Итак, при $\alpha = 1/2$ существуют постоянные $C_3' \geq 1$ и $C_0 \geq 1$ такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^{1/2}}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \leq C_3' \frac{X}{\ln^4 X},$$

следовательно, условие (3) выполнено с $\alpha = 1/2$.

Таким образом, учитывая (2), получим, что существует мультипликативная функция $\omega(d)$, такая, что $\dfrac{\omega(d)}{d} X(x)$, где $X(x) = (li\ x^{1/2})^2$, является приближением числа элементов в последовательности A, которые делятся на d. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Левин Б. В.* Распределение «почти простых» чисел в целозначных полиномиальных последовательностях // Докл. АН Узб. ССР. 1962. Т. 11. С. 7–9. [*Levin B. V.* Distribution «almost simple» number in all value polynomial sequence // Doklady Akademii Nauk Uzb. SSR. 1962. Vol. 11. P. 7–9.]

2. *Бухштаб А. А.* Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета // УМН. 1967. Т. 22, № 3(135). С. 199–226. [*Buchstab A. A.* A combinatorial strengthening of the Eratosthenes' sieve method // Russian Math. Surveys. 1967. Vol. 22, № 3. P. 205–233.]

3. *Рихерт Х.-Э.* Решето Сельберга // Проблемы аналитической теории чисел / пер. с англ. Б. В. Левина. М. : Мир, 1975. С. 7–42. [*Richert H.-E.* Selbergs sieve // Proc. of Symposia in Pure Mathematics (Stony Brook, 1969). Providence, R. I. : Amer. Math. Soc., 1971. Vol. 20. P. 287–310.]

4. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. М. : Просвещение, 1966. 384 с. [*Buchstab A. A.* Number theory. Moscow : Prosveschenie, 1966. 384 p.]

5. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М. : Наука, 1981. 176 с. [*Vinogradov I. M.* Basic number theory. Moscow : Nauka, 1981. 176 p.]

6. *Барбан М.Б.* Метод «большого решета» и его применения в теории чисел // УМН. 1966. Т. 21, № 1(127). С. 51–102. [*Barban M. B.* The «large sieve» method and its applications in the theory of numbers // Russian Math. Surveys. 1966. Vol. 21, № 1. P. 49–103.]

УДК 501.1

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Н. С. Калужина

Воронежский государственный университет
E-mail: kaluzhina_n_s@mail.ru

В работе изучаются качественные свойства слабого решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Доказано, что каждое слабое решение задачи Коши является медленно меняющейся на бесконечности функцией. Полученный результат применяется для исследования решения задачи Неймана для уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: задача Коши, медленно меняющаяся на бесконечности функция, слабое решение задачи Коши, задача Неймана для уравнения теплопроводности.

Qualitative Properties of Mild Solutions of the Cauchy Problem

N. S. Kaluzhina

In this paper we study the qualitative properties of a mild solution of the problem Cauchy problem for the heat equation. We prove that every mild Cauchy problem is a slowly varying at infinity function. The result is applied to study solutions of the Neumann problem for the heat equation.

Key words: Cauchy problem, slowly varying at infinity function, a mild solution of the Cauchy problem, Neumann problem for the heat equation.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H — комплексное гильбертово пространство [1], $\operatorname{End} H$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H. Через $L^1(\mathbb{R}_+, H)$ обозначается пространство суммируемых на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ со значениями в H функций со сверткой функций в качестве умножения (см. [2])

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(t-s) g(s)\, ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \qquad f, g \in L^1(\mathbb{R}_+, H).$$

