



МЕХАНИКА

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА С ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫМ ДНИЩЕМ ИЗ РАЗНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ МКЭ

Ю. В. Ключков¹, А. П. Николаев², Т. А. Киселева³

¹ Доктор технических наук, заведующий кафедрой высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет, Klotchkov@bk.ru

² Доктор технических наук, профессор кафедры лесного и водного хозяйства, Волгоградский государственный аграрный университет, anpetr40@yandex.ru

³ Ассистент кафедры высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет, kiseleva_ta@ro.ru

Изложен алгоритм расчета конструкции в форме эллиптического цилиндра с эллипсоидальным днищем из разнородных материалов на основе МКЭ с использованием скалярной и векторной интерполяций полей перемещений. В качестве элемента дискретизации используется четырехугольный криволинейный конечный элемент с восемнадцатью степенями свободы в узле. На примере расчета кругового цилиндра сочлененного с эллипсоидом вращения проведена верификация разработанного алгоритма и показана его эффективность.

Ключевые слова: сочлененные оболочки, скалярная интерполяция, векторная интерполяция, четырехугольный конечный элемент, эллипсоид, цилиндр.

Сочлененные оболочки в виде эллиптического цилиндра и эллипсоида находят широкое применение в различных отраслях строительства и машиностроения. Долговечность и надежность такого рода конструкций в решающей степени зависит от точности определения их напряженно-деформированного состояния (НДС). Одним из наиболее эффективных численных методов анализа НДС на сегодняшний день является метод конечных элементов (МКЭ).

В настоящей работе изложен алгоритм расчета конструкции в форме эллиптического цилиндра с эллиптическим днищем на основе МКЭ с использованием четырехугольного конечного элемента с векторной интерполяцией полей перемещений [1].

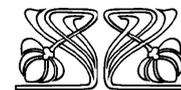
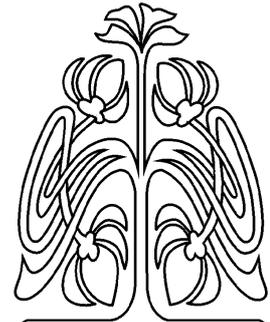
1. ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Положение произвольной точки M^0 срединной поверхности в декартовой системе координат $Oxyz$ определяется радиус-вектором

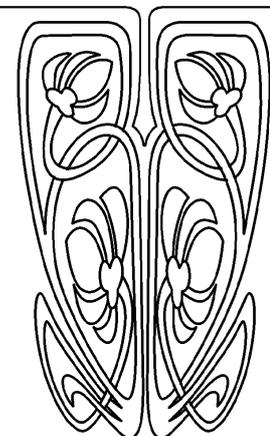
$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(x, \theta) \sin \theta \vec{j} + r(x, \theta) \cos \theta \vec{k}, \quad (1)$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — орты декартовой системы координат; θ — угол, отсчитываемый от оси Oz против хода часовой стрелки; $r(x, \theta) = \sqrt{1 - x^2/a^2} \times \frac{bc}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}$; a , b , c — параметры эллипсоида.

Дифференцированием (1) находятся векторы, касательные к поверхности эллипсоида



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,x}^0, \quad \vec{a}_2^0 = \vec{R}_{,\theta}^0, \quad (2)$$

а нормаль к поверхности определяется векторным произведением:

$$\vec{a}^0 = (\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0) / \sqrt{a^0}. \quad (3)$$

Производные базисных векторов (2), (3) можно представить компонентами векторов этого же базиса

$$\{\vec{a}_{,x}^0\} = [\alpha]\{\vec{a}^0\}, \quad \{\vec{a}_{,\theta}^0\} = [\beta]\{\vec{a}^0\},$$

где

$$\{\vec{a}^0\}^T = \{\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \vec{a}^0\}, \quad \{\vec{a}_{,x}^0\}^T = \{\vec{a}_{1,x}^0 \vec{a}_{2,x}^0 \vec{a}_{,x}^0\}, \quad \{\vec{a}_{,\theta}^0\}^T = \{\vec{a}_{1,\theta}^0 \vec{a}_{2,\theta}^0 \vec{a}_{,\theta}^0\}.$$

