



- of Sciences of Armenia. Erevan, 1997. P. 79–96.]  
 2. *Rayleigh J.* On waves propagated along the surface of an elastic solid // *Proc. Lond. Math. Soc.* 1885. Vol. 17, № 253. P. 4–11.  
 3. *Коненков Ю. К.* Об изгибной волне «рэлеевского» типа // *Акуст. журн.* 1960. Т. 6, вып. 1. С. 124–126. [*Konenkov Y. K.* A Rayleigh-type flexural wave // *Soviet Physics Acoustics.* 1960. Vol. 6, iss. 1. P. 124–126.]  
 4. *Fu Y. B.* Existence and uniqueness of edge waves in a generally anisotropic elastic plate // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2003. Vol. 56. P. 605–616.  
 5. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V.* Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // *J. Acoust. Soc. America.* 2000. Vol. 107, № 3. P. 1383–1393.  
 6. *Kaplunov J. D., Wilde M. V.* Edge and interfacial

vibrations in elastic shells of revolution // *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP).* 2000. Vol. 51. P. 29–48.

7. *Kaplunov J. D., Prikazchikov D. A., Rogerson G. A.* On three-dimensional edge waves in semi-infinite isotropic plates subject to mixed face boundary conditions // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. № 118(5). P. 2975–2983.

8. *Zernov V., Kaplunov J. D.* Three-dimensional edge waves in plates // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 2008. Vol. 464. P. 301–318.

9. *Вильде М.В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю.* Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М. : Физматлит, 2010. 280 с. [*Wilde M. V., Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu.* Edge and interfacial resonance phenomena in elastic bodies. Moscow : Fizmatlit, 2010. 280 p.]

УДК 534.121.1

## ЯВНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КРАЕВЫХ И ИНТЕРФЕЙСНЫХ ВОЛН В ТОНКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ

Ю. Д. Каплунов<sup>1</sup>, Е. Л. Коссович<sup>2</sup>, Р. Р. Мухомодьяров<sup>2</sup>,  
 О. В. Сорокина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Университет Брюнель, Лондон  
 E-mail: Julius.Kaplunov@brunel.ac.uk

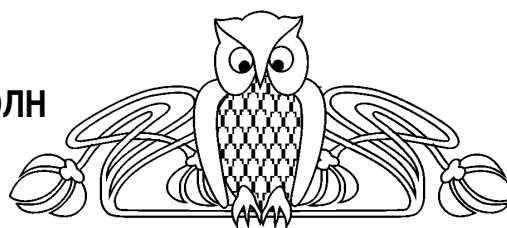
<sup>2</sup>Саратовский государственный университет  
 E-mail: kossovichel@info.sgu.ru, rinatm@mail.ru,  
 SorokinaOVA@yandex.ru

В статье приведены общие решения задач о колебаниях тонких изотропных полубесконечных пластин. Приведены основные принципы построения явных параболических эллиптических моделей, описывающих распространение краевых и интерфейсных изгибных волн. Построенные модели позволяют выделить вклад локализованных изгибных краевых и интерфейсных волн в общую деформацию пластин, вызванную приложенным на торце или в месте стыка нагружением. Также они отражают двойственную параболическую эллиптическую природу изгибных краевых и интерфейсных волн.

**Ключевые слова:** изотропия, прогиб, перерезывающая сила, изгибающий момент, явная параболическая эллиптическая модель.

### ВВЕДЕНИЕ

Известно, что и поверхностные, и краевые волны скрыты в математических постановках исходных задач [1]. Сравнительно недавно была разработана новая методика анализа краевых изгибных волн, заключающаяся в построении явных моделей, описывающих локализованные волны и выделяющие их вклад в общую постановку задачи. Данные модели, отражающие двойственную гиперболически эллиптическую природу поверхностных волн, недавно были построены в работе [1] для упругих и пьезоупругих поверхностных волн (а именно волны Рэлея и Гуляева–Блюштейна). Данные модели состоят из эллиптического уравнения, описывающего затухание волны внутрь по направлению от поверхности и гиперболического уравнения, описывающего распространение волны на поверхности. Модели обеспечивают значительное упрощение постановки и решения задач, связанных с анализом распространения поверхностных волн. Построение таких моделей является сложной задачей, требующей знаний в асимптотическом анализе исследуемых деформаций, представлений о природе рас-



### Explicit Models for Flexural Edge and Interfacial Waves in Thin Isotropic Plates

J. D. Kaplunov, E. L. Kossovich, R. R. Mukhomodyarov,  
 O. V. Sorokina

Exact solutions for problems of vibrations of isotropic thin elastic plates are presented in the work. Some basic principles of explicit dual parabolic-elliptic models for flexural edge and interfacial waves propagation are revealed. The obtained explicit models extract the contribution of the flexural wave into the full dynamic response. Also, these models reveal a dual parabolic-elliptic nature of the flexural edge and interfacial waves.

