



References

1. Hochreiter R., Pflug G. Ch. Financial scenario generation for stochastic multi-stage decision processes as facility location problems. *Annals of Operations Research*, 2007, vol. 152, no. 1, pp. 257–272.
2. Heitsch H., Römisch W. Scenario tree modeling for multistage stochastic programs. *Math. Program.*, 2009, vol. 118, no. 2, pp. 371–406.
3. Rockafellar R., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *The Journal of Risk*, 2000, vol. 2, no. 3, pp. 21–41.
4. Dupacova J., Consigli G., Wallace S. W. Generating Scenarios for Multistage Stochastic Programs. *Annals of Operations Research*, 2000, vol. 100, pp. 25–53.
5. Hoyland K., Wallace S. W. Generating Scenario Trees for Multistage Decision Problems. *Management Science*, 2001, vol. 47, pp. 295–307.
6. Traub J. F., Woźniakowski H. *A general theory of optimal algorithms*. New York, Academic Press, 1980. 341p.

УДК 519.17

МИНИМАЛЬНЫЕ РЕБЕРНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПАЛЬМ

Д. Д. Комаров

Аспирант, ассистент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KomarovDD@gmail.com

Минимальные реберные расширения графов можно рассматривать как модель оптимальной реберной отказоустойчивой реализацией некоторой системы. Задача нахождения минимальных реберных расширений произвольного графа является NP-полной, поэтому представляет интерес нахождение классов графов, для которых возможно построить минимальное реберное расширение аналитически. Эта работа посвящена реберным 1-расширениям графов специального класса — класса пальм. В этой работе приводится вид реберного 1-расширения для некоторых пальм и доказывается его минимальность.

Ключевые слова: минимальные расширения графов.

Харари и Хейз в своей работе [1] рассматривают граф как модель некоторой технической системы в контексте отказоустойчивости. Вершины графа — ее элементы, а ребра — связи между элементами системы. Отказ связи системы рассматривается как удаление соответствующего этой связи ребра. При такой интерпретации минимальное реберное k -расширение графа, моделирующего некоторую систему Σ , является моделью оптимальной реберной k -отказоустойчивой реализации системы Σ . Задача нахождения минимального реберного расширения произвольного графа является NP-полной [2], поэтому представляет интерес нахождение классов графов, для которых возможно построить минимальное реберное расширение аналитически. В данной работе исследуется класс графов, являющийся особым подклассом деревьев, — класс пальм. Исследования будут ограничены рассмотрением минимальных реберных 1-расширений двулистных пальм (далее, говоря минимальное расширение, автор будет иметь в виду минимальное реберное 1-расширение). Дадим основные определения, которые будут использованы в работе.

Графом (неориентированным) называется пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное множество (множество вершин), а α — симметричное и антирефлексивное бинарное отношение на V' (множество ребер). Определения в основном даются по работе [3].

Про ребро $\{u, v\}$ графа G говорят, что оно *инцидентно* вершинам u и v .

Если ребро $\{u, v\}$ принадлежит бинарному отношению α графа G , то говорят, что вершина u *смежна с вершиной* v .

Степенью вершины u графа G называется число инцидентных ей ребер.

Подграфом графа $G = (V, \alpha)$ называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \subseteq V$ и $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$.

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое взаимно однозначное отображение $f : V_1 \rightarrow V_2$, что для любых $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие: $(u, v) \in \alpha_1 \Rightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$.

Назовем граф $G_3 = (V_3, \alpha_3)$ *реберным k -расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вложим в каждый подграф графа G_3 , получающийся удалением любых его k ребер.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k -расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) граф G^* является реберным k -расширением G ;
- 2) $|V^*| = |V|$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).



Путь длины k из вершины u в вершину v в графе $G = (V, \alpha)$ есть последовательность $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k), v_i \in V$, в которой $v_0 = u, v_k = v$ и $\{v_{i-1}, v_i\} \in \alpha$.