Положение произвольной точки оболочки $M^{0\zeta}$, отстоящей на расстоянии ζ от срединной поверхности оболочки, определяется радиус-вектором

$$\vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta \vec{a}^0. \quad (4)$$

Векторы локального базиса \vec{g}_α^0 точки $M^{0\zeta}$ находятся дифференцированием (4)

$$\vec{g}_1^0 = \vec{R}_{,x} = \vec{a}_1^0 + \zeta \vec{a}_{,x}^0, \quad \vec{g}_2^0 = \vec{R}_{,\theta} = \vec{a}_2^0 + \zeta \vec{a}_{,\theta}^0.$$

2. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ДЕФОРМАЦИИ И ЗАКОН ГУКА

При использовании гипотезы прямой нормали вектор перемещения \vec{V} точки $M^{0\zeta}$ выражается через вектор перемещения \vec{v} точки M^0 срединной поверхности оболочки:

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta (\vec{a} - \vec{a}^0) = \vec{v} + \zeta \vec{v}^m, \quad (5)$$

где

$$\vec{v} = v^\rho \vec{a}_\rho^0 + v \vec{a}^0. \quad (6)$$

Производные векторов (6), (5) определяются выражениями

$$\vec{v}_{,\alpha} = f_\alpha^\rho \vec{a}_\rho^0 + f_\alpha \vec{a}^0, \quad \vec{V}_{,\alpha} = \vec{v}_{,\alpha} + \zeta \vec{v}_{,\alpha}^m, \quad (7)$$

$$\vec{v}_{,\alpha}^m = \frac{(\vec{a}_1^0 \times \vec{v}_{,1}) \times (\vec{a}_2^0 \times \vec{v}_{,2})}{\sqrt{a^0}} - \vec{a}^0 = h_\alpha^\rho \vec{a}_\rho^0 + h_\alpha \vec{a}^0, \quad (8)$$

где f_α^ρ , f_α , h_α^ρ , h_α — функции компонент вектора перемещения точки срединной поверхности и их производных. При получении (8) принято, что детерминант метрического тензора остается неизменным $\sqrt{a} = \sqrt{a^0}$.

Деформации в произвольной точке оболочки $M^{0\zeta}$ определяются выражениями [2]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{V}_{,\beta}^0 + \vec{V}_{,\alpha} \cdot \vec{g}_\beta^0 = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \chi_{\alpha\beta}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — деформации в соответствующей точке срединной поверхности оболочки; $\chi_{\alpha\beta}$ — искривления срединной поверхности оболочки.

Соотношения (9) можно представить в матричном виде:

$$\{\varepsilon^\zeta\} = [\Gamma] \{\varepsilon\} = [\Gamma] [D] \{v\} = [H] \{v\}, \quad (10)$$

где $\{\varepsilon^\zeta\}^T = \{\varepsilon_{11}^\zeta \varepsilon_{22}^\zeta \varepsilon_{12}^\zeta\}$, $\{v\}^T = \{v^1 v^2 v\}$, $[H]$ — матрица алгебраических и дифференциальных операций.

Соотношения между напряжениями и деформациями принимаются в виде [3]

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{\alpha\beta} + 2\nu g^{\alpha\rho} g^{\beta\gamma} \varepsilon_{\rho\gamma}^\zeta, \quad (11)$$

где $\sigma^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты тензора напряжений; $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{\rho\gamma}^\zeta g^{\rho\gamma}$ — первый инвариант тензора деформаций; $g^{\rho\gamma}$ — контравариантные компоненты метрического тензора; λ , μ — параметры Ламе.

Выражения (11) представляются в матричном виде:

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon^\zeta\}, \quad (12)$$

где $\{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{12}\}$.



3. МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

В качестве конечного элемента принят криволинейный четырехугольник с узлами i, j, k, l , являющийся фрагментом срединной поверхности оболочки. Узловыми неизвестными являются перемещения, их первые и вторые производные в локальной системе координат:

$$\{u_y\}_{1 \times 72}^T = \left\{ \begin{matrix} \{v_y^1\}_{1 \times 24}^T & \{v_y^2\}_{1 \times 24}^T & \{v_y\}_{1 \times 24}^T \end{matrix} \right\},$$

где

$$\{q\}_{1 \times 24}^T = \left\{ q^i q^j q^k q^l q_{,\xi}^i q_{,\xi}^j q_{,\xi}^k q_{,\xi}^l q_{,\eta}^i q_{,\eta}^j q_{,\eta}^k q_{,\eta}^l q_{,\xi\xi}^i q_{,\xi\xi}^j \dots q_{,\xi\xi}^l q_{,\eta\eta}^i \dots q_{,\eta\eta}^l q_{,\xi\eta}^i \dots q_{,\xi\eta}^l \right\},$$

(символом q обозначены перемещения v^1, v^2 или v).

