УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОСТОЙ КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КРАЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В. А. Халова[1], Ю. В. Шевцова[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, HalovaVA@info.sgu.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, yv-shevtsova@mail.ru

Целью данной работы является обобщение результатов, полученных для случаев круговой цилиндрической оболочки и оболочки со скошенным краем. Рассматривается нестационарный волновой процесс в цилиндрической оболочке с краем произвольной формы. На срединной поверхности оболочки вводится полугеодезическая система координат. Изучается динамический простой краевой эффект. Для нахождения решения применяется преобразование Лапласа, обращение которого осуществляется методом перевала.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, волновой процесс, преобразование Лапласа.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим цилиндрическую оболочку толщины $2h$, выполненную из изотропного упругого материала. Положение точек зададим векторным равенством:

$$\overline{P}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \overline{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \overline{n},$$

где (α_1, α_2) — криволинейные координаты на срединной поверхности, α_3 — расстояние по нормали, $\overline{n}$ — единичный вектор нормали срединной поверхности. При рассмотрении круговых цилиндрических оболочек [1, 2] в качестве криволинейных координат (α_1, α_2) принято выбирать такую ортогональную систему, в которой край оболочки проходит вдоль линии $\alpha_1 = 0$, а процесс распространения волн рассматривается вдоль образующих цилиндрической поверхности, то есть вдоль линий $\alpha_2 = \mathrm{const}$. Обычно в качестве координатных линий в этом случае выбираются линии кривизны. В статье [3] было предложено в случае оболочки произвольного очертания вводить на срединной поверхности полугеодезическую систему координат и рассматривать распространение волн вдоль геодезических. Данный подход был реализован в [4] для цилиндрических оболочек со скошенным краем. В этом случае край срединной поверхности оболочки представлял собой сечение кругового цилиндра некоторой плоскостью. В работе [5] были изложены основные геометрические вопросы, возникающие при учете формы края пластины и оболочки. В данной работе укажем метод построения полугеодезической системы криволинейных координат в случае круговой цилиндрической оболочки с торцом произвольной формы. А именно будем считать, что α_1-линии — геодезические, ортогональные краю $\alpha_1 = 0$, причем параметр α_1 определяет длину геодезической. Будем изучать процесс распространения волн вдоль геодезических, причем в промежутки времени до момента отражения от противоположного торца, поэтому оболочка будет считаться полубесконечной. Рассмотрим динамический простой краевой эффект и укажем метод нахождения решения, учитывающего форму края оболочки.

1. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Пусть положение точек срединной поверхности оболочки в пространстве определяется векторным уравнением:

$$\overline{r} = \overline{r}(\alpha_1, \alpha_2),$$

где α_1, α_2 — параметры координатных линий полугеодезической системы координат. При построении данной ортогональной криволинейной системы координат воспользуемся следующим фактом: любая кривая на поверхности, если ограничиться достаточно малым участком поверхности около какой-нибудь обыкновенной точки, может быть включена в семейство геодезически параллельных ей кривых, причем существует такая система координат, в которой эти кривые служат координатными линиями.

Пусть уравнение цилиндрической поверхности записывается в виде

$$\overline{r} = \varphi(\alpha)\overline{i} + \psi(\alpha)\overline{j} + \beta\overline{k}. \tag{1}$$

В случае кругового цилиндра имеем:

$$\varphi(\alpha) = R\cos\frac{\alpha}{R}, \qquad \psi(\alpha) = R\sin\frac{\alpha}{R},$$

$0 \le \alpha \le 2\pi R$, $-\infty < \beta < +\infty$, R — радиус направляющей окружности.

