$$\leq Nx^{-1}\left(\left|a_{n_{j+1}}\right|+\left|a_{n_j+1}\right|+\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}|a_k-a_{k+1}|\right)\leq\frac{C_1}{x}\left(\beta_{n_j}+\beta_{n_{j+1}}\right)\leq\frac{C_2}{xn_j}. \tag{11}$$

Поскольку по лемме 4 ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}1/n_j$ сходится, то из (11) следует сходимость ряда (10) при $x\in(0,1)$. Далее,

$$\int_0^1\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}a_k\chi_k(x)\right|dx=\int_0^{1/n_j}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}a_k\chi_k(x)\right|dx+\int\limits_{1/n_j}^{1}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}a_k\chi_k(x)\right|dx=:I_{1j}+I_{2j}.$$

Согласно (11) находим, что

$$|I_{2j}|\leq C_2n_j^{-1}\int_{1/n_j}^1x^{-1}\,dx\leq C_2\ln n_j/n_j. \tag{12}$$

С другой стороны, по теореме 2 из ограниченности $\{k\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ вытекает, что частные суммы $\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_k(x)$ равномерно ограничены константой C_3, поэтому

$$|I_{1j}|\leq\int_0^{1/n_j}C_3\,dx\leq C_3n_j^{-1}. \tag{13}$$

Из оценок (12) и (13) следует

$$\int_0^1\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}a_k\chi_k(x)\right|dx\leq\sum_{j=1}^{\infty}(I_{1j}+I_{2j})\leq C_4\sum_{j=1}^{\infty}(\ln n_j+1)/n_j<\infty.$$

Теорема 3 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (*проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Голубов Б. И. Ефимов А. В. Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987. 344 с. [*Golubov B., Efimov A., Skvortsov V.* Walsh series and transforms. Dordrecht; Boston; London : Kluver Academic Publishers, 1991.]

2. *Тихонов С. Ю.* О равномерной сходимости тригонометрического ряда // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 2. С. 304–310. [*Tikhonov S. Yu.* On the uniform convergence of trigonometric series // Math. Notes. 2007. Vol. 81, № 2. P. 268–274.]

3. *Leindler L.* On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Analysis Math. 2001. Vol. 1, № 4. P. 279–285.

4. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с. [*Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzafarli G. M., Rubinstein A. I.* Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups. Baku : Elm Publisher, 1981. 180 p.]

5. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с. [*Bari N. K.* Trigonometric Series. Moscow : Fizmatgiz, 1961. 936 p.]

УДК 517.984

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С НЕГЛАДКОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ

В. А. Халова, А. П. Хромов

Саратовский государственный университет
E-mail: HalovaVA@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Для интегрального оператора с негладкой инволюцией установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Ключевые слова: интегральный оператор, инволюция, резольвента.

Integral Operators with Non-smooth Involution

V. A. Khalova, A. P. Khromov

The equiconvergence of expansions in eigen- and associated functions of integral operators with non-smooth involution and trigonometric Fourier series are established.

Key words: integrals operator, involution, resolvent.

Пусть A — оператор вида

$$Af = \int\limits_0^{\vartheta(x)} A(\vartheta(x),t)f(t)\,dt, \tag{1}$$

где ядро $A(x,t)$ непрерывно по x и t вместе с производными A_x, A_t, A_{xt}, A_{x^2t}, A_{xt^2} $\left(A_{x^s t^j} = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j}A(x,t)\right)$ при $0 \le t \le x$ и $A(x,x) \equiv 1$,

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}x + 1, & x \in [0,\gamma], \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}(x-1), & x \in [\gamma,1], \end{cases} \qquad \gamma < 1/2.$$

Функция $\vartheta(x)$ непрерывна, монотонно убывает, $\vartheta(0) = 1$, $\vartheta(1) = 0$, $\vartheta^2(x) = \vartheta(\vartheta(x)) \equiv x$. Таким образом, $\vartheta(x)$ — инволюция, производная которой имеет разрыв в точке $x = \gamma$.