Аппроксимация перемещений внутренней точки конечного элемента через узловые значения принималась в двух вариантах. В первом варианте использовалась аппроксимация перемещений как скалярных полей [4]:

$$v^1 = \{\phi\}_{1 \times 24}^T \{v_y^1\}_{24 \times 1}, \quad v^2 = \{\phi\}_{1 \times 24}^T \{v_y^2\}_{24 \times 1}, \quad v = \{\phi\}_{1 \times 24}^T \{v_y\}_{24 \times 1}. \quad (13)$$

С использованием (13), (12) и (10) и алгоритма [1, 2, 5] получена матрица жесткости четырехугольного элемента [4]:

$$[K_C] \{u_y\} = \{f_y\}.$$

Во втором варианте использована аппроксимация перемещений как векторных полей [2, 5]:

$$\vec{v} = \{\phi\}^T \{\vec{v}_y\}, \quad (14)$$

где $\{\vec{v}_y\}_{1 \times 24}^T = \left\{ \vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,\xi}^i \vec{v}_{,\xi}^j \vec{v}_{,\xi}^k \vec{v}_{,\xi}^l \vec{v}_{,\eta}^i \vec{v}_{,\eta}^j \vec{v}_{,\eta}^k \vec{v}_{,\eta}^l \vec{v}_{,\xi\xi}^i \vec{v}_{,\xi\xi}^j \dots \vec{v}_{,\xi\xi}^l \vec{v}_{,\eta\eta}^i \dots \vec{v}_{,\eta\eta}^l \vec{v}_{,\xi\eta}^i \dots \vec{v}_{,\xi\eta}^l \right\}.$

На основе (14) получаются матричные соотношения:

$$\{v\}_{3 \times 1} = [L_w]_{3 \times 72} \{u_y\}_{72 \times 1}, \quad (15)$$

из которых следует, что каждая компонента вектора-столбца $\{v\} = \{v^1 v^2 v\}^T$ зависит от всех узловых компонент конечного элемента $\{v_y^1\}, \{v_y^2\}, \{v_y\}$.

С использованием (15), (12), (10) получена матрица жесткости конечного элемента [4]:

$$[K_w] \{u_y\} = \{f_y\}.$$

Срединные поверхности эллиптического цилиндра и эллиптического днища определяются в декартовой системе координат $Oxyz$:

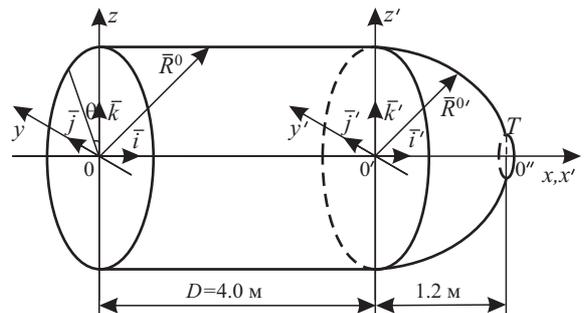
$$\vec{R}_c^0 = x\vec{i} + r(\theta) \sin \theta \vec{j} + r(\theta) \cos \theta \vec{k}, \quad \vec{R}_s^0 = x'\vec{i}' + r'(x'; \theta) \sin \theta \vec{j}' + r'(x'; \theta) \cos \theta \vec{k}',$$

где

$$r(\theta) = \frac{bc}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}}, \quad r'(x'; \theta) = \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2}} \cdot \frac{bc}{\sqrt{c^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}},$$

$x' = x - D$, D — длина цилиндра (рисунок).

