Полагая $\Gamma = (\gamma_{ij})$, $\Gamma^{-1} = (\delta_{ij})$, и учитывая, что $(R_{2\lambda} m)_k = R_{0,\lambda\omega_k} m_k$, для первой компоненты $S_r(f,x)$ получим:

$$(S_r(f,x))_1 = \sum_{k=1}^{4} \gamma_{1k} h_k \sigma_{r|\omega_k|}(h_k^{-1}\varphi_k, x) + o(1),$$

где $\varphi_k = \delta_{k1} f_1(x) + \delta_{k2} f_2(x) + \delta_{k3} f_1(1-x) + \delta_{k4} f_2(1-x)$. По теореме Штейнгауза [7, гл.1, §4] и принципу локализации $\sigma_{r|\omega_k|}(h_k^{-1}\varphi_k, x) = h_k^{-1}(x)\sigma_{r|\omega_k|}(\varphi_k, x) + o(1)$. Отсюда

$$(S_r(f,x))_1 = \sum_{k=1}^{4} \gamma_{1k} \sigma_{r|\omega_k|}(\varphi_k, x) + o(1), \tag{18}$$

где $o(1) \to 0$ при $r \to \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Так как $|\omega_k| = 1$, и γ_{ij}, δ_{ij} — элементы взаимнообратных матриц, то (18) переходит в

$$(S_r(f,x))_1 = \sigma_r(f_1, x) + o(1).$$

Аналогично можно показать, что $(S_r(f,x))_2 = \sigma_r(f_2, x) + o(1)$. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* 06-01-00003, 07-01-00397) *и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ* (*проект НШ*-2970.2008.1).

Библиографический список

1. *Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл // Диф. уравнения. 2007. Т. 43, №12. С. 1597–1605.
2. *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сборник. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.
3. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.
4. *Хромов А.П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сборник. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.
5. *Хромов А.П.* Интегральный оператор с периодическими краевыми условиями// Совр. методы теории краевых задач: Материалы Воронеж. весен. мат. школы. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2008. С. 225–226.
6. *Хромов А.П.* Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: сб. статей. М.: Изд-во АФЦ, 1999. С. 255–266.
7. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.

УДК 513.6

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЛЕРАНТНЫХ РАССЛОЕНИЙ

И.А. Кляева

Филиал ФГОУ ВПО «ПАГС им. П.А.Столыпина» в г.Балаково, кафедра прикладной информатики и естественно-научных дисциплин
E-mail: lana331@rambler.ru

В статье изложена теоретическая база для построения спектральной последовательности толерантных расслоений. А именно, приведен ряд важных свойств сингулярных кубов в толерантных расслоениях, доказана теорема о действии фундаментальной группы базы на группе гомологий слоя толерантного расслоения. Согласно общей теории спектральных последовательностей получены первый и второй члены спектральной последовательности толерантных расслоений.

Ключевые слова: толерантное пространство; толерантное расслоение; группы гомологий; спектральная последовательность.

Spectral Sequences of Fibre Tolerance Spaces

I.A. Klyaeva

The paper presents the theoretical base for the construction of spectral sequences of tolerant exfoliations. Namely, the authors give a number of important qualities of singular cubes in tolerant exfoliations. The fundamental base group operation on the group of fiber homology of tolerant exfoliation theorem is proved. According to the general theory of spectral sequences the first and the second terms of spectral sequence of tolerant exfoliations are got.

Key words: tolerant space; tolerant exfoliation; group of homology; spectral sequence.

Толерантные пространства были определены в работе Зимана [1] как пара вида (X, τ), где X — множество, а $\tau \subset X \times X$ — отношение толерантности, то есть рефлексивное и симметричное отношение. Толерантные пространства можно рассматривать как квазигеометрические объекты, в которых отсутствует предельный переход. Это позволяет перенести значительную часть алгебро-топологической техники [2] как на континуальные, так и на дискретные (в том числе и конечные) множества с толерантной структурой.

Толерантные пространства и отображения, сохраняющие толерантность, образуют категорию $\mathbb{T}_0$, в которой имеются прямые (декартовы) произведения.

