



УДК 534.121.1

## ЯВНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КРАЕВЫХ ВОЛН В ТОНКИХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ

Е. Л. Коссович

Саратовский государственный университет  
E-mail: kossovichel@info.sgu.ru

В работе приведен анализ распространения изгибных краевых волн в тонких пластинах. Решены задачи о колебании полубесконечных пластин, сделанных из ортотропных материалов. Анализ особенностей распространения краевых изгибных волн проведен с использованием явных параболических эллиптических моделей, выделяющих вклад таких волн в общую деформацию пластины.

**Ключевые слова:** ортотропия, прогиб, перерезывающая сила, изгибающий момент, явная параболическая эллиптическая модель.

### ВВЕДЕНИЕ

Известно, что локализованные краевые изгибные волны возникают не только в тонких изотропных пластинах [1], но и в случае анизотропии материала [2–4]. Поведение таких волн оказывается менее тривиальным по сравнению с их изотропным аналогом. Выделение вклада таких волн в общее решение задачи зачастую является наиболее оптимальным способом исследования основных закономерностей их возникновения и распространения. Однако одной из наибольших сложностей является тот факт, что краевые изгибные волны не входят явно в постановку задач о колебаниях пластин. Таким образом, для выделения вклада локализованных краевых волн необходимо проводить сложный асимптотический анализ получаемых общих решений задачи и на этой основе строить новые уравнения, которые будут нацелены исключительно на описание исследуемого явления. Построение таких явных моделей, выделяющих вклад краевых изгибных волн в общий прогиб тонких ортотропных пластин, и является целью данной работы.

### 1. ЯВНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КРАЕВЫХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим колебания свободного торца полубесконечной ортотропной пластины, конфигурация которой представлена на рис. 1.

Будем считать, что основные направления ортотропных свойств пластины совпадают с осями  $Ox$ ,  $Oy$ . Тогда уравнение, описывающее прогиб  $w$  такой пластины, имеет вид

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

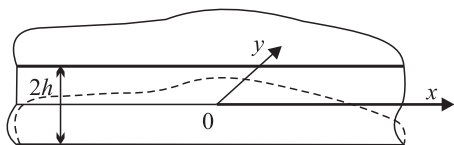
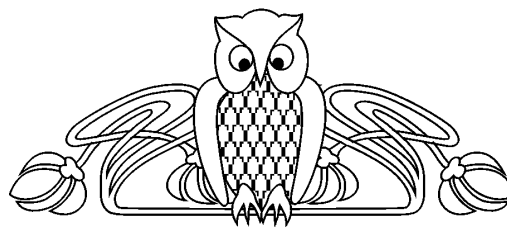


Рис. 1. Полубесконечная пластина, декартова система координат

где  $h$  — полутолщина пластины,  $\rho$  — плотность материала пластины,  $w$  — прогиб срединной плоскости,  $D$  — жесткость материала пластины, а изгибные жесткости  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_1$ , и  $D_{xy}$  должны удовлетворять основополагающим неравенствам

$$D_{xy} > 0, \quad D_x + D_y > 0, \quad D_x D_y - D_1^2 > 0.$$

В данной работе рассматривается три типа краевых условий, включающих свободный торец, а также край, нагруженный внешним изгибающим моментом, перерезывающей силой, или их комбинацией. В последнем случае удобно рассматривать комбинацию внешних усилий как суперпозицию



### Explicit Models for Flexural Edge Waves in Thin Orthotropic Plates

E. L. Kossovich

Analysis of flexural edge wave propagation in thin plates is presented. Several problems of semi-infinite plates vibrations are solved. These plates are assumed to be orthotropic. Some basic features of flexural edge wave propagation are found using the constructed explicit parabolic-elliptic models. They extract the localized wave contribution into the overall solution.

**Key words:** orthotropy, deflection, shear force, bending moment, explicit dual parabolic-elliptic model.



решений, полученных для каждого из простых случаев. Таким образом, выделяем три типа краевых условий.

Для свободного от нагрузок края имеем:

$$D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_1 + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0,$$

для случая приложенного к торцу изгибающего момента краевые условия имеют вид

$$D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -M_0(x, t), \quad D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_1 + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad (2)$$

а для нагружения перерезывающей силой получаем:

$$D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (D_1 + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -N_0,$$

где  $M_0$  — изгибающий момент, приложенный к краю пластины, а  $N_0$  — обобщенная перерезывающая сила Кирхгофа.