**Key words:** isotropy, deflection, shear force, bending moment, explicit dual parabolic-elliptic model.



пространения локализованных волн и др. Таким образом, целью данной работы является построение явных приближенных моделей, описывающих изгибные краевые и интерфейсные волны. Предлагается рассмотреть ряд случаев для изотропных пластин. Модели будут включать эллиптическое уравнение для описания затухания волны от торца и параболическое уравнение для торца. Таким образом, построенные модели будут отражать двойственную параболическую эллиптическую природу изгибных краевых волн.

## 1. ЯВНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КРАЕВЫХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим полубесконечную изотропную пластину, торец которой свободен от внешних нагрузок.

В рамках теории Кирхгофа изгиба тонких пластин уравнение, описывающее прогиб  $w$  такой пластины, имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $w$  — прогиб срединной плоскости,  $\rho$  — плотность материала пластины,  $h$  — полутолщина пластины,  $D$  — жесткость материала пластины.

Предполагая, что оси  $0x$  и  $0y$  расположены, как показано на рис. 1, будем рассматривать три типа граничных условий, включающих свободный от нагружения край, а также край, нагруженный внешним изгибающим моментом, перерезывающей силой или их комбинацией. В последнем случае, который соответствует сложному торцевому нагружению, возможно разделение исходной задачи. В силу линейности постановки задач в рамках теории Кирхгофа изгиба тонких пластин итоговое решение получается путем суперпозиции полученных компонент деформации.

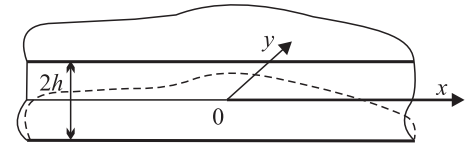


Рис. 1. Полубесконечная пластина, декартова система координат

В случае свободного края пластины имеем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad (2)$$

для случая нагружения изгибающим моментом получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_0(x, t)}{D}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad (3)$$

а для нагружения перерезывающей силой —

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{N_0}{D},$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала пластины,  $M_0$  — изгибающий момент, приложенный к краю пластины, а  $N_0$  — обобщенная перерезывающая сила Кирхгофа.

Решение задачи о свободных вибрациях тонкой полубесконечной изотропной пластины было подробно описано в работе [2]. Также в этой работе автор получил и решил знаменитое дисперсионное уравнение, решением которого является скорость новой локализованной волны, так называемой изгибной волны Коненкова.

Аналогично рассуждениям автора [2], используя задачу (1), (2), можно получить следующее уравнение:

$$1 - \nu^2 - c^4 + 2(1 - \nu)\sqrt{1 - c^4} = 0, \quad (4)$$

где  $c = \frac{\sqrt{-is\lambda_0}}{p}$ ,  $\lambda_0^2 = \frac{2\rho h^5}{T^2 D}$ ,  $p$  — параметр преобразования Фурье, примененного к пространственной координате  $y$  в уравнениях исследуемой задачи,  $s$  — частотный параметр из преобразования Лапласа по временной координате,  $T$  — характеристический отрезок времени, введенный для решения задачи в безразмерных переменных.



Решения уравнения (4) определяются аналитически и имеют следующий вид:

$$c_k^4 = (1 - \nu) \left[ 3\nu - 1 + 2\sqrt{2\nu^2 - 2\nu + 1} \right], \quad c_2^4 = (1 - \nu) \left[ 3\nu - 1 - 2\sqrt{2\nu^2 - 2\nu + 1} \right].$$

Корень  $c_k$  соответствует так называемой скорости краевой изгибной волны [2]. Отметим, что скорость волны Коненкова зависит от множества параметров, входящих в частотный параметр  $\lambda_0$ , и, следовательно, будем называть  $c_k$  коэффициентом скорости краевой изгибной волны Коненкова.

