УДК 501.1

КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО ВО ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН

В. Ф. Кириченко[1], **М. П. Мисник**[2], **П. А. Самаркин**[3]

[1] Доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., v.f.kirichenko@Gmail.com

[2] Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, MisnikMP@info.sgu.ru

[3] Аспирант кафедры математики и моделирования, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., SamarkinPA@Gmail.com

В статье рассматривается краевая задача второго рода, для уравнений равновесия «в смешанной форме», определяющая неклассическую математическую модель для шарнирно закрепленной изотропной и однородной пластины в рамках обобщенных гипотез Тимошенко с учетом начальных неправильностей. Для указанной задачи впервые доказывается существование обобщенного решения и слабая компактность множества приближенных решений, получаемого с помощью метода Бубнова–Галеркина по схеме В. З. Власова. На базе функциональных пространств, в которых рассматривается существование обобщенного решения и исследуется сходимость метода Бубнова–Галеркина, определяется конфигурационное пространство соответствующее поставленной краевой задаче.

Ключевые слова: нелинейные системы уравнений с частными производными, неклассическая теория оболочек.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1–5], наиболее полному описанию состояний дискретных и распределенных механических систем соответствует описание состояний в рамках фазовых и конфигурационных пространств. При этом явный вид указанных пространств зависит от свойств математических моделей, используемых при исследовании реальных механических систем с помощью вычислительных экспериментов. В частности, если математическая модель распределенной механической системы формализуется некоторой краевой задачей, например, для уравнений равновесия упругой пластины, то соответствующее данной модели конфигурационное пространство определяется такими функциональными пространствами, по отношению к которым, во-первых, доказывается существование решения указанной краевой задачи и, во-вторых, доказывается сходимость численного метода, используемого при проведении вычислительных экспериментов над изучаемой моделью пластины.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В данной статье объектом исследования является следующая краевая задача второго рода для уравнений равновесия «в смешанной форме», определяющая неклассическую математическую модель для шарнирно закрепленной изотропной и однородной пластины в рамках обобщенных гипотез Тимошенко (модель Пелеха–Шереметьева) с учетом начальных неправильностей:

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left(-A\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial x_i}-A\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_{3-i}}+C\sigma_{i3}\right)dx_3=0,\qquad i=\overline{1,2}; \tag{1}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sum_{i=1}^{2}\left\{-B\frac{\partial^2\sigma_{ii}}{\partial x_i^2}-B\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_{3-i}\partial x_i}-C\frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial x_i}\right\}\right)dx_3-L(u_{30},F)-L(\omega_0,F)=g(x_1,x_2); \tag{2}$$

$$\frac{1}{Eh}\Delta^2F=-\frac{1}{2}L(u_{30},u_{30})-L(u_{30},\omega_0); \tag{3}$$

$$u_{30}|_{\partial\Omega}=0,\qquad \left.\frac{\partial^2u_{30}}{\partial x_1^2}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial^2u_{30}}{\partial x_2^2}\right|_{\partial\Omega}=0;\qquad F|_{\partial\Omega}=0,\qquad \left.\frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}\right|_{\partial\Omega}=\left.\frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}\right|_{\partial\Omega}=0; \tag{4}$$

$$u_{11}(x_1,0)=u_{11}(x_1,b)=0,\qquad \frac{\partial u_{11}(0,x_2)}{\partial x_1}=\frac{\partial u_{11}(a,x_2)}{\partial x_1}=0, \tag{5}$$

$$u_{21}(0,x_2)=u_{21}(a,x_2)=0,\qquad \frac{\partial u_{21}(x_1,0)}{\partial x_2}=\frac{\partial u_{21}(x_1,b)}{\partial x_2}=0,\qquad (x_1,x_2)\in\partial\Omega. \tag{6}$$

В задаче (1)–(6) и всюду далее приняты такие условные обозначения:

$$\Delta^2 = \Delta(\Delta(\cdot)), \quad \Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2}; \quad A = \left(x_3 - \frac{4x_3^3}{3h^2}\right), \quad B = \frac{4x_3^3}{3h^2}, \quad C = 1 - \frac{4x_3^2}{h^2};$$

$$L(f_1, f_2) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}; \tag{7}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{1}{h}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\left(A\left[\frac{\partial u_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{21}}{\partial x_1}\right] - B\left[2\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_1 \partial x_2}\right]\right),$$

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{h}\frac{\partial^2 F}{\partial x_{3-i}^2} + \frac{E}{1-\nu^2}\left(A\left[\frac{\partial u_{i1}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial u_{3-i\,1}}{\partial x_{3-i}}\right] - B\left[\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_i^2} + \nu\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_{3-i}^2}\right]\right), \tag{8}$$

$$\sigma_{i3} = \frac{E}{2(1+\nu)}C\left[u_{i1} + \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\right], \qquad i = \overline{1,2}; \tag{9}$$

$$\Omega = (0,a)\times(0,b), \qquad \Omega \subset R^2, \qquad \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \qquad D = \Omega \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right),$$

$$D \subset R^3, \qquad (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}, \qquad x_3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right], \qquad h > 0, \qquad a > 0, \qquad b > 0;$$