Для ортотропной пластины дисперсионное уравнение, решением которого является скорость краевой изгибной волны, получается способом, аналогичным описанному в [1]. Оно имеет вид

$$(\hat{D}_x \hat{D}_y - \hat{D}_1^2) - \hat{D}_y c^4 + 4\hat{D}_{xy} \sqrt{\hat{D}_x \hat{D}_y - \hat{D}_y c^4} = 0, \quad (3)$$

где  $c = \sqrt{-is\lambda_0/p}$ ,  $p$  — параметр преобразования Фурье, примененного к пространственной координате  $y$  в уравнениях исследуемой задачи,  $s$  — частотный параметр из преобразования Лапласа по временной координате,

$$\lambda_0^2 = \frac{2\rho h^5}{T^2 D},$$

где  $T$  — характеристический отрезок времени, введенный для решения задачи в безразмерных переменных, а  $D$  — характерная жесткость материала.

При получении уравнения (3) вводились следующие безразмерные параметры и переменные:

$$x = h\xi, \quad y = h\eta, \quad t = T\tau, \quad w = hW^*, \\ D_x = D\hat{D}_x, \quad D_y = D\hat{D}_y, \quad D_1 = D\hat{D}_1, \quad D_{xy} = D\hat{D}_{xy}.$$

Решения уравнения (3) имеют вид

$$c_k = \left( \hat{D}_x \hat{D}_y - (\sqrt{\hat{D}_1^2 + 4\hat{D}_{xy}^2} - 2\hat{D}_{xy})^2 \right)^{1/4}, \quad c_2 = \left( \hat{D}_x \hat{D}_y - (\sqrt{\hat{D}_1^2 + 4\hat{D}_{xy}^2} + 2\hat{D}_{xy})^2 \right)^{1/4}. \quad (4)$$

Здесь  $c_k$  соответствует коэффициенту скорости изгибной краевой волны для случая ортотропной пластины, а  $c_2$  — второй корень уравнения, не имеющий физического смысла. Из равенств (4) видно, что коэффициент скорости изгибной краевой волны зависит от четырех жесткостей  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_1$  и  $D_{xy}$ .

Исследуем закономерности возникновения и распространения краевой изгибной волны в случае, когда свободный торец пластины нагружен изгибающим моментом. В этом случае решается задача (1), (2). Решение для образа прогиба  $\hat{W}(\eta)$  имеет следующий вид:

$$\hat{W}(\eta) = \frac{\hat{M}_0}{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_1(c) e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}}}{c} \alpha_c \eta} + \Delta_2(c) e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}}}{c} \beta_c \eta}}{\Delta(c)} X(c), \quad (5)$$

где  $\hat{M}_0(p, s)$  — образ безразмерного изгибающего момента, приложенного к краю пластины,

$$\alpha_c = \frac{1}{\sqrt{\hat{D}_y}} \sqrt{\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy} - \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4}}, \quad (6)$$

$$\beta_c = \frac{1}{\sqrt{\hat{D}_y}} \sqrt{\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy} + \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4}}, \quad (7)$$

$$\Delta_1(c) = - \left[ 2\hat{D}_{xy} - \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4} \right] \beta_c, \quad (8)$$

$$\Delta_2(c) = \left[ 2\hat{D}_{xy} + \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4} \right] \alpha_c, \quad (9)$$

$$\Delta(c) = (\beta_c - \alpha_c)(c^4 - c_2^4), \quad (10)$$

$$X(c) = (\hat{D}_x \hat{D}_y - \hat{D}_1^2) - c^4 - 4\hat{D}_{xy} \sqrt{\hat{D}_x \hat{D}_y - c^4}. \quad (11)$$

В случае приложенной к торцу тонкой ортотропной пластины перерезывающей силы решение задачи строится для угла поворота вертикального сечения пластины  $v(x, y, t) = \partial w / \partial y$  относительно оси  $Ox$ .

