gil'bertovy prostranstva. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 472 p.)
5. Gelfand I. M., Shilov G. E. *Prostranstva osnovnykh i obobshchennykh funktsii* [Spaces of test and generalized functions]. Moscow, Fizmatgiz, 1958, 308 p. (in Russian).
6. Rham G. de. *Differentsiruemye mnogoobraziia* [Differentiable manifolds]. Moscow, Izdatelstvo inostrannoj literatury, 1956, 250 p. (in Russian).
7. Godeman R. *Algebraicheskaia topologiia i teoriia puchkov* [Algebraic topology and theory of sheaves]. Moscow, Izdatelstvo inostrannoj literatury, 1961, 320 p. (in Russian).
8. Fomenko A. T., Fuks D. B. *Kurs gomotopicheskoi topologii* [A course in homotopy topology]. Moscow, Nauka, 1989, 528 p. (in Russian).

УДК 501.1

СИСТЕМА ДИРАКА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. В. Корнев[1], **А. П. Хромов**[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KornevVV@info.sgu.ru
[2]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

В работе рассматривается система Дирака с антипериодическими краевыми условиями и с комлекснозначным непрерывным потенциалом. Предложен новый метод исследования спектральных свойств этой краевой задачи. Метод базируется на формулах типа операторов преобразования и является элементарным и простым. С его помощью получена уточненная асимптотика собственных значений и доказано, что система собственных и присоединенных функций образует базис Рисса со скобками в пространстве квадратично суммируемых двумерных вектор-функций, так как собственные значения могут быть кратными. Исследуется также структура проекторов Рисса. Полученные результаты можно использовать в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией.

Ключевые слова: система Дирака, спектр, асимптотика, базис Рисса.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ систему Дирака:

$$y_1'(x) - q_2(x)y_2(x) = \lambda y_1(x), \tag{1}$$
$$y_2'(x) - q_1(x)y_1(x) = -\lambda y_2(x) \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$y_1(0) = -y_1(1), \qquad y_2(0) = -y_2(1), \tag{3}$$

где $q_j(x)$ — непрерывные комплекснозначные функции.

В работе [1] предложен новый метод исследования спектральных свойств системы (1), (2) в случае периодических краевых условий. В данной работе на основе этого метода подобное исследование осуществляется в случае антипериодических краевых условий (3). Метод базируется на формулах типа операторов преобразования (см. также [2, с. 30]), является элементарным и весьма простым. В качестве приложения дается новое доказательство теоремы П. Джакова, Б. С. Митягина [3, 4] о базисах Рисса. Как и в периодическом случае, в антипериодическом случае возможна кратность собственных значений. Полученные результаты могут быть также использованы в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией [5].

1. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ПОЛНОТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Имеет место следующая асимптотика решений системы (1), (2):

Лемма 1. *Система* (1), (2) *в области* $\operatorname{Re}\lambda \ge -h$, $h > 0$, *при больших* $|\lambda|$ *имеет фундаментальную матрицу решений* $Y(x,\lambda) = (y_{ij}(x))_1^2$ *с асимптотикой*

$$Y(x,\lambda) = (E + o(1))e^{\lambda D x}, \tag{4}$$

где $E = \operatorname{diag}(1,1)$, $D = \operatorname{diag}(1,-1)$, $o(1) \to 0$ *при* $|\lambda| \to \infty$ *равномерно по* $x \in [0,1]$ *и* $\arg\lambda$, $y_{ij}(x)$ — *аналитичны по* λ.

Лемма справедлива и при $\operatorname{Re}\lambda \le h$, а её доказательство можно найти, например, в [1].

Используя асимптотическую формулу (4), получим главный член асимптотики собственных значений.

