виду [2, с. 8]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}); & \dot{\mathbf{u}} &= \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}), & \mathbf{r} &\in \Omega \subset \mathbb{R}^{N_r}, \\ \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y})|_S &= 0; & \mathbf{h} &= \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u})dS, & S &= \partial\Omega, & (1) \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0, & \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{r} — независимые пространственные координаты; Ω , S — область, занимаемая объектами управления с распределенными по пространству параметрами и ее граница соответственно; $\mathbf{u} : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$ характеризует движение объектов управления с распределенными по пространству параметрами; $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$; $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_y} \times \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y}$; $(\dot{\cdot}) = d(\cdot)/dt$ либо $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$; операторы \mathbb{F} , \mathbb{G} , \mathbb{H} соответствуют уравнениям в частных производных, граничным условиям и условиям связи. Предполагается, что вектор-функция \mathbf{f} и операторы \mathbb{F} , \mathbb{G} , \mathbb{H} не зависят от времени t , т.е. система является стационарной с точки зрения теории управления. В равновесном состоянии $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 = \text{const}$, $(\dot{\cdot}) = 0$, и характеризующие его величины \mathbf{y}_0 , $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$, \mathbf{h}_0 суть решение уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}) = 0; \quad \mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u})dS, \quad (2)$$

$$\mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega; \quad \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y})|_S = 0. \quad (3)$$

В предположении $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \mu \mathbf{y}^*(t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mu \mathbf{u}^*(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_0 + \mu \mathbf{h}^*(t)$, $\mu \rightarrow 0$, при условии дифференцируемости функции \mathbf{f} и операторов \mathbb{F} , \mathbb{G} , \mathbb{H} из (1)–(3) следуют уравнения относительно величин $(\cdot)^*$, характеризующих возмущенное движение (символ * далее опущен), которые после выполнения интегрального преобразования Лапласа по времени $f(t) \rightarrow \tilde{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} dt$ принимают вид

$$\lambda \tilde{\mathbf{y}} = B\tilde{\mathbf{x}} + C\tilde{\mathbf{y}} + A\tilde{\mathbf{h}}, \quad (4)$$

$$\lambda \tilde{\mathbf{u}} = \mathbb{L}_1^{(F)}(\tilde{\mathbf{u}}) + L_2^{(F)}\tilde{\mathbf{x}} + (L_3^{(F)} + \lambda L_4^{(F)})\tilde{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r} \in \Omega; \quad (\mathbb{L}_1^{(G)}(\tilde{\mathbf{u}}) + L_2^{(G)}\tilde{\mathbf{y}})|_S = 0, \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{h}} = \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\tilde{\mathbf{u}})dS. \quad (6)$$

Здесь A , B , C — постоянные матрицы; $L_2^{(F)}$, $L_3^{(F)}$, $L_4^{(F)}$, $L_2^{(G)}$ — матрицы, которые могут зависеть от \mathbf{r} ; линейные операторы $\mathbb{L}_1^{(F)}$, $\mathbb{L}_1^{(G)}$, $\mathbb{L}^{(H)}$ соответствуют линейризованным уравнениям в частных производных, граничным условиям и условиям связи. Из линейности по $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$ краевой задачи (5) и линейности (6) по $\tilde{\mathbf{u}}$ следует

$$\tilde{\mathbf{h}}(\lambda) = B_u(\lambda)\tilde{\mathbf{x}}(\lambda) + C_u(\lambda)\tilde{\mathbf{y}}(\lambda), \quad B_u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{(N_h, N_x)}, \quad C_u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{(N_h, N_y)}, \quad (7)$$

причем столбцы с номером j матриц $B_u(\lambda)$ и $C_u(\lambda)$ находятся при помощи решения линейных краевых задач относительно вспомогательной функции $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \lambda)$, $\mathbf{v} : \Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}$

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{v} &= \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v}) + L_2^{(F)}\mathbf{e}_j^{(N_x)}, & \mathbf{r} &\in \Omega, & \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v})|_S &= 0, \\ B_u(\lambda)\mathbf{e}_j^{(N_x)} &= \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{v})dS, & j &= \overline{1, N_x}, \end{aligned} \quad (8)$$

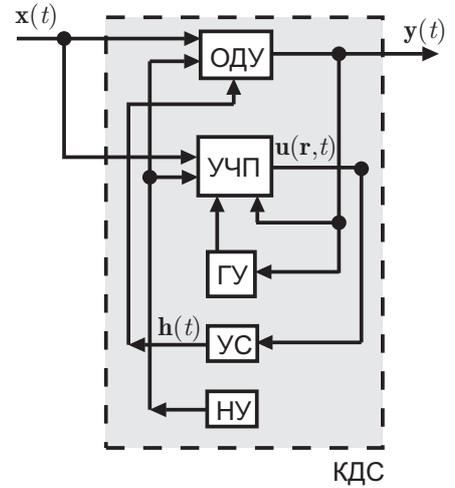


Рис. 1. Структурная схема КДС



$$\lambda \mathbf{v} = \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v}) + (L_3^{(F)} + \lambda L_4^{(F)})\mathbf{e}_j^{(N_y)}, \quad \mathbf{r} \in \Omega; \quad (\mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v}) + L_2^{(G)}\mathbf{e}_j^{(N_y)})\Big|_S = 0, \quad (9)$$

$$C_u(\lambda)\mathbf{e}_j^{(N_y)} = \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{v})dS, \quad j = \overline{1, N_y}, \quad (10)$$

где $\mathbf{e}_j^{(N)} \in \mathbb{R}^N$, $j = \overline{1, N}$; $\mathbf{e}_1^{(N)} = (1, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{e}_2^{(N)} = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, \mathbf{e}_N^{(N)} = (0, 0, \dots, 1)^T$. Подстановка (7) в (4) приводит к системе линейных уравнений, связывающей $\tilde{\mathbf{x}}(\lambda)$ и $\tilde{\mathbf{y}}(\lambda)$, из которой находится матрица передаточных функций $\Phi(\lambda)$ и выражения для характеристического квазимногочлена $D(\lambda)$ и возмущающих квазимногочленов $Q_{kj}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(\lambda) &= \Phi(\lambda)\tilde{\mathbf{x}}(\lambda), \\ \Phi(\lambda) &= [Q_{kj}(\lambda)/D(\lambda)] = [\lambda E - C - AC_u(\lambda)]^{-1}[B + AB_u(\lambda)], \\ D(\lambda) &= \det[\lambda E - C - AC_u(\lambda)], \quad E = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}, \quad k = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как краевые задачи (8), (9) зависят лишь от одной комплексной величины λ

$$\begin{aligned} B_u(\bar{\lambda}) &= \overline{B_u(\lambda)}, \quad C_u(\bar{\lambda}) = \overline{C_u(\lambda)}, \\ D(\bar{\lambda}) &= \overline{D(\lambda)}, \quad Q_{kj}(\bar{\lambda}) = \overline{Q_{kj}(\lambda)}, \quad k = \overline{1, N_y}, \quad j = \overline{1, N_x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Обобщенная степень $n \in \mathbb{R}$ (как правило, $n = N_u$) характеристического квазимногочлена $D(\lambda)$ находится из условия [1, 2]

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-n} D(\lambda) = c_a, \quad 0 < |c_a| < \infty, \quad \text{Re } \lambda > \sigma_0, \quad \sigma_0 \in (-\infty, 0). \quad (13)$$

При условии аналитичности функций $D(\lambda)$ и $Q_{kj}(\lambda)$ при $\text{Re } \lambda > \sigma_0$, $\sigma_0 \in (-\infty, 0)$, наличия обобщенной степени (13) и некоторых других условий из теорем об устойчивости КДС [1, 2] (об устойчивом квазимногочлене) следует критерий устойчивости КДС

$$\Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(i\omega) = n\pi/2. \quad (14)$$

При оптимизации шага изменения ω условие (14) представляет собой «быстрый» алгоритм проверки устойчивости КДС.

2. ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Данный метод применяется для численного решения нелинейной краевой задачи (2), (3). Пусть $\mathbf{W}_k(\mathbf{r}), \mathbf{W}_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$ $k = 1, 2, \dots$ — полная система функций в области Ω ; $\Gamma_k(\mathbf{r}|_S), \Gamma_k : S \rightarrow \mathbb{R}^{N_G}$, $k = 1, 2, \dots$ — полная система функций на $S = \partial\Omega$. Полагаем

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) \approx \sum_{k=1}^{N_\Omega + N_S} u_k \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) \quad (15)$$

и для приближенного выполнения уравнений (3) требуем

$$\int_\Omega \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r})d\Omega = 0, \quad k = \overline{1, N_\Omega}; \quad \int_S \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \cdot \Gamma_k(\mathbf{r})dS = 0, \quad k = \overline{1, N_S}, \quad (16)$$

где $(\cdot) \cdot (\cdot)$ — скалярное произведение векторов соответствующей размерности. Из (3), (16) следует система нелинейных уравнений относительно компонент вектора \mathbf{Y}

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{Y}) &= 0, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^{N_y + N_\Omega + N_S} \rightarrow \mathbb{R}^{N_y + N_\Omega + N_S}, \\ \mathbf{Y} &= (y_1, y_2, \dots, y_{N_y}, u_1, u_2, \dots, u_{N_\Omega + N_S})^T \in \mathbb{R}^{N_y + N_\Omega + N_S}. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее система нелинейных уравнений (17) решается численно.

Проекционный метод Галеркина также применяется для решения линейных краевых задач (8), (9), при этом достаточно рассмотреть (9). Полагаем

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, \lambda) \approx \sum_{k=1}^{N_\Omega + N_S} v_k(\lambda) \mathbf{W}_k(\mathbf{r}). \quad (18)$$



Дискретный аналог (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega &= \int_{\Omega} [\mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v}) + (L_3^{(F)} + \lambda L_4^{(F)}) \mathbf{e}_j^{(N_y)}] \cdot \mathbf{W}_k(\mathbf{r}) d\Omega, & k = \overline{1, N_{\Omega}}, \\ \int_S \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v}) \cdot \Gamma_k(\mathbf{r}) dS &= - \int_S L_2^{(G)} \mathbf{e}_j^{(N_y)} \cdot \Gamma_k(\mathbf{r}) dS, & k = \overline{1, N_S}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подстановка (18) в (19) приводит к системе линейных уравнений размерности $(N_{\Omega} + N_S) \times (N_{\Omega} + N_S)$ относительно коэффициентов разложения (18), которая решается численно, и далее используются формулы (10) для вычисления текущего столбца матрицы $C_u(\lambda)$. Матрица коэффициентов и правые части системы линейных уравнений (16) линейно зависят от параметра λ . Пусть $\mathcal{D}(\lambda)$ — определитель системы линейных уравнений (16), являющийся полиномом некоторой степени параметра λ . Из (10) следует, что в области, где применяется проекционный метод Галеркина, особенности элементов вспомогательной матрицы $C_u(\lambda)$ (а также $B_u(\lambda)$ и, в конечном счете, характеристического и возмущающего квазимногочленов $D(\lambda)$ и $Q_{k_j}(\lambda)$) будут исчерпываться особенностями решения системы линейных уравнений (19), т.е. нулями определителя $\mathcal{D}(\lambda)$. Проверка отсутствия нулей $\mathcal{D}(\lambda)$ в области, ограниченной контуром

$$\begin{aligned} \ell_R &= \{\lambda = -\sigma_0 - i\omega, -(R^2 - \sigma_0^2)^{1/2} \leq \omega \leq (R^2 - \sigma_0^2)^{1/2}\} \cup \\ &\cup \{\lambda = Re^{i\vartheta}, -[\pi/2 + \arcsin(\sigma_0/R)] \leq \vartheta \leq \pi/2 + \arcsin(\sigma_0/R)\}, \\ &R \gg 1, \quad 0 < \sigma_0 \ll 1, \end{aligned} \quad (20)$$

на основании принципа аргумента сводится к проверке условия (рис. 2)

$$\Delta_{\lambda \in \ell_R} \arg \mathcal{D}(\lambda) = 0. \quad (21)$$

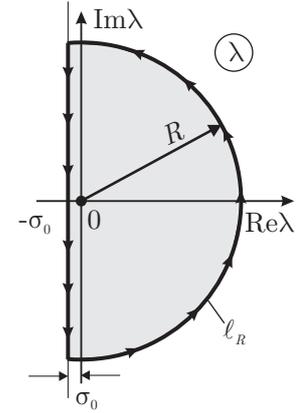


Рис. 2. Проверка аналитичности

3. УСЛОВИЯ АНАЛИТИЧНОСТИ

При фиксированном λ в линейном пространстве функций $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}$ введем норму $\|\mathbf{u}\| \in \mathbb{R}$, например, $\|\mathbf{u}\| = \left[\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\Omega \right]^{1/2}$. Полагаем, что в (8), (9)

$$\left\| L_2^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_x)} \right\| < \infty, \quad j = \overline{1, N_x}, \quad \left\| L_3^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_y)} \right\| < \infty, \quad \left\| L_4^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_y)} \right\| < \infty, \quad j = \overline{1, N_y}. \quad (22)$$

Так как входящий в уравнения в частных производных неограниченный линейный оператор $\mathbb{L}_1^{(F)}$ содержит производные более высокого порядка, чем входящий в условия связи линейный оператор $\mathbb{L}^{(H)}$, для достаточно гладких функций полагаем

$$\forall (\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}) : \quad \left\| \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) \right\| < \infty, \quad \mathbb{L}^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u}) dS \right| < \infty. \quad (23)$$

Далее полагаем: существуют достаточно гладкие функции $\mathbf{v}_0^{(j)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$ такие, что

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{v}_0^{(j)} \right\| < \infty, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v}_0^{(j)})|_S &= -L_2^{(G)} \mathbf{e}_j^{(N_y)}, \quad \left\| \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v}_0^{(j)}) \right\| < \infty, \\ \mathbf{c}_u^{(j)} &= \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{v}_0^{(j)}) dS, \quad \left| \mathbf{c}_u^{(j)} \right| < \infty, \quad j = \overline{1, N_y}. \end{aligned} \quad (24)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия (22)–(24) и в некоторой области комплексной плоскости при $\lambda \in \Omega_{\lambda} \subset \mathbb{C}$ для функций (23) справедливо неравенство

$$\left\| \lambda \mathbf{u} - \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) \right\| \geq m(\lambda) \|\mathbf{u}\|, \quad m(\lambda) > 0. \quad (25)$$

Тогда при $\lambda \in \Omega_{\lambda}$ элементы матриц $B_u(\lambda)$ и $C_u(\lambda)$ — комплекснозначные однозначные ограниченные функции параметра λ .



Доказательство. Достаточно рассмотреть вспомогательную краевую задачу (9) и формулы (10), которые, используя (24) и полагая $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}$, преобразуем к виду

$$\lambda \mathbf{w} = \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{w}) + \mathbf{f}_0(\mathbf{r}) + \lambda \mathbf{f}_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega; \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{w})|_S = 0, \quad (26)$$

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{r}) = \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{v}_0) + L_3^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_y)}, \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{r}) = L_4^{(F)} \mathbf{e}_j^{(N_y)} - \mathbf{v}_0,$$

$$C_u(\lambda) \mathbf{e}_j^{(N_y)} = \mathbf{c}_u^{(j)} + \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{w}) dS, \quad j = \overline{1, N_y}. \quad (27)$$

Оператор $\lambda(\cdot) - \mathbb{L}_1^{(F)}(\cdot)$ отображает линейное нормированное пространство достаточно гладких удовлетворяющих однородным граничным условиям функций (23) в линейное нормированное пространство ограниченных по норме функций. Как следует из (25), согласно [3, с. 119, теорема 1] оператор $\lambda(\cdot) - \mathbb{L}_1^{(F)}(\cdot)$ при $\lambda \in \Omega_\lambda$ имеет ограниченный обратный оператор, т. е. с учетом (22)–(24) существует единственное достаточно гладкое решение вспомогательной краевой задачи, для которого существует и ограничен интеграл в правой части равенства (27). \square

Лемма 2. Пусть выполнены условия (22)–(24) и в некоторой замкнутой области комплексной плоскости при $\lambda \in \bar{\Omega}_\lambda = \Omega_\lambda \cup \partial\Omega_\lambda \subset \mathbb{C}$ для функций (23) справедливо условие (25). Тогда при $\lambda \in \Omega_\lambda$ элементы матриц $B_u(\lambda)$ и $C_u(\lambda)$ — аналитические функции λ .

