В силу неравенства Коши $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k b_k| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k^2}$ получаем:

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\left|\frac{k}{n}-x\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right)^{1/2}.$$

Применяя второй раз неравенство Коши, получим:

$$|B_n(x)-f(x)| \leqslant M\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right)^{1/4} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right)^{1/4} =$$

$$= M\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right)^{1/4} = M\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{1/4} \leqslant M\left(\frac{1}{4n}\right)^{1/4} = \frac{M}{\sqrt{2}n^{1/4}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Для функции Больцано при всех $x \in [0;1]$ имеет место неравенство*

$$|B_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{6}{\sqrt{2}n^{1/4}}.$$

Библиографический список

1. *Бржечка Б. Ф.* О функции Больцано // УМН. 1949. Т. 4, № 2. С. 15–20. [*Brzhechka B. F.* About the function of Bolzano // Russ. Math. Surv. 1949. Vol. 4, № 2. P. 329–346.]

2. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций, книга 1. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 231 с. [*Privalov A. A.* Theory interpolate functions, book 1. Saratov : Izd-vo Saratov. un-ta, 1990. 231 p.]

УДК 517.984

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМ ЯДРОМ

В. В. Корнев

Саратовский государственный университет
E-mail: KornevVV@info.sgu.ru

Для интегральных операторов со скачком ядра на диагонали найдены необходимые и достаточные условия их обратимости. Установлено условие, обеспечивающее равносходимость рядов Фурье по собственным функциям этих операторов и тригонометрических рядов Фурье.

Ключевые слова: интегральный оператор, собственные функции, ряды Фурье, равносходимость.

On Convergence of Expansions in Eigen Functions of Integral Operators with Discontinuous Kernel

V. V. Kornev

For integral operators with a jump of its kernel on the diagonal it will be found necessary and sufficient conditions of invertibility. Conditions providing equiconvergence of expansions in eigen functions of these operators and trigonometric Fourier series are established.

Key words: integral operator, eigen functions, Fourier series, equiconvergence.

Рассмотрим в пространстве $L[0,1]$ интегральный оператор:

$$Af = \int\limits_0^{1-x} A_1(1-x,t)f(t)\,dt + \int\limits_{1-x}^{1} A_2(1-x,t)f(t)\,dt, \quad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

где функции $A_1(x,t)$ и $A_2(x,t)$ непрерывны вместе с частными производными до 2-го порядка включительно в треугольниках $x \ge t$ и $x \le t$ соответственно, причем выполняется тождество

$$A_1(x,x) - A_2(x,x) \equiv 1.$$

© Корнев В. В., 2013

Проведем спектральное исследование таких операторов с использованием изложенных в [1] результатов по интегральным операторам с ядрами, разрывными на ломаных. Вид (1) оператора A позволяет получить более конкретные результаты.

Введем операторы

$$Bf = \int\limits_0^x A_1(x,t)f(t)\,dt + \int\limits_x^1 A_2(x,t)f(t)\,dt, \qquad B_x f = \int\limits_0^x \frac{\partial A_1(x,t)}{\partial x} f(t)\,dt + \int\limits_x^1 \frac{\partial A_2(x,t)}{\partial x} f(t)\,dt.$$

Отметим, что

$$\frac{d}{dx}Bf = f(x) + B_x f. \tag{2}$$

Теорема 1. *Для обратимости оператора A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1) число -1 не является собственным значением оператора B_x;

2) число -1 является собственным значением оператора B_x, его геометрическая кратность равна 1 и $B\varphi \neq 0$, где $\varphi(x)$ — соответствующая собственная функция оператора B_x.

Доказательство. Оператор A можно представить в виде произведения $A = SB$, где $Sf = f(1-x)$. Очевидно, A обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор B, и

$$A^{-1} = B^{-1}S. \tag{3}$$

Пусть B^{-1} существует. Докажем, что выполняется либо условие 1), либо условие 2). Предположим противное: число -1 является собственным значением оператора B_x и существуют линейно независимые собственные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, соответствующие этому собственному значению. Из (2) следует, что $B\varphi_i = c_i$, где c_i — ненулевые константы, $i = 1, 2$. Но тогда $B(c_2\varphi_1(x) - c_1\varphi_2(x)) \equiv 0$, что противоречит обратимости оператора B.