Циклом в графе называется путь $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$, в котором $v_0 = v_k$.

Граф, в котором нет циклов, называется ациклическим.

Вершина w графа G называется достижимой из вершины v , если либо $w = v$, либо существует путь из v в w .

Граф G называется связным, если любые две его вершины достижимы друг из друга.

Ациклический связный граф называется деревом.

Дерево с одной выделенной вершиной называется корневым деревом, а выделенная вершина называется корнем дерева. В дереве вершины степени 1 называются листьями.

Цепью P_n называется граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, и $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\}$.

Сверхстройным деревом называется корневое дерево, где степень всех вершин, кроме корня, не превосходит 2, а степень корня более 2.

Альтернативное определение:

Граф G называется сверхстройным деревом, если он является объединением $s (s > 2)$ цепей P_1, \dots, P_s с общей концевой вершиной (пример сверхстройных деревьев показан на рис. 1).

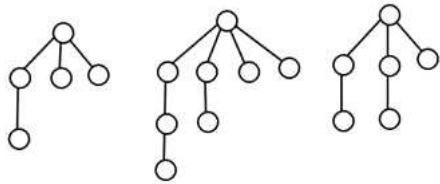


Рис. 1. Пример сверхстройных деревьев

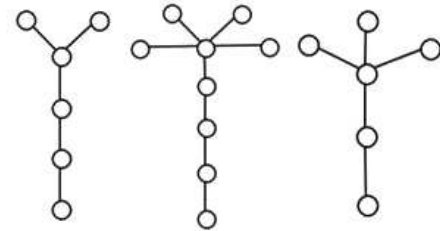


Рис. 2. Пример пальм

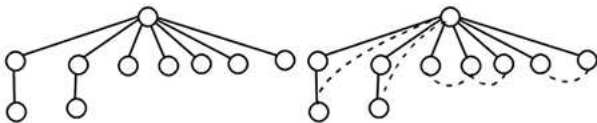


Рис. 3. Пример для теоремы 1

Если в рассмотренной теореме k (количество цепей длины 2) положить равным 1, то получим утверждение для пальм высоты 1.

Также так называемый звездный граф можно рассматривать как пальму высоты 1.

Теорема 2. Единственным с точностью до изоморфизма минимальным реберным расширением звездного графа G является граф G^* , полученный из графа G соединением двух произвольных его вершин степени 1 с каждой вершиной степени 1 (рис. 4).

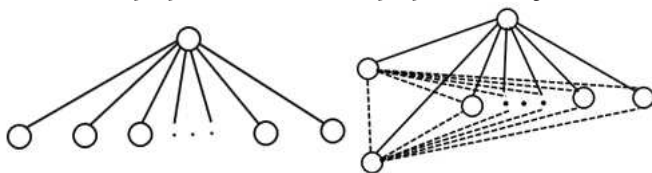


Рис. 4. Пример для теоремы 2

Назовем сверхстройное дерево r -листной пальмой высоты r , если оно образовано объединением $s (s > 2)$ цепей P_1, \dots, P_s длинами m_1, \dots, m_s с общей концевой вершиной, причем одна из длин (не теряя общности, пусть это будет m_1) равна r , а остальные (m_2, \dots, m_s) равны 1 (пример пальм показан на рис. 2).

Приведем теорему о расширении сверхстройных деревьев высоты 2. Очевидно, что теорема будет верна и для пальм высоты 2.

Теорема 1. Пусть граф $G = (V, \alpha)$ — сверхстройное дерево, являющееся объединением $k (k > 0)$ цепей длины 2 и $n (n > 1)$ цепей длины 1. Построим граф $G^* = (V, \alpha^*)$ из G по следующей схеме (рис. 3): соединим с корнем все листья, расстояние от которых до корня равно 2; если n четное, то соединим попарно между собой все листья, расстояние от которых до корня равно 1; если n нечетное, то соединим один из листьев, расстояние от которого до корня равно 1, соединим с двумя такими же листьями, а остальные листья, расстояние от которых до корня равно 1, кроме трех, уже задействованных, соединим попарно между собой. Полученный граф G^* будет являться минимальным реберным 1-расширением графа G .