Доказательство. Достаточно рассмотреть вспомогательную краевую задачу (9) и формулы (10). Зафиксируем $\lambda_0 \in \Omega_\lambda$ и некоторое $\lambda \in \bar{\Omega}_\lambda$. Используя линейность (26) и (27) и полагая $\mathbf{w}(\mathbf{r}, \lambda) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)^2 \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, \lambda_0, \lambda)$, находим

$$\lambda_0 \mathbf{u}_0 = \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}_0) + \mathbf{f}_0(\mathbf{r}) + \lambda_0 \mathbf{f}_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega; \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}_0)|_S = 0,$$

$$\lambda_0 \mathbf{u}_1 = \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{f}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{r} \in \Omega; \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}_1)|_S = 0,$$

$$\lambda \mathbf{u}_2 = \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}_2) - \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{r} \in \Omega; \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}_2)|_S = 0,$$

$$C_u(\lambda) \mathbf{e}_j^{(N_y)} = \mathbf{c}_u^{(j)} + \mathbf{g}_0^{(j)}(\lambda_0) + \mathbf{g}_1^{(j)}(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + \mathbf{g}_2^{(j)}(\lambda_0, \lambda)(\lambda - \lambda_0)^2,$$

$$\mathbf{g}_0^{(j)}(\lambda_0) = \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u}_0) dS, \quad \mathbf{g}_1^{(j)}(\lambda_0) = \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u}_1) dS, \quad \mathbf{g}_2^{(j)}(\lambda_0, \lambda) = \int_S \mathbb{L}^{(H)}(\mathbf{u}_2) dS, \quad j = \overline{1, N_y}.$$

Аналогично доказательству леммы 1 можно показать: при $\lambda_0 \in \Omega_\lambda$ $\mathbf{g}_0^{(j)}(\lambda_0)$, $\mathbf{g}_1^{(j)}(\lambda_0)$ — ограниченные комплекснозначные вектор-функции λ_0 ; при $\lambda_0 \in \Omega_\lambda$, $\lambda \in \bar{\Omega}_\lambda$ $\mathbf{g}_2^{(j)}(\lambda_0, \lambda)$ — ограниченная комплекснозначная вектор-функция своих аргументов. Так как в замкнутой области $\bar{\Omega}_\lambda$ можно найти $M(\lambda_0) = \max_{\lambda \in \bar{\Omega}_\lambda} |\mathbf{g}_2^{(j)}(\lambda_0, \lambda)|$, это означает наличие производной элементов матрицы $C_u(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \in \Omega_\lambda$, т. е. их аналитичность в области Ω_λ . \square

Теорема 1. Пусть выполнены условия (22)–(24) и в некоторой замкнутой области комплексной плоскости при $\lambda \in \bar{\Omega}_\lambda = \Omega_\lambda \cup \partial\Omega_\lambda \subset \mathbb{C}$ для функций (23) справедливо условие (25). Тогда при $\lambda \in \Omega_\lambda$ характеристический квазимногочлен $D(\lambda)$ и возмущающие квазимногочлены $Q_{kj}(\lambda)$, $k = \overline{1, N_y}$, $j = \overline{1, N_x}$ — аналитические функции λ .

Доказательство. Непосредственно следует из (11) и леммы 2. \square

4. АНАЛИТИЧНОСТЬ В ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

В «низкочастотной» области внутри контура (20) (см. рис. 2) проверка аналитичности характеристического и возмущающих квазимногочленов эффективно реализуется на основе условия (21). Аналитичность характеристического и возмущающих квазимногочленов в высокочастотной области $\lambda \rightarrow \infty$, $\text{Re } \lambda > -\infty$ устанавливается на основе теоремы 1. При фиксированном λ для функций $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}$ введем операцию скалярного произведения, например $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$. Пусть уравнения типа (1) моделируют процессы типа теплопроводности или диффузии, тогда

$$\mathbb{L}_1^{(F)} = \mathbb{L}_{v,1}^{(F)} - \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}. \quad (28)$$



Линейный оператор $\mathbb{L}_{v,1}^{(F)}$ может быть ограниченным либо неограниченным. Линейный оператор $\mathbb{L}_{v,2}^{(F)}$ содержит производные наивысшего порядка по независимым пространственным переменным, неограничен, положительно определен и самосопряжен

$$\begin{aligned} \forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0 &\Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle > 0, \\ \forall(\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0, \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v})|_S = 0 &\Rightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{v}) \rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку операторы $\mathbb{L}_{v,2}^{(F)}$ и $\mathbb{L}_1^{(G)}$ являются вещественными, из (29) следует

$$\forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}) : \quad \|\mathbf{u}\| = 1, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle > 0. \quad (30)$$

Так как оператор $\mathbb{L}_{v,2}^{(F)}$ содержит производные наивысшего порядка, полагаем

$$\begin{aligned} \forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}) : \quad \|\mathbf{u}\| = 1, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0, \quad \|\mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u})\| \gg 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,1}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle \right| \ll \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle. & \end{aligned} \quad (31)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (22)–(24), (28), (29) и (31). Тогда при $|\lambda| \gg 1$, $\text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$ характеристический квазимногочлен $D(\lambda)$ и возмущающие квазимногочлены $Q_{kj}(\lambda)$, $k = \overline{1, N_y}$, $j = \overline{1, N_x}$, — аналитические функции λ .

Доказательство. Достаточно рассмотреть вспомогательную краевую задачу (26) и формулы (27). Как следует из (26), для решения данной вспомогательной линейной краевой задачи при $\lambda \rightarrow \infty$, $\text{Re } \lambda > -\infty$ $\|\mathbf{w}\| < M < \infty \Rightarrow \|\mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{w})\| \rightarrow \infty$. В таком случае, как следует из (30), (31), при $\lambda \rightarrow \infty$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$ (рис. 3)

$$\begin{aligned} \forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}) : \quad \|\mathbf{u}\| = 1, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left\| \lambda \mathbf{u} - \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) \right\| \geq \left| \langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{u} - \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle \right| = & \\ = \left| \lambda + \langle \mathbf{u}, -\mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle \right| \geq \frac{1}{2} \left| \lambda + \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle \right| \geq \frac{1}{2} |\lambda| \cos \alpha, & \\ \forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}) : \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left\| \lambda \mathbf{u} - \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u}) \right\| \geq \frac{1}{2} |\lambda| \|\mathbf{u}\| \cos \alpha & \end{aligned}$$

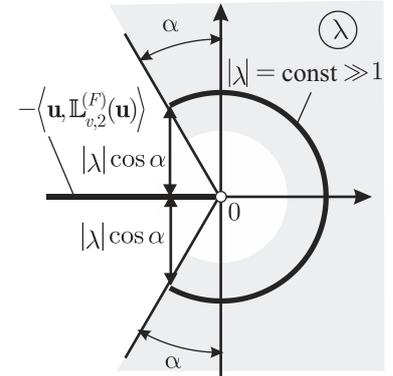


Рис. 3. К оценке нормы

условие (25) выполнено и при $|\lambda| \gg 1$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$ согласно теореме 1 характеристический квазимногочлен $D(\lambda)$ и возмущающие квазимногочлены $Q_{kj}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, N_y$, $j = 1, 2, \dots, N_x$, будут аналитическими функциями λ . \square

После исключения некоторых вспомогательных величин (например, давления на граничных поверхностях в математических моделях поддерживающих слоев вязкой несжимаемой жидкости [4]) линейный оператор $\mathbb{L}_1^{(F)}$ может быть преобразован к виду

$$\mathbb{L}_1^{(F)} = \lambda \mathbb{L}_{v,0}^{(F)} + \mathbb{L}_{v,1}^{(F)} - \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}. \quad (32)$$

Здесь $\mathbb{L}_{v,0}^{(F)}$ — ограниченный положительно определенный самосопряженный оператор

$$\begin{aligned} \forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0 &\Rightarrow 0 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,0}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle \leq C_0 \|\mathbf{u}\|^2, \quad 0 < C_0 < 1, \\ \forall(\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0, \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v})|_S = 0 &\Rightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbb{L}_{v,0}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,0}^{(F)}(\mathbf{v}) \rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку операторы $\mathbb{L}_{v,0}^{(F)}$ и $\mathbb{L}_1^{(G)}$ вещественные, то

$$\forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}) : \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0 \Rightarrow 0 \leq \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,0}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle \leq C_0 \|\mathbf{u}\|^2, \quad 0 < C_0 < 1. \quad (34)$$



Теорема 3. Пусть выполнены условия (22)–(24), (29), (31)–(33). Тогда при $|\lambda| \gg 1$, $\operatorname{Re} \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, характеристический квазимногочлен $D(\lambda)$ и возмущающие квазимногочлены $Q_{kj}(\lambda)$, $k = \overline{1, N_y}$, $j = \overline{1, N_x}$, — аналитические функции λ .

Доказательство. Аналогично теореме 2 сводится к выводу неравенства $\forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}) : \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0 \Rightarrow \|\lambda \mathbf{u} - \mathbb{L}_1^{(F)}(\mathbf{u})\| \geq \frac{1}{2}(1 - C_0)|\lambda| \|\mathbf{u}\| \cos \alpha$. \square

Пусть теперь рассматривается движение упругой среды с учетом диссипации энергии. Достаточно рассмотреть вспомогательную краевую задачу (26), где

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}, \lambda) = \{\mathbf{u}(\mathbf{r}, \lambda), \lambda \mathbf{u}(\mathbf{r}, \lambda)\}, \quad \mathbb{L}_1^{(F)} = \mathbb{L}_{u,1}^{(F)} - \mathbb{L}_{u,2}^{(F)} + \lambda(\mathbb{L}_{v,1}^{(F)} - \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}), \quad (35)$$

а $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \lambda)$ — собственно упругие смещения частиц среды. Если полагать, что граничные условия накладываются лишь на смещения частиц среды, то (26) принимает вид

$$\lambda^2 \mathbf{u} = \mathbb{L}_{u,1}^{(F)}(\mathbf{u}) - \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) + \lambda(\mathbb{L}_{v,1}^{(F)}(\mathbf{u}) - \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u})) + \sum_{j=1}^2 \lambda^j \mathbf{f}_j(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega; \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0. \quad (36)$$

Операторы $\mathbb{L}_{v,1}^{(F)}$, $\mathbb{L}_{v,2}^{(F)}$ удовлетворяют свойствам (29)–(31), а $\mathbf{f}_j(\mathbf{r})$ вычисляются аналогично (26). Оператор $\mathbb{L}_{u,1}^{(F)}$ может быть ограничен либо неограничен. Линейный оператор $\mathbb{L}_{u,2}^{(F)}$ неограничен, положительно определен, самосопряжен и содержит производные наивысшего порядка по независимым пространственным переменным

$$\begin{aligned} \forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0 &\Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle > 0, \\ \forall(\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}) : \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{v})|_S = 0 &\Rightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{v}) \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку операторы $\mathbb{L}_{u,2}^{(F)}$ и $\mathbb{L}_1^{(G)}$ являются вещественными, то

$$\forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}) : \quad \|\mathbf{u}\| = 1, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle > 0. \quad (38)$$

Оператор $\mathbb{L}_{u,2}^{(F)}$ содержит производные наивысшего порядка, а характерная величина a диссипативных сил относительно упругих является малой, но конечной. Полагаем

$$\begin{aligned} \forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}) : \quad \|\mathbf{u}\| = 1, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0, \quad \|\mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u})\| \gg 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{u,1}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle \right| \ll \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle \approx a \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle, \quad a > 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия (22)–(24), (29), (31), (35), (37), (39). Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} \lambda > -\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, характеристический квазимногочлен $D(\lambda)$ и возмущающие квазимногочлены $Q_{kj}(\lambda)$, $k = \overline{1, N_y}$, $j = \overline{1, N_x}$, — аналитические функции параметра λ .

Доказательство. Достаточно рассмотреть линейную краевую задачу (36), для решения которой при $\lambda \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} \lambda > -\infty$ из $\|\mathbf{u}\| < M < \infty$ следует $\|\mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u})\| \rightarrow \infty$, $\|\mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u})\| \rightarrow \infty$. Как следует из (30), (31), при $\lambda \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} \lambda > -\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}) : \quad \|\mathbf{u}\| = 1, \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u})|_S = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left\| \lambda^2 \mathbf{u} - [\mathbb{L}_{u,1}^{(F)}(\mathbf{u}) - \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) + \lambda(\mathbb{L}_{v,1}^{(F)}(\mathbf{u}) - \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}))] \right\| &\geq \\ \geq \left| \langle \mathbf{u}, \lambda^2 \mathbf{u} - [\mathbb{L}_{u,1}^{(F)}(\mathbf{u}) - \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) + \lambda(\mathbb{L}_{v,1}^{(F)}(\mathbf{u}) - \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}))] \rangle \right| &\geq \\ \geq \frac{1}{2} \left| \lambda^2 + \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle \right| &\geq \frac{1}{4} |P(\lambda)| > 0, \\ P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda a \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle. \end{aligned}$$



поскольку при $a > 0$ корни полинома $P(\lambda)$ второй степени под знаком модуля имеют строго отрицательные вещественные части, т. е. при $\lambda \rightarrow \infty$, $\text{Re } \lambda > -\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$

$$\forall(\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{N_u}) : \quad \mathbb{L}_1^{(G)}(\mathbf{u}) \Big|_S = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \lambda^2 \mathbf{u} - [\mathbb{L}_{u,1}^{(F)}(\mathbf{u}) - \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) + \lambda(\mathbb{L}_{v,1}^{(F)}(\mathbf{u}) - \mathbb{L}_{v,2}^{(F)}(\mathbf{u}))] \right\| \geq \frac{1}{4} |P(\lambda)| \|\mathbf{u}\|, \quad |P(\lambda)| > 0$$

аналог условия (25) выполнен, и согласно теореме 1 $D(\lambda)$ и $Q_{kj}(\lambda)$, $k = \overline{1, N_y}$, $j = \overline{1, N_x}$, будут аналитическими функциями λ при $|\lambda| \gg 1$, $\text{Re } \lambda > -\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. \square

Замечание 1. Если учесть, что, как правило, при $\lambda \rightarrow \infty$ $\langle \mathbf{u}, \mathbb{L}_{u,2}^{(F)}(\mathbf{u}) \rangle \rightarrow \infty$, то оба корня полинома $P(\lambda)$ будут вещественные строго отрицательные, причем ближайший к точке $\lambda = 0$ корень $\approx 1/a$. В этом случае при $\lambda \rightarrow \infty$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$, $|P(\lambda)| \geq |\lambda|^2 \cos^2 \alpha$, и, следовательно, характеристический квазимногочлен $D(\lambda)$ и возмущающие квазимногочлены $Q_{kj}(\lambda)$, $k = \overline{1, N_y}$, $j = \overline{1, N_x}$, будут аналитическими функциями λ при $|\lambda| \gg 1$, $0 < \alpha < \pi/2$, $\text{Re } \lambda > -|\lambda| \sin \alpha$.

5. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ

В качестве примера применения теоремы 3 можно привести нелинейную комбинированную динамическую модель цилиндрического гидродинамического подвеса

$$\pi\beta \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) \ddot{\mathbf{y}} = \pi \left(\frac{\rho_2}{\rho} - 1 \right) \gamma(\mathbf{g} - \mathbf{a}) + \mathbf{N}, \quad \pi \frac{\rho_2}{\rho} J \dot{\omega} = -\frac{\beta}{\sigma} G, \quad \mathbf{g} = (0, -1)^T,$$

$$h(\varphi, t) = 1 - \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \frac{1}{2} \beta (\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2, \quad p = p(0, \varphi, t) + \beta \int_0^\xi (v_\varphi^2 + 2v_\varphi) d\xi,$$

$$v_r = -(1 - \beta\xi) \int_0^\xi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} d\xi, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^h v_\varphi d\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi} [(1 + \beta h)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)],$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + [1 + (1 - \beta\xi)v_\varphi] \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta v_r (2 + v_\varphi) =$$

$$= -(1 - \beta\xi) \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \xi} + \beta^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} \right),$$

$$v_\varphi(0, \varphi, t) = -\omega, \quad v_\varphi(h, \varphi, t) = \beta(\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_r - \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{e}_\varphi),$$

$$\mathbf{N} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\beta}{\sigma} \frac{\partial v_\varphi(0, \varphi, t)}{\partial \xi} - \frac{\partial p(0, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\varphi d\varphi, \quad G = 2\pi\beta\omega + \int_0^{2\pi} \frac{\partial v_\varphi(0, \varphi, t)}{\partial \xi} d\varphi,$$

$$\mathbf{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T, \quad \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)^T,$$

отличающуюся от [4] лишь малым слагаемым $\beta^2 \partial^2 v_\varphi / \partial \varphi^2$ в укороченном уравнении Навье – Стокса. Здесь $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ – координаты центра масс внутреннего тела, $\mathbf{r} = (\xi, \varphi)^T$ – безразмерные радиальная координата и полярный угол (независимые пространственные координаты), v_r , v_φ , p – безразмерные радиальная, тангенциальная компоненты скорости и давление в поддерживающем слое соответственно. Выбор безразмерных переменных и параметров обоснован в [4]. Теорема 3 гарантирует для математической модели (40) аналитичность в высокочастотной области характеристического и возмущающих квазимногочленов (вычисляются аналогично [4]). Если учесть, что в соответствии с [4] для линеаризованных уравнений возмущенного движения в изображениях Лапласа в силу периодичности решения по координате φ при $\lambda \rightarrow \infty$, $\text{Re } \lambda > -\infty$, в пределах пограничных слоев $|\partial v_\varphi / \partial \xi| \gg |\partial v_\varphi / \partial \varphi|$, то становится обоснованным применение теоремы 3 к математической модели [4]. Детальное исследование устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса на основе критерия устойчивости (14) ранее было выполнено в [4]. Равновесное состояние моделировалось на основе проекционного метода Галеркина в форме (15)–(17), в низкочастотной области численное решение вспомогательных линейных краевых задач было реализовано на основе проекционного метода Галеркина (18), (19), а в высокочастотной области применялось асимптотическое интегрирование на основе метода сращиваемых разложений.