Докажем достаточность условия 1) или 2). Пусть выполняется условие 1). Предположим, что $Bf = 0$. Тогда из (2) следует, что $f(x) = 0$. Следовательно, B^{-1} существует. Пусть теперь выполняется условие 2). Предположим, что $Bf = 0$ и $f \neq 0$. На основании (2) заключаем, что f — собственная функция B_x, соответствующая собственному значению -1. Но тогда $f(x) = c\varphi(x)$, $c \neq 0$ и $Bf = cB\varphi \neq 0$, а это противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть операторы A и A^* обратимы. Тогда при выполнении условия*

$$\overline{A_1(0,t)} \pm i\overline{A_2(1,t)} \notin R_{A^*} \tag{4}$$

(R_{A^*} — область значений интегрального оператора A^*, ядро которого сопряжено с ядром оператора A) для любой функции $f \in L[0,1]$ и любого $\delta \in (0, 1/2)$ справедливо соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\delta \le x \le 1-\delta} |S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)| = 0, \tag{5}$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A, соответствующим характеристическим значениям, модуль которых меньше r; $\sigma_r(f,x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе $\{e^{i2k\pi x}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для тех k, для которых $|2k\pi| < r$.

Доказательство. В основе доказательства лежит формула

$$S_r(f,x) - \sigma_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda f - R_{0\lambda} f)\,d\lambda,$$

где $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$; E — единичная матрица; $R_{0\lambda}$ — решение краевой задачи $y'(x) - \lambda y(x) = f(x)$, $y(0) = y(1)$; окружность $|\lambda| = r$ не содержит чисел $i2\pi k$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ и собственных значений оператора A^{-1}.

Для доказательства формулы (5) необходимо исследовать асимптотику резольвенты R_λ при $\lambda \to \infty$ (для $R_{0\lambda}f$ вывод точных формул тривиален). Обозначим $y(x) = (E - \lambda A)^{-1}Af$. Тогда $y(x) - \lambda Ay = Af$, откуда получаем

$$A^{-1}y - \lambda y(x) = f(x). \tag{6}$$

Из работы [2] следует, что оператор B^{-1} задан на множестве абсолютно непрерывных функций $y(x)$, определяемом условием

$$by(0) + ay(1) + \int\limits_0^1 \psi(1-t)y(t)\,dt = 0, \tag{7}$$

и действует по формуле

$$B^{-1}y = y'(x) + p(x)y(x) + p_1(x)y(0) + p_0(x)y(1) + \int\limits_0^x N_1(x,t)y(t)\,dt + \int\limits_x^1 N_2(x,t)y(t)\,dt, \tag{8}$$

где a, b — числа, $\psi(x)$, $p(x)$, $p_0(x)$, $p_1(x)$ — непрерывные функции;

$$|a| + |b| + \max_{0\le t\le 1}|\psi(t)| \ne 0; \tag{9}$$

функции $N_1(x,t)$ и $N(x,t)$ непрерывны вместе с частными производными $\dfrac{\partial N_i}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial N_i}{\partial t}$ $(i = 1,2)$ в треугольниках $x \ge t$ и $x \le t$ соответственно.

На основании (3) и (8) формулу (6) можно записать в виде

$$\begin{gathered} -y'(1-x) + p(x)y(1-x) + p_0(x)y(0) + p_1(x)y(1) + \\ + \int\limits_0^x N_1(x,t)y(1-t)\,dt + \int\limits_x^1 N_2(x,t)y(1-t)\,dt - \lambda y(x) = f(x). \end{gathered} \tag{10}$$

Заменим в (10) x на $1-x$, получим

$$\begin{gathered} -y'(x) + p(1-x)y(x) + p_0(1-x)y(1) + p_1(1-x)y(0) + \\ + \int\limits_0^{1-x} N_1(1-x,t)y(1-t)\,dt + \int\limits_{1-x}^1 N_2(1-x,t)y(1-t)\,dt - \lambda y(1-x) = f(1-x). \end{gathered} \tag{11}$$

Обозначим $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y(1-x)$, $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$. В этих обозначениях формулы (10), (11) можно записать в векторной форме:

$$Y'(x) + P(x)Y(x) + P_0Y(0) + P_1(x)Y(1) + NY = \lambda DY(x) + F(x), \tag{12}$$

где матрицы $P(x)$, $P_0(x)$, $P_1(x)$, оператор N и вектор $F(x)$ определяются очевидным образом, $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Для диагонализации матрицы D выполним замену $Y(x) = \Gamma Z(X)$, $\Gamma = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Система (12) перейдет в систему

$$\begin{gathered} Z'(x) + \Gamma^{-1}P(x)\Gamma Z(x) + \Gamma^{-1}P_0(x)\Gamma Z(0) + \Gamma^{-1}P_1(x)\Gamma Z(1) + \Gamma^{-1}N(\Gamma Z) = \\ = \lambda \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z(x) + \Gamma^{-1}F(x). \end{gathered} \tag{13}$$

Краевое условие (7) относительно $Z(x)$ примет вид

$$M_0Z(0) + M_1Z(1) + M(\Gamma Z) = 0, \tag{14}$$

где $MY = \Big(\int\limits_0^1 \psi(t)y_1(t)\,dt, \int\limits_0^1 \psi(1-t)y_2(t)\,dt\Big)^T$, $M_0 = \begin{pmatrix} ia & -ia \\ b & b \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} ib & -ib \\ a & a \end{pmatrix}$.