Теорема 1. *Собственные значения краевой задачи* (1)–(3) *образуют две бесконечные последовательности с асимптотикой:*

$$\lambda_n' = (2n+1)\pi i + \varepsilon_n', \qquad \lambda_n'' = (2n+1)\pi i + \varepsilon_n'', \qquad n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \dots,$$

где $\varepsilon_n' \to 0$ и $\varepsilon_n'' \to 0$ при $n \to \infty$. В случае $\varepsilon_n' \ne \varepsilon_n''$ они простые, а в случае $\varepsilon_n' = \varepsilon_n''$ — двукратные.

Доказательство. Обозначим $\Delta(\lambda) = Y(0,\lambda)+Y(1,\lambda)$. Собственные значения совпадают с корнями уравнения

$$\det \Delta(\lambda) = 0. \tag{5}$$

По лемме 1

$$\det \Delta(\lambda) = \det\left(E + o(1) + (E+o(1))e^{\lambda D}\right) = \det(E+o(1)) \cdot \det\left(E + o(1) + e^{\lambda D}\right) =$$
$$= (1+o(1))\left(e^{\lambda}(e^{-\lambda}+1+o(1))(e^{-\lambda}+1+o(1)) + o(1)\right).$$

Следовательно, при больших $|\lambda|$ уравнение (5) эквивалентно уравнению

$$\varphi_0(\lambda) + \varphi_1(\lambda) = 0, \tag{6}$$

где $\varphi_0(\lambda) = (e^{-\lambda}+1)^2$, $\varphi_1(\lambda) = o(1)$.

Нули функции $\varphi_0(\lambda)$ двукратные и равны $\lambda_n^0 = (2n+1)\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому все собственные значения задачи (1)–(3) достаточно большие по модулю, лежат в некоторой полосе $|\operatorname{Re}\lambda| \le h$, и из (6) по теореме Руше получаем утверждение теоремы. □

Введем в рассмотрение оператор

$$Ly = (y_1'(x) - q_2(x)y_2(x), -y_2'(x) + q_1(x)y_1(x))^T, \qquad y(0) = -y(1),$$

где $y = y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, T — знак транспонирования. Очевидно, собственные значения оператора L совпадают с собственными значениями краевой задачи (1)–(3).

Лемма 2. *Для резольвенты $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор, справедлива формула*

$$R_\lambda f = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U(G_\lambda \tilde f) + G_\lambda \tilde f, \tag{7}$$

где $G_\lambda \tilde f = \int\limits_0^1 Y(x,\lambda)E_0(x,t)Y^{-1}(t,\lambda)\tilde f(t)\,dt$, $U(y) = y(0)+y(1)$, $E_0(x,t) = \operatorname{diag}(-\varepsilon(t,x), \varepsilon(x,t))$, $\varepsilon(x,t) = 1$ при $x \ge t$, $\varepsilon(x,t) = 0$ при $t > x$, $\tilde f = (f_1(x), -f_2(x))^T$, $f_j(x)$ — координаты $f(x)$, $Y(x,\lambda)$ — та же, что и в лемме 1.

Доказательство. Пусть $R_\lambda f = y$. Тогда имеем $Ly = \lambda y + f$ или

$$y'(x) - Q(x)y(x) = \lambda D y(x) + \tilde f(x), \tag{8}$$
$$y(0) + y(1) = 0, \tag{9}$$

где $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$.

Ищем решение краевой задачи (8), (9) в виде $y(x) = Y(x,\lambda)c(x)$, т. е. применяем метод вариации произвольных постоянных. В результате получим формулу (7). □

Обозначим через S_δ область, получающуюся из λ-плоскости удалением всех чисел $\lambda_n^0 = (2n+1)\pi i$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же радиуса δ.

Лемма 3. *В S_δ при $|\lambda| \to \infty$ справедлива асимптотическая формула:*

$$R_\lambda f = \int\limits_0^1 O(1) f(t)\,dt,$$

где $O(1)$ — матрица с элементами, имеющими оценку $O(1)$ по λ, равномерную относительно других переменных.

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что в S_δ справедлива оценка

$$|\det \Delta(\lambda)| \geq c|e^{\lambda}| \tag{10}$$

(через c обозначаем разные положительные постоянные, встречающиеся в оценках).