Через $C_b(\mathbb{R}_+, H)$ обозначается банахово пространство непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций со значениями в H с supremum-нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}_+} \|x(t)\|$. Подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}_+, H)$, исчезающих на бесконечности (т. е. функции x из $C_b(\mathbb{R}_+, H)$ со свойством $\lim\limits_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0$), будем обозначать через $C_0(\mathbb{R}_+, H)$. Заметим, что во введенных функциональных пространствах действует сильно непрерывная изометрическая полугруппа операторов сдвига $(S(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, действующая по правилу: $(S(t)x)(s) = x(t+s)$, $s, t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \{C_b(\mathbb{R}_+, H), L^1(\mathbb{R}_+, H), C_0(\mathbb{R}_+, H)\}$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Lu + f(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $f \in L^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, H)$, $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$, оператор $L : D(L) \subset H \to H$ имеет дискретный спектр и является самосопряженным. Пусть $L \leq 0$, т. е. $(Lx, x) \leq 0$ для всех $x \in H$, и 0 — изолированная точка спектра $\sigma(L)$, которая является собственным значением конечной кратности (т. е. размерность ядра $\dim \operatorname{Ker} L = n \geq 1$). Отметим, что оператор L является генератором некоторой C_0-полугруппы $(T(t))$, $t \geq 0$.

Здесь используются некоторые результаты, изложенные в статьях [1–5].

Под решением уравнения (1) будем понимать функцию из следующего определения.

Определение 1. Функция $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ называется *слабым решением* (*mild-solution*) задачи (1), если она представима в виде

$$u(t) = \int\limits_0^t T(t-s) f(s) ds, t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

При рассмотрении задачи Коши (1) естественным образом возникает вопрос о качественном поведении слабого решения при больших значениях времени t. Для того, чтобы решить эту проблему, введем в рассмотрение следующее понятие.

Определение 2. Функция $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности* функцией (используется обозначение $u \in C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$), если для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено $S(t)u - u \in C_0(\mathbb{R}_+, H)$, т. е. для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ $\lim\limits_{s\to\infty} \|u(t+s) - u(s)\| = 0$.

Примером медленно меняющееся на бесконечности функции является функция $\sin(\ln(1+|t|))$, $t \in \mathbb{R}$.

Целью настоящей работы является получение следующего результата.

Теорема 1. *Каждое слабое решение задачи* (1) *является медленно меняющейся на бесконечности функцией (элементом пространства $C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$).*

В п. 2 содержится доказательство теоремы 1, а п. 3 посвящен приложению полученного результата к исследованию асимптотических свойств слабого решения задачи Неймана для уравнения теплопроводности. Заметим, что в статье [6] были получены результаты относительно асимптотических свойств решения задачи Неймана, но с более сильными условиями на правую часть. В данной работе от правой части f требуется лишь $f(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, H)$, $x \in [0, 1]$.

Сформулируем важное свойство медленно меняющихся на бесконечности функций (см. [4, замечание 3]).

Теорема 2. *Любая функция $u \in C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$ представима в виде*

$$u = u_0 + u_1, \tag{3}$$

где $u_0 \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ и существует $\lim\limits_{t\to\infty} u_0(t)$, а $u_1 \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ при достаточно больших t имеет производную $u_1'(t)$, причем $u_1' \in C_0(\mathbb{R}_+, H)$. Верно и обратное свойство: если функция $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ представлена в виде (3)*, то она принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$.*

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Поскольку 0 — изолированное собственное значение оператора L, то будем рассматривать ортогональное разложение гильбертова пространства H в прямую сумму подпространств $H = H_0 \oplus H_1$, где $H_0 = \operatorname{Ker} L$, $\dim H_0 = n \geq 1$ и $H_1 = H_0^\perp$ — является инвариантным подпространством для оператора L и $0 \notin \sigma(L|H_1) = \sigma(L_1)$ (см. [3]), где $L_1 = L|H_1 : H_1 \to H_1$ — сужение оператора L на подпространство H_1. Пусть P_0, P_1 — ортопроекторы, осуществляющие это разложение, $\operatorname{Im} P_0 = H_0$

и $\operatorname{Im} P_1 = H_1$. В соответствии с этим уравнение (1) расщепляется на

$$\begin{cases} \dfrac{du_0}{dt} = P_0 f(t), \ t \geq 0, \\ u_0(0) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = L_1 u_1 + P_1 f(t), \ t \geq 0, \\ u_1(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Отметим, что L_1 является генератором C_0-полугруппы $T_1(t) = T(t)|H_1$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $T_1(t)$ — сужение полугруппы $T(t)$ на H_1.

