of one initial boundary value problem for KdV equation on the semi-axis // Spectral and Evolution Problems : Proc. of the Twentieth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 20. Simferopol, 2010. P. 141–144.]

10. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М. : Наука, 1984. 240 с. [*Levitan B. M.* Inverse Sturm–Liouville Problems. Utrecht : VNU Sci. Press, 1987. 240 p.]

11. *Marchenko V. A.* 1991 The Cauchy problem for the KdV equation with non-decreasing initial data // What is integrability? Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1991. P. 273–318.

УДК 517.544

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ НА НЕГЛАДКОЙ ДУГЕ

Б. А. Кац[1], С. Р. Миронова[2], А. Ю. Погодина[3]

[1]Казанский (приволжский) федеральный университет
E-mail: katsboris877@gmail.com
[2]Казанский научно-исследовательский технический университет
E-mail: srmironova@yandex.ru
[3]Саратовский государственный технический университет
E-mail: apogodina@yandex.ru

Исследуется разрешимость краевой задачи о скачке на негладкой дуге в случае, когда скачок имеет особенность на одном из концов этой дуги.

Ключевые слова: негладкая дуга, интеграл типа Коши, задача о скачке.

Solvability of the Jump Problem on Non-smooth Arc

B. A. Kats, S. R. Mironova, A. Yu. Pogodina

We study solvability of the jump problem on non-smooth arc for the case, where the jump has a singularity at one of end points of the arc.

Key words: non-smooth arc, Cauchy type integral, jump problem.

Пусть Γ есть простая жорданова дуга с началом в точке O и концом в точке 1. Задача о скачке — это краевая задача о нахождении голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, имеющей в каждой точке $t \in \Gamma \setminus \{0, 1\}$ предельные значения слева и справа $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ соответственно, связанные краевым условием:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in \Gamma \setminus \{0, 1\}, \tag{1}$$

а также удовлетворяющей оценкам

$$|\Phi(z)| \leq C|z|^{-\gamma}, \quad |\Phi(z)| \leq C|z-1|^{-\gamma}, \tag{2}$$

где $\gamma = \gamma(\Phi) \in [0, 1)$. Эта задача имеет большое значение в теории краевых задач (см., напр., [1, 2]).

В данной работе рассматривается случай, когда скачок g имеет в точке 0 особенность порядка p, т. е. $|g(t)| \leq C|t|^{-p}$, $0 < p < 1$, а вне любой окрестности начала координат удовлетворяет условию Гёльдера. В случае, когда дуга Γ кусочно-гладкая, решение такой задачи дается интегралом типа Коши:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)dt}{t - z}, \tag{3}$$

причем в точке 0 функция Φ также имеет особенность порядка p.

Здесь мы покажем, что на негладкой дуге порядок этой особенности может возрасти и получим достаточное условие разрешимости задачи о скачке на негладкой дуге.

Пусть A есть компактное множество на комплексной плоскости. Пространство Гёльдера $H_\nu(A)$, $\nu \in (0, 1]$, состоит из заданных на A функций f, для которых конечна величина

$$h_\nu(f, A) := \sup\{\frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^\nu} : t', t'' \in A, t' \neq t''\}.$$

Для демонстрации феномена повышения порядка особенности интеграла типа Коши за счет негладкости контура мы построим следующее двупараметрическое семейство дуг. Фиксируем значения $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta > 1$ и положим $a_k = \zeta^{-1}(\alpha + 1)k^{-\alpha-1}$, $x_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. Тогда $x_1 = 1$, $x_n \asymp n^{-\alpha}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ расходится. Далее, положим $x'_n = x_n - a_n^\beta$; очевидно, $x'_n > x_{n+1}$. Рассмотрим вертикальные отрезки $\sigma_n := \{z = x_n + iy : 0 \le y \le x'_n\}$ и $\sigma'_n := \{z = x'_n + iy : 0 \le y \le x'_n\}$, и горизонтальные отрезки $\rho_n := \{z = x + ix'_n : x'_n \le x \le x_n\}$ и $\rho'_n := \{z = x : x_{n+1} \le x \le x'_n\}$ (отрезки ρ'_n лежат на действительной оси). Из всех этих отрезков составим зигзагообразную линию Γ; при её обходе от точки 1 к точке 0 прямолинейные отрезки проходятся в порядке $\sigma_1, \rho_1, \sigma'_1, \rho'_1, \sigma_2, \rho_2, \sigma'_2, \rho'_2, \ldots$. В дальнейшем будем обходить её от 0 к 1.