Утверждение леммы легко следует из формулы (7) с учетом (4) и (10), так как случай $\operatorname{Re}\lambda \leq h$ рассматривается аналогично. □

Теорема 2. *Системы собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) операторов L и L^* полны в пространстве $L_2^2[0,1]$.*

Доказательство. Покажем вначале полноту с.п.ф. сопряженного оператора:

$$L^*z = (-z_1'(x) + \overline{q}_1(x)z_2(x), z_2'(x) - \overline{q}_2(x)z_1(x))^T, \qquad z(0) = -z(1).$$

Пусть f ортогональна всем с.п.ф. оператора L^*. Тогда $R_\lambda f$ есть целая функция по λ. В силу леммы 3 и теоремы Лиувилля $R_\lambda f$ не зависит от λ, т. е. $R_{\lambda_1} f = R_{\lambda_2} f$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Но $R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} f = (R_{\lambda_1} f - R_{\lambda_2} f)/(\lambda_1 - \lambda_2)$. Следовательно, $f = 0$, и система с.п.ф. оператора L^* полна.

Полнота с.п.ф. оператора L устанавливается аналогично, так как $(L^*)^* = L$ и для $R_{-\lambda}(L^*) = (L^* + \lambda E)^{-1}$ также справедлива лемма 3. □

2. УТОЧНЕННАЯ АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Для уточнения теоремы 1 воспользуемся системой решений системы Дирака, введенной в [1], которая определяется следующим образом. Система (1), (2) эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda x} + \int_0^x e^{\lambda(x-t)} q_2(t) y_2(t)\, dt,$$

$$y_2(x) = c_2 e^{-\lambda x} + \int_0^x e^{-\lambda(x-t)} q_1(t) y_1(t)\, dt,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Выполним замену $y_1(x) = e^{\lambda x} z_1(x)$, $y_2(x) = e^{-\lambda x} z_2(x)$. Относительно $z_1(x)$ и $z_2(x)$ получим:

$$z_1(x) = c_1 + \int_0^x e^{-2\lambda t} q_2(t) z_2(t)\, dt, \tag{11}$$

$$z_2(x) = c_2 + \int_0^x e^{2\lambda t} q_1(t) z_1(t)\, dt. \tag{12}$$

Через $(z_{11}(x), z_{12}(x))^T$ будем обозначать решение (11), (12) при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, а через $(z_{21}(x), z_{22}(x))^T$ — решение системы (11), (12) при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

Лемма 4. *Имеют место формулы*

$$z_{11}(x) = 1 + \int_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{11}(x,\xi)\, d\xi, \qquad z_{21}(x) = \int_0^x e^{2\lambda\xi} K_{21}(x,\xi)\, d\xi,$$

$$z_{12}(x) = \int_0^x e^{-2\lambda\xi} K_{12}(x,\xi)\, d\xi, \qquad z_{22}(x) = 1 + \int_0^1 e^{2\lambda\xi} K_{22}(x,\xi)\, d\xi,$$

где $K_{11}(x,\xi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_{11,n}(x,\xi)$, $K_{11,n}(x,\xi) = \int_0^x q_2(t_1)\, dt_1 \int_0^x \varepsilon(t_1,t_2) q_1(t_2)\, dt_2 \ldots \int_0^x \varepsilon(t_{2n-3}, t_{2n-2}) \times q_1(t_{2n-2})\, dt_{2n-2} \int_0^x \varepsilon(t_{2n-2}, t_{2n-1}) \varepsilon(\xi, t_{2n}(\xi) + \xi - t_{2n-1}) \varepsilon(t_{2n}(\xi) + \xi, \xi) q_2(t_{2n-1}) q_1(t_{2n}(\xi))\, dt_{2n-1}$, $t_{2n}(\xi) = t_1 - t_2 + t_3 - \ldots + t_{2n-1} - \xi$, *$K_{11}(x,\xi)$ не зависит от λ,* $|K_{11,n}(x,\xi)| \leq (c_1 c_2)^n \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$,

