Библиографический список

1. *Hardy G. H., Ramanujan S.* The normal number of prime factors of a number n// Quart. J. Math. 1917. Vol. 48. P. 76–92.
2. *Tanenbaum G., Mendes France M.* The prime numbers and their distribution. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2000. 115 p.
3. *Fröberg C.-E.* On the prime zeta function // BIT 8. 1968. P. 187–202.
4. *Федоров Г. В.* Верхнее предельное значение функции делителей с растущей размерностью // Докл. АН. 2013. Т. 452, № 2. С. 141–143. DOI: 10.7868/S0869565213270042.

On a Number of Prime Divisors of an Integer with Bounded Multipleness

G. V. Fjodorov

Moscow State University, Russia, 119991, Moscow, Leninskie Gory st., GSP-1, fedorov@mech.math.msu.su

In this article generalisations of numeric functions related to a number of prime divisors of a given number are investigated. Upper and lower limit values of a number of prime divisors of a bounded power of integer are obtained.

Key words: devisor function, Mersenne theorem, prime zeta function.

References

1. *Hardy G. H., Ramanujan S.* The normal number of prime factors of a number n. *Quart. J. Math.*, 1917, vol. 48, pp. 76–92.
2. Tanenbaum G., Mendes France M. *The prime numbers and their distribution*. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2000, 115 p.
3. Fröberg C.-E. On the prime zeta function. *BIT 8*. 1968. P. 187–202.
4. Fedorov G. V. The upper limit value of the divisor function with growing dimension. *Doklady Math.*, 2013, vol. 88, no. 2, pp. 529–531. DOI: 10.1134/S1064562413050074.

УДК 512.579

КОНГРУЭНЦИИ ПОЛИГОНОВ НАД ГРУППАМИ

А. Р. Халиуллина

Аспирант кафедры высшей математики № 1, Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, Зеленоград, haliullinaar@gmail.com

Получено полное описание конгруэнций полигонов над группами.

Ключевые слова: полигон, конгруэнция, группа.

ВВЕДЕНИЕ

Полигоны над полугруппой, т. е. множества, на которых действует полугруппа, возникают в разных разделах алгебры и ее приложений. Понятие полигона является алгебраическим выражением понятия автомата (см. [1] и [2, гл. 6]), точнее, автомата Мура, т.е. автомата без выхода. Теория полигонов является довольно молодым разделом общей алгебры, а теория конгруэнций полигонов вообще находится на начальной стадии развития. А. Ю. Авдеевым и И. Б. Кожуховым в [3] было дано описание полигонов над регулярными рисовскими матричными полугруппами $M^0(G, I, \Lambda, P)$ (т. е. вполне 0-простыми полугруппами). Все правые конгруэнции на этих полугруппах были описаны Р. Оэмке в [4]. Это можно считать описанием конгруэнций свободного циклического полигона над вполне 0-простой полугруппой. Описание конгруэнций произвольных полигонов над вполне 0-простыми или вполне простыми полугруппами представляется довольно сложной математической задачей. Поэтому естественно рассматривать частные случаи таких полугрупп. Данная работа делает первый шаг в построении теории конгруэнций полигонов над вполне (0-)простыми полугруппами. А именно нами описаны в теоретико-множественных и теоретико-групповых терминах все конгруэнции произвольного полигона над группой. Основными результатами являются теорема 2, сводящая описание конгруэнций произвольного полигона X над группой G к описанию конгруэнций унитарного полигона XG, а также теорема 5, устанавливающая общий вид конгруэнций унитарного полигона над группой.

Напомним, что *полигон* над полугруппой S или S-полигон (см. [5]) — это множество X, на котором задано действие полугруппы S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x,s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s,t \in S$. Всякая полугруппа является полигоном над собой относительно действия $S \times S \to S$, $(a,b) \mapsto ab$. Этот полигон мы будем обозначать S_S. *Конгруэнцией полигона* X над полугруппой S называется такое отношение эквивалентности ρ на X, что $(x,y) \in \rho \Rightarrow (xs,ys) \in \rho$ при всех $x,y \in X$, $s \in S$. Очевидно, конгруэнции полигона S_S — это в точности правые конгруэнции полугруппы S.