Край срединной поверхности оболочки в дальнейшем будет играть роль базы полугеодезической системы координат. Пусть его уравнение задано следующим образом:

$$\overline{r} = \varphi(\alpha)\overline{i} + \psi(\alpha)\overline{j} + \chi(\alpha)\overline{k},$$

или в криволинейных координатах

$$\beta = \chi(\alpha).$$

Наложим ограничения на вид рассматриваемой кривой. Будем считать, что это замкнутая регулярная пространственная простая кривая. Потребуем, чтобы кручение кривой было отлично от нуля:

$$\chi' + R^2\chi''' \neq 0.$$

Геодезическими линиями рассмотренной поверхности являются образующие, винтовые линии и нормальные направляющие. Векторное уравнение двухпараметрического семейства винтовых линий для цилиндрической поверхности (1) имеет вид

$$\overline{r} = \varphi(\alpha)\overline{i} + \psi(\alpha)\overline{j} + (d_1\alpha + d_2)\overline{k}. \tag{2}$$

Учтем, что через каждую точку поверхности в данном направлении можно провести геодезическую линию и притом единственную.

Зафиксируем значение параметра $\alpha = \alpha_2$. При каждом значении α_2 запишем уравнение геодезической в ортогональном направлении, т. е. определим параметры d_1, d_2. Они находятся из следующих условий: 1) геодезическая в данной точке пересекает базу, 2) в точке пересечения касательные векторы рассматриваемых кривых ортогональны. Разрешив полученную систему алгебраических уравнений, получим:

$$d_1 = -\frac{1}{\chi'(\alpha_2)}, \qquad d_2 = \chi(\alpha_2) + \frac{1}{\chi'(\alpha_2)}.$$

Следовательно, геодезическая в ортогональном направлении задается уравнением

$$\beta = \chi(\alpha_2) + \frac{\alpha_2 - \alpha}{\chi'(\alpha_2)}.$$

Заметим, что в случае $\chi'(\alpha_2) = 0$ геодезическими являются образующие цилиндрической поверхности, которые не могут быть заданы уравнениями (2).

Отложим на построенной геодезической от заданной точки дугу, длину которой обозначим через α_1. Вычислим длину дуги α_1:

$$\alpha_1 = \pm\int\limits_{\alpha_2}^{\alpha} \sqrt{1 + d_1^2}\, d\alpha'.$$

Поэтому

$$\alpha = -\frac{\alpha_1\chi'(\alpha_2)}{\sqrt{1 + \chi'^2(\alpha_2)}} + \alpha_2, \qquad \beta = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 + \chi'^2(\alpha_2)}} + \chi(\alpha_2).$$

Таким образом, мы приходим в некоторую точку на поверхности, положение которой будет определяться значениями α_1, α_2. Тогда уравнение поверхности в построенной полугеодезической системе координат запишется в виде

$$\overline{r} = \varphi\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1\chi'(\alpha_2)}{\sqrt{1+\chi'^2(\alpha_2)}}\right)\overline{i} + \psi\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1\chi'(\alpha_2)}{\sqrt{1+\chi'^2(\alpha_2)}}\right)\overline{j} + \left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{1+\chi'^2(\alpha_2)}} + \chi(\alpha_2)\right)\overline{k}.$$

В силу выбора системы координат первая квадратичная форма срединной поверхности будет иметь вид $ds^2 = d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2$, где

$$A_2 = \sqrt{1+\chi'^2(\alpha_2)} - \alpha_1\frac{\chi''(\alpha_2)}{1+\chi'^2(\alpha_2)}.$$

Определяя нормальные кривизны срединной поверхности в направлении координатных линий, получим, в частности

$$\frac{1}{R_{22}} = -\frac{1}{1+\chi'^2(\alpha_2)}.$$

Геодезическая кривизна α_2-линии будет вычисляться следующим образом:

$$k = \frac{\chi''(\alpha_2)}{\alpha_1\chi'' - (1+\chi'^2)^{3/2}}.$$

2. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОСТОЙ КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ

Рассмотрим ударное воздействие, для которого граничные условия на торце в терминах трехмерной теории упругости задаются в виде

$$\sigma_{11}(0,\alpha_2,\alpha_3,t) = \varphi(\alpha_2,\alpha_3)H(t), \qquad \sigma_{1i}(0,\alpha_2,\alpha_3,t) = 0 \qquad (i=2,3). \tag{3}$$

Здесь σ_{ij} — напряжения, t — время, $H(t)$ — функция Хевисайда, $\varphi(\alpha_2,\alpha_3)$ — амплитуда ударной нагрузки, являющаяся нечетной функцией по α_3. Рассмотрим случай однородных начальных условий.