При расчете эллиптического цилиндра с днищем из разнородных материалов на кривой пересечения срединных поверхностей узловыми неизвестными $\{z_y\}$ эллиптического цилиндра принимаются за основные, а узловыми неизвестными примыкающего днища $\{z'_y\}$ должны быть выражены через $\{z_y\}$. Векторы узловых неизвестных на кривой пересечения представим выражениями





$$\{z_y\}_{1 \times 18}^T = \{v^1 v^2 v v_{,x}^1 v_{,x}^2 v_{,x} v_{,\theta}^1 v_{,\theta}^2 v_{,\theta} v_{,xx}^1 v_{,xx}^2 v_{,xx} v_{,\theta\theta}^1 v_{,\theta\theta}^2 v_{,\theta\theta} v_{,x\theta}^1 v_{,x\theta}^2 v_{,x\theta}\}, \quad (16)$$

$$\{z'_y\}_{1 \times 18}^T = \left\{ v^{1'} v^{2'} v' v_{,x}^{1'} v_{,x}^{2'} v'_{,x} v_{,\theta}^{1'} v_{,\theta}^{2'} v'_{,\theta} v_{,xx}^{1'} v_{,xx}^{2'} v'_{,xx} v_{,\theta\theta}^{1'} v_{,\theta\theta}^{2'} v'_{,\theta\theta} v_{,x\theta}^{1'} v_{,x\theta}^{2'} v'_{,x\theta} \right\}. \quad (17)$$

Для получения зависимостей между компонентами векторов (17) и (16) используются следующие условия.

1. Равенство векторов перемещения точек срединных поверхностей эллиптического цилиндра и днища

$$\vec{V}' = \vec{V}, \quad (18)$$

откуда получаются зависимости

$$v^{1'} = v^1, \quad v^{2'} = v^2, \quad v' = v. \quad (19)$$

2. Равенство первой и второй производных векторов перемещений по координате θ

$$\vec{V}'_{,\theta} = \vec{V}_{,\theta}, \quad \vec{V}'_{,\theta\theta} = \vec{V}_{,\theta\theta},$$

откуда определяются соотношения

$$v_{,\theta}^{1'} = v_{,\theta}^1, \quad v_{,\theta}^{2'} = v_{,\theta}^2, \quad v_{,\theta}' = v_{,\theta}, \quad v_{,\theta\theta}^{1'} = v_{,\theta\theta}^1, \quad v_{,\theta\theta}^{2'} = v_{,\theta\theta}^2, \quad v_{,\theta\theta}' = v_{,\theta\theta}. \quad (20)$$

3. Равенство углов поворотов нормалей к срединным поверхностям эллиптического цилиндра и днища

$$v_{,x}' = v_{,x}. \quad (21)$$

4. Равенство нормальных усилий вдоль меридиана

$$\frac{E'h'^3}{1-\nu'^2} (\varepsilon_{11}' + \nu\varepsilon_{22}') = \frac{Eh^3}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}),$$

откуда получается зависимость

$$v_{,x}^{1'} = \frac{Eh^3(1-\nu'^2)}{E'h'^3(1-\nu^2)} (v_{,x}^{1'} + \nu v_{,\theta}^{2'}) - \nu' v_{,\theta}^{2'}. \quad (22)$$

5. Равенство касательных усилий

$$\frac{E'h'}{1+\nu'} \varepsilon_{12}' = \frac{Eh}{1+\nu} \varepsilon_{12}$$

приводит к выражению

$$v_{,x}^{2'} = \frac{Eh(1+\nu')}{E'h'(1+\nu)} v_{,x}^2. \quad (23)$$

6. Равенство моментов

$$M_{xx} = M_{xx}'$$

дает возможность выразить вторую производную $v_{,xx}'$ функцией узловых неизвестных основной оболочки

$$v_{,xx}' = f(\{z_y\}). \quad (24)$$

На основе (21)–(24) составляется матричное соотношение

$$[z_y'] = [L]\{z_y\}, \quad (25)$$

с использованием которого формируется матричная зависимость:

$$\{u_y'\} = [L]\{u_y\}$$

для преобразования матрицы $[K_w]$ и вектора узловых нагрузок конечного элемента, примыкающего к границе пересечения оболочек узлами i, l