В гомотопической теории толерантных пространств роль единичного отрезка параметров гомотопии играет бесконечная серия толерантных отрезков (I_m, ι_m) длины m $(m \in \mathbb{N})$, где

$$I_m = \left\{ \frac{k}{m} \,|k = \overline{0,m} \right\}, \quad (\forall\, k, l = \overline{0,m}) \qquad \frac{k}{m} \iota_m \frac{l}{m} \Leftrightarrow |k - l| \leqslant 1.$$

Два толерантных отображения $f_0, f_1 : (Y, \theta) \to (X, \tau)$ называют толерантно гомотопными и записывают $f_0 \sim f_1$, если существует $m \in \overset{n}{\times} \mathbb{N}$ и толерантное отображение $F : Y \times I_m \to X$ такое, что

$$F|(Y \times 0) = f_0, \quad F|(Y \times 1) = f_1.$$

Отображение F называется толерантной гомотопией. Если $m = 1$, то F называется простой толерантной гомотопией и записывается $f_0 \approx f_1$.

Определение 1. Толерантное отображение $p : (E, \overline{\tau}) \to (B, \tau)$ называется *толерантным расслоением* (см. [3]), если для всякой толерантной гомотопии $F : Y \times I_m \to B$ имеется накрывающая гомотопия $\overline{F} : Y \times I_m \to E$, такая, что $p \circ \overline{F} = F$, при условии, что начальное отображение $f_0 = F|(Y \times 0)$ имеет накрывающее отображение $\overline{f_0} = \overline{F}|(Y \times 0)$ такое, что $p \circ \overline{f_0} = f_0$. Пространства $(E, \overline{\tau})$ и (B, τ) называются соответственно *пространством* и *базой* толерантного расслоения.

Для построения гомологической спектральной последовательности толерантного расслоения наиболее удобно пользоваться пунктированными толерантными кубическими сингулярными гомологиями, теория которых изложена в работе [4] и основана на следующем определении.

Определение 2. *Толерантным кубом* размера $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \overset{n}{\times} \mathbb{N}$ называется толерантное пространство $(I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) = \left(\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i}, \ \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} \iota_{m_i} \right)$, а любое толерантное отображение $u : (I_{\overline{m}}, \iota_{\overline{m}}) \to (X, \tau)$ называется *n-мерным толерантным сингулярным кубом* (ТС кубом) пространства (X, τ). ТС куб называется *пунктированным*, если $u| \overset{n}{\times} \{0, 1\} = x_0$ где x_0 — отмеченная точка в X. ТС куб u называется *вырожденным*, если u вырожден по последнему аргументу, то есть не зависит от этого аргумента.

Пусть $u : I_{(m_1, \ldots, m_n)} \to X$ — ТС куб и $(h_1, \ldots, h_n) \in \overset{n}{\times} (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Определим ТС куб

$$d\,(h_1, \ldots, h_n)\,(u) : I_{(M_1, \ldots, M_n)} \to X, \quad M_i = 2^{h_i}\,(m_i + 1) - 1, \quad i = \overline{1, n},$$

следующей формулой

$$d\,(h_1, \ldots, h_n)\,(u) \left(\left(\frac{k_i}{M_i} \right)_{i = \overline{1,n}} \right) = u \left(\left(\frac{\left[k_i / 2^{h_i} \right]}{m_i} \right)_{i = \overline{1,n}} \right),$$

где скобки [ ] означают целую часть числа. Если $h_1 = \ldots = h_n = h$, то договоримся обозначать $d\,(h, \ldots, h)\,(u) = u^{\vee h}$. Для ТС куба $u : \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i} \to X$, фиксированного индекса $j \in \{1, \ldots, n\}$ и натурального числа $M_j \geqslant m_j$ определим продление ТС куба по j-й координате как новый ТС куб $u_{j, M_j} : \left(\overset{j-1}{\underset{i=1}{\times}} I_{m_i} \right) \times I_{M_j} \times \left(\overset{n}{\underset{i=j+1}{\times}} I_{m_i} \right) \to X$ определенный формулой

$$u_{j, M_j} \left(\frac{k_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_j}{M_j}, \ldots, \frac{k_n}{m_n} \right) = \begin{cases} u \left(\frac{k_1}{m_1}, \ldots, \frac{k_j}{m_j}, \ldots, \frac{k_n}{m_n} \right), & k_j = \overline{0, m_j}, \\ u \left(\frac{k_1}{m_1}, \ldots, 1, \ldots, \frac{k_n}{m_n} \right), & k_j = \overline{m_j, M_j}. \end{cases}$$