Рассмотрим далее следующий случай простого краевого нагружения — изгибающий момент, приложенный к торцу пластины. В этом случае решается задача (1)–(3). Введем новые безразмерные переменные следующего вида:

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad W^* = \frac{w}{h}, \quad \tau = \frac{t}{T}.$$

Тогда решение для образа прогиба пластины  $\hat{W}(\eta)$  имеет следующий вид

$$\hat{W}(\eta) = \frac{\hat{M}_0}{-is\lambda_0} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_1(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0}}{c}\alpha_c\eta} + \Delta_2(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0}}{c}\beta_c\eta}}{\Delta(c)} X(c), \quad (5)$$

где  $\hat{M}_0(p, s)$  — образ безразмерного изгибающего момента, приложенного к краю пластины,

$$\Delta_1(c) = [(1 - \nu) - c^2] \sqrt{1 + c^2}, \quad \Delta_2(c) = -[(1 - \nu) + c^2] \sqrt{1 - c^2}, \quad \Delta(c) = (\beta_c - \alpha_c)(c^4 - c_2^4), \quad (6)$$

$$\alpha_c = \sqrt{1 - c^2}, \quad \beta_c = \sqrt{1 + c^2}, \quad X(c) = 1 - \nu^2 - c^4 - 2(1 - \nu)\sqrt{1 - c^4}. \quad (7)$$

Как было указано выше, целью данной работы является выделение вклада изгибной краевой волны Коненкова в общее решение задачи об изгибе тонкой полубесконечной изотропной пластины. Естественно предположить, что вклад волны обусловлен полюсами знаменателя  $c = \pm c_k$ . Таким образом, путем асимптотического анализа решения (5), можно построить следующую модель, явно описывающую основные закономерности распространения краевой волны. Она состоит из двух уравнений.

1. Параболическое уравнение. На торце пластины имеем параболическое уравнение, характеризующее распространение волны вдоль края:

$$c_k^4 \frac{\partial^4 w_e}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D} \frac{\partial^2 w_e}{\partial t^2} = Q_e^{(1)} \frac{1}{D} \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2}, \quad (8)$$

где  $w_e(x, t)$  — краевой прогиб, связанный с краевой изгибной волной Коненкова и

$$Q_e^{(1)} = \frac{\Delta_1(c_k) + \Delta_2(c_k)}{\Delta(c_k)} X(c_k). \quad (9)$$

2. Эллиптическое уравнение. Для области вне торца пластины имеем следующее эллиптическое уравнение, которое характеризует затухание волны:

$$\frac{\partial^4 w_{in}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{in}}{\partial x^2 \partial y^2} + (1 - c_k^4) \frac{\partial^4 w_{in}}{\partial x^4} = 0, \quad (10)$$

где  $w_{in}(x, y)$  — прогиб внутри пластины, вызванный краевой изгибной волной Коненкова. с краевыми условиями на торце:

$$w_{in}(x, 0) = w_e(x), \quad \frac{\partial^2 w_{in}}{\partial y^2} = -\nu \frac{\partial^2 w_e}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Построенная модель, очевидно, раскрывает двойственную параболическую эллиптическую природу краевой изгибной волны Коненкова. Данная модель отличается от гиперболической эллиптической природы модели для классической волны Рэлея, для которой на поверхности мы имеем гиперболическое уравнение вместо параболического на торце (см. [1, 3]). Анализ построенных моделей и эффективности выделения вклада изгибной краевой волны из общего решения задачи проводился для точечного изгибающего момента  $M_0(x, t) = M_0 \delta(x) e^{-i\omega t}$ . Были построены трехмерные профили для безразмерного прогиба, связанного с волной Коненкова, и для полного прогиба пластины (рис. 2).



Аналогичным образом находится решение задачи об изгибе тонкой изотропной пластины, вызванном приложенной к торцу перерезывающей силой. Решение и модель в данном случае строятся для угла поворота вертикального сечения пластины  $v(x, y, t) = \partial w / \partial y$  относительно оси  $0x$ .

Решение задачи для образа угла поворота  $\hat{V}(\eta)$  имеет вид

$$\hat{V}(\eta) = \frac{\hat{N}_0}{-is\lambda_0} \frac{c^2}{(c^4 - c_k^4)} \frac{\Delta_1(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0}}{c}\alpha_e\eta} + \Delta_2(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0}}{c}\beta_e\eta}}{\Delta(c)} X(c),$$

где  $\Delta_1(c) = [(1 - \nu) + c^2] \sqrt{1 - c^2}$ ,  $\Delta_2(c) = -[(1 - \nu) - c^2] \sqrt{1 + c^2}$ .