В качестве примера применения теоремы 4 можно привести статью [5], где исследована устойчивость и выполнен параметрический синтез системы угловой стабилизации подвижного объекта управления. После приведения к безразмерным переменным и параметрам линеаризованные модельные уравнения движения КДС принимают вид [5]

$$\begin{aligned}
 J_0 \ddot{\beta}_0 &= -p_1 \dot{\beta}_0 - p_2 \beta_0 + \mathbb{S}(\beta_1 + \beta_2), & m_1 \ddot{y}_1 &= (1 + m_1 + m_2) \beta_0 + P_1 - F_e, \\
 J_0 \ddot{\beta}_0 + J_1 \ddot{\beta}_1 &= M_1, & m_2 [(1 + a) \dot{\beta}_1 + \dot{y}_1 + \dot{y}_2] &= P_2 + a_x m_2 \beta_2, \\
 J_2 (\ddot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_2) &= M_2 - a P_2, & \mathbb{S}(\cdot) &= p_3 d(\cdot)/dt + p_4 \cdot (\cdot) + p_5 \int_0^t (\cdot) dt, \\
 \ddot{u} + u'''' + \gamma \dot{u}'''' + a_x [(m_2 + (1 - x)) u']' &= -\dot{y}_1 - x \ddot{\beta}_1, & (\cdot)' &= \partial(\cdot)/\partial x, \\
 u(0, t) = 0, & u'(0, t) = 0, & u(1, t) = y_2(t), & u'(1, t) = \beta_2(t), \\
 M_1 = u''(0, t) + \gamma \dot{u}''(0, t), & P_1 = -u'''(0, t) - \gamma \dot{u}'''(0, t), \\
 M_2 = -u''(1, t) - \gamma \dot{u}''(1, t), & P_2 = u'''(1, t) + \gamma \dot{u}'''(1, t), \\
 \beta_0(0) = \beta_1(0) = \beta_2(0) = \dot{\beta}_0(0) = \dot{\beta}_1(0) = \dot{\beta}_2(0) = y_1(0) = y_2(0) = \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0, \\
 u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Здесь выходная вектор-функция $\mathbf{y}(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))^T$ характеризует ошибки системы стабилизации, а параметры обратных связей $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^T$ требуется выбрать так, чтобы наиболее эффективно подавлять ошибку системы стабилизации. Для математической модели (41) аналитичность в высокочастотной области характеристического и возмущающих квазимногочленов (см. [5]) гарантируется теоремой 4. Численное решение вспомогательных краевых задач в низкочастотной области выполнялось на основе проекционного метода Галеркина (18), (19), а в высокочастотной области применялось асимптотическое интегрирование на основе ВКБ-приближения. При этом проверка устойчивости на основе (14) выполнялась настолько быстро, что это не препятствовало распараллеливанию параметрического синтеза [5] на основе классических технологий параллельного программирования OpenMP и MPI.

Аналогичный подход ранее использован в [6], где аналитичность в высокочастотной области характеристического и возмущающих квазимногочленов также гарантируется теоремой 4, а дальнейшее распараллеливание параметрического синтеза семейства линеаризованных КДС в [7] выполнялось на основе стандартных средств технологии параллельного программирования Microsoft Concurrency Runtime.

Библиографический список

1. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории комбинированных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 54–69.
2. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем : учеб. пособие. Саратов : Райт-Экспо, 2013. 144 с.
3. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М. : Высш. шк., 1982. 271 с.
4. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П. К теории устойчивости цилиндрического гидродинамического подвеса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 1. С. 13–26.
5. Андрейченко Д. К., Ерофтиев А. А., Мельничук Д. В. Распараллеливание параметрического синтеза по схеме «Портфель задач» на основе технологии MPI // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 222–228. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-222-228.
6. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В. К теории устойчивости автономной системы угловой стабилизации реактивного снаряда залпового огня // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 9–14.
7. Андрейченко Д. К., Андрейченко К. П., Кононов В. В. Параллельный алгоритм вычисления оптимальных параметров одноканальной системы угловой стабилизации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 109–117.



Analyticity Conditions of Characteristic and Disturbing Quasipolynomials of Hybrid Dynamical Systems

M. S. Portenko¹, D. V. Melnichuk², D. K. Andreichenko³

¹Marina S. Portenko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, msporkenko@gmail.com

²Dmitry V. Melnichuk, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, meldm007@gmail.com

³Dmitry K. Andreichenko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, kp_andreichenko@renet.ru

Hybrid dynamical systems (HDS) are connected by means of the boundary conditions and the constraint's conditions systems of ordinary differential equations and partial differential equations with the corresponding initial conditions. Check the stability of HDS can be performed on the basis of the "fast" algorithm for the application which requires analytic characteristic and disturbing quasipolynomials of HDS in the right half-plane and near the imaginary axis. In this paper we formulate and prove the analyticity conditions of the characteristic and disturbing HDS quasipolynomials. Mathematical models of control objects with distributed parameters in space, matching the thermal conductivity and diffusion processes, the dynamics of support layers of viscous incompressible fluid, as well as the dynamics of the elastically deformable medium taking into account the internal friction.

Key words: hybrid dynamical systems, stability.

References

1. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of hybrid dynamical systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2000, vol. 39, no 3, pp. 383–398.
2. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. *Modelirovanie, analiz i sintez kombinirovannykh dinamicheskikh sistem. Uchebnoe posobie* [Modeling, analysis and synthesis of combined dynamical systems. Tutorial]. Saratov, Rait-Ekspo, 2013, 144 p. (in Russian).
3. Liusternik L. A., Sobolev V. I. *Kratkii kurs funktsional'nogo analiza* [A short course of functional analysis]. Moscow, Vysshaia shkola, 1982, 271 p. (in Russian).
4. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of stability of a cylindrical hydrodynamic suspension. *Fluid Dynamics*, 2009, vol. 44, no 1, pp. 10–21.
5. Andreichenko D. K., Eroftiev A. A., Melnichuk D. V. Parallelization of parametric synthesis by "problems portfolio" scheme based on MPI technology. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 222–228 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-222-228.
6. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. On stability theory of autonomous angular stabilization system for combined dynamical systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 2, pp. 9–14 (in Russian).
7. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. Parallel algorithm of optimal parameters calculation for the single channel angular stabilization system. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 4, pt. 1, pp. 109–117 (in Russian).

УДК 519.72

О ПРИМЕНЕНИИ ВЕЙВЛЕТОВ К ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Е. А. Родионов

Родионов Евгений Анатольевич, аспирант кафедры математики, Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе, Москва, evgeny_980@list.ru

Дискретное вейвлет-преобразование, ассоциированное с функциями Уолша, определено Лэнгом (W. C. Lang) в 1998 г. В статье излагаются применения преобразования Лэнга и некоторых его модификаций для анализа финансовых временных рядов и для сжатия фрактальных данных. Показано, что для обработки некоторых сигналов изучаемые дискретные вейвлет-преобразования имеют преимущества по сравнению с дискретными преобразованиями Хаара, Добеши и методом зонного кодирования.

Ключевые слова: цифровая обработка сигналов, вейвлеты, функции Уолша, финансовые временные ряды.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-217-225



ВВЕДЕНИЕ

Применениям непрерывного и дискретного вейвлет-преобразований для прогнозирования временных рядов и для обработки сигналов посвящены многочисленные публикации (см., например, библиографию в монографиях [1–3]). С другой стороны, хорошо известны (см., например, [4, 5]) применения дискретных преобразований Уолша и их обобщений к цифровой обработке информации, кодированию изображений, исследованию случайных процессов, анализу динамики линейных и нелинейных систем, разработке систем оптимального управления, а также при построении многоканальных систем связи и в голографии. Дискретное вейвлет-преобразование, определяемое с помощью функций Уолша (ДВПУ), было введено Лэнгом [6], а его обобщение на биортогональный случай изучалось Ю. А. Фарковым, А. Ю. Максимовым и С. А. Строгановым [7] (см. также [8]). В работе [7] показано, что для обработки некоторых изображений ассоциированное с функциями Уолша биортогональное дискретное вейвлет-преобразование имеет преимущества по сравнению с дискретными преобразованиями, определяемыми по вейвлетам Хаара и Добеши (сравните с [9, табл. 6.6.1]). Нестационарное и периодическое дискретные вейвлет-преобразования изучались в работах [10–12] (эти преобразования будут обозначаться через НДВП и ПДВП соответственно). Прогностические свойства вейвлет-преобразований при оценке гладкости сейсмических сигналов исследовались в работах [13–15], причем в работах [14, 15] наряду с вейвлетами Добеши применялись вейвелеты Лэнга. Для выявления предвестниковых эффектов землетрясений можно применить вейвлет-агрегированные сигналы [16, гл. 3], построенные с помощью функций Уолша.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — положительная полупрямая, \mathbb{Z}_+ — множество целых неотрицательных чисел. Зафиксируем целое $p \geq 2$ и для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ найдем числа $x_j, x_{-j} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ такие, что верно разложение

$$\sum_{j < 0} x_{-j} p^{-j-1} + \sum_{j > 0} x_j p^{-j}$$

(в случае p -ично рационального x берется разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Обобщенные функции Уолша на полупрямой \mathbb{R}_+ определяются по формуле

$$w_k(x) = \chi(k, x), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где χ — функция двух переменных, заданная равенством

$$\chi(x, y) = \exp \left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j=1}^{\infty} (x_j y_{-j} + x_{-j} y_j) \right).$$

При $p = 2$ получаются классические функции Уолша (см. [4]).

Для любых $x, y \in \mathbb{R}_+$, цифры p -ичного разложения числа $z = x \ominus y$ определяются по формуле

$$z_j = \begin{cases} x_j - y_j, & \text{если } x_j \geq y_j, \\ p + x_j - y_j, & \text{если } x_j < y_j. \end{cases}$$

Число $x \ominus y$ называют p -ичной разностью чисел x и y .

Для фиксированного целого $n \geq 2$ положим $N = p^n$ и $N_1 = N/p$. Масштабирующее уравнение вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(0)} \varphi(px \ominus k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

и его аналоги для групп Кантора и Виленкина играют важную роль при построении вейвлетов в анализе Уолша. Предположим, что коэффициенты уравнения (1) вычислены по формулам

$$c_k^{(0)} = \frac{1}{N_1} \sum_{l=0}^{N-1} b_l^{(0)} w_l(k/N), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (2)$$

где коэффициенты $b_l^{(0)}$ удовлетворяют условию

$$|b_l^{(0)}|^2 + |b_{l+N_1}^{(0)}|^2 + \dots + |b_{l+(p-1)N_1}^{(0)}|^2 = 1, \quad 0 \leq l \leq N_1 - 1. \quad (3)$$



При некоторых дополнительных условиях из таких наборов чисел конструируются ортогональные вейвлеты и жесткие фреймы в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (см. [17]). Метод построения вейвлет-базиса в пространстве периодических последовательностей по произвольным числам $b_l^{(0)}$, удовлетворяющим требованию (3), изложен в [18].

Дискретное вейвлет-преобразование, ассоциированное с обобщенными функциями Уолша (ДВПОУ), определяется формулами

$$a_{j-1,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \overline{c_{l \ominus pk}^{(0)}} a_{j,l}, \quad d_{j-1,k}^{(1)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \overline{c_{l \ominus pk}^{(1)}} a_{j,l}, \quad \dots, \quad d_{j-1,k}^{(p-1)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \overline{c_{l \ominus pk}^{(p-1)}} a_{j,l}. \quad (4)$$

Формула обращения этого преобразования имеет вид

$$a_{j,l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_{l \ominus pk}^{(0)} a_{j-1,k} + c_{l \ominus pk}^{(1)} d_{j-1,k}^{(1)} + \dots + c_{l \ominus pk}^{(p-1)} d_{j-1,k}^{(p-1)}. \quad (5)$$

Для того чтобы определить коэффициенты $c_l^{(s)}$, $s = 1, \dots, p-1$, в равенствах (4) и (5), необходимо найти коэффициенты $b_l^{(s)}$, $l = 0, \dots, N-1$, такие, чтобы матрицы

$$\begin{pmatrix} b_l^{(0)} & b_{l+N}^{(0)} & \dots & b_{l+(p-1)N_1}^{(0)} \\ b_l^{(1)} & b_{l+N_1}^{(1)} & \dots & b_{l+(p-1)N_1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_l^{(p-1)} & b_{l+N_1}^{(p-1)} & \dots & b_{l+(p-1)N_1}^{(p-1)} \end{pmatrix}, \quad l = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \quad (6)$$

были унитарными. Один из методов решения этой задачи расширения матрицы по первой строке изложен в [19] (см. также [20, с. 123], [21]). Коэффициенты $c_l^{(s)}$ в (4) и (5) выражаются через параметры $b_l^{(s)}$ по формулам

$$c_k^{(s)} = \frac{1}{N_1} \sum_{l=0}^{N-1} b_l^{(s)} w_l(k/N), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad 1 \leq s \leq p-1.$$

В частности, упомянутое выше преобразование ДВПУ получается при $p = 2$ и $c_k^{(1)} = (-1)^k c_k^{(0)}$ (соответствующие ортогональные вейвлеты называют [22] диадическими вейвлетами или вейвлетами Лэнга).

В п. 1 показано, что в методе анализа финансовых временных рядов, использованном в [23], вместо вейвлетов Добеши можно использовать вейвлеты Лэнга. При сжатии информации с помощью ортогональных преобразований методом зонного кодирования использование дискретного мультипликативного преобразования во многих случаях дает более точное восстановление, чем применение дискретного преобразования Фурье (см. [4, § 11.3]). В п. 2 в дополнение к результатам из [10, 12] показано, что метод кодирования фрактальных сигналов с помощью ДВПОУ имеет преимущества по сравнению с методом зонного кодирования. Кроме того, в п. 2 изложены некоторые результаты о применениях НДВП и ПДВП для сжатия данных фрактального характера.

1. АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В работе [23] для оценки близости курсов валют применялись меры близости, основанные на дискретном вейвлет-преобразовании Добеши. Рассматривались валютные курсы 29 стран относительно американского доллара за период с 26.02.1991 по 31.12.1998. Данные валютных курсов взяты с сайта Federal Reserve Statistical Release, USA. Две меры близости между временными рядами x и y вычисляются по формулам:

$$D_1(x, y) = -\ln \left(\left| \sum_{j,k} \tilde{d}_{j,k}^{(x)} \tilde{d}_{j,k}^{(y)} \right| \right), \quad D_2(x, y) = 1 - \left| \sum_{j,k} \tilde{d}_{j,k}^{(x)} \tilde{d}_{j,k}^{(y)} \right|,$$

где

$$\tilde{d}_{j,k}^{(z)} = \frac{d_{j,k}^{(z)} 2^j}{\sqrt{\sum_{j,k} (d_{j,k}^{(z)} 2^j)^2}}$$



и $d_{j,k}^{(z)}$ — детализирующие вейвлет-коэффициенты для ряда z , из которого удален линейный тренд.

В проведенном эксперименте для тех же данных мы использовали диадические вейвлеты при $n = 2$ и $b_0^{(0)} = 1$. Результаты эксперимента для $b_3^{(0)} = 0.5$ приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Значения меры близости D_1 на основе вейвлета Лэнга,

$$n = 3, b_0^{(0)} = 1, b_3^{(0)} = 0.5$$

Название	D_1	Название	D_1
Belgium, Franc	0.0195	Spain, Peseta	0.5095
Austria, Shilling	0.0266	South Korea, Won	0.5125
Germany, Deutsche marka	0.0267	Finland, Markka	0.5216
Denmark, Krone	0.0284	Japan, Yen	0.5221
Netherlands, Guilder	0.0292	Ireland, Pound	0.5238
France, Franc	0.0301	Thailand, Baht	0.5244
Sri Lanka, Rupee	0.1271	Malaysia, Ringgit	0.6964
Norway, Krone	0.2227	Australia, Dollar	0.7059
Singapore, Dollar	0.2571	Sweden, Krone	0.9392
Portugual, Escudo	0.2704	India, Rupee	1.1141
China, Yuan	0.3325	Hong-Kong, Dollar	1.5005
New Zealand, Dollar	0.3557	Canada, Dollar	1.5307
Greece, Drachma	0.3749	Italy, Lira	1.9648
South Africa, Rand	0.4784	UK, Pound	2.1473

Таблица 2

Значения меры близости D_2 на основе вейвлета Лэнга,

$$n = 3, b_0^{(0)} = 1, b_3^{(0)} = 0.5$$

Название	D_2	Название	D_2
Germany, Deutsche marka	0.2638	UK, Pound	0.7149
Netherlands, Guilder	0.2689	South Africa, Rand	1.1065
Belgium, Franc	0.2767	Japan, Yen	1.1244
France, Franc	0.2857	Singapore, Dollar	1.2125
Austria, Shilling	0.3002	Thailand, Baht	1.4447
Denmark, Krone	0.3202	Malaysia, Ringgit	1.6362
Portugual, Escudo	0.3586	New Zealand, Dollar	1.9323
Greece, Drachma	0.4222	Hong-Kong, Dollar	2.1504
Norway, Krone	0.4297	China, Yuan	2.5167
Spain, Peseta	0.4297	Sri Lanka, Rupee	2.5988
Finland, Markka	0.495	Australia, Dollar	3.433
Ireland, Pound	0.5046	India, Rupee	3.433
Italy, Lira	0.5927	Canada, Dollar	3.885
Sweden, Krone	0.6815	South Korea, Won	5.8309

Из табл. 1 и 2 следует, что в обоих случаях на первые 6 мест попадают валютные курсы следующих стран: Нидерланды, Германия, Австрия, Бельгия, Франция и Дания. Курсы этих же шести стран попадают на первые 6 мест при любом значении параметра $b_3^{(0)}$ от 0 до 0.9 на сетке с шагом 0.1.

В случае построения мер близости на основе вейвлета Добеши с четырьмя коэффициентами наиболее «близкими» к швейцарскому франку снова оказываются курсы тех же шести стран. А при использовании D_2 (табл. 3) расположение валютных курсов с незначительными изменениями повторяют расположение курсов при применении диадического вейвлета.



Таблица 3

Значения меры близости D_2 на основе вейвлета Добеши с 4-я коэффициентами

Название	D_2	Название	D_2
Germany, Deutsche marka	0.2872	UK, Pound	0.7526
Netherlands, Guilder	0.2998	Japan, Yen	1.0505
Belgium, Franc	0.3247	South Africa, Rand	1.1236
France, Franc	0.3343	Singapore, Dollar	1.3605
Austria, Shilling	0.3419	Thailand, Baht	1.3997
Denmark, Krone	0.3454	Malaysia, Ringgit	1.6741
Portugual, Escudo	0.3983	New Zealand, Dollar	2.3994
Greece, Drachma	0.4442	Hong-Kong, Dollar	2.5023
Norway, Krone	0.4527	China, Yuan	2.7090
Spain, Peseta	0.4699	Sri Lanka, Rupee	2.8185
Finland, Markka	0.5284	South Korea, Won	3.7642
Ireland, Pound	0.5487	Canada, Dollar	4.5233
Italy, Lira	0.6305	Australia, Dollar	5.3117
Sweden, Krone	0.6976	India, Rupee	7.6143

Эти результаты подтверждаются результатами кластерного анализа. Применялись агломеративный и дивизивный методы кластеризации. При этом расстояние между элементами вычислялось по формуле:

$$sr(x, y) = 1 - \frac{\sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_k (x_k - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_k (y_k - \bar{y})^2}},$$

где в правой части фигурирует коэффициент корреляции [23]. Отметим, что во всех проведенных экспериментах курсы валют тех же шести стран (помимо Швейцарии): Нидерландов, Германии, Австрии, Бельгии, Франции и Дании не только попадали в один кластер, но и целиком образовывали его. Этот результат был представлен на 18-й международной Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» [24].