$c_j = \max\limits_x |q_j(x)|$, $K_{21}(x,\xi) = q_1(\xi) + \int\limits_\xi^x q_1(\tau)K_{11}(\tau, \tau-\xi)\,d\tau$, *$K_{22}$ получается из K_{11}, меняя q_1 на q_2, q_2 на q_1, а K_{12} — из K_{21}, меняя q_1 на q_2 и K_{11} на K_{22}.*

(По поводу доказательства леммы 4 см. [1].)

Везде далее $Y(x,\lambda) = (y_{ij}(x))_1^2$, где $y_{1j}(x) = e^{\lambda x} z_{1j}(x)$, $y_{2j}(x) = e^{-\lambda x} z_{2j}(x)$, $j = 1, 2$.

Уравнение (5) для собственных значений после умножения обеих частей на $e^\lambda / z_{11}(1)$ примет вид

$$e^{2\lambda} + g_1(\lambda)e^\lambda + g_2(\lambda) = 0, \tag{13}$$

где $g_1(\lambda) = \dfrac{1}{z_{11}(1)}(1 + z_{11}(1)z_{22}(1) - z_{12}(1)z_{21}(1))$, $g_2(\lambda) = \dfrac{z_{22}(1)}{z_{11}(1)}$. В дальнейшем через α_n будем обозначать различные числа, для которых $\sum |\alpha_n|^2 < \infty$, а через β_n — такие α_n, которые можно точно вычислить.

Получим асимптотику $z_{ij}(1)$ при $\lambda = \lambda_n = (2n+1)\pi i + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 5. *При $\lambda = \lambda_n$ справедливы асимптотические формулы:*

$$z_{ij}(1) = \delta_{ij} + \omega_n + O(\varepsilon_n^4), \tag{14}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\omega_n = \beta_n + \beta_n\varepsilon_n + \beta_n\varepsilon_n^2 + \beta_n\varepsilon_n^3$.

Доказательство. По лемме 4 имеем:

$$z_{11}(1) = 1 + \int\limits_0^1 e^{-2\lambda_n\xi} K_{11}(1,\xi)\,d\xi = 1 + \int\limits_0^1 e^{-4n\pi i\xi}\left(1 - 2\varepsilon_n\xi + \frac{(2\varepsilon_n\xi)^2}{2!} - \frac{(2\varepsilon_n\xi)^3}{3!}\right)\times$$
$$\times e^{-2\pi i\xi} K_{11}(1,\xi)\,d\xi + O(\varepsilon_n^4) = 1 + \omega_n + O(\varepsilon_n^4),$$

где $\omega_n = \int\limits_0^1 e^{-4n\pi i\xi}\left(1 - 2\varepsilon_n\xi + \dfrac{(2\varepsilon_n\xi)^2}{2!} - \dfrac{(2\varepsilon_n\xi)^3}{3!}\right) e^{-2\pi i\xi} K_{11}(1,\xi)\,d\xi$. Таким образом, формула (14) при $i = j = 1$ доказана. Остальные формулы в (14) получаются аналогично. □

Следствие. *При $\lambda = \lambda_n$ имеет место соотношение*

$$z_{11}^{-1}(1) = 1 + \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4). \tag{15}$$

Из леммы 5 и формулы (15), в свою очередь, легко следует, что справедливы следующие асимптотические формулы:

$$g_j(\lambda_n) = 2^{2-j} + \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4), \qquad j = 1, 2. \tag{16}$$

Лемма 6. *Для чисел ε_n' и ε_n'' из теоремы 1 справедливы оценки*

$$\varepsilon_n' = \alpha_n^{1/2}, \qquad \varepsilon_n'' = \alpha_n^{1/2}.$$

Доказательство. Обозначим

$$L_\pm(\lambda) = e^\lambda + \frac{1}{2}g_1(\lambda) \mp \sqrt{g_3(\lambda)}, \qquad g_3(\lambda) = \frac{1}{4}g_1^2(\lambda) - g_2(\lambda).$$