Общее решение задачи для образа угла поворота  $\hat{V}(\eta)$  записывается в виде

$$\hat{V}(\eta) = \frac{\hat{M}_0}{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}} \frac{c^2}{c^4 - c_k^4} \frac{\Delta_1(c) e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}}}{c} \alpha_c \eta} + \Delta_2(c) e^{-\frac{\sqrt{-is\lambda_0 \sqrt{\hat{D}_y}}}{c} \beta_c \eta}}{\Delta(c)} X(c), \quad (12)$$

где

$$\Delta_3(c) = - \left[ 2\hat{D}_{xy} + \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4} \right] \alpha_c,$$

$$\Delta_4(c) = \left[ 2\hat{D}_{xy} - \sqrt{(\hat{D}_1 + 2\hat{D}_{xy})^2 - \hat{D}_x \hat{D}_y + c^4} \right] \beta_c.$$

Вклад краевой изгибной волны обусловлен вкладом полюсов знаменателя  $c = \pm c_k$  в общее решение задачи о прогибе. Путем асимптотического анализа решений (5)–(12) можно построить следующие модели, явно описывающие основные закономерности распространения краевой волны. Для каждого из случаев краевого нагружения модель будет состоять из двух уравнений: параболического уравнения, описывающего распространение волны вдоль края пластины, и эллиптического, характеризующего ее затухание вглубь.

В случае приложенного к краю пластины изгибающего момента имеем следующее уравнение для прогиба на торце пластины:

$$\frac{c_k^{*4}}{D_y^2} \frac{\partial^4 w_e}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D_y} \frac{\partial^2 w_e}{\partial t^2} = Q_e^{(1)*} \frac{1}{D_y} \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2},$$

где  $w_e(x, t)$  — краевой прогиб, связанный с краевой изгибной волной Коненкова,

$$Q_e^{(1)*} = \frac{\Delta_1(c_k^*) + \Delta_2(c_k^*)}{\Delta(c_k^*)},$$

$$c_k^* = \left( D_x D_y - (\sqrt{D_1^2 + 4D_{xy}^2} - 2D_{xy})^2 \right)^{1/4}, \quad c_2^* = \left( D_x D_y - (\sqrt{D_1^2 + 4D_{xy}^2} + 2D_{xy})^2 \right)^{1/4},$$

$$\Delta_1(c_k^*) = - \left[ 2D_{xy} - \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}} \right] \beta_c(c_k^*),$$

$$\Delta_2(c_k^*) = \left[ 2D_{xy} + \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}} \right] \alpha_c(c_k^*),$$

$$\Delta(c_k^*) = (\beta_c(c_k^*) - \alpha_c(c_k^*))(c_k^{*4} - c_2^{*4}),$$

$$\alpha_c(c_k^*) = \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{D_1 + 2D_{xy} - \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}}},$$

$$\beta_c(c_k^*) = \frac{1}{\sqrt{D_y}} \sqrt{D_1 + 2D_{xy} + \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}}}.$$



Для области вне торца соответствующая модель описывается следующим уравнением:

$$\left(D_x - \frac{c_k^{*4}}{D_y}\right) \frac{\partial^4 w_{in}}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w_{in}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_{in}}{\partial y^4} = 0,$$

где  $w_{in}(x, y)$  — прогиб внутри пластины, вызванный краевой изгибной волной Коненкова, с краевыми условиями на торце

$$w_{in}(x, 0) = w_e(x), \quad D_y \frac{\partial^2 w_{in}}{\partial y^2} = -D_1 \frac{\partial^2 w_e}{\partial x^2}.$$

В случае приложенной к краю перерезывающей силы уравнение, описывающее поведение на торце пластины, имеет вид

$$\frac{c_k^{*4}}{D_y^2} \frac{\partial^4 v_e}{\partial x^4} + \frac{2\rho h}{D_y} \frac{\partial^2 v_e}{\partial t^2} = Q_e^{(2)*} \frac{1}{D_y} \frac{\partial^2 N_0}{\partial x^2},$$