Для построения спектральной последовательности будет необходим ряд важных свойств толерантных расслоений.

Предложение 1. *Пусть в пунктированном толерантном расслоении*

$$p:((E,\overline{\tau}),x_0)\to((B,\tau),b_0),\quad b_0\in B,\quad x_0\in p^{-1}(b_0)=F\subset E$$

база (B,τ) *и слой* $(F,\overline{\tau})$ *являются линейно связными толерантными пространствами, тогда и пространство расслоения* $(E,\overline{\tau})$ *и слой* $\left(F_b=p^{-1}(b),\overline{\tau}\right)$ *в любой точке* $b\in B$ *являются линейно связными.*

Доказательство. Линейная связность пространства $(E,\overline{\tau})$ доказывается нетрудно. Доказательство линейной связности $(F_b,\overline{\tau})$ легко сводится к следующему утверждению: если слой $(F_{b_1},\overline{\tau})$ линейно связный и $b_1\tau b_2$, то слой $(F_{b_2},\overline{\tau})$ тоже линейно связный. Последнее утверждение может быть сведено к следующему: если $x\in F_{b_1}$ и $y,y'\in\overline{\tau}\langle x\rangle\cap F_{b_2}$, то существует точка $y''\in\overline{\tau}\langle x\rangle\cap F_{b_2}$, такая, что $y\ \overline{\tau}\ y''\ \overline{\tau}\ y'$. Это утверждение доказывается с помощью техники поднятия, основанной на определении 1.

На протяжении всей статьи будем предполагать, что $p:((E,\overline{\tau}),x_0)\to((B,\tau),b_0)$ — пунктированное толерантное расслоение с линейно связными (B,τ) и $(F,\overline{\tau})$.

Определение 3. Будем говорить, что ТС куб $u:I_{(m^{(1)},\dots,m^{(n)})}\to E$ *имеет вес* $\nu(u)=s$, если ТС куб $p\circ u:I_{(m^{(1)},\dots,m^{(n)})}\to B$ вырожден ровно по $t=n-s$ последним аргументам.

Совершенно очевидно, что $0\leqslant\nu(u)\leqslant\dim\ u$.

Для произвольного пунктированного ТС куба $u:I_{(m_1,\dots,m_n)}\to E$, зафиксируем число s такое, что $\nu(u)\leqslant s\leqslant n$, обозначим $t=n-s$ и определим два новых ТС куба

$$\mathcal{B}_s(u):I_{(m^{(1)},\dots,m^{(s)})}\to B,\quad \mathcal{F}_s(u):I_{(m^{(s+1)},\dots,m^{(s+t)})}\to F,$$

формулами

$$\mathcal{B}_s(u)\left(\frac{k^{(1)}}{m^{(1)}},\dots,\frac{k_i^{(s)}}{m_i^{(s)}}\right)=(p\circ u)\left(\frac{k^{(1)}}{m^{(1)}},\dots,\frac{k_i^{(s)}}{m_i^{(s)}},0\dots,0\right),$$

$$\mathcal{F}_s(u)\left(\frac{k^{(s+1)}}{m^{(s+1)}},\dots,\frac{k_i^{(s+t)}}{m_i^{(s+t)}}\right)=u\left(0,\dots,0,\frac{k^{(s+1)}}{m^{(s+1)}},\dots,\frac{k_i^{(s+t)}}{m_i^{(s+t)}}\right).$$

Предложение 2. *Для любого пунктированного ТС куба* $u:I_{(m^{(1)},\dots,m^{(s)})}\to B$ *существует число* $l(u)\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *и пунктированный ТС куб* $w(l(u)):I_{(M^{(1)},\dots,M^{(s)})}\to E$, $M^{(i)}=2^{(l(u))}(m^{(i)}+1)$, $i=\overline{1,s}$ *такие, что* $p\circ w(l(u))=u^{\vee l(u)}$.