В рассмотренных выше теоремах была ограничена высота пальмы.

Далее уделим внимание случаю, где ограничения накладывается на количество листьев пальмы.



Рассмотрим двулистную пальму. Субъективно граф, наиболее похожий на двулистную пальму, для которого существуют результаты относительного его минимальных расширений, является цепью. Задача о нахождении минимальных расширений цепи полностью решена [1].

Теорема 3. Единственным с точностью до изоморфизма минимальным расширением n -звенной цепи является $(n + 1)$ -звенный цикл (рис. 5).

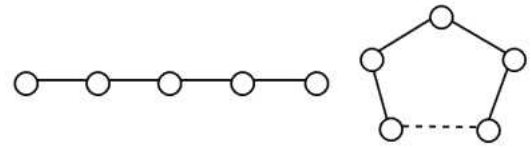


Рис. 5. Пример для теоремы 3

Рассмотрим минимальное реберное расширение 2-листных палм.

Для формулировки следующей теоремы введем понятие *рогатого цикла*.

Граф, полученный из n -звенного цикла и k 3-звенных циклов, таким образом, что каждый из 3-звенных циклов имеет ровно одно общее ребро с n -звенным циклом и ни один из 3-звенных циклов не имеет общих ребер с другими 3-звенными циклами, назовем *рогатым циклом длины n с k рогами*. При этом назовем k -звенный цикл *телом* рогатого цикла, а 3-звенные циклы назовем его *рогами* (рис. 6).

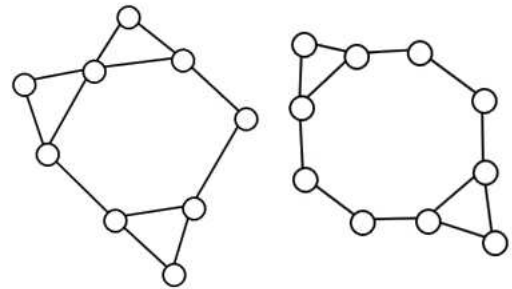


Рис. 6. Пример рогатых циклов

Назовем *разреженность* рогатого цикла длину максимального пути между вершинами, принадлежащими разным рогам рогатого цикла, проходящего по ребрам, не принадлежащим ни одному из рогов рогатого цикла.

На рис. 6 показаны рогатый цикл длины 6 с 3 рогами и разреженностью 2 (слева) и рогатый цикл длины 8 с 2 рогами и разреженностью 3 (справа).

Теорема 4. Пусть дан граф G — 2-листная пальма высоты n , $n > 3$. Тогда рогатый цикл G_1 с количеством рогов $p = \left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor + 2$, длиной $n_1 = n - p + 3$ и разреженностью меньше 5, будет являться минимальным расширением графа G .

Доказательство. Для начала покажем, что рогатые циклы с параметрами, описанными в формулировке теоремы, существуют.

Для возможности построения рогатого цикла длиной n_1 с количеством рогов p достаточно, чтобы выполнялось $n_1 \geq p$.

Очевидно, что при $n > 3$ для n_1 и p из формулировки теоремы это соотношение выполняется всегда.