В статье [1] изучен оператор вида (1) в том случае, когда инволюция $\vartheta(x)$ есть произвольная трижды непрерывно дифференцируемая на $[0,1]$ функция и $\vartheta'(x) < 0$. Для этого оператора установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$. В настоящей статье рассмотрен случай, когда $\vartheta'(x)$ разрывна при $x = \gamma$, что создает дополнительные трудности в получении теоремы равносходимости. Оказывается, в этом случае равносходимость будет иметь место лишь при $[\varepsilon, \gamma-\varepsilon]$ и $[\gamma+\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Введем непрерывную, монотонно возрастающую на отрезке $[0,1]$ функцию:

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 2\gamma\tau, & \tau \le 1/2, \\ 2(1-\gamma)\tau + 2\gamma - 1, & \tau \ge 1/2. \end{cases} \tag{2}$$

Отсюда

$$\varphi^{-1}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\xi, & \xi \in [0,\gamma], \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\xi + 1 - 2\gamma], & \xi \in [\gamma,1]. \end{cases} \tag{3}$$

Лемма 1. *Имеет место формула* $\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(\tau))) = 1 - \tau$.

Доказательство. В силу (2) имеем:

$$\vartheta(\varphi(\tau)) = \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}\varphi(\tau) + 1, & \varphi(\tau) \in [0,\gamma], \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}(\varphi(\tau) - 1), & \varphi(\tau) \in [\gamma,1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}2\gamma\tau + 1, & \tau \le 1/2, \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}[2(1-\gamma)\tau + 2\gamma - 1 - 1], & \tau \ge 1/2 \end{cases} = \begin{cases} 2(\gamma-1)\tau + 1, & \tau \le 1/2, \\ 2\gamma(1-\tau), & \tau \ge 1/2. \end{cases}$$

Учитывая (3), получаем:

$$\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(\tau))) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\vartheta(\varphi(\tau)), & \vartheta(\varphi(\tau)) \in [0,\gamma], \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\vartheta(\varphi(\tau)) + 1 - 2\gamma], & \vartheta(\varphi(\tau)) \in [\gamma,1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}\vartheta(\varphi(\tau)), & \tau \ge 1/2, \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[\vartheta(\varphi(\tau)) + 1 - 2\gamma], & \tau \le 1/2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma}[-2\gamma\tau + 2\gamma], & \tau \ge 1/2, \\ \frac{1}{2(1-\gamma)}[2(\gamma-1)\tau + 1 + 1 - 2\gamma], & \tau \le 1/2 \end{cases} = 1 - \tau.$$

Лемма доказана. □

Положим $Tf = f(\varphi(x))$. Тогда $T^{-1}f = f(\varphi^{-1}(x))$.

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$A_1 f = TAT^{-1}f = \int\limits_0^{1-x} A_1(1-x,t)f(t)\,dt,$$

где $A_1(x,t) = A(\varphi(x),\varphi(t))\varphi'(t)$.

Доказательство. Имеем

$$AT^{-1}f = \int\limits_0^{\vartheta(x)} A(\vartheta(x),t)f(\varphi^{-1}(t))\,dt. \tag{4}$$

Выполним в интеграле (4) замену переменных $\tau=\varphi^{-1}(t)$:

$$AT^{-1}f = \int\limits_0^{\varphi^{-1}(\vartheta(x))} A(\vartheta(x),\varphi(\tau))\varphi'(\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда, учитывая лемму 1, получаем:

$$TAT^{-1}f = \int\limits_0^{\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(x)))} A(\vartheta(\varphi(x)),\varphi(\tau))\varphi'(\tau)f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{1-x} A(\varphi(\varphi^{-1}(\vartheta(\varphi(x)))),\varphi(\tau))\varphi'(\tau)f(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^{1-x} A_1(1-x,t)f(t)\,dt.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Если $y=R_{1,\lambda}f$, где $R_{1,\lambda}=(E-\lambda A_1)^{-1}A_1$, то*

$$-(E+N)\left(\frac{1}{\varphi'(x)}y'(1-x)\right)-\lambda y(x)=f(x), \tag{5}$$

$$y(1)=0, \tag{6}$$

где $(E+N)=(E+N_1)^{-1}$, $N_1f=\int\limits_0^x N_1(x,t)f(t)\,dt$ и $N_1(x,t)=\dfrac{1}{\varphi'(x)}A'_{1x}(x,t)$.