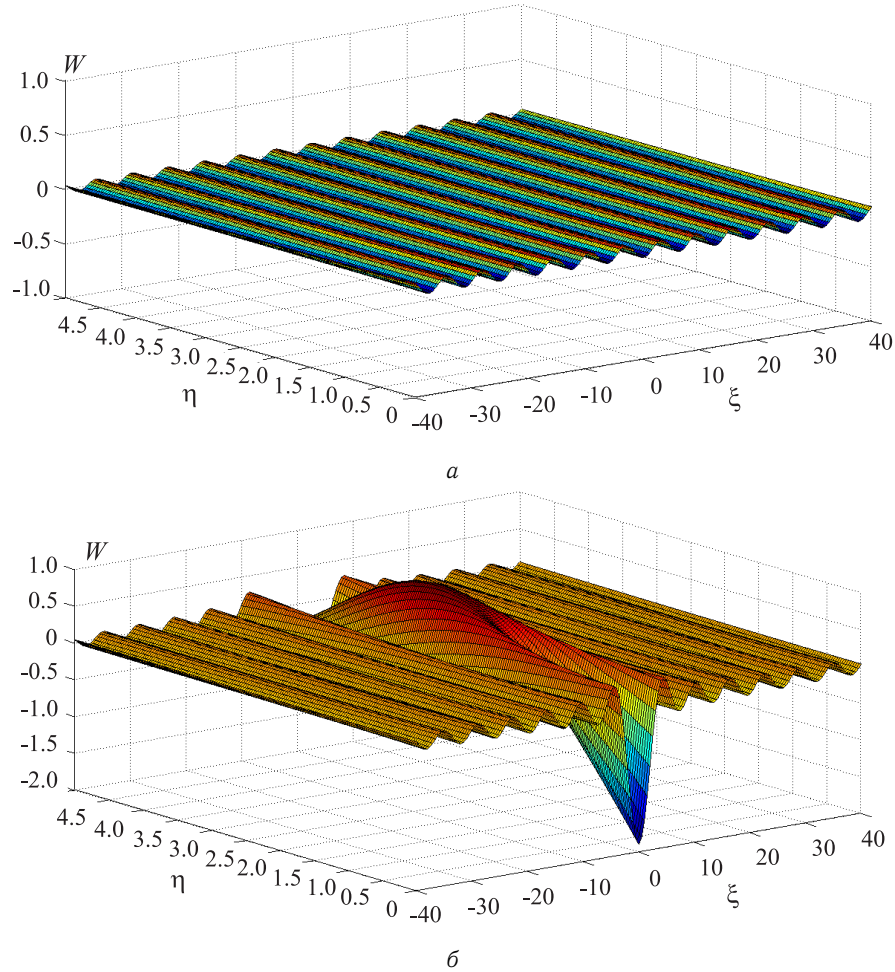


Рис. 2. Трехмерные профили: а – краевая изгибная волна Коненкова в изотропной пластине (связанная параболическая эллиптическая модель); б – полный прогиб изотропной пластины (точное решение)

Связанная параболическая эллиптическая модель:

1. Параболическое уравнение. На торце пластины имеем:

$$c_k^4 \frac{\partial^4 v_e(x, t)}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D} \frac{\partial^2 v_e}{\partial t^2} = Q_e^{(2)} \frac{1}{D} \frac{\partial^2 N_0}{\partial x^2},$$

где  $v_e(x, t)$  – угол вращения на торце пластины и

$$Q_e^{(2)} = \frac{\Delta_1(c_k) + \Delta_2(c_k)}{\Delta(c_k)} X(c_k).$$

2. Эллиптическое уравнение. Для области вне торца пластины имеем следующее эллиптическое уравнение, которое характеризует затухание волн:

$$\frac{\partial^4 v_{int}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 v_{int}}{\partial x^2 \partial y^2} + (1 - c_k^4) \frac{\partial^4 v_{int}}{\partial x^4} = 0,$$



где  $v_{int}(x, y)$  — угол поворота, ассоциируемый со вкладом краевой изгибной волны Коненкова внутри пластины,  $v_{int}(x, 0) = v_e(x)$ ,  $\frac{\partial^2 v_{int}}{\partial y^2} = -(2 - \nu) \frac{\partial^2 v_e}{\partial x^2}$ .

Очевидно, что в этом случае построенные уравнения имеют ту же форму, что и ранее, см. (8)–(11). Характер вклада волны Коненкова в общее решение задачи также аналогичен приведенному выше. Анализ всех полученных результатов позволяет утверждать, что волна Коненкова вносит ключевой вклад в решение вблизи края пластины.

## 2. ЯВНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ ИНТЕРФЕЙСНЫХ ВОЛН ТИПА СТОУНЛИ

Рассмотрим теперь задачу об интерфейсных колебаниях двух тонких изотропных пластин при условии идеального контакта (рис. 3).