$\overline{D} = \overline{\Omega} \times [-h/2, h/2]$ — замкнутая односвязная область в евклидовом пространстве R^3, занимаемая пластиной в недеформированном состоянии; Ω — измеримая односвязная область в евклидовом пространстве R^2 с границей $\partial\Omega$; область $\overline{D}$ параметризована декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что область $\overline{\Omega}$ принадлежит координатной плоскости Ox_1x_2 и определяет серединную поверхность пластины; h — постоянная толщина пластины; функция $\omega_0 = \omega_0(x_1, x_2)$ определяет начальную неправильность пластины; функция $u_{30}(x_1, x_2)$ определяет дополнительный прогиб пластины в процессе ее деформирования, а функция $(u_{30}(x_1, x_2) + \omega_0(x_1, x_2))$ определяет полный прогиб; $F = F(x_1, x_2)$ — искомая функция усилий; $u_{30}(x_1, x_2)$, $u_{i1}(x_1, x_2)$, $i = \overline{1,2}$, — искомые функции, определяющие коэффициенты в аппроксимации по переменной “x_3” (согласно модели Пелеха–Шереметьева) вектора перемещений для точек пластины; $g = g(x_1, x_2)$ — интенсивность поперечной нагрузки; E, ν – упругие постоянные, $E > 0$, $0 < \nu < \frac{1}{2}$.

Замечание. Краевая задача (1)–(6) является стационарным вариантом задач, исследованных в работах [6, 7].

Обозначения основных функциональных пространств, норм и скалярных произведений соответствуют данным в монографии [8], в частности, $L^2(\Omega)$ — лебегово пространство функций, интегрируемых с квадратом по измеримой области G, $|\cdot|_G$ — норма в $L^2(G)$, а $(\cdot,\cdot)_G$ – скалярное произведение в $L^2(G)$. Кроме того, используются следующие функциональные пространства [9,10]:

$H^{2,0}(\Omega)$ — подпространство пространства $H^2(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $H^2(\Omega)$ функций из $C^2(\overline{\Omega})$, равных нулю вблизи границы $\partial\Omega$;

$H_i^{1,0}(\Omega)$ $(i = \overline{1,2})$ — подпространство пространства $H^1(\Omega)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega})$, равных нулю вблизи границы $\partial\Omega_i = \partial\Omega_i^1 \cup \partial\Omega_i^2$, где

$$\partial\Omega_1^1 = \left\{(x_1,x_2) \in R^2 \left|(x_1,x_2)\right|_{x_1=a}, x_2 \in [0,b]\right\}, \qquad \partial\Omega_1^2 = \left\{(x_1,x_2) \in R^2 \left|(x_1,x_2)\right|_{x_1=0}, x_2 \in [0,b]\right\},$$
$$\partial\Omega_2^1 = \left\{(x_1,x_2) \in R^2 \left|(x_1,x_2)\right|_{x_2=b}, x_1 \in [0,a]\right\}, \qquad \partial\Omega_2^2 = \left\{(x_1,x_2) \in R^2 \left|(x_1,x_2)\right|_{x_2=0}, x_1 \in [0,a]\right\}.$$

Далее, в теореме доказывается существование обобщенного решения для задачи (1) — (6), дается обоснование сходимости метода Бубнова–Галеркина (Б.–Г.) при получении приближенного решения для этой задачи и определяется явный вид соответствующего конфигурационного пространства.

При доказательстве указанной теоремы потребуются утверждения из следующей леммы.

Лемма. *Отображение*

$$(u, v, w) \in \left(H^{2,0}(\Omega)\right)^3 \to (L(u,v), w)_\Omega \tag{10}$$

является трилинейным, непрерывным и не зависит от порядка следования аргументов, при этом имеет место равенство

$$\iint_\Omega L(u,v) w dx_1 dx_2 = \iint_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right] dx_1\, dx_2 -$$

$$-\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)dx_1\,dx_2. \qquad (11)$$

Доказательство данной леммы проводится по схеме доказательства леммы 2.2.2 из работы [11, с. 85–86] с точностью до используемых пространств, в частности, на предварительном этапе равенство (11) легко доказывается для любых функций $(u,v,w)\in C^{\infty}(\overline{\Omega})\times(C^{2,0}(\overline{\Omega}))^2$, где $C^{2,0}(\overline{\Omega})$ — подпространство пространства $C^2(\overline{\Omega})$, состоящее из функций $C^2(\overline{\Omega}$, равных нулю вблизи границы $\partial\Omega$.

Теорема. *Пусть выполняются такие условия:*

$$g\in L^2(\Omega),\qquad \omega_0\in C^{2,0}(\overline{\Omega}),\qquad \max_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_1\partial x_2}\right|,\left|\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_1^2}\right|,\left|\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_2^2}\right|\right)\leqslant d, \qquad (12)$$

где $d>0$ — достаточно малая вещественная постоянная.