Для того чтобы рогатый цикл длины n_1 с количеством рогов p мог иметь разреженность меньше некоторого k , вполне очевидно необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение: $n_1 \leq (k + 1)p$. В частном случае для $k = 5$ соотношение будет иметь вид

$$n_1 \leq 5p. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь выражения для длины рогатого цикла и количества рогов из формулировки теоремы

$$p = \left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor + 2, \tag{2}$$

$$n_1 = n - p + 3. \tag{3}$$

Из (3) следует

$$n = n_1 + p - 3. \tag{4}$$

Подставив (4) в (2), получим:

$$p = \left\lfloor \frac{n_1 + p - 7}{6} \right\rfloor + 2.$$



Так как p целое, то его можно внести под знак целой части, тогда получим:

$$\left[\frac{n_1 + p - 7}{6} - p + 2 \right] = 0,$$

$$\left[\frac{n_1 - 5p + 5}{6} \right] = 0. \tag{5}$$

Из соотношения (5) следует

$$n_1 - 5p + 5 < 6,$$

$$n_1 < 5p + 1. \tag{6}$$

Так как n_1 и p целые, то из (6) следует (1).

Таким образом, мы показали, что рогатые циклы с параметрами, описанными в формулировке теоремы, существуют для любого n .

Теперь покажем, что G_1 является расширением G . Всего существует 8 вариантов по удалению одного ребра из рогатого цикла с разреженностью меньше 5. Рассмотрим все из них (рис. 7, а-з) .