где  $v_e(x, t)$  — угол поворота на торце пластины и  $Q_e^{(2)*} = \frac{\Delta_3(c_k^*) + \Delta_4(c_k^*)}{\Delta(c_k^*)}$ ,

$$\Delta_3(c_k^*) = - \left[ 2D_{xy} + \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}} \right] \alpha_c(c_k^*),$$

$$\Delta_4(c_k^*) = \left[ 2D_{xy} - \sqrt{(D_1 + 2D_{xy})^2 - D_x D_y + c_k^{*4}} \right] \beta_c(c_k^*),$$

Для области вне торца пластины соответствующее уравнение записывается следующим образом:

$$\left(D_x - \frac{c_k^{*4}}{D_y}\right) \frac{\partial^4 v_{in}}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 v_{in}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 v_{in}}{\partial y^4} = 0,$$

где  $v_{in}(x, y)$  — угол поворота, вызванный вкладом краевой изгибной волны внутри пластины. Соответствующие краевые условия на торце имеют вид

$$v_{in}(x, 0) = v_e(x), \quad D_y \frac{\partial^2 v_{in}}{\partial y^2} = -(D_1 + 4D_{xy}) \frac{\partial^2 v_e}{\partial x^2}.$$

Построенная модель, очевидно, раскрывает двойственную параболическую эллиптическую природу краевой изгибной волны, распространяющейся в тонких изотропных пластинах.

Анализ и сравнение решений с выделенным вкладом краевой волны с точными решениями задач о прогибе тонкой ортотропной полубесконечной пластины под воздействием приложенных торцевых нагрузок позволяет утверждать, что краевая волна вносит ключевой вклад в общий прогиб торца пластины. Также при помощи построенных моделей можно определить такие соотношения материальных параметров (например, жесткостей), при которых либо краевая волна будет вносить максимальный вклад в общий прогиб, либо пренебрежимо малый по сравнению с изгибом, вызванным приложенной нагрузкой. Примеры всех указанных случаев можно увидеть на рис. 2 и рис. 3.

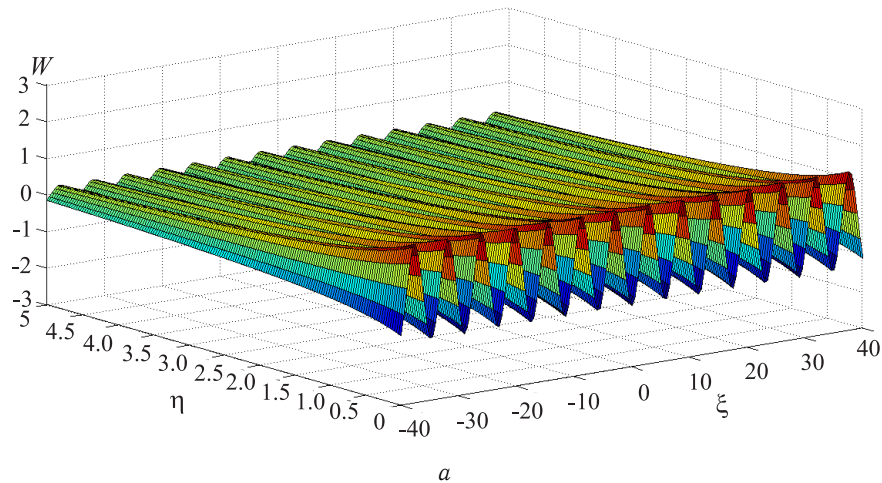


Рис. 2. Трехмерные профили краевой изгибной волны Коненкова в ортотропной пластине (связанная параболическая эллиптическая модель):  $a - \hat{D}_1 = 0.99$