Тогда:

1) существует хотя бы одно решение $\left\{\tilde u_{i1},\,\tilde u_{30},\tilde F\right\}$ задачи (1) — (6), при этом

$$\tilde F,\,\tilde u_{30}\in H^{2,0}(\Omega),\qquad \tilde u_{i1}\in H^{1,0}_{3-i}(\Omega),\qquad i=\overline{1,2}, \qquad (13)$$

и, кроме того, имеют место следующие интегральные тождества, определяющие согласно условиям (13) обобщенное решение задачи (1) — (6):

$$\iiint\limits_D\left\langle A\tilde\sigma_{ii}\frac{\partial\eta_{i1}}{\partial x_i}+A\tilde\sigma_{12}\frac{\partial\eta_{i1}}{\partial x_{3-i}}+C\tilde\sigma_{i3}\eta_{i1}\right\rangle dx_1\,dx_2\,dx_3=0,\qquad i=\overline{1,2}, \qquad (14)$$

при любых $\eta_{i1}=\eta_{i1}(x_1,x_2)\in H^{1,0}_{3-i}(\Omega)$;

$$\iint\limits_{\Omega}\left\langle\int\limits_{-h/2}^{h/2}\left(\sum_{i=1}^{2}\left\{-B\tilde\sigma_{ii}\frac{\partial^2\eta_{30}}{\partial x_i^2}-B\tilde\sigma_{12}\frac{\partial^2\eta_{30}}{\partial x_i\partial x_{3-i}}+C\tilde\sigma_{i3}\frac{\partial\eta_{30}}{\partial x_i}\right\}\right)dx_3-\right.$$
$$\left.-L(\tilde u_{30},\tilde F)\eta_{30}-L(\omega_0,\tilde F)\eta_{30}\right\rangle dx_1\,dx_2=\iint\limits_{\Omega}g\eta_{30}\,dx_1\,dx_2, \qquad (15)$$

при любых $\eta_{30}=\eta_{30}(x_1,x_2)\in H^{2,0}(\Omega)$;

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2\tilde F}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\eta_4}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2\tilde F}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2\eta_4}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2\tilde F}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2\eta_4}{\partial x_2^2}\right)dx_1\,dx_2=$$
$$=\iint\limits_{\Omega}\left(-\frac{1}{2}L(\tilde u_{30},\tilde u_{30})\eta_4-L(u_{30},\omega_0)\eta_4\right)dx_1\,dx_2, \qquad (16)$$

при любых $\eta_4=\eta_4(x_1,x_2)\in H^{2,0}(\Omega)$;

(в тождествах (14)–(15) символы $\tilde\sigma_{12}$, $\tilde\sigma_{ii}$, $\tilde\sigma_{i3}$, $i=\overline{1,2}$, обозначают функции вида (7)–(9), в которых вместо фукнций u_{30},F,u_{i1} подставлены $\tilde u_{30},\tilde F,\tilde u_{i1}$ соответственно);

2) приближенное решение задачи (1)–(6) может быть найдено с помощью метода Б.–Г. (по схеме В. З. Власова [12, с. 243]), при этом все множество приближенных решений слабо компактно в пространствах, соответствующих условиям (13), и его предельные точки определяют обобщенное решение задачи (1)–(6);

3) конфигурационное пространство T распределенной механической системы, определяемой математической моделью в виде краевой задачи (1)–(6) с обобщенным решением из условий (13), является бесконечномерным функциональным пространством следующего вида:

$$T=\left(H^{2,0}(\Omega)\right)^2\times H^{1,0}_2(\Omega)\times H^{1,0}_1(\Omega), \qquad (17)$$

при этом

$$\left\{\tilde u_{30},\tilde F,\tilde u_{11},\tilde u_{21}\right\}\in T.$$

Доказательство. *1. Построение приближенного решения с помощью метода Б.–Г. по схеме В. З. Власова.* Пусть $\{\chi_{ik}\}$ — базис в $H^{1,0}_{3-i}(\Omega)$, $i=\overline{1,2}$, $\{\chi_{3k}\}$ и $\{\chi_{4k}\}$ — базисные системы в $H^{2,0}(\Omega)$. Определим приближенное решение $\{u^n_{30}, F^n, u^n_{i1}\}$ для задачи (1)–(6) в таком виде:

$$u^n_{30}=\sum_{k=1}^{n_3}\xi_{3k}\chi_{3k}, \qquad F^n=\sum_{k=1}^{n_4}\xi_{4k}\chi_{4k}, \qquad u^n_{i1}=\sum_{k=1}^{n_i}\xi_{ik}\chi_{ik}, \qquad i=\overline{1,2}, \tag{18}$$

