УДК 517.984

О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ РИССА РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА ЛОМАНЫХ ЛИНИЯХ

О. А. Королева

Саратовский государственный университет
E-mail: korolevaoart@yandex.ru.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости обобщенных средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям (с. п. ф.) интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат.

Ключевые слова: резольвента, характеристические числа, собственные и присоединенные функции, обобщенные средние Рисса.

On Convergence of Riesz Means of the Expansions in Eigen and Associated Functions of Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines

O. A. Koroleva

This paper deals with necessary and sufficient conditions of uniform convergence of generalized Riesz means for expansions in eigen and associated functions of an integral operator whose kernel suffers jumps at the sides of the square inscribed in the unit square.

Key words: resolvent, characteristic number, eigenfunctions and associated functions, generalized Riesz means.

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A(x,t)\, f(t)\, dt. \tag{1}$$

Обозначим: $A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\ 0 \le x \le 1/2\}$, $A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1/2\}$, $A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x,\ 1/2 \le x \le 1\}$, $A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1,\ 1/2 \le x \le 1\}$, $A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le t \le 1/2 + x,\ 0 \le x \le 1/2\}$ и $\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x,\ 1/2 \le x \le 1\}$.

Предположим, что $A_i(x,t)$, $i = 1, \ldots, 5$ непрерывно дифференцируемые в своих областях, причем $A_5(x, 1/2 - x + 0) - A_1(x, 1/2 - x - 0) = a$, $A_5(x, 1/2 + x - 0) - A_2(x, 1/2 + x + 0) = b$, $A_5(x, -1/2 + x + 0) - A_3(x, -1/2 + x - 0) = c$, $A_5(x, 3/2 - x - 0) - A_4(x, 3/2 - x + 0) = d$, где a, b, c, d — постоянные.

Частный случай оператора (1) впервые рассматривался в [1].

Рассмотрим следующий оператор:

$$z = Bg = \int_0^{1/2} B(x,t) g(t)\, dt, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{2}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & A(x, 1/2 - t) & A(x, 1/2 + t) & 0 \\ A(1/2 - x, t) & 0 & 0 & A(1/2 - x, 1 - t) \\ A(1/2 + x, t) & 0 & 0 & A(1/2 + x, 1 - t) \\ 0 & A(1 - x, 1/2 - t) & A(1 - x, 1/2 + t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Если $y = Af$, то $z = Bg$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1/2 - x)$, $z_3(x) = y(1/2 + x)$, $z_4(x) = y(1 - x)$, $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f(1/2 - x)$, $g_3(x) = f(1/2 + x)$, $g_4(x) = f(1 - x)$. Обратно: если $z = Bg$ и $g_1(x) = g_2(1/2 - x)$, $g_3(x) = g_4(1/2 - x)$, то $z_1(x) = z_2(1/2 - x)$, $z_3(x) = z_4(1/2 - x)$ и $y = Af$, где $f(x) = g_1(x)$, при $x \in [0, 1/2]$; $f(x) = g_3(-1/2 + x)$, при $x \in [1/2, 1]$ и $y(x) = z_1(x)$, при $x \in [0, 1/2]$; $y(x) = z_3(-1/2 + x)$, при $x \in [1/2, 1]$.*

Доказательство. Представлено в статье [2].

Замечание. Представление типа (2) не единственно. Наше же представление хорошо тем, что компоненты матрицы $B(x,t)$ терпят разрывы лишь на линии $t = x$.

В статье [2] также доказаны необходимые и достаточные условия существования оператора B^{-1}. В дальнейшем будем предполагать, что B^{-1} существует.

Теорема 2. *Для оператора B^{-1} справедливо представление*

$$B^{-1}z(x) = Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(1/2) + a_3(x)z(x) + \int_0^{1/2} a(x,t)z(t)\,dt, \tag{3}$$

$$Sz(0) + Tz(1/2) + \int_0^{1/2} a(t)z(t)\,dt = 0. \tag{4}$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{1,3}$, $a_3'(x)$, $a(x)$ — непрерывные матрицы–функции, каждая компонента матрицы a(x,t) имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x,t)$, $S = E + \int_0^{1/2} B(0,t)a_1(t)\,dt$, $T = \int_0^{1/2} B(0,t)a_2(t)\,dt$ — постоянные матрицы 4×4. Доказательство повторяет доказательство теоремы 10 в [1].

1. Получим интегродифференциальную систему для резольвенты $R_\lambda = (E-\lambda A)^{-1}A$ оператора A. Пусть $z = (E-\lambda B)^{-1}Bg$. Тогда $z - \lambda Bz = Bg$. Отсюда по теореме 2 из (3), (4) получаем:

$$Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(1/2) + a_3(x)z(x) + \tilde{N}z - \lambda z(x) = g(x), \tag{5}$$

$$Sz(0) + Tz(1/2) + \int_0^{1/2} a(t)z(t)\,dt = 0, \tag{6}$$

где $\tilde{N}z = \int_0^{1/2} a(x,t)z(t)\,dt$.