Доказательство. Сначала, используя толерантную стягиваемость куба $\left(\overset{s}{\underset{i=1}{\times}}I_{m_i},\overset{s}{\underset{i=1}{\times}}\iota_{m_i}\right)=$ $=(I_{\overline{m}},\iota_{\overline{m}})$ и определение 1, показывается существование ТС куба $w':I_{\overline{m}}\to E$ такого, что $p\circ w'=u$. Отсюда получаем, что $\left\{x_\alpha=w'(\alpha)|\ \alpha\in\overset{s}{\times}\{0,1\}\right\}\subset F$. Следовательно, все точки x_α могут быть соединены с x_0 толерантными путями w_α. Длины путей w_α можно сделать одинаковыми, равными m. Далее проводим индуктивные построения. Полагая $w^{(0)}=w'$ и $w^{(k+1)}:I_{(M_{k+1}^{(1)},\dots,M_{k+1}^{(s)})}\to E$, $M_{k+1}^{(i)}=2^{k+1}\left(m^{(i)}+1\right)-1$, для любых $k^{(i)}=\overline{0,M_{k+1}^{(i)}}$ и $i=\overline{1,s}$ получаем

$$w^{(k+1)}\left(\left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}}\right)=\begin{cases} w^{(k)\vee}\left(\left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}}\right),\ \left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}}\notin\overset{s}{\times}\{0,1\};\\ \omega_\alpha\left(\frac{k+1}{m_1}\right),\ \left(\frac{k^{(i)}}{M_{k+1}^{(i)}}\right)_{i=\overline{1,s}}=\alpha\in\overset{s}{\times}\{0,1\}.\end{cases}$$

Теперь следует взять $l(u)=m$, $w(l(u))=w^m$.

Теорема 1. *Пусть имеются два произольных пунктированных ТС куба*

$$u:I_{(m^{(1)}(u),\dots,m^{(s)}(u))}\to B,\quad v:I_{(m^{(s)}(v),\dots,m^{(t)}(v))}\to F,$$

где линейно связные толерантные пространства (B,τ) и $(F,\overline{\tau})$ являются базой и отмеченным слоем пунктированного толерантного расслоения

$$p:((E,\overline{\tau}),x_0)\to((B,\tau),b_0),\quad b_0\in B,\quad x_0\in p^{-1}(b_0)=F\subset E$$

и пусть $l_1(u)$ и $l_2(u)$ — два неотрицательных целых числа, определяемые в обозначениях предложения 2 следующими формулами:

$$l_1(u)=l(u)=m,\quad l_2(u)=\sum_{i=\overline{1,s}}2\left[2^{(l_1(u))}(m^{(i)}(u)+1)-1\right]+1.$$

Тогда существует пунктированный ТС куб

$$w=W(u,v):I_{(M^{(1)}(u),\dots,M^{(s)}(u),M^{(1)}(v),\dots,M^{(t)}(v))}\to(E,\overline{\tau}),$$

в котором

$$M^{(i)}(u)=2^{(l_1(u))}(m^{(i)}(u)+1)-1,\ i=\overline{1,s};\qquad M^{(j)}(v)=2^{(t\cdot l_2(u))}(m^{(j)}(v)+1)-1,\ j=\overline{1,t},$$

и который удовлетворяет следующим свойствам: 1) $\nu(w)\leqslant s$, 2) $\mathcal{B}_s(w)=u^{\vee l_1(u)}$, 3) $\mathcal{F}_s(w)=$ $=v^{\vee t\cdot l_2(u)}$, 4) $(\forall j=\overline{1,t})(\forall\varepsilon=\overline{0,1})$ $d^{\varepsilon}_{s+j}(w)=d(\underbrace{0,\dots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\dots,l_2(u)}_{t-1})\left(W(u,d^{\varepsilon}_j(v))\right)$, 5) v — вырожденный $\Rightarrow$ w — вырожденный. Здесь ТС куб $d^{\varepsilon}_j(w)$ получается из ТС куба w, когда значение j-го аргумента полагается равным ε.