Если полугруппа S имеет единицу e и для S-полигона X выполняется равенство $xe = x$ при $x \in X$, то полигон X называется *унитарным*.

Если G — группа, то описание конгруэнций полигона G_G хорошо известно. А именно пусть H — подгруппа группы G, не обязательно нормальная. Обозначим через G/H множество правых смежных классов Hg, где $g \in G$. Положим $\theta_H = \{(a,b) \in G \times G \,|\, Ha = Hb\}$. Нетрудно видеть, что θ_H является правой конгруэнцией группы G. Кроме того, любая правая конгруэнция ρ на группе G имеет вид $\rho = \theta_H$, где H — некоторая подгруппа группы G. То есть разбиение на классы правой конгруэнции — это в точности разбиение группы G на правые смежные классы по некоторой подгруппе.

1. СВЕДЕНИЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОЛИГОНА НАД ГРУППОЙ К КОНГРУЭНЦИЯМ УНИТАРНОГО ПОЛИГОНА

Пусть X — полигон над группой G с единицей e. Очевидно, $Y = XG = Xe$ — унитарный подполигон полигона X. Описание произвольных полигонов (в нашем случае — это X) сводится к унитарным полигонам (здесь — Y), как показывает следующее утверждение.

Предложение 1 [6, теорема 4]. *Пусть Y — унитарный полигон над группой G, A — произвольное множество такое, что $A \cap Y = \varnothing$, и $\varphi : A \to Y$ — произвольное отображение. Определим умножение элементов $a \in A$ на элементы $g \in G$ следующим образом: $a \cdot g = \varphi(a)g$. Тогда множество $X = Y \cup A$ будет являться G-полигоном. Кроме того, всякий G-полигон может быть получен таким образом.*

Заметим, что в условиях предложения 1 мы имеем $\varphi(a) = ae$ для всех $a \in A$.

Теперь мы можем описать все конгруэнции полигона над группой при условии, что известны конгруэнции унитарного полигона.

Теорема 2. *Пусть X — произвольный полигон над группой G. По предложению 1 мы можем считать, что $X = Y \cup A$, $Y = Xe$ (e — единица группы G), $A \cap Y = \varnothing$. Пусть $\varphi : A \to Y$ — отображение такое, что $\varphi(a) = ae$ при всех $a \in A$. Пусть ρ — конгруэнция полигона Y и $\{K_i \,|\, i \in I\}$ — множество классов конгруэнции ρ. Выберем в каждом множестве $\varphi^{-1}(K_i)$ какое-либо подмножество Z_i (возможно, пустое) и разобьём оставшееся множество $\varphi^{-1}(K_i)\backslash Z_i$ на какие-либо подмножества: $\varphi^{-1}(K_i)\backslash Z_i = \bigcup_{j\in J_i} \widetilde{K_{ij}}$. Положим $\widetilde{K_i} = K_i \cup Z_i$,*

$$\widetilde{\rho} = \bigcup_i (\widetilde{K_i} \times \widetilde{K_i}) \cup \bigcup_i \bigcup_{j\in J_i} (\widetilde{K_{ij}} \times \widetilde{K_{ij}}). \tag{1}$$

Тогда $\widetilde{\rho}$ — конгруэнция полигона X. Кроме того, любая конгруэнция полигона X получается таким образом.

Доказательство. Докажем вначале, что отношение $\widetilde{\rho}$, определённое по формуле (1), является конгруэнцией на X. Очевидно, $\widetilde{\rho}$ — отношение эквивалентности, причём $\widetilde{\rho} \supseteq \rho$. Пусть $(u,v) \in \widetilde{\rho}$ и $g \in G$. Если $u,v \in \widetilde{K_i}$, то $ue, ve \in K_i$, откуда $(ue,ve) \in \rho$, а значит, $(ug,vg) = (ue,ve)g \in \rho \subseteq \widetilde{\rho}$. Если $u,v \in K_{ij}$, то также $(ug,vg) \in \widetilde{\rho}$.