2. СЖАТИЕ ДАННЫХ

В работах [10] и [12] конструкции вейвлетов, определяемых с помощью функций Уолша, применялись к сжатию фрактальных функций. Метод сжатия, применяемый в этих работах, аналогичен методу из [9, § 6.6] и состоит в следующем. К массиву значений выбранной функции применялось дискретное вейвлет-преобразование с использованием того или иного вейвлет-базиса, далее обнулялся определенный процент минимальных по модулю вейвлет-коэффициентов, и к новому массиву применялось обратное вейвлет-преобразование, затем подсчитывалась среднеквадратичная ошибка между полученным массивом и первоначальным. В случае, когда вместо среднеквадратичной ошибки шаг, связанный с обнулением вейвлет-коэффициентов, заменялся равномерным квантованием, на последнем шаге считалась энтропия Шеннона.

В качестве фрактальных функций выбирались функции Шварца, Такаги, Ван-дер-Вардена, Римана и Вейерштрасса. Напомним определения этих функций:

$$\mathcal{S}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(2^k x)}{4^k} \text{ — функция Шварца, где } h(x) = [x] - \sqrt{x - [x]};$$

$$\mathcal{T}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_0(2^{k-1} x)}{2^k} \text{ — функция Такаги, где } t_0 = 2|x - [x + 1/2]|;$$

$$\mathcal{V}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_0(4^k x)}{4^k} \text{ — функция Ван-дер-Вардена, где } f_0(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1/2), \\ 1 - x, & x \in [1/2, 1] \end{cases} \text{ и } f_0(x + 1) = f_0(x);$$



$$\mathcal{R}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 \pi x)}{k^2} - \text{функция Римана};$$

$$\mathcal{W}_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k \pi x) - \text{функция Вейерштрасса, где } 0 < \alpha < 1, \beta \geq 1/\alpha.$$

В работе [12] показано, что ПДВП с оптимальными значениями используемого авторами параметра в ряде случаев дают лучший результат, чем вейлеты Хаара и Добеши.

В работе [10] для $p = n = 2$ применялась конструкция нестационарных вейвлетов. В этом случае прямое и обратное НДВП определяются формулами

$$a_{j-1, k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \overline{c_{l \ominus 2k}^{(0)}(j)} a_{j, l}, \quad d_{j-1, k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} \overline{c_{l \ominus 2k}^{(1)}(j)} a_{j, l},$$

$$a_{j, l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} c_{l \ominus 2k}^{(0)}(j) a_{j-1, l} + c_{l \ominus 2k}^{(1)}(j) d_{j-1, l}.$$

По аналогии с [25] на каждом уровне аппроксимации решалась оптимизационная задача:

$$\langle Fc^{(0)}(j), c^{(0)}(j) \rangle \xrightarrow{c^{(0)}(j)} \max,$$

где $c^{(0)}(j)$ — вектор коэффициентов масштабирующего уравнения на j -м уровне разложения, а матрица F задается равенством

$$F_{s, k} = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} a_{j, 2m \ominus s} a_{j, 2m \ominus k}.$$

Сравнение проводилось с результатами, полученными при помощи вейвлетов Хаара, Добеши, а также при помощи вейвлетов, основанных на адаптивном КМА на базе вейвлетов Добеши [25]. Согласно [10] результаты, полученные при помощи НДВП, превосходят аналогичные результаты, полученные при помощи вейвлетов Хаара и Добеши.

Приведем теперь сравнение результатов сжатия фрактальных функций при помощи ДВПОУ (см. (4), (5)) и методом зонного кодирования. Для произвольного комплекснозначного вектора x длины $M = p^m$ прямое и обратное дискретные мультипликативные преобразования (ПДМП и ОДМП) определяются (см. [4, с. 256]) формулами

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x(j) \overline{w_j(k/M)}, \quad x(j) = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}(k) w_k(j/M). \quad (7)$$

Вариант *метода зонного кодирования*, использованный в [4, с. 274], состоит в применении ПДМП к вектору x с последующим обнулением у вектора \hat{x} последних $p^m - p^{m-1}$ компонент: $\hat{x}(p^{m-1}), \hat{x}(p^{m-1} + 1), \dots, \hat{x}(p^m - 1)$. Затем после применения ОДМП получается вектор \tilde{x} . Погрешность восстановления будем оценивать величиной $\delta = \|x - \tilde{x}\|_2 / \sqrt{M}$. В данной работе мы сравниваем этот метод зонного кодирования (обозначим его Zp) с аналогичными методами, основанными на ДВПУ.

При проведении вычислительных экспериментов с фрактальными функциями мы будем сравнивать определенные выше дискретные вейвлет-преобразования не только с методом зонного кодирования, но также и с дискретными вейвлет-преобразованиями Хаара с коэффициентами сжатия 2 и 3. Для коэффициента сжатия 2 дискретное преобразование Хаара хорошо известно и определено, например, в [9, § 5.6]. В случае коэффициента сжатия, равного 3, дискретное преобразование Хаара реализуется по формулам

$$a_{j-1, k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{c_{l-3k}^{(0)}} a_{j-1, l}, \quad d_{j-1, k}^{(1)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{c_{l-3k}^{(1)}} a_{j, l}, \quad d_{j-1, k}^{(2)} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{c_{l-3k}^{(2)}} a_{j, l},$$

$$a_{j, l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (c_{l-3k}^{(0)} a_{j-1, k} + c_{l-3k}^{(1)} d_{j-1, k}^{(1)} + c_{l-3k}^{(2)} d_{j-1, k}^{(2)}),$$

где $c_0^{(0)} = c_1^{(0)} = c_2^{(0)} = c_0^{(1)} = c_0^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \varepsilon_3, c_2^{(2)} = c_1^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \varepsilon_3^2, \varepsilon_3 = \exp(2\pi i/3)$.



Эти формулы следуют из известного выражения вейвлетов Хаара через масштабирующую функцию для случая $p = 3$ (см., например, [26, с. 315]).

Для $p = 2$ и $p = 3$ обозначим через H_p метод сжатия при помощи соответствующих вейвлетов Хаара. При фиксированных p и n будем обозначать через $O(p, n)$ метод сжатия с использованием ДВПОУ, определяемого по формулам (4), (5).

Обобщенная функция Вейерштрасса определяется равенством

$$\widetilde{W}_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k e^{\beta^k \pi i x},$$

где $0 < \alpha < 1$, $\beta \geq 1/\alpha$.

В табл. 4 и 5 приведены погрешности восстановления массивов определенных выше функций с помощью описанных методов, а также с использованием вейвлет-базиса Хаара. В качестве исходных массивов данных выбирались 256 (в случае $p = 2$) и 243 (в случае $p = 3$) значений фрактальных функций. Для функций Шварца и Такаги в качестве интервала разбиения выбирался промежуток $[0, 1)$, для функции Ван-дер-Вардена использовался промежуток $[0, 0.25)$, а для функций Римана, Вейерштрасса и обобщенной функции Вейерштрасса был выбран промежуток $[0, 2)$. Из этих таблиц видно, что дискретные вейвлет-преобразования, определяемые по функциям Уолша, дают результаты лучше, чем метод зонного кодирования.

Таблица 4

Значения погрешности для $p = 2$

Функция	Z2	H2	O(2, 2)	O(2, 3)
\mathcal{S}	0.0030	0.0016	0.0009	0.0009
\mathcal{T}	0.0055	0.0037	0.0015	0.0015
\mathcal{V}	0.0010	0.0007	0.0005	0.0005
\mathcal{R}	0.0295	0.0179	0.0165	0.0162
$\widetilde{W}_{0.6,9}$	0.2503	0.1133	0.1091	0.1072
$\widetilde{W}_{0.8,5}$	0.5225	0.2315	0.2117	0.2097
$\widetilde{W}_{0.8,7}$	0.5779	0.2313	0.2069	0.1534
$\widetilde{W}_{0.9,7}$	1.0136	0.3291	0.2489	0.2244

Таблица 5

Значения погрешности для $p = 3$

Функция	Z3	H3	O(3, 1)	O(3, 2)
$\widetilde{W}_{0.6,9}$	0.3774	0.2835	0.2068	0.1310
$\widetilde{W}_{0.8,6}$	0.6660	0.5393	0.4826	0.4629
$\widetilde{W}_{0.8,9}$	0.6572	0.4599	0.3448	0.2934
$\widetilde{W}_{0.9,4}$	1.3786	0.9706	0.8763	0.8269

Библиографический список

1. Короновский А. А., Храмов А. Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М : Физматлит, 2003. 176 с.
2. Percival D., Walden A. Wavelet Methods for Time Series Analysis. Cambridge : Cambridge University Press, 2000. 611 p.
3. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М : Мир, 2005. 671 с.
4. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения. Изд. 2-е, испр. и доп. М. : Изд-во ЛКИ, 2008. 208 с.
5. Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М. : Наука, 1989. 496 с.
6. Lang W. C. Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. and Math. Sci. 1998. Vol. 21. P. 307–317. DOI: 10.1155/S0161171298000428.



7. Farkov Yu. A., Maksimov A. Yu., Stroganov S. A. On biorthogonal wavelets related to the Walsh functions // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2011. Vol. 9. P. 485–499. DOI: 10.1142/S0219691311004195.
8. Farkov Yu. A., Rodionov E. A. On biorthogonal discrete wavelet bases // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 1, 1550002 (18 p). DOI: 10.1142/S0219691315500022.
9. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М. : Изд-во Триумф, 2003. 320 с.
10. Farkov Yu. A., Rodionov E. A. Nonstationary wavelets related to the Walsh functions // American J. Comput. Math. 2012. Vol. 2, № 2. P. 82–87.
11. Farkov Yu. A. Periodic wavelets in Walsh analysis // Communic. Math. Appl. 2012. Vol. 3, № 3. P. 223–242.
12. Фарков Ю. А., Борисов М. Е. Периодические диадические всплески и кодирование фрактальных функций // Изв. вузов. Математика. 2012. Т. 9. С. 54–65.
13. Любушин А. А. Сейсмическая катастрофа в Японии 11 марта 2011 года. Долгосрочный прогноз по низкочастотным микросейсам // Геофизические процессы и биосфера. 2011. Т. 10, № 1. С. 9–35.
14. Стрганов С. А. Оценка гладкости низкочастотных микросейсмических колебаний с помощью диадических вейвлетов // Геофизические исследования. 2012. Т. 13, № 1. С. 17–22.
15. Любушин А. А., Яковлев П. В., Родионов Е. А. Многомерный анализ параметров флуктуаций GPS сигналов до и после мегаземлетрясения 11 марта 2011 г. в Японии // Геофизические исследования. 2015. Т. 16, № 1. С. 14–23.
16. Любушин А. А. Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга. М. : Наука, 2007. 228 с.
17. Farkov Yu. A. Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincare J. Anal. Appl. 2015. Vol. 2. Special Issue (IWWFA-II, Delhi). P. 13–36.
18. Фарков Ю. А. Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина – Крестенсона // Матем. заметки. 2011. Т. 89, вып. 6. С. 914–928.
19. Farkov Yu. A., Rodionov E. A. Algorithms for Wavelet Construction on Vilenkin Groups // *p*-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. 2011. Vol. 3, № 3. P. 181–195. DOI: 10.1134/S2070046611030022.
20. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. М : Физматлит, 2005. 616 с.
21. Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. Vol. 13, № 5, 1550036 (19 p). DOI: 10.1142/S0219691315500368.
22. Протасов В. Ю., Фарков Ю. А. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. 2006. Т. 197, вып. 10. С. 129–160.
23. Бурнаев Е. В., Оленев Н. Н. Меры близости на основе вейвлет коэффициентов для сравнения статистических и расчетных временных рядов // Межвуз. сб. науч. и науч.-метод. тр. за 2005 г. Киров : Изд-во ВятГУ, 2006. Вып. 10. С. 41–51.
24. Родионов Е. А. О применениях вейвлетов к анализу временных рядов // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Саратов. зим. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С. 232–234.
25. Sendov Bl. Adapted multiresolution analysis // Functions, series, operators (Budapest, 1999) / eds. L. Leinder, F. Schipp, J. Szabados. Budapest : Janos Bolyai Math. Soc., 2002. P. 23–38.
26. Farkov Yu. A. Multiresolution analysis and wavelets on Vilenkin groups // Facta Univ. (Niš), Ser.: Elec. Energ. 2008. Vol. 21, № 3. P. 309–325.

On Applications of Wavelets in Digital Signal Processing

E. A. Rodionov

Evgeny A. Rodionov, Russian State Geological Prospecting University, 23, Mikluho-Maklaya st., 117997, Moscow, Russia, evgeny_980@list.ru

Discrete Wavelet transform associated with the Walsh functions was defined by Lang in 1998. The article describes an application of Lang's transform and some its modifications in analysis of financial time series and for the compression of fractal data. It is shown that for the processing of certain signals the studied discrete wavelet transform has advantages over the discrete transforms Haar, Daubechies and the method of zone coding.

Key words: digital signal processing, wavelets, Walsh functions, financial time series.



References

1. Koronovskii A. A., Khramov A. E. Continuous wavelet analysis and its applications. Moscow, Fizmatlit, 2003, 176 p. (in Russian).
2. Percival D., Walden A. Wavelet Methods for Time Series Analysis. Cambridge : Cambridge University Press, 2000, 611 p.
3. Stephane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing the Sparse Way*. 3rd. edition. Burlington, Elsevier Inc., 2008, 620 p. (Russ. ed. : Malla S. Veivlety v obrabotke signalov. Moscow, Mir, 2005, 671 p.)
4. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh Series and Transforms : Theory and Applications*. Dordrecht; Boston; London, Kluwer Academic Publishers, 368 p. (Russ. ed. : Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. Riady i preobrazovaniia Uolsha : Teoriia i primeneniia. Izd. 2-e, ispr. i dop. Moscow, LKI, 2008, 208 p.)
5. Zalmanzon L. A. *Preobrazovaniia Fur'e, Uolsha, Haara i ih primenenie v upravlenii, sojazi i drugih oblastyah* [Fourier, Walsh and Haar transforms and its application in management, communication and in other areas]. Moscow, Nauka, 1989, 496 p. (in Russian).
6. Lang W. C. Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group. *Intern. J. Math. and Math. Sci.*, 1998, vol. 21, p. 307–317. DOI: 10.1155/S0161171298000428.
7. Farkov Yu. A., Maksimov A. Yu., Stroganov S. A. On biorthogonal wavelets related to the Walsh functions. *Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 2011, vol. 9, pp. 485–499. DOI: 10.1142/S0219691311004195.
8. Farkov Yu. A., Rodionov E. A. On biorthogonal discrete wavelet bases. *Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 2015, vol. 13, no. 1, 1550002, 18 p. DOI: 10.1142/S0219691315500022.
9. Welstead S. *Fractal and Wavelet Image Compression Techniques*. Bellingham, Wash, SPIE Press, 2003, 259 p.
10. Farkov Yu. A., Rodionov E. A. Nonstationary wavelets related to the Walsh functions. *American J. Comput. Math.*, 2012, vol. 2, no. 2, pp. 82–87.
11. Farkov Yu. A. Periodic wavelets in Walsh analysis. *Communic. Math. Appl.*, 2012, vol. 3, no. 3, pp. 223–242.
12. Farkov Yu. A., Borisov M. E. Periodic dyadic wavelets in coding of fractal functions. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 9, no. 56, pp. 46–56. DOI: 10.3103/S1066369X1209006X.
13. Lyubushin A. A. Seismic catastrophe in Japan on March 11, 2011 : Long-term prediction on the basis of low-frequency microseisms. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2011, vol. 47, iss. 8, no. 1, pp. 904–921.
14. Stroganov S. A. Smoothness estimates of low-frequency microseisms using dyadic wavelets. *Geophysical Research*, 2012, vol. 13, no. 1, pp. 17–22 (in Russian).
15. Lyubushin A. A., Jakovlev P. V., Rodionov E. A. Multiple analysis of GPS signal fluctuation parameters before and after the megathquake in Japan on 11 March 2011. *Geophysical Research*, 2015, vol. 16, no. 1, pp. 14–23 (in Russian).
16. Lyubushin A. A. *Analiz dannyh sistem geofizicheskogo i jekologicheskogo monitoringa* [Data analysis systems for geophysical and environmental monitoring]. Moscow, Nauka, 2007, 228 p. (in Russian).
17. Farkov Yu. A. Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis. *Poincare J. Anal. Appl.*, 2015, vol. 2, special issue (IWWFA-II, Delhi), pp. 13–36.
18. Farkov Yu. A. Discrete wavelets and the Vilenkin – Chrestenson transform. *Math. Notes*, 2011, vol. 89, iss. 6, pp. 914–928. DOI: 10.4213/mzm8704.
19. Farkov Yu. A., Rodionov E. A. Algorithms for Wavelet Construction on Vilenkin Groups. *p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl.*, 2011, vol. 3, no. 3, p. 181–195. DOI: 10.1134/S2070046611030022.
20. Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Wavelet Theory*. AMS, Translations Mathematical Monographs, 2011, vol. 239, 506 p. (Russ. ed. : Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. Teoriia vspleskov. Moscow, Fizmatlit, 2005, 616 p.).
21. Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties. *Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 2015, vol. 13, no. 5, 1550036, 19 p. DOI: 10.1142/S0219691315500368.
22. Protasov V. Yu., Farkov Yu. A. Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 10, pp. 1529–1558. DOI: 10.1070/SM2006v197n10ABEH003811.
23. Burnaev E. V., Olenev N. N. Mery blizosti na osnove veivlet koefitsientov dlja sravneniia statisticheskikh i raschetnyh vremennyh ryadov [Proximity measures of the wavelet coefficients for comparison of statistical and computational time series]. *Mezhvuz. sb. nauch. i nauch.-metod. tr. za 2015 g.*, Kirov, Izd-vo VyatGU, 2006, iss. 10, pp. 41–51 (in Russian).
24. Rodionov E. A. O primeneniiah veivletov k analizu vremennyh ryadov [On applications of wavelets to analysis of time series]. *Sovremennye problemy teorii funktsij i ih prilozhenija : Materialy 18-j mezhdunarodnoj Saratovskoj zimnej shkoly* [Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications. Proc. 18th Intern. Saratov Winter School], Saratov, Izd-vo "Nauchnaia kniga", 2016, pp. 232–234 (in Russian).
25. Sendov Bl. Adapted multiresolution analysis. *Functions, series, operators (Budapest, 1999)* / eds. L. Leinder, F. Schipp, J. Szabados; Budapest, Janos Bolyai Math. Soc., 2002, pp. 23–38.
26. Farkov Yu. A. Multiresolution analysis and wavelets on Vilenkin groups. *Facta Univ. (Nis), Ser.: Elec. Energ.*, 2008, vol. 21, no. 3, pp. 309–325.