Уравнения движения для прогибов каждой из пластин записываются в виде

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} + \frac{2\rho_i h}{D_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2,$$

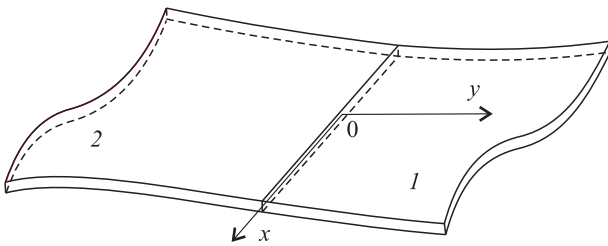


Рис. 3. Стык двух полубесконечных пластин

где  $\rho_i$  — плотности материала пластин 1 и 2,  $h$  — полутолщина пластин (считается, что толщина пластин одинакова) и  $D_i$  — изгибные жесткости.

Предполагая, что стык пластин  $y = 0$  непрерывен и обе пластины закреплены жестко, т. е. выполняются следующие условия идеального контакта:

$$\begin{aligned} w_1 &= w_2, & \frac{\partial w_1}{\partial y} &= \frac{\partial w_2}{\partial y}, \\ D_1 \left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right] &= D_2 \left[ \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right] + \Lambda, \\ D_1 \left[ \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + (2 - \nu_1) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y} \right] &= D_2 \left[ \frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} + (2 - \nu_2) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2 \partial y} \right] + \Gamma, \end{aligned}$$

где  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — коэффициенты Пуассона пластины 1 и 2, и

$$\Lambda = \begin{cases} 0, & M_0 = 0, \\ -M_0, & M_0 \neq 0, \end{cases} \quad \Gamma = \begin{cases} 0, & N_0 = 0, \\ -N_0, & N_0 \neq 0. \end{cases}$$

Общее решение данной задачи также находится в безразмерной форме для образов либо прогибов (для случая приложенного изгибающего момента), либо для углов поворота (для приложенной перерезывающей силы).

Ранее было получено дисперсионное уравнение, выражающее коэффициент скорости волны Коненкова для случая колебаний тонкой изотропной полубесконечной пластины со свободным торцом. Было показано, что полюс решения, отвечающий за вклад изгибной краевой волны, существует всегда независимо от свойств пластины. В данном случае задача усложняется тем, что в колебаниях участвует две пластины, не всегда с одинаковыми свойствами. Дисперсионное уравнение для скорости изгибной интерфейсной волны было впервые получено и проанализировано в работе [4].

В параметризации, представленной в данной работе, уравнение для коэффициента скорости изгибной интерфейсной волны имеет вид

$$\begin{aligned} & [(1+a)c^2 + d]^2 \sqrt{1-c^2} \sqrt{1+bc^2} + [(1+a)c^2 - d]^2 \sqrt{1+c^2} \sqrt{1-bc^2} - \\ & - [(1-a)c^2 + d]^2 \sqrt{1-c^2} \sqrt{1-bc^2} - [(1-a)c^2 - d]^2 \sqrt{1+c^2} \sqrt{1+bc^2} - \\ & - 4a \left[ \sqrt{1-c^4} + \sqrt{1-b^2 c^4} \right] c^4 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $a = \alpha\beta$ ,  $b = \alpha/\beta$ ,  $d = (1 - \nu_1) - (1 - \nu_2)\beta^2$ ,  $\alpha = \sqrt{\rho_2/\rho_1}$ ,  $\beta = \sqrt{\hat{D}_2/\hat{D}_1}$ ,  $c = \sqrt{-is\lambda_1/p}$ .



Безразмерные переменные и функции выражаются через соответствующие размерные величины следующим образом:

$$x = h\xi, \quad y = h\eta, \quad w_i = hW_i^*, \quad D_i = D\hat{D}_i, \quad t = T\tau,$$

где  $T$  — типичный масштаб времени и  $D$  — типичная жесткость (роль которой во многих задачах может исполнять  $D_1$ ). Очевидно, что уравнение (12) не решается аналитически. Численно были определены некоторые области, в которых решение этого уравнения существует. Это области, где выполняются соотношения  $\frac{\alpha^2}{\beta^2} < 1$  и  $\frac{\alpha^2}{\beta^2} < \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}$ , или  $\frac{\alpha^2}{\beta^2} > 1$  и  $\frac{\alpha^2}{\beta^2} > \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}$ . Когда параметр  $\beta$  оказывается таким, что  $\beta^2 = \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}$  (что соответствует  $d = 0$ ), уравнение (12) не имеет решений. Это можно проверить с помощью асимптотического анализа этого уравнения, рассматривая случай когда  $c \rightarrow 0$ .