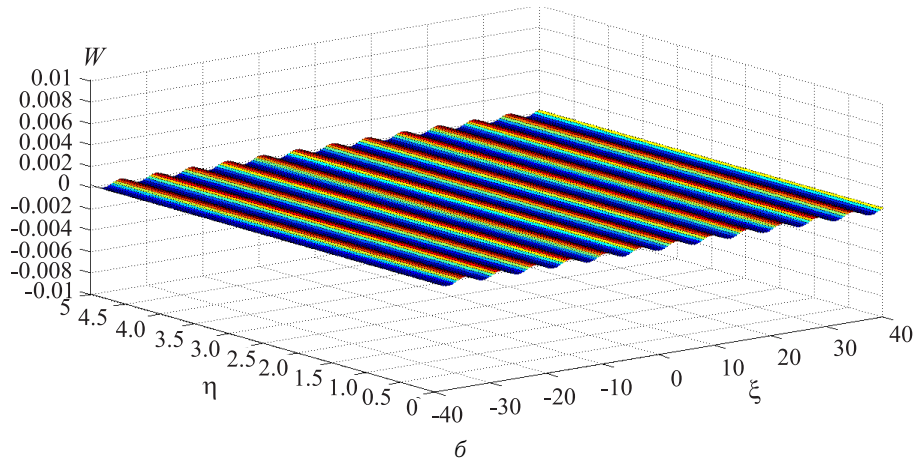


Рис. 2. Окончание. б —  $\hat{D}_{xy} = 5$

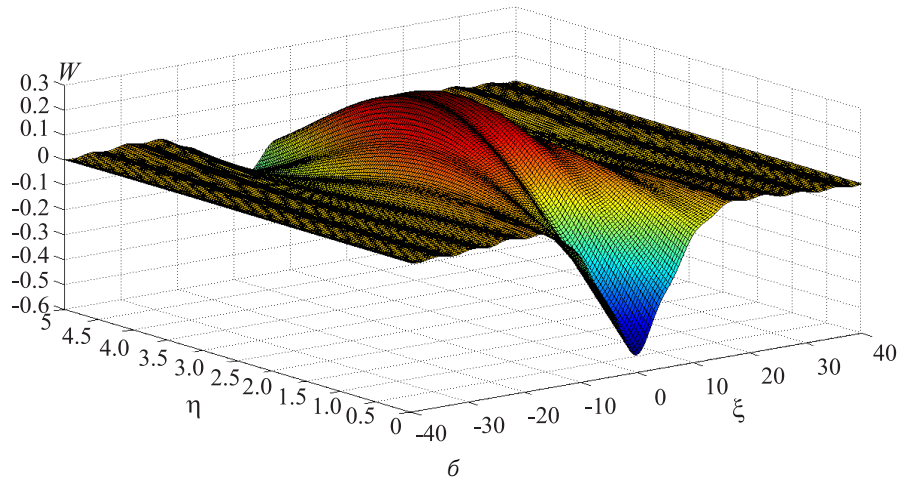
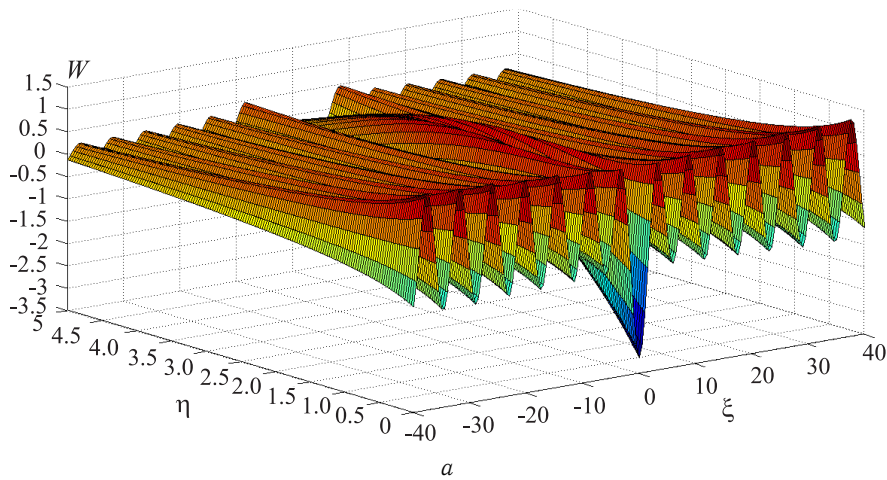


Рис. 3. Трехмерные профили полного прогиба ортотропной пластины (точное решение): а —  $\hat{D}_1 = 0.99$ ; б —  $\hat{D}_{xy} = 5$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены решения задач о прогибе тонких ортотропных полубесконечных пластин. Рассматривались случаи как со свободным краем пластин, так и с приложенными к нему нагрузками. Для всех рассмотренных задач были также построены связанные параболические эллиптические модели, выделяющие вклад локализованных изгибных краевых волн. Решение уравнений таких моделей значительно упрощает процесс определения основных характеристик распространения краевых волн в ортотропных тонких пластинах.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00545-а).*