УДК 519.17

МНОГОУГОЛЬНЫЕ ГРАФЫ КАК УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА: КРИТЕРИЙ ШПЕРНЕРОВОСТИ

В. Н. Салий

Салий Вячеслав Николаевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, SaliiVN@info.sgu.ru

Конечное упорядоченное множество называется шпернеровым, если среди его максимальных по длине антицепей хотя бы одна составлена из элементов одинаковой высоты. Под многоугольным графом понимается бесконтурный граф, полученный из цикла путем некоторой ориентации его ребер. В многоугольном графе отношение достижимости вершин является отношением порядка. Таким образом, многоугольный граф можно рассматривать как упорядоченное множество. Найденны необходимые и достаточные условия шпернеровости таких упорядоченных множеств.

Ключевые слова: упорядоченное множество, шпернерово свойство, многоугольный граф, цепь, зигзаг.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-226-231

1. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Упорядоченным множеством называется пара (A, ω) , где A — непустое множество и $\omega \subseteq A \times A$ — отношение порядка на нем, т. е. тождественно выполняются условия 1) $(x, x) \in \omega$ (рефлексивность), 2) $(x, y) \in \omega \ \& \ (y, x) \in \omega \implies x = y$ (антисимметричность), 3) $(x, y) \in \omega \ \& \ (y, z) \in \omega \implies (x, z) \in \omega$ (транзитивность).

Стандартными примерами являются (\mathbf{N}, \leq) — множество натуральных чисел с естественным порядком; $(\mathbf{N}, |)$ — то же множество с отношением делимости натуральных чисел: $m|n$ означает, что m делит n ; $(P(S), \subseteq)$ — совокупность всех подмножеств множества S с теоретико-множественным включением.

Далее для $x, y \in A$ вместо $(x, y) \in \omega$ будем писать $x \leq y$. Запись $x \leq y$ имеет эквивалентную форму $y \geq x$. Если $x \leq y$ и $x \neq y$, пишут $x < y$ (строгое неравенство) и соответственно $y > x$.

Пусть (A, \leq) — конечное (т. е. с конечным A) упорядоченное множество. Убывающей цепью в нем называется последовательность вида $x_1 > x_2 > \dots > x_k$. Под длиной такой цепи понимается количество «звеньев» в ней, т. е. число $k - 1$. Говорят, что элемент x является нижним соседом для y или что x непосредственно предшествует y , если $x < y$ и не существует $z \in A$ такого, что $x < z < y$. Элемент $a \in A$ по определению является минимальным (максимальным) в (A, \leq) , если в (A, \leq) нет такого x , что $x < a$ (соответственно $x > a$). Высота $h(a)$ элемента a в (A, \leq) определяется как максимальная из длин убывающих цепей, начинающихся с a . Например, для всех минимальных элементов x из A будет $h(x) = 0$. Наибольшая из высот элементов конечного упорядоченного множества называется его длиной. Например, если \mathbf{N}_8 — первые 8 натуральных чисел, то длина упорядоченного множества (\mathbf{N}_8, \leq) равна 7, для $(\mathbf{N}_8, |)$ получаем длину 3, для $(P(S), \subseteq)$ длина равна $|S|$ — количеству элементов в S .

Для наглядного представления конечных упорядоченных множеств используют так называемые диаграммы Хассе. Если длина упорядоченного множества (A, \leq) равна l , то на $l + 1$ горизонталях, пронумерованных снизу вверх числами $0, 1, \dots, l$, располагают элементы множества A в соответствии с их высотой в (A, \leq) . Затем, двигаясь снизу вверх, каждый элемент соединяют прямолинейными отрезками со всеми его нижними соседями. Полученный рисунок (горизонталы не изображают) и есть диаграмма для (A, \leq) . На рис. 1 приведены диаграммы упорядоченных множеств $(\mathbf{N}_8, |)$ и $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

Элементы $x, y \in A$ называются сравнимыми в (A, \leq) , если $x \leq y$ или $y \leq x$ и несравнимыми в противном случае. Упорядоченное множество, в котором любые два элемента сравнимы, по определению является линейно упорядоченным. Таковым будет, например, (\mathbf{N}, \leq) .



Антицепь в упорядоченном множестве — это такое его подмножество, в котором любые два элемента несравнимы. Под длиной антицепи понимается количество элементов в ней. Антицепи максимальной длины будем называть главными. Антицепь в конечном упорядоченном множестве называется правильной, если все ее элементы имеют одинаковую высоту. Так, в $(\mathbf{N}_8, |)$ среди главных антицепей $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{3, 4, 5, 7\}$, $\{3, 5, 7, 8\}$ правильной будет только первая. В $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$ главных антицепей две: $\{a, b, c\}$ и $\{ab, ac, bc\}$ и обе они — правильные.

Конечное упорядоченное множество называется шпернеровым, если среди его главных антицепей есть по крайней мере одна правильная. Упорядоченные множества на рис. 1 оба шпернеровы.

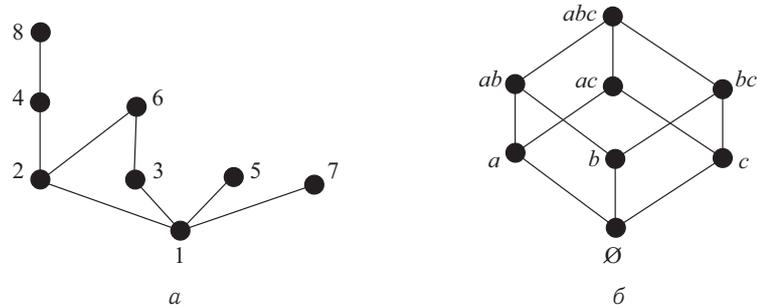


Рис. 1. Диаграммы упорядоченных множеств $(\mathbf{N}_8, |)$ и $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$

Один из минимальных примеров упорядоченного множества, не обладающего свойством шпернеровости, представлен диаграммой на рис. 2. Это упорядоченное множество образуют по включению пять подмножеств множества $S = \{a, b, c, d\}$, а именно $\{a\}$, $\{b\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{a, b, c\}$. В нем всего одна главная антицепь — $\{a, bc, bd\}$ и она не является правильной.

В 1928 году Шпернер в [1] доказал, что все конечные упорядоченные множества вида $(P(S), \subseteq)$ обладают обнаруженным им свойством. Самое простое из известных доказательств этого факта можно найти в [2]. Свойство шпернеровости для конечных упорядоченных множеств находит содержательные интерпретации в различных разделах математики (см., например, [3–8]). Его наличие или отсутствие в конкретных ситуациях обсуждается также в [9–11], в том числе для упорядоченных множеств, ассоциированных с графами, в [12, 13].

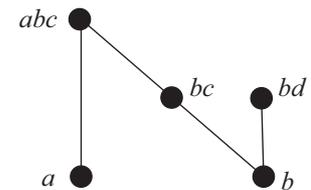


Рис. 2. Упорядоченное множество, не являющееся шпернеровым

2. ГРАФЫ

Под (ориентированным) графом понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество и $\alpha \subseteq V \times V$ — отношение на нем. Элементы множества V называются вершинами графа, а пары, входящие в α , — его дугами. Если $(u, v) \in \alpha$, то говорят, что вершина v смежна с вершиной u .

Вершины u и v по определению связаны, если существуют $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ такие, что $(u, v_1) \in \alpha \cup \alpha^{-1}$, $(v_1, v_2) \in \alpha \cup \alpha^{-1} \dots (v_k, v) \in \alpha \cup \alpha^{-1}$, т. е. если u и v можно соединить последовательностью дуг без учета их направлений. Граф, в котором любые две вершины связаны, называется связным.

Граф $H = (U, \beta)$ называется частью графа $G = (V, \alpha)$, если $U \subseteq V$ и $\beta \subseteq \alpha$, т. е. если H состоит из некоторых вершин графа G и некоторых дуг, соединяющих в G эти вершины.

Контур длины $k \geq 2$ в графе G определяется как последовательность C_k его дуг вида $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)$, в которой все встречающиеся вершины различны. Граф, не содержащий контуров, называется бесконтурным.

Вершина v по определению достижима в графе G из вершины u , если существует последовательность примыкающих дуг $(u, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_k, v)$, соединяющая u с v . Отношение достижимости в графе обозначим через δ . В бесконтурном графе отношение достижимости является отношением порядка (о бесконтурных графах см. [14]). Очевидно, что минимальными элементами в упорядоченном множестве (V, δ) будут стоки графа G , т. е. его вершины, из которых не исходит ни одна дуга



в другие вершины. Максимальными элементами в (V, δ) будут источники графа G , т. е. те его вершины, в которые не входит ни одна дуга из других вершин.

Связный бесконтурный граф $G = (V, \alpha)$ назовем шпернеровым, если упорядоченное множество (V, δ) обладает шпернеровым свойством.

3. МНОГОУГОЛЬНЫЕ ГРАФЫ

Пусть $n \geq 3$ — натуральное число. Под n -угольным графом будем понимать всякий граф M_n , полученный из контура C_n переориентацией некоторого количества k его дуг. Будем считать, что $1 \leq k < n$. Следовательно, контуры исключаются из числа многоугольных графов, которые, таким образом, попадают в класс связных бесконтурных графов. В [15] рассматривается задача о минимальных примитивных расширениях многоугольных графов, в [16] охарактеризованы многоугольные графы, для которых множество связных частей, упорядоченное вложением, является решеткой. Ниже будет найдено необходимое и достаточное условие шпернеровости для многоугольных графов.

На рис. 3 показаны шестиугольный граф $M' = (V', \alpha')$ и диаграмма упорядоченного множества (V', δ') . В этом упорядоченном множестве одна главная антицепь — $\{2, 4, 6\}$. Она является правильной, так что M' — шпернеров граф.

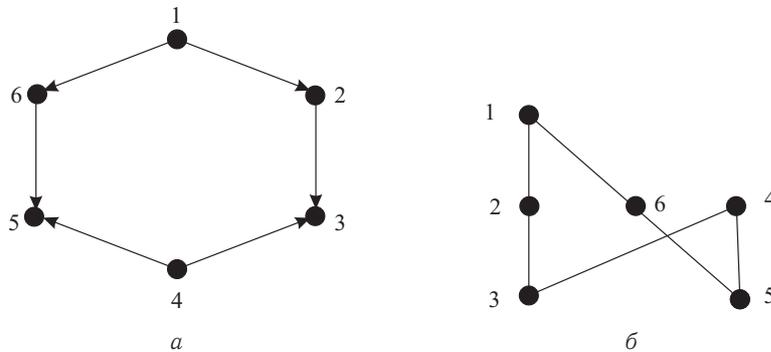


Рис. 3. Шестиугольный граф M' (а) и упорядоченное множество (V', δ') (б)

На рис. 4 показаны шестиугольный граф $M'' = (V'', \alpha'')$ и упорядоченное множество (V'', δ'') . В этом упорядоченном множестве главной антицепью будет только $\{2, 4, 6\}$. Она не является правильной, так что M'' — не шпернеров граф.

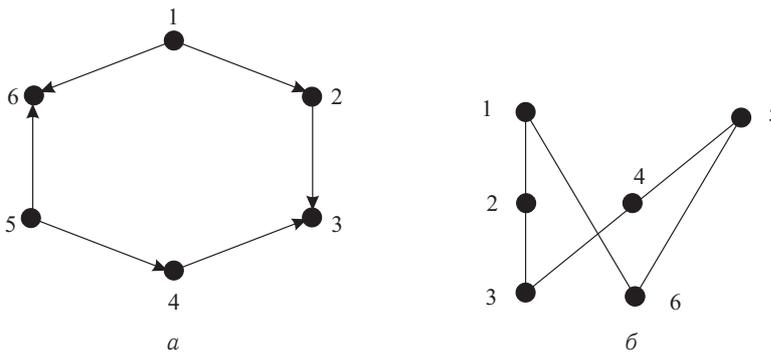


Рис. 4. Шестиугольный граф M'' (а) и упорядоченное множество (V'', δ'') (б)

В графе на рис. 3 источниками являются вершины 1 и 4, а стоками — 3 и 5. В графе на рис. 4 вершины 1 и 5 — источники, а 3 и 6 — стоки. Нетрудно понять, что в многоугольном графе количество источников равно количеству стоков.

Под цепью в многоугольном графе будем понимать его максимальную собственную связную часть, в которой 1) есть хотя бы одна вершина, не являющаяся ни источником, ни стоком, и 2) любые две соседние дуги одинаково направлены. Например, цепями в графе на рис. 3 являются $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ и $1 \rightarrow 6 \rightarrow 5$, а в графе на рис. 4 таковыми будут $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ и $5 \rightarrow 4 \rightarrow 3$. Всякая цепь начинается в источнике и завершается стоком. Зигзагом в многоугольном графе назовем его максимальную



собственную связную часть, в которой 1) каждая вершина является источником или стоком и 2) любые две соседние дуги противоположно направлены. Зигзаги классифицируются по виду их конечных вершин: в ss -зигзаге оба конца являются источниками; в st -зигзаге один конец источник, другой сток; в tt -зигзаге оба конца стоки. В графе на рис. 3 есть tt -зигзаг $3 \leftarrow 4 \rightarrow 5$, в графе на рис. 4 имеем ss -зигзаг $1 \rightarrow 6 \leftarrow 5$. Заметим, что в многоугольном графе с четным числом вершин и чередующимися источниками и стоками зигзагами являются части графа, получаемые из него удалением одной дуги, причем одним из концов такого зигзага будет источник, а другим — сток.

Теорема. *Многоугольный граф тогда и только тогда является шпернеровым, когда в нем нет ss -зигзагов.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $M = (V, \alpha)$ — шпернеров многоугольный граф. Допустим, что в нем есть некоторый ss -зигзаг Z , и получим из этого предположения противоречие.

Через A обозначим имеющуюся в M главную антицепь, которая является правильной. Прежде всего заметим, что в состав A входит по одной вершине из каждой цепи. В самом деле, если в A нет ни одной вершины из некоторой цепи, то, присоединив к A любую внутреннюю (т. е. не источник и не сток) вершину из этой цепи, получим антицепь, более длинную, чем A , что невозможно в силу максимальной A .

Пусть u — один из концов ss -зигзага Z . Источник u имеет в M две смежные с ним вершины. Одной из них является сток, входящий в состав Z . Вторая смежная с u вершина не может быть стоком, иначе, присоединив ее к Z , мы получили бы зигзаг, собственно содержащий Z , что противоречит максимальной Z . Отсюда следует, что каждый из двух конечных источников ss -зигзага Z является началом некоторой цепи в M . Эти две цепи будем называть граничными для зигзага Z .

Далее заметим, что в состав антицепи A очевидным образом попадают максимальные по длине антицепи, составленные из подходящих внутренних вершин каждого зигзага. Если ss -зигзаг Z имеет k вершин, то в нем $\frac{k+1}{2}$ источников и $\frac{k-1}{2}$ стоков.

Покажем, что ни один из концов зигзага Z не входит в A . Пусть это не так и в A присутствует источник u , являющийся концевой вершиной в Z и, следовательно, начальной вершиной одной из граничных для Z цепей, скажем P . Если длина антицепи A равна l , то в ней имеются $l - \frac{k+1}{2}$ вершин, не входящих в Z , и цепи, граничные для Z . Построим новую антицепь A' , в состав которой включим все вершины из A , не входящие в зигзаг Z , и граничные для него цепи, по одной внутренней вершине из этих двух цепей и все $\frac{k-1}{2}$ стоков зигзага Z . Тогда количество вершин в A' окажется равным $(l - \frac{k+1}{2}) + 2 + \frac{k-1}{2} = l - \frac{k+1}{2} + 1 + \frac{k+1}{2} = l + 1$, что невозможно, так как A — одна из главных антицепей в упорядоченном множестве (V, δ) .

Итак, в антицепь A не входят концевые источники зигзага Z . Значит, в нее попадут все стоки этого зигзага, поскольку эти вершины не сравнимы в смысле порядка δ ни друг с другом, ни с содержащимися в A представителями цепей, граничных для Z . По предположению антицепь A — правильная, т. е. все ее вершины являются элементами одинаковой высоты в (V, δ) . Так как стоки представляют собой минимальные элементы в (V, δ) и, значит, имеют высоту 0, то и все вершины в A должны быть стоками. В частности, вершина v , представляющая в A цепь P , граничную для зигзага Z , — тоже сток.