Общие решения задач об интерфейсных колебаниях двух полубесконечных изотропных пластин представлены для образов прогиба  $\hat{W}_i(\eta)$  и угла поворота  $\hat{V}_i(\eta)$ ,  $i = 1, 2$ .

В случае приложенного на стыке пластин изгибающего момента решение выглядит следующим образом:

$$\hat{W}_1(\eta) = \frac{\hat{M}_0}{\hat{D}_1^2(-is\lambda_1^2)} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_1(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\alpha_1(c)|\eta|} + \Delta_2(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\beta_1(c)|\eta|}}{\Delta'(c_k^4)},$$

$$\hat{W}_2(\eta) = \frac{\hat{M}_0}{\hat{D}_1^2(-is\lambda_1^2)} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_3(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\alpha_2(c)|\eta|} + \Delta_4(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\beta_2(c)|\eta|}}{\Delta'(c_k^4)},$$

где  $c_k$  — решение уравнения (12),  $\alpha_1(c) = \sqrt{1-c^2}$ ,  $\beta_1(c) = \sqrt{1+c^2}$ ,  $\alpha_2(c) = \sqrt{1-bc^2}$ ,  $\beta_2(c) = \sqrt{1+bc^2}$ ,

$$\Delta_{1,2}(c) = \pm\beta^2 \left[ \pm(\sqrt{1\pm c^2} \mp \sqrt{1\mp bc^2})\sqrt{1\pm bc^2}((\nu_2-1) \pm bc^2) + (\pm\sqrt{1\pm bc^2} \mp \sqrt{1\pm c^2}) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{1\mp bc^2}((\nu_2-1) \mp bc^2) \right] \pm (\sqrt{1-bc^2} - \sqrt{1+bc^2})\sqrt{1\pm c^2}((\nu_1-1) \pm c^2),$$

$$\Delta_{3,4}(c) = \pm(\sqrt{1-c^2} - \sqrt{1\pm bc^2})\sqrt{1+c^2}((\nu_1-1) + c^2) + (\sqrt{1\pm c^2} \mp \sqrt{1\pm bc^2}) \times \\ \times \sqrt{1-c^2}((\nu_1-1) - c^2) \pm \beta^2(\sqrt{1-c^2} - \sqrt{1+c^2})\sqrt{1\pm bc^2}((\nu_2-1) \pm bc^2)$$

и

$$\Delta'(c_k^4) = \frac{1}{4c_k^2} \left[ ((1+a)c_k^2 + d)A + ((1+a)c_k^2 - d)B - ((1-a)c_k^2 + d)C - ((1-a)c_k^2 - d)D \right] - \\ - 4a(\sqrt{1-c_k^4} + \sqrt{1-b^2c_k^4}) + 2ac_k^4 \left[ \frac{1}{\sqrt{1-c_k^4}} + \frac{b^2}{\sqrt{1-b^2c_k^4}} \right],$$

где

$$A, B = 4(1+a)\sqrt{1\mp c_k^2}\sqrt{1\pm bc_k^2} + ((1+a)c_k^2 \pm d) \left( -\frac{\sqrt{1\pm bc_k^2}}{\sqrt{1\mp c_k^2}} + b\frac{\sqrt{1\mp c_k^2}}{\sqrt{1\pm bc_k^2}} \right),$$

$$C, D = 4(1-a)\sqrt{1\mp c_k^2}\sqrt{1\pm bc_k^2} - ((1-a)c_k^2 \pm d) \left( \frac{\sqrt{1\mp bc_k^2}}{\sqrt{1\mp c_k^2}} + b\frac{\sqrt{1\mp c_k^2}}{\sqrt{1\mp bc_k^2}} \right).$$

Общее решение для случая приложенной на торце перерезывающей силы имеет вид:

$$\hat{V}_1(\eta) = \frac{\hat{N}_0}{\hat{D}_1^2(-is\lambda_1^2)} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_5(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\alpha_1(c)|\eta|} + \Delta_6(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\beta_1(c)|\eta|}}{\Delta'(c_k^4)},$$