Теперь нужно доказать, что любая конгруэнция на X имеет вид (1). Пусть σ — конгруэнция полигона X. Ясно, что $\rho = \sigma \cap (Y \times Y)$ — конгруэнция на Y.

Рассмотрим произвольный класс K_i конгруэнции ρ. Пусть $Z_i = \{a \in A \mid \exists x \in K_i, (x, a) \in \sigma\}$. Докажем, что $Z_i \subseteq \varphi^{-1}(K_i)$. Имеем: $(x, a) \in \sigma$, откуда $(xe, ae) \in \sigma$. Так как $xe = x$, то $(x, ae) \in \sigma$, поэтому $ae \in K_i$. Мы видим, что $a \in \varphi^{-1}(K_i)$. Осталось доказать, что любые σ-эквивалентные элементы $a, b \in A$ лежат в одном каком-либо множестве $\varphi^{-1}(K_i)$. Предположим, что $\varphi(a) \in K_i$, а $\varphi(b) \in K_j$. Тогда будем иметь: $ae \in K_i$, $be \in K_j$. Так как $(a, b) \in \sigma$, то $(ae, be) \in \sigma$. Но $ae, be \in Y$, поэтому $(ae, be) \in \rho$. Это означает, что $i = j$. □

2. КОНГРУЭНЦИИ УНИТАРНОГО ПОЛИГОНА НАД ГРУППОЙ

Пусть S — полугруппа и $\mathscr{F} = \{X_i \mid i \in I\}$ — семейство S-полигонов. Определим понятие копроизведения полигонов X_i. Мы можем считать, что полигоны X_i не имеют попарных пересечений, т.е. $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$ (если это не так, то следует вместо X_i взять их изоморфные попарно не пересекающиеся копии). Тогда множество $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ будет называться *копроизведением* полигонов X_i, умножение на элементы подгруппы S осуществляется очевидным образом: если $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$ и $s \in S$, то $x \in X_i$ при каком-то $i \in I$; полагаем xs равным произведению $x \cdot s$ в X_i. Копроизведение полигонов X_i обозначается следующим образом: $\coprod\limits_{i \in I} X_i$.

Пусть G — группа с единицей e, X — полигон над G. Тогда $X = Xe \cup (X \backslash Xe)$. Нетрудно проверить, что Xe — унитарный подполигон полигона X.

Лемма 3. *Если G — группа, H — её подгруппа, то G/H — унитарный циклический G-полигон. Кроме того, всякий унитарный циклический полигон над группой G изоморфен одному из полигонов G/H, где H — подходящая подгруппа группы G.*

Доказательство. Полигон G/H унитарный, так как $Hg \cdot e = Hg$, если e — единица группы G. Элемент He — образующий этого полигона, так как $He \cdot g = Hg$ для любого $g \in G$. Следовательно, G/H циклический.

Пусть X — произвольный унитарный циклический G-полигон. Тогда $X = x_o G$, где x_o — образующий элемент. Рассмотрим отображение $\varphi : G \to X$, $g \mapsto x_o g$. Очевидно, оно является гомоморфизмом G-полигонов. По теореме об изоморфизме $G/\ker\varphi \cong X$. Так как G — группа, то всякая правая конгруэнция на G определяется некоторой подгруппой H. Таким образом, $G/H \cong X$. □

Также просто определяются все конгруэнции унитарного циклического полигона над группой.