Рассмотрим собственные значения $\lambda_n = (2n+1)\pi i + \varepsilon_n$ краевой задачи (1)–(3). Они являются корнями уравнения (13). Следовательно,

$$L_+(\lambda_n) \cdot L_-(\lambda_n) = 0.$$

Пусть для определенности $L_+(\lambda_n) = 0$. В этом случае

$$e^{\varepsilon_n} = 1 + x_n, \tag{17}$$

где

$$x_n = \frac{1}{2}g_1(\lambda_n) - \sqrt{g_3(\lambda_n)} - 1. \tag{18}$$

На основании (16) заключаем, что

$$g_3(\lambda_n) = \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4), \qquad \sqrt{g_3(\lambda_n)} = \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2),$$

$$x_n = \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2), \qquad x_n^2 = \alpha_n + O(\varepsilon_n^2).$$

Используя эти соотношения, из (17) получаем, что

$$\varepsilon_n = x_n + O(x_n^2) = \alpha_n^{1/2} + O(\varepsilon_n^2), \tag{19}$$

откуда следует, что $\varepsilon_n = \alpha_n^{1/2}$.

Случай $L_-(\lambda_n) = 0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана. □

Теорема 3. *Пусть ε_n — любое из ε_n' или ε_n''. Справедливы асимптотические формулы:*

$$\varepsilon_n = \pm\beta_n^{1/2} + \alpha_n^{3/4}$$

(вопрос о знаке перед $\beta_n^{1/2}$ не ясен).

Доказательство. Пусть $\lambda_n = (2n+1)\pi i$ является собственными значениями задачи (1)–(3) и, для определенности, $L_+(\lambda_n) = 0$. В этом случае по формулам (16) и (18) имеем:

$$x_n = \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4) - \sqrt{\omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4)}.$$

В силу леммы 6 $\omega_n = \beta_n + \alpha_n^{3/2}$ и поэтому

$$x_n = \beta_n + \alpha_n^{3/2} - \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}}.$$

Отсюда с учетом (19) заключаем, что

$$\varepsilon_n = -\sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \alpha_n. \tag{20}$$

Возможны два случая. В первом случае

$$\left|\sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}}\right| \le \left|\alpha_n^{3/4}\right|.$$

Тогда из (20) следует, что

$$\varepsilon_n = -\sqrt{\beta_n} + \alpha_n^{3/4}. \tag{21}$$

Во втором случае

$$\left|\sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}}\right| > \left|\alpha_n^{3/4}\right|.$$

В этом случае

$$\left|\sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} + \sqrt{\beta_n}\right| = \left|\beta_n + \alpha_n^{3/2} - \beta_n\right| \cdot \left|\sqrt{\beta_n + \alpha_n^{3/2}} - \sqrt{\beta_n}\right|^{-1} \le \left|\alpha_n^{3/4}\right|.$$

Учитывая это, из (20) получаем, что

$$\varepsilon_n = \sqrt{\beta_n} + \alpha_n^{3/4}. \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует утверждение теоремы (случай $L_-(\lambda_n) = 0$ рассматривается аналогично). □

Как и в периодическом случае, для кратных собственных значений можно получить еще более точную асимптотику.

Теорема 4. *Если $g_3(\lambda_n) = 0$ для некоторого бесконечного множества Λ собственных значений, то достаточно большие по модулю λ_n из Λ двукратны, и для них справедлива асимптотика*

$$\lambda_n = (2n+1)\pi i + \beta_n + \alpha_n^2.$$

Доказательство. По теореме 1 число корней уравнения (13) в круге $|(2n+1)\pi i - \lambda| < \delta$ при больших $|n|$ равно 2. Число $\varkappa_+$ ($\varkappa_-$) корней $L_+(\lambda)$ ($L_-(\lambda)$) в таком случае не больше 2, причем $\varkappa_+ + \varkappa_- = 2$. Следовательно, если $g_3(\lambda_n) = 0$, то $L_\pm(\lambda_n) = 0$ и $\varkappa_+ = \varkappa_- = 1$, т. е. λ_n — двукратный корень. В этом случае (17) примет вид

$$e^{\lambda_n} = \frac{1}{2} g_1(\lambda_n).$$

Тогда

$$e^{\lambda_n} = 1 + \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4), \qquad \varepsilon_n = y_n + O(y_n^2), \tag{23}$$