где постоянные $\xi_{3k}, \xi_{4k}, \xi_{ik}$ определяются из следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\left(A\sigma^n_{ii}, \frac{\partial\chi_{im_i}}{\partial x_i}\right)_D+\left(A\sigma^n_{12}, \frac{\partial\chi_{im_i}}{\partial x_{3-i}}\right)_D+(C\sigma^n_{13}, \chi_{im_i})_D=0, \qquad m_i=\overline{1,n_i}; \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left\{-\left(B\sigma^n_{ii}, \frac{\partial^2\chi_{3m_3}}{\partial x_i^2}\right)_D-\left(B\sigma^n_{12}, \frac{\partial^2\chi_{3m_3}}{\partial x_i\partial x_{3-i}}\right)_D+\left(C\sigma^n_{i3}, \frac{\partial\chi_{3m_3}}{\partial x_i}\right)_D\right\}-$$
$$-\left(L(u^n_{30}, F^n), \chi_{3m_3}\right)_\Omega-\left(L(\omega_0, F^n), \chi_{3m_3}\right)_\Omega=(g, \chi_{3m_3})_\Omega, \qquad m_3=\overline{1,n_3}; \tag{20}$$

$$\frac{2}{Eh}\left(\Delta F^n, \Delta\chi_{4m_4}\right)_\Omega=-\left(L(u^n_{30}, u^n_{30}), \chi_{4m_4}\right)_\Omega-2\left(L(u^n_{30}, \omega_0), \chi_{4m_4}\right)_\Omega, \qquad m_4=\overline{1,n_4}, \tag{21}$$

(в (19)–(21) функции σ^n_{ii}, σ^n_{i3}, $i=\overline{1,2}$, σ^n_{12}, имеют вид функций (7)–(9), в которых вместо фукнций u_{30}, F, u_{i1} подставлены u^n_{30}, F^n, u^n_{i1} соответственно).

Разрешимость системы (20) следует из леммы «острого угла» [8, лемма 4.3, с. 66–67]. Действительно, введем в рассмотрение вектор

$$\overline{\xi}=(\xi_{11}, \ldots, \xi_{1n_1}, \xi_{21}, \ldots, \xi_{2n_2}, \xi_{31}, \ldots, \xi_{3n_3}, \xi_{41}, \ldots, \xi_{4n_4})\in R^l, \quad l=n_1+n_2+n_3+n_4,$$

и оператор $P: R^l\to R^l$, определяемый по правилу

$$\forall\ \overline{\xi}\in R^l, \qquad P(\overline{\xi})=\overline{\eta}, \qquad \overline{\eta}=(\eta_{11}, \ldots, \eta_{1n_1}, \eta_{21}, \ldots, \eta_{2n_2}, \eta_{31}, \ldots, \eta_{3n_3}, \eta_{41}, \ldots, \eta_{4n_4})\in R^l,$$

где

$$\forall\ m_i=\overline{1,n_i}, \qquad \eta_{im_i}=\left(A\sigma^n_{ii}, \frac{\partial\chi_{im_i}}{\partial x_i}\right)_D+\left(A\sigma^n_{12}, \frac{\partial\chi_{im_i}}{\partial x_{3-i}}\right)_D+(C\sigma^n_{i3}, \chi_{im_i})_D, \qquad i=\overline{1,2}, \tag{22}$$

$$\forall\ m_3=\overline{1,n_3}, \qquad \eta_{3m_3}=\sum_{i=1}^{2}\left\{-\left(B\sigma^n_{ii}, \frac{\partial^2\chi_{3m_3}}{\partial x_i^2}\right)_D-\left(B\sigma^n_{12}, \frac{\partial^2\chi_{3m_3}}{\partial x_i\partial x_{3-i}}\right)_D+\right.$$
$$\left.+\left(C\sigma^n_{i3}, \frac{\partial\chi_{3m_3}}{\partial x_i}\right)_D\right\}-\left(L(u^n_{30}, F^n), \chi_{3m_3}\right)_\Omega-\left(L(\omega_0, F^n), \chi_{3m_3}\right)_\Omega-(g, \chi_{3m_3})_\Omega, \tag{23}$$

$$\forall\ m_4=\overline{1,m_4}, \qquad \eta_{4m_4}=\frac{2}{Eh}\left(\Delta F^n, \Delta\chi_{4m_4}\right)_\Omega+\left(L(u^n_{30}, u^n_{30}), \chi_{4m_4}\right)_\Omega+2\left(L(u^n_{30}, \omega_n), \chi_{4m_4}\right)_\Omega. \tag{24}$$

Определим скалярное произведение $(\overline{\eta}, \overline{\xi})_{R^l}$ векторов $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ из пространства R^l следующим образом:

$$\forall\ \overline{\xi}, \overline{\eta}\in R^l, \qquad (\overline{\eta}, \overline{\xi})_{R^l}=\sum_{m_1=1}^{n_1}\eta_{1m_1}\xi_{1m_1}+\sum_{m_2=1}^{n_2}\eta_{2m_2}\xi_{2m_2}+\sum_{m_3=1}^{n_3}\eta_{3m_3}\xi_{3m_3}+\sum_{m_4=1}^{n_4}\eta_{4m_4}\xi_{4m_4}, \tag{25}$$

при этом

$$|\overline{\xi}|_{R^l}=\left(\overline{\xi}, \overline{\xi}\right)^{1/2}_{R^l}. \tag{26}$$