Теорема 3. *Если R_λ существует, то $R_\lambda f = v(x)$, где*

$$v(x) = z_1(x) \quad \textit{при} \quad x \in [0,1/2], \qquad v(x) = z_3(x-1/2), \quad \textit{при} \quad x \in [1/2,1], \tag{7}$$

z_1, z_3 — первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе (5), (6). *Обратно, если λ таково, что однородная краевая задача для* (5), (6) *имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле* (7).

Доказательство повторяет лемму 1 из [3].

Рассмотрим систему (5), (6). Минимальный многочлен матрицы $Q = P^{-1}$ совпадает с характеристическим многочленом и равен $\lambda^4 - \lambda^2(d^2 - 2bc + a^2) + (bc - ad)^2$. Значит, выполняется

Лемма 1. *При условии $d \neq a, (d+a)^2 - 4bc \neq 0$ матрица Q подобна диагональной $D = \operatorname{diag}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$, причём $\omega_3 = -\omega_2, \omega_4 = -\omega_1, \omega_1 \neq \omega_2$. Пусть матрица Γ такая, что $\Gamma^{-1}P^{-1}\Gamma = D$. Выполним в* (5), (6) *замену $z = \Gamma\tilde{z}$, получим:*

$$\tilde{z}'(x) + P_1(x)\tilde{z}(0) + P_2(x)\tilde{z}\,(1/2) + P_3(x)\tilde{z}(x) + N\tilde{z}(x) - \lambda D\tilde{z}(x) = m(x), \tag{8}$$

$$M_0\Gamma\tilde{z}(0) + M_1\Gamma\tilde{z}(1/2) + \Gamma\int_0^{1/2} \Omega(t)\tilde{z}(t)\,dt = 0, \tag{9}$$

где $P_i(x) = D\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma$, $N = D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma$, $m(x) = D\Gamma^{-1}g(x)$, $\Omega(t) = a(t)\Gamma$, $M_0 = S\Gamma$, $M_1 = T\Gamma$.

В дальнейшем при изучении системы (8), (9) затруднения вызывает матрица $P_3(x)$. Поэтому дадим её дальнейшее преобразование.

Лемма 2. *Существует матрица — функция $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональная, такая, что преобразование $\tilde{z} = H(x,\lambda)v$ приводит систему* (8), (9) *к виду*

$$v'(x) + P_1(x,\lambda)v(0) + P_2(x,\lambda)v(1/2) + P_3(x,\lambda)v(x) + N_\lambda v(x) - \lambda Dv(x) = m(x,\lambda),$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1/2) + \int_0^{1/2} \Omega(t,\lambda)v(t)dt,$$

где $P_1(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_1(x)H(0,\lambda)$, $P_2(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_2(x)H(1/2,\lambda)$, $P_3(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda) \times \times [H_2'(x) + P_3(x)H_2(x)]$, $N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda)$, $M_{0\lambda} = M_0H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1H(1/2,\lambda)$, $\Omega(t,\lambda) = \Omega(t)H(t,\lambda)$, $m(x,t) = H^{-1}(x,\lambda)m(x)$.

Доказательство такое же, как и лемма 16 в [1].

Рассмотрим систему

$$u'(x) = \lambda Du(x) + m(x), \tag{10}$$

$$U_0(w) = M_0H_0(0)u(0) + M_1H_0(1/2)u\,(1/2) + \int\limits_0^{1/2} \Omega(t)H_0(t)u(t)\,dt = 0, \tag{11}$$

Будем считать, что $\operatorname{Re}\lambda\omega_1 \ge \operatorname{Re}\lambda\omega_2 > 0$. Для решения $u(x,\lambda) = R_{0\lambda}m$ системы (10), (11) имеют место формула (25) и оценки (28) в [2].

2. Приступим к получению основного результата.

Пусть $g(\lambda,r)$ удовлетворяет следующим требованиям:

1) $g(\lambda,r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в $|\lambda| < r$ при любых $r > 0$;

2) существует $C > 0$ такая, что $|g\,(\lambda,r)| \le C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$;

3) $g(\lambda,r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ;

4) существует $\beta > 0$ такое, что $g(\lambda,r) = \begin{cases} O\left((\pi/2-\varphi)^\beta\right), & 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ O\left((\varphi - \frac{3\pi}{2})^\beta\right), & \frac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$, где $\varphi = arg\lambda\omega_2$.