Доказательство. Индукция по t. При $t=1$ утверждение теоремы 1 следует из предложения 2. Предполагаем, что теорема верна при $\dim\, v<t$. Для ТС куба v с $\dim\ v=t$ сначала предполагаем, что v вырожден, то есть $v\equiv d^{\varepsilon}_t$. Тогда следует определить

$$W(u,v)=d(\underbrace{0,\dots,0}_{s},\underbrace{l_2(u),\dots,l_2(u)}_{t})\left(W(u,d^{\varepsilon}_t(v))\right).$$

Для невырожденного v ТС куб $W(u,v)$ строится рекуррентно по возрастающей цепочке граней куба $I_{(m_1(u),\dots,m_s(u))}$ с использованием предположения индукции и техники, аналогичной доказательству предложения 1.

Рассмотрим теперь толерантную петлю $\omega:I_{m(\omega)}\longrightarrow B$ с вершиной в точке $b_0=\omega(0)=\omega(1)$. Обозначим через $\omega^\wedge:I_{m(\omega^\wedge)}\longrightarrow B$ максимальную непродленную часть петли ω, то есть $\omega=(\omega^\wedge)_{1,m(\omega)}$ и $\omega^\wedge=\omega'_{1,m(\omega^\wedge)}\Rightarrow(\omega^\wedge)^\wedge=\omega^\wedge$.

Согласно определению 1 имеется толерантный путь $\overline{\omega^\wedge}:I_{m(\omega^\wedge)}\longrightarrow E$ такой, что $\overline{\omega^\wedge}(0)=x_0$, $p\circ\overline{\omega^\wedge}=\omega^\wedge$. Зафиксируем толерантный путь $\overline{\overline{\omega^\wedge}}:I_{m\left(\overline{\overline{\omega^\wedge}}\right)}\longrightarrow F$, соединяющий точку $\overline{\omega^\wedge}(1)$ с точкой x_0. Тогда произведение путей $w_{\omega^\wedge}=\overline{\omega^\wedge}*\overline{\overline{\omega^\wedge}}$ будет толерантной петлей в Е с вершиной в точке x_0 и длины $M\left(\omega^\wedge\right)=m\left(\omega^\wedge\right)+m\left(\overline{\overline{\omega^\wedge}}\right)$.

Предложение 3. *Пусть $\omega:I_{m(\omega)}\longrightarrow(B,\tau)$ — произвольная толерантная петля с вершиной в точке $b_0=\omega(0)=\omega(1)$. Пусть $v:I_{(m^{(1)}(v),\dots,m^{(n)}(v))}\to F$ — произвольный n-мерный пунктированный ТС куб. Тогда существует пунктированный ТС куб $W_\omega(v):I_{M(\omega),M^{(1)}(v),\dots,M^{(n)}(v)}\longrightarrow(E,\overline{\tau})$, в котором*

$$M(\omega)=m(\omega)+m(\overline{\overline{\omega^\wedge}}),\ (\forall\ j=\overline{1,n})\ M^{(j)}(v)=2^{n\cdot l(\omega)}(m^{(j)}(v)+1)-1$$

и который удовлетворяет следующим свойствам:

1) $d^0_1(W_\omega(v))=v^{\wedge n\cdot l(\omega))}$,

2) $p\circ W_\omega(v)=\omega_{1,M(\omega)}$,

3) $(\forall j=\overline{1,n})(\forall\varepsilon=\overline{0,1})$ $d^{\varepsilon}_{1+j}(w)=d(0,\underbrace{l(\omega),\dots,l(\omega)}_{n-1})\left(W_\omega(u,d^{\varepsilon}_j(v))\right)$,

4) v — вырожденный ТС куб $\Rightarrow W_\omega(v)$ — вырожденный ТС куб,

5) $W_\omega(v)=d(0,\underbrace{n2e(\omega),\dots,n2e(\omega)}_{n})\left((W_{\omega^\wedge}(v))_{1,M(\omega)}\right)$, $e(\omega)=m(\omega)-m(\omega^\wedge)$.