Теперь определим на отрезке $[0,1]$ функцию $f(x)$, полагая $f(0) = 0$, $f(x_n) = 0$, $f(x'_n) = -a_n^\nu$; на отрезках $[x_{n+1}, x'_n]$ и $[x'_n, x_n]$ эта функция линейна. Нетрудно убедиться, что $f \in H_\nu([0,1])$. Положим $g(z) = |z|^{-p} f(x), z = x + iy$.

Если I есть проходимый от 0 к 1 отрезок $[0,1]$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{g(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)dt}{t-z} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_j} \frac{g(t)dt}{t-z},$$

где R_j есть прямоугольник $R_j = \{z = x + iy : x'_j < x < x_j,\ 0 < y < x'_j\}$, и по формуле Грина

$$\frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{g(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)dt}{t-z} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\iint_{R_j} \frac{\partial g}{\partial \overline{t}}\frac{dx_t dy_t}{t-z},$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$. Очевидно,

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{pf(x)}{\overline{z}|z|^p} + |z|^{-p} f'(x)\right),$$

причем первое слагаемое интегрируемо в конечной части плоскости при любом $p < 1$. Второе слагаемое в прямоугольнике R_j не превосходит $(x'_j)^{-p} a_j^{\beta(\nu-1)}$. Поскольку площадь этого прямоугольника равна $x'_j a_j^\beta$, то это слагаемое интегрируемо, если сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\beta\nu}(x'_j)^{1-p} < C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta\nu(\alpha+1)-\alpha(1-p)},$$

т. е. при

$$\beta\nu(\alpha+1) + \alpha(1-p) > 1. \tag{4}$$

Итак, при условии (4) интеграл типа Коши (3) сходится. Вопрос о его сходимости встает в связи с тем, что длина построенной нами кривой Γ бесконечна.

Пусть теперь ξ — малое положительное число. Оценим снизу вещественную часть величины

$$\Psi(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\iint_{R_j} \frac{|t|^{-p} f'(x_t) dx_t dy_t}{t-z}$$

при $z = -\xi$. Нетрудно показать, что при $t \in R_j$, $j = 1, 2, \ldots$, мы имеем $\operatorname{Re}\dfrac{1}{t+\xi} \ge \dfrac{1}{2(x_t+\xi)}$ и отсюда

$$\operatorname{Re}\Psi(-\xi) \ge \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\beta(\nu-1)} \iint_{R_j} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{p/2}(x+\xi)}.$$

Далее, внутри угла $x > y > 0$ имеем $|z| < \sqrt{2}x$ и отсюда

$$\operatorname{Re}\Psi(-\xi) \ge \frac{1}{2^{1+p/2}\pi}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\beta(\nu-1)} \iint_{R_j} \frac{dxdy}{x^p(x+\xi)} = \frac{1}{2^{1+p/2}\pi}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\beta(\nu-1)} x'_j \int_{x'_j}^{x_j} \frac{dx}{x^p(x+\xi)}.$$

Действуя аналогично (см., напр., [3]), получаем, что при $\alpha(1-p) - (\alpha+1)\beta(1-\nu) < 1$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\Psi(-\xi) \ge C\xi^{-p-\delta}, \qquad \delta = \alpha^{-1}(1 + (\alpha+1)\beta(1-\nu)).$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{I}\frac{g(t)dt}{t-z}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p}{2\pi}\iint_{R_j}\frac{f(x_t)}{\overline{t}|t|^p}\frac{dx_t dy_t}{t-z}-\Psi(z),$$