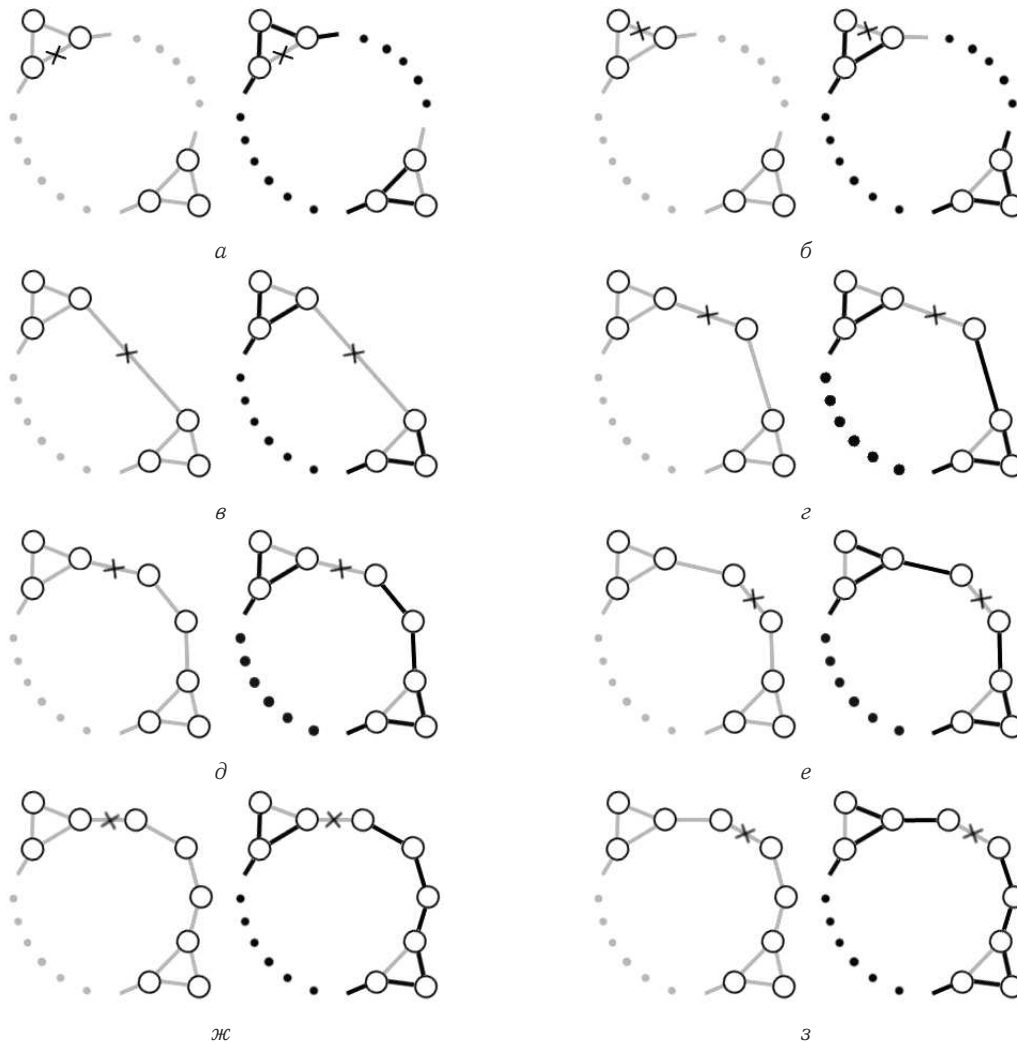


Рис. 7. Схемы удаления ребра

Для схемы удаления ребра, показанного на рис. 7, а-з слева, вложение можно осуществить по схеме, показанной на рис. 7, а-з справа (черный цвет обозначает используемые при вложении ребра, серый — не используемые).

Таким образом, мы доказали что граф G_1 является расширением графа G .



Граф G_1 имеет $(p + 1)$ или, если записать иначе, $\left\lfloor \frac{n - 4}{6} \right\rfloor + 3$ дополнительных ребер по сравнению с G . Покажем, что это минимальное из возможного количество дополнительных ребер.

Утверждение 1. В минимальном расширении графа G не может быть более 3 подряд идущих вершин степени 2. Действительно, рассмотрим 4 подряд идущие вершины степени 2 (рис. 8).

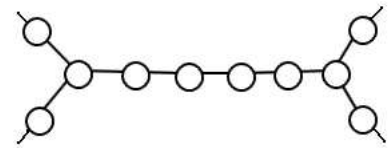


Рис. 8. 4 подряд идущие вершины степени 2

При удалении центрального ребра мы получим две вершины степени 1, каждая из которых при вложении G сможет быть лишь окончанием ствола пальмы, но никак не листом. Но у пальмы лишь один ствол, значит, утверждение верно.

Утверждение 2. Минимальное расширение G должно содержать цикл длиной, равной $n + 2$. Действительно, если будет отсутствовать цикл длиной большей или равной $n + 2$, то найдется ребро, при удалении которого будет невозможно вложить цепь длины $n + 1$ (ствол пальмы и один лист), а соответственно и двулистную пальму высоты n .

Утверждение 3. Минимальное расширение графа G содержит либо больше двух вершин степени 3, либо хотя бы одну вершину степени больше 3. Действительно, если расширение графа G содержит всего две вершины степени 3 и не одной вершины степени больше 3, то эти две вершины смежные, и можно удалить ребро, соединяющее эти две вершины. В этом случае вложение осуществит будет невозможно.

Рассмотрим две вершины, степени больше 2, принадлежащие циклу длины $n + 2$, причем между этими вершинами по ходу цикла находятся только вершины степени 2 и их не менее 2 (рис. 9).

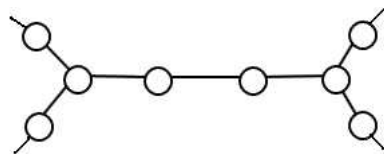


Рис. 9. Вершины, степени больше 2

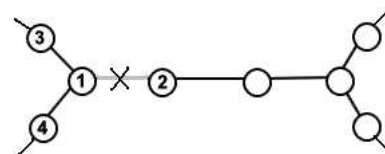


Рис. 10. Схема удаления ребра

В этом случае при вложении вершина 2 может быть лишь окончанием ствола пальмы. А вершина 1 (так как она является предшественницей вершины 2 в обходе по циклу) сможет быть только листом. Тогда либо вершина 3, либо вершина 4 (в зависимости от того, какая из них идет за вершиной 1 в обходе по циклу) должна быть степени больше 2. Резюмируя вышесказанное и учитывая утверждение 1, получим, что в рассмотренном случае (между двумя вершинами степени больше 2 находится только вершины степени 2 и их не менее 2), на каждые $5(4+1)$ вершин цикла должно приходиться 2 вершины степени больше 2 или в пересчете на дополнительные ребра — должно быть одно дополнительное ребро. Значит, оптимальнее, когда между вершинами степени больше 2 при обходе по циклу не более 1 вершины степени 2. В этом случае на каждые $6(4+2)$ вершин цикла должно приходиться 2 вершины степени больше 2, т. е. одно дополнительное ребро.