Лемма 1. *Пусть существует слабое решение* $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ *уравнения* (1). *Тогда оно представимо в виде* $u = u_0 + u_1$, *где функция* $u_0(t) = \int\limits_0^t P_0 f(s) ds$ — *слабое решение уравнения* (4), *а функция* $u_1(t) = \int\limits_0^t T_1(t-s) P_1 f(s) ds$ *является слабым решением уравнения* (5).

Доказательство. Пусть u — ограниченное слабое решение уравнения (1). Тогда оно представимо в виде (2). Применяя к формуле (2) ортопроектор $P_0 : H \to H_0$, получим $P_0 u(t) = \int\limits_0^t P_0 T(t-s) f(s) ds = \int\limits_0^t T(t-s) P_0 f(s) ds = \int\limits_0^t P_0 f(s) ds$, $t \geq 0$, где использовалась перестановочность P_0 и $T(t)$, а также свойство $H_0 = \operatorname{Ker} L$. Таким образом, $u_0 = P_0 u$ является слабым решением (4) по определению 1.

Аналогично, применяя к (2) ортопроектор $P_1 : H \to H_1$, получим $P_1 u(t) = \int\limits_0^t P_1 T(t-s) f(s)\, ds = \int\limits_0^t P_1 T(t-s) P_1 P_1 f(s)\, ds$, $t \geq 0$, откуда следует, что $u_1 = P_1 u$ является слабым решением уравнения (5). Поскольку $H = H_0 \oplus H_1$, то слабое решение (1) единственным образом представимо в виде $u = u_0 + u_1$. $\square$

Таким образом, уравнение (1) расщепляется на уравнения (4) и (5) и каждое ограниченное слабое решение задачи (1) представимо в виде: $u = u_0 + u_1$, где u_0 — слабое решение уравнения (4), u_1 — слабое решение уравнения (5).

Заметим, что из спектральных свойств оператора L и его сужения L_1 следует, что полугруппа $(T_1(t))$, $t \geq 0$, является экспоненциально устойчивой. А именно имеют место оценки: $\|T_1(t)\| \leq e^{\alpha_0 t}$, $t \geq 0$, где $\alpha_0 = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}\} = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(L_1)\} < 0$. Значит, существует $\lim\limits_{t \to \infty} u_1(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \int\limits_0^t T_1(t-s) P_1 f(s)\, ds$, поскольку $f \in L^1(\mathbb{R}_+, H)$.

Поскольку u — решение (1), то u_0 имеет производную $\dfrac{du_0}{dt}$ и в силу свойства $P_0 f \in C_0(\mathbb{R}_+, H)$ $\dfrac{du_0}{dt} \in C_0(\mathbb{R}_+, H)$.

Таким образом, по теореме 2 функция u является медленно меняющейся на бесконечности функцией, т. е. элементом пространства $C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$.

3. ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В $L^2[0,1]$

Пусть $H = L^2[0,1]$ — комплексное гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций, заданных на отрезке $[0,1]$, и скалярным произведением:

$$(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt, \qquad f, g \in H.$$

Также будем рассматривать $W_2^2[0,1]$ — пространство Соболева комплексных функций из $L^2[0,1]$, которые абсолютно непрерывны на $[0,1]$ и имеют вторую производную, принадлежащую пространству $L^2[0,1]$ (см. [5]). Через $C[0,1]$ обозначается банахово пространство комплексных непрерывных на $[0,1]$ функций с supremum-нормой $\|x\| = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t) - a^2(x)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t),\ t \geq 0,\ x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0,\ t \geq 0, \\ u(x,0) = 0,\ x \in [0,1], \end{cases} \tag{6}$$

где a — вещественная функция из $C_b[0,1]$ и для всех $x \in [0,1]$ выполнено $a^2(x) > 0$. Предполагается, что функция $f(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, H)$, $x \in [0,1]$.