причем первое и второе слагаемые правой части имеют в точке 0 особенности порядка p (для первого слагаемого этот результат можно найти в $[1,2]$, а для второго это нетрудно получить с помощью известных интегральных неравенств, см., напр., [4]), то интеграл типа Коши (3) имеет в этой точке особенность порядка не ниже $p+\delta$. Легко убедиться, что этот порядок может превосходить единицу, и в этом случае задача о скачке (1) не имеет решений в классе функций, удовлетворяющих условию (2). Тем самым доказана

Теорема 1. *Существует негладкая дуга* Γ *с началом в точке* 0 *и концом в точке* 1 *и заданная на ней функция* $g(t)$ *с особенностью порядка* p *в начальной точке кривой, удовлетворяющая условию Гёльдера в остальных её точках, для которых задача о скачке* (1) *не имеет решений в классе функций, удовлетворяющих условию* (2).

В связи с этим возникает потребность в достаточных условиях разрешимости этой задачи. Сейчас мы приведем одно такое условие. Опишем сначала класс кривых, к которому оно применимо.

Простую жорданову дугу Γ с началом в точке 0 и концом в точке 1 мы относим к классу Z_0, если существует гладкая дуга Γ' с теми же началом и концом такая, что симметрическая разность $\Gamma\triangle\Gamma'$ представляет собой счетное семейство замкнутых кусочно-гладких кривых, ограничивающих попарно не пересекающиеся области с единственной точкой сгущения в начале координат.

Кроме того, нам понадобится так называемая размерность Минковского (она же box dimension) кривой Γ. Её определение можно найти, например, в [5].

Теорема 2. *Пусть дуга* Γ *имеет размерность Минковского* $d<2$ *и принадлежит классу* Z_0, *а заданная на ней функция* $g(t)$ *представима в виде* $g(t)=|t|^{-p}f(t)$, *где* $f\in H_\nu(\Gamma)$, $p<1$ *и* $\nu>d/2$. *Тогда задача о скачке* (1) *имеет решение в классе функций, удовлетворяющих условию* (2).

Доказательство. Доказательство в целом аналогично доказательству разрешимости задачи о скачке на замкнутой неспрямляемой кривой в работе [3]. $\square$

Библиографический список

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с. [*Gakhov F.* Boundary value problems. Oxford : Permagon Press, 1966.]
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1962. 600 с. [*Muskhelishvili N. I.* Singular Integral Equations / ed. by J. R. M. Radok. Leyden : Noordhoff Intern. Publish., 1977.]
3. *Кац Б. А.* Задача Римана на замкнутой жордановой кривой // Изв. вузов. Математика. 1983. № 4. С. 68–80. [*Kats B. A.* The Riemann problem on a closed Jordan curve // Soviet Math. (Izv. VUZ. Matematika). 1983. Vol. 27, № 4. P. 83–98.]
4. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические фукции. М. : Наука, 1988. 509 с. [*Vekua I. N.* Generalized Analytic Functions. Oxford : Pergamon Press, 1962.]
5. *Федер Е.* Фракталы. М. : Мир, 1991. 282 с. [*Feder J.* Fractals. New York : Plenum Press, 1988.]

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Е. А. Козлова

Самарский государственный технический университет
E-mail: leni2006@mail.ru

Рассмотрена задача граничного управления для системы уравнений гиперболического типа. С помощью метода Римана построены управляющие функции, переводящие объект, описываемый системой, из заданного начального состояния в финальное.

Ключевые слова: граничное управление, система уравнений гиперболического типа, метод Римана.

Boundary Control Problem for the Hyperbolic System

E. A. Kozlova

A boundary control problem for the hyperbolic system was considered. The control functions transferring the object described by this system from the given initial state to the final state were constructed using the Riemann method.

Key words: boundary control, hyperbolic system, Riemann method.