В качестве обобщённых средних Рисса будем брать интегралы

$$J_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f\,d\lambda,$$

где $R_\lambda f = (E-\lambda A)^{-1}Af$ — резольвента Фредгольма.

Теорема 4 (формула остаточного члена). *Пусть* $f(x)$ *— непрерывная функция на* $[0,1/2]$, $f_0(x)$ *— непрерывно-дифференцируемая функция на* $[0,1/2]$, *принадлежащая области значения оператора. Тогда, если на окружности* $|\lambda| = r$ *нет собственных значений оператора* A, *то*

$$f(x) - J_r(f,x) = f(x) - f_0(x) + (1-g(o,r))f_0(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{R_\lambda\varphi_0}{\lambda}\,d\lambda - J_r(f-f_0,x),$$

где $f_0 = A\varphi_0$

Доказательство. По тождеству Гильберта имеем:

$$\frac{f_0}{\lambda} + R_\lambda f_0 = \frac{1}{\lambda}R_\lambda\varphi_0.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)\frac{f_0(x)}{\lambda}\,d\lambda + \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda,r)R_\lambda f_0\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda}g(\lambda,r)R_\lambda\varphi_0\,d\lambda. \tag{12}$$

Первый интеграл равен $f_0(x)g(0,\lambda)$. Тогда (12) примет вид

$$f_0(x)g(0,\lambda) + J_r(f_0,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda}g(\lambda,r)R_\lambda\varphi_0\,d\lambda.$$

Значит для произвольного $f(x) \in C[0,1]$:

$$f(x) - J_r(f,x) = f(x) - J_r(f,x) - f_0(x) + f_0(x) - J_r(f_0,x) + J_r(f_0,x) =$$
$$= [f(x) - f_0(x)] - J_r(f-f_0,x) + f_0(x)[1-g(0,r)] + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda}g(\lambda,r)R_\lambda\varphi_0\,d\lambda.$$

Теорема доказана.

Лемма 3. *Пусть* $f = (f_1(x), \ldots, f_4(x))^T$, $f_i(x) \in C[0, 1/2]$. *При достаточно больших* λ *справедлива оценка:*

$$I = \int\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \, \|R_{0\lambda} f\|_{C_{[0,1/2]}} \, |d\lambda| = \|f\|_{C_{[0,1/2]}} O(1)$$

Доказательство Воспользуемся оценками (28) из [2]:

$$I = \|f\|_{C_{[0,1/2]}} \left[O\left(\int\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \left(\frac{1 - e^{-|\operatorname{Re}\lambda\omega_1|}}{|\operatorname{Re}\lambda\omega_1|} \right) |d\lambda| + \int\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \left(\frac{1 - e^{-|\operatorname{Re}\lambda\omega_2|}}{|\operatorname{Re}\lambda\omega_2|} \right) |d\lambda| \right) + \right.$$

$$\left. + O\left(\int\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \left(\frac{1 - e^{-|\operatorname{Re}\lambda\omega_3|}}{|\operatorname{Re}\lambda\omega_3|} \right) |d\lambda| + \int\limits_{|\lambda|=r} |g(\lambda, r)| \left(\frac{1 - e^{-|\operatorname{Re}\lambda\omega_4|}}{|\operatorname{Re}\lambda\omega_4|} \right) |d\lambda| \right) \right] =$$

$$= \|f\|_{C_{[0,1/2]}} O\left(I_1 + I_2 + I_3 + I_4\right).$$

Рассмотрим I_2. Сделаем замену $\lambda\omega_2 = re^{i\varphi}$. Тогда $d\lambda = \dfrac{1}{\omega_2} rie^{i\varphi} d\varphi$ $(\operatorname{Re}\lambda\omega_2 \geq 0)$ $|d\lambda| = \dfrac{1}{|\omega_2|} r\, d\varphi$, т. е.

$$I_2 = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |g(\lambda, r)| \left(\frac{1 - e^{-r\cos\varphi}}{|r\cos\varphi|} \right) \frac{r}{|\omega_2|} \, |d\varphi| = \frac{1}{\omega_2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |g(\lambda, r)| \left(\frac{1 - e^{-r\cos\varphi}}{\cos\varphi} \right) d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{1}{\omega_2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |g(\lambda, r)| \, \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi.$$

Разбив интеграл на два интеграла, получаем нужную оценку.

Аналогично оцениваются и остальные интегралы. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть вектор-функция* $f(x) \in C[0, 1/2]$ *удовлетворяет* (6). *Тогда для любого* $\epsilon > 0$ *существует вектор-функция* $f_0(x) \in C^1[0, 1/2]$, *удовлетворяющая* (6) *такая, что* $\|f(x) - f_0(x)\|_\infty < \epsilon$.