Вопрос о стабилизации решения задачи (6) рассматривался в статье [6], но с более жесткими условиями на правую часть. Цель п. 3 — применить теорему 1 к слабому решению задачи (6).

Введем оператор $A : D(A) \subseteq H \to H$ с областью определения $D(A) = \{u \in W_2^2[0,1] : u'(0) = u'(1) = 0\}$, действующий по правилу $Au = \dfrac{d^2u}{dx^2}$, $u \in D(A)$. Собственные функции оператора A имеют вид: $e_n(t) = \cos(\pi n t)$, $n \geq 0$, $t \in [0,1]$, собственные значения $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, $n \geq 0$. Таким образом, оператор A необратим (поскольку $0 \in \sigma(A)$) и $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$.

Пусть оператор $B : H \to H$ действует по правилу: $Bu = a^2 u$, $u \in H$. Поскольку $a^2(x) > 0$, $\forall\, x \in [0,1]$, то B обратим в H и обратный имеет вид

$$B^{-1}u = \frac{1}{a^2}u, \quad u \in H.$$

Заметим, что операторы A и B являются самосопряженными, т. е. $A^* = A$, $B^* = B$. Теперь задачу (6) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - BAu = f(t),\ t \geq 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $D(BA) = D(A)$. В связи с рассмотрением задачи (7) естественным образом возникает вопрос о качественном поведении решения $u(x,t)$, когда $t \to \infty$, $x \in [0,1]$.

Покажем сначала, что оператор BA имеет компактную резольвенту. Для этого будем рассматривать разложение гильбертова пространства H в прямую сумму подпространств $H = H_0 \oplus H_1$, где H_0 — подпространство констант, и H_1 — подпространство, порожденное собственными функциями (e_n), $n \geq 1$, оператора A. Заметим, что имеет место разложение единицы $I = P_0 \oplus P_1$, где P_0, P_1 — ортопроекторы на соответствующие подпространства H_0 и H_1.

Рассмотрим оператор $BA - \lambda I = B(A - \lambda B^{-1}) = B(A - \lambda\tilde{B})$, где $\tilde{B} = B^{-1}$. Тогда матрица оператора $A - \lambda\tilde{B}$ относительно прямой суммы $H = H_0 \oplus H_1$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\lambda P_0\tilde{B}P_0, & -\lambda P_0\tilde{B}P_1 \\ -\lambda P_1\tilde{B}P_0, & AP_1 - \lambda P_1\tilde{B}P_1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения $B_{00} = P_0\tilde{B}P_0$, $B_{01} = P_0\tilde{B}P_1$, $B_{10} = P_1\tilde{B}P_0$ и $A_0 = AP_1 - \lambda P_1\tilde{B}P_1$. Заметим, что оператор A_0 обратим, а оператор B_{00} действует на функции $u \in H$ по правилу $B_{00}u = P_0\tilde{B}P_0 u = (\tilde{B}P_0 u, e_0)e_0 = \left(\int\limits_0^1 \dfrac{1}{a^2(x)}dx\right)(u, e_0)$, где $e_0 = 1$. Таким образом, оператор B_{00} является скалярным оператором умножения в H_0 на $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{a^2(x)}dx > 0$. Следовательно, при $|\lambda| \neq 0$ оператор $-\lambda B_{00}$ является обратимым оператором.