Тогда

$$\left(P\overline{\xi}, \overline{\xi}\right)_{R^l}=\sum_{i=1}^{2}\left\{\left(\sigma^n_{ii}, \left[A\frac{\partial u^n_{i1}}{\partial x_i}-B\frac{\partial^2 u^n_{30}}{\partial x_i^2}\right]\right)_D+\left(\sigma^n_{12}, \left[A\frac{\partial u^n_{i1}}{\partial x_{3-i}}-B\frac{\partial^2 u^n_{30}}{\partial x_i\partial x_{3-i}}\right]\right)_D+\right.$$
$$\left.+\left(\sigma^n_{i3}, C\left[u^n_{i1}+\frac{\partial u^n_{30}}{\partial x_i}\right]\right)_D\right\}-\left(L(u^n_{30}, F^n), u^n_{30}\right)_\Omega-\left(L(\omega^n_0, F^n), u^n_{30}\right)_\Omega+$$
$$+\frac{2}{Eh}\left(\Delta F^n, \Delta F^n\right)_\Omega+\left(L(u^n_{30}, u^n_{30}), F^n\right)_\Omega+2\left(L(u^n_{30}, \omega_0), F^n\right)_\Omega-(g, u^n_{30})_\Omega. \tag{27}$$

В силу равенства (11)

$$-\left(L(u_{30}^n,F^n),u_{30}^n\right)_\Omega-\left(L(\omega_0^n,F^n),u_{30}^n\right)_\Omega+\left(L(u_{30}^n,u_{30}^n),F^n\right)_\Omega+2\left(L(u_{30}^n,\omega_0),F^n\right)_\Omega=\left(L(\omega_0,u_{30}),F^n\right)_\Omega .$$

Равенство (27) принимает вид

$$\begin{gathered}\left(P\overline{\xi},\overline{\xi}\right)_{R^l}=\sum_{i=1}^{2}\left\{\left(\frac{E}{1-\nu^2}\left\langle A\left[\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial u_{3-i\,1}}{\partial x_{3-i}}\right]-B\left[\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i^2}+\nu\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_{3-i}^2}\right]\right\rangle,\left[A\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i}-B\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i^2}\right]\right)_D+\right.\\ +\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\left\langle A\left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1}\right]-B\left[2\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_1\partial x_2}\right]\right\rangle,\left[A\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_{3-i}}-B\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i\partial x_{3-i}}\right]\right)_D+\\ \left.+\left(\frac{E}{2(1+\nu)}C\left[u_{i1}^n+\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i}\right],C\left[u_{i1}^n+\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_i}\right]\right)_D\right\}+\frac{2}{Eh}|\Delta F^n|_\Omega^2+\left(L(\omega_0,u_{30}^n),F^n\right)_\Omega-(g,u_{30}^n)_\Omega. \end{gathered}\tag{28}$$

Имеют место следующие оценки:

1) $$(g,u_{30}^n)_\Omega\leqslant|g|_\Omega\cdot|u_{30}^n|_{H^2(\Omega)}\leqslant C_1|u_{30}^n|_{H^2(\Omega)},\tag{29}$$

где $C_1>0$ — постоянная, определяемая условием (12) для функции $g=g(x_1,x_2)$;

2) с учетом равенства (11) и неравенства Коши [9, с. 33] получаем:

$$\begin{gathered}\left(L(\omega_0,u_{30}^n),F^n\right)_\Omega=\iint\limits_\Omega\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_1\partial x_2}\left[\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_1}\frac{\partial F^n}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_2}\frac{\partial F^n}{\partial x_1}\right]dx_1\,dx_2-\\ -\iint\limits_\Omega\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_1^2}\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_2}\frac{\partial F^n}{\partial x_2}+\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_2^2}\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_1}\frac{\partial F^n}{\partial x_1}\right)dx_1\,dx_2\leqslant\max_\Omega\left(\left|\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_1\partial x_2}\right|,\left|\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_1^2}\right|,\left|\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x_2^2}\right|\right)\times\\ \times\iint\limits_\Omega\left(\left|\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_1}\frac{\partial F^n}{\partial x_2}\right|+\left|\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_2}\frac{\partial F^n}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_2}\frac{\partial F^n}{\partial x_2}\right|+\left|\frac{\partial u_{30}^n}{\partial x_1}\frac{\partial F^n}{\partial x_1}\right|\right)dx_1\,dx_2\leqslant\\ \leqslant 2d\left(|u_{30}^n|_{H^2(\Omega)}+|F^n|_{H^2(\Omega)}^2\right);\end{gathered}\tag{30}$$

3) $$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\left\langle A\left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1}\right]-B\left[2\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_1\partial x_2}\right]\right\rangle,\left[A\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_{3-i}}-B\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i\partial x_{3-i}}\right]\right)_\Omega=\\ =\frac{E}{2(1+\nu)}\iint\limits_\Omega\left(\left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1}\right]^2\int\limits_{-h/2}^{h/2}A^2dx_3-2\left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1}\right]\left[2\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_1\partial x_2}\right]\int\limits_{-h/2}^{h/2}AB\,dx_3+\right.\\ \left.+\left[2\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_1\partial x_2}\right]^2\int\limits_{-h/2}^{h/2}B^2dx_3\right)dx_1\,dx_2=\frac{Eh^3}{504(1+\nu)}\iint\limits_\Omega\left(\frac{68}{5}\left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1}\right]^2-\right.\\ \left.-\frac{32}{5}\left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1}\right]\left[2\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_1\partial x_2}\right]+\left[2\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_1\partial x_2}\right]^2\right)dx_1dx_2\geqslant\\ \geqslant\frac{Eh^3}{504(1+\nu)}\left\{\left(\frac{68}{5}-\frac{16\varepsilon}{5}\right)\left|\left[\frac{\partial u_{11}^n}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{21}^n}{\partial x_1}\right]\right|_\Omega^2+\left(1-\frac{16}{5\varepsilon}\right)\left|\left[2\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_1\partial x_2}\right]\right|_\Omega^2\right\},\end{gathered}\tag{31}$$