Лемма 4. *Пусть G — группа, H — её подгруппа. Если H' — подгруппа группы G такая, что $H' \supseteq H$, то отношение $\rho_{H'} = \{(Ha, Hb) \mid H'a = H'b\}$ является конгруэнцией полигона G/H. Кроме того, всякая конгруэнция полигона G/H совпадает с одной из конгруэнций $\rho_{H'}$.*

Доказательство очевидно. □

Рассмотрим теперь произвольные унитарные полигоны над группой. Пусть X — унитарный G-полигон (G — группа). *Орбитой* элемента $x \in X$ назовём множество $xG = \{xg \mid g \in G\}$ (см. [7, § 11a], где орбиты названы системами транзитивности). Множество X является объединением непересекающихся орбит. Всякая орбита является унитарным циклическим G-полигоном. Поэтому $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$, X_i — орбиты. По лемме 3 $X_i \cong G/H_i$, где H_i — подгруппа группы G. Таким образом, всякий унитарный полигон над группой G изоморфен копроизведению $\coprod\limits_{i \in I} G/H_i$, где H_i — подгруппы.

Следующая теорема описывает все конгруэнции произвольного унитарного полигона над группой.

Теорема 5. *Пусть G — группа, H_i ($i \in I$) — её подгруппы, $X = \coprod\limits_{i \in I} G/H_i$. Пусть задано отношение эквивалентности σ на множестве индексов I, для каждого $i \in I$ задана подгруппа $H_i' \supseteq H_i$ группы G, для каждой пары $(i, j) \in \sigma$ заданы элементы $a_{ij} \in G$, причём $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$, $a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$ и $H_j' = a_{ij}^{-1} H_i' a_{ij}$. Тогда*

$$\rho = \{(H_i b, H_j c) \mid b, c \in G \text{ и } c \in H_j' a_{ij}^{-1} b\} \tag{2}$$

— конгруэнция полигона X. Кроме того, всякая конгруэнция полигона X имеет вид (2).

Доказательство. Положим $X_i = G/H_i$. Проверим, что отношение ρ, определённое по формуле (2), является конгруэнцией. Из соотношений $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ следует, что $a_{ii} = e$ при всех $i \in I$ (здесь e — единица группы G), поэтому ρ рефлексивно.

Докажем, что ρ симметрично. Пусть $(H_i b, H_j c) \in \rho$, т.е. $c \in H'_j a_{ij}^{-1} b$. Тогда $c = h a_{ij}^{-1} b$, где $h \in H'_j$, откуда $b = a_{ij} h^{-1} c = a_{ij} h^{-1} a_{ij}^{-1} a_{ij} c \in a_{ij} H'_j a_{ij}^{-1} a_{ij} c = H'_i a_{ji}^{-1} c$, а значит, $(H_j c, H_i b) \in \rho$. Следовательно, ρ симметрично. Пусть $(H_i b, H_j c)$, $(H_j c, H_k d) \in \rho$. Тогда $c \in H'_j a_{ij}^{-1} b$ и $d \in H'_k a_{jk}^{-1} c$. Отсюда получаем:

$$d \in H'_k a_{jk}^{-1} H'_j a_{ij}^{-1} b = H'_k a_{jk}^{-1} H'_j a_{jk} a_{jk}^{-1} a_{ij}^{-1} b = H'_k H'_k (a_{ij} a_{jk})^{-1} b = H'_k a_{ik}^{-1} b,$$

т.е. $(H_i b, H_k d) \in \rho$, а значит, ρ транзитивно. Из определения (2) следует, что

$$(H_i b, H_j c) \in \rho \Rightarrow (H_i bg, H_j cg) \in \rho$$

при любом $g \in G$. Таким образом, ρ является конгруэнцией.

Осталось доказать, что любая конгруэнция полигона X имеет вид (2). Пусть τ — конгруэнция. Положим $\tau_i = \tau|_{X_i}$. Тогда τ_i — конгруэнция на X_i. Так как $X_i = G/H_i$, то по лемме 4 существует подгруппа $H'_i \supseteq H_i$ такая, что $\tau_i = \{(H_i b, H_i c) \mid H'_i b = H'_i c\}$. Рассмотрим на множестве индексов I отношение σ, где $(i,j) \in \sigma \Leftrightarrow \exists\, x \in X_i \;\exists\, y \in X_j \; (x,y) \in \tau$. Очевидно, σ — отношение эквивалентности.