Для описания движения оболочки применим теорию Кирхгофа–Лява. В силу сделанных ограничений на вид краевой нагрузки воспользуемся уравнениями динамического простого краевого эффекта. Произведем растяжение масштабов независимых переменных по формулам

$$\alpha_1 = R\eta^{1/2}\xi_1, \qquad t = Rc_2^{-1}t_1,$$

где $\eta = \dfrac{h}{R}$ — малый параметр, $c_2 = \sqrt{\dfrac{E}{2(1+\nu)\rho}}$ — скорость волны сдвига, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность.

Разрешающее уравнение простого краевого эффекта в безразмерных переменных t_1, $x_i = \alpha_i/R$, $r_{22} = R_{22}/R$, относительно прогиба w записывается следующим образом [4]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2Rk\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \frac{3}{2}(1-\nu)\eta^{-2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2(1+\nu)\frac{w}{r_{22}^2}\right) = 0. \tag{4}$$

Применим к уравнению (4) преобразование Лапласа по времени. Учитывая однородные начальные условия, запишем уравнение (4) в изображениях (s — параметр преобразования Лапласа)

$$\frac{\partial^4 w^L}{\partial x_1^4} + 2Rk\frac{\partial^3 w^L}{\partial x_1^3} + \frac{3}{2}(1-\nu)\eta^{-2}s^2\left(1 + \frac{2(1+\nu)}{r_{22}^2}\right)w^L = 0. \tag{5}$$

Будем искать решение уравнения (5) в следующем виде:

$$w^L = W\exp(-\eta^{1/2}\Psi).$$

Подставляя в (5), получим два дифференциальных уравнения относительно нулевого приближения искомых W и Ψ. Учитывая, что радиус кривизны R_{22} не зависит от α_1, получим в первом приближении выражение для прогиба

$$w^L \approx \frac{1}{\sqrt{A_2}}\sum_{m=1}^{2} C_m(x_2,s)\exp\left((1+(-1)^m i)f(x_1,x_2,s)\right), \tag{6}$$

$$f = -\frac{\sqrt{s}}{\eta^{1/2}}\mu x_1 \sqrt[4]{1 + \frac{2(1+\nu)}{r_{22}^2 s^2}}, \qquad \mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3(1-\nu)}{2}\right)^{1/4}.$$

Здесь берутся главные значения радикалов на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части действительной оси. Выбор ветвей степенной функции в (6) обусловлен требованием экспоненциального затухания решения вдоль геодезической в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} s > 0$).

Входящие в (6) функции $C_m(x_2, s)$ необходимо определить из двумерных граничных условий, являющихся следствием (3):

$$G_1^L(0, x_2, s) = -h^2 s^{-1} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x_2, \zeta)\zeta\, d\zeta, \qquad N_1^L(0, x_2, s) = 0.$$

Здесь G_1^L — изображение изгибающего момента, N_1^L — изображение перерезывающей силы. Учитывая выражения момента и силы через прогиб и переходя к изображениям, получим систему линейных уравнений для определения искомых функций. Решения данной системы в главном имеют вид

$$C_m(x_2, s) = C(x_2, s)(1 - (-1)^m i),$$

где

$$C(x_2, s) = \sqrt{A_2(0, x_2)}\, \frac{3(1 - v^2)R}{8E\mu^2 s^2 (1 + 2(1+\nu) r_{22}^{-2} s^{-2})^{1/2}} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x_2, \zeta)\zeta\, d\zeta.$$

Получим выражение для изображения изгибающего момента

$$G_1^L = -h^2 \frac{1}{2s} \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x_2, \zeta)\zeta\, d\zeta \sqrt{\frac{A_2(0, x_2)}{A_2(x_1, x_2)}} \left((1 - i)\exp((1 - i)f) + (1 + i)\exp((1 + i)f)\right). \tag{7}$$

Задача сводится к нахождению изгибающего момента по его изображению.

3. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ ПЕРЕВАЛА

В некоторый начальный промежуток времени обращение (7) может быть выполнено методом разложения по отрицательным степеням корня из параметра преобразования Лапласа [1, 3]. Влияние формы края в решении, приведенном в [4], определяется наличием множителей, содержащих коэффициенты первой квадратичной формы и безразмерный радиус кривизны α_2-линии. Рассмотрим случай обращения при больших значениях времени. Заметим, что при $t_1 \to \infty$ решение для G_1 стремится к решению, соответствующему статическому случаю

$$G_{1,st} = -h^2 \int\limits_{-1}^{1} \varphi(x_2, \zeta)\zeta\, d\zeta \sqrt{\frac{A_2(0, x_2)}{A_2(x_1, x_2)}} \exp(-y|\omega|^{1/2})(\cos y|\omega|^{1/2} + \sin y|\omega|^{1/2}),$$

$$\omega^2 = \frac{2(1+\nu)}{r_{22}^2}, \qquad y = \eta^{-1/2\mu x_1}.$$

Будем искать асимптотику интеграла Меллина:

$$G_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} G_1^L(s) e^{s t_1}\, ds \tag{8}$$

методом перевала. Данный метод включает в себя два этапа: деформацию контура интегрирования в (8) в контур, наиболее удобный для получения асимптотических оценок, и вычисление асимптотики интеграла по новому контуру. Обоснование возможности такой деформации контура интегрирования для интегралов вида (8) описано в ряде работ, в том числе в [1]. Остановимся на получении асимптотики.

Воспользуемся теоремой о вкладе точки перевала. В качестве большого параметра выберем t_1.

Введем в рассмотрение функцию $S(s) = \left(s - (1 \mp i)(\omega^2 + s^2)^{1/4}\mu\sqrt{x_1}\,\eta^{-1/2}t_1^{-1}\right) = S_1 + S_2$.

Функция $S(s)$ имеет мнимые седловые точки. Обозначим их $s_n = \mp i\Omega_n$. Эти точки являются корнями уравнения

$$S'(s_n) = 0.$$

Вычислим производную функции $S(s)$:

$$S'(s) = 1 - (1 \mp i)\mu \frac{x_1}{\eta^{1/2}t_1} \left(\frac{1}{2\sqrt{s}\left(\dfrac{\omega^2}{s^2} + 1\right)^{3/4}} \right). \tag{9}$$

Для $\sqrt{s}$ берется выделенная в решении главная ветвь. Поэтому $\sqrt{\mp i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 \mp i)$. Из (9) получим уравнение для нахождения точек перевала

$$\frac{\Omega_n}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^{3/4}} = \frac{\sqrt{2}}{\mu}\,\frac{\eta^{1/2}t_1}{x_1}.$$

Точки $s_n = \mp i\Omega_n$ являются точками перевала первого и второго слагаемого в (7) соответственно. Поскольку оба этих слагаемых комплексно сопряжены, то вклад точек перевала обоих слагаемых в решение равен удвоенной действительной части вклада точки перевала одного слагаемого. Имеем в силу выбора ветви корня в методе перевала:

$$S_1''(-i\Omega_n) = i\mu \frac{x_1}{2^{3/2}\eta^{1/2}t_1}\,\frac{2\omega^2 + \Omega_n^2}{(\Omega_n^2 - \omega^2)^{7/4}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{S_1''(-i\Omega_n)}} = \frac{1}{1-i}\,\frac{(\Omega_n^2 - \omega^2)^{7/8}}{(\Omega_n^2 + 2\omega^2)^{1/2}}\,\frac{2^{5/4}\eta^{1/4}t_1^{1/2}}{\mu^{1/2}x_1^{1/2}}.$$