Могут представиться два случая: 1) v входит в некоторую другую цепь графа M ; 2) v является концевой вершиной подходящего зигзага в M . Рассмотрим эти ситуации.

1. Сток v является концом для цепей P и P' . Исключим v из A и добавим к оставшимся вершинам из A по одной внутренней вершине из цепей P и P' . Полученное множество вершин будет антицепью в (V, δ) и в ней на одну вершину больше, чем в A , что невозможно, так как A — главная антицепь.

2. Сток v является концом цепи P и концевой вершиной некоторого зигзага Z' . Так как v — сток, то зигзаг Z' может быть или st -зигзагом, или tt -зигзагом. Если Z' является st -зигзагом и в нем k вершин, то среди них $\frac{k}{2}$ источников и столько же стоков. Пусть антицепь A имеет длину l . Тогда в A вне зигзага Z' и граничных для него двух цепей будет $l - \frac{k}{2}$ вершин. Построим новую антицепь следующим образом: возьмем в нее все вершины из A , не входящие в зигзаг Z' и граничные



для него цепи, присоединим к ним по одной внутренней вершине из указанных граничных для Z' цепей и все, кроме v , стоки зигзага Z' . Количество вершин в построенной антицепи будет равным $(l - \frac{k}{2}) + 2 + (\frac{k}{2} - 1) = l + 1$, т. е. она имеет на одну вершину больше, чем главная антицепь A , что невозможно.

Случай, когда Z' является tt -зигзагом, исключается рассуждениями, вполне аналогичными тем, которые были проведены выше при доказательстве того факта, что в главную антицепь не могут входить концы ss -зигзагов.

Итак, в состав главной и правильной антицепи A обязательно входит вершина из цепи P , граничной для ss -зигзага Z . Однако эта вершина не является стоком в графе M , т. е. не имеет высоты 0 в упорядоченном множестве (V, δ) . Но тогда в A присутствуют элементы, имеющие разные высоты в (V, δ) , что невозможно ввиду правильности A .

Таким образом, предположение о наличии в шпернеровом многоугольном графе ss -зигзага привело к противоречию.

Достаточность. Изобразив для наглядности n -угольный граф в виде правильного n -угольника с соответственно ориентированными сторонами, видим, что n -угольник этот делится на отрезки — цепи и зигзаги, причем каждый зигзаг расположен между двумя граничными для него цепями. Пусть A — некоторая главная антицепь в упорядоченном множестве (V, δ) . Очевидно, что ее «следом» в каждом отрезке будет максимально возможная по длине антицепь, составленная из внутренних элементов этого отрезка (при доказательстве необходимости было установлено, что концевые вершины отрезков не входят в главные антицепи). Так, в каждой цепи отмечается одна вершина (цепь линейно упорядочена и не имеет несравнимых элементов), в ss -зигзаге получится антицепь, состоящая из стоков, в tt -зигзаге — из источников, в st -зигзаге — либо из источников, либо из стоков.

Пусть в многоугольном графе $M = (V, \alpha)$ нет ss -зигзагов. Построим в нем антицепь A следующим образом: включим в состав A все источники каждого st -зигзага, все источники каждого tt -зигзага и по одной из каждой цепи вершине, с которой смежен сток этой цепи. В силу сказанного выше антицепь A будет главной, а так как все ее элементы имеют в упорядоченном множестве (V, δ) высоту 1, то A — правильная антицепь. Следовательно, (V, δ) — шпернерово упорядоченное множество, а значит, M — шпернеров многоугольный граф.

Теорема доказана. □

Содержание работы было анонсировано в [17].

Библиографический список

1. *Sperner E.* Ein Satz uber Untermengen einer endlichen Menge // *Math. Zeitschrift.* 1928. Vol. 27, № 1. P. 544–548.
2. *Lubell D.* A short proof of Sperner's lemma // *J. Comb. Theory.* 1961. Vol. 1, № 2. P. 299.
3. *Мешалкин Л. Д.* Обобщение теоремы Шпернера о числе подмножеств конечного множества // *Теория вероятностей и ее применения.* 1963. Т. 8, № 2. С. 219–220.
4. *Green C., Kleitman D. J.* Strong versions of Sperner's theorem // *J. Comb. Theory Ser. A.* 1976. Vol. 20, № 1. P. 80–88.
5. *Stanley R. P.* Weyl groups, the hard Lefschetz theorem and the Sperner property // *SIAM J. Alg. Discr. Math.* 1980. Vol. 1, № 2. P. 168–184.
6. *Shahriari S.* On the structure of maximum two-part Sperner families // *Discr. Math.* 1996. Vol. 162, № 2. P. 229–238.
7. *Кочкарев В. С.* Структурные свойства одного класса максимальных шпернеровых семейств подмножеств // *Изв. вузов. Математика.* 2005. № 7. С. 37–42.
8. *Aydinian H., Erdős P. L.* On two-part Sperner systems for regular posets // *Electronic Notes in Discr. Math.* 2011. Vol. 38, № 1. P. 87–92.
9. *Lih K. W.* Sperner families over a subset // *J. Comb. Theory Ser. A.* 1980. Vol. 29, № 1. P. 182–185.
10. *Griggs J. R.* Collections of subsets with the Sperner property // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1982. Vol. 269, № 2. P. 575–591.
11. *Wang J.* Proof of a conjecture on the Sperner property of the subgroup lattice of an abelian p -group // *Annals Comb.* 1999. Vol. 2, № 1. P. 85–101.
12. *Jacobson M. S., Kezdy A. E., Seif S.* The poset of connected induced subgraphs of a graph need not be Sperner // *Order.* 1995. Vol. 12, № 3. P. 315–318.
13. *Maeno T., Numata Y.* Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein algebras // *Contemp. Math.* 2012. Vol. 280, № 1. P. 73–83.



14. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука, 1997.
15. Салий В. Н. Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикл. дискр. математика. 2008. Т. 1, № 1. С. 116–119.
16. Салий В. Н. Упорядоченное множество связанных частей многоугольного графа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 44–51.
17. Салий В. Н. О шпернеровом свойстве для многоугольных графов // Компьютерные науки и информационные технологии : материалы междунар. науч. конф. Саратов : Издат. центр «Наука», 2014. С. 275–277.

The Sperner Property for Polygonal Graphs Considered as Partially Ordered Sets

V. N. Saliy

Viacheslav N. Saliy, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, SaliyVN@info.sgu.ru

A finite poset is said to have the Sperner property if at least one of its maximum antichains is formed from elements of the same height. A polygonal graph is a directed acyclic graph derived from a circuit by some orientation of its edges. The reachability relation of a polygonal graph is a partial order. A criterion is presented for posets associated with polygonal graphs to have the Sperner property.

Key words: partially ordered set, Sperner property, polygonal graph, path, zigzag.

References

1. Sperner E. Ein Satz uber Untermengen einer endlichen Menge. *Math. Zeitschrift*, 1928, vol. 27, no. 1, pp. 544–548.
2. Lubell D. A short proof of Sperner's lemma. *J. Comb. Theory*, 1961, vol. 1, no. 2, pp. 299.
3. Meshalkin L. D. Generalization of Sperner's theorem on the number of subsets of a finite set. *Teoriya veroiatnostei i ee primeneniia* [Theory of probability and its applications], 1963, vol. 8, no. 2, pp. 219–220 (in Russian).
4. Green C., Kleitman D. J. Strong versions of Sperner's theorem. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 1976, vol. 20, no. 1, pp. 80–88.
5. Stanley R. P. Weyl groups, the hard Lefschetz theorem and the Sperner property. *SIAM J. Alg. Discr. Math.*, 1980, vol. 1, no. 2, pp. 168–184.
6. Shahriari S. On the structure of maximum two-part Sperner families. *Discr. Math.*, 1996, vol. 162, no. 2, pp. 229–238.
7. Kochkarev V. S. Structural properties of a class of maximal Sperner families of subsets. *Russian Math.*, 2005, vol. 49, no. 7, pp. 35–40.
8. Aydinian H., Erdős P. L. On two-part Sperner systems for regular posets. *Electronic Notes in Discr. Math.*, 2011, vol. 38, no. 1, pp. 87–92.
9. Lih K. W. Sperner families over a subset. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 1980, vol. 29, no. 1, pp. 182–185.
10. Griggs J. R. Collections of subsets with the Sperner property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, vol. 269, no. 2, pp. 575–591.
11. Wang J. Proof of a conjecture on the Sperner property of the subgroup lattice of an abelian p -group. *Annals Comb.*, 1999, vol. 2, no. 1, pp. 85–101.
12. Jacobson M. S., Kezdy A. E., Seif S. The poset of connected induced subgraphs of a graph need not be Sperner. *Order*, 1995, vol. 12, no. 3, pp. 315–318.
13. Maeno T., Numata Y. Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein algebras. *Contemp. Math.*, 2012, vol. 280, no. 1, pp. 73–83.
14. Bogomolov A. M., Saliy V. N. *Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems*. Moscow, Nauka, 1997 (in Russian).
15. Saliy V. N. Minimal primitive extensions of oriented graphs. *Prikl. diskr. matematika* [Appl. Discr. Mathematics], 2008, vol. 1, no. 1, pp. 116–119 (in Russian).
16. Saliy V. N. Ordered set of connected parts of polygonal graph. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 2, pp. 44–51 (in Russian).
17. Saliy V. N. O shpernerovom svoistve dlia mnogougol'nykh grafov [On Sperner property for polygonal graphs]. *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii. Materialy mezhdunar. nauch. konf.* [Computer science and information technology. Proc. Intern. Sci. Conf.], Saratov, Publ. center "Nauka", 2014, pp. 275–277 (in Russian).



УДК 519.713.1; 519.713.4

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА АВТОМАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, РЕКУРРЕНТНОЕ И Z -РЕКУРРЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. А. Твердохлебов

Твердохлебов Владимир Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского; главный научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, tverdokhlebowva@list.ru

Для автоматных отображений изложены метод построения геометрических образов, метод оценки сложности автоматных отображений по их геометрическим образам, метод Z -рекуррентного определения последовательностей. Изложен метод оценки сложности любых конечных последовательностей по числовым показателям рекуррентных и Z -рекуррентных определений последовательности. Числовые показатели рекуррентных и Z -рекуррентных определений последовательностей систематизированы в спектр рекуррентных определений, имеющий 5 уровней числовых показателей. В спектр входят варианты показателей от порядка рекуррентной формы до числовых характеристик различных видов рекуррентных определений последовательностей.

Ключевые слова: автоматные отображения, геометрический образ, рекуррентное определение последовательностей, Z -рекуррентное определение последовательностей, последовательность, оценка сложности последовательности.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-232-241

ВВЕДЕНИЕ

Автоматное отображение относится к классу функций, областями определения и значений которых являются последовательности элементов из конечных множеств. Разработаны различные формы представления автоматных отображений: дискретными детерминированными автоматами с конечными или счетно-бесконечными множествами состояний, конструкциями языка регулярных выражений, структурно-функциональными схемами композиции автоматов и др. В статье продолжается исследование геометрической формы автоматных отображений и использование геометрических образов автоматных отображений в задачах контроля и диагностирования систем, которые представлены в работах [1–20].

Автоматное отображение это бинарное отношение вида $\varphi : X^* \times Y^*$, где X^* и Y^* — множества конечных последовательностей элементов конечных множеств X и Y , удовлетворяющее условиям:

- 1) бинарное отношение φ является отображением;
- 2) для любой последовательности $p \in Pr_1\varphi$ выполняется равенство $|p| = |\varphi(p)|$, то есть прообраз и образ по отображению φ имеют одинаковую длину;
- 3) для любой последовательности $p \in Pr_1\varphi$ любой ее префикс p' принадлежит области определения отображения φ , т.е. $p' \in Pr_1\varphi$;
- 4) если $p \in Pr_1\varphi$, то для любого префикса p' последовательности p выполняется равенство $|p'| = |\varphi(p')|$.

Автоматные отображения обладают важными для практики и теории свойствами.

1. В классе всех автоматных отображений содержится собственный подкласс отображений, реализуемых конечными детерминированными автоматами, которые используются как математические модели для дискретных технических, биологических, информационных и других систем.
2. Преобразования, определяемые машинами Тьюринга, представимы в форме автоматных отображений. На основании гипотезы о связи машин Тьюринга с алгоритмами это означает, что любой алгоритм может быть представлен как автоматное отображение, реализуемое дискретным детерминированным автоматом со счетно-бесконечным множеством состояний.



3. Любому автоматному отображению вида $\varphi : X^* \rightarrow Y^*$ соответствует дискретный детерминированный автомат вида $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$, где S — множество состояний автомата, X и Y — конечные множества входных и выходных сигналов, $s_0 \in S$, $\delta : S \times X \rightarrow S$ и $\lambda : S \times X \rightarrow Y$ — функции переходов и выходов, в котором входные и выходные последовательности сигналов связаны уравнениями динамики:

$$s(t+1) = \delta(s(t), x(t)), \quad y(t) = \lambda(s(t), x(t)),$$

где $t \in \mathbb{N}^+$.

Для случая конечного множества состояний автомата разработаны различные классы автоматов: автоматы типов Мили и Мура, автоматы без выходов, автономные автоматы и другие. При счетно бесконечном множестве состояний S к автомату A может быть преобразована машина Тьюринга. Машина Тьюринга может быть представлена как дискретный детерминированный автомат со счетно бесконечным множеством состояний. Дискретные автоматные отображения не принадлежат к числовым структурам и для них не используются мощные математические идеализации актуальной бесконечности, непрерывности, бесконечно малых величин, предельного перехода, суммирования бесконечных рядов, абстрактных пространств и т. п.

Использование непрерывной числовой математики в постановках и решениях задач теории автоматов основывается на связи дискретных символьных структур (автоматных отображений) с числовыми структурами. Основу для разработки таких связей составляют взаимно однозначные отображения множеств дискретных объектов в множества числовых структур (множества чисел, точек, интервалов) и интерпретация точек геометрических кривых линий как моделей связи прообразов и образов автоматных отображений.

В статье рассматривается представление автоматных отображений для дискретных детерминированных автоматов с конечным или счетно-бесконечным множеством состояний геометрическими образами в форме точек на аналитически заданных кривых. Для этого определяются линейные порядки на множествах входных и выходных последовательностей, приводятся формулы для вычисления номеров входных последовательностей, показывается, что порядок расположения на осях системы координат номеров входных и выходных последовательностей может быть произвольным с сохранением отношения неравенства между геометрическими образами автоматных отображений. Приводится метод построения дискретного автомата по выбранной ориентации геометрической кривой и точкам, выбранным на ней для представления автоматного отображения. Изложен метод построения автомата по геометрическому образу, основывающийся на покрытии геометрической кривой сеткой с заданными размерами клеток сетки. Кроме того, приведены геометрические формы для классификации наборов траекторий изменения состояний автомата и классификации частей наборов таких траекторий.

Одними из основных результатов (изложенных в статье) являются: метод оценки сложности последовательностей на основе рекуррентного из Z -рекуррентного определения последовательностей; метод оценки сложности геометрических кривых по выбранным на них последовательностям точек и на числовых показателях рекуррентных определений последовательностей таких точек. Метод определения структуры причинно-следственных связей событий, в котором используются рекуррентное из Z -рекуррентное определения последовательностей. Методы применимы для оценки сложности автоматных отображений и последовательностей операторов в схемах Янова для алгоритмов.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ОБРАЗ АВТОМАТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Любое автоматное отображение φ вида $\varphi : X^* \rightarrow Y^*$ может быть определено на основе функционирования инициального дискретного детерминированного автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ с конечным или счетно бесконечным множеством состояний S :

$$\varphi = \bigcup_{p \in Pr_1 \varphi} \{(p, \lambda(s_0, p))\}. \quad (1)$$

Задание автоматного отображения φ формулой (1) требует определения функций δ и λ переходов и выходов автомата, что существенно ограничивает эффективность исследования автоматных отображений как функций. Следующая теорема вводит независимые от δ и λ средства задания автоматных отображений.



Теорема 1. Пусть X и Y — конечные непустые множества и ψ — отображение вида

$$\psi : X^* \rightarrow Y, \quad (2)$$

в котором для любого $p \in Pr_1\psi$ любой префикс последовательности p принадлежит множеству $Pr_1\psi$, где $Pr_1\psi$ — область определения отображения ψ .

Бинарное отношение $\varphi \subset X^* \times Y^*$, для которого $Pr_1\varphi = Pr_1\psi$ и для любой последовательности $p \in Pr_1\varphi$, где $p = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}$ и $n \in N^+$, выполняются условие $|\varphi(p)| = 1$ и равенство

$$\varphi = \psi(x_{i_1})\psi(x_{i_1}x_{i_2}) \dots \psi(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}), \quad (3)$$

является автоматным отображением.

Доказательство. Условие 1 в определении автоматного отображения, выполняется для бинарного отношения φ на основании равенства $|\varphi(p)| = 1$ для любой последовательности $p \in Pr_1\varphi$. Формула (3) по построению определяет для каждой пары $(p, \varphi(p)) \in \varphi$ равенство $|p| = |\varphi(p)|$, т. е. выполнение условия 2. Свойство 3 автоматного отображения выполняется для бинарного отношения φ на основании предположения о множестве $Pr_1\psi$ и также предполагаемого равенства $Pr_1\varphi = Pr_1\psi$. По построению правой части равенства (3) и возможности рассматривать это равенство для любого (непустого) префикса последовательности получаем, что бинарное отношение φ удовлетворяет условию 4 автоматного отображения. \square

Несмотря на простоту теоремы 1, она имеет принципиально важное значение.