Пусть $(i,j) \in \sigma$ и $i \neq j$. Тогда существует τ-класс, пересекающийся с X_i и X_j. Рассмотрим группу $\hat{G}$, изоморфную группе G при изоморфизме $g \mapsto \hat{g}$, причём $G \cap \hat{G} = \varnothing$. Для удобства будем считать, что $X_i = G/H_i$, $X_j = \hat{G}/\widehat{H_j}$. Для элементов $H_i b, H_i c \in X_i$ имеем: $(H_i b, H_i c) \in \tau \Leftrightarrow (H_i b, H_i c) \in \tau_i \Leftrightarrow H'_i b = H'_i c$. Аналогично $(\widehat{H_j}\hat{b}, \widehat{H_j}\hat{c}) \in \tau \Leftrightarrow H'_j b = H'_j c$.

Пусть $(H_i u, \widehat{H_j}\hat{v}) \in \tau$. Тогда $(H_i, \widehat{H_j}\widehat{vu^{-1}}) \in \tau$. Положим $a = uv^{-1}$. Тогда $(H_i, \widehat{H_j}\widehat{a^{-1}}) \in \tau$. Возьмем любой элемент $h \in H'_i$. Тогда $(H_i h, \widehat{H_j}\widehat{a^{-1}}) \in \tau$, откуда $(H_i, \widehat{H_j}\widehat{a^{-1}h^{-1}}) \in \tau$. Отсюда получаем: $H'_j a^{-1} = H'_j a^{-1} h^{-1}$. Это влечёт, что $h \in a H'_j a^{-1}$, а значит, $H'_i \subseteq a H'_j a^{-1}$. Аналогично доказывается обратное включение. Таким образом, $H'_i = a H'_j a^{-1}$.

Для произвольных элементов $p, q \in G$ имеем:

$$(H_i p, \widehat{H_j}\hat{q}) \in \tau \Leftrightarrow (H_i, \widehat{H_j}\widehat{qp^{-1}}) \in \tau \Leftrightarrow H'_j a^{-1} = H'_j q p^{-1} \Leftrightarrow q \in H'_j a^{-1} p.$$

Пусть K — произвольный класс эквивалентности отношения σ. Зафиксируем элемент $i \in K$. Для $j \in K$ обозначим через a_{ij} какой-нибудь элемент такой, что $H'_j = a_{ij}^{-1} H'_i a_{ij}$. Положим $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$. Для $j,k \in K$ положим $a_{jk} = a_{ij}^{-1} a_{ik}$. Тогда будем иметь

$$H'_k = a_{ik}^{-1} H'_i a_{ik} = (a_{ij} a_{jk})^{-1} H'_i a_{ij} a_{jk} = a_{jk}^{-1} a_{ij}^{-1} H'_i a_{ij} a_{jk} = a_{jk}^{-1} H'_i a_{jk}.$$

Таким образом, все требуемые условия для эквивалентности a_{ij} выполняются. Кроме того, имеем: $(H_i b, H_i c) \in \tau \Leftrightarrow c \in H'_j a_{ij}^{-1} b$, поэтому $\tau = \rho$. □

Из только что доказанной теоремы можно получить общий вид всех фактор-полигонов произвольного унитарного полигона над группой.

Следствие. *Пусть* $X = \coprod_{i \in I} G/H_i$, ρ — *конгруэнция на* X. *Пусть* σ — *отношение эквивалентности на* I, *участвующее в формулировке теоремы 5. Выберем из каждогоσ-класса по одному элементу. Обозначим это множество представителей через* M. *Тогда* $X/\rho \cong \coprod_{i \in M} G/H'_i$.