при получении последнего неравенства в (31) используется неравнство Коши с “ε” [9, с. 33], $\varepsilon>0$;

4) подобно оценке (31) получается следующая оценка:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{E}{1-\nu^2}\left(\left\langle A\left[\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial u_{3-i\,1}^n}{\partial x_{3-i}}\right]-B\left[\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i^2}+\nu\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_{3-i}^2}\right]\right\rangle,\left[A\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i}--B\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i^2}\right]\right)_D\right\}\geqslant\\ \geqslant\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{E}{1+\nu}\left|A\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i}-B\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i^2}\right|_D^2\right\}\geqslant\\ \geqslant\frac{Eh^3}{504(1+\nu)}\sum_{i=1}^{2}\left\{\left(\frac{68}{5}-\frac{16\varepsilon}{5}\right)\left|\frac{\partial u_{i1}^n}{\partial x_i}\right|_\Omega^2+\left(1-\frac{16}{5\varepsilon}\right)\left|\frac{\partial^2u_{30}^n}{\partial x_i^2}\right|_\Omega^2\right\};\end{gathered}\tag{32}$$

5) выбирая в (31) и (32) $\varepsilon \in (16/5, 17/4)$, получаем:

$$(68-16\varepsilon) > 0, \qquad (5\varepsilon - 16) > 0. \tag{33}$$

Из (28)–(33) следует неравенство

$$\begin{gathered}(P\overline{\xi},\overline{\xi})_{R^l} \geqslant \frac{Eh^3}{504(1+\nu)}\left\{\left(\frac{68}{5}-\frac{16\varepsilon}{5}\right)\left\langle\left|\frac{\partial u^n_{11}}{\partial x_1}\right|^2_\Omega + \left|\frac{\partial u^n_{21}}{\partial x_2}\right|^2_\Omega + \left|\left[\frac{\partial u^n_{11}}{\partial x_2}+\frac{\partial u^n_{21}}{\partial x_1}\right]\right|^2_\Omega\right\rangle + \right.\\ \left. + \left(1-\frac{16}{5\varepsilon}\right)\left\langle\left|\frac{\partial^2 u^n_{30}}{\partial x_1^2}\right|^2_\Omega + \left|\frac{\partial^2 u^n_{30}}{\partial x_2^2}\right|^2_\Omega + \left|\left[2\frac{\partial^2 u^n_{30}}{\partial x_1 \partial x_2}\right]\right|^2_\Omega\right\rangle\right\} + \frac{2}{Eh}\left|\Delta F^n\right|^2_\Omega - \\ -2d\left(|u^n_{30}|^2_{H^2(\Omega)} + |F^n|^2_{H^2(\Omega)}\right) - C_1\left|u^n_{30}\right|_{H^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\left|C\left[u^n_{i1}+\frac{\partial u^n_{30}}{\partial x_i}\right]\right|^2_D\right),\end{gathered} \tag{34}$$

где $u^n_{i1} \in H^{1,0}_{3-i}(\Omega)$, $u^n_{30} \in H^{2,0}(\Omega)$, $F^n \in H^{2,0}(\Omega)$.

На основании неравенства Корна [10, с. 283–285] и неравенств Фридрихса для функций из пространств $H^{1,0}_{3-i}(\Omega)$, $i=\overline{1,2}$, $H^{2,0}(\Omega)$ [10, с. 344–345], преобразуем неравенство (34) к следующему виду:

$$\begin{gathered}(P\overline{\xi},\overline{\xi})_{R^l} \geqslant \frac{C_2 Eh^3}{504(1+\nu)}\left(\frac{68}{5}-\frac{16\varepsilon}{5}\right)\left(|u^n_{11}|^2_{H^1(\Omega)} + |u^n_{21}|^2_{H^1(\Omega)}\right) + \\ + \left[C_3\frac{Eh^3}{504(1+\nu)}\left(1-\frac{16}{5\varepsilon}\right) - 2d\right]|u^n_{30}|^2_{H^2(\Omega)} + \left[\frac{C_4 2}{Eh} - 2d\right]|F^n|^2_{H^2(\Omega)} - C_1\left|u^n_{30}\right|_{H^2(\Omega)},\end{gathered} \tag{35}$$

где C_2, C_3, $C_4 \in R$ — некоторые положительные постоянные, а постоянная d удовлетворяет условиям

$$C_3\frac{Eh^3}{504(1+\nu)}\left(1-\frac{16}{5\varepsilon}\right) - 2d > 0, \quad \frac{C_4 2}{Eh} - 2d > 0,$$

и, следовательно,

$$(P\overline{\xi},\overline{\xi})_{R^l} \geqslant 0, \quad \text{если} \quad |u^n_{30}|_{H^2(\Omega)} \geqslant C_1\left(C_3\frac{Eh^3}{504(1+\nu)}\left(1-\frac{16}{5\varepsilon}\right) - 2d\right)^{-1}. \tag{36}$$

Так как в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то последнее неравенство из (36) будет выполняться, если $|\overline{\xi}|_{R^l} = \rho$, где ρ — достаточно большое число.