Доказательство. Пусть $y=R_{1,\lambda}f$. Тогда

$$y(x)-\lambda\int\limits_0^{1-x} A_1(1-x,t)y(t)\,dt = \int\limits_0^{1-x} A_1(1-x,t)f(t)\,dt. \tag{7}$$

Отсюда справедливость (6) очевидна. Далее, выполнив в (7) замену x на $1-x$ и продифференцировав полученное выражение по x, получим:

$$-y'(1-x)-\lambda\left[\varphi'(x)y(x)+\int\limits_0^x A'_{1,x}(x,t)y(t)\,dt\right]=\varphi'(x)f(x)+\int\limits_0^x A'_{1,x}(x,t)f(t)\,dt. \tag{8}$$

Разделив (8) почленно на $\varphi'(x)$ и применив оператор $(E+N)$, приходим к утверждению леммы. □

Действуя так же, как и в работе [2], получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любой $f(x)\in L[0,1]$ имеет место следующее соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int\limits_{|\lambda|=r}[R_{1,\lambda}-R_{2,\lambda}]f\,d\lambda\right\|_\infty=0,$$

где $R_{2,\lambda}=(E-\lambda A_2)^{-1}A_2$ и $A_2f=\int\limits_0^{1-x}\varphi'(t)f(t)\,dt$, $\|\cdot\|$ — норма в $L_\infty[0,1]$.

Лемма 4. *Если $y=R_{2,\lambda}f$, то $-\dfrac{1}{\varphi'(x)}y'(1-x)-\lambda y(x)=f(x)$, $y(1)=0$.*

Эта лемма очевидна.

Пусть $y=R_{2,\lambda}f$. Положим $y_1(x)=y(x)$, $y_2(x)=y(1/2-x)$, $y_3(x)=y(1/2+x)$, $y_4(x)=y(1-x)$ при $x\le 1/2$. Так как в силу (2) $\varphi'(x)=\begin{cases} a, & x\le 1/2\\ b, & x\ge 1/2\end{cases}$, где $a=2\gamma$, $b=2(1-\gamma)$, и $b>a>0$, то вектор $(y_1(x),y_2(x),y_3(x),y_4(x))^T$ (T — знак транспонирования) удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$y'_4(x)-\lambda a y_1(x)=af_1(x),\quad -y'_1(x)-\lambda b y_4(x)=bf_4(x), \tag{9}$$

$$-y_3'(x) - \lambda a y_2(x) = a f_2(x), \quad y_2'(x) - \lambda b y_3(x) = b f_3(x), \tag{10}$$

$$y_3(1/2) = y_4(0) = 0, \tag{11}$$

$$y_1(1/2) = y_3(0), \quad y_2(0) = y_4(1/2), \tag{12}$$

Условия (12) являются условиями непрерывности $y(x)$ в точке $1/2$.

Обозначим $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/a \\ -1/b & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{b}{a}}\, i \\ \sqrt{\frac{a}{b}}\, i & 1 \end{pmatrix}$. Матрица Γ диаганализирует матрицу B, т. е. $\Gamma^{-1}B\Gamma = D = \begin{pmatrix} \omega i & 0 \\ 0 & -\omega i \end{pmatrix}$, где $\omega = 1/\sqrt{ab}$.

Если в системе (9), представленной в виде $B(y_1', y_4')^T - \lambda(y_1, y_4)^T = (f_1, f_4)^T$, выполнить замену $(y_1, y_4)^T = \Gamma(z_1, z_4)^T$, то получим систему:

$$D(z_1', z_4')^T - \lambda(z_1, z_4)^T = \Gamma^{-1}(f_1, f_4)^T = (\Phi_1, \Phi_4)^T, \tag{13}$$

или

$$z_1' + \mu z_1 = \tilde{\Phi}_1, \qquad z_4' - \mu z_4 = \tilde{\Phi}_4, \tag{14}$$

где $\mu = \lambda i/\omega$, $\tilde{\Phi}_1 = -\Phi_1 i/\omega$, $\tilde{\Phi}_4 = \Phi_4 i/\omega$. В дальнейшем будем считать, что $\operatorname{Re}\mu \geq 0$.