Доказательство. Перейдём от $f(x)$ и $f_0(x)$ к скалярным функциям $F(x)$ и $F_0(x)$ по формулам

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [0, 1/2], \\ f_2(1/2 - x), & x \in [1/2, 1], \\ f_3(3/2 - x), & x \in [1, 3/2], \\ f_4(2 - x), & x \in [3/2, 2], \end{cases}$$

аналогично определим $F_0(x)$. Это скалярные функции, F — непрерывная, а F_0 — непрерывно дифференцируема, кроме, быть может, точек с абсциссами $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3/2$, $x_4 = 2$. Утверждение леммы становится следствием соответствующего результата для скалярного случая. Лемма доказана.

3. Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) + J_r(f, x)\|_{C[0,1]} = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда а) $f(x) \in C[0, 1]$, *б)* $(f(x), f(1/2+x), f(1/2-x), f(1-x))^T$ *удовлетворяет* (6).

Утверждение теоремы получается из теоремы 3 и лемм 3, 4, так же, как и в [4].

Теорема 6. *Соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) + J_r(f, x)\|_{C[0,1]} = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) \in \overline{\Delta}_A$, *где* $\overline{\Delta}_A$ *— замыкание области значений оператора* A.

Доказательство. Необходимость очевидна, так как $J_r(f,x)$ состоит из с.п.ф. оператора A, которые принадлежат области значений оператора A. Достаточность следует из теоремы 4 и леммы 4.

Следствие. $\overline{\Delta}_A$ *состоит из функций, удовлетворяющих условиям а) и б) из теоремы* 5.

Библиографический список

1. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142. [*Khromov A. P.* Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines // Sb. Math.. 2006. Vol. 197, № 11. P. 1669–1696.]

2. *Королева О.А., Хромов А.П.* Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 33–50. [*Koroleva O. A., Khromov A. P.* Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines (in Russian) // Izv. Saratov. Univer. New Series. 2012. Vol. 12. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics, iss. 1. P. 33–50.]

3. *Корнев В. В.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50. [*Kornev V. V.* Equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals // Sb. Math. 2001. Vol. 192, № 10. P. 1451—1469.]

4. *Гуревич А. П., Хромов А. П.* Суммируемость по Риссу спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 6. С. 809–814. [*Gurevich A. P., Khromov A. P.* Riesz summability of spectral expansions for a class of integral operators // Differ. Equ. 2001. Vol. 37, № 6. P. 849–855.]

УДК 517.54

ФУНКЦИЯ КЁНИГСА И ДРОБНОЕ ИТЕРИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ

О. С. Кудрявцева

Волжский гуманитарный институт (филиал)
Волгоградского государственного университета
E-mail: Kudryavceva@vgi.volsu.ru

Исследуется проблема дробного итерирования аналитических в единичном круге функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами. Предполагается существование внутренней и граничной неподвижных точек. Решение приводится в терминах функции Кёнигса.

Ключевые слова: дробные итерации, однопараметрическая полугруппа, инфинитезимальная образующая, функция Кёнигса, неподвижные точки.

Koenigs Function and Fractional Iteration of Functions Analytic in the Unit Disk with Real Coefficients and Fixed Points

O. S. Kudryavtseva

The present paper deals with the problem of fractional iteration of functions analytic in the unit disk, with real Taylor's coefficients. It is assumed that there exist interior and boundary fixed points. The solution is given in terms of the Koenigs function.

Key words: fractional iterates, one-parameter semigroup, infinitesimal generator, Koenigs function, fixed points.

Пусть $\mathfrak{P}$ — совокупность всех голоморфных отображений f единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ в себя. Тогда $\mathfrak{P}$ представляет собой топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости, роль единицы в которой играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$. Заметим, что $\mathfrak{P}$ содержит подгруппу $\mathfrak{I}$ дробно-линейных преобразований единичного круга $\mathbb{D}$ на себя.

В силу согласованности областей определения и значений функции $f \in \mathfrak{P}$ определены её натуральные итерации: $f^0(z) \equiv z$, $f^1(z) = f(z)$ и $f^n(z) = f \circ f^{n-1}(z)$ при $n = 2, 3, \ldots$. Если же существует семейство $\{f^t\}_{t \geqslant 0}$ аналитических в $\mathbb{D}$ функций, удовлетворяющих условиям:

1) $f^0(z) \equiv z$, $f^1(z) = f(z)$,

2) $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ при $s, t \geqslant 0$,

3) $f^t(z) \to z$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $t \to 0$,

то говорят, что определены дробные итерации функции f. Отображение $t \mapsto f^t$ является непрерывным гомоморфизмом, действующим из аддитивной полугруппы $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \colon t \geqslant 0\}$ в полугруппу $\mathfrak{P}$, и называется однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}$.