Вычислим значение $S_1(-i\Omega_n)$:

$$S_1(-i\Omega_n) = -i\Omega_n - (1-i)^2 \frac{\mu x_1}{\sqrt{2}\eta^{1/2}t_1}(\Omega_n^2 - \omega^2).$$

Тогда

$$G_{1,s} = -h^2 \int_{-1}^{1} \varphi(x_2,\zeta)\zeta\, d\zeta \sqrt{\frac{A_2(0,x_2)}{A_2(x_1,x_2)}}\,\frac{2^{3/4}\eta^{1/4}}{\sqrt{\pi}\mu^{1/2}x_1^{1/2}}\,\frac{(\Omega_n^2 - \omega^2)^{7/8}}{\Omega_n(\Omega_n^2 + 2\omega^2)^{1/2}}\cos T_n, \tag{10}$$

где

$$T_n = \Omega_n t_1 - \sqrt{2}\mu(\Omega_n^2 - \omega^2)^{1/4}\frac{x_1}{\eta^{1/2}}.$$

При $t_1 > 1$ решение строится в виде суперпозиции двух решений $G_1 = G_{1,st} + G_{1,s}$.

Как видно из (10), найденное решение учитывает форму торца оболочки за счет присутствия в нем множителя, связанного с геометрией края. Данное решение согласуется с решениями, полученными для цилиндрической оболочки, отнесенной к линиям кривизны [1].

Библиографический список

1. *Коссович Л. Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 176 с.
2. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of thin walled elastic bodies. Academic Press, 1998.
3. *Каплунов Ю. Д.* Распространение нестационарных упругих волн в оболочке общего очертания // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 1. С. 83–91.
4. *Шевцова Ю. В.* Динамический простой краевой эффект в скошенной круговой цилиндрической оболочке // Механика деформируемых сред : сб. тр. Саратов, 1997. Вып. 13. С. 83–87.
5. *Шевцова Ю. В., Парфенова Я. А.* Геометрические аспекты задачи о распространении нестационарных волн в пластинах и цилиндрических оболочках с краем произвольной формы // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4, ч. 5. С. 2612–2615.

Dynamical Simple Edge Effect in the Cylindrical Shell with the Edge of Arbitrary Form

V. A. Khalova, Y. V. Shevtsova

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, HalovaVA@info.sgu.ru, yv-shevtsova@mail.ru

The purpose of the article is to generalize the results derived in the cases of a circular shell and of a shell with a cut edge. Non-stationary wave process in a cylindrical shell with an arbitrary edge is considered. Half-geodesic frame is introduced on the middle surface of the shell and dynamical simple edge effect is studied. To find the solution Laplace transform is used while the inverse transform is realized via saddle-point method.

Key words: cylindrical shell, wave process, Laplace transform.

References

1. Kossovich L. Iu. *Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek* [Nonstationary problems of the theory of elastic thin shells]. Saratov, Izd-vo Sarat. Univ., 1986, 176 p. (in Russian).
2. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of thin walled elastic bodies*. Academic Press, 1998.
3. Kaplunov J. D. Rasprostranenie nestatsionarnykh uprugikh voln v obolochke obshchego ochertaniia. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 1993, vol. 57, iss. 1, pp. 83–91 (in Russian).
4. Shevtsova Yu. V. Dinamicheskii prostoi kraevoi effekt v skoshennoi krugovoi tsilindricheskoi obolochke [Dynamic simple edge effect in the beveled circular cylindrical shell]. *Mekhanika deformiruemykh sred : sb. tr.* [Mechanics of deformable media], Saratov, 1997, iss. 13, pp. 83–87 (in Russian).
5. Shevtsova Yu. V., Parfenova Ya. A. Geometric aspects of the problem of the propagation of nonstationary waves in plates and cylindrical shells with edge of an arbitrary. *Vestn. Nizhegorod. Univ. im. N. I. Lobachevskogo*, 2011, no. 4, pt. 5, pp. 2612–2615 (in Russian).