$$\hat{V}_2(\eta) = \frac{\hat{N}_0}{\hat{D}_1^2(-is\lambda_1^2)} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_7(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\alpha_2(c)|\eta|} + \Delta_8(c)e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_1}}{c}\beta_2(c)|\eta|}}{\Delta'(c_k^4)},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{5,6}(c) &= \mp \sqrt{1 \mp c^2} \left[ \beta^2 \left( (\sqrt{1 \pm c^2} - \sqrt{1 - bc^2})((1 - \nu_2) + bc^2) + \right. \right. \\ &+ \left. (\sqrt{1 + bc^2} - \sqrt{1 \pm c^2})((1 - \nu_2) - bc^2) \right) + (\sqrt{1 - bc^2} - \sqrt{1 + bc^2})((1 - \nu_1) \pm c^2) \Big], \\ \Delta_{7,8}(c) &= \sqrt{1 \mp bc^2} \left[ \pm \beta^2 (\sqrt{1 - c^2} - \sqrt{1 + c^2})((1 - \nu_2) \pm bc^2) + \right. \\ &+ \left. (\sqrt{1 \pm bc^2} - \sqrt{1 - c^2})((1 - \nu_1) + c^2) + (\sqrt{1 + c^2} - \sqrt{1 \pm bc^2})((1 - \nu_1) - c^2) \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, выделяя вклад изгибной интерфейсной волны в общие решения задач, строятся модели, описывающие распространение такой волны в зоне стыка пластин.

1. Случай приложенного на стыке пластин изгибающего момента.

Уравнение для прогиба на стыке пластин имеет вид

$$c_k^4 \frac{\partial^2 w_{e,i}}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D_1} \frac{\partial^2 w_{e,i}}{\partial t^2} = \frac{1}{D_1} Q_{e,i}^{(1)} \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2},$$

где

$$Q_{e,1}^{(1)} = \frac{\Delta_1(c_k) + \Delta_2(c_k)}{\Delta'(c_k^4)}, \quad Q_{e,2}^{(1)} = \frac{\Delta_3(c_k) + \Delta_4(c_k)}{\Delta'(c_k^4)}.$$

Здесь, прогибы  $w_{e,i}(x, t)$  пластин с номером  $i$  ( $i = 1, 2$ ) вызваны вкладом интерфейсной изгибной волны типа Стоунли.

Для области вне стыка пластин имеем следующие эллиптические уравнения, которые характеризуют затухание волны:

$$\frac{\partial^4 w_{in,i}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{in,i}}{\partial x^2 \partial y^2} + (1 - \gamma c_k^4) \frac{\partial^4 w_{in,i}}{\partial x^4} = 0,$$

где  $w_{in,i}(x, y)$  — прогиб пластины с номером  $i$  ( $i = 1, 2$ ), вызванный затухающей интерфейсной волной типа Стоунли,  $\gamma = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ \rho_2/\rho_1, & i = 2. \end{cases}$  Интерфейсные условия для  $w_{in,i}(x, y)$ , ( $i = 1, 2$ ) принимают следующий вид:

$$w_{in,i}(x, 0) = w_{e,i}(x), \quad \frac{\partial^2 w_{in,i}}{\partial y^2} = -\nu_i \frac{\partial^2 w_{e,i}}{\partial x^2}.$$

2. Случай приложенной на стыке перерезывающей силы.

Уравнение для прогиба на стыке пластин имеет вид

$$\begin{aligned} c_k^4 \frac{\partial^2 v_{e,i}}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D_1} \frac{\partial^2 v_{e,i}}{\partial t^2} &= \frac{1}{D_1} Q_{e,i}^{(2)} \frac{\partial^2 N_0}{\partial x^2}, \\ Q_{e,1}^{(2)} &= \frac{\Delta_5(c_k) + \Delta_6(c_k)}{\Delta'(c_k^4)}, \quad Q_{e,2}^{(2)} = \frac{\Delta_7(c_k) + \Delta_8(c_k)}{\Delta'(c_k^4)}. \end{aligned}$$

Для области вне стыка пластин также строятся эллиптические уравнения:

$$\frac{\partial^4 v_{in,i}}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 v_{in,i}}{\partial x^2 \partial y^2} + (1 - \gamma c_k^4) \frac{\partial^4 v_{in,i}}{\partial x^4} = 0,$$

где  $v_{in,i}(x, y)$  — угол поворота пластины с номером  $i$  ( $i = 1, 2$ ). Условия контакта для  $v_{in,i}(x, y)$  имеют вид

$$v_{in,i}(x, 0) = v_{e,i}(x), \quad \frac{\partial^2 v_{in,i}}{\partial y^2} = -(2 - \nu_i) \frac{\partial^2 v_{e,i}}{\partial x^2}.$$

Сравнение полученных результатов проводится аналогично. Рассматривается задача, в которой на стык пластин приложен точечный изгибающий момент  $M_0(x, t) = M_0 \delta(x) e^{-i\omega t}$ . Коэффициенты Пуассона принимаются равными  $\nu_1 = 0.4$ ,  $\nu_2 = 0.3$ . Результаты представлены на рис. 4.