где $y_n = \omega_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^4) = \beta_n + \beta_n\varepsilon_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2)$. Замечая, что $y_n^2 = \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2)$, из (23) получаем:

$$\varepsilon_n = \beta_n + \beta_n\varepsilon_n + \alpha_n^2 + O(\varepsilon_n^2). \tag{24}$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_n = \alpha_n$ и (24) переходит в $\varepsilon_n = \beta_n + \alpha_n^2$. Теорема доказана. □

3. БАЗИСЫ РИССА

Пусть δ — положительное достаточно малое число. По теореме 1 все собственные значения, достаточно большие по модулю, попадают в круги с границами $\gamma_n = \{\lambda | \, |(2n+1)\pi i - \lambda| = \delta\}$, причем обязательно по два в каждый круг (или по одному, если $\lambda'_n = \lambda''_n$). Суммарная кратность собственных значений в каждом круге равна двум. Рассмотрим проекторы Рисса:

$$P_n = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} R_\lambda \, d\lambda, \qquad (25)$$

где

$$R_\lambda f = -Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U(G_\lambda f) + G_\lambda f, \qquad (26)$$

причем $Y(x,\lambda)$ — из раздела 2; $\Delta(\lambda) = Y(0,\lambda) + Y(1,\lambda)$, $G_\lambda f = \int\limits_0^x Y(x,\lambda)Y^{-1}(t,\lambda)f(t)\,dt$, $f = f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $f_i(x) \in L_2[0,1]$.

Представлением (26) получается так же, как (7). Функция $G_\lambda f$ есть целая по λ.

Из (25), (26) имеем:

$$P_n f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} Y(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)Y(1,\lambda) \int\limits_0^1 Y^{-1}(t,\lambda)f(t)\,dt\,d\lambda.$$

Обозначим через $s(\lambda)$ функции, зависящие только от λ, ограниченные по $\lambda \in \gamma_n$ при всех n, достаточно больших по модулю. Структура проекторов Рисса описывается следующей леммой:

Лемма 7. *При $|n|$ достаточно больших*

$$P_n f = \int\limits_{\gamma_n} \Phi(x,\lambda; f)\,d\lambda,$$

где каждая из компонент вектора Φ имеет вид

$$\sum_k s(\lambda) y_{i_1 j_1}(x)(w_{ij}, \overline{f}_l)$$

(суммирование ведется по всем $k = (i_1, j_1, i, j, l)$, когда компоненты мультииндекса k принимают значения 1 и 2), $w_{ij}(x)$ — элементы матрицы $Y^{-1}(x,\lambda)$.

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству теоремы 5 из [1].

Обозначим через $\varphi(x,\mu)$ одну из функций вида

$$\varphi(x,\mu) = e^{(\pm\overline{\mu}\pm\pi i)x} \left\{ \varphi(x) + \frac{1}{2} \int\limits_x^1 \varphi(\tau)\overline{K}_{ij}\left(\tau, (\tau \pm x)/2\right)\,d\tau \right\},$$

$$\varphi(x,\mu) = \frac{1}{2} e^{(\pm\overline{\mu}\pm\pi i)x} \int\limits_x^1 \varphi(\tau)\overline{K}_{ij}\left(\tau, (\tau \pm x)/2\right)\,d\tau,$$

где $\varphi(x) \in L_2[0,1]$. Знаки $\pm$ берутся в любой комбинации.