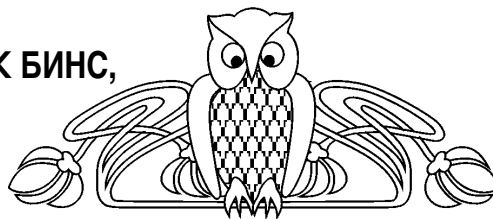


## Библиографический список

1. Коненков Ю. К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6, вып. 1. С. 124–126. [Konenkov Yu. K. A Rayleigh-Type Flexural Wave // Soviet Phys. Acoustics. 1960. Vol. 6, iss. 1. P. 122–123.]
2. Norris A. N. Flexural edge waves // J. of Sound and Vibration. 1994. Vol. 171. P. 571–573.
3. Thompson I., Abrahams I. D., Norris A. N. On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates // J. Acoust. Soc. America. 2002. Vol. 112. P. 1756–1765.
4. Zakharov D. D., Becker W. Rayleigh type bending waves in anisotropic media // J. Sound and Vibration. 2003. Vol. 261. P. 805–818.

УДК 629

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОШИБОК БИНС, ФУНКЦИОНИРУЮЩЕЙ В НОРМАЛЬНОЙ ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ, ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ ВДОЛЬ ЭКВАТОРА С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ НА ПОСТОЯННОЙ ВЫСОТЕ



М. Ю. Логинов<sup>1</sup>, М. Г. Ткаченко<sup>2</sup>, Ю. Н. Челноков<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов  
E-mail: mike.loginov@gmail.com

<sup>2</sup> Автономный университет Мехико  
E-mail: mich@xanum.uam.mx

<sup>3</sup> Саратовский государственный университет  
E-mail: chelnokovYuN@gmail.com

**Analytical Solution of Linear Differential Error Equations of Strapdown Inertial Navigation System, Functioning in the Normal Geographic Reference Frame, for the Case of an Object, Following the Geographical Equator**

**M. Yu. Loginov, M. G. Tkachenko, Yu. N. Chelnokov**

Analytical solution of linear differential error equations of the strapdown inertial navigation system, functioning in the normal geographic reference frame, for the object, following the Earth equator with constant speed and on the constant height, is derived. The solution is represented in the form, which is convenient for the analysis. The roots of the auxiliary equation are derived in the explicit form. Obtained results can be used, for example, for analysis of the accuracy of strapdown inertial navigation system.

В работе получено в явном виде аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений ошибок бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), функционирующей в нормальной географической системе координат, для случая движения с постоянной скоростью и на постоянной высоте вдоль земного экватора. Решение представлено в удобном для исследования виде, описывает влияние неточного задания начальных условий интегрирования на точность нахождения параметров навигации и справедливо в случае отсутствия инструментальных погрешностей гироскопов и акселерометров. Полученное решение может быть использовано при анализе точности работы БИНС.

**Ключевые слова:** инерциальная навигация, бесплатформенные инерциальные навигационные системы, ошибки БИНС, аналитическое решение уравнений ошибок, экватор.

**Key words:** inertial navigation, strapdown inertial navigation systems, strapdown INS errors, analytical solution of error equations, equator.

## ВВЕДЕНИЕ

При построении алгоритмов функционирования БИНС используются так называемые уравнения идеальной работы БИНС, т.е. дифференциальные и функциональные соотношения, связывающие проекции векторов кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости объекта, измеряемые чувствительными элементами БИНС (при условии их идеального функционирования), с навигационными параметрами (координатами местонахождения и проекциями скорости) и параметрами ориентации. Возможны различные варианты таких уравнений [1–4]. В данной работе используются уравнения идеального функционирования БИНС в нормальной географической системе координат (НГСК), в которых в качестве промежуточных кинематических параметров ориентации используются параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) [4–10]. Эти уравнения используются в настоящее время для построения высокоточных алгоритмов функционирования современных отечественных БИНС, построенных на волоконно-оптических или лазерных гироскопах и кварцевых акселерометрах.

В работе [11] для этих уравнений выведены полные и линеаризованные дифференциальные урав-