Во-первых, на основании теоремы 1 любое автоматное отображение φ вида $\varphi : X^* \rightarrow Y^*$, в котором посимвольная связь прообраза и образа определяется при соблюдении условий автоматности 1–4 заменяется отображением вида (2) с расшифровкой вида (3). Существенным является то, что на отображение (2) наложено только одно условие: $Pr_1\psi$ с каждой принадлежащей $Pr_1\psi$ последовательностью в нее включаются все префиксы последовательности. Фактически, любое отображение вида (2), дополненное формулой (3), представляет автоматное отображение.

Во-вторых, представление отображения (2) в геометрической форме будет содержать размещение множеств X^* на оси абсцисс (в неограниченном или в конечном отрезке оси) и размещение множества Y на некотором конечном отрезке оси ординат. Это удобно для визуального представления геометрического образа.

Задача удобного и эффективного размещения множества последовательностей X^* и множества Y существенно сокращается, если учитывать ориентацию геометрических образов на решение конкретной задачи — распознавание автоматов в конечном семействе автоматов средствами экспериментов. В качестве экспериментов в дальнейшем будет рассматриваться простой безусловный эксперимент распознавания автомата в заданном конечном семействе автоматов при условии, что автоматы определены геометрическими образами. В этом случае принципиальная возможность распознавания автоматов, когда автоматные отображения вида (2) уже преобразованы в числовые структуры, не зависит от способов взаимно однозначного размещения элементов множеств X^* и Y на осях прямоугольной декартовой системы координат. Этот факт представим следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть X и Y — конечные непустые множества, $\alpha = \{\psi_i\}_{i \in I}$ — семейство отображений, где $\psi_i : U \rightarrow Y$, $U \subset X^*$, для любых $i, j \in I$ $Pr_1\psi_i = Pr_1\psi_j = U$ и для каждого $p \in U$ все префиксы p принадлежат множеству U . Тогда для любых взаимно однозначных отображений «в» $h_X : X^* \xrightarrow{\alpha} N^+$ и $h_Y : Y \xrightarrow{\alpha} \{i_1, i_2, \dots, i_{|Y|}\}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_{|Y|}$ имеет место

$$\psi_i \neq \psi_j \rightarrow \exists p \in U : h_Y(\psi_i(p)) \neq h_Y(\psi_j(p)). \quad (4)$$

Доказательство. Утверждение теоремы 2 следует из того, что при выполнении неравенства $\psi_i \neq \psi_j$ для некоторого $p \in U$ имеет место $(p, \psi_i(p)) \neq (p, \psi_j(p))$. Последнее неравенство возможно только тогда, когда при взаимно однозначном отображении h_Y выполняется неравенство $h_Y(\psi_i(p)) \neq h_Y(\psi_j(p))$. \square

В результате проведенных исследований удалось найти такой линейный порядок на множестве X^* , при котором достаточно просто решаются следующие задачи: задача определения номера $r(p)$ для $p \in U$ и задача определения для рассматриваемого $p \in U$ номера $r(p)$ по линейному порядку. Определим такой линейный порядок, обозначив \prec и при следующих правилах.



Правило 1. На множестве $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ определяется линейный порядок $x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k$. Линейный порядок \prec распространяется на множество X^* по правилам 2 и 3.

Правило 2. Для любых $p, p' \in X^*$ $|p| < |p'| \rightarrow p \prec p'$ и пустая последовательность $e \prec p$.

Правило 3. Для любых $p, p' \in X^*$, для которых $p = p'$, их отношение по линейному порядку повторяет отношение их наименьших неравных префиксов.

Как отмечалось, введенный линейный порядок обладает свойствами, представленными теоремами 2 и 3.

Теорема 3. Пусть на множестве X^* , где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, правилами 1–3 определен линейный порядок \prec , тогда для любой последовательности $x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}$, где $n \in N^+$ и $n \geq 2$, номер $r(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n})$ по линейному порядку \prec определяется формулой

$$r(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}) = \sum_{j=1}^{n-1} k^j + r(x_{i_1} - 1) \times k^{n-1} + r(r_k(x_{i_2})r_k(x_{i_3}) \dots r_k(x_{i_n})), \quad (5)$$

где $r(x)$ — число x в десятичной системе счисления, а $r_k(x)$ — число x в k -ичной системе счисления, соответствующее номеру элемента по линейному порядку \prec .

Доказательство. Число $r(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n})$ рассмотрим как сумму трех слагаемых. Первое слагаемое определяет число последовательностей размерностей от 1 до $n - 1$. Последовательность $x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n}$ входит в множество последовательностей длины n , для которых x_{i_1} является префиксом. Каждое множество последовательностей длины n с фиксированным префиксом содержит k^{n-1} последовательностей. Число таких множеств, предшествующих множеству последовательностей с префиксом x_{i_1} , равно $r(x_{i_1} - 1)$. Это определяет вхождение в сумму второго слагаемого. Для определения третьего слагаемого воспользуемся следующими свойством представления чисел в разных системах счисления. На основании того, что $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, элементы множества X в соответствии с линейным порядком \prec могут быть перенумерованы так, что их номера соответствуют цифрам k -ичной системы счисления. Тогда число $r_k(x_{i_2})r_k(x_{i_3}) \dots r_k(x_{i_n})$ будет номером по порядку \prec , представленным в k -ичной системе счисления, во множестве всех последовательностей длины n с префиксом x_{i_1} . Включение числа $r(r_k(x_{i_2})r_k(x_{i_3}) \dots r_k(x_{i_n}))$ в правую часть равенства (5) завершает определение номера $r(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n})$. \square

Формула (5), указанная в теореме 3, позволяет определять номер любой последовательности в линейно упорядоченном множестве (X^*, \prec) . В силу единственности представления числа $r(x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_n})$ правой формулой в равенстве 5 на основании теоремы 3 по любому целому положительному числу, рассматриваемому как номер последовательности, однозначно определяется сама последовательность.

Для построения геометрического образа автоматного отображения разработаны все требующиеся структуры: специальная форма автоматного отображения, содержащая отображение $\psi : X^* \rightarrow Y$, и использование отображения ψ на основании формулы (5); линейный порядок \prec , позволяющий эффективно вычислять связь последовательности с ее номером по линейному порядку \prec и обратную связь номера с последовательностью; взаимно однозначные отображения «в» $h_X : X^* \xrightarrow{B} N^+$ и $h_Y : Y \xrightarrow{B} \{i_1, i_2, \dots, i_{|Y|}\}$ для размещения элементов множеств X^* и Y на осях прямоугольной декартовой системы координат. Эти средства позволяют представлять автоматные отображения точками в прямоугольной декартовой системе координат.

Выбор взаимно однозначных отображений h_X и h_Y не ограничен и, следовательно, предоставляет возможности для выбора любого расположения точек геометрического образа на аналитически заданных геометрических кривых линиях.

2. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ АВТОМАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть $W \subset X^*$ и $H(W)$ — множество всех последовательностей, являющихся элементами множества W или префиксами последовательностей из W . Любое отображение g вида $g : H(W) \rightarrow Y$ с использованием формулы 3 определяет автоматное отображение φ_g вида $\varphi_g : X^* \rightarrow Y^*$. Геометрический образ автоматного отображения φ_g однозначно определяется тройкой $\langle g, h_X, h_Y \rangle$, где $h_X : X^* \xrightarrow{B} R$ и $h_Y : Y \xrightarrow{B} \{1, 2, \dots, |Y|\}$ — взаимно однозначные отображения «в». Введенному линейному порядку \prec на множестве X^* соответствует взаимно однозначное отображение h'_x вида $h'_x : X^* \xrightarrow{B} N^+$, что позволяет представлять h_x суперпозицией h'_x и взаимно однозначного отображения h'' вида $h'' : N^+ \xrightarrow{B} R$.



В методе построения инициального дискретного детерминированного автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ с конечным или счетно-бесконечным множеством состояний S основными этапами являются:

- выбор аналитически заданной геометрической кривой линии $y = f(x)$ на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат;
- выбор направления обхода рассматриваемой геометрической кривой линии;
- выбор точек на кривой;
- выбор конечной последовательности полуинтервалов $\Delta_{y_1}, \Delta_{y_2}, \dots, \Delta_{y_l}$, покрывающих некоторый полуинтервал Δ_y на оси ординат.

Пусть аналитически заданная на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат геометрическая кривая $y = f(x)$ рассматривается на интервале (α, β) оси абсцисс и

$$a = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x), \quad b = \min_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x).$$

На оси абсцисс выбираем полуинтервал $[a, b)$ с разбиением на полуинтервалы $[a, c_1), [c_1, c_2), \dots, [c_{l-1}, b)$, обозначая их $\Delta_{y_1}, \Delta_{y_2}, \dots, \Delta_{y_l}$. Геометрический образ определяется для начального фрагмента автоматного отображения, содержащего выбранное множество из k первых пар автоматного отображения. Для этого в соответствии с линейным порядком \prec выбирается множество U последовательностей от первой до k -й $U = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Область определения отображения h_X ограничивается до множества U и для представления элементов множества U на оси абсцисс используются точки $h_X(p_1), h_X(p_2), \dots, h_X(p_k)$. Для заданной кривой $y = f(x)$ определяются последовательность точек $f(h_X(p_1)), f(h_X(p_2)), \dots, f(h_X(p_k))$. Последовательность точек $(h_X(p_1), f(h_X(p_1))), (h_X(p_2), f(h_X(p_2))), \dots, (h_X(p_k), f(h_X(p_k)))$ является геометрическим образом для k первых пар автоматного отображения φ_g . Для того чтобы последовательность $(h_X(p_1), f(h_X(p_1))), (h_X(p_2), f(h_X(p_2))), \dots, (h_X(p_k), f(h_X(p_k)))$ рассматривать как часть геометрического образа автоматного отображения, каждой паре $(p_i, f(h_X(p_i)))$, $1 \leq i \leq k$, геометрического образа с числовыми координатами сопоставляется пара (p_i, y_j) , где $f(h_X(p_i)) \in \Delta_{y_j}$ автоматного отображения. Таким образом, начальный фрагмент геометрического образа автоматного отображения построен. Для построения геометрического образа полного автоматного отображения требуется определить задание взаимно однозначного отображения «в» на области определения рассматриваемой геометрической кривой линии $y = f(x)$.

3. РЕКУРРЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

При построении, анализе свойств и распознавании последовательностей существенным является рассмотрение взаиморасположения элементов. Для решения задачи определения свойств последовательностей, базирующихся на анализе взаиморасположения элементов, разработаны два метода: метод получения числовых показателей для вариантов рекуррентных определений последовательностей и метод Z -рекуррентного определения показателей последовательностей на основе использования бинарного отношения.

Спектр числовых показателей рекуррентного определения последовательностей. Метод получения числовых показателей для вариантов рекуррентных определений последовательностей включает построение пяти уровней $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ числовых показателей, в которых числовые показатели следующего уровня Ω_{i+1} углубляют характеристику взаиморасположения элементов в последовательности по отношению к предшествующему уровню Ω_i .

Для последовательности $\xi = (u(1), u(2), \dots, u(t), \dots)$ элементов из конечного множества U используется рекуррентная форма $F(u(t-m), u(t-m+1), \dots, u(t-1)) = u(t)$.

Определение последовательности рекуррентной формой F (или последовательности рекуррентных форм) реализуется на основе совмещения переменных рекуррентной формы с элементами последовательности ξ по правилу: для любого $t, t > m$ (или t принадлежит рассматриваемому интервалу целых положительных чисел)

$$F(u(t-m), u(t-m+1), \dots, u(t-1)) = u(t). \quad (6)$$

Рекуррентная форма (6) для случая, когда элементы последовательности ξ представлены с использованием индексов элементов, принимает вид

$$F(z_{t+1}, z_{t+2}, \dots, z_{t+m}) = z_{t+m+1}.$$



По предположению независимые и зависимые переменные рекуррентных форм определены на конечном множестве U , т.е. рекуррентной форме F соответствует конечное отображение вида $F : U^m \rightarrow U$. Это позволяет эффективно задавать рекуррентные формы, конечные семейства рекуррентных форм и правила их применения при определении последовательностей.

Спектр $\Omega(\xi)$ для последовательности ξ имеет 5 уровней: $\Omega(\xi) = (\Omega_0(\xi), \Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi), \Omega_3(\xi), \Omega_4(\xi))$. В спектре числовыми значениями представлены порядки рекуррентных форм, длины отрезков последовательности, определяемые отдельными рекуррентными формами и количества смен рекуррентных форм.

По определению $\Omega_0(\xi) = m_0(\xi)$, где $m_0(\xi)$ — наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей всю последовательность ξ . На уровне $\Omega_1(\xi)$ спектра $\Omega(\xi)$ расположено m_0 чисел ($m_0 \in N^+$), определяющих для порядков от 1 до m_0 размеры наибольших начальных отрезков последовательности ξ , определяемых используемой рекуррентной формой.

Уровень $\Omega_2(\xi)$ содержит m_0 чисел, показывающих, сколько раз для рассматриваемого порядка рекуррентных форм потребовалось заменять рекуррентные формы при определении последовательности ξ . На уровне $\Omega_3(\xi)$ каждое число смен рекуррентных форм, показанное на уровне $\Omega_2(\xi)$, заменено последовательностью чисел, представляющих длины отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами.

По построению спектр динамических показателей определения последовательности состоит из числовых значений:

- наименьшего порядка $m_0(\xi)$ рекуррентной формы, определяющей всю последовательность ξ ;
- набор наименьших длин $d^1(\xi), d^2(\xi), \dots, d^{m_0}(\xi)$ префиксов последовательности ξ , задаваемых рекуррентными формами соответственно порядков $1, 2, \dots, m_0$;
- набор чисел $r^1(\xi), r^2(\xi), \dots, r^{m_0}(\xi)$ смен рекуррентных форм порядков $1, 2, \dots, m_0$, задающих всю последовательность;
- набор наборов длин

$$d^1(\xi), d^2(\xi), \dots, d^{r^1(\xi)+1}(\xi) d^2(\xi), d^2(\xi), \dots, d^{r^2(\xi)+1}(\xi) \dots d^{m_0}(\xi) = |\xi| \quad (7)$$

отрезков последовательности ξ , где $d_j^m(\xi)$ — длина j -го отрезка в определении рекуррентной формой порядка m последовательности ξ .

Используя введенные обозначения, определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру:

- $\Omega_0(\bar{\xi}) = \langle m_0(\bar{\xi}) \rangle$;
- $\Omega_1(\bar{\xi}) = \langle d_1(\bar{\xi}), d_2(\bar{\xi}), \dots, d_\alpha(\bar{\xi}) \rangle$;
- $\Omega_2(\bar{\xi}) = \langle r_1(\bar{\xi}), r_2(\bar{\xi}), \dots, r_\alpha(\bar{\xi}) \rangle$;
- $\Omega_3(\bar{\xi}) = \langle \Omega_3^1(\bar{\xi}), \Omega_3^2(\bar{\xi}), \dots, \Omega_3^\alpha(\bar{\xi}) \rangle$, где $\alpha = m_0(\bar{\xi})$ и $\Omega_3^j(\bar{\xi}) = \langle d_1^j(\bar{\xi}), d_2^j(\bar{\xi}), \dots, d_{n_j}^j(\bar{\xi}) \rangle$ (n_j — номер последнего отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$ как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка j);
- $\Omega_4(\bar{\xi}) = \Theta(\Omega_3(\bar{\xi}))$, где Θ — оператор замены в $\Omega_3(\bar{\xi})$ величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков.

Четвёртый уровень $\Omega_4(\bar{\xi})$ спектра $\Omega(\bar{\xi})$ к характеристике последовательности $\bar{\xi}$ по количеству изменений правил, определяющих взаиморасположение элементов в последовательности, и величинам областей действия правил, представленной на уровнях $\Omega_1(\bar{\xi})$ – $\Omega_3(\bar{\xi})$, добавляет оценки сложности правил и величины области использования правил. В достаточно общем случае можно вводить веса правил (рекуррентных форм) и веса реализации правил, используемых при определении отрезка. Например, для каждого шага применения рекуррентной формы $F(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0) = z_{m+1}^0$, т.е. для набора $(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$ задается вес $\Theta(z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$ в числовой форме, и сумма весов всех шагов применения рекуррентной формы для последовательности полагается весом последовательности.

Первые четыре уровня $\Omega_0(\xi), \Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi)$ и $\Omega_3(\xi)$ спектра $\Omega(\xi)$ характеризуют алгоритмические свойства определения последовательности ξ и её строение.

Пример 1 (числовые показатели определены А. С. Епифановым). Пусть $\xi_n(\pi)$ и $\xi_n(\epsilon)$ — последовательности длины n цифр, представляющие начальные отрезки определения иррациональных чисел π и ϵ . Для величины $n = 1000000$ выполняется отношение $\Omega_0(\xi_n(\pi)) \leq \Omega_0(\xi_n(\epsilon))$.



Пример 2 (числовые показатели определены А. С. Епифановым). Пусть $\xi_n(\sqrt{2})$ и $\xi_n(\ln 2)$ — последовательности длины n цифр, представляющие начальные отрезки определения иррациональных чисел $\sqrt{2}$ и $\ln 2$. Для $n \in \{50, 1000, 5000, 50000, 150000, 200000, 250000, 300000, 350000, 400000, 450000, 500000, 550000, 850000, 900000\}$ выполняется равенство $\Omega_0(\xi_n(\sqrt{2})) = \Omega_0(\xi_n(\ln 2))$.

Это означает, что функциональная зависимость элемента (цифры) от предшествующих элементов в начальных отрезках длины n последовательностей, определяющих числа $\sqrt{2}$ и $\ln 2$, представлена одним и тем же количеством предшествующих элементов.