Лемма 8. *При $\mu \in \gamma = \{\mu | \, |\mu| = \delta\}$ справедливы оценки*

$$\|\varphi(x,\mu)\| \le c\|\varphi\|,$$

где c не зависит от μ, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.

Лемма 9. *Если $\lambda = (2n+1)\pi i + \mu$, $\mu \in \gamma$, то для каждой пары (i,j) существуют две функции $\varphi(x,\mu)$ из приведенных выше такие, что справедливы формулы*

$$(y_{ij}(x), \varphi(x)) = \left(e^{2n\pi i x}, \varphi(x,\mu)\right) + \left(e^{-2n\pi i x}, \varphi(x,\mu)\right), \qquad i,j = 1,2. \qquad (27)$$

Доказательство. Имеем:

$$y_{11} = e^{\lambda x} z_{11}(x) = e^{\lambda x} + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-2\xi)} K_{11}(x,\xi)\,d\xi = e^{\lambda x} + \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^x e^{\lambda\tau} K_{11}(x,(x-\tau)/2)\,d\tau =$$

$$= e^{\lambda x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{\lambda\tau} K_{11}(x,(x-\tau)/2)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-\lambda\tau} K_{11}(x,(x+\tau)/2)\,d\tau = e^{2n\pi i x} e^{(\mu+\pi i)x} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{2n\pi i\tau} e^{(\mu+\pi i)\tau} K_{11}(x,(x-\tau)/2)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^x e^{-2n\pi i\tau} e^{-(\mu+\pi i)\tau} K_{11}(x,(x+\tau)/2)\,d\tau.$$

Отсюда получаем (27) при $i = j = 1$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана. □

Замечание. Конкретный вид $\varphi(x,\mu)$ в (27) для каждой пары (i,j) в дальнейшем не важен.

Лемма 10. *Справедливы оценки*

$$\sum_k |(y_{ij}(x,(2n+1)\pi i+\mu),\varphi)|^2 \le c\|\varphi\|^2, \tag{28}$$

$$\sum_n |(w_{ij}(x,(2n+1)\pi i+\mu),\varphi)|^2 \le c\|\varphi\|^2, \tag{29}$$

где c не зависит от $\mu \in \gamma$, $y_{ij}(x,(2n+1)\pi i+\mu)$ $(w_{ij}(x,(2n+1)\pi i+\mu))$ есть $y_{ij}(x)$ $(w_{ij}(x))$ при $\lambda = (2n+1)\pi i+\mu$.

Оценки (28) следуют из лемм 8 и 9. Оценки (29) получаются аналогично.

Лемма 11. *Обозначим через N_0 все целые числа, меньшие по модулю некоторого достаточно большого фиксированного числа. Пусть N — любой конечный набор целых чисел, причем $N \cap N_0 = \emptyset$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\|\sum_{n\in N} P_n\right\| \le c,$$

где c не зависит от набора N, $\|\cdot\|$ — норма в пространстве операторов в $L_2^2[0,1]$.

Доказательство. Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))^T$, f_j, $g_j \in L_2[0,1]$. По лемме 7 имеем:

$$\left|\sum_{n\in N}(P_n f, g)\right| = \left|\int\limits_\gamma \sum_{n\in N} |(\Phi_1(x,(2n+1)\pi i+\mu; f), g_1) + (\Phi_2(x,(2n+1)\pi i+\mu; f), g_2)|\,d\mu\right| \le$$

$$\le c\sum_k \sum_{n\in N} \int\limits_\gamma |(y_{ij}(x,(2n+1)\pi i+\mu), g_{l_1}(x))| \cdot |(w_{ij}(x,(2n+1)\pi i+\mu), \overline{f}_{l_1}(x))||d\mu|,$$

где Φ_1, Φ_2 — компоненты Φ, $\sum\limits_k$ означает суммирование по мультииндексу $k = (i_1, j_1, i, j, l_1, l_2)$ с компонентами, принимающими значения 1 и 2.