Аналогично систему (10) можно записать в виде $-B(y_2', y_3')^T - \lambda(y_2, y_3)^T = (f_2, f_3)^T$. Выполнив замену $(y_2, y_3)^T = \Gamma(z_2, z_3)^T$, получим

$$z_2' - \mu z_2 = \tilde{\Phi}_2, \qquad z_3' + \mu z_3 = \tilde{\Phi}_3, \tag{15}$$

где $\tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 i/\omega$, $\tilde{\Phi}_3 = -\Phi_3 i/\omega$.

Лемма 5. *Общее решение системы* (14), (15) *можно представить в виде*

$$z(x) = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T = g_\mu \tilde{\Phi} + V(x, \mu)c, \tag{16}$$

где $g_\mu \tilde{\Phi} = \int\limits_0^{1/2} g(x, t, \mu)\tilde{\Phi}(t)\, dt$, $g(x, t, \mu) = \operatorname{diag}(g_1(x, t, \mu), g_2(x, t, \mu), g_3(x, t, \mu), g_4(x, t, \mu))$, $g_1(x, t, \mu) = g_3(x, t, \mu) = \varepsilon(x, t)e^{-\mu(x-t)}$, $g_2(x, t, \mu) = g_4(x, t, \mu) = -\varepsilon(t, x)e^{\mu(x-t)}$, $\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_4)^T$, $V(x, \mu) = \operatorname{diag}(e^{-\mu x}, e^{\mu x}, e^{-\mu x}, e^{\mu x})$, $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$ *— постоянный вектор.*

Краевые условия (11), (12) принимают вид

$$U(z) = M_0\tilde{\Gamma} z(0) + M_1\tilde{\Gamma} z(1/2) = \tilde{M}_0 z(0) + \tilde{M}_1 z(1/2) = 0, \tag{17}$$

где

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{b}{a}}\, i \\ 0 & 1 & \sqrt{\frac{b}{a}}\, i & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{a}{b}}\, i & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{a}{b}}\, i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\det\Delta(\mu) = U(V(x, \mu))$. Определитель $\det\Delta(\mu)$ представляет собой экспоненциальный по μ многочлен с постоянными коэффициентами. При этом коэффициенты при экспонентах с максимальными и минимальными вещественными частями показателей отличны от нуля. В этом случае говорят, что краевые условия (17) регулярны по Биркогофу. Поэтому так же, как, например, в [2] получаем

Лемма 8. *Если* $z(x, \mu) = R_{3,\mu}\tilde{\Phi}$ *является решением системы* (14), (15) *с краевыми условиями* (17) *и* $\det\Delta(\mu) \neq 0$, *то*

$$R_{3,\mu}\tilde{\Phi} = g_\mu\tilde{\Phi} - V(x, \mu)\Delta^{-1}(\mu)U(g_\mu\tilde{\Phi}).$$

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$z_1' + \mu z_1 = \tilde{\Phi}_1, \quad z_2' - \mu z_2 = \tilde{\Phi}_2, \quad z_3' + \mu z_3 = \tilde{\Phi}_3, \quad z_4' - \mu z_4 = \tilde{\Phi}_4, \tag{18}$$

$$U_0(z) = z(0) - z(1/2) = 0. \tag{19}$$

Краевые условия (19) регулярны по Биркогофу. Аналогично лемме 8 имеем:

Лемма 9. *Если $z(x,\mu) = R^0_{3,\mu}\tilde{\Phi}$ есть решение системы* (18), *с условиями* (19) *и* $\det\Delta_0(\mu) \neq 0$, *то*

$$R^0_{3,\mu}\tilde{\Phi} = g_\mu\tilde{\Phi} - V(x,\mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu\tilde{\Phi}),$$

где $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x,\mu))$.

Теорема 2. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$ имеет место следующее соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int\limits_{|\mu|=r}[R_{3,\mu}\tilde{\Phi} - R^0_{3,\mu}\tilde{\Phi}]\,d\mu\right\|_{C[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

где $\|\cdot\|_{C[\varepsilon,1/2-\varepsilon]}$ *— сумма норм компонент в пространстве* $C[\varepsilon,1/2-\varepsilon]$.