Библиографический список

1. *Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Ушчумлич Ш.* Введение в теорию абстрактных автоматов. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1985. 176 с.
2. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М. : Мир, 1985. 440 с.
3. *Avdeev A. Yu., Kozhuhov I. B.* Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernet. 2000. Vol. 14, № 4. P. 523–531.
4. *Ohemke R. H.* Congruences and semisiplicity for Rees matrix semigroups // Pacif. J. Math. 1974. Vol. 54, № 2. P. 143–164.

5. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V.* Monoids, acts and cathegories. Berlin; N. Y., 2000. 529 с.
6. *Максимовский М. Ю.* О биполигонах и мультиполигонах над полугруппами // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 6. С. 855–866.
7. *Курош А. Г.* Теория групп. М. : Наука, 1967. 648 с.

Congruences of Acts over Groups

A. R. Khaliullina

National Research University of Electronic Technology (MIET), Russia, 124498, Moscow, Zelenograd, pass. 4806, 5, haliullinaar@gmail.com

A complete description of the congruences of acts over groups is obtained.

Key words: act, congruence, group.

References

1. Kudriavtsev V. B., Podkolzin A. S., Ushchumlich Sh. *Vvedenie v teoriiu abstraktnykh avtomatov* [Introdunction in abstract automata theory]. Moscow, MGU, 1985, 176 p. (in Russian).
2. Lallement G. *Semigroups and combinatorial applications*. New York, Wiley, 1979, 376 p.
3. Avdeev A. Yu., Kozhuhov I. B. Acts over completely 0-simple semigroups. *Acta Cybernet*, 2000, vol. 14, no. 4. pp. 523–531.
4. Ohemke R. H. Congruences and semisiplicity for Rees matrix semigroups. *Pacif. J. Math.*, 1974, vol. 54, no. 2. pp. 143–164.
5. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. *Monoids, acts and cathegories*. Berlin, New York, 2000. 529 p.
6. Maksimovskii M. Yu. Bipolygons and multipolygons over semigroups. *Math. Notes*, 2010, vol. 87, no. 5–6, pp. 834–843.
7. Kurosh A. G. *Teoriia grupp* [Group theory]. Moscow, Nauka, 1967, 648 p. (in Russian).

УДК 512.554+512.643

О СВОЙСТВАХ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

О. О. Щекатурова[1], В. А. Ярошевич[2]

[1]Аспирант кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, ot-vna@mail.ru
[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики № 1, Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, v-yaroshevich@ya.ru

Рассматривается частичная полугруппа булевых матриц конечных размеров относительно операций конъюнктного и дизъюнктного умножений. Получена оценка соотношения числа векторов в строчном и столбцовых базисах. Найдены предминимальный, а также предпредминимальный и предмаксимальный в обобщённом смысле $\mathscr{D}$-классы. Исследуются свойства вторичных идемпотентов. Предложена гипотеза рекурсивного построения приведённых матриц.

Ключевые слова: булева матрица, конъюнктное произведение, дизъюнктное произведение, строчная оболочка, столбцовая оболочка, строчный ранг, столбцовый ранг, приведённая матрица, классы Грина, первичный идемпотент, вторичный идемпотент.

ВВЕДЕНИЕ

Назовём $\cup$ — *объединением*, $\cap$ — *пересечением*, а $'$ — *дополнением*. Обозначим $\langle \mathbf{M}_{m\times n}, \cup, \cap, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ алгебру булевых $m \times n$ матриц с элементами из некоторой булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$. Операции $\cap$, $\cup$ и $'$ определяются для матриц поэлементно. Матрицы $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, образованные целиком из нулей и единиц соответственно, дают нуль и единицу такой вторичной булевой алгебры. Для краткости вместо $\mathbf{M}_{n\times n}$ будем писать $\mathbf{M}_n$. Пусть символ $\mathbf{M}$ обозначает множество всех матриц конечных размеров, то есть $\mathbf{M} = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathbf{M}_{m\times n}$. В дальнейшем, если специально не оговорено, мы полагаем, что исходная булева алгебра двухэлементна, то есть $\mathbf{B} = \{0, 1\}$.