Итак, согласно лемме «острого угла», система уравнений (19)–(21) имеет по крайней мере одно решение $\overline{\xi}$, $|\overline{\xi}|_{R^l} \leqslant \rho$, такое, что $P(\overline{\xi}) = \overline{0}$, и, в силу (28), (35), найденное решение $\overline{\xi}$, а тем самым и функции u^n_{30}, F^n, u^n_{i1}, $i=\overline{1,2}$, удовлетворяют неравенству:

$$\begin{gathered}\frac{C_2 Eh^3}{504(1+\nu)}\left(\frac{68}{5}-\frac{16\varepsilon}{5}\right)\left(|u^n_{11}|^2_{H^1(\Omega)} + |u^n_{21}|^2_{H^1(\Omega)}\right) + \\ + \left[C_3\frac{Eh^3}{504(1+\nu)}\left(1-\frac{16}{5\varepsilon}\right) - 2d\right]|u^n_{30}|^2_{H^2(\Omega)} + \left[\frac{2C_4}{Eh} - 2d\right]|F^n|^2_{H^2(\Omega)} \leqslant C_1\left|u^n_{30}\right|_{H^2(\Omega)}.\end{gathered} \tag{37}$$

2. Предельный переход. Из (37) следует, что

$$\begin{gathered}\text{множества } \{u^n_{30}\}, \{F^n\} \text{ ограничены в } H^{2,0}(\Omega), \\ \text{множества } \{u^n_{i1}\},\ i=\overline{1,2}, \text{ ограничены в } H^{1,0}_{3-i}(\Omega).\end{gathered} \tag{38}$$

В силу слабой компактности множеств из условий (38) найдутся элементы $\tilde{u}_{30} \in H^{2,0}(\Omega)$, $\tilde{F} \in H^{2,0}(\Omega)$, $\tilde{u}_{i1} \in H^{2,0}_{3-i}(\Omega)$ и подпоследовательности $\{u^n_{30}\}$, $\{F^n\}$, $\{u^n_{i1}\}$ (оставляем для них прежнее обозначение) такие, что

$$\begin{aligned} u^n_{30} &\to \tilde{u}_{30} \text{ слабо в } H^{2,0}(\Omega), \\ u^n_{30} &\to \tilde{u}_{30} \text{ сильно в } L^2(\Omega), \\ F^n &\to \tilde{F} \text{ слабо в } H^{2,0}(\Omega), \\ F^n &\to \tilde{F} \text{ сильно в } L^2(\Omega), \\ u^n_{i1} &\to \tilde{u}_{i1} \text{ слабо в } H^{1,0}_{3-i}(\Omega), \quad i=\overline{1,2}. \end{aligned} \tag{39}$$

На основании условий (39) доказывается, подобно доказательству теоремы 4.3 [8, с. 67–68], истинность интегральных тождеств (14)–(16).

3. Явный вид конфигурационного пространства. Так как обобщенное решение задачи (1)–(6) принадлежит тем функциональным пространствам из условий (13), по отношению к которым установлена слабая компактность множества приближенных решений, то при проведении вычислительных экспериментов с помощью метода Б.–Г. конфигурационное пространство T для рассмотренной математической модели пластины определяется в виде (17).

Теорема доказана. □

Замечание. Для обобщенного решения задачи (1)–(6) можно установить бо́льшую гладкость по сравнению с той, которая гарантируется условиями из (13), однако, если сходимость численного метода, используемого при проведении вычислительных экспериментов, обоснована только по отношению к пространствам из условий (13), то при анализе результатов проведенных экспериментов в качестве конфигурационного пространства вновь следует рассматривать пространство в виде (17).

Библиографический список

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М. : Наука, 1979. 432 с.

2. *Вильке В. Г.* Теоретическая механика. СПб. : Лань, 2003. 304 с.

3. *Вильке В. Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М. : Изд-во МГУ, 1986. 192 с.

4. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебания. М. : Наука, 1981. 568 с.

5. *Шестаков А. А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М. : Наука, 1990. 320 с.

6. *Кириченко В. Ф., Самаркин П. А.* Качественный анализ эволюционных уравнений в неклассической теории пологих оболочек с начальными неправильностями // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2011. № 3 (57), вып. 1. С. 33–40.

7. *Кириченко В. Ф., Самаркин П. А.* Использование норм из фазового пространства при исследовании динамической устойчивости пологих оболочек // Вестн. Сарат. гос. техн. ун-та. 2011. № 4 (60), вып. 2. С. 70–76.

8. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М. : Мир, 1972. 587 с.

9. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М. : Наука, 1973. 408 с.

10. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М. : Мир, 1985. 590 с.

11. *Сьярле Ф., Рабье П.* Уравнения Кармана. М. : Мир, 1983. 172 с.