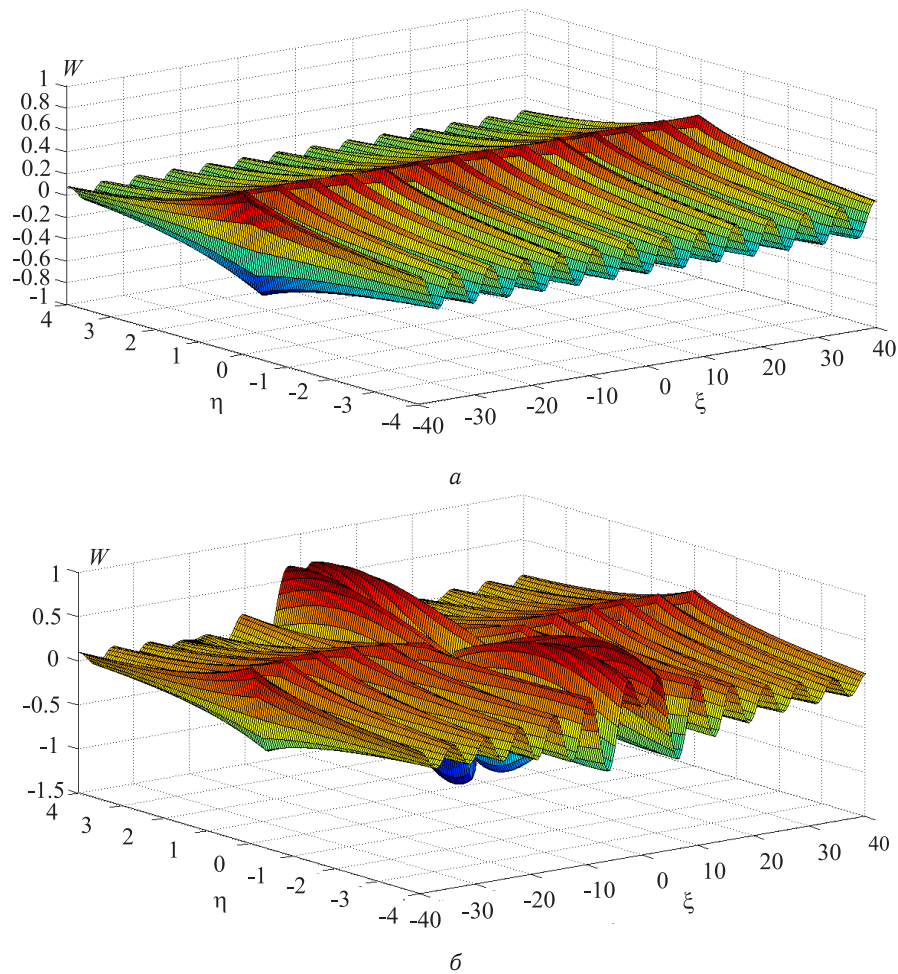


Рис. 4. Трехмерные профили: *a* – интерфейсная изгибная волна типа Стоунли (связанная параболическая эллиптическая модель); *б* – полный прогиб (точное решение)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен анализ задач о колебании тонких изотропных полубесконечных пластин. Рассматривались случаи со свободным краем пластин, приложенными к нему нагрузками, а также исследовались интерфейсные колебания. Для всех вышеописанных задач были получены точные решения в терминах интегральных преобразований, а также построены явные связанные параболически эллиптические модели, выделяющие вклад локализованных изгибных краевых и интерфейсных волн. Такие модели позволяют изучать распространение волн без нахождения общего решения задач об изгибных деформациях пластин, что значительно упрощает процесс обработки данных об основных характеристиках указанных волн.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545-а).*

## Библиографический список

1. Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D. Explicit models for elastic and piezoelectric surface waves // IMA J. of Appl. Math. 2006. Vol. 71. P. 768–782.
2. Коненков Ю. К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6, вып. 1. С. 124–126. [Konenkov Yu. K. A Rayleigh-Type Flexural Wave // Soviet Physics. Acoustics. 1960. Vol. 6, iss. 1. P. 122–123.]
3. Lord Rayleigh On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. of the London Math. Soc. 1885. Vol. 17, № 253. P. 4–11.
4. Зильбергейт А. С, Суслова И. Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинах // Акустический журнал. 1983. Т. 29, вып. 2. С. 186–191. [Zilbergleit A. S., Suslova I. B. Contact Flexural Waves in Thin Plates // Soviet Physics. Acoustics. 1983. Vol. 29, iss. 2. P. 108–111.]