Итак, матрица оператора $A - \lambda\tilde{B}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\lambda B_{00}, & -\lambda B_{01} \\ -\lambda B_{10}, & A_0 \end{pmatrix}.$$

Ее можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} -\lambda B_{00}, & 0 \\ 0, & A_0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} I_0, & B_{01}B_{00}^{-1} \\ 0, & I_1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ A_0^{-1}B_{10}, & 0 \end{pmatrix} \right], \tag{8}$$

где I_0, I_1 — тождественные операторы на соответствующих подпространствах H_0 и H_1, а оператор $\begin{pmatrix} I_0, & B_{01}B_{00}^{-1} \\ 0, & I_1 \end{pmatrix}$ обратим и обратный имеет вид $\begin{pmatrix} I_0, & -B_{01}B_{00}^{-1} \\ 0, & I_1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, при малых $|\lambda|$ второй сомножитель в (8) обратим, а первый обратим при $\lambda \neq 0$ и обратный к нему есть оператор с компактной резольвентой. Значит, оператор BA, представимый в виде произведения обратимого и компактного операторов, имеет компактную резольвенту.

Введем теперь в гильбертовом пространстве H новое скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по правилу

$$\langle x, y \rangle = (B^{-1/2}x, B^{-1/2}y), \quad x, y \in H.$$

Лемма 2. *Оператор $BA : D(A) \subset H \to H$ является симметрическим на своей области определения.*

Доказательство. Для всех $x, y \in D(A)$ в силу самосопряженности операторов B и A справедливы равенства:

$$\langle BAx, y \rangle = (B^{-1/2}BAx, B^{-1/2}y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, B^{-1}BAy) =$$
$$= (B^{-1/2}x, B^{-1/2}BAy) = \langle x, BAy \rangle,$$

откуда следует симметричность BA на $D(A)$. □

Таким образом, оператор BA обладает свойствами:

1) является симметрическим на $D(A)$ в новом скалярном произведении;

2) замкнут, поскольку B обратим;

3) $\operatorname{Ker} BA = \operatorname{Ker} A$;

4) $D(BA) = D(A)$;

5) неотрицательно определен относительно нового скалярного произведения, поскольку $A \geq 0$;

6) имеет компактную резольвенту и 0 — изолированная точка спектра $\sigma(BA)$ оператора BA;

7) существует такое $\varepsilon > 0$, что шар $B(0, \varepsilon) \setminus \{0\} \subset \rho(BA)$, где $\rho(BA)$ — резольвентное множество оператора BA.

Из этого следует, что BA является самосопряженным оператором относительно нового скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Таким образом, по теореме 1 каждое слабое решение задачи (6) является медленно меняющейся на бесконечности функцией, т. е. элементом пространства $C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$.

В заключение отметим, что медленно меняющиеся на бесконечности функции использовались при исследовании в работе [7], а также при изучении почти периодических на бесконечности функций в работе [8].

Библиографический список

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М. : Наука, 1966. 544 с. [*Ahiezer N. I., Glazman I. M.* The theory of linear operators in Hilbert space. Moscow : Nauka, 1966. 544 p.]

2. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Функциональный анализ. СМФН. 2004. Т. 9. М. : МАИ. С. 3–151. [*Baskakov A. G.* Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators // J. of Math. Sciences. 2006. Vol. 137, iss. 4. P. 4885–5036.]

3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с. [*Naimark M. A.* Linear Differential Operators. Pt. I. New York : Ungar Publ. Co., 1967; *Naimark M. A.* Linear Differential Operators. Pt. II. New York : Ungar Publ. Co., 1968.]

4 *Калужина Н. С.* Медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции и их свойства // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2010. № 2. С. 97–103. [*Kaluzhina N. S.* Slowly varying function at infinity, the periodic function at infinity and their properties // Proc. of Voronezh State University. Ser. Phys. Math. 2010. № 2. P. 97–103.]

5. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1987. 165 с. [*Baskakov A. G.* Harmonic analysis of linear operators. Voronezh, 1987. 165 p.]