$$[K_w^{\Pi}] = [L]^T [K_w] [L], \quad [f_w^{\Pi}] = [L]^T \{f_y\}.$$



4. ПРИМЕР РАСЧЕТА

В качестве примера была решена задача об определении НДС оболочки в виде кругового цилиндра, сочлененного с эллипсоидом вращения, нагруженной внутренним давлением интенсивности q . Были приняты следующие исходные данные: радиус и длина цилиндра $R = 0.9$ м, $D = 4.0$ м; параметры эллипсоида $a = 1.3$ м; $b = c = 0.9$ м; толщина оболочки $t = 0.008$ м; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; $q = 1$ МПа. Вследствие наличия плоскостей симметрии рассматривалась 1/4 часть оболочки. Координаты x и θ принимали следующие значения: $0 \leq x \leq 5.2$ м, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Левый край оболочки шарнирно закреплен, правый край свободен. Расчеты выполнялись в двух вариантах: в первом варианте при формировании матрицы жесткости четырехугольного элемента дискретизации использовалась общепринятая интерполяция компонент вектора перемещения как скалярных величин [4]; во втором варианте применялась векторная интерполяция полей перемещений четырехугольного конечного элемента [1]. В обоих вариантах были реализованы разработанные условия сочленения оболочек (18)–(25). Результаты повариантных расчетов представлены в таблице, в которой приведены численные значения в МПа меридиональных σ_M и кольцевых напряжений σ_K в сечениях Oyz , $O'y'z'$, $O''T$ и при различных отношениях модулей упругости сочленяемых оболочек, при этом модулю упругости цилиндра придавались различные значения, а модуль упругости эллипсоида оставался неизменным.

Интерполяция		Скалярная				Векторная			
сечения	E/E'	1/1	1/10	1/100	1/1000	1/1	1/10	1/100	1/1000
$x = 0.0$ м	σ_M^B	47.92	47.9	47.9	47.4	47.9	47.9	47.9	47.9
	σ_M^H	47.92	47.9	47.9	47.4	47.9	47.9	47.9	47.9
	σ_K^B	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5
	σ_K^H	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5	112.5
$x = 4.0$ м	σ_M^B	46.1	128.9	199.7	210.8	46.2	129.3	200.2	211.6
	σ_M^H	49.9	-31.3	-101.1	-113.1	49.8	-31.6	-101.6	-112.8
	σ_K^B	100.5	63.7	63.5	63.7	100.5	63.8	63.6	63.8
	σ_K^H	101.6	15.7	-26.7	-33.5	101.6	15.5	-26.9	-33.5
$x = 5.2$ м	σ_M^B	-0.08	-11.64	-128.60	-1256.12	0.03	0.03	0.03	0.03
	σ_M^H	0.12	11.69	128.77	1257.41	0.05	0.05	0.05	0.05
	σ_K^B	84.2	72.5	-45.0	-1177.9	84.5	84.5	84.5	84.5
	σ_K^H	82.3	76.3	5.0	-682.2	83.6	83.6	83.6	83.6

Анализ табличного материала показывает, что результаты повариантного расчета практически совпадают при равенстве модулей упругости основной (цилиндра) и примыкающей (эллипсоида) оболочек. Однако с уменьшением значения модуля упругости цилиндра величины контролируемых параметров НДС в концевом сечении оболочки существенно отличаются друг от друга в зависимости от варианта расчета. Так как цилиндрическая часть оболочки становится все более податливой, то эллипсоидная часть оболочки получает дополнительную возможность смещаться как абсолютно твердое тело. Такое смещение не должно оказывать влияния на НДС конструкции, что наблюдается во втором варианте расчета, в котором реализована векторная интерполяция полей перемещений. В первом же варианте погрешность вычислений в концевом сечении стремительно нарастает. Меридиональные напряжения, которые по физическим соображениям должны быть равны нулю, так как концевое сечение незагружено, достигают неприемлемо больших значений. Кольцевые напряжения изменяют свой знак, что также является недопустимым. Таким образом, можно сделать вывод, что при расчете сочлененных оболочек с различными физико-механическими характеристиками материала необходимо использовать векторную интерполяцию перемещений в сочетании с разработанными корректными условиями сочленения.