Доказательство. Аналогичное доказательству теоремы 1.

Теорема 2. *Имеется представление Φ фундаментальной группы $\pi(B, b_0)$ базы (B, τ) в группе автоморфизмов $Aut\,(H(F))$ группы гомологий $H(F)$ слоя $(F, \overline{\tau})$.*

Доказательство. Пусть ω – толерантная петля в (B, τ) с вершиной в b_0. На группе $C^\bullet(F)$ нормализованных пунктированных ТС кубических цепей (см.[4]) определим гомоморфизм Φ_ω на свободных образующих

$$\Phi_\omega\,(v + D^\bullet(F)) \overset{df}{=} d_1^1\,(W_\omega(v)) + D^\bullet(F).$$

Этот гомоморфизм обладает псевдоцепным свойством

$$d \circ \Phi_\omega\,(v + D^\bullet(F)) = (\Phi_\omega \circ \partial\,(v + D^\bullet(F)))^{\vee l(\omega)}\,,$$

которое позволяет определить индуцированный гомоморфизм $(\Phi_\omega)_* : H(F) \to H(F)$. Затем показывается, что этот гомоморфизм зависит только от класса $[\omega] \in \pi(B, b_0)$ толерантно гомотопных петель. Тогда искомый гомоморфизм $\Phi:\ \pi(B, b_0) \to Aut\,(H(F))$ определяется формулой

$$\Phi\,([\omega]) = (\Phi_\omega)_*\,.$$

Теорема 3. *Пусть $w\ :\ \underset{i=1}{\overset{s+t}{\times}} I_{m^{(i)}(w)} \longrightarrow (E, \overline{\tau})$ — пунктированный ТС куб и $\nu(w) \leqslant s$. Возьмем соответствующие ТС кубы в базе и слое $u = \mathcal{B}_s(w)$, $v = \mathcal{F}_s(w)$. Пусть $l_1 = l_1(u)$, $l_2 = l_2(u)$, $M^{(i)}(u)$, $M^{(j)}(v)$ — натуральные числа, определенные в теореме 1. Добавим к ним числа*

$$l_3 = l_3(u) = 2\sum_{i=1}^{s} M^{(i)}(u),\ M = 2^{(t+1)l_3+1} - 1.$$

Тогда существует пунктированный ТС куб

$$D_s(w) : \left(\underset{i=1}{\overset{s}{\times}} I_{M^{(i)}(u)}\right) \times I_M \times \left(\underset{j=1}{\overset{t}{\times}} I_{M^{(j)}(v)}\right) \longrightarrow (E, \overline{\tau}),$$

который удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\nu(D_s(w)) \leqslant s$;

2) $\mathcal{B}_s(D_s(w)) = (\mathcal{B}_s(w))^{\vee l_1} = u^{\vee l_1}$;

3) $\mathcal{F}_s(D_s(w)) = (\mathcal{F}_s(w))^{\vee t\cdot l_2} = v^{\vee t\cdot l_2}$;

4) $d_{s+1}^0(D_s(w)) = d(\underbrace{l_1, \ldots, l_1}_{s}, \underbrace{t\cdot l_2, \ldots, t\cdot l_2}_{t})(w),\quad d_{s+1}^1(D_s(w)) = W(u, v)$;

5) $(\forall\ j \geq s)\ \left(\forall \varepsilon = \overline{0,1}\right)\ \ d_{j+1}^\varepsilon(D_s(w)) = d(\underbrace{0, \ldots, 0}_{s}, l_3, \underbrace{l_2, \ldots, l_2}_{t-1})(D_s(d_j^\varepsilon(w)))$;

6) $t > 0$, w *— вырожденный ТС куб* $\Rightarrow$ $D_s(w)$ *— вырожденный ТС куб.*

Доказательство. Используется техника доказательств теоремы 1 и предложения 1.