Отсюда по лемме 10 получаем оценку

$$\left|\sum_{k\in N}(P_n f, g)\right| \le c\|f\|\cdot\|g\|,$$

где c не зависит от N, f и g, и по теореме Банаха–Штейнгауза получаем утверждение леммы. □

Теорема 5. *Система с.п.ф. краевой задачи* (1)–(3) *образует базис Рисса со скобками в* $L_2^2[0,1]$.

Доказательство. В силу леммы 11 и теоремы 2 заключаем, что система с.п.ф. образует безусловный базис со скобками в $L_2^2[0,1]$, и каждая скобка содержит члены ряда Фурье по с.п.ф., соответствующие собственным значениям, попавшим в конкретные γ_n при большом n. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00238а).

Библиографический список

1. *Бурлуцкая М. Ш., Корнев В. В., Хромов А. П.* Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2012. Т. 52, № 9. С. 1621–1632.
2. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 340 с.
3. *Djakov P., Mityagin B.* Bari–Markus property for Riesz projections of ID periodic Dirac operators // Math. Nachr. 2010. Vol. 283, № 3. P. 443–462.
4. *Джаков П. Б., Митягин Б. С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // УМН. 2006. Т. 61, № 4(370). С. 77–182. DOI: 10.4213/rm2121.
5. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2011. Т. 51, № 12. С. 2233–2246.

Dirac System with Undifferentiable Potential and Antiperiodic Boundary Conditions

V. V. Kornev, A. P. Khromov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, KornevVV@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

The object of the paper is Dirac system with antiperiodic boundary conditions and complex-valued conditions potential. A new method is suggested for investigating spectral properties of this boundary problem. The method is based on the formulas of the transform operators type. It is rather elementary and simple. Using this method asymptotic behaviour of eigenvalues is specificated and it is proved that eigen and associated functions form Riesz basis with brackets in the space of quadratic summerable two-dimensional vector-functions since eigenvalues may be multiple. The structure of Riesz projection operators is also studied. The results of the paper can be used in spectral problems for equations with partial derivatives of the 1-st order containing involution.

Key words: Dirac system, spectrum, asymptotics, Riesz basis.

References

1. Burlutskaya M. Sh., Kornev V. V., Khromov A. P. Dirac system with non-differentiable potential and periodic boundary conditions. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2012, vol. 52, no. 9, pp. 1621–1632 (in Russian).
2. Marchenko V. A. *Operatory Shturma–Liuvillia i ikh prilozheniia* [Sturm–Liouville operators and their applications]. Kiev, Naukova Dumka, 1977, 340 p. (in Russian).
3. Djakov P., Mityagin B. Bari–Markus property for Riesz projections of ID periodic Dirac operators. *Math. Nachr.*, 2010, vol. 283, no. 3, pp. 443–462.
4. Djakov P., Mityagin B. S. Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators. *Russian Math. Surveys*, 2006, vol. 61, no. 4, pp. 663–766. DOI: 10.4213/rm2121.
5. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Fourier method in an initial-boundary value problem for a first-order partial differential equation with involution. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 12, pp. 2233–2246.

УДК 519.622

АЛГОРИТМ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА, ШАГА И ПЕРЕМЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ

Е. А. Новиков

Доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник отдела вычислительной математики, Институт вычислительного моделирования СО РАН, novikov@icm.krasn.ru

Построено неравенство для контроля устойчивости схемы Ческино второго порядка точности. На основе стадий этого метода построена численная формула первого порядка с расширенным до 32 интервалом устойчивости. На основе L-устойчивой (2,1)-схемы и численной формулы Ческино разработан алгоритм переменной структуры, в котором эффективная численная формула выбирается на каждом шаге по критерию устойчивости. Алгоритм предназначен для решения как жестких, так и не жестких задач. Приведены результаты расчетов, подтверждающие эффективность построенного алгоритма.

Ключевые слова: жесткая задача, схема Ческино, (2,1)-метод, контроль точности и устойчивости.