4. Z-РЕКУРРЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Рассмотренные в п. 3 рекуррентные определения последовательностей и представление определений числовыми показателями на уровнях $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_4$ позволяют дать тонкие характеристики формальных взаимозависимостей между знаками в последовательностях. Содержательная (и формальная) интерпретация зависимостей построена в форме функциональной зависимости. Для использования рекуррентных определений последовательностей в приложениях введем варианты новых Z-рекуррентных определений последовательностей. Для этого в «шаблон» функциональной зависимости элементов последовательности будем использовать не в форме

$$z_{t+1}, \dots, z_{t+m} \rightarrow z_{t+m+1}, \tag{8}$$

а в виде следующего бинарного отношения:

$$(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_{k_1}}) \rightarrow \begin{cases} (z_{j_1}^1, z_{j_2}^1, \dots, z_{j_{k_2}}^1), \\ (z_{j_1}^2, z_{j_2}^2, \dots, z_{j_{k_2}}^2), \\ \dots \\ (z_{j_1}^h, z_{j_2}^h, \dots, z_{j_{k_2}}^h). \end{cases} \tag{9}$$

Форма Z-рекуррентного определения последовательности реализуется применением любой пары последовательностей из следующего набора пар:

$$\begin{aligned} &((z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_{k_1}}), (z_{j_1}^1, z_{j_2}^1, \dots, z_{j_{k_2}}^1)), \\ &((z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_{k_1}}), (z_{j_1}^2, z_{j_2}^2, \dots, z_{j_{k_2}}^2)), \\ &\dots \\ &((z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_{k_1}}), (z_{j_1}^h, z_{j_2}^h, \dots, z_{j_{k_2}}^h)). \end{aligned}$$

Z-рекуррентное определение последовательностей предоставляет более мощные характеристики взаиморасположения элементов в последовательности, чем рекуррентное определение последовательностей. Такие числовые характеристики позволяют использовать их при решении ряда вопросов: определение сложности взаиморасположения элементов в последовательности, распознавание на основе сравнения по сложности последовательностей выходных сигналов, построение классификации последовательностей по показателям сложности и др. Будем предполагать, что для формулы Z-рекуррентного определения последовательностей выполняется следующее отношение: $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k_1}, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{k_2}, k_1 < k_2, 1 < k_2$ и $\{i_1, i_2, \dots, i_{k_1}\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_{k_2}\} = \emptyset$.

Будем полагать, что Z-рекуррентное определение последовательности с заданным бинарным отношением $\varphi_z^W \in W^{k_1} \times W^{k_2}$ выполняется для последовательности $\xi = \langle a_1, a_2, \dots, a_c \rangle$, если для любых t от 0 до $C - k_2$ имеет место $((a_{t+i_1}, a_{t+i_2}, \dots, a_{t+i_{k_1}}), (a_{t+j_1}, a_{t+j_2}, \dots, a_{t+j_{k_2}})) \in \varphi_z^W$.

5. Z-РЕКУРРЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СОБЫТИЙ

Употребляемыми схемами для представления причинно-следственных связей являются следующие схемы: <причина> \rightarrow <следствие> и <группа причины: активная причина и причина-условие> \rightarrow <группа следствие: следствие 1 и следствие 2 (транслируемое условие)>. Если элементы последовательности $\xi = (u(1), u(2), \dots, u(t), \dots)$ интерпретировать как события, находящиеся в причинно-следственной зависимости, то уточнение структуры причинно-следственных зависимостей можно



определить на основе рекуррентного определения и Z -рекуррентного определения последовательности ξ . Форма (6) рекуррентного определения выражает функциональную зависимость с причинно-следственной интерпретацией событий от некоторых непосредственно предшествующих по времени или линейному порядку событий. Z -рекуррентное определение последовательностей является более мощным средством и имеет форму покрытия последовательности с преобразованием промежуточной формы последовательностей. Элемент $z_{t+\nu}$ Z -рекуррентно определяется в последовательности ξ как элемент единого набора, соответствующего заданному бинарному отношению вида

$$(z_{t+i_1}, z_{t+i_2}, \dots, z_{t+i_{k_1}}), \quad (z_{t+j_1}^v, z_{t+j_2}^v, \dots, z_{t+j_{k_2}}^v).$$

Покрытие последовательности ξ при Z -рекуррентном определении последовательностей производится слева направо от начала последовательности ξ . Z -рекуррентная форма определяет последовательность ξ , если вся последовательность ξ допускает покрытие наборами вида $(z_{t+j_1}^v, z_{t+j_2}^v, \dots, z_{t+j_{k_2}}^v)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами статьи являются: метод оценки сложности последовательностей на основе рекуррентного и Z -рекуррентного определений последовательностей; метод оценки сложности геометрических кривых по выбранным на них последовательностям точек с использованием числовых показателей рекуррентных определений последовательностей таких точек; метод построения геометрических образов автоматного отображения и оценка его сложности по рекуррентному определению геометрического образа; новое Z -рекуррентное определение последовательности. Разработан метод определения структуры причинно-следственных связей событий, в котором используются рекуррентное и Z -рекуррентное определения последовательностей. Методы применимы для оценки сложности автоматных отображений, произвольных последовательностей, процессов событий.

Библиографический список

1. *Твердохлебов В. А.* Геометрические образы законов функционирования автоматов. Саратов : Научная книга, 2008. 183 с.
2. *Твердохлебов В. А.* Геометрические образы конечных детерминированных автоматов // Изв. Саратовского государственного университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5, вып. 1. С. 141–153.
3. *Твердохлебов В. А.* Геометрические модели и методы в техническом диагностировании // Информационно-управляющие системы на ж.-д. транспорте. 1996. № 3/4. С. 58.
4. *Твердохлебов В. А.* Распознавание автоматов на основе геометрической интерпретации // Проблемы теоретической кибернетики : тез. докл. XI Междунар. конф. М. : Изд-во РГУ, 1996. С. 85–93.
5. *Твердохлебов В. А.* Дискретные словарные геометрии для анализа и синтеза математических автоматов // Докл. Акад. воен. наук. Сер. Аналитическая механика. Аналитическая теория автоматического управления. 1999. № 1. С. 100–112.
6. *Tverdokhlebov V. A.* The general features of geometrical images of finite state machines // Proc. East-West Design & Test Workshop (EWDTW'04). Kharkov : National University of Radioelectronics, 2004. P. 243–246.
7. *Твердохлебов В. А.* Дискретные системы и геометрические образы их функционирования // Автоматизация проектирования дискретных систем : материалы Пятой междунар. конф. Минск : Обьединен. ин-т проблем информатики НАН Беларуси, 2004. Т. 1. С. 217–226.
8. *Твердохлебов В. А.* Рекуррентность геометрических образов // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. 2004. № 4/5 (48/49). С. 88–90.
9. *Твердохлебов В. А.* Конечные автоматы и анализ их геометрических образов // Проблемы теоретической кибернетики : тез. докл. XIV Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рожд. С. В. Яблонского. М. : Изд-во мех.-мат. фак. МГУ, 2005. С. 153.
10. *Твердохлебов В. А.* Геометрические образы поведения дискретных детерминированных систем // Радіоелектронні комп'ютерні системи. 2006. № 5(17). С. 161–165.
11. *Твердохлебов В. А.* Техническое диагностирование на основе геометрических структур законов функционирования // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2007. № 7. С. 158–167.
12. *Твердохлебов В. А.* Спектры для геометрических образов автоматов и их связь с последовательностями и фигурами // Дискретная математика и ее приложения : материалы IX Междунар. семинара. М., 2007. С. 409–412.
13. *Твердохлебов В. А.* Интерполяция геометрических образов автоматов в техническом диагностировании // Докл. Акад. воен. наук. 2007. № 1(25). С. 55–62.
14. *Твердохлебов В. А.* Геометрические образы законов функционирования автоматов и анализ



- свойств автоматов // Дискретные модели в теории управляющих систем : тр. восьмой междунар. конф. М. : Издат. отдел фак. ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. С. 301–305.
15. Tverdokhlebov V. A. Geometrical models of automaton mappings and automaton // Вестн. Киев. нац. ун-та им. Т. Шевченко. Сер. физ.-матем. науки. 2011. Вып. 1. С. 202–207.
 16. Tverdokhlebov V. A. Geometrical approach to technical diagnosing of automaton // Proc. IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2011). Kharkov : National University of Radioelectronics, 2011. P. 240–243.
 17. Tverdokhlebov V. A. Геометрические модели и методы распознавания автоматов // Интеллектуальные системы и компьютерные науки : материалы X Междунар. конф. М. : Изд-во МГУ, 2011. С.168–171.
 18. Tverdokhlebov V. A. Классификация геометрических образов автоматных отображений // Докл. Акад. воен. наук. 2012. № 5 (54). С. 97–105.
 19. Tverdokhlebov V. A. Основные теоремы для построения геометрических образов автоматных отображений // Радиоелектронні і комп'ютерні системи. 2013. № 5(64). С. 379–384.
 20. Tverdokhlebov V. A. Геометрические модели и методы распознавания автоматов // Интеллектуальные системы. 2013. Т. 17, вып. 1–4. С. 187–191.

The Geometric Form of Automaton Mappings, Recurrent and Z -recurrent Definition of Sequences

V. A. Tverdokhlebov

Vladimir A. Tverdokhlebov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia; Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya st., 410028, Saratov, Russia, tverdokhlebovva@list.ru

For automaton mappings we present a method to construct geometric images, a method for complexity estimate by geometric forms, a method of Z -recurrent definition of sequences. A method for complexity estimate for finite sequences by recurrent and Z -recurrent numerical indicators is proposed. Numerical indicators of recurrent and Z -recurrent definitions of sequences are systematized into the spectrum of recurrent definitions with 5 levels of numerical indicators. The spectrum includes the order of a recurrent form, the numerical characteristics of various types of recurrent sequences, etc.

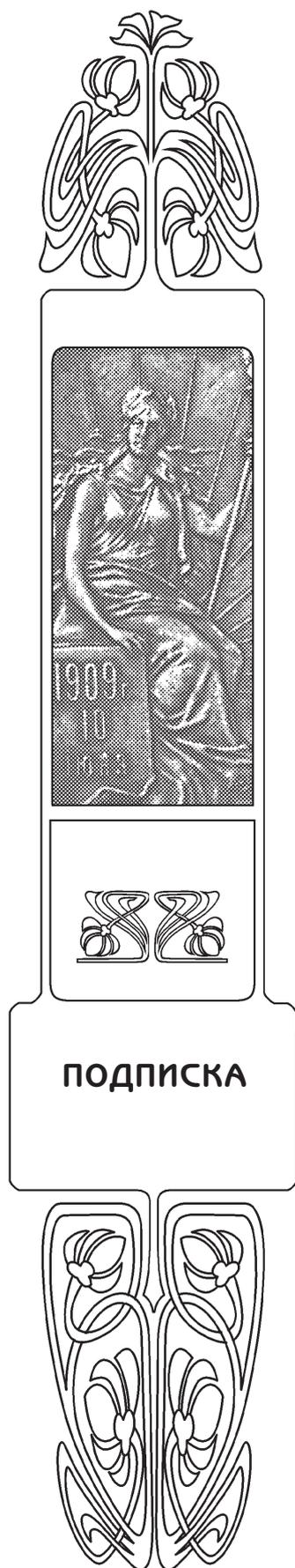
Key words: automaton mappings, geometric images, recurrent sequence, Z -recurrent sequences, sequences, complexity estimate of a sequence.

References

1. Tverdokhlebov V. A. *Geometricheskie obrazy zakonov funkcionirovaniia avtomatov* [Geometric images of machines functioning laws]. Saratov, Nauchnaia kniga, 2008, 183 p. (in Russian).
2. Tverdokhlebov V. A. Geometricheskie obrazy konechnykh determinirovannykh avtomatov [The geometrical images of finite deterministic automata]. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2005, vol. 5, iss. 1, pp. 141–153. (in Russian).
3. Tverdokhlebov V. A. Geometricheskie modeli i metody v tekhnicheskoi diagnostirovanii [Geometric patterns and techniques in technical diagnosis]. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy na zh.-d. transporte*, 1996, no. 3/4, pp. 58 (in Russian).
4. Tverdokhlebov V. A. Raspoznavanie avtomatov na osnove geometricheskoi interpretatsii [Recognition of machines based on the geometric interpretation.]. *Problemy teoreticheskoi kibernetiki : tez. dokl. XI Mezhdunar. konf.* [Problems of Theoretical Cybernetics : mes. rep. XI Intern. Conf.], Moscow, Izd-vo RGGU, 1996, pp. 85–93 (in Russian).
5. Tverdokhlebov V. A. Diskretnye slovarnye geometrii dlia analiza i sinteza matematicheskikh avtomatov [Discrete geometry vocabulary for the analysis and synthesis of mathematical machines]. *Dokl. Akad. voen. nauk. Ser. Analiticheskaiia mekhanika. Analiticheskaiia teoriia avtomaticheskogo upravleniia* [Dokl. Acad. Mil. Sciences. Ser. Analytical Mechanics. Analytical theory of automatic control], 1999, no. 1, pp. 100–112 (in Russian).
6. Tverdokhlebov V. A. The general features of geometrical images of finite state machines. *Proc. East-West Design & Test Workshop (EWDTW'04)*, Kharkov, National University of Radioelectronics, 2004, pp. 243–246.
7. Tverdokhlebov V. A. Diskretnye sistemy i geometricheskie obrazy ikh funkcionirovaniia [Discrete systems and geometric images of their functioning]. *Automatizatsiia proektirovaniia diskretnykh sistem : materialy Piatoi mezhdunar. konf.* [Computer-aided design of discrete systems : Proc. of the Fifth Intern. Conf.], Minsk, 2004, vol. 1, pp. 217–226 (in Russian).
8. Tverdokhlebov V. A. Rekurrentnost' geometricheskikh obrazov [The recurrent geometric images]. *Informatsiino-keruiuchi sistemi na zaliznichnomu transporti*, 2004, no. 4/5 (48/49), pp. 88–90 (in Russian).



9. Tverdokhlebov V. A. Konechnye avtomaty i analiz ikh geometricheskikh obrazov [Finite state machines and the analysis of their geometrical images]. *Problemy teoreticheskoi kibernetiki : tez. dokl. XIV Mezhdunar. konf., posviashch. 80-letiiu so dnia rozhd, P. V. Yablonskogo* [Problems of Theoretical Cybernetics : mes. rep. XIV Intern. conf., is dedicated 80th anniversary of birth. P. V. Yablonsky], Moscow, Moscow Univ. Press, 2005, pp. 153 (in Russian).
10. Tverdokhlebov V. A. Geometrical images of behaviour of the discrete determined systems. *Radioelectronic and computer systems*, 2006, no. 5(17), pp. 161–165 (in Russian).
11. Tverdokhlebov V. A. Technical diagnosing on the basis of geometrical structures of laws of functioning. *Radioelectronic and computer systems*, 2007, no. 7, pp. 158–167 (in Russian).
12. Tverdokhlebov V. A. Spektry dlia geometricheskikh obrazov avtomatov i ikh sviaz' s posledovatel'nostiami i figurami [Spectra for geometric images of machines and their connection with sequences and figures]. *Diskretnaia matematika i ee prilozheniia : materialy IX Mezhdunar. seminara* [Discrete mathematics and its applications : Materials IX Intern. workshop], Moscow, 2007, pp. 409–412 (in Russian).
13. Tverdokhlebov V. A. Interpoliatsiia geometricheskikh obrazov avtomatov v tekhnicheskome diagnostirovanii [Interpolation geometric images in automatic technical diagnosis]. *Dokl. Akad. voen. nauk* [Dokl. Acad. Mil. Sciences], 2007, no. 1(25), pp. 55–62 (in Russian).
14. Tverdokhlebov V. A. Geometricheskie obrazy zakonov funktsionirovaniia avtomatov i analiz svoistv avtomatov [Geometric images of machines functioning of laws and analysis of the properties of automata]. *Diskretnye modeli v teorii upravliaiushchikh sistem : tr. vos'moi mezhdunar. konf.* [Discrete models in the theory of control systems : mp. Eighth Intern. Conf.], Moscow, Moscow Univ. Press; MAKS Press, 2009, pp. 301–305 (in Russian).
15. Tverdokhlebov V. A. Geometrical models of automaton mappings and automaton. *Vestn. Kiev. nats. un-ta im. T. Shevchenko. Ser. fiz.-matem. nauki*, 2011, iss. 1, pp. 202–207 (in Russian).
16. Tverdokhlebov V. A. Geometrical approach to technical diagnosing of automaton. *Proc. IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2011)*, Kharkov, National Univ. of Radioelectronics, 2011, pp. 240–243.
17. Tverdokhlebov V. A. Geometricheskie modeli i metody raspoznavaniia avtomatov [Geometric patterns and automatic recognition techniques]. *Intellektual'nye sistemy i komp'iuternye nauki : materialy Kh Mezhdunar. konf.* [Intelligent Systems and Computer Science : Materials X Intern. Conf.], Moscow, Moscow Univ. Press, 2011, pp. 168–171 (in Russian).
18. Tverdokhlebov V. A. Klassifikatsiia geometricheskikh obrazov avtomatnykh otobrazhenii [Classification of geometric images automaton mappings]. *Dokl. Akad. voen. nauk* [Dokl. Acad. Mil. Sciences], 2012, no. 5 (54), pp. 97–105 (in Russian).
19. Tverdokhlebov V. A. Basic theorems for construction of geometric image of automaton mappings. *Radioelectronic and computer systems*, 2013, no. 5(64), pp. 379–384 (in Russian).
20. Tverdokhlebov V. A. Geometrical models and methods of recognition of automata. *Intelligent systems*, 2013, vol. 17, iss. 1–4, pp. 187–191 (in Russian).



Подписка на II полугодие 2016 года

Индекс издания по объединенному каталогу «Пресса России» 36017.
Журнал выходит 4 раза в год.

Цена свободная.

Оформить подписку онлайн можно
в Интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.aks.ru).

По всем вопросам обращаться в редакцию журнала:
410012, Саратов, Астраханская, 83;
тел. (845-2) 51-45-49, 52-26-89; факс (845-2) 27-85-29;
e-mail: izvestiya@sgu.ru