Рассмотрим теперь группу пунктированных нормализованных цепей $C^\bullet(E) = \underset{n\geq 0}{\oplus} C_n^\bullet(E)$. Ее свободные образующие однозначно определены невырожденными пунктированными ТС кубами. Обозначим через C^s подгруппу в $C^\bullet(E)$, чьи свободные образующие соответствуют ТС кубам u таким, что $\nu(u) \leqslant s$. Очевидные свойства

$$\underset{s\geqslant 0}{\cup} C^s = C^\bullet(E),\ C^s \subset C^{s+1},\ \partial\,(C^s) \subset C^s$$

показывают, что имеем возрастающую фильтрацию $\{C^s|\ s \geqslant 0\}$ цепного комплекса $\{C^\bullet(E),\ \partial\}$. Точная последовательность дифференциальных групп

$$0 \to C^{s-1} \hookrightarrow C^s \to C^s/C^{s-1} \to 0$$

порождает точную гомологическую последовательность

$$\begin{tikzcd}
H(C^{(s-1)}) \arrow[rr] & & H(C^{(s)}) \arrow[dl] \\
& H(C^{(s)}/C^{(s-1)}) \arrow[ul] &
\end{tikzcd},$$

которая в свою очередь дает точную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\
& E \arrow[ul, "k"] &
\end{tikzcd}.$$

Таким образом, имеем точную пару (D, E, i, j, k), определяющую спектральную последовательность $\left\{E^m_{s,t}\right\}$ [5], которую назовем спектральной последовательностью толерантного расслоения $p : (E, \overline{\tau}) \to ((B, \tau))$.

Теорема 4. *Спектральная последовательность толерантного расслоения сходится, при этом для любой пары $s, t \geqslant 0$ имеется изоморфизм $E^2_{s,\ t} \cong H_s\left(B, H_t(F)\right)$.*

Доказательство. Утверждение следует из общей теории спектральных последовательностей [5], из доказанных выше свойств толерантных расслоений, с учетом предложения 8 работы [4].

Библиографический список

1. *Zeeman E.S.* The topology of brain and visual perception. The Topology of 3-Manifolds. N.Y., 1962.
2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.
3. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Толерантное расслоение пространства толерантных путей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып.3. С. 93–106.
4. *Небалуев С.И.,Кляева И.А.* Теория пунктированных толерантных кубических сингулярных гомологий // Вестн. Самарск. гос. ун-та. 2007. Вып. 7(57). С. 134–151.
5. *Ху Сы-цзян.* Теория гомотопий. М.: Мир, 1964.

УДК 517.984

ОПЕРАТОР ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ИМЕЮЩЕЙ СТЕПЕННУЮ ОСОБЕННОСТЬ

В.В. Корнев, А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
E-mail: KornevVV@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Изучаются спектральные свойства интегрального оператора с инволюцией специального вида, для разложений по собственным функциям этого оператора получена теорема равносходимости.

Ключевые слова: интегральный оператор, инволюция, разложения по собственным функциям, равносходимость.

Operator Integration with an Involution Having a Power Singularity

V.V. Kornev, A.P. Khromov

Spectral properties of the integral operator with an involution of special type in the upper limit are studied and an equiconvergence theorem for its generalized eigenfunction expansions is obtained.

Key words: integral operator, involution, eigenfunction expansions, equiconvergence.

В [1] впервые был рассмотрен с инволюцией $\theta(x) = 1 - x$ интегральный оператор:

$$Af = \alpha_1 \int\limits_0^x A_1(x,t) f(t)\,dt + \alpha_2 \int\limits_x^1 A_2(x,t) f(t)\,dt + \alpha_3 \int\limits_0^{1-x} A_3(1-x,t) f(t)\,dt + \alpha_4 \int\limits_{1-x}^1 A_4(1-x,t) f(t)\,dt,$$

где $A_i(x,t)$ — достаточно гладкие функции, причем $A_i(x,x) \equiv 1$ и α_i — комплексные числа. Была изучена задача обращения оператора A, которая открывала перспективу исследования таких вопросов, как равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям, абсолютная