Теорема 3. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$ справедливо соотношение*

$$S_{1,r}(f,x) = \begin{cases}\sigma_{r/|\omega|}(f_1,x) + o(1), & x \in [\varepsilon, 1/2-\varepsilon],\\ \sigma_{r/|\omega|}(f_3,x-1/2) + o(1), & x \in [1/2+\varepsilon, 1-\varepsilon],\end{cases}$$

где $S_{1,r}(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с. п. ф. оператора A_1 для тех λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x) \in L[0,1/2]$ по собственным функциям оператора y', $y(0) = y(1/2)$ (т. е. ряда Фурье по тригонометрической системе $\{e^{4k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{\infty}$), рассматриваемые на отрезке $[0,1/2]$ и суммирование распространяется по тем k, для которых $|4k\pi| < r$, $o(1) \to 0$ равномерно по x на $[\varepsilon,1/2-\varepsilon] \cup [\varepsilon+1/2,1-\varepsilon]$ и $0 < \varepsilon < 1/2$.

Доказательство. По лемме 4

$$R_{2,\lambda}f = \begin{cases} y_1(x), & x \in [0,1/2],\\ y_3(x-1/2), & x \in [1/2,1].\end{cases}$$

Но $y_1(x) = (\tilde{\Gamma}z(x))_1$, $y_3(x-1/2) = (\tilde{\Gamma}z(x-1/2))_3$. Следовательно,

$$y_1(x) = z_1(x) + \sqrt{\frac{b}{a}}\,iz_4(x), \quad y_3(x-1/2) = \sqrt{\frac{a}{b}}\,iz_2(x-1/2) + z_3(x-1/2).$$

Пусть $z^0 = (z^0_1, z^0_2, z^0_3, z^0_4)^T$ — решение системы (18), (19). Тогда

$$z^0_1 = R^0_{-\mu}\tilde{\Phi}_1, \quad z^0_2 = R^0_{\mu}\tilde{\Phi}_2, \quad z^0_3 = R^0_{-\mu}\tilde{\Phi}_3, \quad z^0_4 = R^0_{\mu}\tilde{\Phi}_4,$$

где R^0_λ — резольвента оператора y', $y(0) = y(1/2)$. Так как $\sigma_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R^0_\lambda f\,d\lambda$, то имеем:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=r} z^0_j\,d\mu = -\sigma_r(\tilde{\Phi}_j,x), \quad j=1,3, \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=r} z^0_j\,d\mu = \sigma_r(\tilde{\Phi}_j,x), \quad j=2,4.$$

Поэтому по теореме 2 при $x \in [\varepsilon,1/2-\varepsilon]$ получаем

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_{2,\lambda}f\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} y_1(x)\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}[z_1(x) + \sqrt{\frac{b}{a}}\,iz_4(x)]\,d\lambda =$$

$$= -\frac{1-i\omega}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=r/|\omega|}[z^0_1(x) + \sqrt{\frac{b}{a}}\,iz^0_4(x)]\,d\mu + o(1) = -i\omega\left[-\sigma_{r/|\omega|}(\tilde{\Phi}_1,x) + \sqrt{\frac{b}{a}}\,i\sigma_{r/|\omega|}(\tilde{\Phi}_4,x)\right] + o(1) =$$

$$= -i\omega\left[\frac{i}{\omega}\sigma_{r/|\omega|}(\Phi_1,x) - \sqrt{\frac{b}{a}}\frac{1}{\omega}\sigma_{r/|\omega|}(\Phi_4,x)\right] + o(1) = -i\left[i\sigma_{r/|\omega|}\left(\frac{1}{2}\left[f_1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\,if_4\right],x\right) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{b}{a}}\sigma_{r/|\omega|}\left(\frac{1}{2}\left[-\sqrt{\frac{a}{b}}\,if_1 + f_4\right],x\right)\right] + o(1) = \sigma_{r/|\omega|}(f_1,x) + o(1).$$

Аналогично при $x \in [\varepsilon + 1/2, 1 - \varepsilon]$ имеем $-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_{2,\lambda} f \, d\lambda = \sigma_{r/|\omega|}(f_3, x - 1/2) + o(1)$. □

Так как $S_{1,r}(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_{1,\lambda} f \, d\lambda$ и $R_\lambda = T^{-1} R_{1,\lambda} T$, то в силу теорем 1 и 3 справедлива