12. *Ворович И. И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М. : Наука, 1989. 376 с.

Configuration Space in Second Boundary Value Problem of Non-classical Plate Theory

V. F. Kirichenko[1], M. P. Misnik[2], P. A. Samarkin[1]

[1]Saratov State Technical University, Russia, 410054, Saratov, Politechnicheskaya st., 77, v.f.kirichenko@Gmail.com, SamarkinPA@Gmail.com

[2]Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, MisnikMP@info.sgu.ru

The article contains investigation of second boundary value problem for equilibrium equation «in mixed formulation» describing non-classical mathematical model for hinged isotropic and uniform plate under generalized Timoshenko hypothesis taking into account initial irregularities. For this problem for the first time were proved the existance of generalized solution and weak compactness of the set of approximate solutions obtained with Bubnov–Galerkin method using V. Z. Vlasov scheme. Basing on functional spaces used to study existance of generalized solution and to investigate convergence of Bubnov–Galerkin method, there was defined configuration space corresponding to the boundary value problem.

Key words: nonlinear partial differential equations, non-classical shell theory.

References

1. Arnold V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.

2. Vilke V. G. *Theoretical Mechanics*. Saint Petersburg, Lan', 2003 (in Russian).

3. Vilke V. G. [Analytical and qualitative methods in the mechanics of systems with an infinite number of degrees of freedom]. Moscow, Izd-vo Moscow Univ. Press, 1986 (in Russian).

4. Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. *Theory of Oscillators*. Dover Publ., Inc., 1987.

5. Shestakov A. A. *Obobshchennyy pryamoy metod Lyapunova dlya sistem s raspredelennymi parametrami*. Moscow, Nauka, 2007. (in Russian).

6. Kirichenko V. F., Samarkin P. A. Kachestvennyy analys evolucionnih uravneniy v neklassicheskoy teorii obolochek c nachalnymy nepravilnostyami [Qualitative analysis of the evolution equations in nonclassical theory of shallow shells with initial irregularities]. *Vestnik Saratov. gos. tekhn. univ.*, 2011, no. 3 (57). iss. 1, pp. 33–40 (in Russian).

7. Kirichenko V. F., Samarkin P. A. Ispolzovanie norm iz fazovogo prostranstva pri issledovanii dinamicheskoy ustoychivosti pologih obolochek [Application of the phase space norms in the analysis of dynamic buckling of shallow shells]. *Vestnik Saratov. gos. tekhn. univ.*, 2011, no. 4 (60), iss. 2, pp. 70–76 (in Russian).

8. Lions J. L. *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires* [Some methods for solving nonlinear boundary value problems, in French]. Paris, Dunod, 1969.

9. Ladyzhenskaya O. A. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. Applied Mathematical Sciences, 1985.

10. Rektoris K. *Variacionnye metody v matematicheskoj fizike i tehnike* [Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering]. Moscow, Mir, 1985 (in Russian).

11. Ciarlet P. G., Rabier P. *Les Equations de von Kàrmàn* [Von Kàrmàn equations]. Springer, 1980 (in French).

12. Vorovich I. I. *Matematicheskie problemy nelineynoy teorii pologih obolochek* [Mathematical problems of nonlinear theory of Shallow Shells]. Moscow, Nauka, 1989 (in Russian).

УДК 531.38, 681.5

ДУАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ И БИКВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ НА ПРИМЕРЕ СТЭНФОРДСКОГО МАНИПУЛЯТОРА. I

Е. И. Ломовцева[1], Ю. Н. Челноков[2]

[1]Аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, LomovtsevaEI@yandex.ru

[2]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, chelnokovyun@info.sgu.ru

На примере стэнфордского манипулятора рассматривается методология решения прямой задачи кинематики роботов-манипуляторов с использованием винтовых методов механики (матриц дуальных направляющих косинусов, бикватернионов Клиффорда), выводятся кинематические уравнения движения манипулятора, необходимые для решения обратной задачи кинематики манипулятора с использованием бикватернионной теории кинематического управления.

Ключевые слова: робот-манипулятор, прямая задача кинематики, матрица дуальных направляющих косинусов, бикватернион, кватернион, кинематические уравнения.

1. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ СХЕМА И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Стэнфордский манипулятор [1] представляет собой манипулятор с шестью степенями свободы: пятью вращательными и одной поступательной. В качестве обобщенных координат выступают углы φ_i $(i = 1, 2, 4, 5, 6)$ поворота i-го звена относительно $(i-1)$-го и величина d_3 — линейное поступательное перемещение 3 звена относительно 2. Схема манипулятора и вводимые системы координат приведены на рис. 1. На нем $X_0Y_0Z_0$ — система координат, связанная с основанием манипулятора, $X_iY_iZ_i$ — система координат, связанная с i-м звеном манипулятора, ось z_i направлена вдоль оси i-го сочленения; ось x_i перпендикулярна оси z_{i-1} и направлена от нее; ось y_i дополняет оси x_i, z_i до правой декартовой системы координат.

Относительное положение звеньев стэнфордского манипулятора может быть описано с помощью трех соответствующих каждому звену конструктивных геометрических параметров Θ_i, α_i, d_i, приведенных в таблице.