6. *Карпова Ю. Ю., Рябенко А. С.* Изучение второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2011. № 1. С. 168–174. [*Karpova Yu. Yu., Ryabenko A. S.* Study of the second initial-boundary value problem for the heat equation with variable thermal conductivity // Proc. of Voronezh State University. Ser. Phys. Math. 2011. № 1. P. 168–174.]

7. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С.* Теорема Берлин-

га для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 643–661. [*Baskakov A. G., Kaluzhina N. S.* Beurling's theorem for functions with essential spectrum from homogeneous spaces and stabilization of solutions of parabolic equations // Math. Notes. 2012. Vol. 92, № 5. P. 643–661.]

8. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1 (409). С. 77–128. [*Baskakov A. G.* The study of linear differential equations by the methods of the spectral theory of differential operators and linear relations // UMN. 2013. Vol. 68, № 1 (409). P. 77–128.]

УДК 517.9

О СВЯЗИ ПРОИЗВОДНОЙ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ЕГО ОПОРНОЙ ФУНКЦИИ

Е. С. Половинкин

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный
E-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

В работе получены достаточные условия, при которых опорная функция производной многозначного отображения в некотором смысле совпадает с производной опорной функции многозначного отображения. Приведен пример несовпадения этих понятий и пример липшицева многозначного отображения, опорная функция которого ни в одной точке не имеет смешанных производных.

Ключевые слова: касательные конусы, производная многозначного отображения, опорная функция.

On Relationship between Derivative of Multifunction and Its Support Function

E. S. Polovinkin

We obtain sufficient conditions under which the support function of the derivative of a set-valued mapping coincides with the derivative of the support function of a set-valued mapping in some sence. The example showing the difference between these concepts and the example of a Lipschitz set-valued mapping whose support function at any point does not have the mixed derivatives are obtained.

Key words: tangent cones, derivative of multifunctions, support function.

ВВЕДЕНИЕ

Проблему дифференцирования многозначных отображений $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ (где $\mathcal{P}(Y)$ — множество всех подмножеств некоторого банахова пространства Y) исследовали многие ученые. В работах Ж.-П. Обена (J.-P. Aubin) и автора (см., например, [1, 2]) впервые было введено понятие производной многозначного отображения, связанное с понятием касательного конуса к графику отображения.

В то же время выпуклозначные отображения удобно исследовать, используя опорную функцию этих отображений. Некоторые авторы пытались строить аппроксимации многозначных отображений, опираясь на первую производную опорной функции $x \to s(p, F(x))$ (где $s(p, A) \doteq \sup\{\langle p, x\rangle \mid x \in A\}$ — опорная функция множества $A \subset Y$ в точке $p \in Y^*$) и даже на смешанную производную $\dfrac{\partial^2 s(p, F(x))}{\partial x \partial p}$. В некоторых исследованиях им требовалось существование этой смешанной производной $\dfrac{\partial^2 s(p, F(x))}{\partial x \partial p}$, что предполагалось верным почти всюду для любого липшицева выпуклозначного отображения.

Производная функции $x \to s(p, F(x))$, являясь положительно однородной выпуклой функцией по p, задает опорную функцию некоторого многозначного отображения по x.

В нашей работе мы покажем, что в произвольной точке $x_0 \in X$ (даже при значениях p из нормального конуса к непустому множеству $F(x_0)$) производная функции $x \to s(p, F(x))$ в точке x_0 может отличаться от опорной функции многозначной L-производной исходного отображения F в этой точке, т. е. производная опорной функции не всегда осуществляет хорошую аппроксимацию многозначного отображения F. Приведем достаточные условия, при которых производная от опорной функции отображения F задает локальную коническую аппроксимацию этого отображения. В п. 3 приведем пример липшицева многозначного отображения, у которого отсутствуют смешанные производные $\dfrac{\partial^2 s(p, F(x))}{\partial x \partial p}$ его опорной функции.