Теорема 4. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$ имеют место соотношения*

$$S_r(f,x) = \begin{cases} \sigma_{r/|\omega|}\left(g_1, \frac{x}{2\gamma}\right) + o(1), & x \in [\varepsilon, \gamma - \varepsilon], \\ \sigma_{r/|\omega|}\left(g_2, \frac{1}{2(1-\gamma)}(x + 1 - 2\gamma)\right) + o(1), & x \in [\gamma + \varepsilon, 1\varepsilon -], \end{cases}$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $g_1(x) = f(2\gamma x)$, $g_2(x) = f(2(1-\gamma)x + \gamma)$, $o(1) \to 0$ равномерно по x при $[\varepsilon, \gamma - \varepsilon]$, $[\gamma + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270).

Библиографический список

1. *Хромов А. П., Кувардина Л. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией // Изв. вузов. Математика. 2008. № 5. С. 67–76. [*Kuvardina L. P., Khromov A. P.* The equiconvergence of expansions in eigenfunctions and associated functions of an integral operator with involution // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 2008. Vol. 52, № 5. P. 58—66.]

2. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции : Информ. бюл. 2006. Т. 6, № 1. С. 46–55. [*Khromov A. P.* The equiconvergence of expansions in eigenfunctions and associated functions of an integral operators with variable limits of integration (in Russian) // Integral Transforms and Special Functions. Inform. Byulleten. 2006. Vol. 6, № 1. P. 46–55.]

УДК 517.587

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В $L^{p(x)}_{2\pi}$ СРЕДНИМИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА

И. И. Шарапудинов

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала
E-mail: sharapud@mail.ru

Рассматривается пространство Лебега $L^{p(x)}_{2\pi}$ с переменным показателем $p(x)$, состоящее из измеримых функций $f(x)$, для которых существует интеграл $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)} \, dx$. Для $f \in L^{p(x)}_{2\pi}$ средние Валле–Пуссена $V^n_m(f,x)$ определим так $V^n_m(f,x) = \frac{1}{m+1} \sum\limits_{l=0}^{m} S_{n+l}(f,x)$, где $S_k(f,x)$ — частичная сумма Фурье функции $f(x)$ порядка k. Исследованы аппроксимативные свойства операторов $V^n_m(f) = V^n_m(f,x)$ в метрике пространства $L^{p(x)}_{2\pi}$. В случае, когда 2π-периодический переменный показатель $p(x) \geq 1$ удовлетворяет условию Дини–Липшица, доказано, что при $m = n - 1$ и $m = n$ имеет место оценка $\|f - V^n_m(f)\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c_r(p)}{n^r} E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ где $E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ — наилучшее приближение функции $f^{(r)}(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n в метрике пространства $L^{p(x)}_{2\pi}$.

Ключевые слова: пространства Лебега и Соболева с переменным показателем, приближение тригонометрическими полиномами, средние Валле–Пуссена.

Approximation of Smooth Functions in $L^{p(x)}_{2\pi}$ by Vallee–Poussin Means

I. I. Sharapudinov

Variable exponent $p(x)$ Lebesgue spaces $L^{p(x)}_{2\pi}$ is considered. For $f \in L^{p(x)}_{2\pi}$ Vallee–Poussin means $V^n_m(f,x)$ can be defined as $V^n_m(f,x) = \frac{1}{m+1} \sum\limits_{l=0}^{m} S_{n+l}(f,x)$, where $S_k(f,x)$ — partial Fourier sum of $f(x)$ of order k. Approximative properties of operators $V^n_m(f) = V^n_m(f,x)$ are investigated in $L^{p(x)}_{2\pi}$. Let $p(x) \geq 1$ be 2π-periodical variable exponent that satisfies Dini–Lipschitz condition. When $m = n - 1$ and $m = n$ the following estimate is proved: $\|f - V^n_m(f)\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c_r(p)}{n^r} E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$, where $E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ is the best approximation of function $f^{(r)}(x)$ by trigonometric polynomials of order n in $L^{p(x)}_{2\pi}$.

Key words: variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces, approximation by trigonometric polynomials, Vallee–Poussin means.