Собирая все утверждения и рассуждения вместе, получим:

1. Для обеспечения утверждения 2 необходимо, по крайней мере, 1 дополнительное ребро.
2. Для обеспечения утверждения 3 необходимо, по крайней мере, 2 дополнительных ребра.
3. Расширение графа G должно содержать цикл длины $n + 2$, где, по крайней мере, 2 из 6 последовательных вершин имеют степень больше 2 — для обеспечения этого необходимо по крайней мере $\left\lfloor \frac{n + 2 - 6}{6} \right\rfloor$ дополнительных ребер.

Таким образом, минимальное расширение графа G должно иметь, по крайней мере, $1 + 2 \left\lfloor \frac{n + 2 - 6}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n - 4}{6} \right\rfloor + 3$ дополнительных ребер.

Что и требовалось доказать — граф G_1 является минимальным расширением графа G . □



Библиографический список

1. Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // *Networks*. 1993. № 23. P. 135–142.
2. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // *Мат. заметки*. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650.
3. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 368 с.

Minimal Edge Extensions of Palm Trees

D. D. Komarov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, KomarovDD@gmail.com

Minimal edge extension of graphs can be regarded as a model of optimal edge fault tolerant implementation of a system. The problem of finding the minimal edge extensions of an arbitrary graph is NP-complete, that's why it is of interest to find classes of graphs for which it is possible to build a minimal edge extension analytically. This paper is about of the one-edge extensions of a graphs from a special class named palm trees. In this paper presents a kind of one-edge extension for some palm trees and the proof that it is minimal.

Key words: minimal extensions of graphs.

References

1. Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs. *Networks*, 1993, no. 23, pp. 135–142.
2. Abrosimov M. B. Complexity of some problems associated with the extension of graphs. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, no. 5, pp. 643–650.
3. Bogomolov A. M., Saliy V. N. Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997, 368 p. (in Russian).

УДК 621.397.74

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ВОЗДЕЙСТВИЯ ИСКАЖЕНИЙ НА OFDM/QAM-СИГНАЛ

А. А. Львов¹, В. В. Киселёв²

¹Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматики и телемеханики, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., alvova@mail.ru

²Кандидат технических наук, ассистент кафедры автоматики и телемеханики, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., kiva@live.ru

В работе рассмотрены математические модели каналов связи с помехами различного типа, их влияние на рабочие точки констелляционных диаграмм в системах с OFDM/QAM сигналами, даны рекомендации по мониторингу каналов.

Ключевые слова: качество канала, мониторинг, математические модели, помехи, констелляционная диаграмма.

Современные системы связи, включая системы и сети цифрового телерадиовещания, характеризуются передачей сжатых потоков информации в реальном времени. Для высокоскоростной передачи цифровых данных положительно зарекомендовала себя технология OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing — частотное уплотнение с ортогональными поднесущими) в тандеме с QAM-модуляцией (Quadrature Amplitude Modulation — квадратурно-амплитудная модуляция). Как и другие телекоммуникационные технологии, OFDM/QAM чувствительна к искажениям сигнала, что проявляется в увеличении частоты появления ошибочных битов (Bit Error Rate — BER). Следовательно, одной из важнейших задач, которые необходимо решать при проектировании подобных систем, является анализ степени и результатов воздействия искажений на передаваемый сигнал.

OFDM/QAM сигнал описывается уравнением [1]:

$$z(t) = \operatorname{Re} \left[\exp(2\pi jft) \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{h=H_{\min}}^{H_{\max}} (C_{r,s,h} \times \Psi_{r,s,h}(t)) \right], \quad (1)$$