Система (13)–(14) вполне аналогична системе (68)–(69) из [1] и исследование асимптотики ее решений проводится тем же методом. Основным моментом в доказательстве равносходимости (5) является условие регулярности (79) из [1]. Используя обозначение работы [1], выведем это условие в нашем случае.

После замены $Z(x) = H(x,\lambda)V(x)$, где $H(x,\lambda) = H_0(x) - \lambda^{-1}H_1(x)$, $H_0(x) = \mathrm{diag}\,(h_1(x), h_2(x))$, $h_1(x)$, $h_2(x)$ — положительные функции, краевые условия (14) примут вид

$$M_{0\lambda}V(0) + M_{1\lambda}V(1) + M(\Gamma H(x,\lambda)V(x)) = 0,$$

где $M_{0\lambda} = M_0H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1H(1,\lambda)$. Как следует из леммы 17 [1], асимптотика характеристического определителя $\det\Delta(\lambda)$ совпадает с асимптотикой определителя:

$$\det\Delta_0(\lambda) = \det(M_{0\lambda}V(0,\lambda) + M_{1\lambda}V(1,\lambda)),$$

где $V(x,\lambda) = \mathrm{diag}\,(e^{i\lambda x}, e^{-i\lambda x})$. В свою очередь, асимптотика этого определителя совпадает с асимптотикой определителя

$$\det(M_0H_0(0)V(0,\lambda) + M_1H_0(1)V(1,\lambda)) = i\big[h_1(1)h_2(0)(a^2+b^2)e^{i\lambda} +$$
$$+ 2ab(h_1(0)h_2(0) + h_1(1)h_2(1)) + h_1(0)h_2(1)(a^2+b^2)e^{-i\lambda}\big].$$

Коэффициенты при $e^{i\lambda}$ и $e^{-i\lambda}$ играют роль чисел θ_0 и θ_5 из условия (79) [1]: $\theta_0\theta_5 \neq 0$. Следовательно, в нашем случае условием регулярности будет условие

$$a^2 + b^2 \neq 0. \tag{15}$$

В остальном доказательство формулы (5) следует доказательству теоремы 12 [1] и следствия из нее.

Осталось показать, что условия теоремы обеспечивают выполнение условия (15). Обозначим $y(x) = Af$. Тогда в силу (7) выполняется соотношение

$$ay(0) + by(1) + \int_0^1 \psi(t)y(t)\,dt = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\int_0^1 (aA_1(1,t) + bA_2(0,t) + \overline{A^*\overline{\psi}})f(t)\,dt = 0.$$

Отсюда в силу произвольности $f(t)$ получаем

$$aA_1(1,t) + bA_2(0,t) + \overline{A^*\overline{\psi}} \equiv 0. \tag{16}$$

Из (16) следует, что a и b не могут одновременно обращаться в ноль. В самом деле, если $a = b = 0$, то $A^*\overline{\psi} = 0$, а этого не может быть, так как в силу (9) $\psi(t) \not\equiv 0$ и A^* обратим.

Предположим теперь, что $a^2 + b^2 = 0$. На основании предыдущего рассуждения $ab \neq 0$. Как видно из (7), не уменьшая общности можно считать, что $a = 1$. Но тогда $b = \pm i$ и из (16) получаем, что в этом случае $\overline{A_1(1,t)} \mp i\overline{A_2(0,t)} \in R_{A^*}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Условие обратимости A^* является необходимым для того, чтобы равносходимость имела место, так как оно равносильно условию, что R_A всюду плотно в $L[0,1]$. Оператор A^* относится к классу (1) и его можно исследовать с помощью теоремы 1. Что касается условия (4), его проверка сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В частном случае, когда $c_1A_1(1,t) + c_2A_2(0,t) \equiv 0$, проверка регулярности тривиальна, так как в этом случае $a = c_1$, $b = c_2$, $\psi(t) \equiv 0$ и A^* обратим.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270).

Библиографический список

1. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142. [*Khromov A. P.* Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines // Sb. Math. 2006. Vol. 197, iss. 11. P. 1669–1696.]

2. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегродифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405. [*Hromov A. P.* Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators // Math. USSR Sb. 1982. Vol. 42, iss. 3. P. 331–355.]