Библиографический список

1. Ключков Ю. В., Николаев А. П., Киселева Т. А. Сравнение вариантов интерполяций перемещений на примере произвольной оболочки в форме эллипсоида // Вестн. Волгоград. гос. архит.-строит. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. 2011. Вып. 23(42). С. 54–59.
2. Николаев А. П., Ключков Ю. В., Киселев А. П., Гуреева Н. А. Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах. Волгоград : ФГБОУ ВПО Волгоградский ГАУ, 2012. 264 с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды : в 2 т. М. : Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
4. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л. : Судостроение, 1974. 344 с.



5. Клочков Ю. В., Николаев А. П., Киселева Т. А. Анализ НДС произвольной непологой оболочки в форме компенсатора с использованием векторной интерполяции полей перемещений // Изв. Волгоград. техн. ун-та : межвуз. сб. науч. ст. № 10(97)/ ВолгГТУ. Волгоград : ИУНЛ ВолгГТУ, 2012 (Сер. Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. Вып. 14). С. 28–32.

Stress-strain State of an Elliptical Cylinder with an Ellipsoidal Bottoms of Dissimilar Materials Based FEM

J. V. Klochkov, A. P. Nikolaev, T. A. Kiseleva

Volgograd State Agricultural University, Russia, 400002, University av., 26, Klotchkov@bk.ru, anpetr40@yandex.ru, kiseleva_ta@ro.ru

The algorithm of calculating the construction in the form of an elliptical cylinder with ellipsoidal bottom of different materials based on the finite element method with the use of scalar and vector fields interpolating movements is described. As part of the sampling using rectangular curved finite elements with eighteen degrees of freedom in the node. Calculations of a circular cylinder with an articulated ellipsoid of rotation the verification of the algorithm and shows its effectiveness.

Key words: articulated shell, scalar interpolation, vector interpolation, rectangular finite element, ellipsoid, cylinder.

References

1. Klochkov J. V., Nikolaev A. P., Kiseleva T. A. Comparison of options interpolations movement as an example of an arbitrary shell in the shape of an ellipsoid. *Vestnik Volgogradskogo Gos. Arch.- Stroit. Univ. Ser. Str-vo i Arhit.* [Bulletin of the Volgograd State Architectural and Building Univ. Ser. The Construction and Arch.], 2011, no. 23(42), pp. 54–59 (in Russian).
2. Nikolaev A. P., Klochkov J. V., Kiselev A. P., Gureeva N. A. *Vektornaja interpoljacija polej peremeshhenij v konechno-jelementnyh raschetah* [Vector interpolation displacement fields in finite-element calculations]. Volgograd, 2012, 264 p. (in Russian).
3. Sedov L. I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1976, vol. 1, 536 p. (in Russian).
4. Postnov V. A., Harhurim I. J. *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruksii* [The Finite Element Method in the Calculation of Ship Structures]. Leningrad, Sudostroenie, 1974. 344 p. (in Russian).
5. Klochkov J. V., Nikolaev A. P., Kiseleva T. A. Analysis VAT Arbitrary Nonshallow Shell in the Form of the Compensator Using Vector Interpolation of Displacement Fields. *Izvestiya Volgogradskogo Tekhnicheskogo Universiteta* [Proceedings of the Volgograd Technical University]: Interuniversity. Sat Scientific. Art. no. 10 (97) / VolgGTU. Volgograd IUNL VolgGTU, 2012 (Ser. Actual problems of management, computer science and informatics in technical systems. iss. 14), pp. 28–32 (in Russian).

УДК 532.516:517.958:531.383

ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРУБЫ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ С УПРУГОЙ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ВНЕШНЕЙ ОБОЛОЧКОЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ДАВЛЕНИЯ

Д. В. Кондратов¹, Ю. Н. Кондратова², В. С. Попов³, И. В. Плаксина⁴

¹ Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной информатики и информационных технологий в управлении, Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина, Саратов, KondratovDV@yandex.ru

² Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики и компьютерных наук, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KondratovaUN@info.sgu.ru

³ Доктор технических наук, заведующий кафедрой теплогазоснабжения, вентиляции, водообеспечения и прикладной гидродинамики, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., vic_p@bk.ru

⁴ Преподаватель кафедры прикладной информатики и информационных технологий в управлении, Поволжский институт управления им. П. А. Столыпина, Саратов, chefirina@yandex.ru